



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

Control Robusto en Digestores Anaerobios vía H_∞

Tesis que presenta

René Alejandro Flores Estrella

Para obtener el grado de

Doctor en Ciencias Aplicadas

En la opción de

Control y Sistema Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores

San Luis Potosí, S.L.P., Diciembre de 2013



IPICYT

Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Control Robusto en Digestories Anaerobios vía H_{∞}** presentada para obtener el Grado de Doctor en Ciencias Aplicadas en la opción de control y sistemas dinámicos fue elaborada por **René Alejandro Flores Estrella** y aprobada el **09 de Diciembre de 2013** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores
(Director de la tesis)

Dr. Ricardo Aguilar López
(Sinodal)

Dr. Enrique Jaime Herrera López
(Sinodal)

Dr. Eric Campos Cantón
(Sinodal)



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (No. 160117) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 017 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Doctorado en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 9 días del mes de diciembre del año 2013, se reunió a las 10:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

| | | |
|---|------------------------|------------------|
| Dr. Ricardo Aguilar López | Presidente | CINVESTAV |
| Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores | Secretario | IPICYT |
| Dr. Enrique Jaime Herrera López | Sinodal externo | CIATEJ |
| Dr. Eric Campos Cantón | Sinodal | IPICYT |

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS APLICADAS
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó el C.

René Alejandro Flores Estrella

sobre la Tesis intitulada:

Control Robusto en Digestores Anaerobios vía H_{∞}

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 13:20 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 9 días del mes de diciembre de 2013.


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado


Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico



Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por otorgarme la beca No. 160117 para realizar mis estudios de doctorado. Agradezco al FONCICYT por el apoyo económico bajo el consorcio BITA (S-3146).

Agradezco a la Comisión de Becas del IPICYT por los apoyos que me otorgaron durante mi estancia de el posgrado.

Agradezco al IPICYT y CUCEI-UDG por las facilidades prestadas para la realización del presente trabajo.

Agradezco al Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores por haber dirigido el presente trabajo.

Agradezco al Dr. Hugo Oscar Méndez Acosta por sus comentarios en el CUCEI-UDG.

Agradezco al grupo de sinodales: Dr. Ricardo Aguilar López, Dr. Enrique Jaime Herrera López y al Dr. Eric Campos Cantón por sus comentarios sobre esta tesis.

Agradezco al Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez por sus comentarios sobre esta tesis.

Agradezco al M. C. Crescencio Hernández Rosales por sus comentarios durante el desarrollo del presente trabajo.

Agradezco a familiares y amigos por su ánimo y compañía.

Contenido

| | |
|--|-----------|
| Constancia de aprobación de la tesis | III |
| Créditos institucionales | V |
| Acta de examen | VII |
| Agradecimientos | IX |
| Contenido | XIII |
| Lista de figuras | XV |
| Acrónimos | XIX |
| Notación | XX |
| Resumen | XXI |
| Abstract | XXII |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Tratamiento de aguas residuales industriales | 1 |
| 1.2. Tratamiento de la fracción orgánica de residuos sólidos municipales | 5 |
| 1.3. Objetivo | 8 |
| 1.4. Justificación | 9 |
| 1.5. Hipótesis | 10 |
| 1.6. Descripción del trabajo | 11 |
| 2. Control H_∞ en digestor anaerobio para el tratamiento de aguas | 13 |
| 2.1. Modelo dinámico | 13 |
| 2.1.1. Análisis de sensibilidad paramétrica | 18 |
| 2.2. Formulación del problema de control | 18 |
| 2.3. Síntesis robusta vía H_∞ | 20 |
| 2.3.1. Planta nominal y familia de plantas inciertas | 22 |
| 2.3.2. Funciones de peso | 24 |
| 2.3.3. Síntesis de controlador nominal y robusto | 26 |
| 2.4. Resultados numéricos del controlador a lazo cerrado | 27 |
| 2.5. Resultados numéricos de la comparación del controlador a lazo cerrado | 34 |
| 2.6. Comentarios sobre el capítulo | 36 |

| | |
|---|-----------|
| 3. Implementación experimental de control H_∞ en planta piloto para tratamiento de vinazas | 39 |
| 3.1. Antecedentes | 39 |
| 3.2. Planta piloto | 40 |
| 3.2.1. Mediciones en línea | 42 |
| 3.2.2. Mediciones fuera de línea | 42 |
| 3.3. Implementación del controlador | 43 |
| 3.3.1. Diseño del controlador | 43 |
| 3.4. Resultados y discusión. | 44 |
| 3.5. Comentarios sobre el capítulo | 47 |
| 4. Control H_∞ en digester anaerobio para el tratamiento de la fracción orgánica de residuos sólidos municipales | 49 |
| 4.1. Modelo dinámico | 49 |
| 4.1.1. Análisis de sensibilidad paramétrica | 60 |
| 4.2. Formulación del problema de control | 61 |
| 4.3. Síntesis robusta vía H_∞ | 62 |
| 4.3.1. Planta nominal y familia de plantas inciertas | 64 |
| 4.3.2. Funciones de peso | 65 |
| 4.3.3. Síntesis de controlador nominal y robusto | 67 |
| 4.4. Resultados numéricos del controlador a lazo cerrado | 67 |
| 4.5. Comentarios sobre el capítulo | 71 |
| 5. Conclusiones y trabajo futuro | 73 |
| 5.1. Conclusiones | 73 |
| 5.1.1. Comentarios finales para DA en fase líquida | 74 |
| 5.1.2. Comentarios finales para DA en fase sólida | 75 |
| 5.2. Trabajo futuro | 75 |
| A. Conceptos básicos en control robusto | 77 |
| A.1. Sistemas lineales y realización en espacio de estados | 77 |
| A.2. Espacio H_∞ | 78 |
| A.3. Estabilidad interna | 80 |
| A.4. Estabilidad nominal y robusta | 80 |
| A.5. Problema de control H_∞ | 82 |
| A.6. Ecuaciones algebraicas de Riccati | 83 |
| A.7. Solución simplificada al problema de control H_∞ | 84 |
| A.8. Reducción de modelo por truncación balanceada | 86 |

| | |
|---|-----------|
| B. Modelo dinámico 6º Bernard y col. para tratamiento de vinazas | 87 |
| Referencias | 89 |
| Anexo | 93 |

Lista de figuras

| | |
|--|----|
| 2.1. Solución de la ecuación de sensibilidad paramétrica \dot{S}_f para x_1 y x_2 . El estado x_1 es sensible a los parámetros α y $\mu_{1,max}$, mientras que el estado x_2 es sensible a los parámetros α , $\mu_{1,max}$ y $\mu_{2,max}$. El efecto de los parámetros no mostrados, se puede considerar despreciable. | 19 |
| 2.2. Solución de la ecuación de sensibilidad paramétrica \dot{S}_f para x_3 y x_4 . El estado x_3 es sensible a los parámetros α y $\mu_{1,max}$, mientras que el estado x_4 es sensible a los parámetros α , $\mu_{1,max}$ y $\mu_{2,max}$. El efecto de los parámetros no mostrados, se puede considerar despreciable. | 20 |
| 2.3. Diagrama de bloques para la síntesis del controlador. W_e, W_u y W_n son funciones de peso para el diseño de control. $W_p\Delta$ representa la incertidumbre del tipo multiplicativa no estructurada ($\ \Delta\ _\infty \leq 1$) cuya máxima respuesta en la frecuencia es capturada por la función de peso W_p . La planta nominal P_{nom} es construida mediante la linealización del modelo (2.1) en el punto de equilibrio (2.3) y (2.4). | 21 |
| 2.4. Respuesta en la frecuencia de la planta nominal $P_{nom}(\omega)$ y el conjunto de modelos perturbados $P(\omega)$ | 24 |
| 2.5. Respuesta en la frecuencia de U_{rel} y $\text{máx}(U_{rel})$ | 24 |
| 2.6. Respuesta en la frecuencia del controlador K_8 y K_4 | 27 |
| 2.7. Respuesta en la frecuencia de la planta nominal P_{nom} , controlador K_4 y la función de transferencia S | 27 |
| 2.8. Resultados de la simulación para la evaluación del controlador caso (i). a) Concentración de la DQO a la salida del digestor. b) Concentración de la DQO a la entrada del digestor ($x_{3,in}$). c) Factor de dilución, la cual esta relacionada con la entrada de control calculada por la ley de control ($u = D - D^*$) | 28 |

| | | |
|-------|---|----|
| 2.9. | Resultados de la simulación para la evaluación del controlador caso (ii). a) Concentración de la DQO a la salida del digester. b) Concentración de la DQO a la entrada del digester ($x_{3,in}$). c) Factor de dilución, la cual esta relacionada con la entrada de control calculada por la ley de control ($u = D - D^*$). d) Entrada de control para el intervalo de tiempo $[674.5, 676.5]$ h, nótese que la señal de control está acotada. | 29 |
| 2.10. | Porcentaje de variación paramétrica con respecto al valor nominal presentada en los parámetros α , $\mu_{1,max}$, y $\mu_{2,max}$ durante el tiempo de simulación. Nótese que durante los intervalos de tiempo $[0, 200]$ h y $[800, 1000]$ h el porcentaje de variación es cero, por lo que el valor de los parámetros en esos intervalos corresponde al valor nominal. | 30 |
| 2.11. | Resultados de la simulación para la evaluación del controlador caso (iii). a) Concentración de la DQO a la salida del digester para el sub-caso (iii-1) y (iii-2). b) Factor de dilución, la cual esta relacionada con la entrada de control calculada por la ley de control ($u = D - D^*$) para el sub-caso (iii-1) y (iii-2). | 31 |
| 2.12. | Resultados de la simulación para la evaluación del controlador caso (iv). a) Concentración de la DQO a la salida del digester para el sub-caso (iv-1) y (iv-2). b) Factor de dilución, la cual esta relacionada con la entrada de control calculada por la ley de control ($u = D - D^*$) para el sub-caso (iv-1) y (iv-2). | 32 |
| 2.13. | Resultados de la simulación para la evaluación del controlador caso (v). a) Concentración de la DQO a la salida del digester. b) Concentración de la DQO a la entrada del digester ($x_{3,in}$). c) Factor de dilución, la cual esta relacionada con la entrada de control calculada por la ley de control ($u = D - D^*$). | 33 |
| 2.14. | Resultados de la simulación para la comparación entre el controlador robusto propuesto y el controlador lineal del tipo RFOF. a) Error presentado por la ley de control H_∞ . b) Error presentado por la ley de control L-RFOF. c) Factor de dilución, la cual esta relacionada con la entrada de control ($u = D - D^*$) calculada por la ley de control propuesta H_∞ . d) Factor de dilución calculada por la ley de control L-RFOF. | 35 |
| 2.15. | Respuesta en la frecuencia de P_{nom} , el controlador robusto propuesto y el controlador lineal del tipo RFOF. | 35 |
| 3.1. | Diagrama esquemático del proceso de DA para el tratamiento de aguas residuales de la industria del tequila. Los simbología correspondiente es: (T) transmisor, (E) voltaje, (FT) transmisor de flujo, (TT) transmisor de temperatura y (VV) variador de velocidad. | 41 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.2. | a) Factor de dilución medido a la entrada del digestor, b) factor de dilución calculado por la ley de control, c) Factor de dilución medido a la entrada del digestor y factor de dilución calculado por la ley de control en el intervalo de tiempo $[0, 5]$ h. Nótese que existe una diferencia entre el factor de dilución calculado y el real alimentado por el sistema de bombeo, lo cual induce una perturbación en la cantidad de materia orgánica introducida al proceso de DA. | 45 |
| 3.3. | a) Comportamiento de la DQO a la salida del digestor (x_3), b) Comportamiento de los AGV a la salida del digestor (x_4). | 47 |
| 3.4. | a) Flujo de biogás producido durante la implementación experimental, b) porcentaje de concentración de dióxido de carbono y metano en el flujo de biogás producido durante la implementación experimental. | 47 |
| 4.1. | Solución de la ecuación (4.4), parte real de la raíz $V_{A,a}^*$. | 54 |
| 4.2. | Solución de la ecuación (4.4), parte real de la raíz $V_{A,b}^*$. | 54 |
| 4.3. | Solución de la ecuación (4.4), parte real de la raíz $V_{A,c}^*$. | 55 |
| 4.4. | Evaluación numérica de los elementos E_{12} , $E_{13}V_{A,c}^*$, $E_{12} - E_{13}V_{A,c}^*$. | 55 |
| 4.5. | a) Solución numérica de (4.4), b) parte real de los valores propios (4.6), c) parte imaginaria de los valores propios (4.6), f) acercamiento de la parte imaginaria de los valores propios, d) acercamiento en solución numérica de (4.4) en rango de D donde se muestra el detalle del cruce de raíces $V_{A,b}$, y $V_{A,c}$, e) acercamiento en rango de D donde se muestra el detalle de la parte real de los valores propios en el mismo rango donde hay cruce de raíces, nótese que antes del valor D en donde se da la intersección de raíces $V_{A,b}$, y $V_{A,c}$ los valores propios se mantienen negativos. | 59 |
| 4.6. | Solución de la ecuación de sensibilidad paramétrica (4.7) para a) X_1 , b) X_2 , c) S_O , d) V_A . El efecto de los parámetros que causan el mayor efecto en las soluciones son $\mu_{1,max}$, $\mu_{2,max}$ y K_{D1} . El efecto de los parámetros restantes puede considerar despreciable. | 61 |
| 4.7. | Diagrama de bloques para la síntesis del controlador. $W_{e,s}$, $W_{u,s}$ y $W_{n,s}$ son funciones de peso para el diseño de control. $W_{p,s}\Delta$ representa la incertidumbre del tipo multiplicativa no estructurada ($\ \Delta\ _\infty \leq 1$) cuya máxima respuesta en la frecuencia es capturada por la función de peso $W_{p,s}$. La planta nominal $P_{nom,s}$ es construida mediante la linealización del modelo (4.1) en el punto de equilibrio (4.3) y (4.4). | 63 |
| 4.8. | Respuesta en la frecuencia de la planta nominal $P_{nom,s}(\omega)$ y el conjunto de modelos perturbados $P_s(\omega)$. | 65 |
| 4.9. | Representación en la frecuencia de $U_{rel,s}$ y $\max(U_{rel,s})$. | 66 |

| | |
|---|----|
| 4.10. Respuesta en la frecuencia del controlador K_{11} y K_5 | 68 |
| 4.11. Respuesta en la frecuencia de la planta nominal $P_{nom,s}$, controlador K_5 y la función de transferencia S | 68 |
| 4.12. Resultados de la simulación para la evaluación del controlador caso (i). a) Concentración de la DQO a la salida del digestor. b) Concentración de la DQO a la entrada del digestor ($S_{O,in}$). c) Factor de dilución, la cual esta relacionada con la entrada de control calculada por la ley de control ($u = D - D^*$). d) Variación paramétrica en el modelo (4.1). | 69 |
| 4.13. Resultados de la simulación para la evaluación del controlador caso (ii). a) Concentración de la DQO a la salida del digestor. b) Concentración de la DQO a la entrada del digestor ($S_{O,in}$). c) Factor de dilución, la cual esta relacionada con la entrada de control calculada por la ley de control ($u = D - D^*$). d) Variación paramétrica en el modelo (4.1). | 70 |
| A.1. Esquema representativo de un sistema con retroalimentación. | 80 |
| A.2. Esquema representativo de un sistema interconectado LFT T_{zw} | 82 |
| A.3. Esquema representativo de un sistema interconectado LFT T_{uy} | 86 |

Acrónimos

| | |
|-------|---|
| AGV | Ácidos Grasos Volátiles |
| ARE | Ecuación Algebraica de Riccati |
| CNO | Condición Normal de Operación |
| DA | Digestión Anaerobia |
| DBO | Demanda Bioquímica de Oxígeno |
| DQO | Demanda Química de Oxígeno |
| FORSM | Fracción Orgánica de Residuos Sólidos Municipales |
| HPLC | Cromatografía de Líquidos de Alto Rendimiento |
| INEGI | Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática |
| OD | Oxígeno Disuelto |
| PID | Proporcional Integral Derivativo |
| LFT | Transformación Lineal Fraccional |
| MIMO | Múltiples Entrada Múltiples Salidas |
| SISO | Una Entrada Una Salida |
| RSU | Residuos Sólidos Urbanos |
| TC | Carbono Total |
| TIC | Carbono Inorgánico Total |
| TOC | Carbono Orgánico Total |
| UE | Unión Europea |

Notación

| | |
|---------------------------------|---|
| A^{-1} | Matriz inversa de A |
| A^T | Matriz transpuesta de A |
| $Tr(A)$ | Traza de A |
| χ_A | Subespacio invariante estable de la matriz A |
| $\ A\ _\infty$ | Norma infinito de A |
| I | Matriz identidad |
| R | Conjunto de números reales |
| $sup(A)$ | Supremo de A |
| $ess\ sup(A)$ | Esencialmente el supremo de A |
| $imag(\alpha)$ | Parte imaginaria de α |
| $real(\alpha)$ | Parte real de α |
| $F_l(G, K)$ | Transformación Lineal Fraccional de G y K |
| $\mathcal{R}\mathcal{H}_\infty$ | Espacio de matrices de transferencia reales racionales propias y estables |
| $Ric(H)$ | Solución de la ecuación algebraica de Riccati |
| λ | Valor propio |
| σ | Valor singular |
| Δ | Incertidumbre |
| $[rad]$ | Radian |
| $[g]$ | Gramo |
| $[l]$ | Litro |
| $[d]$ | Día |
| $[h]$ | Hora |
| $[mol]$ | Mol |

Resumen

En esta investigación, se diseñó un controlador para el proceso de digestión anaerobia (DA) en fase acuosa y sólida orgánica. A pesar que se diseñaron dos controladores, el principio de síntesis fue el mismo. Se incluyeron elementos que pudieran comprometer las condiciones normales de operación en términos de magnitud y frecuencia. Dichos elementos (funciones de peso) contemplan: variación paramétrica, ruido en la medición, acotamiento del error permitido y restricciones en la señal de control.

Se obtuvo un controlador que regula de manera robusta la demanda química de oxígeno (DQO) en un proceso DA para el tratamiento de vinazas mediante el factor de dilución como entrada de control. Los resultados de la implementación experimental del controlador obtenido en una planta piloto ilustró la viabilidad de aplicar el controlador a nivel industrial. Adicionalmente, mediante la modificación en las funciones de peso se logra un balance entre regulación robusta y una acción de control acotada.

Se desarrolló una extensión de la teoría del proceso de DA en fase líquida aplicada al proceso de DA de la Fracción Orgánica de Residuos Sólidos Municipales. Se propone un sistema dinámico el cual permite la implementación de un controlador mediante el factor de dilución como la entrada de control. A pesar que la DA en fase líquida y sólida orgánica son descritos por diferentes sistemas de ecuaciones diferenciales y cuyas cinéticas incluyen diferentes fenómenos de inhibición, el controlador para fase sólida orgánica: (i) fue diseñado por el mismo esquema de control para fase líquida, y (ii) logra la regulación robusta de DQO.

Abstract

In this research, a controller for anaerobic digestion process in a liquid and a solid phase was designed. Despite the two controllers that were designed, the principle of the synthesis was the same. Elements which could have adverse effect on the normal operating conditions were include in the design in terms of magnitude and frequency. Such elements (weighting function) included: parametric variation, measurement noise, restriction in error and control signal.

A robust controller was designed, such a controller accomplished the robust regulation of chemical oxygen demand (COD) in anaerobic digestion process for wastewater treatment of vinasses through dilution rate as control input. The result of an experimental implementation of the controller in a pilot plant scale showed the viability of application on an industrial scale. In addition, modification of the weighting function allows one address the tradeoff between robust regulation and control constraint.

An extension of the AD liquid phase theory was performed for an AD process of organic fraction of municipal solid waste. A dynamic system was proposed which allows one the implementation of control law with a dilution rate as a control input. Despite of the fact the AD process of liquid and solid organic phase are described in a different equation system and kinetic growth includes different inhibition phenomena, the controller for AD of solid organic phase: (i) was designed by the same scheme as AD of liquid phase, and (ii) accomplish robust regulation of COD.

Capítulo 1

Introducción

En el capítulo se explica porque es importante el estudio del proceso de digestión anaerobia (DA) como alternativa de mitigación de contaminantes generados en fase acuosa y sólida. Se aborda la problemática de dicho proceso en el proyecto de investigación desarrollado y el beneficio de utilizar un controlador robusto H_∞ . Adicionalmente, se plantea el objetivo, la justificación y la hipótesis del proyecto de investigación. Finalmente, se muestra la descripción del trabajo.

1.1. Tratamiento de aguas residuales industriales

El propósito principal de una planta de tratamiento de aguas residuales es remover los contaminantes de una corriente acuosa (proceso continuo) proveniente de un proceso industrial antes de ser descargados en cuerpos acuosos. La mayoría de estos contaminantes son compuestos orgánicos los cuales reaccionan con el oxígeno disuelto (OD) del cuerpo acuoso ocasionando un consumo o reducción de dicho OD. Esta reducción de OD es conocida como demanda química de oxígeno (DQO). Los componentes demandantes de oxígeno sirven de alimento para un tipo de microorganismos acuáticos, los cuales utilizan oxígeno en su metabolismo y son capaces de sobrevivir a bajos niveles de OD. El consumo de OD por parte de estos microorganismos evita la proliferación de formas más complejas de vida que requieren concentraciones mayores de OD [1]. Por lo que es necesario la reducción de contaminantes provenientes de un proceso industrial a fin de evitar un daño en los cuerpos acuosos mediante una planta de tratamiento de aguas residuales.

Una planta de tratamiento de aguas residuales del tipo industrial está compuesta por varios elementos [1, 2]:

- Tratamiento primario, el cual consiste en remover partículas suspendidas mediante operaciones mecánicas.
- Tratamiento secundario, el cual consiste en remover componentes disueltos que contengan elementos como carbono y nitrógeno.
- Tratamiento terciario, cuyo fin es mejorar los resultados de purificación de las etapas pasadas.

Los procesos secundarios y terciarios por lo general involucran la actividad de microorganismos. La reducción de contaminantes mediante la acción de microorganismos se puede clasificar por el requerimiento de oxígeno en sistemas aerobio y anaerobio. Tradicionalmente a los procesos de tratamiento de aguas residuales mediante consorcio de microorganismos anaerobio se le conoce como procesos de digestión anaerobia y a los equipos para dicho fin como digestor anaerobio.

La digestión anaerobia (DA) es un proceso que transforma materia orgánica en una mezcla gaseosa compuesta principalmente en metano y dióxido de carbono mediante la acción de una serie de reacciones biológicas y enzimáticas. El proceso de DA puede ser descrito mediante cuatro etapas [1, 3]:

- Hidrólisis: en esta etapa la materia orgánica es transformada en moléculas más simples y solubles por medio de la ruptura de enlaces químicos mediante la acción del agua.
- Acidogénesis: los monómeros orgánicos producidos en la hidrólisis son convertidos mediante la actividad del consorcio de microorganismos acidogénicos en acetato, ácidos grasos volátiles (AGV), dióxido de carbono, así como hidrógeno.
- Acetogénesis: durante esta etapa, la mayor parte de los productos de la etapa anterior (AGV) son convertidos en acetato, dióxido de carbono, así como hidrógeno por el consorcio de microorganismos acetogénicos.
- Metanogénesis: en esta etapa final, el producto de las etapas anteriores (acidogénesis y acetogénesis) es convertido en metano y dióxido de carbono mediante la actividad del consorcio de bacterias metanogénicas.

El proceso de DA ha sido utilizado para el tratamiento de aguas residuales debido a que presenta las siguientes ventajas sobre otros procesos (proceso del tipo aerobio e incluso físico-químicos) de reducción de contaminantes [1, 3]:

- El metabolismo de los microorganismos anaerobios se realiza sin el requerimiento de oxígeno, es decir, el proceso de DA requiere menor consumo energético asociado a un sistema de aireación comparado con procesos que requieren condición aerobia.

- Produce bajas cantidades de lodo. Bajo condición aerobia el 50% del carbono orgánico es convertido a biomasa. Bajo condición anaerobia solamente el 5% del carbono orgánico es convertido a biomasa.
- Un proceso continuo de DA puede preservar la actividad de los microorganismos a pesar de largos periodos de falta de alimentación al proceso.
- El proceso de DA es capaz de degradar materia orgánica compleja y concentrada incluso en tiempos de retención relativamente cortos.
- El proceso de DA puede operar en condiciones que reducen niveles de agentes patógenos. Es decir, un digestor anaerobio puede operar bajo condiciones mesofílicas o termofílicas
- Los microorganismos involucrados en un proceso de DA producen una mezcla gaseosa. Bajo condiciones adecuadas es posible obtener altas concentraciones de hidrógeno y/o metano.

Actualmente existen aplicaciones del proceso de DA en el campo de tratamiento de aguas residuales industriales; sin embargo, todavía no ha sido explotado todo su potencial debido a las siguientes razones [3, 4]:

- El proceso de DA es sensible a compuestos tóxicos (NH_4 , Cromo, Mercurio, AGV). La inhibición de la actividad microbiana es ocasionada por agentes químicos presentes en el agua residual (inhibición por sustrato) o bien por elementos producidos durante la degradación de los compuestos contaminantes (inhibición por producto).
- La inhibición de los microorganismos también es ocasionada por una sobrecarga de contaminantes (sobrecarga por sustrato).
- El monitoreo en línea de las variables claves en el proceso aún es difícil de lograr (debido a que el medio daña algunos sensores). Adicionalmente, el monitoreo de algunas variables puede ser de costo elevado.

La inhibición por sustrato y/o producto pueden verse de la siguiente manera. Fluctuaciones en el flujo de alimentación o bien cambios elevados en la concentración del sustrato pueden provocar una acumulación de AGV y por consecuencia la inhibición del lodo anaerobio. Si se preserva la estabilidad del lodo anaerobio, se dice que el digestor anaerobio satisface la condición de estabilidad operacional.

Para aplicaciones industriales, también es necesario realizar el estudio del proceso de DA a fin de maximizar las ventajas y minimizar las desventajas que presenta. Esto puede

llevarse a cabo mediante el análisis del sistema dinámico que describe el proceso de DA, así como la propuesta de un sistema de control que mantenga la estabilidad operacional de dicho proceso. La operación y control de este tipo de procesos no es trivial, debido a las siguientes factores [5]:

- El agua residual varía en cantidad y composición.
- La actividad de la biomasa cambia bajo la influencia de agentes internos y externos.
- La falta de sensores para mediciones en línea.
- Incertidumbre en los parámetros cinéticos.

Varios esquemas de control para el proceso continuo de DA han sido propuestos en años recientes. Mendez-Acosta y col. [5], Steyer y col. [6] han señalado que métodos clásicos de control (on-off, PI, PID) no son capaces de mitigar las dificultades que presenta el proceso de DA. De hecho, estos métodos muestran un desempeño insatisfactorio cuando el digester es sometido a perturbaciones (fluctuaciones en la composición de la DQO en la alimentación) o cambios significativos de referencia (cambios en la referencia de la DQO u otra variable de salida).

Mendez-Acosta y col. [7] propusieron un controlador con referencia lineal prealimentada y con una salida retroalimentada; dicha propuesta es robusta ante incertidumbre paramétrica y perturbaciones en la concentración de alimentación. Mediante el uso de herramientas de geometría diferencial los autores aglomeran los términos inciertos asociados a la cinética en una función que es estimada mediante un observador. De éste esquema resulta en un observador de alta ganancia que requiere el acoplamiento de un esquema antisaturación. Aunque el controlador propuesto presenta un desempeño adecuado, el controlador no está diseñado para mitigar perturbaciones con componentes en la frecuencia en el intervalo donde el proceso de DA responde.

Alcaraz y col. [8] propusieron un esquema basado en intervalos con el fin de mantener las trayectorias del proceso de DA dentro de un intervalo de condiciones de operación deseado. A pesar que el objetivo del controlador es alcanzado, el desempeño del sistema de control depende de la definición del intervalo de incertidumbres, lo cual es definido de manera heurística.

Esquemas del tipo adaptativo han sido incluso propuestos [9, 10], Monroy y col. [9] propusieron e implementaron un esquema de control adaptativo robusto ante cambios en la concentración de alimentación. Dicho esquema aborda la no linealidad del proceso de DA.

Sin embargo, es requerido un conocimiento de la estructura de los parámetros en el modelo utilizado, adicionalmente que las entradas del proceso deben ser conocidas (o al menos las variaciones son suaves) de tal forma que permitan la convergencia de los parámetros del modelo o bien la fluctuación de éstos en un rango durante las variaciones en la operación. Es decir, si las perturbaciones en la composición de alimentación al proceso de DA contienen componentes en magnitud y frecuencia es posible que la convergencia de los parámetros no se logre y el desempeño del controlador se degrade.

Guwy y col. [11] mostraron que un controlador basado en redes neuronales fue capaz de regular un valor de alcalinidad sin sobretiro durante una sobrecarga por sustrato. Sin embargo, para implementar estrategias de control del tipo neuronal y lógica difusa es necesario contar con una cantidad considerable de datos o amplia experiencia en el proceso. La obtención de datos reales de un proceso de DA tiene un costo elevado incluso si estos son desarrollados en una planta piloto.

1.2. Tratamiento de la fracción orgánica de residuos sólidos municipales

Un tema de importancia a nivel nacional son los residuos sólidos municipales (RSM) o bien residuos sólidos urbanos (RSU). Los RSU son aquellos generados en las casas habitación como resultado de los materiales que se utilizan en las actividades domésticas. También pueden considerarse como RSU los que provienen de otra actividad que se desarrolla dentro de establecimientos o en la vía pública, con características domiciliarias.

En México durante el 2007 se estimó una generación de RSU de 36.9 millones de toneladas, lo que equivale a una producción de 101 mil toneladas al día [12]. El manejo de los RSU comprende diferentes etapas, que van desde su generación, almacenamiento, transporte y tratamiento, hasta su disposición en diversos sitios. La disposición final de los RSU consiste en su depósito o confinamiento permanente en sitios que permitan prevenir su liberación al ambiente. En 2007 se reportó que el 67% de los RSU se dispuso en rellenos sanitarios y sitios controlados. Entre 1995 y 2007 los rellenos sanitarios se incrementaron de 30 a 114 [12]. El uso de rellenos sanitarios ha sido una opción que pretende solucionar el problema de los RSU que no califican para ser reciclados. En resumen, en cuestión de RSU, en México únicamente existen políticas y acciones para la separación, reciclado y disposición final.

Actualmente la Unión Europea (UE) tiene una producción de fracción orgánica de residuos sólidos municipales (FORSM) de 400,000 [ton/d] [13]. Debido al impacto que causa los rellenos sanitarios al medio ambiente, no solamente se encuentran en proceso de clausura sino que las directrices en política ambiental están en proceso de restringir esta práctica. Parte de la FORSM (lodos) es tratada en 36,000 digestores anaerobios en la UE [13].

Debido a las ventajas que presenta el proceso de DA, el tratamiento mediante medios biológicos de la FORSM es claramente una alternativa para reducción de dichos contaminantes. De hecho, la comunidad científica ha demostrado que la tecnología de digestión anaerobia también puede ser aplicada en la reducción de contaminantes en la FORSM [13].

El proceso de DA para residuos sólidos es similar al efectuado en fase acuosa con algunas diferencias. Básicamente la materia orgánica es degradada mediante las siguientes etapas [14, 15]:

- Hidrólisis. Esta etapa consiste en degradar tanto materia orgánica insoluble como materia soluble de alto peso molecular como: lípidos, polisacáridos, proteínas y ácidos nucleicos. Estos compuestos son convertidos en compuestos orgánicos de menor complejidad como: ácidos grasos y aminoácidos.
- Acidogénesis. En esta etapa los compuestos resultantes en la hidrólisis son convertidos en AGV por las bacterias acidogénicas. Otros subproductos son formados como: amoníaco (NH_3), dióxido de carbono (CO_2) entre otros.
- Acetogénesis. Durante esta etapa los ácidos orgánicos producidos en la etapa anterior son degradados principalmente en ácido acético, dióxido de carbono e hidrógeno.
- Metanogénesis. La etapa final se realiza mediante dos procesos; (i) un grupo consume el acetato y lo convierte en metano y dióxido de carbono, (ii) el segundo grupo utiliza el hidrógeno como donador de electrones y el dióxido de carbono como aceptor a fin de producir metano.

Aunque las similitudes con el proceso de DA en fase acuosa son considerables, es importante hacer notar que la inhibición se puede llevar a cabo bajo diferentes mecanismos. Adicionalmente, las cinéticas abordadas en el proceso de DA en materia orgánica de fase sólida puede presentar diferentes estructuras a comparación con el proceso de DA en fase acuosa.

Los principales componentes que producen la inhibición en el proceso de digestión de materia orgánica en fase sólida son [4, 16]:

- Amonio (NH_4) y el amoníaco (NH_3), producido como subproducto de la degradación biológica de componentes que contienen nitrógeno, el amonio puede difundirse hacia el interior de la célula causando un desbalance en los protones y/o una deficiencia de potasio. Estudios sugieren que hasta el 55% de la actividad microbiana puede verse afectada con la presencia de este componente.
- Sulfuro, en el caso de tratamiento de residuos orgánicos industriales es común encontrar estos componentes. Básicamente el sulfato es reducido a sulfuro por bacterias sulfato reductoras. Durante este procedimiento dos inhibiciones se lleva a cabo; una es debida a la competencia entre la materia orgánica y estos compuestos, y la segunda se lleva a cabo debido a la naturaleza tóxica del sulfuro en las bacterias.
- Iones metálicos ligeros. Entre estos podemos mencionar el sodio, potasio, magnesio, calcio y aluminio. Concentraciones considerables de estos elementos pueden causar deshidratación de las células debido a la presión osmótica. Mientras que bajas concentraciones de estos elementos estimulan el crecimiento microbiano, altas concentraciones pueden causar reducción en las tasas de crecimiento e incluso inhibición y toxicidad.
- Compuestos orgánicos. Algunos de los compuestos incluidos en este fenómeno son los bencenos, fenoles y compuestos halogenados.

Aunque se considera que la digestión en fase sólida presenta altos tiempos de retención hidráulica, estudios recientes [16, 17] indican que mediante pretratamientos es posible reducir la etapa de hidrólisis de manera considerable. Dos pretratamientos han sido estudiados, el alcalino y el termoquímico. Otro aspecto importante para incrementar la eficiencia del proceso de DA en fase sólida es la codigestión. Mediante un cosustrato es posible aumentar la reducción de materia orgánica e incluso incrementar la producción de biogás. De hecho hay estudios que indican un incremento en producción energética e incluso mitigar el efecto de elementos inhibitorios mediante el tratamiento de la FORSM con algún otro sustrato orgánico [16, 17].

Los estudios en el proceso de DA en fase sólida se pueden clasificar en:

- Optimización de procesos [18]
- Tecnologías de digestión con variación en contenido de humedad [19]

- Mejora del proceso mediante pretratamiento [20]
- Codigestión con otros substratos [21]
- Cinética y modelamiento: estudios se centran en la identificación de parámetros y validación de modelos matemáticos [22 – 27] de una o dos etapas [19, 28].

En la actualidad poco ha sido abordado el problema de control aplicado a procesos de DA en fase sólida. Los modelos propuestos actualmente describen el proceso de manera eficiente, sin embargo carecen de simplicidad para diseñar una ley de control en un proceso continuo. Por lo que es necesario:

- Proponer de un modelo simple, pero que aborde los principales factores que determinan el comportamiento dinámico del proceso de DA en materia orgánica sólida
- Diseñar de una ley de control que mitigue efectos inhibitorios, incertidumbre en parámetros cinéticos así como perturbaciones en la alimentación del proceso de DA.

1.3. Objetivo

Estudiar la dinámica y estabilidad del proceso continuo de digestión anaerobia isotérmica caracterizado por balances de materia; diseñar e implementar una ley de control robusto ante incertidumbres y perturbaciones, que permita una regulación robusta de la demanda química de oxígeno tomando en cuenta las principales limitaciones a escala industrial.

El objetivo general de esta tesis se divide en el siguiente conjunto de objetivos particulares:

- Analizar la estabilidad del modelo a lazo abierto con el propósito de encontrar la región estable de operación denominada como condición normal de operación.
- Diseñar una ley de control robusto tomando en cuenta los elementos que pueden causar la inestabilidad del proceso de digestión anaerobia en términos de magnitud y frecuencia.
- Mostrar evidencia de la viabilidad en la implementación industrial del controlador propuesto en esta clase de procesos.

1.4. Justificación

Durante las pasadas décadas el proceso de DA aplicada a tratamiento de aguas residuales ha sido controlado por esquemas de control del tipo proporcional integral derivativo (PID). Debido a la naturaleza no lineal del proceso la aplicación de dichos esquemas se ve restringida a un rango de operación. Aunque se han propuesto controladores (Sección 1.1) que son robustos a incertidumbre paramétrica y perturbaciones en la concentración de la alimentación, se requiere un controlador que adicionalmente incluya los siguientes aspectos:

- Las especificaciones en legislación ambiental son cada vez más restrictivos. A pesar que un DA no es el único responsable (en una planta de tratamiento de aguas residuales a nivel industrial) de la reducción de la DQO a niveles acorde con la normatividad (local, nacional o en su caso internacional), es importante mencionar que se requiere una regulación de la DQO a fin de preservar las condiciones de operación de toda la planta. Dicha regulación se debe llevar a cabo mediante una señal de control suave que asegure la mitigación de las posibles fluctuaciones en la concentración de la DQO en el agua residual proveniente del proceso industrial incluso con componentes en la frecuencia.
- Para determinados procesos de transformación, se ha diversificado el tipo de perturbaciones a las cuales es sometido el proceso de DA. Si bien se pueden presentar perturbaciones con componentes en la frecuencia es posible que los mismos componentes desechados en el proceso puedan causar una variación en los parámetros cinéticos asociados al modelo dinámico. Tener un criterio para asegurar la estabilidad del proceso de DA a pesar de la variación paramétrica es importante para saber si el controlador será capaz de mitigar dicha variación.
- Asegurar un desempeño a pesar de limitaciones en el proceso. Entre las limitaciones más importantes a nivel industrial es la falta de acondicionamiento en la variable de medición. Otro aspecto inevitable en las mediciones a nivel industrial es el ruido.

Para abordar perturbaciones con componentes en la frecuencia en un proceso de DA considere primeramente las actividades de producción programadas en una industria. Diferentes productos pueden ser fabricados dependiendo de la demandan en periodos de tiempo. Estos periodos de tiempo pueden ser por lapsos de días, semanas o incluso meses. Dichos productos no necesariamente generan aguas residuales con las mismas propiedades, estos ciclos productivos pueden ocasionar fluctuaciones tanto en composición como en cantidad en periodos de tiempo (componente en frecuencia). Considere un segundo factor, un costo importante en la industria actual es la asociada al consumo eléctrico. Actualmente el costo debido al consumo eléctrico en México está regido por dos factores:

- Cantidad consumida. La tendencia actual es homogenizar el consumo de la energía eléctrica a fin de evitar picos en el consumo eléctrico que derivarían en mayores costos.
- Horario a la cual es consumida la electricidad. Adicional a las políticas de calidad y producción de una industria, un factor para programar los procesos de transformación son los horarios los cuales se consume la electricidad. Actualmente existe en México horarios los cuales el costo por [Kw-h] es mayor (19:00 - 23:00 [h]) que otros horarios (00:00 - 06:00 [h]). Atendiendo a la necesidad de reducir costos asociados al consumo eléctrico la industria se ve en la necesidad de la programación de productos en periodos de tiempo que genera agua residual que perturba el proceso de DA con componentes en la frecuencia.

Actualmente son pocas las contribuciones en el área de dinámica y control aplicados al proceso de DA para el tratamiento de la FORSM. Proponer un sistema dinámico simple, pero que capture el comportamiento del proceso de DA aplicado a la FORSM, contribuirá a una descripción que permita una solución alternativa al problema de la FORSM a las ya conocidas. Adicionalmente, proponer una ley de control permitirá la posibilidad de implementar estos procesos a escala industrial.

Por lo que es necesario esquemas de control en procesos de DA en fase líquida y sólida que cumplan con los requerimientos antes mencionados. Una alternativa adecuada es el control robusto. Mediante la técnica de control robusto es posible asegurar la estabilidad del proceso de DA a pesar de variaciones paramétricas y ante perturbaciones con componentes en la frecuencia en la corriente de alimentación así como ruido y errores en la medición. Adicionalmente, es posible incluir requerimientos de desempeño en señales como por ejemplo los actuadores o bien señales auxiliares que nos asegure una acción de control físicamente realizable. Actualmente, solo unos cuantos resultados han sido publicados en el área de control robusto aplicado a sistema biológicos [29].

1.5. Hipótesis

La aplicación de un controlador robusto al proceso de digestión anaerobia continua e isotérmica permitirá regular de forma robusta (ante variación paramétrica y perturbaciones en la composición de alimentación incluso con componentes en la frecuencia) la DQO tanto en sistemas acuosos como en sólidos orgánicos, por medio de la manipulación (físicamente realizable y mediante un desempeño adecuado) del factor de dilución.

1.6. Descripción del trabajo

Esta tesis está organizada en cinco capítulos y dos apéndices. En el capítulo dos se presenta un análisis del sistema dinámico seleccionado, el problema de control así como la síntesis del controlador robusto vía H_∞ aplicado al proceso de DA para tratamiento de vinazas. También se presentarán algunas simulaciones numéricas a lazo cerrado y se discute la ejecución del controlador propuesto con respecto a uno diseñado por otros autores. En el capítulo tres se muestra evidencia de la viabilidad del controlador para ser implementado a escala industrial, mediante la implementación experimental para vinazas provenientes de la industria tequilera. En el capítulo cuatro se aborda el diseño de un controlador robusto para el tratamiento de la FORSM. Primero se presenta la propuesta de un sistema dinámico para la digestión de la FORSM, así como un análisis del mismo. Adicionalmente, se expone el problema de control así como la síntesis del controlador robusto vía H_∞ . El capítulo finaliza con algunos resultados numéricos a lazo cerrado. En el capítulo seis se exhiben las conclusiones del proyecto de investigación. En el Apéndice A se incluyen algunos conceptos básicos utilizados en control robusto. En el Apéndice B se resume el modelo de 6^o propuesto por Bernard y col. [30] así como los resultados obtenidos (análisis del modelo) por Méndez-Acosta y col. [7]. Finalmente se presenta un Anexo que muestra la producción científica obtenida hasta el momento.

Capítulo 2

Control H_∞ en digestor anaerobio para el tratamiento de aguas

En el capítulo se describe la síntesis de un controlador H_∞ clásico. Dicho controlador asegura la regulación robusta de la concentración de la demanda química de oxígeno (DQO) en un proceso de digestión anaerobia continua e isotérmica. El capítulo está organizado de la siguiente forma. Primero se aborda el modelo matemático no lineal el cual describe el proceso de DA y se muestran algunos resultados orientados al análisis de dicho modelo. Posteriormente se expone el planteamiento del problema de control y el procedimiento de síntesis. A continuación se muestran algunas simulaciones numéricas a lazo cerrado a fin de ilustrar la implementación del controlador en el modelo no lineal del proceso de DA. Adicionalmente, como una extensión de las simulaciones numéricas, se presenta una comparación entre el controlador propuesto y un controlador previamente reportado por otros autores. Finalmente se exponen algunos comentarios acerca de este capítulo.

2.1. Modelo dinámico

Bernard y col. [30] propusieron un modelo de 6° orden el cual ha sido utilizado para diseñar y validar un esquema de control [7]. El modelo dinámico describe la dinámica de un consorcio de bacterias acidogénicas y metanogénicas, ácidos grasos volátiles (AGV), la alcalinidad y el carbono orgánico total ($z_i, i = 1, \dots, 6$). En la sección B se muestra el modelo 6° orden a detalle. De acuerdo con los resultados de Mendez-Acosta y col. [7], el modelo de 6° orden tiene un punto de equilibrio ($z^* \in R_+^6$) tal que, existe condiciones de operación que implican que $z_1 > 0, z_2 > 0, z_{j,in} > x_j > 0, j = 3, 4, 5, 6$ para todo $t \geq 0$ y cualquier condición inicial en el dominio físicamente realizable. Esto significa que el digestor funciona bajo *condiciones normales de operación* (CNO). Los resultados obtenidos por Mendez-Acosta y

col. [7] pueden resumirse en las siguientes dos proposiciones:

Proposición 1 [7]. Considere el modelo de digestión anaerobia propuesto por Bernard y col. [30]. Entonces, asumiendo que la concentración de alimentación $z_{j,in}$ es constante por pedazos, existe un único punto de equilibrio $z^* \in R_+^6$ para cualquier par constante (α, D^*) bajo condiciones normales de operación. Adicionalmente, tal punto de equilibrio está contenido en un conjunto cerrado $\Omega \in R_+^6 = \{z \in R_+^6 | z_{min} \leq z \leq z_{max}; z_{min} > 0 \text{ y } z_{max} < \infty\} \subset R_+^6$ el cual contiene todas las condiciones normales de operación; donde z_{max} es el vector de concentraciones para \bar{D} mientras que z_{min} es obtenido para \underline{D} .

Proposición 2 [7]. Sea $z^* \in \Omega$ el punto de equilibrio del modelo de digester anaerobio propuesto por Bernard y col. para cualquier dupla (α, D^*) tal que $D^* \in [\underline{D}, \bar{D}]$. Entonces, bajo CNO tal punto de equilibrio es localmente estable.

Es importante mencionar que el modelo de 6° orden utilizado por Mendez-Acosta y col. [7] en donde establecen las **Proposiciones 1 y 2**, el espacio en R_+^6 es posible dividirlo en dos subespacios:

- $h_1 = z_i \in R^4$, donde $i = 1, 2, 4, 5$ representan los estados de concentración de biomasa acidogénica, metanogénica, concentración AGV y concentración de la DQO respectivamente.
- $h_2 = z_j \in R^2$, donde $j = 3, 6$ representan los estados de concentración de alcalinidad y carbono inorgánico total (TIC de Total Inorganic Carbon) respectivamente.

Los estados correspondientes al subespacio $z_i \in R^4$ no dependen de los estados en el subespacio $z_j \in R^2$. Esto es posible demostrarlo mediante el cálculo de la derivada direccional del campo $h_1 = \dot{z}_i \in R^4$ con respecto a las componentes $z_j \in R^2$. Dado que $\partial h / z_j = 0$ entonces el subespacio $z_i \in R^4$ no depende de $z_j \in R^2$. Es decir, los estados de alcalinidad y TIC ($z_j \in R^2$) no influyen en los estados de concentración de biomasa acidogénica, metanogénica, AGV y DQO ($z_i \in R^4$). De hecho $z_i \in R^4$ es un modelo reducido del proceso de DA el cual ha sido utilizado para implementar controladores [31]. De igual forma que el modelo de 6° orden, es posible extender los resultados obtenido en el sentido de la **Proposición 1 y 2**. El modelo de 4° reducido de Bernard es descrito como:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= (\mu_1(x_3) - \alpha D) x_1 \\
 \dot{x}_2 &= (\mu_2(x_4) - \alpha D) x_2 \\
 \dot{x}_3 &= (x_{3,in} - x_3) D - k_1 \mu_1(x_3) x_1 \\
 \dot{x}_4 &= (x_{4,in} - x_4) D + k_2 \mu_1(x_3) x_1 - k_3 \mu_2(x_4) x_2
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde x_1 es la concentración de biomasa acidogénica [g/l]; x_2 es la concentración de biomasa metanogénica [g/l]; x_3 es la DQO [g/l] y x_4 la concentración de AGV [mmol/l]. Los escalares reales positivos $x_{3,in}$ y $x_{4,in}$ [g/l] representan las concentraciones de alimentación al proceso continuo. El factor de dilución D [h^{-1}] está definido como la relación del flujo de alimentación Q_{in} [lh^{-1}], y el volumen operacional del reactor V [l]. La fracción de biomasa en la fase líquida está determinada por el parámetro constante $\alpha \in [0, 1]$; donde $\alpha = 0$ corresponde a un régimen hidrodinámico ideal desarrollado por un reactor de cama fija y donde $\alpha = 1$ está dado para un reactor agitado de flujo continuo. El modelo de DA (2.1) incluye el crecimiento de las bacterias acidogénicas $\mu_1(x_3)$ y metanogénicas $\mu_2(x_4)$, las cuales están representadas por las cinéticas de Monod y Haldane [32] respectivamente. Las expresiones son:

$$\begin{aligned}\mu_1(x_3) &= \mu_{1,max} \frac{x_3}{x_3 + K_{S1}} \\ \mu_2(x_4) &= \mu_{2,max} \frac{x_4}{x_4 + K_{S2} + (x_4/K_{I2})^2}\end{aligned}\tag{2.2}$$

donde los parámetros nominales del modelo (2.1) con cinética (2.2) $\pi_0 \in \Pi = \{\alpha, \mu_{1,max}, \mu_{2,max}, K_{S1}, K_{S2}, K_{I2}, k_1, k_2, k_3\}$ son reales, positivos e inciertos.

Para diseñar una ley de control H_∞ por retroalimentación es necesario obtener resultados en el sentido de la **Proposición 1** y la **Proposición 2** para el modelo (2.1). Si los resultados en el modelo de 6° pueden ser extendidos en el modelo de 4° orden, entonces el sistema (2.1) tiene alguna correspondencia en el equilibrio. Esto significa que el diseño de una ley de control robusto sería indistinguible para ambos modelos. Así mismo, si la **Proposición 1** y la **Proposición 2** aplican al modelo (2.1), entonces las coordenadas del modelo (2.1) es una proyección del equilibrio del modelo de 6° orden sobre un subespacio de dimensión cuatro. Es decir, dicha proyección captura la dinámica del modelo propuesto por Bernard [30]. De esta forma es posible enunciar:

Definición 1. Considere el modelo de DA (2.1) con cinética (2.2). Asume que la composición de alimentación $x_{j,in}$ para $j = 3, 4$ es constante por pedazos. Entonces, existen constantes $\alpha \in [0, 1]$ y $D^* \in [\underline{D}, \overline{D}] \subset R_+$ tal que $\Omega_r \in R_+^4 = \{x \in R_+^4 | x_{min} \leq x \leq x_{max}; x_{min} > 0 \text{ y } x_{max} < \infty\} \subset R_+^4$ contiene todas las condiciones normales de operación (CNO); donde x_{max} es el vector de concentraciones para \overline{D} mientras que x_{min} es obtenido para \underline{D} .

Proposición 3. Considere el modelo de DA (2.1) con cinética (2.2). Asume que la composición de alimentación $x_{j,in}$ para $j = 3, 4$ es constante por pedazos. Entonces, existen constantes $\alpha \in [0, 1]$ y $D^* \in [\underline{D}, \overline{D}] \subset R_+$ las cuales contienen CNO Ω_r , tal que el modelo (2.1) tiene un único punto de equilibrio $x^* \in \Omega_r = \{x^* \in R_+^4 : x_3 < x_{3,in}, x_4 < x_{4,in}\}$, el cual es

localmente estable.

Prueba. Se realiza de la siguiente manera: (i) cálculo de las coordenadas del equilibrio, (ii) unicidad del equilibrio bajo CNO y (iii) estabilidad del equilibrio.

(i) Las coordenadas del equilibrio mencionado en la **Proposición 3** ($x^* \in \Omega_r \subset R_+^4$) para el modelo (2.1) son:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{(x_{3,in} - x_3^*)D}{k_1\mu_1(x_3^*)} \\ x_2^* &= \frac{(x_{4,in} - x_{4-}^*)D + k_2\mu_1(x_3^*)x_1^*}{k_3\mu_2(x_{4-}^*)} \\ x_3^* &= \frac{\alpha DK_{S1}}{(\mu_{1,max} - \alpha D)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

y la solución de la siguiente ecuación:

$$\alpha D x_4^{*2} + x_4^* (\alpha DK_{I2}^2 - \mu_{2,max} K_{I2}^2) + \alpha DK_{S2} K_{I2}^2 = 0 \quad (2.4)$$

donde los escalares x_{4+}^* y x_{4-}^* denotan la solución de la última ecuación de segundo orden.

(ii) Es posible observar que x_1^* y x_3^* son únicos para cualquier par (α, D^*) . Es necesario que se cumpla: (a) $\alpha D^* < \mu_{2,max}$ para poder obtener soluciones para x_4^* con significado físico (real positivo). Adicionalmente, bajo CNO se deben satisfacer dos condiciones más: (b) $x_{4,in} > x_4^*$; (c) $x_4^* > 0$. De esta forma, calculando las raíces de (2.4) x_{4+}^* y x_{4-}^* para todo $\alpha D^* < \mu_{2,max}$, únicamente x_{4-}^* cumple con las condiciones (a), (b) y (c). De hecho bajo CNO, se puede concluir que x_4^* tiene un único punto de equilibrio x_{4-}^* . De esta forma se puede observar que x_2 también tiene un único punto de equilibrio x_2^* bajo CNO. Bajo dichas condiciones $x_{min} \leq x_i^* \leq x_{max}$ para $i = 1, 2, 3, 4$ tiene como consecuencia $x_i^* \in \Omega_r$.

(iii) Para demostrar la estabilidad local, considere el Jacobiano asociado al modelo (2.1):

$$J = \begin{bmatrix} J_{1,1} & 0 & J_{1,3} & 0 \\ J_{2,1} & J_{2,2} & 0 & J_{2,4} \\ J_{3,1} & 0 & J_{3,3} & 0 \\ J_{4,1} & J_{4,2} & J_{4,3} & J_{4,4} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde $J_{i,j}|_{x^*} = \partial f_i / \partial x_j$ para $i, j = 1, 2, 3, 4$. Entonces, las expresiones que determinan los valores propios de (2.5) están dados por:

$$\lambda = \begin{bmatrix} J_{11}/2 + J_{33}/2 - (J_{11}^2 - 2J_{11}J_{33} + J_{33}^2 + 4J_{13}J_{31})^{(1/2)}/2 \\ J_{11}/2 + J_{33}/2 + (J_{11}^2 - 2J_{11}J_{33} + J_{33}^2 + 4J_{13}J_{31})^{(1/2)}/2 \\ J_{22}/2 + J_{44}/2 - (J_{22}^2 - 2J_{22}J_{44} + J_{44}^2 + 4J_{24}J_{42})^{(1/2)}/2 \\ J_{22}/2 + J_{44}/2 + (J_{22}^2 - 2J_{22}J_{44} + J_{44}^2 + 4J_{24}J_{42})^{(1/2)}/2 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

donde

$$\begin{aligned}
J_{1,1} &= \frac{\mu_{1,max}x_3^*}{(x_3^* + K_{S1}) - \alpha D} \\
J_{1,3} &= \frac{x_1^* K_{S1} \mu_{1,max}}{(x_3^* + K_{S1})^2} \\
J_{2,2} &= \frac{\mu_{2,max}x_4^*}{x_4^* + K_{S2} + (x_4^*/K_{I2})^2} - \alpha D \\
J_{2,4} &= \frac{\mu_{2,max}x_2^*(K_{I2}^2 K_{S2} - x_4^{*2})}{x_4^* + K_{S2} + (x_4^*/K_{I2})^2} \\
J_{3,1} &= \frac{-k_1 \mu_{1,max} x_3^*}{x_3^* + K_{S1}} \\
J_{3,3} &= -D - \frac{k_1 \mu_{1,max} x_1^* K_{S1}}{(x_3^* + K_{S1})^2} \\
J_{4,1} &= \frac{k_2 \mu_{1,max} x_3^*}{x_3^* + K_{S1}} \\
J_{4,2} &= \frac{-k_3 \mu_{2,max} x_4^*}{x_4^* + K_{S2} + (x_4^*/K_{I2})^2} \\
J_{4,3} &= \frac{k_2 x_1^* \mu_{1,max} K_{S1}}{(x_3^* + K_{S1})^2} \\
J_{4,4} &= -D - \frac{(k_3 \mu_{2,max} x_2^*)(K_{I2}^2 K_{S2} - x_4^{*2})}{x_4^* + K_{S2} + (x_4^*/K_{I2})^2}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Dado que $(x_{3,in} - x_3^*)K_{S1}D > \mu_{1,max}x_3^{*2}$ se cumple para todo $D^* \in [\underline{D}, \overline{D}] \subset \mathbb{R}_+$, en consecuencia tenemos que $\lambda_{1,2}|_{J(x^*)} < 0$ para CNO. Adicionalmente, $K_{I2}^2 K_{S2} > x_4^{*2}$ para todo $D^* \in [\underline{D}, \overline{D}] \subset \mathbb{R}_+$, lo cual implica que $J_{4,4} < 0$ para CNO. Así mismo, la condición $\alpha D < \mu_{2,max}$ es satisfecha para CNO. Finalmente, para la solución general de la ecuación cuadrática, dado que $J_{1,1} < 0$ para todo $D^* \in [\underline{D}, \overline{D}] \subset \mathbb{R}_+ \implies \text{Re}(\lambda_{3,4}|_{J(x^*)}) < 0$. Por lo tanto los valores propios de la ecuación (2.7) $\text{Re}(\lambda_i|_{J(x^*)}) < 0$ donde $i = 1, 2, 3, 4$ lo que implica que el punto x^* es localmente estable, con lo cual se completa la prueba. \square

Nota 1. La función $\mu_1(*)$ y $\mu_2(*)$ está definida como la cinética de Monod y Haldane respectivamente (de igual forma que en Mendez-Acosta y col. [7] para el modelo de 6° orden), por lo que el equilibrio $x^* \in \Omega_r \subset \mathbb{R}_+^4$ para el modelo (2.1) está determinado como una proyección del subespacio $\Omega \subset \mathbb{R}_+^6$, es decir $\Omega_r \subset \Omega$ [7, 30].

Nota 2. Las propiedades cinéticas de las funciones $\mu_1(*)$ y $\mu_2(*)$ definen la existencia y características de el punto de equilibrio x^* . Adicionalmente, para el caso del tratamiento de aguas residuales aplicadas a vinazas, $\mu_1(*)$ y $\mu_2(*)$ están definidas para la cinética de Monod y Haldane (2.2) respectivamente. Sin embargo, para otras características de agua residual con diferentes componentes como substrato, $\mu_1(*)$ y $\mu_2(*)$ pueden ser descritos de manera tal que incluyan otros efectos de inhibición. De este modo, las ecuaciones (2.3) y (2.4) son expresiones generales para el equilibrio presentado por el proceso de DA descrito por el

modelo (2.1).

2.1.1. Análisis de sensibilidad paramétrica

Uno de los objetivos al diseñar un controlador H_∞ es lograr que sea robusto ante variaciones en los parámetros (variación paramétrica) del modelo no lineal (2.1). Para lograr dicho objetivo es necesario caracterizar una familia de plantas lineales a fin de obtener un modelo que capture la desviación (debida a la variación de n parámetros) entre la familia de plantas y el modelo nominal. No todos los parámetros causan una variación significativa; por lo que el primer paso es identificar los parámetros que provocan la mayor variación en la solución de los estados mediante un análisis de sensibilidad paramétrica [33].

Dado un conjunto de parámetros $\Pi = [\alpha, \mu_{1,max}, \mu_{2,max}, K_{S1}, K_{S2}, K_{I2}, k_1, k_2, k_3]$, la función de sensibilidad paramétrica está dada por la siguiente expresión [33]:

$$\dot{S}_f = A_{Sf}S_f + B_{Sf} \quad (2.8)$$

donde $S_f = [\partial x / \partial \pi]_{\pi_0}$, $A_{Sf} = [\partial f(x) / \partial x]_{x^*}$, $B_{Sf} = [\partial f(x) / \partial \pi]_{\pi_0}$, los parámetros nominales son $\pi_0 \in \Pi$; las cuales tienen como dimensiones: $S_f \in R^{4 \times 9}$, $A_{Sf} \in R^{4 \times 4}$, $B_{Sf} \in R^{4 \times 9}$.

En la Figura (2.1) y Figura (2.2) se muestra la solución de la función de sensibilidad para los estados x_1 , x_2 , y x_3 , x_4 respectivamente para el conjunto de parámetros Π . El subconjunto de parámetros que tienen un mayor efecto en el comportamiento dinámico para el sistema no lineal (2.1) son α , $\mu_{1,max}$ y $\mu_{2,max}$. Esto es congruente con los resultados obtenidos por Bernard y col. [30]. De este modo es posible determinar la familia de plantas Λ que capturen la variación paramétrica entre la familia de plantas perturbadas, debida a la desviación de los parámetros α , $\mu_{1,max}$ y $\mu_{2,max}$ con respecto a los valores nominales, y la planta nominal en un rango de variación que se considere apropiado para los cambios en la operación del proceso real.

2.2. Formulación del problema de control

El principal objetivo del proceso de DA en el tratamiento de vinazas es la descomposición de materia orgánica disuelta en el agua residual proveniente de las fermentaciones de vinos (tequila, vino, etc.). Es decir, la concentración a la salida del proceso de DA de los compuesto orgánicos debe cumplir con regulación del tipo ambiental y legislativo. Estos contaminantes son usualmente medidos en términos de la concentración de la DQO. Es por esto, que una de las principales variables en tratamiento de aguas residuales mediante el proceso de DA es

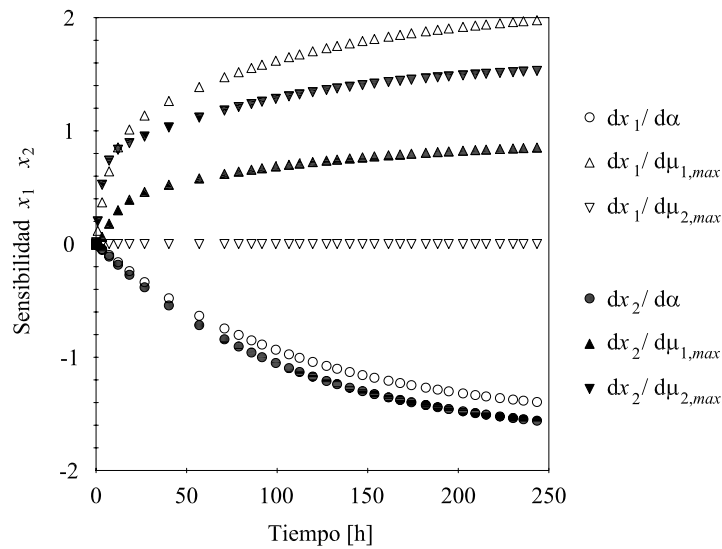


Figura 2.1: Solución de la ecuación de sensibilidad paramétrica \dot{S}_f para x_1 y x_2 . El estado x_1 es sensible a los parámetros α y $\mu_{1,max}$, mientras que el estado x_2 es sensible a los parámetros α , $\mu_{1,max}$ y $\mu_{2,max}$. El efecto de los parámetros no mostrados, se puede considerar despreciable.

la regulación de la DQO mediante control retroalimentado.

El problema de regulación de la DQO a la salida del proceso de DA como un problema de control es enunciado como: *encontrar un algoritmo de control tal que el comportamiento de la concentración de la DQO en el digester anaerobio sea regulado a una concentración deseada a partir de mediciones de la DQO a la salida del proceso de DA en presencia de perturbaciones en la concentración de la corriente de alimentación al digester anaerobio*. Para esto se diseñará un controlador robusto que calcule el factor de dilución el cual permita mantener la concentración deseada de la DQO a la salida del proceso de DA a pesar de las variaciones en la concentración en la alimentación al digester anaerobio y variaciones paramétricas.

Nota 3: Es importante mencionar que el proceso de DA es continuo, adicionalmente el factor de dilución $D [h^{-1}]$ está definido como la relación del flujo de alimentación $Q_{in} [lh^{-1}]$, y el volumen operacional del reactor $V [l]$. Por lo que, es necesario mantener el volumen del digester constante durante la operación del proceso de DA para poder calcular el flujo que se introducirá al proceso de DA.

La **Proposición 3** exhibe la existencia, unicidad y estabilidad del punto de equilibrio. Dichas propiedades son importantes en el diseño de un esquema de control por retroali-

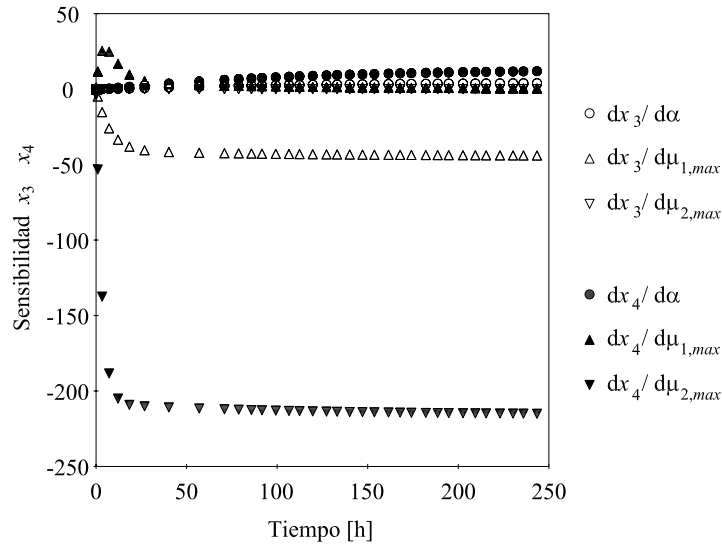


Figura 2.2: Solución de la ecuación de sensibilidad paramétrica \dot{S}_f para x_3 y x_4 . El estado x_3 es sensible a los parámetros α y $\mu_{1,max}$, mientras que el estado x_4 es sensible a los parámetros α , $\mu_{1,max}$ y $\mu_{2,max}$. El efecto de los parámetros no mostrados, se puede considerar despreciable.

mentación. Es decir, bajo CNO el sistema tiene solución y ésta es única. Adicionalmente, al ser el punto de equilibrio localmente estable, el sistema tendrá una tendencia a mantenerse cercano al punto de equilibrio o al menos mantenerse en una región cercana a ésta a pesar de perturbaciones. La **Proposición 3** permite bajo las consideraciones matemáticas la síntesis de un control tal que, el factor de dilución ($D = F/V$) es determinada y la salida (DQO) regulada a pesar de perturbaciones en la concentración de alimentación. Si dicho controlador existe es posible entonces lograr la estabilidad nominal de dicha planta.

Mediante el análisis de sensibilidad paramétrica (Sección 2.1.1) fue posible determinar que los parámetros α , $\mu_{1,max}$ y $\mu_{2,max}$ provocan la mayor variación en la solución de los estados. Si consideramos un modelo que capture la variación entre la familia de plantas Λ , debida a la desviación de los parámetros, y la planta nominal, entonces sería posible verificar si el controlador nominal cumple con el requerimiento de la estabilidad robusta (en el sentido de variación paramétrica).

2.3. Síntesis robusta vía H_∞

El procedimiento para el diseño de un controlador robusto vía H_∞ clásico, para un sistema no lineal, consiste en los siguientes pasos:

- (i) Linealización del modelo no lineal en un punto de operación
- (ii) Representación en espacio de estados del modelo nominal e incierto
- (iii) Descripción de las especificaciones de desempeño requerido para el controlador en términos de funciones de peso.
- (iv) Síntesis del controlador

La Figura 2.3 muestra el diagrama de bloques del sistema de control. Dado que el modelo de DA (2.1) tiene un único punto de equilibrio x^* localmente estable, cuyas coordenadas están dadas por (2.3) y (2.4), es posible encontrar una entrada de control $u = D - D^*$, bajo CNO, en $x^* \in \Omega_r \subset \mathbb{R}_+^4$. Dicha señal de control es diseñada para una planta nominal $P_{nom}(s)$, la cual es una linealización del modelo de DA (2.1) en el punto de equilibrio con valores nominales en sus parámetros $\pi_0 \in \Pi$. Posteriormente, P_{nom} es excitada a través del cambio en los parámetros cinéticos y concentración en la alimentación con el fin de estimular la respuesta en la frecuencia e identificar una familia de plantas $\Lambda = [I + W_p(s)\Delta(s)]P_{nom}(s)$. De este modo, es posible diseñar un controlador que mitigue las perturbaciones y sea robusto ante incertidumbres.

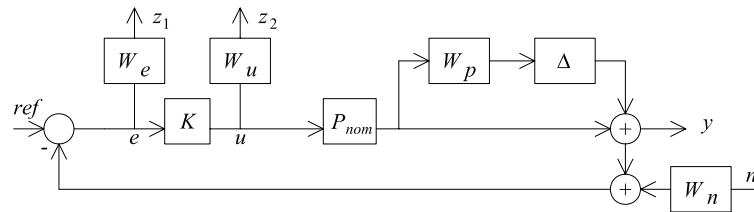


Figura 2.3: Diagrama de bloques para la síntesis del controlador. W_e , W_u y W_n son funciones de peso para el diseño de control. $W_p\Delta$ representa la incertidumbre del tipo multiplicativa no estructurada ($\|\Delta\|_\infty \leq 1$) cuya máxima respuesta en la frecuencia es capturada por la función de peso W_p . La planta nominal P_{nom} es construida mediante la linealización del modelo (2.1) en el punto de equilibrio (2.3) y (2.4).

En la Figura 2.3 se pueden observar las señales de entrada u, n , y $x_{3,in}$ las cuales están relacionadas con el factor de dilución $D - D^*$, ruido en la medición y concentración de alimentación de la DQO, respectivamente. La variable de salida y corresponde a la medición de la DQO $x_3 - x_3^*$ medido en la corriente de salida del digestor, z_1 y z_2 son señales de salida auxiliares usadas para especificar requerimientos en las señales de control u y error (e). La planta generalizada G es obtenida mediante la relación de las señales de entrada / salida tal que $z = Gd$, donde el vector de salida es $z = [z_1 \ z_2 \ | \ e]^T$ y el vector de entrada es $d = [n \ | \ u]^T$

evaluado en $s = \omega j$ para $\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]$. De esta forma, G está dada por la siguiente relación:

$$G = \left[\begin{array}{c|c} W_e W_n & -W_e P_{nom} \\ \hline 0 & W_u \\ \hline -W_n & -P_{nom} \end{array} \right] \quad (2.9)$$

donde W_u , W_e y W_n son definidos en la siguiente sección. El controlador es denotado como K . Formalmente, el problema de control descrito puede ser abordado vía H_∞ clásico [34]. De hecho, si existe uno, K puede ser parametrizado tal que la función de transferencia a lazo cerrado es minimizada:

$$\|T_{zd}\|_\infty = \max_\omega \sigma \left[P_{1,1} + P_{1,2} K (I - P_{2,2} K)^{-1} P_{2,1} \right] \quad (2.10)$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ \dots \\ u \end{bmatrix}$$

Al problema de seleccionar, tanto el orden, como el valor de los parámetros de los polinomios de $K(s)$ (numerador y denominador), se le conoce como parametrización de un controlador H_∞ .

2.3.1. Planta nominal y familia de plantas inciertas

La **Proposición 3** establece la existencia y unicidad del único punto de equilibrio $x^* \neq 0$ para cualquier conjunto de parámetros. Considere las siguientes variables de desviación $u = D - D^*$ y la DQO como variable medida ($y = x_3 - x_3^*$), entonces es posible obtener la siguiente linealización del modelo nominal (2.1):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(t_0) &= x_0 \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde $A = [\partial f_i / \partial x_k] |_{x^*}$, $B = [\partial f_i / \partial u] |_{D^*}$, para $i, k = 1, 2, 3, 4$, y $C = [0, 0, 1, 0]$. Considerando los siguientes parámetros nominales $\pi_0 \in \Pi$ [7, 32]: $D^* = 0.02(h^{-1})$, $\alpha = 0.5$, $k_1 = 42.14$, $k_2 = 116.5(mmol/g)$, $k_3 = 268(mmol/g)$, $\mu_{1,max} = 0.05(h^{-1})$, $\mu_{2,max} = 0.031(h^{-1})$, $K_{S1} = 7.1(g/l)$, $K_{S2} = 9.28(mmol/l)$, $K_{I2} = 16(mmol/l)$; así como las concentraciones de alimentación $x_{j,in} = [16, 68.78]$ donde $j = 3, 4$. Es importante mencionar que $x_{3,in} = 16[g/l]$ y $x_{4,in} = 68.78[g/l]$ representan la concentración de DQO y AGV de alimentación nominal al proceso de DA respectivamente. El sistema nominal (2.11), se expresa se como la realización

del espacio de estados:

$$P_{nom} = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad (2.12)$$

Partiendo de la **Proposición 3** es posible obtener una planta nominal en el punto x^* . Adicionalmente, Si la realización (2.12) se obtiene de manera balanceada (Sección A.1) dado que el punto x^* es localmente estable entonces la planta nominal $P_{nom} \in \mathcal{RH}_\infty$. Este es un indicativo que la teoría de H_∞ puede aplicarse de manera exitosa dado que los requerimientos se cumplen al menos para P_{nom} .

Mediante el análisis de sensibilidad [33] del modelo (2.1) mostrado la Sección 2.1.1, se determinó que los parámetros que inducen una variación significativa en las soluciones son : α , $\mu_{1,max}$ y $\mu_{2,max}$. Considerando una variación del $\pm 10\%$ en el valor de los parámetros nominales en α , $\mu_{1,max}$, y $\mu_{2,max}$, se puede considerar como una variación paramétrica representativa en el diseño robusto. Dicha variación se considera suficiente para abarcar variaciones en el modelo debido a los cambios en la operación real del proceso de DA. A través de la modificación del valor de los parámetros en el intervalo $\pm 10\%$, se obtendrán cada elemento (2.11) de una familia de plantas Λ inciertas.

La incertidumbre paramétrica puede observarse (debido a los cambios en el valor de los parámetros) y compararse con respecto a la respuesta en la frecuencia de la planta nominal P_{nom} en $\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}] = [1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^2]$. De hecho, es posible representar la incertidumbre paramétrica como una incertidumbre relativa:

$$U_{rel}(\omega) = \left| \frac{P(\omega) - P_{nom}(\omega)}{P_{nom}(\omega)} \right| \quad (2.13)$$

donde $P(\omega)$ representa una planta para cada conjunto de valores en los parámetros $\alpha, \mu_{1,max}$ y $\mu_{2,max}$. Cabe aclarar que U_{rel} puede aproximarse como $W_p \Delta$ donde $\|\Delta\|_\infty \leq 1$. En la Figura 2.4 se muestra la respuesta en la frecuencia de la planta nominal $P_{nom}(\omega)$ y la familia de plantas $\Psi = (I + U_{rel})P_{nom}$ la cual contiene cada una de las plantas $P(\omega)$. En la Figura 2.5 se muestra la respuesta en la frecuencia de (2.13) así como el valor superior de la incertidumbre relativa U_{rel} , la cual se puede calcular con la siguiente expresión:

$$\max_{\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]} \{U_{rel}\} = \max_{\omega} \left| \frac{P(\omega) - P_{nom}(\omega)}{P_{nom}(\omega)} \right| \quad (2.14)$$

Obsérvese en la Figura 2.4 que la variación paramétrica inducida en P_{nom} provoca una respuesta en la frecuencia de los valores propios de $P(\omega)$ en un intervalo tanto superior como inferior con respecto a P_{nom} en el rango de frecuencia de interés. Para los propósitos de

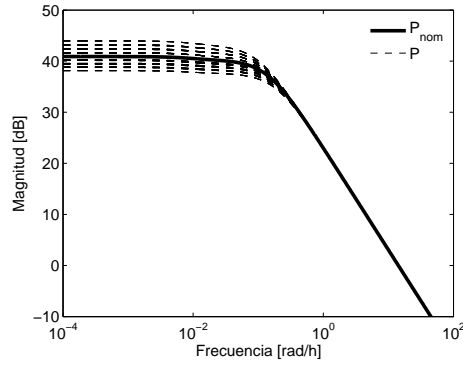


Figura 2.4: Respuesta en la frecuencia de la planta nominal $P_{nom}(\omega)$ y el conjunto de modelos perturbados $P(\omega)$.

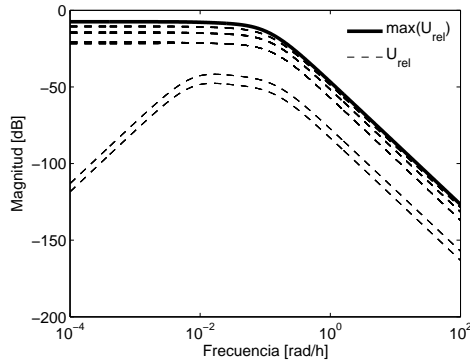


Figura 2.5: Respuesta en la frecuencia de U_{rel} y $\max(U_{rel})$.

diseño no es necesario saber que valores de $\alpha, \mu_{1,max}$ y $\mu_{2,max}$ provocan la máxima desviación $\max(U_{rel})$ bajo el modelo de incertidumbre propuesta U_{rel} . De hecho, lo importante es determinar una función de peso W_p con la información contenida en $\max(U_{rel})$ de tal modo que podamos expresar un modelo de incertidumbre no estructurada del tipo multiplicativa asociada a la familia de plantas $\Psi = (I + U_{rel})P_{nom}$ como $\Lambda = (I + W_p\Delta)P_{nom}$ donde $\|\Delta\|_\infty \leq 1$.

Existen varios modelos de incertidumbre no estructurada que capturan las desviaciones paramétricas de una familia de plantas Λ y P_{nom} . Para propósitos del presente trabajo se seleccionó el modelo de incertidumbre multiplicativa no estructurada. Dicho modelo nos permitirá mitigar los efectos asociados a errores de medición y dinámica en alta frecuencia no contemplada asociada a la familia de plantas Λ .

2.3.2. Funciones de peso

Las funciones de peso, mostradas en el diagrama de bloques de la Figura 2.3, W_u y W_e representan requerimientos en la frecuencia de las señales de salida z_1 y z_2 respectivamente;

mientras que W_n contiene información de la señal de entrada n . La función W_p contiene la información sobre la incertidumbre paramétrica (Sección 2.3.1). La estructura de dichas funciones de peso es la siguiente:

$$\begin{aligned}
W_p(\omega) &= \frac{W_{p,N}(\omega)}{W_{p,D}(\omega)} \\
W_u(\omega) &= \frac{s + \omega_u/M_u}{\varepsilon_u s + \omega_u} = \frac{s + 100/0.1}{0.05s + 100} \\
W_e(\omega) &= \frac{s/M_e + \omega_e}{s + \omega_e \varepsilon_e} = \frac{s/1 + 100}{s + (100)(0.005)} \\
W_n(\omega) &= \frac{s + \omega_n \varepsilon_n}{s/M_n + \omega_n} = \frac{s + (1000)(0.01)}{s/0.1 + 1000}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

donde los parámetros depende del requerimiento asociado a cada función. A continuación se explica brevemente cada una de estas funciones.

La información contenida por $\max_{\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]} \{U_{rel}\}$ puede ser aproximada mediante una función de peso $W_p(\omega)$. Es posible representar W_p como una función de transferencia, estable y de fase mínima. Mediante un método de búsqueda iterativo de ajuste mediante mínimos cuadrados es posible obtener un sistema matricial que capture la respuesta en la frecuencia de (2.14). De esta forma es posible obtener $W_p(\omega) = W_{p,N}(\omega)/W_{p,D}(\omega)$; donde $W_{p,N}(\omega) = 1.193 \times 10^{-5}s^3 + 4.695 \times 10^{-4}s^2 + 4.298 \times 10^{-3}s + 5.971 \times 10^{-5}$, y $W_{p,D}(s) = s^3 + 0.237s^2 + 0.015s + 1.593 \times 10^{-4}$.

Debido a que la señal de control es ejecutada mediante un servo-mecanismo (servo-válvula), el cual permite la manipulación del flujo de alimentación al DA, es deseable restricciones en la frecuencia mediante una función de transferencia $W_u(\omega)$ con $\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]$. Es posible incluir un requerimiento en el desempeño mediante la siguiente expresión $\|W_u K(1 + PK)^{-1}\|_\infty \leq 1 \Rightarrow \|\frac{1}{W_u}\|_\infty \leq \|K(1 + PK)^{-1}\|_\infty$. W_u tiene la estructura presentada en (2.15), donde $\varepsilon_u = 0.05$, $\omega_b = 100$ y $M_u = 0.1$. Una posible interpretación física de la función de peso W_u es la siguiente. W_u está acotada mediante el valor de $M_u = 0.1$ a frecuencias bajas, la cual está relacionada con las limitaciones del esfuerzo del controlador así como los límites de saturación en los actuadores. La ganancia M_u de KS puede ser en algunos casos de valor elevado, sin embargo para esta aplicación su valor se relaciona con el máximo factor de dilución esperado $D - D^* = 0.1h^{-1}$. Así mismo, el valor de $\varepsilon_u = 0.05$ está relacionado con la ganancia en altas frecuencias de KS . Es deseable que la ganancia en altas frecuencias disminuya a partir de la frecuencia ω_b a fin de que el ruido sea atenuado.

Para el siguiente criterio $\|W_e(1 + PK)^{-1}\|_\infty \leq 1 \Rightarrow \|\frac{1}{W_e}\|_\infty \leq \|(1 + PK)\|_\infty$, W_e tiene la

estructura presentada en (2.15) donde $M_e = 10$, $\omega_e = 100$ y $\varepsilon_e = 0.005$. Es importante notar que la función de sensibilidad a lazo cerrado $(1 + PK)^{-1}$ es un criterio asociado con el desempeño robusto ante la atenuación de perturbaciones.

La función de peso asociado a la señal de ruido en la medición tiene la estructura presentada en (2.15) donde $\omega_n = 10^3$, $\varepsilon_n = 0.01$ y $M_n = 0.1$. A la función de peso W_n es posible darle la siguiente interpretación física. Una perturbación en la medición de la variable de salida, en este caso la DQO, puede ser causada por la resolución y/o la respuesta en los equipos de medición. En la actualidad, la tecnología disponible en equipo de medición de la DQO (o equipos en variables similares) típicamente responden en tiempos de 1.5 a 15 minutos (equivalente 25 a 250 [rad/h]) con una resolución de 10 a 0.2 [g/l] de la DQO respectivamente. Sin pérdida de generalidad, es seleccionada de manera arbitraria en un valor de $\varepsilon_n = 0.01$ y $M_n = 0.1$, cabe aclarar que dicho valor es posible ajustarlo según las especificaciones del equipo utilizado en la medición de la variable de salida.

2.3.3. Síntesis de controlador nominal y robusto

El problema de control subóptimo (ver sección B) fue resuelto numéricamente mediante la ecuación de Riccati [35, 36]. La aproximación del controlador $K(s)$ fue obtenido mediante un proceso numérico iterativo (Toolbox control robusto Matlab[®]), asegurando la estabilidad nominal con $\gamma = 0.1517$. Asumiendo que el modelo de plantas perturbadas es descrito mediante el siguiente conjunto $\Lambda = \{(I + W_p \Delta) P_{nom} : \Delta \in RH_\infty\}$. Entonces, la condición de estabilidad robusta se cumple con $\|W_p P_{nom} K(I + P_{nom} K)^{-1}\|_\infty = 0.3482 \leq 1$ (Teorema 8.5 [36]). El controlador de 8° orden obtenido es $K_8(s) = K_{8,N}(s)/K_{8,D}(s)$, donde $K_{8,N}(s) = 13.33s^7 + 2.8 \times 10^4 s^6 + 2.677 \times 10^5 s^5 + 1.03 \times 10^6 s^4 + 1.38 \times 10^3 s^3 + 7328s^2 + 115.6s + 0.544$ y $K_{8,D}(s) = s^8 + 1266s^7 + 2.722 \times 10^5 s^6 + 6.366 \times 10^5 s^5 + 4.645 \times 10^4 s^4 + 8.745 \times 10^5 s^3 + 5.677 \times 10^4 s^2 + 975.5s + 4.907$. Los valores Hankel del controlador de 8° orden son $\sigma_8 = [0.1946, 0.1530, 0.0211, 0.0041, 0.0032, 2.459 \times 10^{-7}, 1.636 \times 10^{-8}, 4.409 \times 10^{-10}]$.

Con el fin de obtener un controlador de orden menor, se aplicó una truncación balanceada al controlador (K_8) de orden completo. El controlador de 4° orden es $K_4(s) = K_{4,N}(s)/K_{4,D}(s)$, donde $K_{4,N}(s) = 20.57s^3 + 1232s^2 + 1233s + 138.6$ y $K_{4,D}(s) = s^4 + 147.6s^3 + 2947s^2 + 3977s + 1180$. Los valores Hankel del controlador reducido son: $\sigma_4 = [0.1946, 0.1530, 0.0211, 0.0041]$. Es decir, la selección del nuevo orden del controlador es cuatro, dado que se puede considerar despreciable la contribución de los últimos cuatro valores Hankel en el rango de frecuencia de interés. Esto se puede observar en la respuesta en la frecuencia de los valores singulares en la Figura 2.6. El comportamiento de la respuesta en la frecuencia

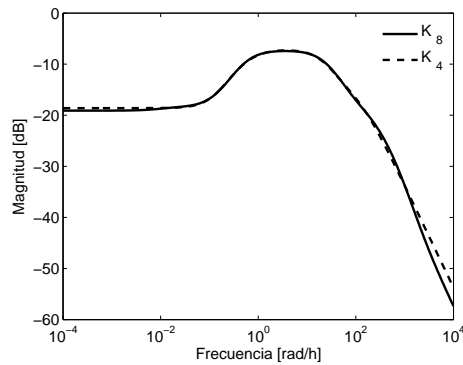


Figura 2.6: Respuesta en la frecuencia del controlador K_8 y K_4 .

para el controlador K_8 y K_4 es similar en el rango de frecuencia $\omega \in [10^{-4}, 10^4]$. La Figura 2.7 muestra la respuesta en la frecuencia de la planta nominal P_{nom} , el controlador K_4 y la función de transferencia S .

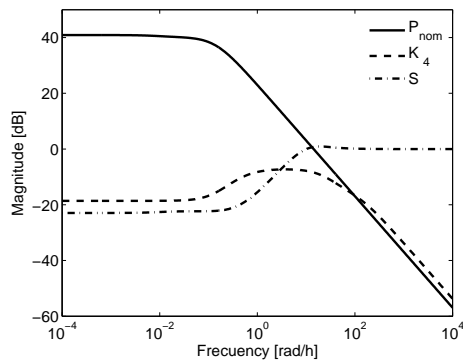


Figura 2.7: Respuesta en la frecuencia de la planta nominal P_{nom} , controlador K_4 y la función de transferencia S .

2.4. Resultados numéricos del controlador a lazo cerrado

En esta sección se presentan algunas simulaciones numéricas a lazo cerrado a fin de ilustrar la implementación del esquema de control en el modelo no lineal (2.1) del proceso de DA para el tratamiento de aguas residuales en diferentes escenarios de regulación robusta. Cinco casos fueron abordados, los cuales están representados como: (i), (ii), (iii), (iv) y (v). En los casos (iii) y (iv) se presentan sub-casos, los cuales están representados por: (iii-1), (iii-2) y (iv-1), (iv-2).

Caso (i) El objetivo del presente caso es ilustrar mediante la implementación numérica a lazo cerrado que el controlador es capaz de mitigar perturbaciones en la concentración de

la DQO en la corriente de alimentación. En la Figura 2.8 se muestra los resultados del caso (i). En la Figura 2.8a se presenta la concentración de la DQO a la salida del proceso de DA

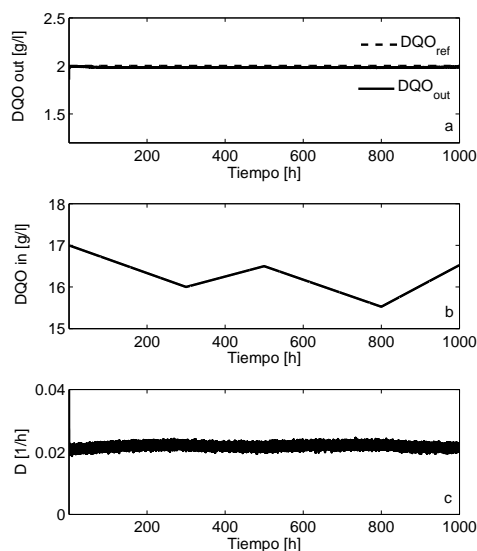


Figura 2.8: Resultados de la simulación para la evaluación del controlador caso (i). a) Concentración de la DQO a la salida del digestor. b) Concentración de la DQO a la entrada del digestor ($x_{3,in}$). c) Factor de dilución, la cual esta relacionada con la entrada de control calculada por la ley de control ($u = D - D^*$)

DQO_{out} [g/l] para un valor de referencia de $DQO_{ref} = 2$ [g/l]. En la Figura 2.8b se presenta la variación en la concentración de alimentación al digestor anaerobio DQO_{in} [g/l], puede observarse que existen variaciones entre 17 y 15.5 [g/l]. En la Figura 2.8c se presenta el factor de dilución D [h^{-1}] el cual está asociada con la señal de control $u = D - D^*$; de hecho puede apreciarse un componente de alta frecuencia la cual está asociada con la mitigación del ruido que se adiciona a la señal de medición (señal de salida $y = x_4 - x_4^*$). La perturbación debida al ruido es mitigada debido a que se contempló una señal de ruido (n) mediante la función de peso W_n durante la síntesis del controlador (ver Figura 2.3). Los resultados del caso (i) indican que el controlador es robusto ante perturbaciones en la concentración de la DQO en la alimentación logrando una regulación en una referencia de la DQO.

Caso (ii) El objetivo del presente caso es ilustrar mediante la implementación numérica a lazo cerrado que el controlador es capaz de mitigar perturbaciones en la concentración de la DQO en la corriente de alimentación incluso cuando existen cambios en escalón en la referencia. En la Figura 2.9 se muestra los resultados del caso (ii). En la Figura 2.9a se presenta la concentración de la DQO a la salida del proceso de DA (DQO_{out} [g/l]) para un cambio en escalón en el valor de la referencia a la salida del digestor (DQO_{ref} [g/l]). En la Figura 2.9b se

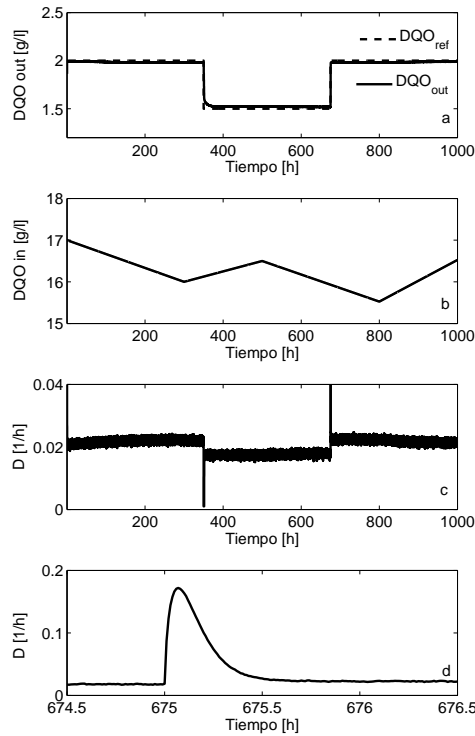


Figura 2.9: Resultados de la simulación para la evaluación del controlador caso (ii). a) Concentración de la DQO a la salida del digestor. b) Concentración de la DQO a la entrada del digestor ($x_{3,in}$). c) Factor de dilución, la cual esta relacionada con la entrada de control calculada por la ley de control ($u = D - D^*$). d) Entrada de control para el intervalo de tiempo $[674.5, 676.5]$ h, nótese que la señal de control está acotada.

presenta la variación en la concentración de alimentación al digestor anaerobio DQO_{in} [g/l], puede observarse que existen variaciones entre 17 y 15.5 [g/l]. En la Figura 2.8c se presenta el factor de dilución D [h^{-1}] el cual está asociado con la señal de control $u = D - D^*$ de hecho puede apreciarse un componente de alta frecuencia la cual está asociada a la mitigación del ruido que es adicionado a la señal de medición (señal de salida $y = x_4 - x_4^*$). La perturbación debida al ruido es mitigada debido a que se contempló una señal de ruido (n) mediante la función de peso W_n durante la síntesis del controlador (ver Figura 2.3). La perturbación debida al ruido es mitigada debida al elemento n y la función de peso W_n durante la síntesis del controlador (ver Figura 2.3). Adicionalmente, en la Figura 2.8c se observa que los cambios en escalón inducen un cambio abrupto en la señal de control, sin embargo esta señal está acotada. El acotamiento en la señal de control puede observarse en la Figura 2.9d mediante un acercamiento en la escala de tiempo $[674.5, 676.5]$ [h]. Es importante mencionar que el problema de control abordado únicamente fue para regulación y no para seguimiento,

sin embargo debido a la inclusión de la función de peso W_e es posible imponer un requerimiento en magnitud y frecuencia en la señal del error e la cual tiene como señal de salida z_1 (ver Figura 2.3). Adicionalmente, debido a la restricción en la señal de entrada de control u mediante la función de peso W_u es posible imponer en cierto sentido una restricción en magnitud y frecuencia dando como resultado la señal z_2 , de hecho sin la restricción W_u la señal de control tendría una magnitud mayor a la presentada en la Figura 2.9d. Los resultados del caso (ii) indican que el controlador es robusto ante perturbaciones en la concentración de la DQO en la alimentación logrando una regulación con variaciones en escalón en la DQO de referencia mediante un factor de dilución acotado.

Caso (iii) El objetivo del presente caso es ilustrar mediante la implementación numérica a lazo cerrado que el controlador es capaz de mitigar perturbaciones en la concentración de la DQO en la corriente de alimentación incluso con incertidumbres paramétricas en el modelo no lineal. Dos conjuntos de variaciones en los parámetros son inducidas mediante el sub-caso (iii-1) y sub-caso (iii-2). Dichas variaciones paramétricas se muestran en la Figura 2.10 y los resultados del caso (iii) se muestra en la Figura 2.11. La concentración de la DQO de alimentación al proceso de DA para este caso se presenta de igual forma en la Figura 2.9b. En

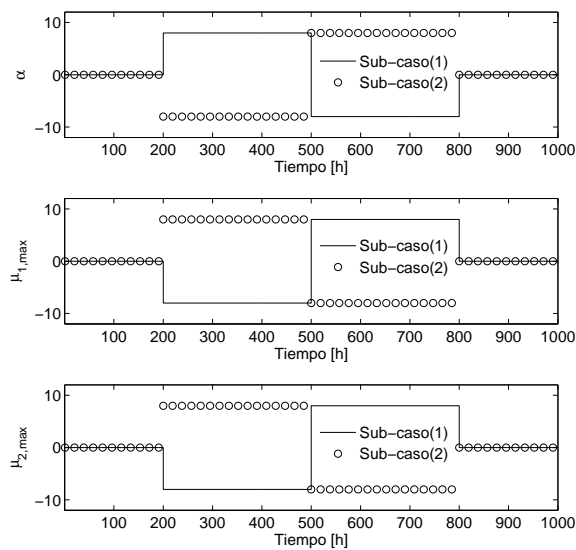


Figura 2.10: Porcentaje de variación paramétrica con respecto al valor nominal presentada en los parámetros α , $\mu_{1,max}$, y $\mu_{2,max}$ durante el tiempo de simulación. Nótese que durante los intervalos de tiempo $[0, 200]$ h y $[800, 1000]$ h el porcentaje de variación es cero, por lo que el valor de los parámetros en esos intervalos corresponde al valor nominal.

la Figura 2.10 se presenta la variación paramétrica a la cual es sometido el modelo no lineal (2.1) del proceso de DA. Para este caso se conserva el valor nominal durante los intervalos

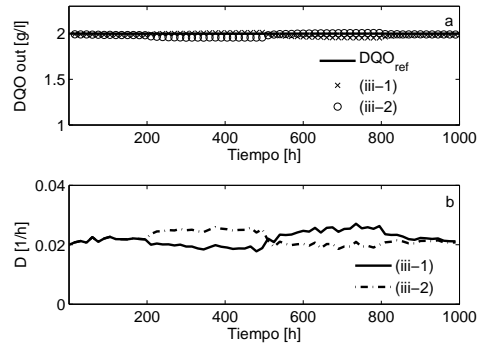


Figura 2.11: Resultados de la simulación para la evaluación del controlador caso (iii). a) Concentración de la DQO a la salida del digestor para el sub-caso (iii-1) y (iii-2). b) Factor de dilución, la cual esta relacionada con la entrada de control calculada por la ley de control ($u = D - D^*$) para el sub-caso (iii-1) y (iii-2).

$[0, 200]$ [h] y $[800, 1000]$ [h], sin embargo para el intervalo $[800, 1000]$ [h] se inducen variaciones en los parámetros α , $\mu_{1,max}$, y $\mu_{2,max}$ en un rango de $\pm 8\%$ del valor nominal de dichos parámetros. De esta forma, para el sub-caso (iii-1), por ejemplo, el valor del parámetro α varía en el intervalo de tiempo $[200, 500]$ [h] un $+8\%$ y durante el intervalo $[500, 800]$ [h] un -8% de su valor nominal, manteniéndose durante los periodos $[0, 200]$ [h] y $[800, 1000]$ [h] en su valor nominal. Así pueden describirse las demás variaciones en los parámetros $\mu_{1,max}$, y $\mu_{2,max}$ para el sub-caso (iii-1). Para el sub-caso (iii-2), por ejemplo, el valor del parámetro α varía en el intervalo de tiempo $[200, 500]$ [h] un -8% y durante el intervalo $[500, 800]$ [h] un $+8\%$ de su valor nominal, manteniéndose durante los periodos $[0, 200]$ [h] y $[800, 1000]$ [h] en su valor nominal. En la Figura 2.11a se presenta la concentración de la DQO a la salida del proceso de DA (DQO_{out} [g/l]) para un valor de referencia de $DQO_{ref} = 2$ [g/l]. En la Figura 2.11b se presenta el factor de dilución D [h^{-1}] el cual está asociado con la señal de control $u = D - D^*$. En la Figura 2.9b se presenta la variación en la concentración de alimentación al digestor anaerobio DQO_{in} [g/l], puede observarse que existen variaciones entre 17 y 15.5 [g/l]. En este caso de estudio, se logra la regulación de la DQO (DQO_{out} [g/l]) para un valor de referencia de $DQO_{ref} = 2$ [g/l] a pesar de las variaciones paramétricas. Esto se debe a que el controlador cumple con el criterio de estabilidad robusta para la familia de plantas Λ la cual incluye variaciones paramétricas en los parámetros α , $\mu_{1,max}$, y $\mu_{2,max}$. Adicional a esto, el controlador logra mitigar las fluctuaciones en la variación en la concentración de la DQO a la entrada del proceso de DA (DQO_{in} [g/l]). Los resultados del caso (iii) indican que el controlador es robusto ante perturbaciones en la concentración de la DQO de la alimentación y ante incertidumbres paramétricas logrando una regulación en la DQO de referencia.

Caso (iv) El objetivo del presente caso es ilustrar mediante la implementación numérica a

lazo cerrado que el controlador es capaz de mitigar perturbaciones en la concentración de la DQO en la corriente de alimentación incluso con incertidumbres paramétricas en el modelo no lineal y cambios en escalón en la referencia. Dos conjuntos de variaciones en los parámetros son inducidas mediante el sub-caso (iv-1) y sub-caso (iv-2). Dichas variaciones paramétricas se muestran en la Figura 2.10 y los resultados del caso (iv) se muestra en la Figura 2.12. La concentración de la DQO de alimentación al proceso de DA para este caso se presenta de igual forma en la Figura 2.9b. En la Figura 2.12a se presenta la concentración

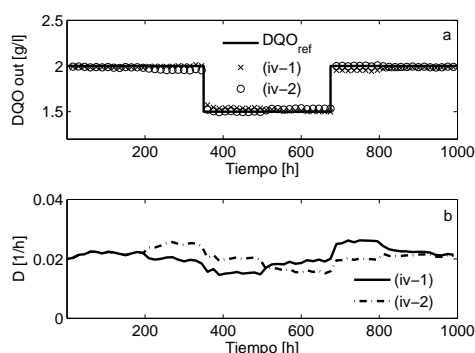


Figura 2.12: Resultados de la simulación para la evaluación del controlador caso (iv). a) Concentración de la DQO a la salida del digester para el sub-caso (iv-1) y (iv-2). b) Factor de dilución, la cual esta relacionada con la entrada de control calculada por la ley de control ($u = D - D^*$) para el sub-caso (iv-1) y (iv-2).

de la DQO a la salida del proceso de DA (DQO_{out} [g/l]) para un cambio en escalón en el valor de la referencia a la salida del digester (DQO_{ref} [g/l]). En la Figura 2.11b se presenta el factor de dilución D [h^{-1}] el cual está asociado con la señal de control $u = D - D^*$. En este caso de estudio, se logra la regulación de la DQO (DQO_{out} [g/l]) con variaciones en escalón en la DQO de referencia (DQO_{ref} [g/l]) a pesar de las variaciones paramétricas. Esto se debe a que el controlador cumple con el criterio de estabilidad robusta para la familia de plantas Λ la cual incluye variaciones paramétricas en los parámetros α , $\mu_{1,max}$, y $\mu_{2,max}$. Adicional a esto, el controlador logra mitigar las fluctuaciones en la variación en la concentración de la DQO a la entrada del proceso de DA (DQO_{in} [g/l]). Los resultados del caso (iv) indican que el controlador es robusto ante perturbaciones en la concentración de la DQO en la alimentación e incertidumbre paramétrica logrando una regulación con variaciones en escalón en la DQO de referencia.

Caso (v) El objetivo del presente caso es ilustrar mediante la implementación numérica a lazo cerrado que el controlador es robusto ante perturbaciones en la concentración de la DQO en la corriente de alimentación incluso con componentes en la frecuencia donde la planta es sensible y robusto ante incertidumbres paramétricas en el modelo no lineal y cambios en es-

calón en la referencia. La variación en los parámetros se muestra en la Figura 2.10 sub-caso (1). Los resultados del caso (v) se muestra en la Figura 2.13. En la Figura 2.13a se presenta

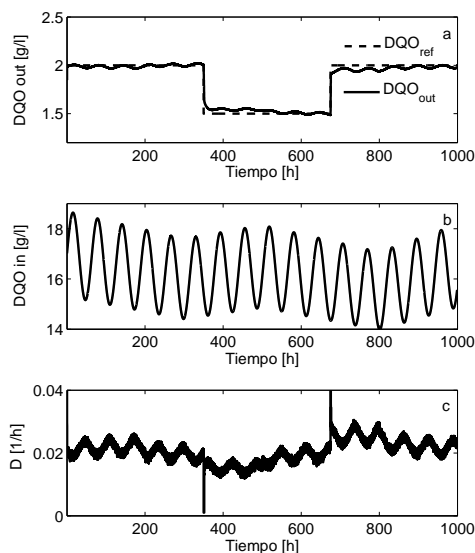


Figura 2.13: Resultados de la simulación para la evaluación del controlador caso (v). a) Concentración de la DQO a la salida del digestor. b) Concentración de la DQO a la entrada del digestor ($x_{3,in}$). c) Factor de dilución, la cual esta relacionada con la entrada de control calculada por la ley de control ($u = D - D^*$).

la concentración de la DQO a la salida del proceso de DA (DQO_{out} [g/l]) para un cambio en escalón en el valor de la referencia a la salida del digestor (DQO_{ref} [g/l]). En la Figura 2.13b se muestra la concentración de la DQO de alimentación al proceso de DA; como se aprecia en la figura, se presenta un perfil similar al mostrado en la Figura 2.9b pero con un componente proporcional en magnitud y frecuencia, donde la planta nominal es sensible. En la Figura 2.13c se presenta el factor de dilución D [h^{-1}] el cual está asociado con la señal de control $u = D - D^*$. Es importante mencionar que aunque la Figura 2.13 no muestra el acotamiento del factor de dilución, éste presenta un comportamiento similar al de la Figura 2.9d. Al igual que los casos (i) y (ii), una señal de ruido es adicionada a la variable medida (Figura 2.13a). En este caso de estudio, se logra la regulación de la DQO (DQO_{out} [g/l]) con variaciones en escalón en la DQO de referencia (DQO_{ref} [g/l]) a pesar de las variaciones paramétricas. Además, el controlador logra mitigar las fluctuaciones en la variación en la concentración de la DQO a la entrada del proceso de DA (DQO_{in} [g/l]) incluso con componentes en la frecuencia donde la planta nominal y la familia de plantas Λ son sensibles. Finalmente, para este caso, el controlador logra mitigar las componentes del ruido en la variable medible y se mantiene la señal de control acotada incluso en cambios de referencia a pesar que el controlador fue diseñado para un problema de regulación y no de seguimiento.

Los resultados del caso (v) indican que el controlador es robusto ante: perturbaciones en la concentración de la DQO en la alimentación con componentes en la frecuencia, incertidumbre paramétrica, ruido en la variable de medición.

Nota 4. Mientras más elementos perturben al sistema, mayor será la degradación de la señal de salida DQO_{out} (Figuras 2.8a, 2.9a, 2.11a, 2.12a, 2.13a) con respecto a la referencia dando como resultado un mayor error y en el caso de cambios de referencia un mayor esfuerzo de la señal de control. Sin embargo, dependiendo de la perturbación que se desee mitigar es posible decidir el correcto balance entre el requerimiento de regulación y esfuerzo en la señal de control. Esto no es necesariamente abordado durante la síntesis por otras técnicas de control ya propuestas. Para ejemplificar este hecho se presenta una comparación entre el controlador propuesto y uno diseñado por otros autores.

2.5. Resultados numéricos de la comparación del controlador a lazo cerrado

En esta sección se presenta la simulación numérica a lazo cerrado a fin de comparar la implementación del esquema de control en el modelo no lineal (2.1) del proceso de DA para el tratamiento de aguas residuales entre el diseño obtenido y un controlador lineal del tipo RFOF (por sus siglas en inglés robust reference-feedforward / output-feedback control) previamente reportado por Méndez-Acosta y col. [7] (L-RFOF).

La ley de control L-RFOF ha sido aplicada al modelo de Bernard y col. [30] (6° orden) y ha demostrado ser robusta ante errores de modelado, perturbaciones en la concentración e incluso aborda restricciones en el actuador a fin de evitar la saturación [7]. El controlador L-RFOF es capaz de regular de manera robusta la DQO en el proceso de una manera precisa (errores menores al 5% del valor de la DQO de referencia). Sin embargo, la acción de control (factor de dilución D) puede presentar altas magnitudes cuando el sistema es sometido a perturbaciones con componentes en la frecuencia. Este efecto se debe al procedimiento de síntesis, en donde una inversión exacta de la planta puede provocar dicho efecto el cual es mitigado mediante un esquema de antisaturación. Durante el diseño de la ley de control L-RFOF existe un balance de objetivos, por un lado existe el compromiso de la regulación robusta y por otro se tiene el requerimiento de magnitudes de control *bajas* (acotadas a valores deseables que eviten efectos de saturación). Dichos objetivos no siempre pueden ser abordados de manera natural durante la síntesis.

En la Figura 2.14 se presenta la simulación numérica a lazo cerrado para la regulación de la DQO (2 [g/l]) en el modelo no lineal (2.1) a la salida del proceso de DA. La concentración de alimentación es perturbada con una señal que contiene componentes en la frecuencia menores a 10^{-1} [rad/h] en donde la planta nominal P_{nom} presenta una respuesta. En la Figura 2.15 se puede observar que el controlador L-RFOF presenta mayor magnitud a frecuencias menores a 10^{-1} [rad/h] . Es decir, si una perturbación tiene una componente en frecuencia menor a 10^{-1} [rad/h] (donde la planta nominal respondería a lazo abierto) se esperaría a lazo cerrado una respuesta mayor en el caso del controlador L-RFOF que la ley de control H_∞ . Comparando los resultados en la Figura 2.14a y 2.14b, se obtiene un

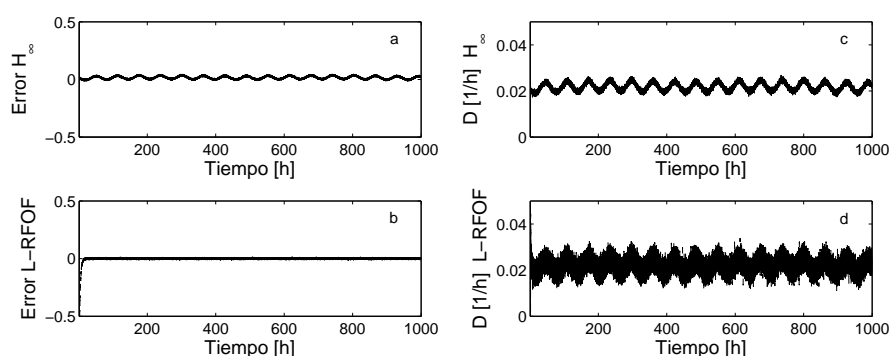


Figura 2.14: Resultados de la simulación para la comparación entre el controlador robusto propuesto y el controlador lineal del tipo RFOF. a) Error presentado por la ley de control H_∞ . b) Error presentado por la ley de control L-RFOF. c) Factor de dilución, la cual esta relacionada con la entrada de control ($u = D - D^*$) calculada por la ley de control propuesta H_∞ . d) Factor de dilución calculada por la ley de control L-RFOF.

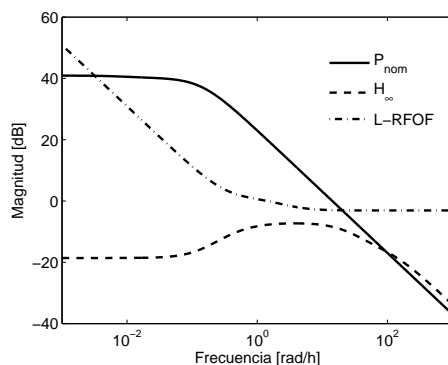


Figura 2.15: Respuesta en la frecuencia de P_{nom} , el controlador robusto propuesto y el controlador lineal del tipo RFOF.

mayor error en la ley de control propuesta H_∞ que el obtenido por la ley de control L-RFOF. Sin embargo, se obtiene una señal de control de menor magnitud en la ley de control H_∞

que el obtenido por la ley de control L-RFOF. Este efecto presentado por la ley de control control propuesta H_∞ se debe a la estructura de las funciones de peso y los requerimientos en las señales que se desea abordar. A diferencia de la ley de control L-RFOF, durante la síntesis del controlador H_∞ es posible balancear los requerimientos de regulación robusta y restricciones en la acción de control mediante funciones de peso. El hecho que se presenten perturbaciones en frecuencias superiores a 10^{-1} [rad/h] puede ser un criterio adicional en la selección de una de las dos leyes de control comparadas en esta sección (ya que la planta nominal no presenta una respuesta significativa a frecuencias superiores a 10^{-1} [rad/h]).

2.6. Comentarios sobre el capítulo

Se obtuvieron resultados del modelo reducido de Bernard y col. [30] (modelo (2.1) el cual describe el proceso de DA para el tratamiento de vinazas) en el sentido de unicidad y estabilidad local del punto de equilibrio (**Proposición 3**). Dicha caracterización sienta precedentes para la síntesis de un controlador robusto. Mediante un análisis de sensibilidad paramétrica se identificaron los parámetros que afectan las soluciones del sistema dinámico del digestor. Los parámetros están relacionados con la cinética y con el régimen hidrodinámico del digestor. Dichos parámetros fueron considerados como la fuente de la incertidumbre paramétrica.

Mediante el modelo (2.1) y un conjunto de parámetros nominales fue posible obtener un modelo nominal lineal el cual pertenece al espacio de funciones \mathcal{RH}_∞ . Mediante requerimientos en el error y acotamiento en la acción de control, abordados mediante funciones de peso la cual contienen información en magnitud y frecuencia, fue posible diseñar un controlador nominal H_∞ el cual asegura la estabilidad interna del sistema. El controlador nominal cumplió con el requisito de estabilizar robustamente una familia de plantas que representan el efecto de las posibles variaciones paramétricas que pudieran derivarse debido a un cambio en las condiciones de operación.

Mediante simulaciones numéricas el controlador propuesto es capaz de lograr la regulación robusta de la salida del proceso de DA (modelo (2.1) para condiciones que pudieran presentarse en el tratamiento de aguas residuales provenientes de la industria del Tequila. A pesar que el controlador fue abordado para un problema de regulación, éste es capaz de regular de manera robusta ante un cambio en escalón de la variable de salida. La compensación de elementos como el ruido, perturbaciones en la concentración de la alimentación, variaciones paramétricas y cambios en la referencia requieren de un esfuerzo mayor pero acotado por parte del controlador, así como una degradación gradual de la señal de salida mostrando un incremento del error pero acotado a un nivel aceptable de desempeño.

Mediante la comparación con otra ley de control se pudo dilucidar que la ley de control propuesta aunque permite errores en la salida mayores, presenta un menor esfuerzo en su ejecución. De hecho, durante la síntesis del controlador puede manipularse las funciones de peso a fin de obtener una ejecución del controlador atendiendo a un compromiso entre regulación (error permitido) y una acción de control suave (acotamiento de la entrada de control). Resultados en este sentido son presentados en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Implementación experimental de control H_∞ en planta piloto para tratamiento de vinazas

En el capítulo se describe la planta piloto donde se llevó a cabo la implementación experimental del controlador propuesto H_∞ , así como los equipos utilizados para la medición y adquisición de datos. Posteriormente, se presenta el controlador H_∞ utilizado y resultados relevantes de la implementación experimental. Finalmente se presentan algunos comentarios del capítulo.

3.1. Antecedentes

Para implementar una ley de control por retroalimentación utilizando como salida la DQO y/o AGV, es necesario realizar una medición. En el caso que dicha medición sea fuera de línea, el acondicionamiento de las muestras debe llevarse a cabo para evitar daños que pueden ocasionarse al equipo o bien tener un error en la medición el cual repercute en el desempeño de la ley de control. Mediante la filtración a través de un medio poroso se puede evitar un error de medición en la DQO por una contribución por biomasa [37]. Incluso si una ley de control es complementada con un sistema eficiente de monitoreo y supervisión, el funcionamiento del sistema debe complementarse usando mediciones en línea. De hecho, un sistema de validación (usando mediciones en fuera línea) debe asegurar la capacidad del sistema de diagnóstico [38].

Para leyes de control que utilizan mediciones en línea se debe primero tener o extraer

una muestra directa del proceso. Posteriormente, una etapa de purificación y finalmente una etapa en donde se realice la medición. En algunos casos, para llevar a cabo la medición en línea se debe tomar en cuenta: (i) fallos en la operación de purificación (filtración y/o ultrafiltración), (ii) costos asociados a la operación y mantenimiento de los equipos de medición en línea, (iii) costos asociados al daño en equipos por fallo en el proceso. Incluso si la ley de control es complementada con una etapa en su diseño que acople la detección y diagnóstico de fallos, en ausencia de un equipo apropiado de procesamiento de la muestra, la regulación de la salida es difícil o (en algunos casos) imposible de lograr [39].

Esquemas de control en el caso de errores moderados en la medición de variables claves han sido reportados. Un ejemplo de ésta es la presentada por Walker y col. [40], sin embargo esta contribución se basa en la evaluación de la producción de biogás en un proceso de DA y no se tiene un esquema claro para ser extendido a variables como DQO y/o AGV.

En este capítulo se expondrá que el diseño de la ley de control H_∞ puede abordar de manera adecuada el error de medición sin dejar de tomar en cuenta el balance en los requerimientos de regulación robusta y restricciones en la acción de control.

3.2. Planta piloto

El proceso de DA se llevó a cabo en un digestor de flujo ascendente de cama fija escala piloto. El material de construcción del digestor es de acero cuyo volumen efectivo es 445 litros. El soporte utilizado es Cloisonyl[®] con una estructura la cual permite una mayor superficie de adherencia de la biopelícula por unidad de volumen. El diagrama esquemático del proceso de DA en la planta piloto se ilustra en la Figura 3.1.

La vinaza cruda proveniente de las aguas residuales de la industria del tequila es recibida directamente de la planta *La Laja*, ubicada en Guadalajara México, y almacenada en contenedores cerrados a temperatura ambiente. La vinaza almacenada es diluida en un tanque de alimentación de 200 litros a fin de ajustar la composición de la DQO a 15 [g/l] y el pH entre 6.5 – 7.0. Dicho ajuste se lleva a cabo mediante la adición de agua (potable) y una solución de hidróxido de sodio (*NaOH* grado industrial marca Mexichem[®]). El tanque de alimentación se mantiene en agitación constante durante toda la prueba experimental. Mediante una bomba peristáltica (Masterflex L/S Cole-Parmer[®]) conectada al tanque de alimentación se introduce una corriente de alimentación el cual está relacionado con el factor de dilución (D [h^{-1}]) calculado por la ley de control $u = D - D^*$. La corriente de alimentación es mez-

clada con una corriente de recirculación (a fin de propiciar una corriente homogénea) y es introducida al digestor. Una corriente de salida en la zona superior del digestor es colectado por un divisor de dos corrientes, una corriente se recircula y la otra se desecha (efluente). Dicho divisor permite mantener el nivel del digestor constante debido a que la separación del efluente se lleva a cabo por rebose de nivel. La corriente de recirculación es bombeada para mantener una flujo de recirculación constante y mantener una presión mayor a la presión de la corriente de alimentación con la cual se mezcla (como se mencionó previamente).

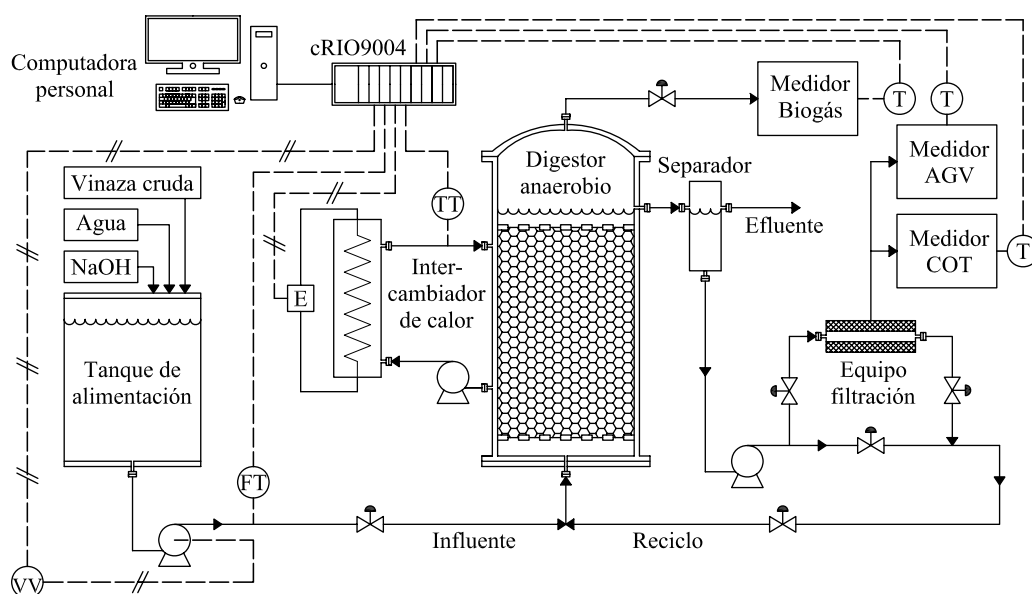


Figura 3.1: Diagrama esquemático del proceso de DA para el tratamiento de aguas residuales de la industria del tequila. Los simbología correspondiente es: (T) transmisor, (E) voltaje, (FT) transmisor de flujo, (TT) transmisor de temperatura y (VV) variador de velocidad.

Un porcentaje del 15% de la corriente de recirculación es procesada en un equipo de filtrado cuyo diámetro de poro es de $50 \mu m$. El permeado del sistema de filtrado es analizado por los equipos de medición en línea y la corriente no permeada o concentrada es retornada a la corriente de recirculación mediante un sistema de válvulas. El biogás producido durante el proceso de DA era colectado en la zona superior del digestor y analizado de manera continua. La temperatura del DA se mantuvo regulada a $36 \pm 1^\circ C$ mediante un intercambiador de calor de chaqueta. En el interior de dicha chaqueta se utilizaba agua potable bombeada desde un depósito el cual utilizaba como agente calefactor una resistencia eléctrica. La cantidad de voltaje de la resistencia eléctrica necesaria para mantener la temperatura del digestor era calculada mediante un controlador del tipo PI.

3.2.1. Mediciones en línea

La comunicación entre los sensores y actuadores del digestor y una computadora personal se realizó mediante el dispositivo National Instruments® modelo cRIO9004. La programación se llevó a cabo mediante la plataforma LabVIEW® 8.2.

Mediante una corriente derivada del flujo de permeado del sistema de filtrado a la salida del digestor se realizó la medición del TOC. Dicha medición se llevó a cabo mediante un analizador AppliTOC marca AppliTEK®. Posteriormente, mediante una relación lineal entre el TOC y la DQO se obtuvo el valor de la DQO (previamente identificada para el efluente). Finalmente, el controlador robusto vía H_∞ calcula la señal de entrada ($u = D - D^*$) la cual está relacionada con el flujo que se introduce al digestor.

Mediante un equipo deshumidificador marca M&C® modelo ECP1000 se obtuvo una corriente gaseosa libre de agua. Posterior al proceso de deshumidificación se llevó a cabo la medición de la producción de biogás, así como la composición de dióxido de carbono y metano producido durante el proceso de DA. Las mediciones se llevaron a cabo mediante el analizador marca Siemens® modelo Ultramat 23.

3.2.2. Mediciones fuera de línea

El pH fue determinado mediante un equipo marca Thermo Scientific® modelo Orion 3 Star. Se utilizaron estándares marca Thermo Scientific® (buffer) de pH 4,7 y 10 para calibrar el equipo.

Los AGV fueron determinados mediante cromatografía de líquidos de alto rendimiento (HPLC, de high-performance liquid chromatography) mediante un equipo marca Utech® modelo Alltech 9046.

La DQO es la cantidad de oxígeno que es consumido por las sustancias contaminantes que están en ese residuo durante un cierto tiempo, ya sean sustancias contaminantes orgánicas o inorgánicas. Para esto, se emplea un agente químico en medio ácido para la determinación del equivalente de oxígeno de la materia orgánica que puede oxidarse. La cantidad de oxidante consumido es expresada en términos de su equivalencia de oxígeno. Esta variable se determinó por medio de un espectrofotómetro DR 2800 y un bloque de digestión DBR 200, ambos de la marca Hach®.

La medición de materia orgánica a través del carbono orgánico total (TOC, de total or-

ganic carbon), a diferencia de otros métodos como demanda bioquímica de oxígeno (DBO) y la DQO, es independiente del estado de oxidación de la materia orgánica. El TOC es la cantidad de carbono unido a un compuesto orgánico y se usa frecuentemente como un indicador no específico de calidad del agua. Un análisis típico del TOC mide tanto el carbono total (TC, de total carbon) y el carbono inorgánico total (TIC, de total inorganic carbon). El carbono total comprende el carbono orgánico e inorgánico. El carbono orgánico se une con hidrógeno u oxígeno para formar compuestos orgánicos. El carbono inorgánico es estructurado como carbonatos e iones de carbonato, y forma compuestos inorgánicos. El TIC lo comprenden los carbonatos disueltos en la solución. Restando el TIC del CT obtenemos el TOC. La medición del TOC se realiza mediante oxidación catalítica de alta temperatura y se llevó a cabo mediante el analizador Shimatzu[®] modelo TOC-V_{CSH}.

3.3. Implementación del controlador

Durante toda la implementación experimental fueron utilizadas aguas residuales diluidas provenientes de la industria del tequila. La dilución fue necesaria para mantener una DQO promedio de 15 [g/l] (± 0.5 [g/l]), la cual fue determinada de manera puntual fuera de línea por medio de un espectrofotómetro DR 2800 y un bloque de digestión DBR 200, ambos de la marca Hach[®]. De este modo se consideró la robustez del controlador ante perturbaciones en la DQO de alimentación.

El proceso de filtración se llevó a cabo mediante un sistema de filtrado con diámetro de poro de 50 μm . Dicho proceso de filtrado inducía un error de medición debido a la contribución de la biomasa no retenida por el sistema de filtrado en la contabilización total del TOC. Dicho error se consideró incierto al rededor de ± 0.25 [g/l]. De hecho, éste fenómeno fue una prueba de robustez del controlador ante errores de medición.

Finalmente, un cambio en la referencia fue inducido durante el procedimiento experimental a fin de comprobar la regulación de la DQO por parte del controlador.

3.3.1. Diseño del controlador

Un ajuste en el controlador calculado se llevó a cabo debido a que los parámetros del modelo ya habían sido identificados para el digestor [41]. Adicionalmente, las funciones de peso fueron ajustadas a fin de abordar los errores en la variable de salida (DQO) (debidas al error inducido por el sistema de filtrado en medición del TOC) y acotamiento de la señal de

control.

$$\begin{aligned}
W_p(\omega) &= \frac{W_{p,N}(\omega)}{W_{p,D}(\omega)} \\
W_u(\omega) &= \frac{s + \omega_u/M_u}{\varepsilon_u s + \omega_u} = \frac{s + 100/0.02}{0.005s + 100} \\
W_e(\omega) &= \frac{s/M_e + \omega_e}{s + \omega_e \varepsilon_e} = \frac{s/0.1 + 100}{s + (100)(0.005)} \\
W_n(\omega) &= \frac{s + \omega_n \varepsilon_n}{s/M_n + \omega_n} = \frac{s + (1000)(0.01)}{s/0.02 + 1000}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $W_{p,N} = 1.193 \times 10^{-5}s^3 + 4.695 \times 10^{-4}s^2 + 4.298 \times 10^{-3}s + 5.971 \times 10^{-5}$ y $W_{p,D} = 1.193 \times 10^{-5}s^3 + 4.695 \times 10^{-4}s^2 + 4.298 \times 10^{-3}s + 5.971 \times 10^{-5}$.

Siguiendo el procedimiento presentado en el la sección 2.3 se obtuvo un controlador $K_4(s) = K_N(s)/K_D(s)$, donde: $K_N(s) = 7.73s^3 + 186.7s^2 + 239.1s + 16.99$ y $K_D(s) = s^4 + 65.81s^3 + 767s^2 + 1212s + 416.8$. El requerimiento de estabilidad nominal se cumple con $\gamma = 0.2487$ y el requerimiento para estabilidad robusta $\|W_p P_{nom} K(I + P_{nom} K)^{-1}\|_\infty = 0.4088 \leq 1$ [36].

3.4. Resultados y discusión.

La Figura 3.2 muestra el comportamiento temporal del factor de dilución D durante la implementación experimental, la cual está relacionada con la entrada de control ($u = D - D^*$) calculada por la ley de control H_∞ . El comportamiento del factor de dilución medido para la corriente de alimentación se presenta en la Figura 3.2a y el calculado por la ley de control en la Figura 3.2b. Como puede observarse existe una diferencia entre D calculado y D medido, esto se debe a que existe una limitación en el actuador, la cual no excede el $\pm 5\%$ con respecto al valor calculado. Dicha diferencia puede observarse en la Figura 3.2c. De hecho, la diferencia en D induce una perturbación en la cantidad de materia orgánica la cual se introduce al proceso de DA.

En la Figura 3.3a se puede observar la respuesta de la DQO (x_3), la cual está relacionada con la variable de salida ($y = x_3 - x_3^*$) bajo la acción de la ley de control propuesta. El controlador regula satisfactoriamente la salida mientras se atenúan las dos componentes de perturbación asociadas a la variación de la DQO de alimentación; (i) Una componente se debe a la variación de la composición del tanque de alimentación y (ii) la otra componente está asociada a la ejecución del sistema de bombeo, la cual no introduce la cantidad de flujo asociada a la calculada por el controlador.

El controlador regula la DQO a pesar de los errores de medición. Dichos errores podemos clasificarlos en tres categorías:

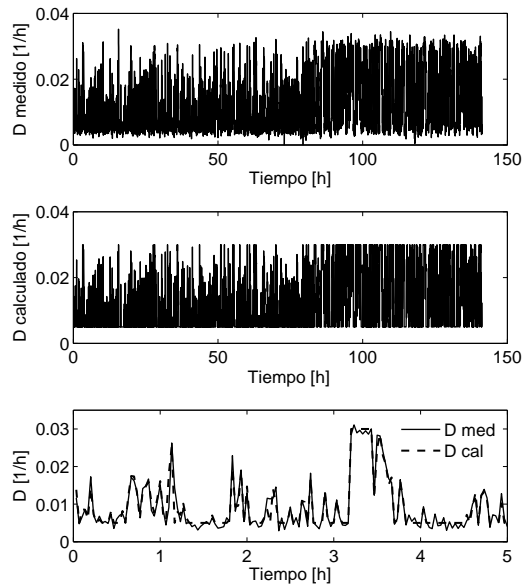


Figura 3.2: a) Factor de dilución medido a la entrada del digestor, b) factor de dilución calculado por la ley de control, c) Factor de dilución medido a la entrada del digestor y factor de dilución calculado por la ley de control en el intervalo de tiempo $[0, 5]$ h. Nótese que existe una diferencia entre el factor de dilución calculado y el real alimentado por el sistema de bombeo, lo cual induce una perturbación en la cantidad de materia orgánica introducida al proceso de DA.

- (i) La medición de la DQO no se lleva a cabo directamente, es decir, mediante una correlación lineal se determinó una relación entre la DQO y la medición directa del TOC.
- (ii) El modelo no lineal del proceso de DA (2.1) contempla la DQO disponible para el consorcio de microorganismos acidogénicos y metanogénicos, sin embargo la técnica de medición (TOC) degrada todo lo orgánicamente oxidable, por lo que existe una contribución de la oxidación de un componente orgánico que no debe contabilizar como DQO, este elemento es la concentración de AGV.
- (iii) El error asociado por la biomasa que logra pasar al permeado en el sistema de filtrado. Este error podemos verlo mediante dos componentes:
 - La primera está asociada a la continua transferencia de biomasa a través del poro del filtro y del poro de la torta (de espesor constante) de biomasa que se retiene continuamente en la fase que se está filtrando.
 - La segunda está asociada al cambio del espesor de la torta de biomasa retenida; es decir, un cambio en las condiciones de operación del sistema de filtrado provoca un cambio en el grosor y estructura de la torta de biomasa retenida. Los cambios en la

operación son el flujo que ingresa al sistema de filtrado y la presión de operación. Estos cambios de operación se asocian a los mezclados entre la corriente de recirculación y el flujo alimentado (que viene del tanque de alimentación). Adicionalmente, las válvulas de compuerta de la instalación hidráulica de la planta piloto no mitigan los cambios de presión. Por lo que, los cambios de flujo en la bomba de alimentación (Masterflex L/S Cple-Parmer[®]) de desplazamiento positivo provocan fluctuaciones en la presión del sistema hidráulico. Dichos cambios de operación provocan a su vez cambios en la estructura de la torta de filtrado y permiten el paso de *bolos* de biomasa al permeado que perturban la medición del TOC.

La Figura 3.3b muestra la medición de los AGV durante el desarrollo experimental. En la Figura 3.4 se presenta los resultados obtenidos para la la producción y composición del biogás. Se observa que la concentración de AGV se mantiene en el intervalo de tiempo (0, 85) [h] con valores en promedio a 0.5 [g/l]. Los niveles de producción de Biogás así como la composición se mantienen en un intervalo entre (20 – 30) [l/h] y 75%CH₄, 30%CO₂. El aumento en la referencia de la DQO induce en el intervalo de tiempo (85, 120) [h]: (i) una mayor concentración de AGV durante las primeras 40 [h] ; y (ii) un aumento en la producción de biogás acompañado de una reducción en el porcentaje de composición de metano y aumento en el dióxido de carbono. Esto es un indicativo del aumento en la actividad de los microorganismos tanto acidogénicos como metanogénicos, sin embargo la producción de AGV (actividad acidogénica) es mayor que la degradación del mismo (actividad metanogénica) durante esta ventana de tiempo comparado con las primeras 80 [h] de operación. Durante el intervalo de tiempo (120, 135) [h] se registra: (i) un decremento en la concentración de AGV; y (ii) un aumento en la producción de biogás acompañado de una reducción en el porcentaje de composición de metano y aumento en el dióxido de carbono. Esto es un indicativo que la actividad acidogénica se mantiene, sin embargo la actividad de las metanogénicas aumenta a un nivel que permite que la concentración de AGV sea similar al intervalo de tiempo de las primeras 80 [h] de operación. Adicionalmente, se presenta un aumento en la producción de biogás acompañado de una reducción en el porcentaje de composición de metano y aumento en el dióxido de carbono con respecto a la ventana de tiempo anterior ((85, 120) [h]). Nótese que aunque se redujo un 10% la composición porcentual de metano durante toda la fase experimental, se aumentó un 100% la producción de biogás. Esto es una evidencia del cambio en la actividad cinética de los microorganismos, tanto acidogénicos como metanogénicos. Lo que implica una variación paramétrica en el modelo nominal bajo los parámetros identificados para la planta piloto por Zárate y col. [41].

Errores de medición a $t = 16, 62, 100, \text{ y } 122[h]$ fueron provocados debido al mantenimiento y limpieza del sistema de medición y filtración, sin embargo el controlador fue capaz

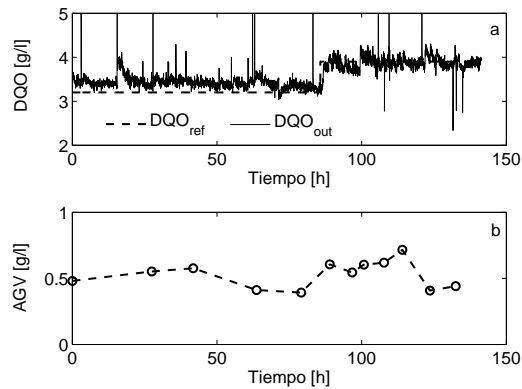


Figura 3.3: a) Comportamiento de la DQO a la salida del digestor (x_3), b) Comportamiento de los AGV a la salida del digestor (x_4).

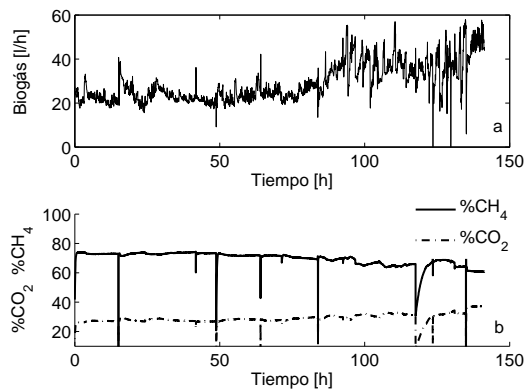


Figura 3.4: a) Flujo de biogás producido durante la implementación experimental, b) porcentaje de concentración de dióxido de carbono y metano en el flujo de biogás producido durante la implementación experimental.

de mitigar estas perturbaciones.

3.5. Comentarios sobre el capítulo

La implementación experimental de un controlador robusto H_∞ se llevó a cabo para un proceso de DA escala planta piloto. El controlador es evaluado en la regulación robusta de la variable de salida en el tratamiento de aguas residuales provenientes de la industria del tequila. Los resultados experimentales indican que el controlador es capaz de regular la DQO de salida del proceso de DA escala planta piloto de manera robusta ante: (i) variación en la cinética, (ii) perturbaciones en la DQO de alimentación, (iii) errores en la medición.

Modificaciones en los valores que conforman las funciones de peso, permitieron atender

los requerimientos los cuales se presentaron en la planta piloto. Se pudo mitigar errores de un 12% en la medición de la variable de salida, logrando una regulación robusta acotando el error entre la referencia y la salida mediante un esfuerzo acotado de la señal de control. Este es un caso donde es posible modificar los valores de las funciones de peso a fin de atender el compromiso entre regulación (error permitido) y una acción de control suave (acotamiento de la entrada de control).

El controlador propuesto es un candidato a ser implementado a escala industrial debido a: (i) la estructura lineal del controlador, (ii) no son necesarios equipos de medición sofisticados, (iii) errores de medición y variaciones en las condiciones de operación son compensados, lo cual es común en aplicaciones a escala industrial.

Capítulo 4

Control H_∞ en digestor anaerobio para el tratamiento de la fracción orgánica de residuos sólidos municipales

En el capítulo se describe la síntesis de un controlador H_∞ clásico para el control de un digestor anaerobio para el tratamiento de la fracción orgánica de residuos sólidos municipales (FORSM). El controlador propuesto asegura la regulación robusta de la concentración de la materia orgánica soluble. El capítulo está organizado de la siguiente forma. Primero se describe brevemente el modelo matemático que describe el proceso y se muestran algunos resultados orientados al análisis de dicho modelo. Posteriormente se aborda el planteamiento del problema de control y la síntesis del controlador. A continuación se presentan algunas simulaciones y finalmente algunos comentarios sobre el capítulo.

4.1. Modelo dinámico

El modelo dinámico propuesto en este trabajo se basa principalmente en los propuestos por Hill [42] y Kiely [23]. El modelo está estructurado mediante ecuaciones que describen el balance de materia de un proceso de DA continua. Los balances describen el comportamiento en el tiempo de la concentración de microorganismos acidogénicos, metanogénicos, materia soluble, ácidos grasos volátiles y amonio, mediante ecuaciones diferenciables ordinarias. El modelo considera dos etapas de la degradación de la materia orgánica soluble: la acidogénesis y la metanogénesis.

El modelo dinámico está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{dX_1}{dt} &= (\mu_1(S_O, V_A) - K_{D1} - D)X_1 \\
\frac{dX_2}{dt} &= (\mu_2(V_A, NH_4) - K_{D2} - D)X_2 \\
\frac{dS_O}{dt} &= D(S_{O,in} - S_O) - \frac{\mu_1 X_1}{Y_{X1}} + \frac{\mu_1 X_1}{Y_{X1S_O}} \\
\frac{dV_A}{dt} &= D(V_{A,in} - V_A) + \frac{\mu_1 X_1}{Y_{X1V_A}} - \frac{\mu_2 X_2}{Y_{X2V_A}} \\
\frac{dNH_4}{dt} &= D(NH_{4,in} - NH_4) + \mu_1 X_1 Y_{NH_4} - K_{LaNH_3}(K_{HNH_3} P_{NH_3} - NH_4 K_{NH_4})
\end{aligned} \tag{4.1}$$

donde los estados y variables son: X_1 es la concentración de bacterias acidogénicas [g/l]; X_2 es la concentración de bacterias metanogénicas [g/l], S_O es la concentración de materia soluble, V_A es la concentración de ácidos grasos volátiles [g-l], NH_4 es la concentración de amonio [mg/l]. Los escalares reales positivos $S_{O,in}$, $V_{A,in}$ y $NH_{4,in}$ representan la concentración en la alimentación al digestor. El factor de dilución D es la razón entre el flujo de alimentación $Q[lh^{-1}]$ con respecto al volumen del digestor $V[l]$. El sistema (4.1) incluye la cinética de las bacterias acidogénicas $\mu_1(S_O, V_A)$ y metanogénicas $\mu_2(V_A, NH_4)$

$$\begin{aligned}
\mu_1(S_O, V_A) &= \frac{\mu_{1,max}}{1 + \frac{K_{S1}}{S_O} + \frac{V_A}{K_{Ia1}}} \\
\mu_2(V_A, NH_4) &= \frac{\mu_{2,max}}{1 + \frac{K_{S2}}{V_A} + \frac{V_A}{K_{Im1}} + \frac{NH_4 K_{NH4}}{K_{Im2}}}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

donde el valor de los parámetros nominales $\pi_{s,0} \in \Pi_s = \{\mu_{1\text{máx}}, \mu_{2\text{máx}}, K_{D1}, K_{D2}, Y_{X1}, Y_{X1S_O}, Y_{X1V_A}, Y_{X2V_A}, Y_{NH_4}, K_{LaNH_3}, K_{NH_4}, P_{NH_3}, K_{S1}, K_{S2}, K_{Ia1}, K_{Im1}, K_{Im2}\}$ son constantes reales positivas cuyo valor es incierto.

El modelo (4.1) contempla que los microorganismos acidogénicos (X_1) y metanogénicos (X_2) dependen: (i) la relación entrada y salida del digestor asociada a D , (ii) la cinética de crecimiento (μ_j) donde $j = 1, 2$, y (iii) una tasa de mortandad K_{Dj} (donde $j = 1$ es para acidogénicas y $j = 2$ metanogénicas). Para los microorganismos acidogénicos la cinética $\mu_1(S_O, V_A)$ contempla la inhibición por producto debida a la concentración AGV (V_A) y para los metanogénicos la cinética $\mu_2(V_A, NH_4)$ contempla la inhibición por producto debida a la concentración AGV (V_A) y (NH_4). El modelo (4.1) contempla tres compuestos: (i) la materia orgánica soluble (S_O), (ii) la concentración de AGV V_A y (iii) amonio NH_4 . La degradación de la materia orgánica soluble se considera la primera etapa de la degradación de la FORSM. El balance de materia para S_O contempla: (i) la entrada y salida del digestor relacionada con D , (ii) el consumo por parte de los microorganismos acidogénicos y (iii) la producción de S_O por la hidrólisis de la materia no hidrolizada que está disponible dentro del digestor. El

balance de materia para V_A contempla: (i) la entrada y salida del digestor relacionada con D , (ii) la producción por parte de los microorganismos acidogénicos y (iii) el consumo por parte de los microorganismos metanogénicos. El balance de materia para NH_4 contempla: (i) la entrada y salida del digestor relacionada con D , (ii) la producción por parte de los microorganismos acidogénicos y (iii) el consumo mediante relacionado a la transferencia gas - líquido de amoníaco.

Cabe mencionar que el modelo propuesto puede expresarse en el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (4.1) debido a que se consideran las siguientes simplificaciones:

- (i) Existen dos consorcios de bacterias: acidogénicas (X_1) y metanogénicas (X_2). El considerar dos grupos de microorganismos no resta generalidad al modelo (4.1).
- (ii) La etapa de hidrólisis no se contempla. Se inicia el proceso de degradación orgánica suponiendo materia orgánica soluble. Estudios previos indican que el pretratamiento de la FORSM permiten la conversión de materia orgánica no soluble a soluble en rangos que están entre el 90% y 100% [16, 17]. El proceso considera que previamente se ha realizado una hidrólisis que permite la disponibilidad de materia orgánica disuelta.
- (iii) El modelo se considera isotérmico $T = T_0$. El modelo (4.1) no contempla un balance de energía, es decir se considera que el proceso opera a temperatura constante. Adicionalmente, algunas de las constantes dependen de la temperatura, por lo que la variación de estas constantes con respecto a T puede considerarse despreciable. Esta consideración es importante ya que la variación de los parámetros $\pi_{s,0} \in \Pi_s$ se deberá a cambios de operación no asociados a la temperatura.
- (iv) El pH se considera constante $pH = 7$. Estudios han demostrado que el rango de operación de los procesos de DA operan en un rango de (6, 8) de pH [23, 4]. De hecho la tecnología actual permite una regulación de pH en un valor de operación con una precisión de ($\pm 0.05[pH]$). Esta consideración es importante ya que la variación de los parámetros $\pi_{s,0} \in \Pi_s$ se deberá a cambios de operación no asociados al pH. Adicionalmente, se considera que un pH constante permite un equilibrio iónico o al menos un rango acotado en las concentraciones de los iones.
- (v) El equilibrio iónico se conserva. Tomando en cuenta que se mantiene un pH constante, permitiendo una concentración de iones H^+ manteniendo una relación proporcional entre los iones presentes durante el proceso de DA de la FORSM.
- (vi) La presión se considera constante $P = P_{atm}$. Esta consideración implica que el digestor que continuamente produce una mezcla de CH_4 , CO_2 y NH_3 desplace la mezcla

gaseosa producida al exterior del digestor. Esta implicación significa también que el NH_3 gaseoso está siendo desplazado de manera continua fuera del digestor. Por lo que el equilibrio entre la fase líquida y gaseosa no se alcanza en tiempo finito. Es decir, se puede considerar que la proporción entre el NH_3 es menor en comparación a la producida de CH_4 y CO_2 (NH_3 sistema diluido). Por lo que el gradiente entre la fase líquida y gaseosa para el NH_3 está descrito por la constante de Henry.

Dado el modelo (4.1) es posible abordar las dos condiciones de operación del digestor anaerobio de manera continua.

- Condición de lavado. Se dice que el reactor está operando en la condición de lavado cuando la biomasa $X_1^*, X_2^* = 0$ para todo $t \geq 0$. Entonces, bajo tal condición los valores del equilibrio de los restantes estados para el sistema (4.1) están dadas por las composiciones de alimentación (por inspección $S_O^* = S_{O,in}$, $V_A^* = V_{A,in}$, $NH_4^* = NH_{4,in}^*$); donde * denota el valor en el equilibrio). Esta situación significa que los agentes contaminantes en la corriente de alimentación no son removidos. Esta es una condición de operación indeseable y es necesario para evitarla acotar el factor de dilución. Esto es, $D \in [\underline{D}, \overline{D}] \subset R_+$; donde $\underline{D} > D_{min}$ es el valor mínimo permisible, el cual corresponde al factor de dilución mínimo que garantiza que alguna cantidad de materia es tratada, y donde $\overline{D} < D_{max}$ es llamado valor máximo permisible para evitar la condición de lavado. De hecho, dadas estas restricciones es de importancia considerar una ley de control con restricciones durante su diseño.
- Condición normal de operación (CNO). Se dice que el reactor está operando en CNO cuando la actividad de la biomasa permanece activa. Esto significa que $X_1, X_2 \neq 0$ para todo $t \geq 0$ y cualquier condición inicial. Esto significa que existe actividad microbiana la cual degrada parte de la materia orgánica en el digestor ($S_O^* < S_{O,in}$, $V_A^* < V_{A,in}$, $NH_4^* < NH_{4,in}^*$). Esta condición es factible bajo la siguiente condición $D \in [\underline{D}, \overline{D}] \subset R_+$.

La condición de operación de interés industrial es la CNO dado que el uno de los objetivos del digestor es la reducción de la materia orgánica. Bajo esta premisa se analizan las coordenadas que describen el equilibrio del modelo (4.1), para determinar si son únicas, y posteriormente clasificar si son estables o inestables. De hecho estas propiedades son necesarias para el diseño de un controlador que permita mantener el digestor en CNO.

Las coordenadas del equilibrio para el sistema (4.1) con cinética (4.2) está dado por las

siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
X_1^* &= \frac{E_{31} - E_{32}V_{A,c}^*}{(E_{33} - E_{34}V_{A,c}^*)\mu_1(S_O^*, V_{A,c}^*)} \\
X_2^* &= \frac{1}{Y_{X1VA}\mu_2(V_{A,c}^*, NH_4^*)} (DY_{X1VA}Y_{X2VA}(V_{A,in} - V_{A,c}^*) \\
&\quad + \frac{E_{31} - E_{32}V_{A,c}^*}{E_{33} - E_{34}V_{A,c}^*} Y_{X2VA}X_1^* \mu_1(S_O^*, V_{A,c}^*)) \\
S_O^* &= \frac{E_{11}}{E_{12} - E_{13}V_{A,c}^*} \\
NH_4^* &= \frac{-E_{21} + E_{22}V_{A,c}^* - E_{23}V_{A,c}^{*2}}{E_{24}V_{A,c}^*}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$E_{52}V_A^3 + E_{53}V_A^2 + E_{54}V_A - E_{55} = 0 \tag{4.4}$$

donde los escalares $V_{A,a}^*$, $V_{A,b}^*$ y $V_{A,c}^*$ son las soluciones de la ecuación de tercer orden y $V_{A,a}^* \geq V_{A,b}^* \geq V_{A,c}^*$. Adicionalmente, los términos $E_{i,j}$ están dados por:

$$\begin{aligned}
E_{11} &= (K_{D1} + D) K_{S1} K_{Ia1} \\
E_{12} &= \mu_{1,max} K_{Ia1} - (K_{D1} + D) K_{Ia1} \\
E_{13} &= (K_{D1} + D) \\
E_{21} &= (K_{D2} + D) K_{Im1} K_{Im2} K_{S2} \\
E_{22} &= \mu_{2,max} K_{Im1} K_{Im2} - (K_{D2} + D) K_{Im1} K_{Im2} \\
E_{23} &= (K_{D2} + D) K_{Im2} \\
E_{24} &= (K_{D2} + D) K_{Im1} K_{NH4} \\
E_{31} &= Y_{X1} Y_{X1SO} D (S_{O,in} E_{12} - E_{11}) \\
E_{32} &= Y_{X1} Y_{X1SO} D S_{O,in} E_{13} \\
E_{33} &= (Y_{X1SO} - Y_{X1}) E_{12} \\
E_{34} &= (Y_{X1SO} - Y_{X1}) E_{13} \\
E_{51} &= K_{LaNH3} K_{NH4} - D \\
E_{52} &= E_{51} E_{34} E_{23} \\
E_{53} &= -DNH_{4,in} E_{24} E_{34} + K_{LaNH3} K_{HNNH3} P_{NH3} E_{24} E_{34} \\
&\quad - Y_{NH4} E_{24} E_{32} - E_{51} E_{34} E_{22} - E_{51} E_{33} E_{23} \\
E_{54} &= DNH_{4,in} E_{24} E_{33} - K_{LaNH3} K_{HNNH3} P_{NH3} E_{33} E_{24} \\
&\quad + Y_{NH4} E_{24} E_{31} + E_{51} E_{21} E_{34} + E_{51} E_{33} E_{22} \\
E_{55} &= E_{51} E_{21} E_{33}
\end{aligned}$$

La ecuación (4.4) sugiere que V_A^* puede presentar multiplicidad de puntos de equilibrio. Sin embargo, es posible probar que solamente $V_{A,c}^*$ satisface la condición normal de operación. Para probar la unicidad del punto de equilibrio (4.3), las raíces de (4.4) son calculadas. En la Figura (4.1) se muestra la solución del equilibrio (4.3) de la raíz $V_{A,a}^*$, para un conjunto de parámetros nominales $(\pi_{s,0} \in \Pi_s [42, 23]: D^* = 0.02[d^{-1}], \mu_{1\text{máx}} =$

$0.1[d^{-1}]$, $\mu_{2\text{máx}} = 0.2[d^{-1}]$, $K_{D1} = 0.05[d^{-1}]$, $K_{D2} = 0.02[d^{-1}]$, $Y_{X1} = 0.2[mg\ org/mg\ S_O]$, $Y_{X1S_O} = 0.24[mg\ org/mg\ S_O]$, $Y_{X1V_A} = 2.45[mg\ org/mg\ V_A]$, $Y_{X2V_A} = 0.06[mg\ org/mg\ V_A]$, $Y_{NH_4} = 0.1212[mg\ NH_4/mg\ org]$, $K_{LaNH_3} = 0.5872[d^{-1}]$, $K_{NH_4} = 1.0074 \times 10^{-5}$, $P_{NH_3} = 20[mmHg]$, $K_{S1} = 25[mg/l]$, $K_{S2} = 150[mg/l]$, $K_{Ia1} = 1000[mg/l]$, $K_{Im1} = 300[mg/l]$, $K_{Im2} = 5[mg/l]$.), donde puede observarse que para S_O^* no se tiene una solución con significado físico ($S_O^* > 0$) para todo D . En la Figura (4.2) se muestra la solución del equilibrio (4.3)

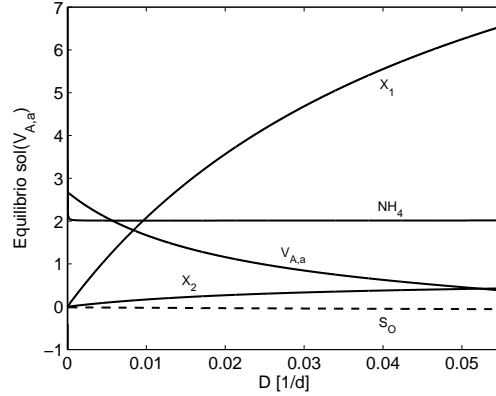


Figura 4.1: Solución de la ecuación (4.4), parte real de la raíz $V_{A,a}^*$.

de la raíz $V_{A,b}^*$ (para el conjunto de parámetros $\pi_{s,0} \in \Pi_s$), donde se muestra que para S_O^* no se tiene una solución con significado físico ($S_O^* > 0$) para todo D . La solución del equilibrio

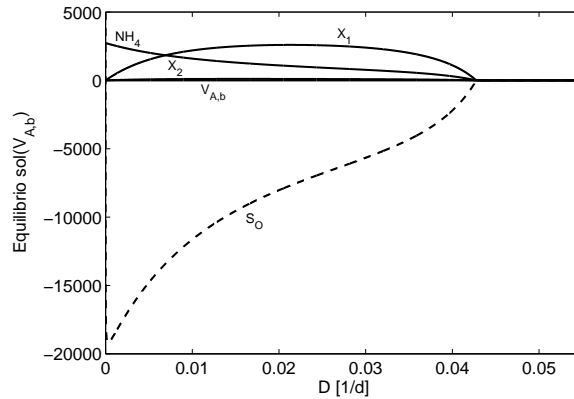


Figura 4.2: Solución de la ecuación (4.4), parte real de la raíz $V_{A,b}^*$.

rio (4.3) de la raíz $V_{A,c}^*$ (para el conjunto de parámetros $\pi_{s,0} \in \Pi_s$) cumple para CNO en el intervalo $D \in [\underline{D}, \overline{D}] \subset R_+$; donde $\underline{D} > D_{min}$, donde \overline{D} está relacionado con la desigualdad $E_{12} - E_{13}V_{A,c}^* > 0$ a fin de obtener valores tal que $S_O^* < S_{O,in}$, $V_A^* < V_{A,in}$, $NH_4^* < NH_{4,in}^*$ se cumple. Dado el valor de $V_A^* = V_{A,c}^*$, para que la coordenada del equilibrio S_O^* cumpla la CNO (dado que se siempre se cumple que $E_{11} > 0$) debe satisfacerse que $E_{12} > 0$. Esta

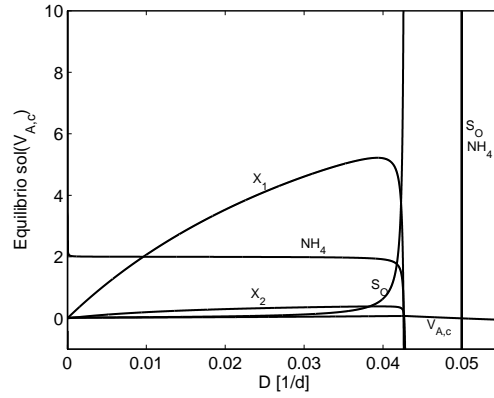


Figura 4.3: Solución de la ecuación (4.4), parte real de la raíz $V_{A,c}^*$.

última condición ($E_{12} > 0$) significa que la cinética de crecimiento debe ser mayor a la suma de las células muertas y la cantidad de células que dejan el digestor, es decir, se debe cumplir que $\mu_{1,max} > (K_{D1} + D)$. Adicionalmente, se debe cumplir que $E_{12} - E_{13}V_{A,c}^* > 0$ para que $S_O^* > 0$. Es claro que cuando $E_{12} - E_{13}V_{A,c}^* \rightarrow 0$ (Figura 4.4) el valor de $S_O^* \rightarrow +\infty$ (Figura 4.3), por lo que existe un valor de \bar{D} para la cual S_O^* cumpla con $S_O^* < S_{O,in}$ la cual es un requisito para la CNO. La Figura 4.4 muestra los resultados numéricos para los elementos E_{12} , $E_{13}V_{A,c}^*$, $E_{12} - E_{13}V_{A,c}^*$. Dado el valor de $V_A^* = V_{A,c}^*$, para que la coordenada del equilib-

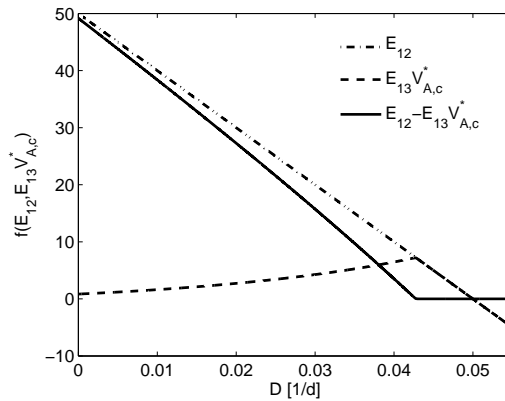


Figura 4.4: Evaluación numérica de los elementos E_{12} , $E_{13}V_{A,c}^*$, $E_{12} - E_{13}V_{A,c}^*$.

rio X_1^* cumpla la CNO se debe cumplir que $E_{31} - E_{32}V_{A,c}^* > 0$. Dado que $S_{O,in}E_{12} \gg E_{11}$ se tiene que el requisito $E_{31} - E_{13}V_{A,c}^* > 0$ se puede considerar como $E_{12} - E_{13}V_{A,c}^* > 0$. Considere en la coordenada del equilibrio X_1^* el factor común de E_{33} y E_{34} es $Y_{X1}Y_{X1SO}D$, entonces $E_{33} - E_{34}V_{A,c}^*$ se puede considerar como $E_{12} - E_{13}V_{A,c}^* > 0$. Es claro que cuando $E_{12} - E_{13}V_{A,c}^* \rightarrow 0$ (Figura 4.4) el valor de $X_1^* \rightarrow -\infty$ (Figura 4.3), por lo que existe un valor de \bar{D} para la cual X_1^* cumpla con $X_1^* > 0$ la cual es un requisito para la CNO.

Es posible notar que los términos en la parte inferior (segunda línea de la ecuación) de la coordenada del equilibrio X_2^* , $E_{31} - E_{32}V_{A,c}^*$ y $E_{33} - E_{34}V_{A,c}^*$ tienen la misma estructura que en coordenada del equilibrio X_1^* , dado que el término superior (primera línea de la ecuación) en la coordenada del equilibrio X_2^* es siempre positivo; se puede concluir que el requisito para que X_2^* cumpla CNO es $E_{12} - E_{13}V_{A,c}^* > 0$. Es claro que cuando $E_{12} - E_{13}V_{A,c}^* \rightarrow 0$ (Figura 4.4) el valor de $X_2^* \rightarrow -\infty$ (Figura 4.3), por lo que existe un valor de \bar{D} para la cual X_2^* cumpla con $X_2 > 0^*$ la cual es un requisito para la CNO.

Dado el valor de $V_A^* = V_{A,c}^*$, para que la coordenada del equilibrio NH_4^* cumpla la CNO se debe cumplir que $E_{22} > 0$, esto es que $\mu_{2,max} > (K_{D2} + D)$. Considere $(K_{D2} + D)V_{A,c}^*$ factor común en numerador y denominador en la coordenada NH_4^* , entonces dado que $K_{Im1} > K_{S2} > K_{Im2}$ y $\mu_{2,max} > (K_{D2} + D)$ se obtendrán valores $NH_4^* > 0$ para $E_{22} > E_{21} + E_{23}V_{A,c}^*$, por lo que existe un valor de \bar{D} para la cual NH_4^* cumpla con $NH_4^* > 0$ y $NH_4^* < NH_{4,in}$ la cual es un requisito para la CNO.

Es claro que si $\mu_{1,max} = (K_{D1} + D)$ y $\mu_{2,max} = (K_{D2} + D)$ se tiene la condición operativa de lavado, lo cual no pertenece a CNO. Los resultados de la unicidad del punto de equilibrio bajo CNO pueden resumirse en la siguiente proposición:

Proposición 4. Considere el modelo de digestión anaerobia (4.1). Entonces, asumiendo que la composición de alimentación $S_{O,in}$, $V_{A,in}$, $NH_{4,in}$ es constante por pedazos, es posible demostrar que existe un único punto de equilibrio $\Phi^* = [X_1^*, X_2^*, S_O^*, V_A^*, NH_4^*] \in R_+^5$ para cualquier (D^*) bajo condiciones normales de operación ($X_1^*, X_2^* \neq 0$; $D \in [\underline{D}, \bar{D}] \subset R_+$; $S_{O,in} > S_O^*$, $V_{A,in} > V_A^*$, $NH_{4,in} > NH_4^*$). Dicho punto de equilibrio está contenido en un conjunto cerrado $\Omega_s \in R_+^5 = \{\Phi \in R_+^5 \mid \Phi_{min} \leq \Phi \leq \Phi_{max}; \Phi_{min} > 0 \text{ y } \Phi_{max} < \infty\} \subset R_+^5$ el cual contiene todas las condiciones normales de operación; donde Φ_{max} es el vector de concentraciones obtenido cuando \bar{D} mientras que Φ_{min} es obtenido para \underline{D} .

Prueba: Para la ecuación (4.4) el valor de V_A^* para todo D^* tal que se cumple (i) $\mu_{1,max} = (K_{D1} + D)$, (ii) $\mu_{2,max} = (K_{D2} + D)$, (iii) $E_{12} - E_{13}V_{A,c}^* > 0$ se tiene que de $V_{A,a}^* > V_{A,b}^* > V_{A,c}^*$ únicamente $V_{A,c}^*$ cumple con (i) $V_A^* > 0$ y (ii) $V_A^* < V_{A,in}$. Entonces las componentes (4.3) son también únicos bajo CNO. Dado que, bajo tales condiciones $\Phi^* = [X_1^*, X_2^*, S_O^*, V_A^*, NH_4^*] \in R_+^5$, $\Phi_{min} \leq \Phi^* \leq \Phi_{max}$ tiene como consecuencia $\Phi^* \in \Omega_s$. \square

La existencia y unicidad de $\Phi^* \in \Omega_s$ es importante en el sentido que el sistema presenta un único punto de equilibrio. El caracterizar este punto en el sentido de estabilidad permitirá establecer bases que permitan saber si las trayectorias se mantendrán en este punto. Para

esto es necesario obtener y clasificar las expresión de los valores propios del polinomio característico [33].

Calculando los valores propios del jacobiano del sistema no lineal (4.1) es posible determinar la naturaleza del punto de equilibrio en el sentido de estabilidad local. Considere el Jacobiano asociado al modelo (4.1):

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & J_{13} & J_{14} & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 & J_{24} & J_{25} \\ J_{31} & 0 & J_{33} & J_{34} & 0 \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} & J_{45} \\ J_{51} & 0 & J_{53} & J_{54} & J_{55} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

donde $J_{i,j}$ está definido como:

$$J_{11} = \mu_1(S_O^*, V_A^*) - K_{D1} - D$$

$$J_{13} = (d(\mu_1(S_O^*, V_A^*))/dS_O)X_1^*$$

$$J_{14} = (d(\mu_1(S_O^*, V_A^*))/dV_A)X_1^*$$

$$J_{22} = \mu_2(V_A^*, NH_4) - K_{D2} - D$$

$$J_{24} = (d(\mu_2(V_A^*, NH_4))/dV_A)X_2^*$$

$$J_{25} = (d(\mu_2(V_A^*, NH_4))/dNH_4)X_2^*$$

$$J_{31} = \mu_1(S_O^*, V_A^*)(Y_{X1SO}^{-1} - Y_{X1}^{-1})$$

$$J_{33} = X_1^*(Y_{X1SO}^{-1} - Y_{X1}^{-1})(d(\mu_1(S_O^*, V_A^*))/dS_O) - D$$

$$J_{34} = X_1^*(Y_{X1SO}^{-1} - Y_{X1}^{-1})(d(\mu_1(S_O^*, V_A^*))/dV_A)$$

$$J_{41} = \mu_1(S_O^*, V_A^*)Y_{X1VA}^{-1}$$

$$J_{42} = \mu_2(V_A^*, NH_4^*)Y_{X1VA}^{-1}$$

$$J_{43} = (d(\mu_1(S_O^*, V_A^*))/dS_O)X_1^*Y_{X1VA}^{-1}$$

$$J_{44} = -D + (d(\mu_1(S_O^*, V_A^*))/dV_A)X_1^*Y_{X1VA}^{-1} - (d(\mu_2(V_A^*, NH_4^*))/dS_O)X_2^*Y_{X2VA}^{-1}$$

$$J_{45} = (d(\mu_2(V_A^*, NH_4^*))/dNH_4)X_2^*Y_{X2VA}^{-1}$$

$$J_{51} = \mu_1(S_O^*, V_A^*)Y_{NH4}$$

$$J_{53} = (d(\mu_1(S_O^*, V_A^*))/dS_O)X_1^*Y_{NH4}$$

$$J_{54} = (d(\mu_1(S_O^*, V_A^*))/dV_A)X_1^*Y_{NH4}$$

$$J_{55} = -D + K_{LaNH3}K_{NH4}$$

donde $d(\mu_1(S_O^*, V_A^*))/dS_O$, $d(\mu_1(S_O^*, V_A^*))/dV_A$, $d(\mu_2(S_O^*, V_A^*))/dV_A$, $d(\mu_2(S_O^*, V_A^*))/dNH_4$ son las derivadas de las funciones cinéticas (4.2) con respecto a los estados y están definidas como:

$$\frac{d(\mu_1)}{dS_O} = \frac{(\mu_{1,max}K_{Ia1})(K_{I1}S_O + K_{S1}K_{Ia1} + S_OV_A) - (\mu_{1,max}K_{Ia1}S_O)(K_{Ia1} + V_A)}{(K_{Ia1}S_O + K_{S1}K_{Ia1} + S_OV_A)^2}$$

$$\frac{d(\mu_1)}{dV_A} = \frac{-\mu_{1,max}K_{I1}S_O^2}{(K_{Ia1}S_O + K_{S1}K_{Ia1} + S_OV_A)^2}$$

$$\frac{d(\mu_1)}{dNH_4} = \frac{-\mu_{2,max}K_{Im1}K_{Im2}K_{I1}K_{NH4}V_A}{(K_{Im1}K_{Im2}V_A + K_{Im1}K_{Im2}K_{S2} + K_{Im2}V_A^2 + K_{Im1}K_{NH4}NH_4V_A)^2}$$

$$\frac{d(\mu_1)}{dV_A} = \frac{\left(\begin{array}{l} (\mu_{2,max}K_{Im1}K_{Im2})(K_{Im1}K_{Im2}V_A + K_{Im1}K_{Im2}K_{S2} + K_{Im2}V_A^2 + K_{Im1}K_{NH4}NH_4V_A) \\ -(\mu_{2,max}K_{Im1}K_{Im2}V_A)(K_{Im1}K_{Im2} + 2K_{Im2}V_A + K_{Im1}K_{NH4}NH_4) \end{array} \right)}{(K_{Im1}K_{Im2}V_A + K_{Im1}K_{Im2}K_{S2} + K_{Im2}V_A^2 + K_{Im1}K_{NH4}NH_4V_A)^2}$$

Mediante la solución del siguiente polinomio característico se obtienen las expresiones de los valores propios:

$$\lambda^5 + \beta_4\lambda^4 + \beta_3\lambda^3 + \beta_2\lambda^2 + \beta_1\lambda + \beta_0 = 0 \quad (4.6)$$

donde los términos β_i están determinados por:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -J_{11}J_{22}J_{33}J_{44}J_{55} + J_{11}J_{22}J_{33}J_{45}J_{54} + J_{11}J_{22}J_{34}J_{43}J_{55} - J_{11}J_{22}J_{34}J_{45}J_{53} \\ &\quad + J_{11}J_{24}J_{33}J_{42}J_{55} - J_{11}J_{25}J_{33}J_{42}J_{54} + J_{11}J_{25}J_{34}J_{42}J_{53} + J_{13}J_{22}J_{31}J_{44}J_{55} \\ &\quad - J_{13}J_{22}J_{31}J_{45}J_{54} - J_{13}J_{22}J_{34}J_{41}J_{55} + J_{13}J_{22}J_{34}J_{45}J_{51} - J_{13}J_{24}J_{31}J_{42}J_{55} \\ &\quad + J_{13}J_{25}J_{31}J_{42}J_{54} - J_{13}J_{25}J_{34}J_{42}J_{51} - J_{14}J_{22}J_{31}J_{43}J_{55} + J_{14}J_{22}J_{31}J_{45}J_{53} \\ &\quad + J_{14}J_{22}J_{33}J_{41}J_{55} - J_{14}J_{22}J_{33}J_{45}J_{51} - J_{14}J_{25}J_{31}J_{42}J_{53} + J_{14}J_{25}J_{33}J_{42}J_{51} \\ \beta_1 &= +J_{11}J_{22}J_{33}J_{44} - J_{11}J_{22}J_{34}J_{43} - J_{11}J_{24}J_{33}J_{42} - J_{13}J_{22}J_{31}J_{44} \\ &\quad + J_{13}J_{22}J_{34}J_{41} + J_{13}J_{24}J_{31}J_{42} + J_{14}J_{22}J_{31}J_{43} - J_{14}J_{22}J_{33}J_{41} \\ &\quad + J_{11}J_{22}J_{33}J_{55} - J_{13}J_{22}J_{31}J_{55} + J_{11}J_{22}J_{44}J_{55} - J_{11}J_{22}J_{45}J_{54} \\ &\quad - J_{11}J_{24}J_{42}J_{55} + J_{11}J_{25}J_{42}J_{54} - J_{14}J_{22}J_{41}J_{55} + J_{14}J_{22}J_{45}J_{51} \\ &\quad - J_{14}J_{25}J_{42}J_{51} + J_{11}J_{33}J_{44}J_{55} - J_{11}J_{33}J_{45}J_{54} - J_{11}J_{34}J_{43}J_{55} \\ &\quad + J_{11}J_{34}J_{45}J_{53} - J_{13}J_{31}J_{44}J_{55} + J_{13}J_{31}J_{45}J_{54} + J_{13}J_{34}J_{41}J_{55} \\ &\quad - J_{13}J_{34}J_{45}J_{51} + J_{14}J_{31}J_{43}J_{55} - J_{14}J_{31}J_{45}J_{53} - J_{14}J_{33}J_{41}J_{55} \\ &\quad + J_{14}J_{33}J_{45}J_{51} + J_{22}J_{33}J_{44}J_{55} - J_{22}J_{33}J_{45}J_{54} - J_{22}J_{34}J_{43}J_{55} \\ &\quad + J_{22}J_{34}J_{45}J_{53} - J_{24}J_{33}J_{42}J_{55} + J_{25}J_{33}J_{42}J_{54} - J_{25}J_{34}J_{42}J_{53} \\ \beta_2 &= -J_{11}J_{22}J_{33} + J_{13}J_{22}J_{31} - J_{11}J_{22}J_{44} + J_{11}J_{24}J_{42} + J_{14}J_{22}J_{41} - J_{11}J_{22}J_{55} \\ &\quad - J_{11}J_{33}J_{44} + J_{11}J_{34}J_{43} + J_{13}J_{31}J_{44} - J_{13}J_{34}J_{41} - J_{14}J_{31}J_{43} + J_{14}J_{33}J_{41} \\ &\quad - J_{11}J_{33}J_{55} + J_{13}J_{31}J_{55} - J_{22}J_{33}J_{44} + J_{22}J_{34}J_{43} + J_{24}J_{33}J_{42} - J_{11}J_{44}J_{55} \\ &\quad + J_{11}J_{45}J_{54} + J_{14}J_{41}J_{55} - J_{14}J_{45}J_{51} - J_{22}J_{33}J_{55} - J_{22}J_{44}J_{55} + J_{22}J_{45}J_{54} \\ &\quad + J_{24}J_{42}J_{55} - J_{25}J_{42}J_{54} - J_{33}J_{44}J_{55} + J_{33}J_{45}J_{54} + J_{34}J_{43}J_{55} - J_{34}J_{45}J_{53} \\ \beta_3 &= +J_{11}J_{22} + J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31} + J_{11}J_{44} - J_{14}J_{41} \\ &\quad + J_{22}J_{33} + J_{11}J_{55} + J_{22}J_{44} - J_{24}J_{42} + J_{22}J_{55} \\ &\quad + J_{33}J_{44} - J_{34}J_{43} + J_{33}J_{55} + J_{44}J_{55} - J_{45}J_{54} \\ \beta_4 &= -J_{22} - J_{33} - J_{44} - J_{55} - J_{11} \end{aligned}$$

Dado la complejidad del polinomio característico, únicamente se obtuvieron las solu-

ciones numéricas de las raíces de (4.6). En la Figura 4.5a y 4.5d) se muestran las soluciones de la ecuación (4.3) y (4.4). En la Figura 4.5b, 4.5c, 4.5e y 4.5f se muestra los resultados

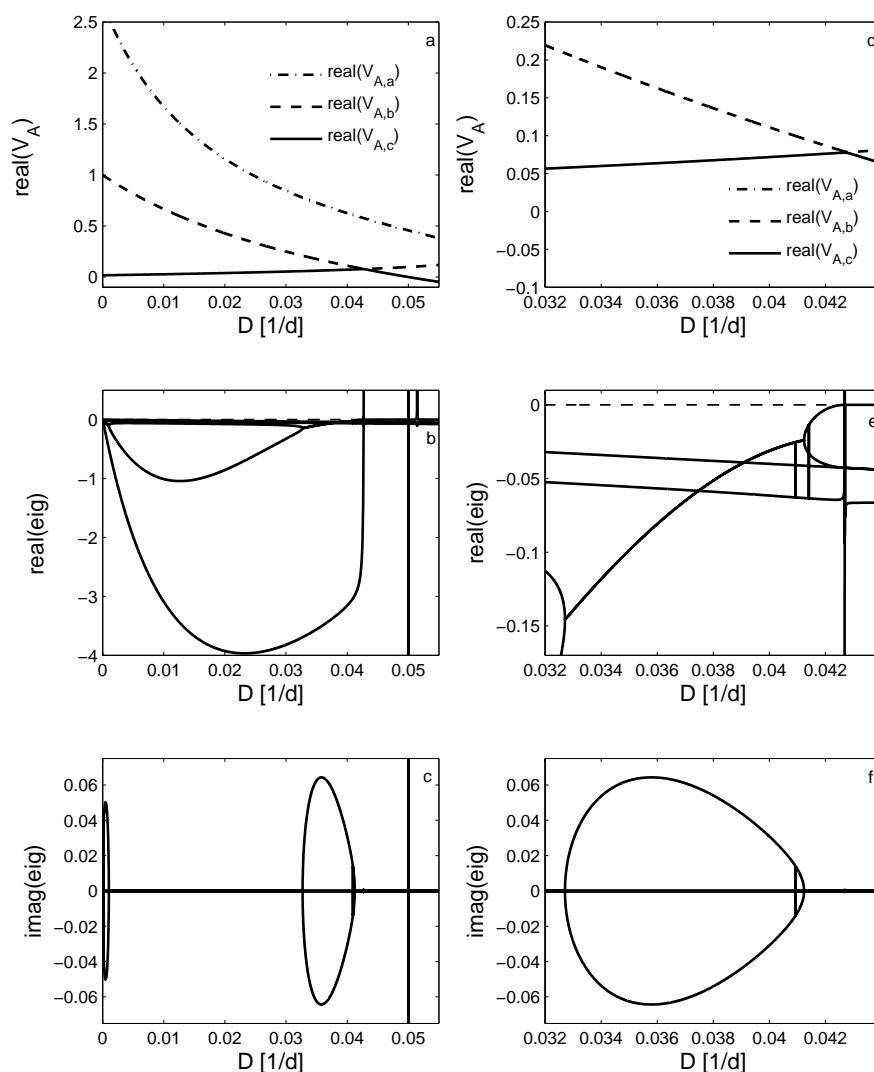


Figura 4.5: a) Solución numérica de (4.4), b) parte real de los valores propios (4.6), c) parte imaginaria de los valores propios (4.6), f) acercamiento de la parte imaginaria de los valores propios, d) acercamiento en solución numérica de (4.4) en rango de D donde se muestra el detalle del cruce de raíces $V_{A,b}$, y $V_{A,c}$, e) acercamiento en rango de D donde se muestra el detalle de la parte real de los valores propios en el mismo rango donde hay cruce de raíces, nótese que antes del valor D en donde se da la intersección de raíces $V_{A,b}$, y $V_{A,c}$ los valores propios se mantienen negativos.

de la solución numérica del polinomio característico (4.6) donde 4.5e, y 4.5f representa un acercamiento de las soluciones presentadas en la Fgigura 4.5b y 4.5c respectivamente. Se puede observar en la Figura 4.5b y 4.5e que la parte real de los valores propios es negativo hasta el valor donde coincide con el punto de intersección de las dos raíces ($V_{A,b}, V_{A,c}$) cuyo valor D corresponde a un valor cercano $E_{12} - E_{13}V_{A,c}^* = 0^+$. Esto puede notarse mejor

en el acercamiento de los valores en la Figura 4.5d y 4.5e. Adicionalmente se presenta la parte imaginaria de los valores propios en la Figura 4.5c así como un acercamiento en 4.5e en la misma escala D . Por lo tanto, se puede considerar que el punto de equilibrio $\Phi^* = [X_1^*, X_2^*, S_O^*, V_A^*, NH_4^*] \in R_+^5$ para cualquier D^* bajo condiciones normales de operación ($X_1^*, X_2^* \neq 0$; $D \in [\underline{D}, \bar{D}] \subset R_+$; $S_{O,in} > S_O^*$, $V_{A,in} > V_A^*$, $NH_{4,in} > NH_4^*$) es localmente estable, esto se puede resumir en la siguiente suposición (dado que no se obtuvieron las expresiones de los valores propios a fin de generalizar):

Suposición 1. Sea $\Phi^* \in \Omega_s$ el punto de equilibrio del digester (4.1) para cualquier constante D^* tal que $D \in [\underline{D}, \bar{D}] \subset R_+$. Entonces bajo CNO tal punto de equilibrio es localmente estable.

Cabe mencionar que la suposición es válida únicamente para el conjunto de valores $\pi_{s,0} \in \Pi_s$ [42, 23].

4.1.1. Análisis de sensibilidad paramétrica

Uno de los objetivos al diseñar un controlador H_∞ es lograr que sea robusto ante variaciones en los parámetros (variación paramétrica) del modelo no lineal (4.1). Para lograr dicho objetivo es necesario caracterizar una familia de plantas lineales a fin de obtener un modelo que capture la desviación (debida a la variación de n parámetros) entre la familia de plantas y el modelo nominal. No todos los parámetros causan una variación significativa; entonces a fin de identificar los parámetros que causan la mayor variación en la solución de los estados es necesario realizar un análisis de sensibilidad paramétrica [33].

Dado un conjunto de parámetros $\Pi_s = \{\mu_{1\text{máx}}, \mu_{2\text{máx}}, K_{D1}, K_{D2}, Y_{X1}, Y_{X1SO}, Y_{X1VA}, Y_{X2VA}, Y_{NH4}, K_{LaNH3}, K_{NH4}, P_{NH3}, K_{S1}, K_{S2}, K_{Ia1}, K_{Im1}, K_{Im2}\}$ la función de sensibilidad paramétrica está dada por la siguiente expresión [33]:

$$\dot{S}_{s,f} = A_{s,Sf} S_{s,f} + B_{s,Sf} \quad (4.7)$$

donde $S_{s,f} = [\partial x / \partial \pi_s]_{\pi_{s,0}}$, $A_{s,Sf} = [\partial f(\Phi) / \partial \Phi]_{\Phi^*}$, $B_{s,Sf} = [\partial f(\Phi) / \partial \pi_s]_{\pi_{s,0}}$, donde los parámetros nominales son $\pi_{s,0} \in \Pi_s$; adicionalmente con las dimensiones: $S_{s,f} \in R^{5 \times 19}$, $A_{s,Sf} \in R^{5 \times 5}$, $B_{s,Sf} \in R^{5 \times 19}$.

En la Figura (4.6) se muestra la solución de la función de sensibilidad para los estados X_1 , X_2 , S_O y V_A , para el conjunto de parámetros Π_s . El subconjunto de parámetros que tienen un efecto en el comportamiento dinámico para el sistema no lineal (4.1) son $\mu_{1,max}$, $\mu_{2,max}$ y

K_{D1} . Esto es congruente con los resultados obtenidos por Kiely y col. [23].

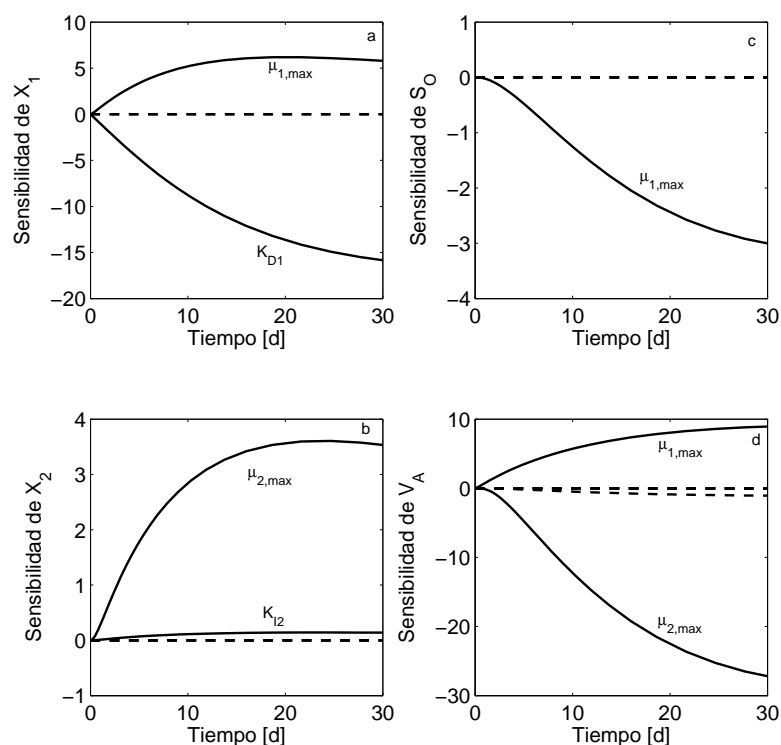


Figura 4.6: Solución de la ecuación de sensibilidad paramétrica (4.7) para a) X_1 , b) X_2 , c) S_O , d) V_A . El efecto de los parámetros que causan el mayor efecto en las soluciones son $\mu_{1,max}$, $\mu_{2,max}$ y K_{D1} . El efecto de los parámetros restantes puede considerarse despreciable.

De este modo es posible determinar la familia de plantas Λ_s que capturen la variación paramétrica entre la familia de plantas perturbadas, debida a la desviación de los parámetros $\mu_{1,max}$ y $\mu_{2,max}$ (para propósitos de este estudio únicamente se considerará los parámetros asociados a la cinética de crecimiento y no la tasa de mortandad K_{D1}) con respecto a los valores nominales, y la planta nominal en un rango de variación que se considere apropiado para los cambios en la operación del proceso real.

4.2. Formulación del problema de control

El principal objetivo del proceso de DA en el tratamiento de la FORSM es la descomposición de materia orgánica. Gracias a los recientes avances en pretratamiento de la FORSM es posible considerar que el 100% de la materia orgánica está disponible para la degradación

microbiana, por lo que estos contaminantes es posible medirlos en términos de la concentración de la DQO. Así mismo, es posible la regulación de la S_O medida en términos de la DQO mediante control retroalimentado considerando la existencia, unicidad y estabilidad de las soluciones (incluyendo el punto de equilibrio). Las anteriores propiedades son consideradas en la **Proposición 4** y la **Suposición 1**.

El problema de regulación de la DQO a la salida del proceso de DA para el tratamiento de la FORSM como un problema de control es enunciado como: *encontrar un algoritmo de control tal que el comportamiento de la concentración de la DQO en el digester anaerobio sea regulado a una concentración deseada a partir de mediciones de la DQO a la salida del proceso de DA en presencia de perturbaciones en la concentración de la corriente de alimentación al digester anaerobio*. Para esto se diseñará un controlador robusto que calcule el factor de dilución (al mantener constante el volumen del digester anaerobio podrá calcularse el flujo que se introducirá al digester anaerobio) el cual permita mantener la concentración deseada de la DQO a la salida del proceso de DA a pesar de las variaciones en la concentración en la alimentación al digester anaerobio y variaciones paramétricas.

En las siguientes secciones se abordará de manera breve (el procedimiento es similar al presentado en el Capítulo 2 (Sección 4.3), el problema de regulación de la S_O tomando en cuenta: (i) la presencia de fluctuaciones (perturbaciones), tal que la concentración de los compuestos orgánicos en la corriente de alimentación sea desconocida y no medida; (ii) la complejidad del proceso de DA en el sentido de inhibiciones y la incertidumbre el modelo cinético relacionado con las condiciones de operación.

4.3. Síntesis robusta vía H_∞

El procedimiento para el diseño de un controlador robusto vía H_∞ consiste en los siguientes pasos: (i) linealización del modelo no lineal en un punto de operación y representación en espacio de estados; (ii) representación en espacio de estados del modelo incierto; (iii) descripción de las especificaciones de desempeño requeridos para el controlador en términos de la respuesta en la frecuencia de funciones de peso; (iv) síntesis del controlador.

La Figura 4.7 muestra el diagrama de bloques del sistema de control por retroalimentación. Dado que el modelo de DA (4.1) tiene un único punto de equilibrio Φ^* localmente estable, cuyas coordenadas están dadas por (4.3) y (4.4), es posible encontrar una entrada de control subóptima $u = D - D^*$, bajo CNO, en $\Phi_s^* \in \Omega_s \subset R_+^5$. Dicha señal de control se diseñó para una planta nominal $P_{nom,s}(s)$ con valores nominales en sus parámetros $\pi_{s,0} \in \Pi_s$. Posterior-

mente, $P_{nom,s}$ se excita a través del cambio en los parámetros cinéticos y concentración en la alimentación con el fin de estimular la respuesta en la frecuencia y así identificar una familia de plantas $\Lambda_s = [I + W_{p,s}(s)\Delta(s)]P_{nom,s}(s)$, de este modo, es posible diseñar un controlador que mitigue las perturbaciones e incertidumbres.

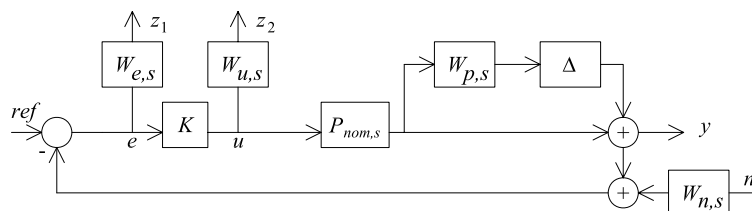


Figura 4.7: Diagrama de bloques para la síntesis del controlador. $W_{e,s}$, $W_{u,s}$ y $W_{n,s}$ son funciones de peso para el diseño de control. $W_{p,s}\Delta$ representa la incertidumbre del tipo multiplicativa no estructurada ($\|\Delta\|_\infty \leq 1$) cuya máxima respuesta en la frecuencia es capturada por la función de peso $W_{p,s}$. La planta nominal $P_{nom,s}$ es construida mediante la linealización del modelo (4.1) en el punto de equilibrio (4.3) y (4.4).

En la Figura 4.7 se pueden observar las señales de entrada u, n , y $S_{O,in}$ los cuales están relacionadas con el factor de dilución $D - D^*$, ruido en la medición y concentración de alimentación de la DQO respectivamente. La variable de salida y corresponde a la medición de la DQO ($S_O - S_O^*$) medido en la corriente de salida del digestor, z_1 y z_2 son señales de salida auxiliares usadas para especificar requerimientos en las señales de control u y error (e). La planta generalizada G es obtenida mediante la relación de las señales de entrada / salida tal que $z = Gd$, donde el vector de salida es $z = [z_1 \ z_2 \ | \ e]^T$ y el vector de entrada es $d = [n \ | \ u]^T$ evaluado en $s = \omega j$ for $\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]$. De esta forma, G está dada por la siguiente relación:

$$G = \left[\begin{array}{c|c} W_{e,s}W_{n,s} & -W_{e,s}P_{nom,s} \\ \hline 0 & W_{u,s} \\ \hline -W_{n,s} & -P_{nom,s} \end{array} \right] \quad (4.8)$$

donde $W_{u,s}$, $W_{e,s}$ y $W_{n,s}$ son definidos en la siguiente sección. El controlador es denotado como K . Formalmente, el problema de control descrito puede ser abordado vía H_∞ clásico [34]. De hecho, K puede ser parametrizado tal que la función de transferencia a lazo cerrado sea minimizada:

$$\|T_{zd}\| = \max_{\omega} \sigma \left[P_{1,1} + P_{1,2}K(I - P_{2,2}K)^{-1}P_{2,1} \right] \quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ \vdots \\ u \end{bmatrix}$$

4.3.1. Planta nominal y familia de plantas inciertas

La **Proposición 4** ilustra la existencia y unicidad del único punto de equilibrio $\Phi^* \neq 0$ para cualquier conjunto de parámetros. Partiendo de la **Proposición 4** y la **Suposición 1** se obtiene una planta nominal en el punto Φ_s^* . Considere las siguientes variables de desviación $u = D - D^*$ y la DQO como variable medida ($y = S_0 - S_0^*$), entonces es posible obtener la siguiente linealización del modelo nominal (4.1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= A_s x_s + B_s u \quad x_s(t_0) = x_{s,0} \\ y &= C_s x \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde $A_s = [\partial f_i / \partial x_k] |_{\Phi^*}$, $B_s = [\partial f_i / \partial u] |_{D^*}$, para $i, k = 1, 2, 3, 4, 5$; y $C_s = [0, 0, 1, 0, 0]$. Considerando los siguientes parámetros nominales $\pi_{s,0} \in \Pi_s$ [42, 23]: $D^* = 0.02[d^{-1}]$, $\mu_{1\text{máx}} = 0.1[d^{-1}]$, $\mu_{2\text{máx}} = 0.2[d^{-1}]$, $K_{D1} = 0.05[d^{-1}]$, $K_{D2} = 0.02[d^{-1}]$, $Y_{X1} = 0.2[mg \text{ org}/mg S_O]$, $Y_{X1SO} = 0.24[mg \text{ org}/mg S_O]$, $Y_{X1VA} = 2.45[mg \text{ org}/mg V_A]$, $Y_{X2VA} = 0.06[mg \text{ org}/mg V_A]$, $Y_{NH4} = 0.1212[mg NH_4/mg \text{ org}]$, $K_{LaNH3} = 0.5872[d^{-1}]$, $K_{NH4} = 1.0074 \times 10^{-5}$, $P_{NH3} = 20[mmHg]$, $K_{S1} = 25[mg/l]$, $K_{S2} = 150[mg/l]$, $K_{Ia1} = 1000[mg/l]$, $K_{Im1} = 300[mg/l]$, $K_{Im2} = 5[mg/l]$.

Las concentraciones de alimentación $X_{1,in} = 0[mg/l]$, $X_{2,in} = 0[mg/l]$, $S_{O,in} = 10000[mg/l]$, $V_{A,in} = 5000[mg/l]$, $NH_{4,in} = 500[mg/l]$. Entonces el sistema nominal (4.10), puede expresarse como una realización del espacio de estados:

$$P_s = \left[\begin{array}{c|c} A_s & B_s \\ \hline C_s & 0 \end{array} \right] \quad (4.11)$$

Partiendo de la **Proposición 4** y la **Suposición 1** es posible obtener una planta nominal en el punto Φ_s^* . Adicionalmente, Si la realización (2.12) se obtiene de manera balanceada (Sección A.1) dado que el punto Φ_s^* es localmente estable (**Suposición 1** con parámetros nominales $\pi_{s,0} \in \Pi_s$) entonces la planta nominal $P_{nom,s} \in \mathcal{RH}_\infty$.

Mediante el análisis de sensibilidad [33] del modelo (4.1) mostrado la sección (4.1.1), se determinó que los parámetros que inducen una variación significativa en las soluciones son : $\mu_{1,max}$, $\mu_{2,max}$ y K_{D1} , sin embargo para propósitos de este estudio únicamente se considera los dos primeros parámetros. Entonces, con una variación del $\pm 5\%$ en el valor de los parámetros nominales en $\mu_{1,max}$, y $\mu_{2,max}$, se puede considerar como una variación paramétrica representativa en el diseño robusto. Es decir, mediante la modificación del valor de los parámetros en el intervalo antes mencionado, se obtendrán los elementos de (4.10) las cuales pertenecen a una familia de plantas perturbadas P_s . En la Figura 4.8 se presenta la respuesta en la frecuen-

cia de $P_{nom,s}$ y la familia de plantas perturbadas P_s . La incertidumbre paramétrica puede ob-

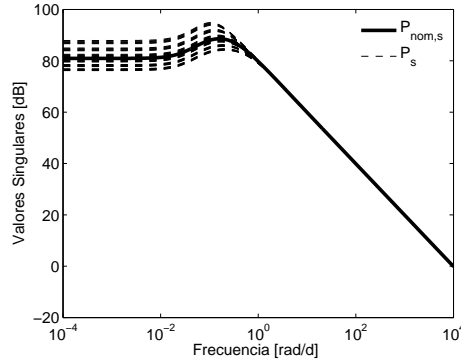


Figura 4.8: Respuesta en la frecuencia de la planta nominal $P_{nom,s}(\omega)$ y el conjunto de modelos perturbados $P_s(\omega)$.

servarse (a través de los cambios en el valor de los parámetros) y compararse con respecto a la respuesta en la frecuencia de la planta nominal $P_{nom,s}$ en $\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}] = [1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^2]$. Es decir, es posible representar la incertidumbre relativa $U_{rel,s}$ mediante la siguiente relación:

$$U_{rel,s}(\omega) = \left| \frac{P_s(\omega) - P_{nom,s}(\omega)}{P_{nom,s}(\omega)} \right| \quad (4.12)$$

donde $P_s(\omega)$ representa una planta para cada conjunto de valores en los parámetros $\mu_{1,max}$ y $\mu_{2,max}$. Cabe aclarar que U_{rel} puede aproximarse como $W_{p,s}\Delta$ where $\|\Delta\|_\infty \leq 1$. En Figura 4.8 se muestra la respuesta en la frecuencia de la planta nominal $P_{nom,s}(\omega)$ y la familia de plantas $\Psi_s = (I + U_{rel,s})P_{nom,s}$ la cual contiene cada una de las plantas $P_s(\omega)$. En Figura 4.9 se muestra la respuesta en la frecuencia de (4.12) así como valor superior de la incertidumbre relativa $U_{rel,s}$, la cual puede calcular con la siguiente expresión:

$$\max_{\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]} \{U_{rel,s}\} = \max_{\omega} \left| \frac{P_s(\omega) - P_{nom,s}(\omega)}{P_{nom,s}(\omega)} \right| \quad (4.13)$$

Si relacionamos un modelo de incertidumbre no estructurada del tipo multiplicativo asociada a la familia de plantas $\Psi = (I + U_{rel,s})P_{nom}$ entonces podemos representar la familia de plantas como el siguiente modelo incierto $\Lambda_s = (I + W_p\Delta)P_{nom,s}$ donde $\|\Delta\|_\infty \leq 1$.

4.3.2. Funciones de peso

Las funciones de peso mostradas en la Figura 4.7 representan requerimientos en la frecuencia de las señales de salida o bien entrada, la cual tiene una interpretación física. La estructura de dichas funciones de peso es la siguiente:

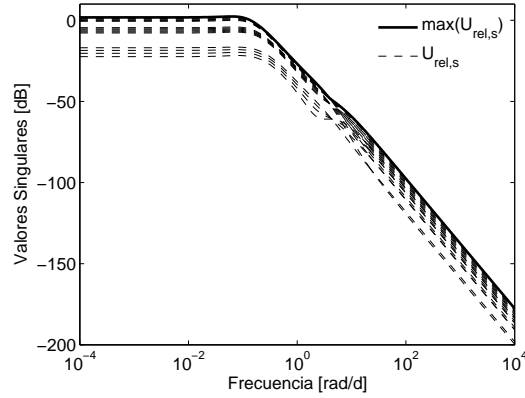


Figura 4.9: Representación en la frecuencia de $U_{rel,s}$ y $\max(U_{rel,s})$.

$$\begin{aligned}
 W_{p,s}(\omega) &= \frac{W_{s,p,N}(\omega)}{W_{s,p,D}(\omega)} \\
 W_{u,s}(\omega) &= \frac{s + \omega_u/M_u}{\varepsilon_u s + \omega_u} = \frac{s + 100/0.5}{0.05s + 100} \\
 W_{e,s}(\omega) &= \frac{s/M_e + \omega_e}{s + \omega_e \varepsilon_e} = \frac{s/10 + 100}{s + (100)(0.1)} \\
 W_{n,s}(\omega) &= \frac{s + \omega_n \varepsilon_n}{s/M_n + \omega_n} = \frac{s + (1000)(0.01)}{s/0.1 + 1000}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde los parámetros de cada función de peso depende del requerimiento asociado a cada señal de entrada o salida en función de la frecuencia.

La información contenida por $\max_{\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]} \{U_{rel,s}\}$ puede ser aproximada mediante una función de peso $W_{p,s}(\omega)$. Es posible representar $W_{p,s}$ como una función de transferencia de orden n , estable y de fase mínima. Mediante un método de búsqueda iterativo de ajuste mediante mínimos cuadrados es posible obtener un sistema matricial que capture la respuesta en la frecuencia de (4.13). De esta forma es posible obtener $W_{p,s}(\omega) = W_{p,s,N}(\omega)/W_{p,s,D}(\omega)$; donde $W_{p,s,N}(\omega) = 4.38 \times 10^{-4}s^3 + 0.015s^2 + 0.043s + 3.45 \times 10^{-3}$, y $W_{p,s,D}(s) = s^3 + 0.403s^2 + 0.052s + 3.45 \times 10^{-3}$.

Continuando con el procedimiento descrito en la sección 2.3.2 son descritas las funciones de peso (4.14) aplicadas al proceso (4.1). Para el caso de $W_{u,s}$ los valores $M_u = 0.5$, $\varepsilon_u = 0.05$ y $\omega_u = 100$. Para $W_{e,s}$ los valores $M_e = 10$, $\varepsilon_e = 0.1$ y $\omega_e = 100$. Finalmente, para $W_{n,s}$ los valores $M_n = 0.1$, $\varepsilon_n = 0.01$ y $\omega_n = 1000$.

4.3.3. Síntesis de controlador nominal y robusto

El problema de control subóptimo fue numéricamente resuelto mediante el Toolbox de control robusto (Matlab[®]) utilizando la ecuación estándar de Riccati [36]. La aproximación del controlador $K(s)$ fue obtenida mediante un proceso numérico iterativo (*hinfyn*), asegurando la estabilidad nominal con $\gamma = 0.028$. Asumiendo que el modelo de plantas perturbadas está descrito mediante el siguiente conjunto $\Lambda_s = \{(I + W_{p,s}\Delta)P_{nom,s} : \Delta \in RH_\infty\}$. Entonces, la condición de estabilidad robusta se cumple con $\|W_{p,s}P_{nom,s}K(I + P_{nom,s}K)^{-1}\|_\infty = 0.944 \leq 1$ (Teorema 8.5 [36]). El controlador de 11° orden obtenido es $K_{11}(s) = K_{11,N}(s)/K_{11,D}(s)$, donde $K_{11,N}(s) = 10.706s^{10} + 2.15 \times 10^4s^9 + 3.13 \times 10^5s^8 + 1.06 \times 10^6s^7 + 7.88 \times 10^5s^6 + 2.58 \times 10^5s^5 + 4.57 \times 10^4s^4 + 4.69 \times 10^3s^3 + 275.27s^2 + 8.2883s + 0.096319$ y $K_{11,D}(s) = s^{11} + 1.69 \times 10^4s^{10} + 1.00 \times 10^6s^9 + 9.66 \times 10^7s^8 + 1.22 \times 10^9s^7 + 3.79 \times 10^9s^6 + 1.76 \times 10^9s^5 + 3.37 \times 10^8s^4 + 3.37 \times 10^7s^3 + 1.75 \times 10^6s^2 + 4.39 \times 10^4s + 418.05$. Los valores Hankel del controlador de 11° orden son $\sigma_{11} = [0.012, 0.011, 0.001, 7.06 \times 10^{-5}, 1.04 \times 10^{-5}, 1.40 \times 10^{-7}, 2.58 \times 10^{-8}, 1.02 \times 10^{-11}, 3.52 \times 10^{-13}, 1.76 \times 10^{-13}, 2.65 \times 10^{-15}]$.

Con el fin de obtener un controlador de orden menor, se aplicó una truncación balanceada al controlador (K_{11}) de orden completo. De este modo, se obtiene el controlador de 5° orden $K_5(s) = K_{5,N}(s)/K_{5,D}(s)$, donde $K_{5,N}(s) = 10.706s^4 + 2.14 \times 10^4s^3 + 8.86 \times 10^4s^2 + 3.14 \times 10^4s + 2.24 \times 10^3$ y $K_{5,D}(s) = s^5 + 1.68 \times 10^3s^4 + 9.89 \times 10^5 + s^3 + 8.62 \times 10^7s^2 + 3.20 \times 10^8s + 9.74 \times 10^6$. Los valores Hankel del controlador reducido son: $\sigma_5 = [1.29 \times 10^{-2}, 1.16 \times 10^{-2}, 1.29 \times 10^{-3}, 7.06 \times 10^{-5}, 1.04 \times 10^{-5}]$.

En la Figura 4.10 puede observarse que el comportamiento de la respuesta en la frecuencia para el controlador K_{11} y K_5 es similar en el rango de frecuencia $\omega \in [10^{-4}, 10^4]$. La Figura 4.11 muestra la respuesta en la frecuencia de la planta nominal $P_{nom,s}$, el controlador K_5 y la función de transferencia S .

4.4. Resultados numéricos del controlador a lazo cerrado

El esquema de control fue evaluado numéricamente a lazo cerrado con el propósito de ilustrar la implementación del esquema de control en el modelo no lineal (4.1) del proceso de DA para el tratamiento de la FORSM. Dos escenarios de regulación robusta fueron estudiados.

Caso (i) El objetivo del presente caso es ilustrar mediante la implementación numérica a lazo

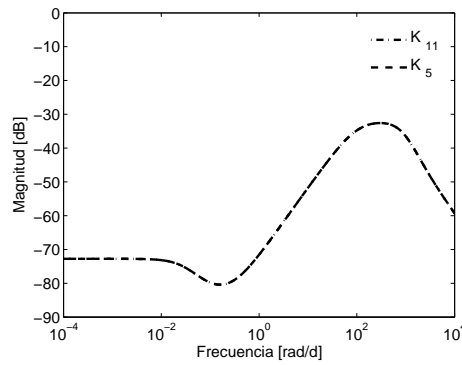


Figura 4.10: Respuesta en la frecuencia del controlador K_{11} y K_5 .

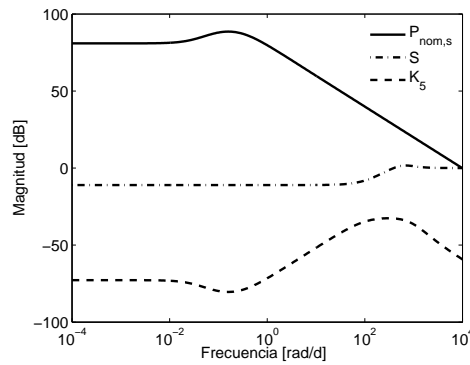


Figura 4.11: Respuesta en la frecuencia de la planta nominal $P_{nom,s}$, controlador K_5 y la función de transferencia S .

cerrado que el controlador es capaz de regular de manera robusta la DQO logrando mitigar perturbaciones en la concentración de la DQO en la corriente de alimentación (incluso con componentes en la frecuencia), así como incertidumbres paramétricas asociados a la cinética de los microorganismos en el modelo no lineal. Los resultados del caso (i) se muestra en la Figura 2.12 En este caso de estudio, se logra la regulación de la DQO (DQO_{out} [g/l]) (Figura 4.12a) en un valor de referencia ($DQO_{ref} = 1$ [g/l]). Dicha regulación se lleva acabo a pesar de las variaciones paramétricas en las constantes cinéticas $\mu_{1,max}$, y $\mu_{2,max}$ (Figura 4.12c) inducidas en el modelo no lineal (4.1). Esto se debe a que el controlador cumple con el criterio de estabilidad robusta para la familia de plantas Λ_s la cual incluye variaciones paramétricas en los parámetros $\mu_{1,max}$, y $\mu_{2,max}$. Adicional a esto, el controlador logra mitigar las fluctuaciones en la variación en la concentración de la DQO a la entrada del proceso de DA (DQO_{in} [g/l]) con componentes en la frecuencia donde la planta nominal $P_{nom,s}$ es sensible (Figura 4.12b). El comportamiento del factor de dilución D (Figura 4.12c) relacionado con la entrada de control ($u = D - D^*$) indica que la señal de control se mantiene acotada a pesar de introducir una señal de ruido a la señal de medida o de salida ($y = S_O - S_O^*$). Los resultados del caso (i) indican que el controlador es robusto ante perturbaciones en la concentración de

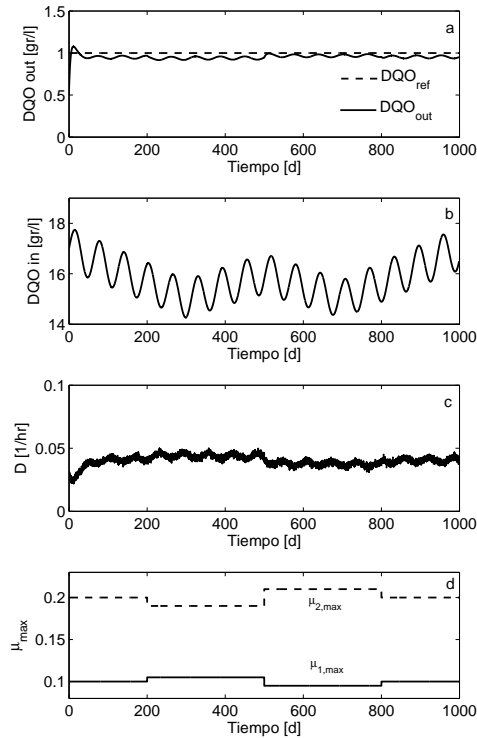


Figura 4.12: Resultados de la simulación para la evaluación del controlador caso (i). a) Concentración de la DQO a la salida del digestor. b) Concentración de la DQO a la entrada del digestor ($S_{O,in}$). c) Factor de dilución, la cual esta relacionada con la entrada de control calculada por la ley de control ($u = D - D^*$). d) Variación paramétrica en el modelo (4.1).

$S_{O,in}$ de la alimentación e incertidumbre paramétrica logrando una regulación robusta de la S_O a la salida del proceso de DA para el tratamiento de la FORSM.

Caso (ii) El objetivo del presente caso es ilustrar mediante la implementación numérica a lazo cerrado que el controlador es capaz de regular de manera robusta la DQO, incluso con cambios en escalón, logrando mitigar perturbaciones en la concentración de la DQO en la corriente de alimentación (incluso con componentes en la frecuencia), así como incertidumbres paramétricas asociados a la cinética de los microorganismos en el modelo no lineal. Los resultados del caso (ii) se muestra en la Figura 4.13 En este caso de estudio, se logra la regulación de la DQO (DQO_{out} [g/l]) (Figura 4.13a) en un cambio en escalón de la referencia (DQO_{ref} [g/l]). Dicha regulación se lleva acabo a pesar de que el controlador no fue diseñado para un problema de seguimiento. Lo último se debe a que la función de peso $W_{e,s}$ permite un error acotado en el rango de frecuencia donde la planta nominal $P_{nom,s}$ es sensible. El controlador regula a pesar de las variaciones paramétricas en las constantes

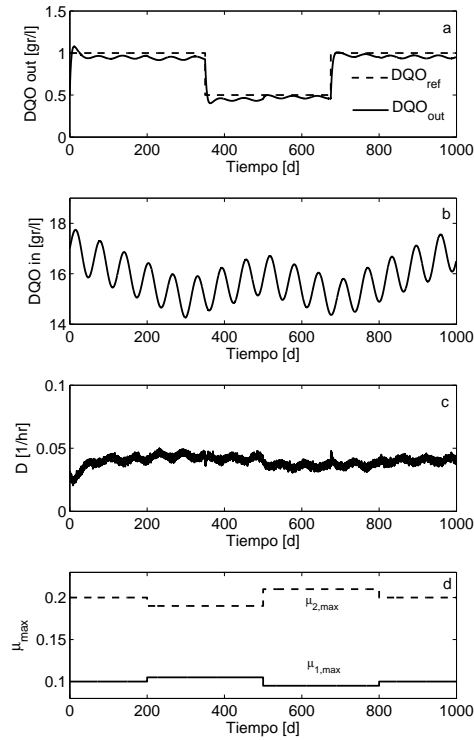


Figura 4.13: Resultados de la simulación para la evaluación del controlador caso (ii). a) Concentración de la DQO a la salida del digestor. b) Concentración de la DQO a la entrada del digestor ($S_{O,in}$). c) Factor de dilución, la cual esta relacionada con la entrada de control calculada por la ley de control ($u = D - D^*$). d) Variación paramétrica en el modelo (4.1).

cinéticas $\mu_{1,max}$, y $\mu_{2,max}$ (Figura 4.13c) inducidas en el modelo no lineal (4.1). Esto se debe a que el controlador cumple con el criterio de estabilidad robusta para la familia de plantas Λ_s la cual incluye variaciones paramétricas en los parámetros $\mu_{1,max}$, y $\mu_{2,max}$. Adicional a esto, el controlador logra mitigar las fluctuaciones en la variación en la concentración de la DQO a la entrada del proceso de DA (DQO_{in} [g/l]) con componentes en la frecuencia donde la planta nominal $P_{nom,s}$ es sensible (Figura 4.12b). El comportamiento del factor de dilución D (Figura 4.12c) relacionado con la entrada de control ($u = D - D^*$) indica que la señal de control se mantiene acotada a pesar de introducir un cambio en escalón en la referencia de la DQO y adicionar una señal de ruido a la señal de medida o de salida ($y = S_O - S_O^*$). Los resultados del caso (i) indican que el controlador es robusto ante perturbaciones en la concentración de $S_{O,in}$ de la alimentación e incertidumbre paramétrica logrando una regulación robusta de la S_O a la salida del proceso de DA para el tratamiento de la FORSM.

4.5. Comentarios sobre el capítulo

Se propuso un sistema dinámico el cual describe el proceso de DA para la FORSM. Dicho modelo describe la degradación de la materia orgánica soluble S_O mediante la acción de dos conjuntos de microorganismos (acidogénicos y metanogénicos). La cinética de crecimiento de los microorganismos incluye la inhibición por sustrato y producto de los componentes que han sido identificados en estudios experimentales. El modelo fue analizado en el sentido de unicidad (**Proposición 4**) y estabilidad local del punto de equilibrio (**Suposición 1**). Mediante un análisis de sensibilidad paramétrica se determinó los parámetros que afectan las soluciones del sistema dinámico no lineal y están relacionados a la cinética de los microorganismos, siendo coherentes con los resultados experimentales presentados por otros autores. Los parámetros identificados fueron considerados como la fuente de la incertidumbre paramétrica. Dicha caracterización sienta precedentes para la síntesis de un controlador robusto.

Mediante el modelo (4.1) y un conjunto de parámetros nominales fue posible obtener un modelo nominal lineal el cual pertenece al espacio de funciones \mathcal{RH}_∞ . Un controlador robusto vía H_∞ fue diseñado para un proceso de DA para controlar la DQO en un proceso de tratamiento de la FORSM. Funciones de peso fueron propuestas para abordar el ruido, acotar el error tolerado así como acción de control. La estabilidad robusta fue abordada mediante una función de peso tal que los efectos de la incertidumbre paramétrica fuera compensado.

Mediante simulaciones numéricas el controlador propuesto es capaz de lograr la regulación robusta de la DQO en el modelo no lineal a lazo cerrado del proceso de DA para el tratamiento de la FORSM. El controlador es robusto ante (i) incertidumbre en los parámetros cinética, (ii) perturbaciones en la DQO de alimentación y (iii) ruido en la medición.

Los resultados globales de este capítulo sugieren que el procedimiento descrito en el presente trabajo puede ser extendido a otros sistemas biológicos en la mitigación de compuestos y/o generación de metabolitos los cuales requieran un balance entre regulación (error permitido) y una acción de control suave (acotamiento de la entrada de control).

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

La digestión anaerobia para la mitigación de materia orgánica es una realidad, sin embargo todavía presenta retos para mejorar los esquemas actuales para implementaciones a nivel industrial. Esto es una motivación importante para generar conocimiento y tecnología que incluso puede aplicarse a otros procesos de digestión anaerobia.

En este trabajo de investigación, se consideró el control del proceso de DA para la reducción de la materia orgánica en sistemas en fase acuosa y sólida. Dicha investigación se centra en comprobar la hipótesis planteada: La aplicación del esquema de control robusto al proceso de digestión anaerobia continua e isotérmica permite obtener una regulación robusta de la DQO tanto en sistemas acuosos como de sólidos orgánicos, por medio de la manipulación del factor de dilución. En este sentido se presentarán conclusiones relevantes; adicionalmente, alternativas y mejoras para trabajo futuro.

5.1. Conclusiones

A pesar que se diseñaron dos sistemas de control, los principios de diseño son los mismos. Es decir, se estudió los elementos que pudieran comprometer las condiciones normales de operación del proceso de DA en términos de magnitud y frecuencia; los cuales son abordados bajo el mismo esquema de diseño.

La aplicación del esquema de control robusto al proceso de DA continua e isotérmica permite obtener una regulación robusta de la DQO tanto en sistemas acuosos como de sólidos orgánicos, por medio de la manipulación del factor de dilución. El esquema de control permite la regulación robusta ante: (i) variación paramétrica, (ii) perturbaciones en la DQO de alimentación (incluso con componentes en la frecuencia), (iii) errores y ruido en la medición.

Los resultados sugieren que el procedimiento descrito en el presente trabajo puede ser extendido a otros sistemas biológicos en la mitigación de compuestos y/o generación de metabolitos los cuales requieran un balance entre regulación (error permitido) y una acción de control suave (acotamiento de la entrada de control).

El controlador propuesto es un candidato a ser implementado a escala industrial debido a: (i) la estructura lineal de controlador, (ii) se aborda limitaciones en los actuadores durante la síntesis del controlador, (iii) no son necesarios equipos de medición sofisticados, (iv) errores y ruido en la medición son compensados, lo cual es común en implementaciones a escala industrial.

5.1.1. Comentarios finales para DA en fase líquida

El modelo utilizado en la modelación del proceso de DA para el tratamiento de aguas residuales ha sido modificado partiendo del modelo inicial de Bernard y col. [30]. Dicha modificación incluye la reducción del modelo de 6° orden para convertirse en uno de 4° orden. Se demostró que dicha reducción es en realidad una proyección del modelo de 4° orden en sus correspondientes estados del modelo de 6°. Esto puede ser comprobado por los resultados obtenidos en el presente trabajo (**Proposición 3**). Por lo que es indistinguible utilizar alguno de los modelos bajo la técnica de control H_∞ .

El diseño del controlador H_∞ se llevó a cabo contemplando el problema de regulación asegurando la estabilidad interna del sistema. Dado que se deseaba abordar el problema real de control del proceso de DA para el tratamiento de aguas, se incluyeron funciones de peso que contemplaran: (i) ruido en la medición (W_n), (ii) acotamiento del error permitido (W_e), y (iii) restricciones en la señal de control (W_u). Se obtuvo un controlador que estabiliza nominalmente dicha planta. Adicionalmente, se demostró que el controlador es capaz de estabilizar una familia de plantas que contemplan la incertidumbre en los parámetros cinéticos del modelo nominal. Dado que los criterios nominal y robusto fueron cumplidos, se procedió a ilustrar como estos criterios son exhibidos mediante un balance entre regulación (error permitido) y una acción de control suave (acotamiento de la entrada de control).

Una implementación experimental se llevó a cabo a fin de ilustrar la posibilidad de implementar el controlador a nivel industrial. Dicha aplicación exhibió que las modificaciones en las funciones de peso permiten la flexibilidad de abordar el balance entre regulación (error permitido) y una acción de control suave (acotamiento de la entrada de control) a pesar de

limitaciones en la medición de la salida de control.

5.1.2. Comentarios finales para DA en fase sólida

Mediante un estudio del proceso de la DA para el tratamiento de la FORSM se logró extender algunos resultados obtenidos en la teoría de DA en fase acuosa a este campo. De hecho, el término de condiciones normales de operación se definió para el sistema de fase sólida orgánica. Adicionalmente, partiendo de un modelo para digestión de RSO ([42, 23]) se propone un sistema dinámico el cual permite la implementación de un sistema de control mediante una entrada de control relacionada con el factor de dilución. El modelo dinámico contempla básicamente la descripción del proceso real como son: (i) dos consorcios de microorganismos (metanogénicas y acidogénicas); (ii) un substrato (S_O) y dos subproductos (VFA y NH_4); (iii) inhibición por substrato y producto, (VFA y NH_4). Mediante un análisis de sensibilidad paramétrica se determinó los parámetros que afectan las soluciones del sistema dinámico no lineal están relacionados a la cinética de los microorganismos, siendo coherentes con los resultados experimentales presentados por trabajos experimentales ([42, 23]).

El modelo propuesto fue analizado en el sentido de unicidad (**Proposición 4**) y estabilidad local del punto de equilibrio (**Suposición 1**). Los resultados permitieron el diseño de un sistema de control para DA para el tratamiento de la FORSM.

El diseño del controlador para el proceso de DA en fase sólida, permitió extender la aplicabilidad del esquema propuesto para el tratamiento de la FORSM; esto a pesar que los sistemas en fase líquida y sólida orgánica son descritos de diferente forma y las cinéticas contemplan fenómenos de inhibición diferentes. Dicho esquema logra la regulación robusta de la DQO.

5.2. Trabajo futuro

En el presente trabajo abordó el control robusto en procesos de DA fase líquida y sólida. A partir de dicho estudio es posible visualizar nuevas preguntas.

- Estudio del efecto de cambio de substrato en un proceso de DA fase líquida. Durante la etapa final de la implementación experimental se procedió a realizar un cambio de vinazas y el controlador no fue capaz de mitigar los efectos adversos debidos al cambio de substrato. Se propone un estudio que aborde una transición en la dinámica de los microorganismos debida a una aclimatación de un nuevo substrato. Una alternativa es la propuesta de un controlador robusto que establezca una familia de plantas que

involucre un cambio paramétrico asociada a una transición o aclimatación a un nuevo sustrato.

- Dado el controlador propuesto para el proceso de DA en fase sólida, tomar en cuenta en la implementación la modificación de los valores en las constantes que definen las funciones de peso a fin de mitigar el efecto de alimentación mediante un tornillo sin fin (para el caso de un flujo de alimentación con parámetros no distribuidos). En caso de contar con un pretratamiento que permita una alimentación con parámetros distribuidos corroborar si dicho pretratamiento reduce los efectos nocivos de la tasa de mortandad en los microorganismos; en caso afirmativo se propone un estudio del sistema dinámico el cual no contemple dichas constantes (K_{D1} y K_{D2}).

Apéndice A

Conceptos básicos en control robusto

En este apéndice se expondrán los conceptos básicos en el diseño de controladores robustos vía H_∞ . Dicha teoría fue tomada de tres fuentes las cuales es posible consultar para mayor detalle [35, 36, 43]. Primero se abordarán conceptos básicos como: sistema lineal, función de transferencia, y algunas propiedades básicas que presentan estos sistemas. Posteriormente se introducirán algunos conceptos de análisis lineal, en especial y de manera breve los espacios de Hardy, los cuales son requeridos para el desarrollo de la teoría básica en control robusto. Se introducirá el concepto de norma, dicho concepto permite de manera natural la cuantificación del *tamaño* de un sistema, la cual es un requerimiento fundamental en la cuantificación de sistemas con incertidumbres. Adicionalmente se presentarán los conceptos de estabilidad en el sentido de control robusto. Finalmente se abordará la solución del problema de control en el sentido de la búsqueda del controlador y la reducción del mismo.

A.1. Sistemas lineales y realización en espacio de estados

Considere un sistema lineal invariante en el tiempo representado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu; & x(t_0) &= x_0 \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde $x \in R^n$ es el vector de estados, $x_0 \in R^n$ es la condición inicial, $u \in R^m$ es la entrada del sistema, $y \in R^p$ es la salida del sistema y las matrices son tales que $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$ y $D \in R^m$. Un sistema dinámico con una entrada ($m = 1$) y una salida ($p = 1$) es llamado sistema SISO (simple entrada - simple salida). La función de transferencia asociada está definida como $Y(s) = G(s)U(s)$; donde $U(s)$ y $Y(s)$ son la transformada de Laplace de $u(t)$ y $y(t)$ con la condición inicial de cero ($x(0) = 0$). De hecho, tenemos que $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Podemos entonces usar la siguiente notación la cual involucra el cálculo de funciones de transferencia:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (\text{A.2})$$

Ahora considere las siguientes propiedades:

- Controlabilidad. Si el par (A, B) es controlable, entonces la matriz de controlabilidad $\mathbf{C} = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ es de rango completo.
- Observabilidad. Si el par (C, A) es observable, entonces la matriz de observabilidad $\mathbf{O} = [C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]^T$ es de rango completo.
- Estabilizabilidad. Si el par (A, B) es estabilizable, entonces la matriz $[A - \lambda I \ B]$ es de rango completo para todo $\text{Re}(\lambda) \geq 0$; donde λ es un valor propio de la matriz A .
- Detectabilidad. Si el par (C, A) es detectable, entonces la matriz $[A - \lambda I \ C]^T$ es de rango completo para todo $\text{Re}(\lambda) \geq 0$.

Asumiendo que $G(s)$ es una función de transferencia real racional y propia. Entonces un modelo en el espacio de estados (A, B, C, D) tal que

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (\text{A.3})$$

es una realización de $G(s)$.

Una realización en el espacio de estados (A, B, C, D) de $G(s)$ se dice ser una realización mínima de $G(s)$ si A tiene la menor dimensión posible. Una realización en el espacio de estados (A, B, C, D) de $G(s)$ se dice ser una realización mínima si y sólo si (A, B) es controlable y (C, A) es observable. Para más información se le sugiere al lector consultar [35, 36, 43]

A.2. Espacio H_∞

Uno de los objetivos más importantes en control es alcanzar cierta especificación de desempeño. Las especificaciones de desempeño están relacionadas en términos del *tamaño* de ciertas señales de interés. Existen varias formas de definir el *tamaño* de una señal, sin embargo la norma es la más apropiada en el sentido de espacio métrico. Por lo que, primero se introducirá de manera breve algunos conceptos para luego abordar el espacio H_∞ .

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{C} . Un producto interno en V está definido como: $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{C}$; tal que para cualquier $x, y, z \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se cumplen las siguientes tres

condiciones: (i) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$, (ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$, (iii) $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$. Un espacio vectorial V con un producto interno es llamado espacio de producto interno. Sea V un espacio de producto interno y sea $x, y \in V$; entonces se cumplen las siguientes tres condiciones: (i) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, (ii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, (iii) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si $x \perp y$. Una generalización matricial del producto interno en $\mathbb{C}^{m \times n}$ está dado por $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^* B)$, para A y $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

Para definir los espacios de Hilbert es necesario abordar el concepto de convergencia. Suponga que V es un espacio normado; una secuencia v_k es una secuencia de Cauchy si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $M \geq 0$ tal que $\|v_k + v_l\| < \varepsilon$ para todo $k, l \geq M$. Esto significa que una secuencia es Cauchy si satisface: $\|v_k + v_l\| \xrightarrow{k, l \rightarrow \infty} 0$; lo que indica que la secuencia *aparentemente* converge. De hecho toda secuencia que converge es necesariamente una secuencia de Cauchy, sin embargo no toda secuencia de Cauchy converge. Un espacio normado es completo si cada secuencia de Cauchy en el converge, tal espacio es conocido como espacio de Banach. Un espacio completo de producto interno es llamado espacio de Hilbert.

Dados los conceptos anteriormente mencionados, es posible entonces abordar los espacios de funciones matriciales complejas las cuales están acotadas en el eje imaginario.

$\mathcal{L}_\infty(j\mathbb{R})$ o simplemente \mathcal{L}_∞ es un espacio de Banach de funciones matriciales que son (esencialmente) acotadas en $j\mathbb{R}$ con norma: $\|F\|_\infty = \text{ess sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \overline{\sigma}[F(j\omega)]$, donde *ess sup* es definido como esencialmente el supremo. El subespacio racional de \mathcal{L}_∞ es denotado como $\mathcal{R}\mathcal{L}_\infty(j\mathbb{R})$ o simplemente $\mathcal{R}\mathcal{L}_\infty$, consiste de todas las matrices de transferencia reales racionales y propias cuyos polos no se encuentran en el eje imaginario.

\mathcal{H}_∞ es un subespacio (cerrado) de \mathcal{L}_∞ con funciones que son analíticas y acotadas en el plano abierto derecho. La norma \mathcal{H}_∞ está definida como:

$$\|F\|_\infty = \sup_{\text{Re}(s) > 0} \overline{\sigma}[F(s)] = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \overline{\sigma}[F(j\omega)] \quad (\text{A.4})$$

El subespacio real y racional de \mathcal{H}_∞ es denotado como $\mathcal{R}\mathcal{H}_\infty(j\mathbb{R})$ o simplemente $\mathcal{R}\mathcal{H}_\infty$, consiste de todas las matrices de transferencia reales racionales propias y estables.

Una vez abordadas las características del espacio \mathcal{H}_∞ es posible introducir los conceptos de estabilidad basados en elementos cuyas propiedades deriven de dicho espacio. Para más información se le sugiere al lector consultar [35, 36, 43]

A.3. Estabilidad interna

En esta sección se aborda el concepto de estabilidad interna como un requisito previo que debe cumplir un sistema a fin de saber si el controlador cumple con el criterio de estabilidad nominal y robusta.

Considere el esquema de la Figura (A.1), donde P es la planta y $\hat{K} = -K$ el controlador. Se dice que el sistema en la Figura (A.1) presenta buen comportamiento si y solo si $I - \hat{K}(\infty)P(\infty)$ es invertible. Partiendo de la expresión $e_1 = w_1 + \hat{K}e_2$ y $e_2 = w_2 + Pe_1$ es posible ver que $(I - \hat{K}P)e_1 = w_1 + \hat{K}w_2$, de hecho la condición de buen comportamiento es equivalente a decir que $(I - \hat{K}P)^{-1}$ existe y es propia.

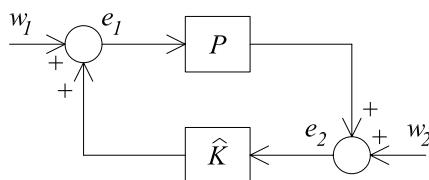


Figura A.1: Esquema representativo de un sistema con retroalimentación.

El sistema de la Figura (A.1) se dice ser internamente estable si la matriz (A.5) de transferencia T_{we} pertenece a \mathcal{RH}_∞ , donde $w = [w_1, w_2]^T$ y $e = [e_1, e_2]^T$. De hecho la estabilidad interna garantiza que todas las señales en un sistema sean acotadas, lo cual es un indicativo que las señales suministradas serán acotadas.

$$T_{we} = \begin{bmatrix} I & \hat{K} \\ -P & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (I - \hat{K}P)^{-1} & \hat{K}(I - \hat{K}P)^{-1} \\ P(I - \hat{K}P)^{-1} & (I - \hat{K}P)^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

A.4. Estabilidad nominal y robusta

En esta sección se presentan dos conceptos usados en teoría de control H_∞ : (i) la estabilidad nominal, y (ii) la estabilidad robusta. Para ambos casos únicamente se presenta el problema escalar. Para esto es necesario describir primero: (i) un modelo nominal, y (ii) un modelo de incertidumbre. Para más información se le sugiere al lector consultar [35, 36, 43]

En el diseño de un sistema de control es necesario un modelo matemático que describa el comportamiento dinámico del sistema real a ser controlado. La calidad de un modelo

dependerá de la diferencia entre la respuesta del modelo y la presentada por el sistema real. Describir de manera precisa un proceso real mediante un modelo matemático puede ser complejo. Por lo que un buen modelo debería ser simple para facilitar el diseño de un controlador pero lo suficientemente complejo para capturar los rasgos fundamentales del proceso real; esto con el fin de se alcance el objetivo de control en el proceso real. Cuando se pierde precisión en la descripción del proceso real se dice que existen errores de modelado. Entre los principales factores causantes de los errores de modelado pueden destacarse: (i) dinámica no lineal no considerada, (ii) dinámica de alta frecuencia no modelada, (iii) retardos de tiempo no contemplados, (iv) imprecisiones en los parámetros, debidos al método de identificación y/o modelado empleado, (v) modificaciones en el punto de trabajo de la planta con respecto al modelo nominal.

El término de incertidumbre se refiere a la diferencia o error entre el modelo y el proceso real, al mecanismo usado para expresar dicho error es conocido como representación de incertidumbre. La representación de la incertidumbre varía en términos de la estructura que contiene. Un ejemplo de la representación de incertidumbre no estructurada es expresada como: $P_{\Delta}(s) = P_{nom}(s) + W_1(s)\Delta(s)W_2(s)$, $\bar{\sigma} = [\Delta(j\omega)] < 1, \forall \omega \geq 0$, en donde P_{nom} es la planta nominal, W_1 y W_2 son matrices de transferencia estables las cuales capturan la magnitud y frecuencia de la incertidumbre. En el caso particular que $W_1 = I$ y $W_2 = w(s)I$, donde $w(s)$ sea una función escalar, entonces el conjunto de plantas Λ describe un disco centrado en P_{nom} con radio $w(j\omega)$. Otra forma de expresar la incertidumbre mediante una forma del tipo multiplicativa es: $\Lambda(s) = (I + W_1(s)\Delta(s)W_2(s))P_{nom}(s)$, la cual indica que la familia de plantas Λ está confinada a un vecindario normalizado de P_{nom} .

Es posible entonces, mediante los conceptos presentados en esta sección definir la estabilidad nominal y robusta. Dado la descripción de un modelo de incertidumbre Λ , suponga que $P_{nom} \in \Lambda$ es el modelo nominal y K es el controlador. Entonces el sistema retroalimentado a lazo cerrado se dice tener: (i) estabilidad nominal si K estabiliza internamente el modelo nominal P_{nom} ; (ii) estabilidad robusta si K estabiliza internamente cada planta de Λ .

La estabilidad nominal se puede interpretar como el objetivo de lograr que un sistema sea estable a lazo cerrado para unas condiciones de trabajo dadas o nominales. Para el caso de estabilidad robusta puede interpretarse como el requerimiento de la estabilidad a lazo cerrado para el conjunto de posibles plantas que se puedan dar como consecuencia de la incertidumbre en el modelo de la planta.

Se han abordado los conceptos de estabilidad nominal y robusta partiendo del hecho que

ya se cuenta con un controlador K . En las siguientes secciones se presenta el problema de control H_∞ que permite establecer el criterio de búsqueda de dicho controlador, así como en secciones subsecuentes el método de solución para dicha búsqueda.

A.5. Problema de control H_∞

Considere la configuración básica de un sistema presentado en la Figura (A.2). Dicha configuración es conocida como una transformación lineal fraccionada (LFT, de lineal fractional transformation), donde G es la planta generalizada con dos entradas: (i) una entrada exógena w (la cual incluye perturbaciones), (ii) entrada de control u ; y dos salidas: (i) la salida de medición (o sensor) y , (ii) salida regulada z . K es el controlador a ser diseñado.

De la Figura (A.2) sean K y G funciones de transferencia reales racionales y propias. Asuma que los modelos en espacio de estados de G y K están disponibles así como su realización estabilizable y detectable. La función de transferencia a lazo cerrado cuya entrada es w y salida z está definida mediante la estructura LFT como: $T_{zw} = F_l(G, K)$.

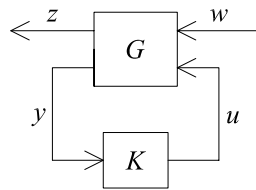


Figura A.2: Esquema representativo de un sistema interconectado LFT T_{zw} .

Se dice que un controlador K es admisible si éste estabiliza internamente el sistema. De esta forma se define el problema de control óptimo y subóptimo:

Control óptimo H_∞ : Encontrar todos los controladores admisibles $K(s)$ tal que $\|T_{zw}\|_\infty$ sea minimizada.

Control subóptimo H_∞ : Dado un $\gamma > 0$ encontrar un controlador $K(s)$ admisible, si existe uno, tal que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$.

Encontrar un controlador óptimo es numéricamente y teóricamente complicado [34]. La búsqueda del óptimo requiere la minimización de la norma $\|T_{zw}\|_\infty$, lo cual no es necesario e incluso indeseable en su aplicación. De hecho, replantear el problema como uno subóptimo

implica obtener un controlador cercano al óptimo en el sentido de norma mediante la propuesta de una γ cercana a la γ_{opt} tal que $\gamma > \gamma_{opt}$ (dado que γ_{opt} es la mínima posible). Para más información se le sugiere al lector consultar [35, 36, 34].

Para el trabajo de tesis se considera únicamente el problema de control suboptimo y para encontrar dicho controlador es necesario considerar antes la solución de la ecuación algebraica de Riccati (ARE, de algebraic Riccati equation).

A.6. Ecuaciones algebraicas de Riccati

Sean A , Q y L matrices definidas en $R^{n \times n}$, donde Q y L son simétricas. Entonces una ecuación algebraica de Riccati está definida por la siguiente ecuación matricial:

$$A^*X + XA + XRX + Q = 0 \quad (\text{A.6})$$

Se define ahora la siguiente matriz $2n \times 2n$ asociada a la ecuación de Riccati:

$$H = \begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^* \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

donde $H : R^{2n \times 2n} \rightarrow R^{2n \times 2n}$ es una *matriz hamiltoniana*. La matriz H en la ecuación (A.7) será usada para obtener las soluciones de la ecuación (A.6). Note que el espectro de H es simétrico con respecto al eje imaginario. Para clarificar lo anterior, considere la siguiente matriz:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & o \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

la cual tiene como propiedad $J^2 = -I$. entonces

$$J^{-1}HJ = -JHJ = -H^* \quad (\text{A.9})$$

de tal forma que H y H^* son similares. De hecho λ es un eigenvalor si $-\lambda$ lo es.

A fin de encontrar una *solución estabilizante* de la ecuación (A.6) se realizan las siguientes suposiciones: (i) H no tiene valores propios en el eje imaginario, (ii) H tiene n valores propios con $Re(s) < 0$ y n con $Re(s) > 0$. Ahora, considere un *subespacio espectral invariante* de dimensión n , χ_H , el cual corresponde a los eigenvalores de H en $Re < 0$. Encontrando una

base para χ_H , y ordenando los vectores de la base se obtiene una matriz particionada de la siguiente forma:

$$\chi_H = \text{Im} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

X_1 y X_2 son elementos de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Si X_1 es no singular, lo que equivale a que los dos siguientes subespacios:

$$\chi_H, \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

son complementarios. Entonces, se puede establecer la solución estabilizante de (A.6) como $X := X_2 X_1^{-1}$. Por lo tanto, X está determinada exclusivamente por H . Esto es, $H \rightarrow X$ es una función denotada como Ric cuyo dominio, denotado por $\text{dom}(Ric)$, contiene a todas las matrices hamiltonianas H con las siguientes dos propiedades: (i) estabilidad, H no tiene valores propios en el eje imaginario; (ii) complementariedad, los dos subespacios definidos en la ecuación (A.11) son complementarios.

A la solución X de la ecuación (A.6) se le llama *solución estabilizante* y por lo tanto $X = Ric(H)$ y

$$Ric : \text{dom}(Ric) \subset \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mapsto \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{A.12})$$

Con los conceptos y definiciones antes mencionados es posible abordar la existencia de un controlador H_∞ admisible. Para consultar la prueba formal de los conceptos presentados en esta sección se le sugiere al lector consultar [35, 36, 43].

A.7. Solución simplificada al problema de control H_∞

Considere la realización de la matriz de transferencia G mostrada en la Figura (A.2):

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (\text{A.13})$$

Note que dos suposiciones son implícitas en la realización de $G(s)$: (i) $D_{11} = 0$ y (ii) $D_{22} = 0$. Ahora, considere las siguientes suposiciones en (A.13):

- (i) (A, B_1) es controlable y (C_1, A) es observable

(ii) (A, B_2) es estabilizable y (C_2, A) es detectable

$$(iii) D_{12}^*[C_1 \ D_{12}] = [0 \ I]$$

$$(iv) [B_1 \ D_{21}]^T D_{21}^* = [0 \ I]^T$$

La solución del problema de control H_∞ requiere las siguientes matrices hamiltonianas:

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_1B_1^* - B_2B_2^* \\ -C_1^*C_1 & -A^* \end{bmatrix}, \quad J_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}C_1^*C_1 - C_2^*C_2 \\ -B_1^*B_1 & -A^* \end{bmatrix} \quad (A.14)$$

Con las suposiciones hechas sobre $G(s)$, la estructura de mas matrices (A.14) es posible enunciar:

Teorema[36] Existe un controlador admisible tal que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ si las siguientes condiciones se cumplen:

$$(i) H_\infty \in \text{dom}(\text{Ric}) \text{ y } X_\infty := \text{Ric}(H_\infty) > 0$$

$$(ii) J_\infty \in \text{dom}(\text{Ric}) \text{ y } Y_\infty := \text{Ric}(J_\infty) > 0$$

$$(iii) \rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$$

cuando estas condiciones se mantienen, dicho controlador es representado por:

$$K_{sub}(s) := \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array} \right] \quad (A.15)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{A}_\infty &:= A + \gamma^{-2}B_1B_1^*X_\infty + B_2F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 \\ Z_\infty &:= (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1} \\ F_\infty &:= -B_2^*X_\infty \\ L_\infty &:= -Y_\infty C_2^* \end{aligned} \quad (A.16)$$

Por lo que, el conjunto de todos los controladores admisibles tal que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ es igual al conjunto de todas las funciones de transferencia de y a u representada en la Figura A.3:

$$M_\infty(s) := \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ \hline F_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{array} \right] \quad (A.17)$$

donde $Q \in RH_\infty$, $\|Q\|_\infty < \gamma$.

Para consultar la prueba formal de los conceptos presentados en esta sección se le sugiere al lector consultar [35, 36].

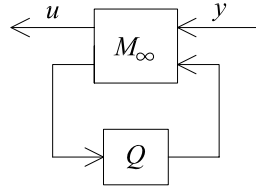


Figura A.3: Esquema representativo de un sistema interconectado LFT T_{uy} .

A.8. Reducción de modelo por truncación balanceada

En la Sección (A.7) se abordó la obtención de un controlador admisible. En algunos casos se obtienen, según sea el caso, controladores de orden elevado. Por lo que, es deseable llevar a cabo la reducción del controlador. Es decir, la reducción del orden de la función de transferencia K sin perder información en el sentido de magnitud y frecuencia. Para esto se lleva a cabo una truncación balanceada.

Considere una función de transferencia estable $G \in RH_\infty$ y suponga que G es una realización balanceada (es decir los gramianos de controlabilidad y observabilidad son iguales) como:

$$G = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right] \quad (\text{A.18})$$

Sea Σ el gramiano balanceado, entonces se cumple: (i) $A\Sigma + \Sigma A^* + BB^*$, y (ii) $A^*\Sigma + \Sigma A^* + C^*C$. Considere la partición del gramiano como:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

donde: (i) $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1 I_{s_1}, \sigma_2 I_{s_2}, \dots, \sigma_r I_{s_r})$, (ii) $\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1} I_{s_{r+1}}, \sigma_{r+2} I_{s_{r+2}}, \dots, \sigma_N I_{s_N})$, y (iii) $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r > \sigma_{r+1} > \sigma_{r+2} > \dots > \sigma_N$ donde σ_i tiene multiplicidad s_i , $i = 1, 2, \dots, N$ y $s_1 + s_2 + \dots + s_N = n$. Entonces el sistema truncado

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right] \quad (\text{A.20})$$

es balanceado y asintóticamente estable. Adicionalmente se cumple que

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \sigma_{r+2} + \dots + \sigma_N) \quad (\text{A.21})$$

Apéndice B

Modelo dinámico 6° Bernard y col. para tratamiento de vinazas

El modelo de 6° orden fue propuesto y validado experimentalmente por Bernard y col. [30] para un digestor anaerobio de cama fija para el tratamiento de vinazas. El modelo dinámico está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= (\mu_1(z_4) - \alpha D) z_1 \\ \dot{z}_2 &= (\mu_2(z_5) - \alpha D) z_2 \\ \dot{z}_3 &= (z_{3,in} - z_3) D \\ \dot{z}_4 &= (z_{4,in} - z_4) D - k_1 \mu_1(z_4) z_1 \\ \dot{z}_5 &= (z_{5,in} - z_5) D + k_2 \mu_1(z_4) z_1 - k_3 \mu_2(z_5) z_2 \\ \dot{z}_6 &= (z_{6,in} - z_6) D - q_{CO_2} + k_4 \mu_1(z_4) z_1 + k_5 \mu_2(z_5) z_2\end{aligned}\tag{B.1}$$

donde los estados son: z_1 , concentración de las bacterias acidogénicas [g/l]; z_2 , concentración de las bacterias metanogénicas [g/l]; z_3 , alcalinidad total [$mmol/l$]; z_4 , demanda química de oxígeno (DQO, [g/l]); z_5 , ácidos grasos volátiles (AGV, [$mmol/l$]); z_6 , carbono inorgánico total (TIC, [$mmol/l$]). Los términos z_{in} para z_{3-6} representa la composición en la corriente de alimentación. El factor de dilución (D , [h^{-1}]), está definido como cociente del flujo de alimentación (Q_{in} , [lh^{-1}]) y el volumen del digestor (V , [l]). La fracción de la biomasa en la fase líquida está determinada por la constante α , la cual toma valores de $0 \leq \alpha \leq 1$ (donde $\alpha = 0$ corresponde a un reactor ideal de cama fija y $\alpha = 1$ corresponde a un reactor ideal agitado continuo). El término q_c es el flujo molar de dióxido de carbono.

El modelo (B.1) incluye el crecimiento de las bacterias acidogénicas $\mu_1(z_4)$, metanogénicas $\mu_2(z_5)$ [32], las cuales están representadas por las cinéticas de Monod y Haldane respectivamente.

$$\begin{aligned}\mu_1(z_4) &= \mu_{1\text{m}\acute{a}\text{x}} \frac{z_4}{z_4 + K_{S1}} \\ \mu_2(z_5) &= \mu_{2\text{m}\acute{a}\text{x}} \frac{z_5}{z_5 + K_{S2} + (z_5/K_{I2})^2}\end{aligned}\tag{B.2}$$

donde $\mu_{1\text{m}\acute{a}\text{x}}$ [h^{-1}], K_{S1} [g/l], $\mu_{2\text{m}\acute{a}\text{x}}$ [h^{-1}], K_{S2} [g/l], K_{I2} [g/l] son reales positivos e inciertos.

El modelo (B.1) fue analizado por Acosta y col. encontrando las coordenadas del equilibrio (B.3). Los resultados más importantes se pueden resumir en dos proposiciones [7].

$$\begin{aligned}z_1^* &= \frac{(z_{4,in} - z_4^*)D}{k_1\mu_1(z_4^*)} \\ z_2^* &= \frac{(z_{5,in} - z_{5-}^*)D + k_2\mu_1(z_4^*)z_1^*}{k_3\mu_2(z_{5-}^*)} \\ z_3^* &= z_{3,in} \\ z_4^* &= \frac{\alpha DK_{S1}}{(\mu_{1\text{m}\acute{a}\text{x}} - \alpha D)} \\ \alpha D z_5^{*2} + z_5^* (\alpha DK_{I2}^2 - \mu_{2\text{m}\acute{a}\text{x}} K_{I2}^2) + \alpha DK_{S2} K_{I2}^2 &= 0 \\ z_6^* &= \frac{z_{6,in}D - q_{CO2} + k_4\mu_1(z_4^*)z_1^* + k_5\mu_2(z_{5-}^*)z_2^*}{D}\end{aligned}\tag{B.3}$$

donde z_{5+}^* y z_{5-}^* son las soluciones de la ecuación de segundo orden.

Proposición 1 [7]. Considere el modelo de digestión anaerobia propuesto por Bernard y col. [30]. Entonces, asumiendo que la composición de alimentación $z_{j,in}$ es constante por pedazos, existe un único punto de equilibrio $z^* \in R_+^6$ para cualquier par constante (α, D^*) bajo condiciones normales de operación. Adicionalmente, tal punto de equilibrio está contenido en un conjunto cerrado $\Omega \in R_+^6 = \{z \in R_+^6 | z_{min} \leq z \leq z_{max}; z_{min} > 0 \text{ y } z_{max} < \infty\} \subset R_+^6$ el cual contiene todas las condiciones normales de operación; donde z_{max} es el vector de concentraciones obtenido cuando es utilizado \bar{D} mientras que z_{min} es obtenido para \underline{D} .

Proposición 2 [7]. Sea $z^* \in \Omega$ el punto de equilibrio del modelo de digester anaerobio propuesto por Bernard y col. para cualquier dupla (α, D^*) tal que $D^* \in [\underline{D}, \bar{D}]$. Entonces, bajo CNO tal punto de equilibrio es localmente estable.

Como puede observarse las coordenadas del equilibrio z_1, z_2, z_4, z_5 del modelo (B.1) coinciden con las coordenadas del equilibrio x_1, x_2, x_3, x_4 del modelo (2.1) respectivamente. Para más información sobre la prueba de las proposiciones y el modelo se le sugiere al lector consultar [7, 30].

Referencias

- [1] Lim C.L.; Leslie C.P., and Daigger G.T., Biological wastewater treatment, Marcel Dekker Inc.: USA, 1999.
- [2] Benthack, C.; Srinivasan, B.; Bonvin, D. An optimal operating strategy for fixed-bed bioreactors Used in wastewater treatment. *Biotechnol. Bioeng.* **2000**, 72, 34-40.
- [3] Méndez Acosta, H. O.; Femat, R.; González-Álvarez, V. *Selected Topics in Dynamics and Control of Chemical and Biological Processes. Lecture Notes in Control and Information Sciences*; Springer: Germany, 2007.
- [4] Chen Y., Cheng J., Holder J., Creamer K.S. Inhibition of anaerobic digestion process: A review. *Bioresour. Technol.* **2008**, 99, 4044-4064.
- [5] Méndez Acosta, H. O.; Palacios-Ruiz, B.; Alcaraz-González, V.; González-álvarez, V.; Garcia-Sandoval, Steyer, J. P. A robust control scheme to improve the stability of anaerobic digestion processes. *Comput. Chem. Eng.* **2010**, 20, 375-383.
- [6] Steyer, J. P.; Bernard, O.; Batstone, D. J.; Angelidaki, I. Lessons learnt from 15 years of ICA in anaerobic digesters. *Water Sci. Technol.* **2006**, 53, 25-33.
- [7] Méndez-Acosta, H. O.; Campos-Delgado, D. U.; Femat, R.; González-álvarez, V. A robust feedforward/feedback control for an anaerobic digester. *Comput. Chem. Eng.* **2005**, 29, 1613-1623.
- [8] Alcaraz-González, V.; Harmand, J.; Rapaport, A.; Steyer, J. P.; González-álvarez, V.; Pelayo-Ortiz, Q. Robust interval-based regulation for anaerobic digestion processes. *Water Sci. Technol.* **2005**, 51, 449-456.
- [9] Monroy, O.; Alvarez-Ramírez, J.; Cuervo, F.; Femat, R. An adaptive strategy to control anaerobic digesters for wastewater treatment. *Ind. Eng. Chem. Res.* **1996**, 35, 3442-3446.
- [10] Jadot, F.; Bastin, G.; Van Impe, J. F. Optimal adaptive control of a bioprocess with yield-productivity conflict. *J. Biotechnol.* **1998**, 65, 61-68.

- [11] Guwy, A. J.; Hawkes, F. R.; Wilcox, S. J; and Hawkes, D. L. Neural network and on-off control of bicarbonate alkalinity in a fluidised-bed anaerobic digester. *Water Res.* **1997**, 31, 2019-2025.
- [12] SEMARNAT. *Informe de la Situación del Medio Ambiente en México Edición 2008*, SNIARN, 2008.
- [13] Mata-Álvarez J., Macé S., Llabrés P. Anaerobic digestion of organic solid wastes. An overview of research achievements and perspectives. *Bioresour. Technol.* **2000**, 74, 3-16.
- [14] Appels L.; Baeyens J.; Degreve J.; Dewil R. Principles and potential of the anaerobic digestion of waste-activated sludge. *Prog. Energ. Combust. Sci.* **2008**, 34, 755-781.
- [15] Salminen E.; Rintala J. Anaerobic digestion of organic solid poultry slaughterhouse waste: a review. *Bioresour. Technol.* **2002**, 83, 13-26.
- [16] Mata-Alvarez J.; Macé S.; Llabrés P. Anaerobic digestion of organic solid wastes. An overview of research achievements and perspectives. *Bioresour. Technol.* **2000**, 74, 3-16.
- [17] Khalid A.; Arshad M.; Anjum M.; Mahmood T.; Dawson L. The anaerobic digestion of solid organic waste. *Waste Manage.* **2011**, 31, 1737-1744.
- [18] Karagiannidis A.; Perkoulidis G. A multi-criteria ranking of different technologies for the anaerobic digestion for energy recovery of the organic fraction of municipal solid wastes. *Bioresour. Technol.* **2009**, 100, 2355-2360.
- [19] Stabnikova O.; Liu X.Y.; Wang J.Y. Anaerobic digestion of food waste in a hybrid anaerobic solid-liquid system with leachate recirculation in an acidogenic reactor. *Biochem. Eng. J.* **2008**, 41, 198-201.
- [20] Fdez-Guelfo L.A.; Alvarez-Gallego C.; Marquez D.S.; Garcia L.I. Biological pretreatment applied to industrial organic fraction of municipal solid wastes (OFMSW): Effect on anaerobic digestion. *Chem. Eng. J.* **2011**, 172, 321-325.
- [21] Agdag O.N.; Sponza D.T. Co-digestion of mixed industrial sludge with municipal solid wastes in anaerobic simulated landfilling bioreactors. *J. Hazard. Mater.* **2007**, 140, 75-85.
- [22] Fernández J.; Pérez M.; Romero L.I. Kinetics of mesophilic anaerobic digestion of the organic fraction of municipal solid waste: Influence of initial total solid concentration. *Bioresour. Technol.* **2010**, 101, 6322-6328.

- [23] Kiely, G.; Tayfur, G.; Dolan, C.; Tanji, K. Physical and mathematical modelling of anaerobic digestion of organic wastes. *Water Res.* **1997** 31, 534-540.
- [24] Daels T.; Willems B.; Vervaeren H.; Dejjans P.; Maes G.; Dumoulin A.; Hulle W.H. Calibration and statistical analysis of a simplified model for the anaerobic digestion of solid waste. *Environ. Technol.* **2009** 30, 14, 1575-1584.
- [25] López I.; Borzacconi L. Modelling of slaughterhouse solid waste anaerobic digestion: Determination of parameters and continuous reactor simulation. *Waste Manage.* **2010** 30, 1813-1821.
- [26] Myint M.; Nirmalakhandan N.; Speecec R. E. Anaerobic fermentation of cattle manure: Modeling of hydrolysis and acidogenesis. *Water Res.* **2007** 41, 323-332.
- [27] Zaher U.; Pandey P.; Chen S. A simple elemental continuity based model application to study anaerobic microbial activity for the treatment of dairy manure. *Applied Math. Modell.* **2009** 33, 3553-3564.
- [28] Nopharatana A.; Pullammanappallil P.C.; Clarke W.P. A dynamic mathematical model for sequential leach bed anaerobic digestion of organic fraction of municipal solid waste. *Biochem. Eng. J.* **2003** 13, 21-33.
- [29] Kalchev, B.; Christov, N.; Simeonov, I. Output-Feedback H-infinity control for a second-order nonlinear model of a biotechnological process. *C. R. Acad. Bulg. Sci.* **2011**, 64, 125-132.
- [30] Bernard, O.; Hadj-Sadok, Z.; Dochain, D.; Genovesi, A.; Steyer, J. P. Dynamical model development and parameter identification for an anaerobic wastewater treatment process. *Biotechnol. Bioeng.* **2001**, 75, 424-438.
- [31] Méndez-Acosta, H. O.; Palacios-Ruiz, B.; Alcaraz-González, V.; Steyer, J. P.; González-álvarez, V.; Latrille, E. Robust Control of Volatile Fatty Acids in Anaerobic Digestion Processes. *Ind. Eng. Chem. Res.* **2008**, 47, 7715-7720.
- [32] Rodriguez, J.; Roca, E.; Lema, J. M.; Bernard, O. Determination of the adequate minimum model complexity required in anaerobic bioprocesses using experimental data. *J. Chem. Technol. Biotechnol.* **2008**, 83, 1694-1702.
- [33] Khalil, H. K. *Nonlinear Systems*; Prentice Hall: New Jersey, 2002.
- [34] Glover, K.; Doyle, J.C.; Khargonekar, P.; Francis, B. A. State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems. *IEEE Trans. Autom. Control* **1989**, 34, 831-847.

- [35] Zhou, K.; Doyle, J. C.; Glover, K. *Robust and optimal control*; Prentice Hall: New Jersey, 1995.
- [36] Zhou, K.; Doyle, J. C. *Essentials of robust control*; Prentice Hall: New Jersey, 1997.
- [37] Soto, M. E.; Solís, C. M.; Hernández, T. J. Anaerobic treatment of a medium strength industrial wastewater at low-temperature and short hydraulic retention time a pilot-scale experience. *Water Sci. Technol.* **2011**, 64, 1629-1635.
- [38] Carrasco, E. F.; Rodríguez, J.; Puñal, A.; Roca, E.; Lema, J. M. Rule-based diagnosis and supervision of a pilot-scale wastewater treatment plant using fuzzy logic techniques. *Expert Syst. Appl.* **2002**, 22, 11-20.
- [39] Alcaraz-Gonzalez, V.; Lopez-Bañuelos; Steyer, J. P.; Mendez-Acosta, H. O.; Gonzalez-Alvarez, V.; Pelayo-Ortiz, C. Interval-Based Diagnosis of Biological Systems: a Powerful Tool for Highly Uncertain Anaerobic Digestion Processes *Clean Soil, Air, Water* **2012**, 40, 941-949.
- [40] Walker, M.; Zhang, Y.; Heaven, S.; Banks, C. Potential errors in the quantitative evaluation of biogas production in anaerobic digestion processes. *Bioresour. Technol* **2009**, 100, 6339-6346.
- [41] Zárate-Navarro, M. A. *Estimación de parámetros y validación del modelo AM₂ para un proceso de digestión anaerobia a escala piloto*, Maestría en Ciencias en Ingeniería Química, CUCEI-UdG, Guadalajara Jalisco México; Concluida: 16-04-2013.
- [42] Hill, D. T.; Barth, C. L. A Dynamic Model for Simulation of Animal Waste Digestion. *Water Pollut. Control Federation* **1977** 49, 2129-2143.
- [43] Doyle, J. C.; Francis, B. A.; Tannenbaum, A. R. *Feedback Control Theory*; Prentice Hall: New Jersey, 1997.

Anexo

Artículos de investigación

Flores-Estrella, R. A.; Quiroz, G.; Méndez Acosta, H. O.; Femat, R. H_{∞} Control of Anaerobic Digester for Winery Industry Wastewater Treatment. *Ind. Eng. Chem. Res.* **2013**, *52*, 2625-2632.

H_∞ Control of Anaerobic Digester for Winery Industry Wastewater Treatment

R. Flores-Estrella,[†] G. Quiroz,[‡] H. O. Mendez-Acosta,[§] and R. Femat^{*,†}

[†]División de Matemáticas Aplicadas, IPICYT, Camino a la Presa de San José Apartado Postal 2055, Colonia Lomas 4a Sección, San Luis Potosí, S.L.P., México

[‡]Facultad de Ingeniería Mecánica (FIME), Universidad Autónoma de Nuevo León, UANL, FIME. Av. Universidad S/N Ciudad Universitaria, C.P. 66451, San Nicolás de los Garza Nuevo León, México

[§]Departamento de Ingeniería Química, Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI), U.D.G., Boulevard Marcelino García Barragán s/n, Guadalupe, Jalisco, México

ABSTRACT: A robust H_∞ controller has been developed to regulate the chemical oxygen demand in an anaerobic digester from the winery industry. A sensitivity analysis was performed, and the parameter set having the most significant effect on the process behavior was identified. The parameters inducing the most sensitivity in the solutions were selected as uncertain; in addition, they were related to kinetic terms and the hydrodynamic regime. Then, a control problem was formulated as robust regulation, and a controller was designed using H_∞ theory to ensure robust stability. The actions of the H_∞ controller are illustrated through numerical simulations. The controller was found to execute robust regulation facing parametric uncertainties and load disturbances.

■ INTRODUCTION

Anaerobic digestion (AD) is a process that converts organic matter into a gaseous mixture, composed of methane and carbon dioxide, through the action of a series of complex biological and enzymatic reactions. Although AD has distinct applications, it has mainly been used for wastewater treatment. Operating and controlling an AD process is not a simple task for the following reasons:^{1,2} (i) wastewater varies continuously in quantity and composition, (ii) biomass activity changes under the influence of internal and external factors, (iii) adequate sensors for online measurements are often lacking, and (iv) there is uncertainty in kinetic parameters.

Several control methods have been proposed in recent years for AD processes. Steyer et al.³ and Méndez-Acosta et al.⁴ pointed out that classical control methods have not been able to face the inherent difficulties presented in AD. Moreover, classical control methods have been shown to yield unsatisfactory performance when AD is subjected to disturbances or significant set-point changes. Mendez-Acosta et al.⁵ proposed a linear reference-feedforward/output-feedback control that is robust in the face of parameter uncertainties and piecewise time disturbances. Another feature is that, to diminish the peaking phenomenon induced by a high-gain observer, an antireset windup scheme can be taken into account to handle saturation constraints by actuator restrictions. However, such a controller was not designed to handle disturbances with frequency components in the same interval as the AD responses, which can occur under specific operating conditions. Alcaraz et al.⁶ proposed an interval-based scheme to lead the AD trajectories into a desired operating interval. However, the performance of the control scheme depends on the definition of the uncertainty interval, which is heuristically defined. Adaptive schemes have also been proposed.^{7,8} For example, Monroy et al.⁷ showed robustness against load changes using an

adaptive control scheme by taking into account the nonlinearities and nonstationary features of AD. However, complete knowledge of the system parameter structure is required. Moreno et al.⁹ developed optimal control strategies for a biological sequencing batch reactor. The objective was the maximization of the product output against varying inlet substrate concentrations. Nevertheless, the efficiency per cycle was found to depend strongly on the initial conditions, which are often uncertain under continuous operating conditions. Guwy et al.¹⁰ showed that a neural-network-based controller was capable of maintaining stable bicarbonate alkalinity levels without overshoot during process overload. However, to apply fuzzy-based and neural network strategies, either a great deal of information or expertise in the process is required.

To date, few results can be found in the open literature regarding the proposal of robust H_∞ control schemes for biological processes. In fact, to the best of our knowledge, H_∞ robust control has been explored only for a second-order anaerobic digestion process.¹¹ It should be noted that, although AD processes are not effective enough for organic treatment for specific operating conditions (for instance, in the presence of suspended particles or phosphorus compounds), the AD process is essential for treatment of modern wastewater. Actually, in an overall perspective, a wastewater treatment plant consists of primary treatment, in which suspended particles are removed from the wastewater by mechanical operations such as screening and sedimentation, and secondary treatment, in which, in general, dissolved carbon- and nitrogen-containing wastewater components are removed by microbial activity. In

Received: August 20, 2012

Revised: December 17, 2012

Accepted: January 26, 2013

Published: January 27, 2013