

RESEARCH OUTPUTS / RÉSULTATS DE RECHERCHE

Observables in a lattice Universe

Bruneton, Jean-Philippe; Larena, Julien

Published in:
Class. Quantum Grav.

DOI:
[10.1088/0264-9381/30/2/025002](https://doi.org/10.1088/0264-9381/30/2/025002)

Publication date:
2013

Document Version
Peer reviewed version

[Link to publication](#)

Citation for published version (HARVARD):

Bruneton, J-P & Larena, J 2013, 'Observables in a lattice Universe: The cosmological fitting problem' Class. Quantum Grav., vol. 30, no. 2, 025002. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/30/2/025002>

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

FUNDP – NAMUR

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

**Gravitation relativiste
et cosmologie**

Notes de cours

Jean-Philippe Bruneton

2011–2012

Table des matières

I	Préambule	9
1	La relativité générale dans son contexte	10
1.1	La physique moderne et ses théories	11
1.1.1	De l'infiniment petit à l'infiniment grand	11
1.1.2	Les trois constantes fondamentales	11
1.1.3	Le cube des théories	12
1.1.4	Les unités de Planck	13
1.2	L'Univers aujourd'hui	14
1.2.1	Unités de distance	14
1.2.2	Les galaxies	14
1.2.3	Les grandes structures de l'Univers	16
1.2.4	Bilan : Univers homogène et structuration de la matière	19
1.3	L'histoire de l'Univers homogène	21
1.3.1	L'ère de Planck	21
1.3.2	Entre 10^{-44} s et $\approx 10^{-10}$ s	22
1.3.3	L'ère du plasma quark-gluon	24
1.3.4	Plasma de matière ordinaire et nucléosynthèse primordiale	25
1.3.5	La formation des atomes et le fonds diffus cosmologique	26
1.3.6	Ère de la matière et formation des structures	27
1.3.7	Éléments chimiques lourds et supernovaes	28

1.4	Grandes questions de l'astrophysique et cosmologie contemporaine	29
II	Une brève histoire de la mécanique	31
2	Mécanique de Newton et principe de relativité	32
2.1	Mathématiques de l'espace-temps de Newton	32
2.2	Les lois de Newton	34
2.3	Les lois de Newton et le principe d'inertie	35
2.4	Le principe de relativité Galiléenne	37
2.4.1	Covariance galiléenne	37
2.4.2	Interprétation physique : le principe de relativité	37
2.5	La relativité : principe ou théorème?	38
2.6	Un texte original de Galilée	40
3	Rappels de gravitation Newtonienne	41
3.1	Théorie de la gravitation de Newton	41
3.2	Équation de Poisson et champ gravitationnel	41
3.3	Champ gravitationnel d'un corps sphérique	42
3.4	Le mouvement autour d'une masse centrale	43
3.5	La rotation des galaxies spirales	45
3.6	La cosmologie Newtonienne	46
3.6.1	Cinématique et loi de Hubble	46
3.6.2	Distance comobile et facteur d'échelle	47
3.6.3	Dynamique de l'expansion de l'Univers	48
3.6.4	Limitations de la cosmologie Newtonienne	51
4	Electromagnétisme et covariance galiléenne	52
4.1	Électromagnétisme et lumière	52
4.2	La covariance galiléenne en difficulté	54

5	La théorie de la relativité restreinte	56
5.1	Relativité de la simultanéité	57
5.2	Les transformations de Lorentz	59
5.3	Addition des vitesses en relativité restreinte	61
5.4	L'espace-temps devient relatif	62
5.4.1	Durées et distances	62
5.4.2	Dilatation du temps et rythme des horloges	63
5.4.3	Contraction des longueurs	64
5.5	Géométrie de la relativité restreinte : l'espace temps de Minkowski	65
5.5.1	Distance pseudo-euclidienne et métrique	65
5.5.2	Vecteurs et notations quadri dimensionnelles	67
5.5.3	Retour sur les transformations de Lorentz	68
5.5.4	Cône de lumière et diagrammes d'espace-temps	69
5.6	Cinématique	71
5.6.1	Trajectoires et temps propre	72
5.6.2	Quadri-vitesse, impulsion, accélération	73
5.7	Dynamique	75
5.8	L'électromagnétisme relativiste	76
III	La théorie de la relativité générale	77
6	Vers l'espace-temps courbe	78
6.1	Comment faire une gravitation relativiste?	78
6.2	L'universalité de la chute libre	80
6.3	Le principe d'équivalence d'Einstein	81
6.4	Premier argument en faveur d'un espace-temps courbe	83
6.5	Second argument en faveur d'un espace-temps courbe	86

7	Aspects mathématiques de l'espace-temps courbe	88
7.1	L'espace-temps comme variété différentiable	88
7.1.1	Notion intuitive de variété différentiable	88
7.1.2	Système de coordonnées et lois de transformations	89
7.2	Scalars et vecteurs sur la variété	90
7.2.1	Champs scalaires	90
7.2.2	Champs de vecteurs	91
7.2.3	Base locale formée des vecteurs tangents aux courbes coordonnées	91
7.2.4	Loi de transformation des 4-vecteurs	92
7.3	Variétés métriques et espaces pseudo Riemannien	93
7.3.1	Métrie sur l'espace-temps	93
7.3.2	Monter et abaisser les indices	94
7.4	Tenseurs et covariance générale	94
7.4.1	Définition	94
7.4.2	Loi de transformation des tenseurs	95
7.4.3	Exemples	95
7.4.4	Tenseurs et covariance générale	96
7.5	Dérivée covariante des vecteurs et des tenseurs	97
7.5.1	Connexion et dérivée covariante d'un vecteur	97
7.5.2	Dérivée covariante d'un tenseur	98
7.5.3	Calcul de la connexion métrique	99
7.5.4	Formulaire utile	100
7.6	Courbure de la variété métrique	100
7.6.1	Transport parallèle d'un vecteur et géodésiques	100
7.6.2	Une première manifestation de la courbure	102
7.6.3	Une deuxième manifestation de la courbure	102
7.6.4	Propriété du tenseur de Riemann et de ses contractions	103
7.6.5	Conclusion : gravitation et courbure	104

8	Théorie de la relativité générale	106
8.1	Résumé des idées principales	106
8.2	Les deux équations de la relativité générale	107
8.3	Le tenseur énergie impulsion du fluide parfait	108
8.4	Limite Newtonienne	108
8.4.1	Limite Newtonienne de l'équation géodésique	109
8.4.2	Limite Newtonienne de l'équation d'Einstein	110
9	Solution à symétrie sphérique dans le vide et trou noir de Schwarzschild	112
9.1	Métrie de Schwarzschild	113
9.2	Géométrie de Schwarzschild	115
9.3	Structure causale de la solution de Schwarzschild	117
9.4	Autres systèmes de coordonnées	122
10	Mouvements dans la géométrie de Schwarzschild; les tests classiques de la relativité générale	125
10.1	Géodésiques de la géométrie de Schwarzschild	126
10.2	Géodésiques de genre temps	129
10.2.1	Équations du mouvement et potentiel effectif	129
10.2.2	Cas particulier de la chute libre radiale	132
10.2.3	Orbites non-radiales	133
10.2.4	Précession du périhélie de Mercure	135
10.3	Géodésiques de genre lumière	137
10.3.1	Géodésiques radiales et circulaires	137
10.3.2	Déflexion de la lumière	138
IV	Cosmologie relativiste	140
11	Modèles d'Univers homogènes et isotropes	141

11.1	Principes de la cosmologie	141
11.2	Géométrie des modèles homogènes et isotropes	143
11.2.1	Système de coordonnées synchrones et comobiles	143
11.2.2	Métrique FLRW	145
11.3	Dynamique des modèles FLRW	146
11.3.1	Expressions des symboles de Christoffel	146
11.3.2	Expressions des tenseurs de courbure	147
11.3.3	Contenu en matière-énergie et équation d'état	148
11.3.4	Équations de Friedmann	151
11.3.5	Équation de conservation	152
11.4	Étude des équations de Friedmann	154
11.4.1	Retour sur les équations de Friedmann	155
11.4.2	Densité critique et paramètres de densité	156
11.4.3	Comportement des Univers Λ CDM	159
11.4.4	Complément : quelques solutions analytiques	161
12	Observables en cosmologie	163
12.1	Le redshift cosmologique	164
12.2	Distances en cosmologie	167
12.2.1	La distance luminosité	168
12.2.2	Distance angulaire	171
12.3	Détermination des paramètres cosmologiques	172
12.3.1	La constante de Hubble	172
12.3.2	Les paramètres Ω	174
12.4	L'âge de l'Univers	177
12.5	Univers observable et horizons	179
13	Aperçu des problèmes de la cosmologie moderne	181
13.1	Le problème de l'horizon	181
13.2	Le problème de la platitude	182

13.3 Le paradigme inflationnaire 183

Notice

Références

On trouvera une bibliographie à la fin du manuscrit. Une excellente référence de relativité restreinte est [1]. En ce qui concerne la relativité générale et la cosmologie, les ouvrages classiques mais quelque peu dépassés sont le Weinberg [2] (introduction complète, attention choix de signature pour la métrique : $+ - - -$), et le « MTW » [3], référence extrêmement complète, exceptée sur les problématiques modernes (entropie des trous noirs, thermodynamique des trous noirs, bornes entropiques, principe holographique, etc.). L'ouvrage de Wald [4] est nettement plus technique et peu pédagogique, et déconseillé en première lecture. Il complète cependant l'approche standard que nous suivons ici et qui suit pour beaucoup l'excellent ouvrage pour débutants, le Hobson [5] (attention, choix de signature pour la métrique : $+ - - -$). Dans le même état d'esprit que le Hobson, mais plus détaillé techniquement, signalons le cours de Sean Carroll [6] qui est très pédagogique. Une traduction en français est disponible, voir [6]. D'autres notes de cours en français sont disponibles, par exemple [7]. Pour la cosmologie, on pourra notamment consulter [8], qui est surtout phénoménologique, et [9], nettement plus formel. Dans ce cours nous suivons une approche intermédiaire, suivant là encore d'assez près le Hobson.

Notations, conventions, acronymes

Nous suivons ici les conventions de signe du MTW, en particulier une signature $(- + + +)$ pour la métrique, et pour la définition du tenseur de Riemann, Eq. (7.57). Les indices latins vont de 1 à 3, les indices grecs de 0 à 3. L'indice 0 dénote en général la coordonnée temporelle. Les vecteurs (tridimensionnels ou quadridimensionnels) sont en général notés en caractère gras.

Nous utiliserons parfois quelques acronymes ou abréviations : RR (relativité restreinte), RG (relativité générale), SC (système de coordonnées), CMB (Cosmic Microwave Background, ou fonds diffus cosmologique), CDM (Cold Dark Matter, ou matière noire froide), modèles Λ CDM (modèles d'Univers homogènes et isotropes avec constante cosmologique Λ non-nulle, et matière noire froide, dit aussi modèle concordant ou modèle standard de la cosmologie).

Première partie

Préambule

Chapitre 1

La relativité générale dans son contexte

La *théorie de la relativité générale*, dite aussi *gravitation relativiste d'Einstein* est une théorie généralisant la gravitation universelle de Newton. Elle est essentiellement née de considérations théoriques que nous détaillerons dans les chapitres ultérieurs.

Il ne semble pas inutile de commencer ce cours par une mise en perspective de cette théorie par rapport à l'ensemble des théories physiques modernes (Section 1.1). D'un point de vue plus phénoménologique, la gravitation joue par ailleurs un rôle majeur dans l'histoire de l'Univers et de sa structuration aux grandes échelles (Section 1.2). Nous commencerons donc ce cours par une vue d'ensemble des connaissances actuelles sur l'Univers et son histoire (Section 1.3).

Cela nous permettra d'enchaîner sur quelques rappels sur la gravitation Newtonienne qui peut de fait s'appliquer (dans des proportions limitées, cependant) afin d'étudier l'histoire de l'Univers.

Ce chapitre survole donc rapidement les théories physiques modernes ainsi que nos connaissances actuelles sur l'Univers, mais ne détaille pas leurs découvertes progressives dans l'histoire des sciences.

1.1 La physique moderne et ses théories

1.1.1 De l'infiniment petit à l'infiniment grand

Dessin de $10^{-18}m$ à 10^{26} m. *cf.* tableau.

1.1.2 Les trois constantes fondamentales

Si l'on exclut la constante de Boltzmann qui entre en jeu dans les phénomènes statistiques et la thermodynamique, la physique moderne compte trois et seulement trois constantes dimensionnées fondamentales (ou en tout cas considérées comme fondamentales à ce jour). Ce sont :

- $G \approx 6.67 \times 10^{-11} m^3.kg^{-2}.s^{-1}$, la constante de Newton ou constante de gravitation qui entre dans la loi de gravitation (*cf.* chapitre 3) et qui fixe l'intensité des forces gravitationnelles entre les corps massifs.
- $c \approx 3 \times 10^8 m.s^{-1}$ la vitesse de la lumière dans le vide, considérée à l'heure actuelle comme vitesse indépassable par aucune particule massive, et qui fait donc office de borne maximale à la vitesse de propagation de toute information entre deux points, d'où son rôle structurel.
- $\hbar \approx 1.05 \times 10^{-34} m^2.kg.s^{-1}$, la constante de Planck réduite qui entre dans la description de tous les phénomènes atomiques, et qui, plus généralement, est centrale à la *mécanique quantique*.

Toute théorie physique qui incorpore une, deux, ou bien ces trois constantes fondamentales, décrit par conséquent des phénomènes bien précis. La simple présence ou non de l'une de ces constantes fondamentales dans la théorie indique par la même occasion le domaine de validité de la théorie. Ainsi une théorie sans G ni c ni \hbar est une théorie qui peut décrire la dynamique des corps, mais dans cette théorie il n'y aura ni gravitation, ni effets quantiques, ni existence d'une borne supérieure à la vitesse de propagation des interactions. La toute première mécanique, celle de Newton, est de ce type là (*cf.* chapitre 2). De façon plus systématique, les théories modernes se classent donc ainsi :

- Aucune constante fondamentale. Théorie reconnue/admise : principe de relativité de Galilée et mécanique de Newton, 17^{ème} siècle.
- Présence de G : mécanique newtonienne et loi universelle de Newton de la gravitation, même époque (chapitre 3)

- Présence de c : électromagnétisme (19^{ème} siècle), et relativité restreinte (1905). Voir chapitres 4 et 5. La présence de c se signale toujours en disant que la théorie est « relativiste ».
- Présence de \hbar : mécanique quantique (1910-1930). Hors contexte de ce cours.
- Présence de \hbar et c : mécanique quantique relativiste, ou théorie quantique des champs (1930-1970). Hors contexte de ce cours.
- Présence de \hbar et G : gravitation quantique non relativiste, peu intéressante.
- Présence de G et c : gravitation relativiste non quantique. Modèle admis encore à ce jour, quoique de nombreux modèles alternatifs ont été et sont encore élaborés : la relativité générale d'Einstein (1905-1915 et développements ultérieurs). Voir à partir du chapitre 6 de ce cours.
- Présence de G , \hbar et c : théorie quantique de la gravitation relativiste, ou plus communément, gravitation quantique. Cette théorie n'est pas connue à ce jour malgré un demi-siècle d'efforts ; elle présente des difficultés conceptuelles et techniques considérables. Les modèles les plus avancés aujourd'hui sont la gravité quantique à boucle et la théorie des cordes.

1.1.3 Le cube des théories

On peut résumer tout cela dans un « cube des théories ».

- $G \rightarrow 0$: suppression des effets gravitationnels (dit aussi, parfois, *limite Minkowskienne* si par ailleurs c est maintenu constant). On peut aussi être amené à développer en puissance de G pour voir les premiers effets de la gravitation, on parle alors de *développement post-Minkowskien*.
- $c \rightarrow \infty$: propagation instantanée possible, on parle aussi, et cela sera important par la suite, de *limite non-relativiste*. Cette limite est pertinente si par exemple tous les objets d'un système donné se déplacent lentement par rapport à la vitesse de la lumière (un exemple étant les étoiles d'une galaxie, ou les planètes du système solaire, etc). Lorsque l'on développe une théorie en puissances de $1/c$, on parle de *développement post-Newtonien*.
- $\hbar \rightarrow 0$: suppression des effets quantiques. On parle de la *limite classique*.

Ce cours porte donc sur une théorie de type (G, c) , et en particulier celle d'Einstein publiée en 1915-1916. Nous verrons au chapitre 8 que la limite $c \rightarrow \infty$ se réduit effectivement à la théorie Newtonienne de la gravitation, tandis que la limite $G \rightarrow 0$ redonne la relativité restreinte (*special relativity* en anglais).

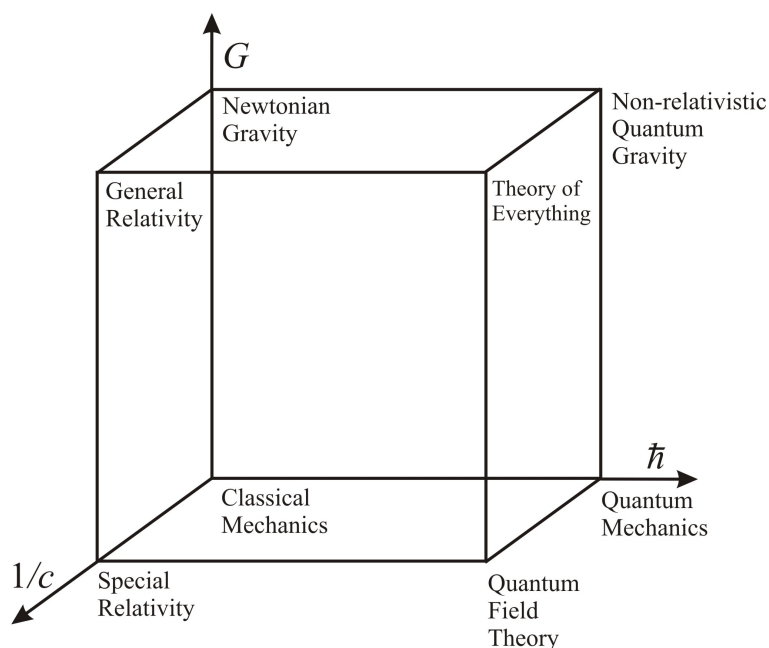


FIGURE 1.1 – Le cube des théories

1.1.4 Les unités de Planck

Les trois constantes fondamentales sont « fermées » pour le système d'unités qu'elles définissent (longueur, durée, masse), de sorte que l'on peut définir des unités fondamentales comme combinaison de ces trois constantes. Ainsi on a :

- Le temps (ou durée) de Planck : $t_p = \sqrt{\hbar G/c^5} \approx 10^{-44} \text{ s}$,
- La longueur de Planck $l_p = ct_p \approx 1.610^{-35} \text{ m}$,
- Et la masse de Planck $m_p = \sqrt{\hbar c/G} \approx 2.17 \times 10^{-8} \text{ kg}$.

C'est le système *d'unités de Planck*, également appelé système d'unité naturelles (*natural units*). Étant associées aux trois constantes fondamentales, il est naturel de s'attendre à ce que ces quantités décrivent l'échelle à laquelle les phénomènes de pure gravité quantique (G, \hbar, c) prennent place. Autrement dit, la relativité générale étudiée dans ce cours ne peut pas fournir *a priori* une description correcte ni des phénomènes plus brefs que le temps de Planck, ni des objets plus petits que la longueur de Planck, ni des densités d'énergie supérieures à celle de Planck $\rho_p = m_p c^2 / l_p^3 \approx 10^{113} \text{ J.m}^{-3}$, etc. C'est ce que l'on appelle le *mur de Planck*. Ainsi, en cosmologie, on s'abstiendra de parler des débuts de l'Univers ($t < t_p$) avant d'avoir en main une théorie

de gravité quantique. Ce cours ne répondra donc pas à la question « que se passe-t-il au moment du big bang ? ».

1.2 L'Univers aujourd'hui

1.2.1 Unités de distance

Introduisons d'abord quelques unités de distance couramment utilisées en mécanique céleste, en astrophysique et en cosmologie. Premièrement, l'unité astronomique (UA) est par définition la distance Terre-Soleil. La Terre suivant une ellipse autour du Soleil, cette distance varie au cours de l'année. Par conséquent, on définit plus précisément l'unité astronomique comme étant la valeur du demi grand-axe de l'orbite terrestre. Elle vaut à peu près 150 millions de kilomètres, *i. e.* $1UA = 1.5 \times 10^{11} m$. Cette unité est surtout utilisée en mécanique céleste. Le système solaire a une taille d'environ 80 UA de diamètre, dans le sens où Pluton (qui jusqu'à récemment encore était considérée comme la neuvième planète du système solaire), a un demi grand-axe d'environ 40 UA.

Une unité de distance bien connue est aussi l'année lumière (AL), c'est-à-dire la distance parcourue par la lumière dans le vide pendant un an. Cette distance vaut environ $9.4 \times 10^{15} m$, soit environ 62000 UA. La distance interstellaire typique dans notre galaxie est de l'ordre de l'année lumière (notre voisine Alpha du Centaure est à 4.2 AL)

En fait l'année-lumière est peu utilisée en astrophysique et cosmologie. Il est d'usage de lui préférer le *parsec*, noté *pc*. Un parsec vaut environ $1pc = 3.2AL$. Par définition, un parsec est la distance D telle que deux objets séparés par une unité astronomique ont une séparation angulaire d'une seconde d'arc (1/3600 degrés); autrement dit, un observateur situé à un parsec du système solaire voit un angle de 1/3600 degré entre le Soleil et la Terre.

1.2.2 Les galaxies

Comme on l'a dit, la distance interstellaire typique au sein d'une galaxie est de l'ordre du parsec. Le Soleil vit dans un des bras spiraux, et plutôt en périphérie, de notre galaxie. La Voie Lactée est une galaxie spirale relativement standard dans l'Univers, quoique faisant plutôt partie des « spirales géantes » que des « spirales naines ». Elle compte environ cent milliards

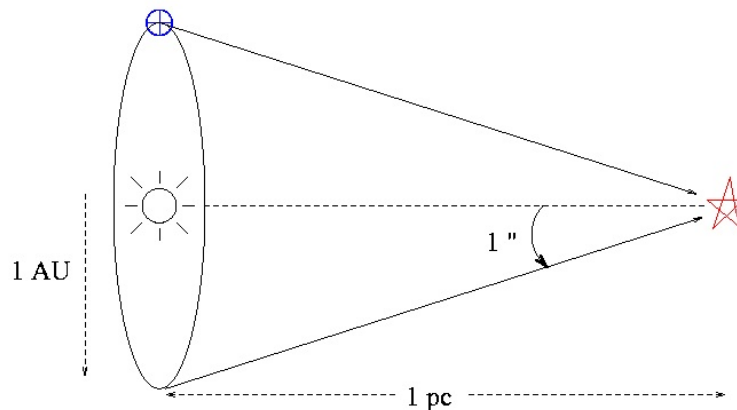


FIGURE 1.2 – Définition du parsec ; (AU : Astronomical Unit, en anglais)

étoiles. Elle a la forme d'un disque aplati, de rayon $\approx 20kpc$ (20000 parsecs, soit environ $10^{21}m$), et d'épaisseur $\approx 1kpc$. Voir Figs. 1.3 et 1.4.

Les galaxies spirales tournent sur elles-mêmes en une rotation différentielle : les étoiles plus proches du centre galactique tournent plus rapidement que les étoiles périphériques (de même que les planètes autour du Soleil). Lorsque l'on trace la vitesse de rotation en fonction du rayon, on parle de *courbe de rotation*. La rotation est « lente » : il faut environ 200 millions d'années au Soleil pour effectuer une révolution. La distance à parcourir étant cependant très grande, la vitesse de révolution est en fait assez grande : le Soleil tourne à environ $220km.s^{-1}$ autour du centre galactique. Cela reste malgré tout une vitesse faible devant celle de la lumière ($3 \times 10^5 km.s^{-1}$), et justifie que l'on peut se contenter d'une théorie non relativiste de la gravitation (*i. e.* la théorie de Newton) pour décrire la dynamique galactique¹.

Il y a aujourd'hui de très fortes indications que le centre galactique abrite un trou noir supermassif de plusieurs millions de masses solaires. On pense qu'il en est de même dans la plupart des galaxies. Les trous noirs sont des objets qui ne peuvent être correctement décrits que dans une théorie relativiste de la gravitation. Nous y reviendrons dans les prochains cours (chapitre 9).

Sans entrer dans trop de détails astrophysiques, notons pour information qu'il existe deux grands types de galaxies : les spirales dont nous venons de parler, et les elliptiques, qui sont ellipsoïdes.

1. La simple rotation lente n'est pas suffisante. Il faut aussi – et c'est le cas – que le champ gravitationnel galactique soit faible, *cf.* chapitre 3.

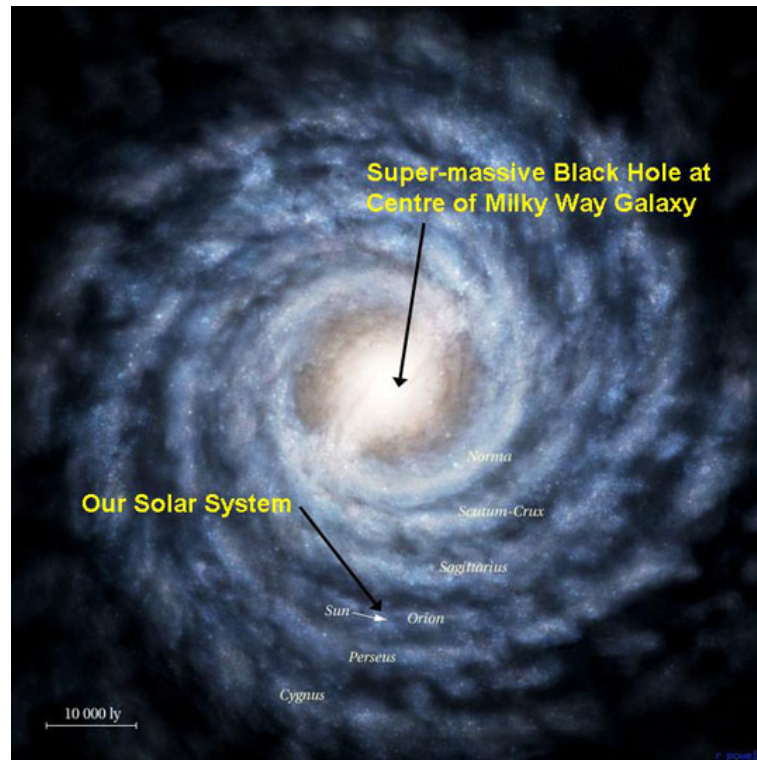


FIGURE 1.3 – La Voie Lactée, vue d’artiste (nous ne pouvons la voir que par la tranche!)

1.2.3 Les grandes structures de l’Univers

Les galaxies sont en quelque sorte les « particules élémentaires » de l’Univers vu à grande échelle. Les observations ont montré que notre Univers est essentiellement composé d’un très grand nombre de galaxies (de l’ordre de 10^{11} galaxies dans l’Univers observable²). Les deux images suivantes (du télescope Hubble) montrent ce foisonnement de galaxies (elles ne sont pas toutes dans le même plan), *cf.* Fig. 1.5 et Fig. 1.6.

La répartition des galaxies est intéressante. La distance typique séparant deux galaxies est de l’ordre du million parsecs ($1Mpc \approx 3 \times 10^{22} m$). Ainsi notre voisine, la galaxie spirale Andromède, visible à l’œil nu, *cf.* Fig. 1.7) est située à environ 800-900 kpc de nous. Il faut donc noter que la distance intergalactique n’est pas beaucoup plus grande que la taille des galaxies elles-mêmes : entre le diamètre d’une spirale et l’espace typique de deux

2. Nous précisons plus tard ce que l’on entend par univers observable.

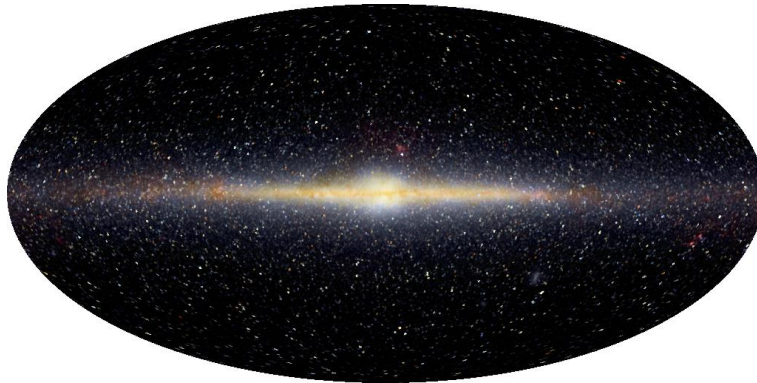


FIGURE 1.4 – La Voie Lactée, image réelle ; NASA

galaxies, il n'y a guère plus qu'un facteur 50 ou 100. Les galaxies sont donc relativement voisines, et forment un maillage assez serré.

La situation n'est cependant pas si simple : les galaxies ne sont pas régulièrement espacées sur un réseau cubique, comme pourrait le laisser entendre le paragraphe précédent. En fait, on observe une structuration de la matière encore à ces (déjà très grandes) échelles. Les galaxies sont en effet regroupées en *groupe de galaxies* (si le nombre est inférieur à 100 ; cette limite est conventionnelle). Au-delà, on parle d'*amas de galaxies* (quelques milliers de galaxies, typiquement), voir par exemple la figure Fig. 1.8. Les galaxies appartenant à un même amas sont liées par la gravitation et tournent les unes autour des autres, de même que les étoiles d'une galaxie elliptique tournent les unes autour des autres. On dit aussi qu'elles sont *virialisées*, du nom du théorème du viriel en gravitation newtonnienne.

La taille des amas est donc naturellement de l'ordre de la distance intergalactique typique, c'est-à-dire de quelques Mpc au cube. Notre Voie lactée constitue avec Andromède les deux galaxies les plus massives de notre *groupe local* (de galaxies), qui en contient une quinzaine³, cf. Fig. 1.9.

Cela n'est pas tout. Les groupes ou amas de galaxies sont en général eux-mêmes virialisés entre eux : des amas entiers de galaxies tournent les uns autour des autres, du fait de la gravitation, dans des super-structures nommées *superamas* de galaxies. Notre groupe local est en chute libre vers le superamas local (superamas de Virgo, dans la direction de la constellation de la Vierge), qui contient une dizaine d'amas, et est de forme aplati comme,

3. Noter aussi que les galaxie géantes sont systématiquement accompagnées de galaxies naines satellites.

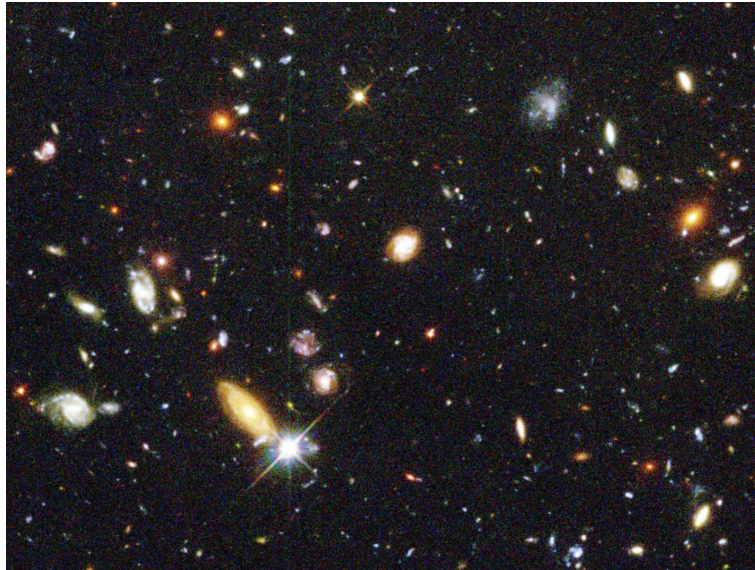


FIGURE 1.5 – Les galaxies dans l'Univers ; image réelle

semblerait-il, la plupart des superamas. La taille typique d'un superamas est de l'ordre de la dizaine de Mpc au carré pour une épaisseur de l'ordre du Mpc ($10\text{Mpc} \approx 3 \times 10^{23} m$). Voir Fig. 1.10.

C'est la dernière *structuration* de la matière proprement dite, avant d'atteindre les distances cosmologiques : les superamas ne sont pas liés gravitationnellement entre eux, et leurs distances augmentent avec le temps en fonction de l'expansion de l'Univers (loi de Hubble). Cependant leur distribution est non triviale et forme un réseau de matière « filamentaire » ou en toile d'araignée, ou *cosmic web* en anglais (voir Fig. 1.11). Cette figure n'est pas une observation directe, mais issue de simulations numériques de la *formation des grandes structures* (*i. e.* superamas, amas, galaxies) dans l'Univers.

On observe (directement ou *via* les simulations) l'existence de grands vides. Ainsi il existe un grand vide de 30 Mpc cube dans la constellation du Bouvier, à 150 Mpc d'ici. L'image de l'Univers aux très grandes échelles est donc celle d'un réseau, plutôt bidimensionnel que tridimensionnel (dans le sens où la matière se répartit sur des « surfaces » entourant des immenses régions quasiment vides, et reliées les unes aux autres par des « ponts » de matière).

Ce réseau filamentaire est cependant relativement homogène vu de loin (c'est-à-dire sur une échelle de l'ordre de la centaine de Mpc). Ainsi, et malgré



FIGURE 1.6 – Les galaxies dans l'Univers ; image réelle

la haute structuration de la matière aux échelles astrophysiques (filaments, superamas, amas, galaxies, étoiles) présentant des contrastes de densités *très* importants, il n'est pas faux de considérer que sur des échelles grandes - dites cosmologiques ($\geq 100 \text{ Mpc} \approx 3 \times 10^{24} \text{ m}$), l'Univers est relativement homogène avec une densité *moyenne* uniforme. Cette observation est la base du *principe cosmologique*, ingrédient essentiel de la cosmologie théorique et de la théorie du Big Bang, comme nous le reverrons plus tard (chapitre 11).

1.2.4 Bilan : Univers homogène et structuration de la matière

Si l'on résume les paragraphes précédents, en partant cette fois des grandes échelles vers les petites, alors on a vu que l'Univers peut être considéré comme homogène au-delà de 100 Mpc . Au-delà de cette échelle les lois de la cosmologie homogène s'appliquent avec une bonne précision (dont *l'expansion de l'Univers i. e., la loi de Hubble*). L'univers observable aujourd'hui a une

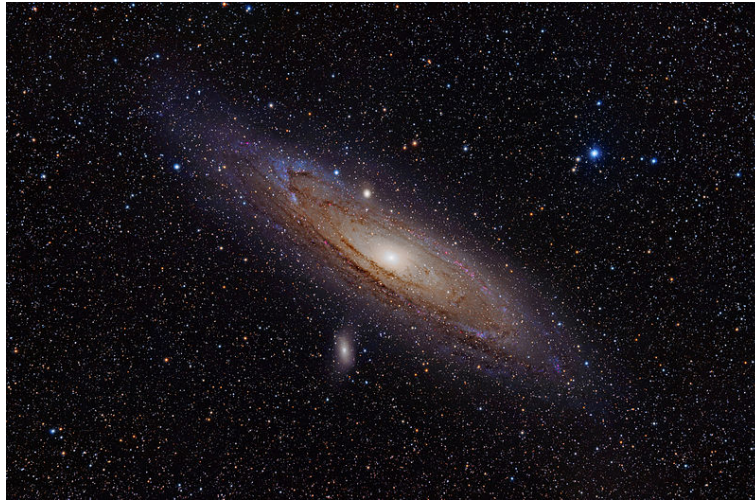


FIGURE 1.7 – La galaxie d'Andromède ; image réelle

taille d'environ $3000 \text{ Mpc} \approx 10^{26} \text{ m}$. En deçà de 100 Mpc , la répartition de la matière est tout à fait non triviale. Il y a des structures emboîtées les unes dans les autres (superamas, amas, galaxies), liées par la gravitation – et en fait, qui ont été formées *par* la gravitation au cours de l'évolution de l'Univers.

La compréhension fine de la formation des structures est encore un sujet de recherches très actif. Les grandes lignes en sont comprises : les faibles inhomogénéités dans la répartition de la matière dans l'Univers primordial se sont accentuées avec le temps par *effondrement gravitationnel*, ou *instabilité de Jeans*. On peut montrer, déjà en théorie Newtonienne, que ce processus induit naturellement cette structuration de la matière, *i. e.* cette espèce de jeu de poupées russes où la matière s'effondre gravitationnellement à plusieurs échelles différentes, formant ainsi des structures de tailles différentes. Cela dit une description détaillée et une compréhension fine de la formation des structures est encore manquante ; en particulier le processus de formation des galaxies n'est pas encore clair aujourd'hui⁴. Mais ce cours n'étant pas un cours d'astrophysique, nous n'en parlerons pas davantage.

4. Ne serait-ce que parce que ce processus dépend clairement de la matière noire et de sa nature, qui est inconnue à ce jour.

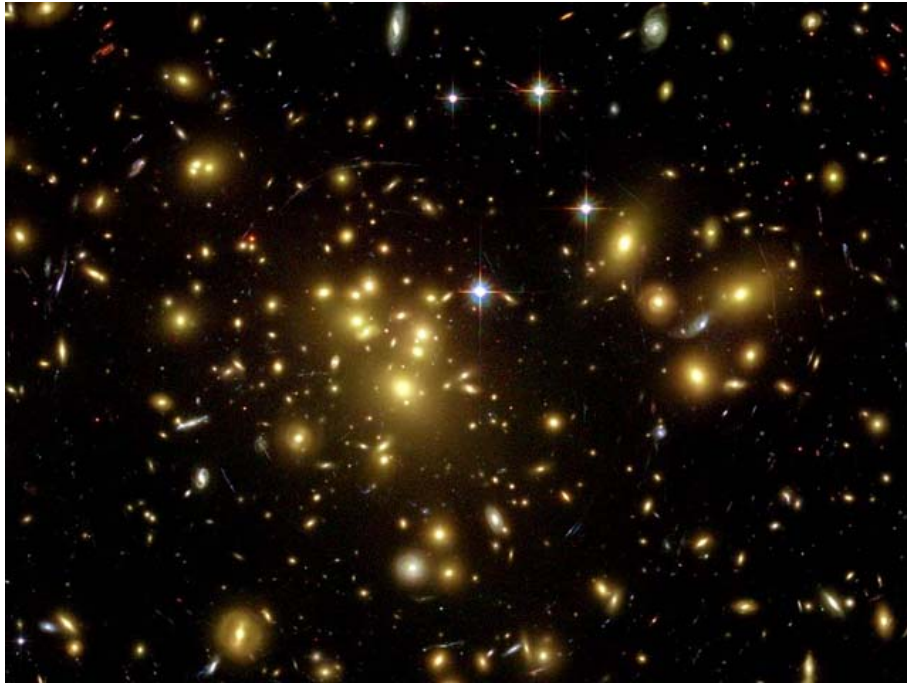


FIGURE 1.8 – L'amas de galaxie Abell1689 ; Image réelle, photo NASA

1.3 L'histoire de l'Univers homogène

Cette section couvre dans les grandes lignes la bien connue théorie du Big Bang, qui décrit notre Univers à ses débuts comme un espace temps extrêmement dense et chaud et ayant subi une impulsion initiale (expansion initiale de l'Univers). Cette expansion s'est ensuite ralentie au cours du temps cosmique du fait de l'attraction gravitationnelle entre la matière-énergie⁵. Parallèlement à cette expansion de l'Univers, sa température et sa densité décroissent. Il s'agit donc aussi d'une histoire thermique de l'Univers, *cf.* Fig. 1.12.

1.3.1 L'ère de Planck

On a pour tradition d'éviter de parler de l'instant $t = 0$ de l'Univers puisque, comme le montrent les équations cosmologiques, à cet instant considéré comme « origine », l'Univers est nécessairement infiniment dense et chaud, et aussi,

5. Mais l'Univers tardif semble accélérer son expansion pour des raisons qui sont encore assez mystérieuses, voir plus bas Section 1.4.

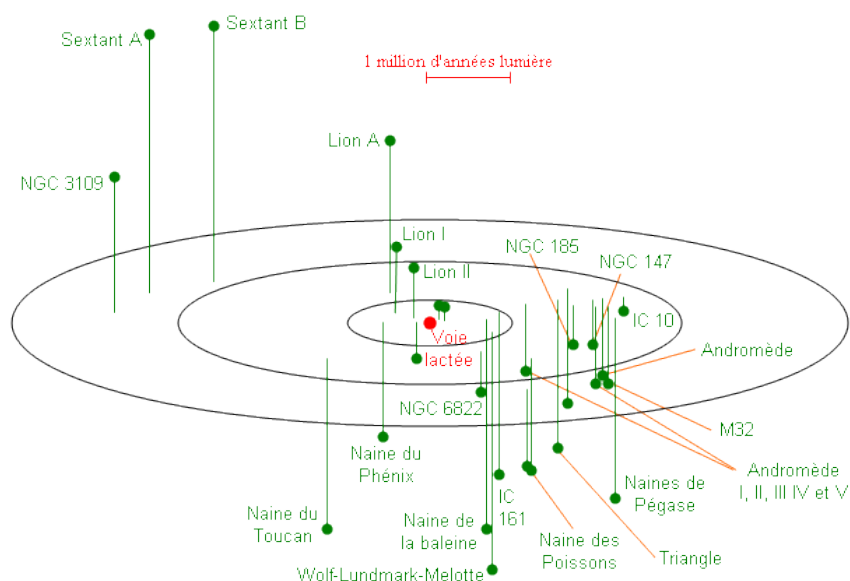


FIGURE 1.9 – Le groupe Local

pour ainsi dire, réduit à un point⁶. La physique « ayant horreur des infinis », il ne fait peu de doute que la singularité initiale est avant tout une conséquence formelle d'une théorie (la relativité générale) dont on étend le pouvoir prédictif jusqu'à un domaine où il n'y a plus de raisons de croire en sa validité.

Comme dit plus haut (sections 1.1.3 et 1.1.4), seule une théorie de gravité quantique permettrait de mieux savoir ce qu'il se passe pendant *l'ère de Planck*, c'est-à-dire aux tous premiers instants de l'Univers. L'histoire de l'Univers, commence donc, pour nous, à 10^{-44} s. L'état de l'Univers à cet instant nous est aujourd'hui totalement inconnu.

1.3.2 Entre 10^{-44} s et $\approx 10^{-10}$ s

Cette ère nous est également mal connue, car à cette époque l'Univers est encore beaucoup plus chaud (*i. e.* plus énergétique) que les niveaux d'énergie

6. Ce n'est pas exact ; en fait, si l'on regarde le film cosmique à l'envers, on voit que toutes distances entre tous les points tendent vers zéro. On parle de *singularité initiale*. Noter aussi qu'il existe des solutions sans Big-Bang, voir chapitre 11. Dans le modèle standard de la cosmologie moderne, cependant, les paramètres sont tels qu'une singularité initiale existe.

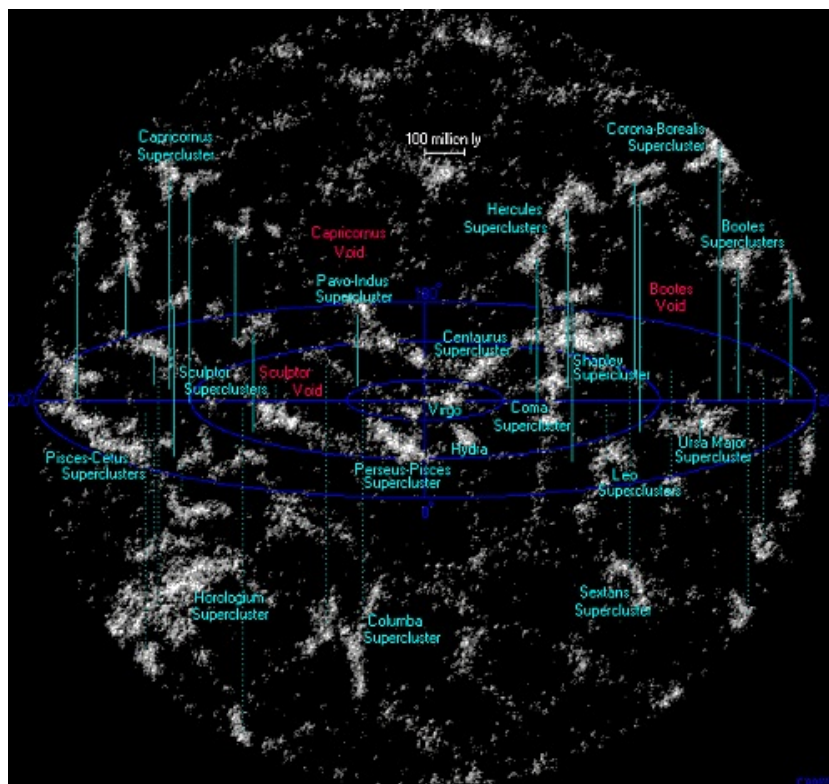


FIGURE 1.10 – Les superamas locaux

jamais atteints par les grands accélérateurs de particules. Nombre de théories s'appliquent et font des prédictions pour l'Univers sur cette période, mais en l'absence de vérification directe, il ne s'agit pas encore de connaissances fermement établies.

Il est cependant fortement suspecté que l'Univers connaît une phase inflationnaire (vers 10^{-33} s), c'est-à-dire une expansion extrêmement rapide où toutes les distances entre tous les points sont multipliées par un facteur considérable ($\geq 10^{26}$). Nous y reviendrons rapidement au chapitre 13.

Vers 10^{-10} s, l'Univers est composé de particules connues que l'on rencontre dans les accélérateurs de particules. Les interactions fortes et faibles dominent la physique locale, tandis que l'évolution de l'Univers dans son ensemble est dominée par la gravitation générée par son contenu. A cette époque aurait lieu la brisure électrofaible, c'est-à-dire la séparation des forces électrofaibles en forces électromagnétiques d'une part, et interaction faible d'autre part ; et cela *via* le *mécanisme de Higgs*. La particule de Higgs n'a pas encore été

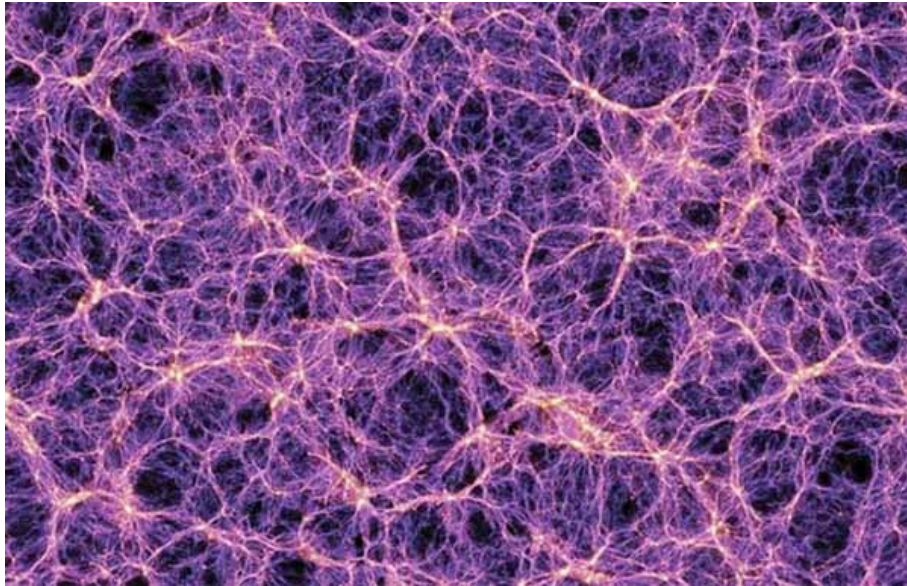


FIGURE 1.11 – Structure filamentaire de l'Univers aux très grandes échelles : chaque point représente une galaxie. Aux intersections des filaments on trouve des (probables) superamas.

trouvée dans les accélérateurs, et il faut donc être encore prudent ; cependant sa détection prochaine au CERN est probable (pour fin 2012, début 2013, suite aux annonces de fin 2011).

1.3.3 L'ère du plasma quark-gluon

Entre 10^{-10} s et 10^{-5} s la température a suffisamment baissé pour que l'on entre dans une phase où la physique est bien connue. L'univers est alors une « soupe » de quarks, de gluons, d'électrons, et de photons (les quarks sont les constituants des nucléons, neutrons et protons, les gluons sont les particules qui véhiculent l'interaction forte entre les quarks). L'Univers est opaque, car tout photon émis est très rapidement réabsorbé par d'autres particules.

Vers 10^{-5} s, l'Univers a suffisamment refroidi pour que les collisions entre les particules ne soient plus assez énergétiques pour casser en permanence les composés quarks-gluons qui ont tendance à se former naturellement. Ainsi les nucléons se forment, et l'univers devient plus simple, composé seulement de protons, neutrons, électrons, photons⁷. Les neutrons et protons se trans-

7. Pour faire simple. Il y a aussi des neutrinos, des mésons, etc. mais nous choisissons de

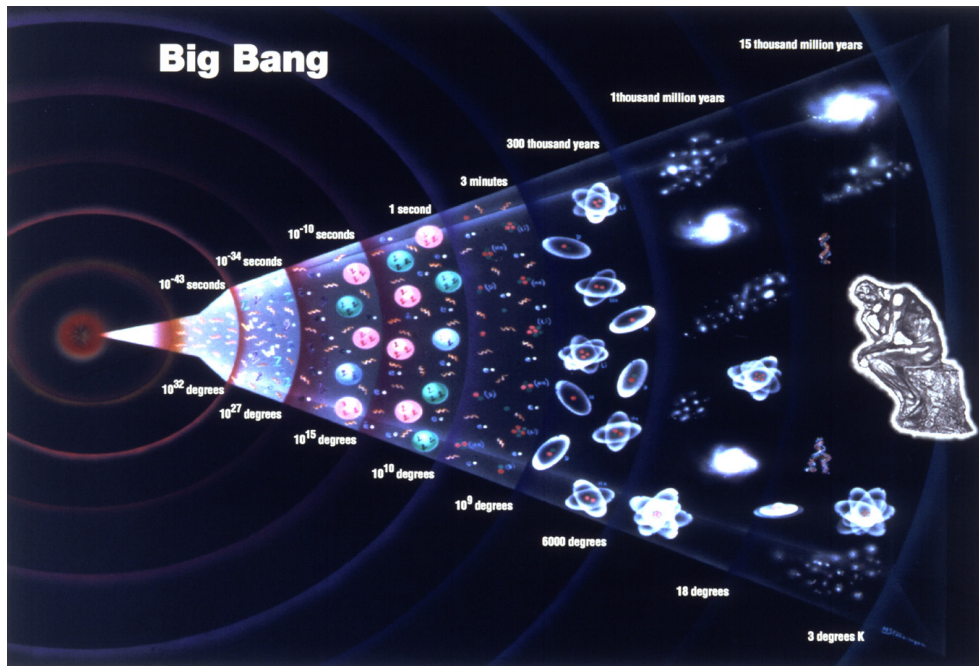


FIGURE 1.12 – L'histoire de l'Univers homogène est à la fois une histoire dynamique (évolution dynamique de la taille de l'Univers, ou plus précisément du facteur d'échelle), et une histoire thermique.

forment encore les uns dans les autres *via* l'interaction faible⁸. Des fusions nucléaires ont lieu, mais les produits de fusion sont aussitôt détruits par les collisions entre particules.

1.3.4 Plasma de matière ordinaire et nucléosynthèse primordiale

Vers 0.2s le ratio neutron-proton devient stable et fixé une fois pour toute (inefficacité des transitions faibles); les neutrinos se découplent du plasma de matière et dès lors traverseront l'Univers en ligne droite dans toutes les directions, sans ne presque plus interagir avec le reste de la matière. Il s'agit

garder la discussion aisée à suivre.

8. C'est-à-dire, des réactions $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ et $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$, mieux connues sous le nom de radioactivité bêta plus et moins, respectivement. Ici p est un proton, n un neutron, e^- est l'électron, e^+ l'anti-électron ou encore positron, ν_e le neutrino électronique, et $\bar{\nu}_e$ son anti-particule.

de l'analogie du fond diffus cosmologique, mais pour les neutrinos et non les photons (voir chapitre 13). Si l'on pouvait observer facilement les neutrinos, cela serait une source précieuse d'informations sur l'Univers primordial. Malheureusement le neutrino est une particule qui n'interagit quasiment pas, et elle est très difficile à détecter sur Terre.

Vers 200–300 secondes, les réactions de fusion nucléaires deviennent efficaces, dans le sens où leurs produits sont maintenant stables, l'Univers s'étant refroidi. Ainsi sont formés les *noyaux* de ce qui deviendra plus tard les atomes d'hélium, et des traces de Lithium. C'est la nucléosynthèse primordiale (*Big Bang Nucleosynthesis*, ou *BBN*), qui laissera un univers empli d'environ 75% de noyaux d'hydrogène (des protons libres), de 25% d'hélium.

L'univers reste relativement longtemps dans cette phase. Il est essentiellement rempli d'un plasma constitué de noyaux atomiques, neutrons libres, électrons libres, et photons. Les noyaux n'arrivent pas à capturer bien longtemps les électrons puisque ceux-ci sont chassés par les photons encore trop énergétiques. Pour la même raison, l'Univers est encore opaque.

1.3.5 La formation des atomes et le fond diffus cosmologique

Il faut attendre suffisamment longtemps, vers 300 000 ans après le Big Bang, pour que la température ait suffisamment baissé (de l'ordre de quelques milliers de degrés) et que les photons libres ne soient plus assez énergétiques pour chasser par collision les électrons qui ont tendance à être capturés par les noyaux atomiques. Les atomes d'hydrogène, d'hélium, et de Lithium se forment alors par capture électronique. On parle de l'époque de *recombinaison*⁹. La matière devient électriquement neutre, et les photons précédemment piégés par le plasma peuvent maintenant s'étendre en ligne droite sans plus (ou presque plus) interagir avec la matière. Pour cette raison, on parle aussi de l'époque du *découplage des photons*, qui se produit juste après la recombinaison¹⁰. Ces deux époques (en anglais *recombination epoch* et *photon decoupling*) se produisent quasiment simultanément et sont donc souvent

9. Quand bien même les électrons et les noyaux atomiques n'avaient jamais été combinés auparavant. Il serait plus correct de parler de combinaison tout court, mais ce n'est pas le terme que l'usage a retenu.

10. Il faut noter que le découplage pourrait se produire avant la recombinaison dans un Univers où l'expansion serait suffisamment grande pour diluer suffisamment le plasma électronique et ainsi libérer les photons primordiaux. Ce n'est cependant pas dans cet ordre que ces phénomènes se sont produits dans notre Univers.

considérés comme synonymes par un léger abus de langage.

La conséquence majeure du découplage des photons est que l'Univers devient alors *transparent* à la lumière, et ce flot de photons libérés à ce moment-là se retrouve encore, emplissant l'Univers, quinze milliards d'années plus tard. On l'appelle le *fond diffus cosmologique*, ou encore *rayonnement fossile* (en anglais : *Cosmic Microwave Background* ou *CMB* dans la suite) tandis que l'ensemble des lieux de l'espace à cet instant s'appelle la *surface de dernière diffusion* (des photons), ou encore *surface of last scattering* en anglais. L'existence, la découverte, et l'étude du CMB sont d'une importance capitale pour la cosmologie moderne : c'est l'observation de l'Univers la plus ancienne qu'il est possible d'obtenir à l'heure actuelle¹¹. Il a été détecté pour la première fois en radioastronomie¹² en 1964 par Penzias et Wilson (Nobel 78). L'existence du CMB est une des preuves les plus importantes de la théorie du Big-Bang. L'étude du CMB permet par ailleurs d'estimer la valeur des paramètres cosmologiques (*cf.* chapitre12).

L'observation détaillée du fond diffus cosmologique montre que la matière à cette époque est extrêmement homogène : la distribution de matière est quasiment constante dans l'espace, avec des fluctuations de densité assez faibles, de l'ordre de $\delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$. Le principe cosmologique est donc très bien vérifié à cette époque. Il faut mettre cette valeur en perspective avec les contrastes de densité les plus grands existants dans l'Univers aujourd'hui $\rho_{\max}/\rho_{\min} \sim 10^{45}$! (La densité moyenne cosmologique est d'ordre 10^{-27} tandis que la densité d'une étoile à neutron, par exemple, est d'ordre 10^{18} , en $kg.m^{-3}$).

1.3.6 Ère de la matière et formation des structures

L'univers en donc à ce moment essentiellement composé d'un gaz de matière ordinaire, dont les petites inhomogénéités vont croître lentement *via* l'instabilité gravitationnelle (qui, soit dit en passant, a une efficacité amoindrie du fait de l'expansion de l'Univers). Les premières galaxies apparaissent après environ un milliard d'années. La structuration de la matière par ce processus a été décrit plus haut et nous n'y reviendrons pas.

L'âge de l'Univers est estimé à 14 milliards d'années. Cela dépend du modèle

11. On pourrait, comme dit plus haut, obtenir une cartographie de l'Univers encore plus jeune, avec la détection de neutrinos fossiles, ou encore des ondes gravitationnelles primordiales, mais cela n'est pas techniquement possible aujourd'hui

12. Le CMB est un rayonnement à distribution de corps noir, *i. e.* thermique, de longueur d'onde moyenne centrée autour de 1.8 mm . C'est le domaine des micro-ondes.

cosmologique que l'on choisit. La figure suivante apporte quelques compléments à la présentation rapide que nous avons proposé ici.

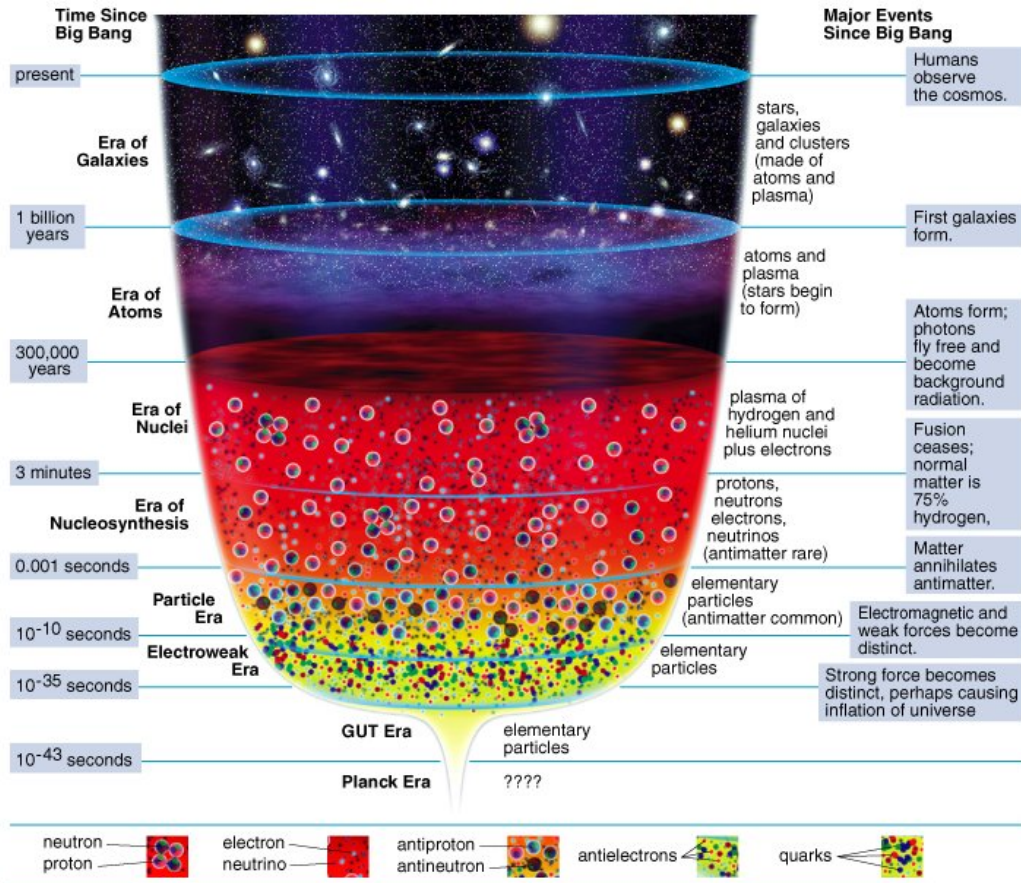


FIGURE 1.13 – L'histoire de l'Univers en bref.

1.3.7 Éléments chimiques lourds et supernovae

Notons pour terminer que les éléments chimiques lourds que l'on trouve sur Terre n'ont pas pu être formés pendant la nucléosynthèse primordiale. Les autres éléments chimiques sont synthétisés dans le cœur des étoiles par fusion nucléaire (naturelle) jusqu'au fer. Au-delà, la fusion nucléaire coûte de l'énergie et doit être forcée par un apport supplémentaire en énergie. Cela se produit typiquement lors d'une supernovae de type II, à savoir l'implosion gravitationnelle d'une étoile massive (de masse au moins dix fois la masse

du Soleil), suivi du rebond extrêmement violent (donc d'une « explosion ») des couches externes de l'étoile en chute libre vers, et sur le cœur dur central formé pendant l'implosion, en l'occurrence une étoile à neutron (ou *pulsar*). Pour faire simple, les éléments lourds se forment lors du rebond, et sont ainsi disséminés dans la galaxie hôte. On peut voir ces supernovae comme des « bombes gravitationnelles » puisque l'énergie libérée durant ce processus (et qui peut atteindre 10^{47} Joules, ce qui fait qu'une supernovae brille pendant quelques jours aussi intensément qu'une galaxie entière) provient essentiellement de l'énergie potentielle gravitationnelle initiale de l'étoile.

Notons que les supernovae qui ont été utilisées en cosmologie pour démontrer l'accélération récente de l'Univers (*cf.* section suivante) ne sont pas de type II mais de type I (explosion d'une naine blanche atteignant sa limite de Chandrasekhar, *i. e.* une masse environ 1.4 fois la masse solaire). La grande régularité de la luminosité intrinsèque de ces supernovae permet en effet d'en déduire précisément leurs distances, ce qui, combiné à l'observation du décalage spectral (le *redshift*) permet une mesure directe de l'histoire récente de l'évolution de l'expansion de l'Univers, *cf.* chapitre 12.

1.4 Grandes questions de l'astrophysique et cosmologie contemporaine

Cette introduction rapide nous permet déjà d'arriver à deux grandes questions ouvertes et qui font l'objet d'intenses recherches depuis quelques années.

La première est ce qu'on appelle *le problème de la matière noire*. Il s'est d'abord manifesté *via* les courbes de rotations des galaxies spirales. Dans les galaxies le régime est essentiellement non relativiste puisque la vitesse de rotation est faible comparée à la vitesse de la lumière

$$\frac{v_{\text{rot}}}{c} \sim 10^{-3},$$

tandis que le champ gravitationnel galactique est très faible, de l'ordre de

$$\frac{GM_{\text{gal}}}{L_{\text{gal}}^2} \sim 10^{-10} \text{ m.s}^{-2}.$$

Les lois de Newton devraient donc s'appliquer avec une grande précision. Or, si l'on calcule la vitesse de rotation, par exemple, du Soleil, en connaissant la masse comprise dans son orbite (connue grâce aux observations), la vitesse

prédite par la théorie est deux à trois fois plus faible que la vitesse effectivement observée! Cela n'est ni spécifique à notre Soleil, ni à notre galaxie. Les vitesses de rotations sont de façon générique bien plus grandes que ce qu'elles devraient être dans *toutes* les galaxies observées jusqu'à présent. La première observation de ce type remonte à 1933 dans les travaux de l'astronome Zwicky.

Cela peut s'expliquer naturellement si la masse des galaxies est en fait bien plus grande que celle que l'on déduit de l'analyse de leur luminosité. Il faudrait donc une composante de matière sombre, ou noire, c'est-à-dire qui n'émet pas de lumière (*Dark Matter* en anglais), en quantité très importante, pour expliquer ce phénomène. Typiquement, la masse totale de matière noire dans l'Univers serait au moins cinq fois supérieure à celle de la matière « ordinaire ». La nature de cette matière noire est pour le moment inconnue. La matière noire a aussi un rôle cosmologique très important.

Une explication concurrente est de dire que la physique des champs gravitationnels aussi faibles n'ayant jamais été étudiée sur Terre, il est naturel de voir les courbes de rotation de galaxies spirales comme étant, justement, un ensemble de données expérimentales sur la physique gravitationnelle en champ ultra-faible. On peut donc refuser l'idée de l'existence d'une matière noire exotique, et lui préférer la construction d'une théorie alternative à la gravitation de Newton et d'Einstein qui soit donnée par des lois nouvelles, notamment dans le régime de champ ultra-faible, et de telle sorte que ces lois expliquent les courbes de rotation. Ces théories (dites MOND) sont récentes et pas encore pleinement satisfaisantes.

La seconde question est celle de *l'énergie noire*. Le prix Nobel de physique 2011 a été décerné aux deux équipes ayant mis en évidence en 1998, à l'aide de l'observation de supernovae (*cf.* section précédente), que l'expansion récente de l'Univers, au lieu d'être en décélérée comme on s'y attend naïvement du fait de l'attraction gravitationnelle entre les corps, est en fait accélérée depuis peu (typiquement quelques milliards d'années). Cela suppose, dans le cadre de la relativité générale en tout cas, que l'Univers contient, en plus de la matière ordinaire et de la matière noire, un fluide de type nouveau, nommée l'énergie noire (*Dark Energy*), et dont la pression fortement négative expliquerait l'accélération récente de l'Univers. La nature de cette énergie noire reste cependant mystérieuse. En effet, même si le candidat le plus naturel, à savoir la *constante cosmologique* (*cf.* chapitre 8) permet de rendre compte des observations, il est très fortement suspecté que cette explication ne soit que provisoire et que le problème de l'énergie noire cache une physique encore inconnue à ce jour (*cf.* chapitre 13).

Deuxième partie

Une brève histoire de la mécanique

Chapitre 2

Mécanique de Newton et principe de relativité

Remarque : les vecteurs seront notés en caractères gras. Les termes de référentiel inertiel ou de référentiel galiléen sont équivalents et utilisés indifféremment dans ce qui suit.

2.1 Mathématiques de l'espace-temps de Newton

L'espace-temps « absolu » de Newton est défini ainsi :

- L'espace est euclidien et s'identifie à \mathbb{R}^3
- Le temps s'identifie à l'axe réel. L'espace-temps est donc le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$

Introduisons quelques autres définitions. Un *référentiel* \mathcal{R} est, d'un point de vue strictement mathématique, un système de coordonnées (t, x, y, z) sur l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, utilisées par un observateur (un corps solide situé à l'origine des coordonnées) afin de repérer les points dans cet espace. Les coordonnées spatiales sont dites cartésiennes si elles forment un maillage obtenu à partir de trois vecteurs de base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ (non nécessairement orthogonaux entre eux, mais en général on choisit un repère orthonormé) – *cf.* schéma en cours. Il existe bien sûr d'autres systèmes de coordonnées possibles, non cartésiennes, mais néanmoins utiles parfois, telles que les coordonnées polaires, cylindriques, sphériques, etc. On peut aussi choisir un système de

coordonnées tout à fait quelconque (cf schéma en cours), dit aussi système de coordonnées curvilignes. Cependant, du fait de la structure de produit cartésien du temps et de l'espace, on ne peut pas mélanger les coordonnées temporelles et spatiales. L'espace-temps Newtonien est nécessairement un feuilletage d'espaces euclidiens \mathbb{R}^3 indexés par la variable temporelle.

Anticipons un peu sur quelques notations que nous retrouverons dans le cours de relativité restreinte et générale. Il ne sera pas inutile de relire cette section à ce moment-là, afin de voir comment la relativité restreinte puis générale généralisent cette construction mathématique. Rappelons d'abord qu'un espace euclidien (\mathbb{R}^3 , ici) est par définition \mathbb{R}^3 vu comme espace vectoriel sur \mathbb{R} , et muni d'un produit scalaire permettant la définition d'une distance. La base canonique de l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 (*i. e.* un repère orthonormé) est définie par trois vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, satisfaisant aux conditions d'orthonormalité : $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$, etc. où le point dénote le produit scalaire. De façon plus générale, pour i, j dans $(1, 2, 3)$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (2.1)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker (vaut 1 si $i = j$, zéro sinon). On peut ranger ces valeurs dans une matrice $[\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j]$, et l'on a

$$[\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice s'appelle la *métrique* de l'espace. Il faut noter qu'elle prendrait une valeur différente dans un autre choix de base (par exemple non orthonormé). En particulier, la matrice représentant la métrique $g_{ij} = [\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j]$ n'est pas nécessairement diagonale. En revanche, elle est symétrique (par symétrie du produit scalaire), et réelle, et donc diagonalisable : en tout point P il existe des coordonnées telles que la métrique puisse toujours s'écrire sous forme canonique $g_{ij} = \delta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$.

En fait, l'espace euclidien \mathbb{R}^3 étant plat, il existe toujours un système de coordonnées globales (*i. e.* couvrant tout l'espace), tel que les vecteurs \mathbf{e}_i , tangents aux lignes coordonnées x^i , satisfont $g_{ij} = \delta_{ij}$ en tous points. Comme nous le verrons en relativité générale¹, lorsque l'espace n'est plus plat, mais seulement localement plat, il est toujours possible localement de donner à la métrique sa forme canonique. En revanche cela n'est pas possible globalement (à moins, précisément, que la courbure soit nulle partout).

1. A la nuance importante près, qu'en relativité générale, on parlera de la courbure de l'espace-temps (quadri-dimensionnel), et pas seulement de l'espace tridimensionnel

Revenons au cas Newtonien dans les coordonnées cartésiennes globales issues des trois vecteurs de base \mathbf{e}_i depuis l'origine O . Le vecteur position \mathbf{OM} entre l'origine du repère et un point M de coordonnées (x^1, x^2, x^3) peut s'écrire

$$\mathbf{OM} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{i=3} x^i \mathbf{e}_i \quad (2.2)$$

On adoptera dans la suite la *convention d'Einstein*, consistant à sommer de façon implicite sur les indices répétés en haut et en bas. Ainsi, au lieu d'écrire $\sum_i x^i \mathbf{e}_i$, on écrira plus simplement $x^i \mathbf{e}_i$, où il est sous-entendu qu'il y a une somme sur les indices i .

La distance entre deux points M et M' s'obtient en formant le produit scalaire par lui-même du vecteur $\mathbf{MM}' = (x'^i - x^i) \mathbf{e}_i$. On trouve, notant s^2 cette distance :

$$s^2 = (x'^1 - x^1)^2 + (x'^2 - x^2)^2 + (x'^3 - x^3)^2 \quad (2.3)$$

NB : en terme de notations peut-être plus familières ($x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$), cette formule n'est rien d'autre que la formule pour la distance euclidienne entre deux points :

$$s^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \quad (2.4)$$

que l'on appellera aussi, par la suite, *l'intervalle*. On reconnaît là le théorème de Pythagore (en version tridimensionnelle), qui se démontre à partir des axiomes de la géométrie d'Euclide. L'approche moderne (les espaces euclidiens) veut plutôt que c'est l'existence d'un produit scalaire, et donc de la formule de Pythagore, qui fonde la géométrie d'Euclide. Si les deux points M et M' sont infiniment proches, alors la formule pour la distance devient

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{ij} \delta_{ij} dx^i dx^j \equiv \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{convention d'Einstein}) \quad (2.5)$$

Le ds^2 s'appelle *l'intervalle élémentaire*, et sa généralisation jouera un rôle central en relativité. Il faut remarquer la notation abusive : il ne s'agit pas de $d(s^2) = 2sds$, mais bien de $(ds)^2$.

2.2 Les lois de Newton

Reprenons maintenant plus précisément les divers postulats qui forment la mécanique de Newton, en plus de la description mathématique de l'espace et du temps :

- Première loi : tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état.
- Seconde loi, ou principe fondamental de la dynamique : dans un référentiel Galiléen, un corps de masse m obéit à

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (2.6)$$

comme déjà rappelé au cours précédent.

- Troisième loi ou principe d'action réaction : tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par le corps B

Ces postulats, tels qu'énoncés initialement par Newton, ne forment pas une base logique satisfaisante. En effet la notion de référentiel Galiléen n'a pas été définie. En fait, l'expérience courante (dans une voiture qui tourne à gauche ou à droite, par exemple) nous enseigne que la première loi n'est pas toujours vraie. Elle n'est vraie que dans certains référentiels. Par définition, justement, un référentiel Galiléen sera un référentiel dans lequel la première loi est valable. La première loi n'est donc pas une loi, sous peine d'être circulaire (*i. e.* un référentiel Galiléen est un référentiel ou la première loi est vraie, mais la première loi n'est valable que dans un référentiel Galiléen...). Ce n'est guère plus qu'une définition, précisément, de ces référentiels privilégiés. Rien ne garantit en revanche qu'un tel référentiel existe dans la nature. Par ailleurs il apparaît clairement que la première loi, une fois qu'il est précisé qu'elle n'est valable que dans un référentiel Galiléen, n'est en fait qu'une simple conséquence de la seconde dans le cas où la résultante des forces s'appliquant sur un corps est nulle.

Enfin, notons que la seconde loi n'a pas non plus de pouvoir prédictif : il faut plutôt la voir comme une définition des forces. Si l'on ne connaît pas l'expression de la ou des forces agissant sur un système, on ne peut rien conclure sur la dynamique des corps.

2.3 Les lois de Newton et le principe d'inertie

Il est plus correct de modifier la construction précédente de la façon suivante :

- Postulat : (*principe d'inertie*) il existe dans la nature au moins un référentiel privilégié, dit Galiléen ou inertiel, dans lequel la seconde loi s'applique.
- Définition : un corps est dit isolé s'il ne subit aucune force (ou pseudo isolé si la résultante des forces $\Sigma \mathbf{F}$ s'annule).

- Corollaire : en intégrant la seconde loi, on voit que tout corps isolé ou pseudo isolé se meut à vitesse uniforme dans ce référentiel Galiléen, établissant la première loi de Newton.
- Théorème : il existe une famille infinie de référentiels Galiléens. Ils sont tous en translation uniforme les uns par rapport aux autres.

La démonstration est triviale et peut se résumer ainsi : puisque, dans le référentiel inertiel \mathcal{R} , tous les corps isolés se meuvent à vitesse uniforme, il est clair que dans un autre référentiel animé d'un mouvement à vitesse constante par rapport au premier, cette propriété sera encore vraie. Mathématiquement, soit (t, x, y, z) les coordonnées associées au premier référentiel inertiel \mathcal{R} . Dans \mathcal{R} , un corps isolé A a une accélération nulle :

$$\frac{d^2 x_A^i}{dt^2} = 0 \quad (2.7)$$

où $i = (1, 2, 3)$ et où l'on note les coordonnées cartésiennes du corps A par $x_A = x_A^1, y_A = x_A^2, z_A = x_A^3$. Soit maintenant un nouveau référentiel inertiel \mathcal{R}' se déplaçant à vitesse uniforme par rapport au premier. Alors les coordonnées sont transformées en $x_A'^i = x_A^i - v^i t$ où $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ est la vitesse du nouveau référentiel par rapport à l'ancien (de sorte que la vitesse de l'origine O' du référentiel \mathcal{R}' soit (v^1, v^2, v^3) dans le référentiel \mathcal{R}). Clairement, dans ce nouveau référentiel, l'accélération du corps A reste nulle, il se déplace donc à vitesse constante :

$$\frac{d^2 x_A'^i}{dt^2} = 0 \quad \square \quad (2.8)$$

Conclusion : il reste de toute cette construction l'image de l'existence *supposée* de référentiels *privilegiés*, dits *Galiléens* ou *inertiels*, qui sont tous en translation uniforme les uns par rapport aux autres, et dans lesquels la seconde loi de Newton (la loi dynamique) s'applique. Pour faire des prédictions avec cet ensemble théorique, il est nécessaire de :

- Savoir reconnaître dans la nature les référentiels inertiels. Comment les choisir ? Ou sont-ils ? Qui sont-ils ? Cette question est non triviale, et seule la relativité générale apportera une réponse satisfaisante (ce sont les référentiels définis par les corps en chute libre dans un champ de gravitation).
- Connaître l'expression des forces s'appliquant aux corps matériels.

2.4 Le principe de relativité Galiléenne

2.4.1 Covariance galiléenne

On a vu que, trivialement, l'accélération d'un corps est invariante sous un changement de référentiels Galiléens. En conséquence de quoi, la loi dynamique elle-même

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \Sigma F^i(t, x^j) \quad (2.9)$$

conserve sa *forme* sous les changements de référentiels inertiels². De façon plus générale, la transformation de coordonnées :

$$t' = t + t_0 \quad (2.10)$$

$$x'^i = x^i - v^i t + c^i \quad (2.11)$$

où t_0 est une constante, et $\mathbf{c} = (c^1, c^2, c^3)$ est un vecteur constant, est la transformation de coordonnées la plus générale qui relie deux référentiels inertiels. Cette transformation est capitale *puisqu'elle la laisse la forme des équations de Newton invariante* :

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \Sigma F^i(t, x^j) \quad \text{dans } \mathcal{R} \Rightarrow m \frac{d^2 x'^i}{dt'^2} = \Sigma F^i(t', x'^j) \quad \text{dans } \mathcal{R}' \quad (2.12)$$

Ces lois de transformations de coordonnées forment un groupe (au sens mathématique du terme), que l'on appelle le *groupe de Galilée*. Le fait que l'équation dynamique de Newton conserve la même forme dans n'importe quel référentiel inertiel signifie que les lois de la physique sont identiques dans tous les référentiels inertiels, c'est-à-dire encore, que tous les observateurs inertiels voient la même physique (les mêmes phénomènes). On dit que la loi de Newton est *covariante sous les transformations du groupe de Galilée* ou aussi que la loi de Newton est *covariante sous l'action du groupe de Galilée*.

2.4.2 Interprétation physique : le principe de relativité

Le fait que les lois de la physique sont identiques dans tous les référentiels inertiels constitue ce que l'on appelle le *principe de relativité de Galilée*, ou principe de relativité tout court. Ce principe affirme donc qu'il est impossible, à n'importe quel observateur inertiel, et ce même en faisant appel à toutes

2. Pour peu que les forces elles-mêmes gardent la même forme

les expériences de physique imaginables, de décider s'il se trouve oui ou non en état de mouvement (par rapport à l'espace absolu de Newton). Comme le disait Galilée, « le mouvement est comme rien ».

Nous sommes en fait assez familier de ce fait. Il est arrivé à tout le monde de croire que son train partait, alors que c'est le train sur le quai d'en face qui part de la gare. Outre l'impression désagréable que cela procure, cela signifie qu'effectivement aucun effet physique dans l'environnement local, aucune modification du monde et de ses lois ne permet de « sentir » que le train est parti et qu'il roule maintenant en s'éloignant de la gare. En fait, il faut noter ici que si le train accélérât fortement au démarrage, les passagers le remarqueraient immédiatement, du fait de la force d'inertie qui se manifeste et qui les enfonce un peu dans leurs sièges. C'est que, précisément, un référentiel accéléré n'est pas un référentiel inertiel, de sorte que la physique dans un référentiel accéléré n'est pas la même que la physique dans un référentiel inertiel. Sur l'expérience de pensée du train qui part de la gare, il se trouve que aujourd'hui la plupart des trains accélèrent très faiblement au démarrage, de sorte que la force d'inertie est la plupart du temps trop faible pour être perçue par les sens ordinaires.

L'apparition de forces d'inertie est une bonne illustration de la *non-covariance* de l'équation de Newton sous *toutes* les transformations de coordonnées. En effet, si \mathcal{R}' est accéléré par rapport à \mathcal{R} (Galiléen) le long d'un axe x , alors la loi de transformation des coordonnées est $x' = -\gamma t^2/2 + x$, $y' = y$, $z' = z$ et $t' = t$, et on voit que l'accélération dans \mathcal{R}' , \mathbf{a}' satisfait la loi

$$m\mathbf{a}' = \Sigma\mathbf{F}(t', x'^j) + \mathbf{F}_e \quad (2.13)$$

où il apparaît, en plus des forces standard, une force supplémentaire (dite force d'inertie d'entraînement) donnée par $\mathbf{F}_e = -m\gamma\mathbf{e}_x$ (cas le long d'un axe x). C'est ce terme (noter le signe moins), qui fait que l'on s'enfonce dans le siège d'une voiture qui accélère.

2.5 La relativité : principe ou théorème ?

Nous avons vu que le principe de relativité galiléenne se démontre à partir des lois et des postulats de Newton, cf section précédente. Il s'agirait donc plutôt d'un théorème que d'un principe ? Deux éléments de réponse. D'abord, la réalité historique est autre, puisque Galilée a énoncé ce principe *avant* la formulation de la mécanique de Newton. Cela nous engage en fait à considérer le principe de Galilée comme étant un *postulat* sur lequel s'est

basé Newton afin de construire sa théorie. Ensuite, et surtout, ce postulat est de très grande importance car il détermine en fait de façon quasi-univoque la théorie dynamique : la seconde loi de Newton respecte le principe de relativité galiléenne, mais une autre loi du mouvement ne le respecterait pas nécessairement.

Ainsi, si la loi dynamique s'écrivait $force = cst \times vitesse$, au lieu de $force = masse \times accélération$, le principe de relativité galiléenne ne serait pas respecté. Nous vivrions dans un monde où les corps isolés occupent des places fixes (car de vitesses nulles), et nous serions capables de détecter notre état de mouvement à l'aide d'expériences de physique. Ceci correspond à la vision antique, d'Aristote, de la physique. On ne peut pas vraiment blâmer Aristote d'avoir pensé cela, puisqu'en effet, *du fait des frottements*, un corps qu'on lance sur une table finit par s'arrêter et rester en place. À ces époques reculées où il n'y avait ni trains, ni gares, ni encore ces images des astronautes de la station MIR ou de la station spatiale internationale – ou l'on voit qu'effectivement (dans le vide), un corps lancé persiste dans son état de mouvement à vitesse uniforme – il n'était effectivement pas naturel de songer que le principe de relativité de Galilée devait être vrai. C'est même remarquable que Galilée l'ait découvert si tôt dans l'histoire de l'humanité.

De la même manière, si la loi dynamique s'écrivait cette fois $force = cst \times sur\text{-}accélération$ (*i. e.* la dérivée temporelle de l'accélération), alors le principe de relativité galiléenne serait bien sûr valide, mais il serait aussi vrai qu'aucun effet physique ne serait associé à l'état d'accélération constante (l'accélération serait comme rien). Or nous savons que cela n'est pas vrai. Ainsi, le principe de relativité est bien un postulat fondamental qui donne de précieux renseignements sur les lois de la physique, et guide leurs découvertes. On peut résumer les paragraphes précédents, avec H. Poincaré, en disant que ce principe, essentiellement, indique que toutes les lois dynamiques sont du second ordre en les dérivées temporelles, ni plus, ni moins. Bien sûr, comme tout postulat physique, il doit être vérifié expérimentalement. De très nombreuses expériences au cours du 20^{ème} siècle ont démontré sa validité avec une très grande précision.

Concluons donc en affirmant que ce ne sont pas les lois de Newton qui établissent le principe de relativité, c'est le principe de relativité qui conduit à la loi de Newton. Il existe cependant une autre théorie, différente de celle de Newton, et qui incorpore le principe de relativité : il s'agit de la relativité restreinte d'Einstein que nous aborderons au prochain chapitre, et qui généralise la dynamique newtonienne en tenant compte du fait que rien ne peut se déplacer plus vite que la lumière.

2.6 Un texte original de Galilée

Extrait de Galilée, *Dialogue concernant les deux plus grands systèmes du monde* (1632) :

« Enfermez-vous avec un ami dans la cabine principale à l'intérieur d'un grand bateau et prenez avec vous des mouches, des papillons, et d'autres petits animaux volants. Prenez une grande cuve d'eau avec un poisson dedans, suspendez une bouteille qui se vide goutte à goutte dans un grand récipient en dessous d'elle. Avec le bateau à l'arrêt, observez soigneusement comment les petits animaux volent à des vitesses égales vers tous les côtés de la cabine. Le poisson nage indifféremment dans toutes les directions, les gouttes tombent dans le récipient en dessous, et si vous lancez quelque chose à votre ami, vous n'avez pas besoin de le lancer plus fort dans une direction que dans une autre, les distances étant égales, et si vous sautez à pieds joints, vous franchissez des distances égales dans toutes les directions. Lorsque vous aurez observé toutes ces choses soigneusement (bien qu'il n'y ait aucun doute que lorsque le bateau est à l'arrêt, les choses doivent se passer ainsi), faites avancer le bateau à l'allure qui vous plaira, pour autant que la vitesse soit uniforme [c'est-à-dire constante] et ne fluctue pas de part et d'autre. Vous ne verrez pas le moindre changement dans aucun des effets mentionnés et même aucun d'eux ne vous permettra de dire si le bateau est en mouvement ou à l'arrêt ... »

Chapitre 3

Rappels de gravitation Newtonienne

3.1 Théorie de la gravitation de Newton

La théorie de la gravitation de Newton ajoute aux postulats vus au chapitres précédents une expression pour la force d'attraction gravitationnelle entre deux corps massifs. Soit deux masses M_1 et M_2 séparées par un vecteur $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$, il s'exerce une force (de M_1 sur M_2)

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{GM_1M_2\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3} \quad (3.1)$$

3.2 Équation de Poisson et champ gravitationnel

La loi précédente se généralise à une distribution quelconque de masses et dont la densité vaut $\rho(x, t)$. On montre que la loi de Newton peut s'écrire sous la forme plus générale suivante. On introduit le potentiel gravitationnel Φ , qui satisfait l'équation de Poisson :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \quad (3.2)$$

où ρ est la densité de matière, et Δ l'opérateur Laplacien. On note $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$, la *champ gravitationnel*. Alors un corps de masse m , évoluant dans le potentiel

Φ , subit une force

$$\mathbf{F} = -m\vec{\nabla}\Phi = m\vec{g} \quad (3.3)$$

c'est-à-dire que son accélération vaut

$$\boxed{\vec{a} = \vec{g} = -\nabla\Phi} \quad (3.4)$$

Cette dernière formule est capitale pour la suite. Elle indique que tous les corps, quel que soit leur masse, sont accélérés de la même façon dans un champ gravitationnel. On dit aussi qu'ils « tombent de la même façon ». On parle de *l'universalité de la chute libre*. Cette universalité signifie *qu'un champ gravitationnel n'est pas distinguable d'un champ d'accélération*.

Cette observation sous-tend toute la construction de la relativité générale. Il faut noter que cette universalité n'est valable (en théorie Newtonienne) que pour le mouvement de corps massifs dans un champ gravitationnel. Einstein élève au rang de principe cette équivalence gravitation – accélération (le principe d'équivalence), et cela lui permet de prédire quelques faits remarquables, avant même de déduire la forme finale de la théorie. Une prédiction notable est la courbure des rayons lumineux dans un champ de gravitation¹. Nous reverrons cela plus longuement dans les chapitres ultérieurs.

3.3 Champ gravitationnel d'un corps sphérique

Déterminons rapidement le champ gravitationnel de tout corps sphérique en théorie de Newton. Soit donc une distribution $\rho(r)$ sphérique de rayon R . En coordonnées sphériques, et puisque par symétrie on a $\Phi = \Phi(r)$, l'équation de Poisson s'écrit

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\Phi) = 4\pi G\rho(r) \quad (3.5)$$

En intégrant cette équation sur la couronne élémentaire $4\pi r^2 dr$, on arrive à

$$\int_0^r \partial_{r'}(r'^2\partial_{r'}\Phi(r')) dr' = r^2\Phi(r) = G \int_0^r 4\pi r'^2\rho(r')dr' = GM_{\text{int}}(r) \quad (3.6)$$

1. En effet, si la gravitation n'est pas distinguable d'un champ d'accélération, alors il existe autour de tout point des coordonnées accélérées telles que la gravitation est localement effacée (c'est le *principe d'effacement*). Dans ce système de coordonnées, la lumière est libérée de l'influence gravitationnelle et doit donc se propager en ligne droite. En revenant aux coordonnées initiales où la gravitation n'est pas effacée, on voit que la lumière doit avoir une trajectoire courbée en présence d'un champ gravitationnel. Voir aussi chapitres 6, 9 et 10

où $M_{\text{int}}(r)$ est la masse totale comprise entre $r = 0$ et r . Le champ gravitationnel intérieur (*i. e.* pour $r < R$) vaut donc $g(r) = \Phi'(r) = M_{\text{int}}(r)/r^2$ et sa forme dépend de la distribution $\rho(r)$. En revanche le champ extérieur a une forme simple. Puisque pour tout $r > R$, on a $M_{\text{int}}(r) = M$, où M est la masse totale du corps sphérique, le champ extérieur vaut simplement

$$g(r) = \Phi'(r) = GM/r^2 \quad (3.7)$$

et le potentiel vaut

$$\Phi = \frac{-GM}{r} + \Phi_{\infty} \quad (3.8)$$

On voit donc que le champ externe est identique à ce qu'on aurait trouvé en considérant que le corps de masse M était ponctuel : la répartition précise $\rho(r)$ de la masse n'influe pas sur le champ extérieur, pour peu que l'on soit en symétrie sphérique (c'est faux sinon).

3.4 Le mouvement autour d'une masse centrale

Cette section rappelle comment on obtient le mouvement des planètes à partir des formules ci-dessus. Cette section n'est pas complètement anodine, puisque l'on verra des généralisations de ces formules dans le cas du mouvement des planètes en relativité générale.

On se place dans le cas où la masse centrale M est bien plus lourde que la masse du satellite m , et l'on considère que le référentiel défini par la masse M est inertiel². La force gravitationnelle du corps M s'exerçant sur m étant une force centrale (dirigée vers M), on peut également montrer que le mouvement de m s'effectue nécessairement dans un plan. On choisit alors de travailler en coordonnées polaires (r, θ) dans ce plan, la masse M étant par définition au centre, en $r = 0$. Une formule standard donne alors l'accélération de la masse m dans ces coordonnées (un point dénote une dérivée par rapport au temps) :

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \mathbf{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) \mathbf{e}_{\theta} \quad (3.9)$$

2. Cela n'est pas tout à fait exact. Dans un espace-temps Newtonien ne contenant que ces deux masses, c'est le référentiel construit autour du barycentre de ces deux masses qui est inertiel. Cependant, si la masse centrale est bien plus lourde que la masse satellite $M/m \gg 1$, alors le barycentre se confond pratiquement avec le centre de M . Pour un traitement exact, voir le mouvement à deux corps en théorie de Newton – tous livres de cours ou références internet.

où \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ sont les vecteurs unitaires de la base polaire locale. Le point m est soumis à une force $\mathbf{F} = -GMm\mathbf{e}_r/r^2$. Reportant dans l'équation de Newton et projetant sur les vecteurs polaires, on trouve une première équation

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (3.10)$$

dont on déduit qu'il existe une constante C , dite *la constante des aires* (cf. les lois de Képler), telle que $C = r^2\dot{\theta} = cst$ (physiquement, cela correspond quasiment au moment cinétique J , défini par $J = mC = cst$). Cette propriété de conservation permet d'éliminer $\dot{\theta}$ dans l'autre équation :

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{C^2}{r^3} \quad (3.11)$$

Cette équation s'intègre en multipliant d'abord par r , et on trouve (multipliant par m à la fin)

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = \frac{GMm}{r} - \frac{mC^2}{2r^2} + cst = -V_{\text{eff}}(r) + E \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) \quad (3.13)$$

où $V_{\text{eff}}(r)$ est le potentiel effectif de la variable r . Cette équation a la forme standard de la conservation de l'énergie E d'un système mécanique, où l'énergie vaut l'énergie cinétique plus l'énergie potentielle effective $V_{\text{eff}}(r)$. Cf schéma en cours, et discussion sur les trois cas $E > 0$, $E = 0$, et $E < 0$.

On a donc réduit le problème à la résolution d'une équation différentielle à une seule variable. Afin de résoudre cette équation il est fort utile d'introduire un changement de variable $u = 1/r$, et u est considérée comme fonction de θ : $u(\theta(t)) = 1/r(\theta(t))$. On notera par un prime la dérivée par rapport à θ . En dérivant par rapport à t on obtient donc

$$-\frac{\dot{r}}{r^2} = u'\dot{\theta} \Rightarrow \dot{r} = -Cu' \quad (3.14)$$

puis, à nouveau,

$$\ddot{r} = -C^2u^2u'' \quad (3.15)$$

Ces équations portent le nom de *formules de Binet*. Elles permettent d'écrire l'équation dynamique devient simplement :

$$u'' + u = \frac{GM}{C^2} \quad (3.16)$$

qui a pour solution

$$u = \frac{GM}{C^2} + A \cos(\theta + \phi) \quad (3.17)$$

où A et ϕ sont des constantes d'intégration. Par un choix d'axe, on peut prendre $\phi = 0$. On reconnaît l'équation en coordonnées polaires d'une conique :

$$\boxed{r(\theta) = \frac{1}{K + A \cos(\theta)}} \quad (3.18)$$

et l'on peut finalement montrer (*cf.* cours) que les trajectoires sont respectivement hyperboliques, paraboliques, et elliptiques selon le signe de E , positif, nul, ou négatif, ainsi que discuté à l'aide du potentiel effectif (*cf.* schémas en cours).

Nous verrons plus tard que les orbites en relativité générale conservent globalement ce comportement (sous certaines conditions). Les mouvements sont en revanche un peu modifiés. En particulier on trouve des trajectoires quasi-elliptiques, où l'on montre que le grand axe tourne sur lui-même lentement. C'est la *précession du périhélie*, visible notamment sur l'orbite de Mercure. Il s'agit d'une des prédictions et d'un des succès de la relativité générale, car l'orbite de Mercure, non exactement elliptique, n'était pas comprise jusqu'à l'avènement de la relativité générale.

3.5 La rotation des galaxies spirales

On étudie ici un cas particulier des mouvement elliptiques : le mouvement circulaire. Dans ce cas on a $\dot{r} = 0$, et donc $C^2 = GM/r$. On note que la vitesse circulaire $v = r\dot{\theta}$, et donc que $C^2 = r^2v^2$. On en déduit la vitesse circulaire d'une masse m autour d'un objet central M :

$$\boxed{v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}} \quad (3.19)$$

Cette formule a été dérivée en utilisant que la masse M était ponctuelle. On peut cependant démontrer qu'elle reste valable du moment que la masse M comprise dans l'orbite r est à symétrie sphérique, *via* le théorème de Gauss et la formule de Poisson.

C'est l'application de cette simple formule sur la vitesse circulaire dans les galaxies qui a conduit au problème de la matière noire évoqué au chapitre 1. (Les étoiles ont en effet un mouvement quasiment circulaire dans les spirales,

ou en tout cas en première approximation). Les vitesses observées étant 2 à 3 fois plus grandes que celles prédites *via* cette formule et le contenu en matière visible, et du fait de la présence de la racine carrée, on voit qu'il faut environ de 4 à 9 fois plus de matière noire que de matière visible dans les galaxies spirales pour expliquer leurs courbes de rotation. Il n'aura pas échappé au lecteur cela dit, qu'une galaxie spirale n'est clairement pas à symétrie sphérique, et que la formule ci-dessus ne s'applique pas telle quelle. Cependant, la conclusion reste valable lorsque l'on fait des calculs plus exacts. Ici nous voulions simplement illustrer le problème de la dynamique galactique *via* quelques formules simples.

3.6 La cosmologie Newtonienne

La cosmologie Newtonienne n'a pas en soi d'histoire, puisque la cosmologie quantitative a été dès le départ une cosmologie relativiste fondée sur la relativité générale. On a cependant réalisé a posteriori qu'une grande partie de la cosmologie relativiste peut être dérivée à l'aide des équations de Newton. Nous voulons savoir ici ce que peut dire la théorie de Newton sur l'évolution d'un Univers infini et empli d'une matière de densité uniforme (*cf.* le principe cosmologique et les Univers homogènes et isotropes, voir chapitre 11).

3.6.1 Cinématique et loi de Hubble

Commençons par la cinématique. L'univers étant homogène et isotrope, il ne peut avoir de centre. Cela implique que le mouvement de la matière alentour doit apparaître le même pour tous les observateurs eux-mêmes liés à de la matière. Soit trois observateurs A, B et C, de trajectoires $\mathbf{x}_A(t)$, $\mathbf{x}_B(t)$ et $\mathbf{x}_C(t)$. Il est assez clair que le mouvement de la matière, du point de vue de A, ne peut être que radial afin d'assurer que à un instant ultérieur, la répartition de la matière, initialement homogène à l'instant t , le soit encore à l'instant $t + dt$. Cela implique que la vitesse de B par rapport à A doit s'écrire comme $\mathbf{v}_{B/A} = f(t, |\mathbf{AB}|)\mathbf{AB}$. La même loi doit s'appliquer pour le mouvement de C : $\mathbf{v}_{C/A} = f(t, |\mathbf{AC}|)\mathbf{AC}$. Changeons maintenant de point de vue et considérons ce que voit C. Le même raisonnement s'applique et on obtient en particulier $\mathbf{v}_{B/C} = f(t, |\mathbf{CB}|)\mathbf{CB}$. On a donc d'une part

$$\mathbf{v}_{B/A} = f(t, |\mathbf{AB}|)\mathbf{AB}$$

et d'autre part, comme

$$\mathbf{v}_{B/A} = \frac{d\mathbf{AB}}{dt} = \frac{d\mathbf{AC}}{dt} + \frac{d\mathbf{CB}}{dt} = \mathbf{v}_{C/A} + \mathbf{v}_{B/C}$$

on a, remplaçant et utilisant à nouveau la relation de Chasles :

$$f(t, |\mathbf{AB}|) (\mathbf{AC} + \mathbf{CB}) = f(t, |\mathbf{AC}|) \mathbf{AC} + f(t, |\mathbf{CB}|) \mathbf{CB}$$

dont on peut montrer que la seule solution est que f ne dépende que du temps. On a alors

$$\mathbf{v}_{B/A} = f(t) \mathbf{AB}$$

pour tous A et B . Notons maintenant H cette fonction f , et prenons la norme de cette équation. On obtient la *loi de Hubble*

$$\boxed{v = H(t)d} \quad (3.20)$$

donnant la *vitesse de récession* v d'un point éloigné d'une distance d . $H(t)$ s'appelle le *paramètre de Hubble*, variable dans le temps, à ne pas confondre avec la *constante de Hubble* H_0 qui est la valeur du paramètre de Hubble à l'instant d'aujourd'hui à $t = t_0$. La loi de Hubble est la seule loi cinématique compatible avec le haut degré de symétrie d'un Univers homogène et isotrope à tout instant. C'est la loi que l'on obtiendrait pour la vitesse relative de deux points marqués au crayon sur une toile élastique bidimensionnelle que l'on étendrait de façon homogène. C'est une analogie fort utile pour débiter en cosmologie. L'autre analogie standard est celle d'un ballon que l'on gonfle, des points dessinés au crayon sur le ballon marquant, par exemple, des galaxies. Dans ces deux cas, on voit que chaque observateur voit tous les autres points matériels s'éloigner de lui avec une vitesse proportionnelle à la distance. Chaque observateur a donc l'impression d'occuper une position privilégiée, en l'occurrence centrale, et pourtant cet Univers n'a pas de centre (précisément parce que tous les observateurs s'accordent sur ce comportement des masses).

3.6.2 Distance comobile et facteur d'échelle

On peut reprendre l'analogie du ballon. En deux dimensions, imaginons plutôt un cercle de rayon $a(t)$, et deux points A et B sur ce cercle. La distance entre A et B le long du cercle, vaut $r_{AB}(t) = \theta_{AB} a(t)$, où θ_{AB} est l'angle constant entre A et B relativement au centre du cercle. On observe que cette distance est le produit d'une quantité fixe dépendant de A et B , et

que l'on appellera *distance comobile*, par un facteur uniquement dépendant du temps : $a(t)$, que l'on appellera le *facteur d'échelle*. On note ensuite que la vitesse de récession entre A et B vaut

$$v = \theta_{AB} \dot{a}(t) = a(t) \theta_{AB} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = H(t) r_{AB}$$

et nous remarquons que cette forme est similaire à celle trouvée pour la loi de Hubble. Nous allons donc chercher si, dans le cas de l'Univers homogène, l'on peut décomposer la loi de Hubble sous la forme précédente, c'est-à-dire en faisant apparaître une distance comobile et un facteur d'échelle $a(t)$. À cette fin il suffit d'intégrer la loi de Hubble pour tout couple de points A et B :

$$\frac{dr_{AB}}{dt} = H(t) r_{AB}(t) \Rightarrow \frac{dr_{AB}}{r_{AB}} = H(t) dt \Rightarrow r_{AB} = \chi_{AB} \exp\left(\int H(t) dt\right)$$

On voit donc que la loi de Hubble implique l'existence d'une quantité fixe χ_{AB} homogène à une distance, la *distance comobile*, et d'un facteur d'échelle $a(t)$ tels que la distance physique entre A et B s'écrive

$$\boxed{r_{AB}(t) = a(t) \chi_{AB}} \quad (3.21)$$

avec $\ln a(t) = \int H(t) dt$, c'est-à-dire la relation suivante entre le paramètre de Hubble et le facteur d'échelle :

$$\boxed{H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}} \quad (3.22)$$

ainsi que la loi de Hubble :

$$\boxed{v_{AB} = H(t) r_{AB}} \quad (3.23)$$

3.6.3 Dynamique de l'expansion de l'Univers

La section précédente indique que l'évolution de l'Univers (*i. e.* l'évolution temporelle des distances entre les points) ne dépend que d'une seule fonction $a(t)$, le facteur d'échelle. Trouver la dynamique de l'Univers (Newtonien, mais cela sera également vrai en relativité générale) consiste donc essentiellement à trouver l'équation dynamique qui relie les dérivées de $a(t)$ au contenu en matière (respectivement au contenu en énergie-impulsion en relativité générale).

Pour ce faire on considère un point O et une sphère de rayon comobile χ , *i. e.* de rayon physique $r(t) = \chi a(t)$. Relativement à O l'Univers est à symétrie sphérique, et la densité de matière est homogène dans l'espace. Soit un élément de matière de masse m sur cette sphère. On peut alors montrer que la résultante des forces gravitationnelles dues à la matière extérieure s'annule. Ainsi tout se passe comme si la masse m n'était soumise qu'à la gravitation engendrée par la matière intérieure à la sphère, et il en résulte, *via* les formules du chapitre 2, que l'accélération du point m (qui vaut $\ddot{r}(t) = \chi \ddot{a}(t)$ le long du vecteur polaire), est donnée par :

$$\chi \ddot{a} = -\frac{GM_{\text{int}}(r)}{r^2} = \frac{4\pi G r^3 \rho(t)}{3r^2} = -\frac{4\pi G \chi}{3} a(t) \rho(t) \quad (3.24)$$

où $\rho(t)$ est la densité de matière dans l'Univers à l'instant t . Clairement, la quantité de matière étant conservée, il est nécessaire que cette densité décroisse lorsque l'Univers s'étend. On a donc

$$r(t)^3 \rho(t) = r(t_0)^3 \rho(t_0) \quad (3.25)$$

soit encore

$$\rho(t) = \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \rho_0 \quad (3.26)$$

où l'on note $\rho_0 = \rho(t_0)$ et $a_0 = a(t_0)$. Remplaçant dans l'équation dynamique, on trouve alors (noter que les distances comobiles χ disparaissent du calcul)

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G \rho_0 a_0^3}{3a^2} \quad (3.27)$$

Remarquons tout de suite qu'à moins d'avoir de la matière ayant une énergie négative³ ($\rho_0 < 0$), on a toujours $\ddot{a} < 0$, c'est-à-dire que l'Univers est toujours en train de décélérer du fait de la gravitation (s'il part d'une phase d'expansion initiale). S'il y a suffisamment de matière, alors clairement à un certain point la gravitation l'emportera sur l'expansion et l'Univers devra entrer dans une phase de contraction (scénario *Big Crunch*, voir plus bas).

Cette dernière équation admet pour intégrale première

$$\frac{\dot{a}^2}{2} = \frac{4\pi G \rho_0 a_0^3}{3a} + E \quad (3.28)$$

3. Ce paragraphe vaut pour la cosmologie Newtonienne seulement ! En RG il est possible d'avoir une expansion accélérée *sans* recourir à une énergie négative, mais par contre il faut un fluide ayant une *pression* négative et suffisamment grande.

avec E constante d'intégration. C'est une équation similaire à celle trouvée pour le mouvement à deux corps, E jouant le rôle de l'énergie totale, $\dot{a}^2/2$ celui de l'énergie cinétique, et le potentiel effectif vaut

$$V_{\text{eff}}(a) = -\frac{4\pi G\rho_0 a_0^3}{3a} \quad (3.29)$$

Il y a, là encore, trois cas dynamiques distincts possibles. Soit E est négatif, et on peut montrer (on le voit sur le graphe du potentiel effectif, *cf.* schéma en cours) qu'il existe une valeur maximale pour le facteur d'échelle. Cette solution (pour sa forme exacte il faut résoudre l'équation différentielle) est de type Big Bang – Big Crunch, où l'Univers commence à un certain moment avec une certaine densité initiale, et une expansion initiale, puis s'étend, atteint sa taille maximale, et se recontracte sous l'effet de la gravitation. On montre que $a(t)$ tend vers zéro en un temps fini, atteignant ainsi la singularité future (où clairement la description Newtonienne n'est pas valide).

Les deux cas $E = 0$ et $E > 0$ sont des solutions sans Big Crunch : l'Univers continue de s'étendre indéfiniment. Dans le cas $E = 0$ cependant, sa vitesse d'expansion \dot{a} tend vers 0 pour $t \rightarrow \infty$, tandis que dans le cas $E > 0$, $\dot{a} \rightarrow \text{cst} > 0$ pour $t \rightarrow \infty$.

Ces solutions continueront d'exister en relativité générale, pour peu que l'Univers soit uniquement rempli de matière sans pression (ou aussi de la *poussière* ou *dust*). La différence notable est qu'en RG la constante E s'identifiera de façon plus fondamentale à la courbure des sections spatiales⁴. La correspondance sera la suivante :

- $E < 0$: Univers fermé à courbure spatiale positive (*i. e.* sphérique), donc de taille fini et sans bords.
- $E = 0$ Univers plat (courbure spatiale nulle), infini
- $E > 0$ Univers ouvert à courbure spatiale négative (*i. e.* 3-géométrie en selle de cheval), infini.

On note en passant, et pour clore cette étude dynamique que l'on retrouve l'équation de Friedmann de la cosmologie relativiste, en divisant Eq. (3.28) par a^2 :

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3a^3} + \frac{E}{a^2} \quad (3.30)$$

4. Cela n'est vrai que pour un Univers contenant seulement de la matière. L'introduction d'une constante cosmologique brise la correspondance entre l'énergie totale (*i. e.* aussi la valeur de la densité de matière par rapport à la densité critique) et la courbure spatiale

c'est-à-dire, en utilisant Eq. (3.26) :

$$\boxed{H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{E}{a^2}} \quad (3.31)$$

Le cas limite $E = 0$ correspond donc à une densité spécifique, dite *densité critique* ρ_c , par

$$\boxed{\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}} \quad (3.32)$$

(Cette densité critique n'est pas constante mais dépend du temps *via* $H(t)$). Le destin de l'Univers apparait alors très simplement dans ce modèle Newtonien naïf. Il faut mesurer la constante de Hubble aujourd'hui à l'aide de la loi de Hubble, en déduire la densité critique, estimer la densité moyenne de l'Univers aujourd'hui, et comparer ces deux valeurs. Si la densité aujourd'hui est supérieure (respectivement inférieure) à la densité critique, alors l'Univers finira en Big Crunch (respectivement s'étendra pour toujours).

Ces idées ont prévalu jusqu'à encore assez récemment (et malgré la prise en compte du rôle du rayonnement électromagnétique sur la dynamique de l'Univers - rôle important aux époques primordiales mais négligeable de nos jours). Cependant la découverte récente de l'expansion accélérée de l'Univers a complètement bouleversé cette discussion. La cosmologie moderne (qui commence avec les théories de l'inflation (≥ 1980), avec la cosmologie observationnelle proprement dite (≥ 1990), le problème de la constante cosmologique (≥ 1990), les problèmes de la matière noire et de l'énergie noire ($\geq 1990/2000$)) admet dorénavant des descriptions bien plus variées sur les destins possible de notre Univers. En particulier l'introduction d'une constante cosmologique brise la correspondance entre le rapport de la densité à la densité critique et la courbure spatiale ainsi qu'avec l'évolution future de l'Univers. Voir Fig. 11.1 au chapitre 11.

3.6.4 Limitations de la cosmologie Newtonienne

- Ne permet pas de prendre en compte la courbure de l'espace de façon fondamentale.
- Théorie non relativiste, or la pression d'un fluide contribue à son énergie totale, et la pression doit donc graviter, en vertu de l'équivalence masse-énergie ($E = mc^2$). Autrement dit la pression doit entrer dans l'équation de Friedmann complète.

Chapitre 4

Electromagnétisme et covariance galiléenne

« La théorie de la relativité doit son origine aux équations de Maxwell sur le champ électromagnétique » — Albert Einstein

Ce chapitre ne sera pas discuté en cours, mais est inclus en guise de complément. On montre que les lois de l'électromagnétisme ne sont pas compatibles avec la transformation de Galilée.

4.1 Électromagnétisme et lumière

On doit à Maxwell (1831-1879) une avancée importante dans la compréhension des phénomènes magnétiques d'une part, et de l'électricité d'autre part. En effet celui ci comprend qu'il ne s'agit que de deux aspects d'un seul et même phénomène, l'électromagnétisme. En découleront d'une part les équations correctes pour la génération et la propagation des champs électriques et magnétiques, et d'autre part une véritable théorie ondulatoire de la lumière, où celle-ci apparaît en fait n'être qu'une onde de (*i. e.* une vibration des) champs électriques et magnétiques qui se propagent dans l'espace. La longueur d'onde ou la fréquence de cette onde parcourt le spectre électromagnétique, depuis les très grandes longueurs d'ondes (hertziennes, radio), jusqu'aux rayons gamma, en passant par les micro-ondes, l'infrarouge, la lumière visible, l'UV et les rayons X.

Remarque : Ce chapitre ne fait qu'amener la problématique qui donne naissance à la relativité restreinte d'Einstein. Nous ne démontrons donc pas

toutes les formules.

Équations de Maxwell. Ces équations décrivent la dynamique du champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ et magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$, étant donnée une densité de charges électriques ρ et un courant de charges \mathbf{j} . On a :

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.1)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \quad (4.2)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.3)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \quad (4.4)$$

où ϵ_0 et μ_0 sont deux constantes reliées à la vitesse de la lumière dans le vide, c , par $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$. Puisque $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, il existe par théorème un champ de vecteur, nommé *potentiel-vecteur électromagnétique* \mathbf{A} , tel que $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$. Reportant dans la troisième équation, cela permet de montrer que le champ électrique peut s'écrire comme

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.5)$$

où V s'appelle le potentiel électrique. On peut alors démontrer (toute cette partie nécessite un formulaire d'analyse vectorielle !) que les deux potentiels V et \mathbf{A} , à partir desquels on peut calculer les champs électriques et magnétiques, satisfont *l'équation de d'Alembert* :

$$\square V \equiv -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.6)$$

et

$$\square\mathbf{A} \equiv -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial z^2} = -\mu_0\mathbf{j} \quad (4.7)$$

L'opérateur \square s'appelle le d'Alembertien.

Ondes électromagnétiques. Dans le vide ($\rho = 0$ et $\mathbf{j} = 0$), on a simplement $\square V = 0$ et $\square\mathbf{A} = 0$. Il n'est pas difficile de démontrer que la solution générale de l'équation pour V , par exemple, est la suivante :

$$V(t, x, y, z) = f(\omega t \pm \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \quad (4.8)$$

pour toute fonction f , pourvu qu'on ait la relation $\omega^2 = \mathbf{k}^2 c^2$. Pour clarifier, choisissons le vecteur \mathbf{k} selon la direction x . Alors on trouve une solution de la forme :

$$V(t, x, y, z) = f(\omega t \pm kx) \quad (4.9)$$

Dans le cas où $f = \cos$, il s'agit d'une *onde électromagnétique monochromatique* se déplaçant à la vitesse c dans le sens des x croissants ou décroissants (selon, respectivement, le signe de \pm). Sa pulsation est ω , *i. e.* sa fréquence est ν avec $\omega = 2\pi\nu$, et sa longueur d'onde est $\lambda = 2\pi/k$. Entre fréquence et longueur d'onde, on a la relation $\lambda = c/\nu$.

En résolvant de même pour \mathbf{A} , et en reportant dans l'expression pour le champ électrique et magnétique, nous trouverions l'expression suivante pour l'onde plane monochromatique (*i. e.* une onde lumineuse) se déplaçant vers les x croissants :

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega(t - x/c))\mathbf{e}_z \quad (4.10)$$

$$\mathbf{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega(t - x/c))\mathbf{e}_y \quad (4.11)$$

4.2 La covariance galiléenne en difficulté

L'équation de d'Alembert est en conflit immédiat avec la covariance galiléenne. En effet, rappelons nous que le principe de relativité galiléenne stipule que les lois de la physique doivent garder leurs formes d'un référentiel inertiel à un autre. Or, avec la théorie de Newton, on a vu la forme précise des changements de coordonnées entre deux référentiels inertiels. Pour simplifier choisissons une transformation particulière (deux référentiels en translation relative uniforme selon l'axe x et qui coïncident à $t = 0$)

$$t' = t \quad (4.12)$$

$$x' = x + vt \quad (4.13)$$

$$y' = y \quad (4.14)$$

$$z' = z \quad (4.15)$$

Si l'électromagnétisme était covariant sous les transformées de Galilée, on aurait :

$$\square V(t, x, y, z) = 0 \Rightarrow \square' V(t', x', y', z') = 0 \quad (4.16)$$

Ici on peut se restreindre aux coordonnées t et x vu le choix de référentiels fait. Considérons V comme fonction des coordonnées primées, elles-mêmes

fonctions des coordonnées non primées : $V(t'(t), x'(t, x))$, et dérivons par rapport à t . On a

$$\frac{\partial V(t'(t), x'(t, x))}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial V(t', x')}{\partial t'} + \frac{\partial x'(t)}{\partial t} \frac{\partial V(t', x')}{\partial x'} = \frac{\partial V(t', x')}{\partial t'} + v \frac{\partial V(t', x')}{\partial x'} \quad (4.17)$$

On peut dériver à nouveau et trouver

$$\frac{\partial^2 V(t'(t), x'(t, x))}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V(t', x')}{\partial t'^2} + 2v \frac{\partial^2 V(t', x')}{\partial x' \partial t'} + v^2 \frac{\partial^2 V(t', x')}{\partial x'^2} \quad (4.18)$$

Les dérivées partielles en x ou x' n'apportent rien en revanche, de sorte que l'on montre que $\square V(t, x)$ ne devient *pas* $\square' V(t', x')$, mais $\square' V(t', x') + 2v \partial_{t'x'} V(t', x') + v^2 \partial_{x'x'} V(t', x')$. Cela démontre que l'équation de d'Alembert, et donc toute la théorie de Maxwell, ne sont pas covariantes sous les transformations galiléennes.

Une façon plus simple et plus physique de voir cela est la suivante. En admettant que les équations de Maxwell soient correctes, et que le principe de relativité soit vrai, alors il est nécessaire que les lois de l'électromagnétisme gardent la même forme dans un changement de référentiel inertiel. Cela signifie, comme on l'a vu ci-dessus, que la loi de transformation de coordonnées ne peut pas être celle de Galilée. Mais cela signifierait aussi que l'onde plane (la lumière), aurait toujours la forme trouvée ci-dessus dans tous référentiels. Par conséquent, si les équations de Maxwell et le principe de relativité sont corrects, alors il faut que la lumière (dans le vide) se déplace à la vitesse c dans tous les référentiels ! Cela est en contradiction manifeste avec la loi d'addition des vitesses¹.

A la fin du 19ème siècle, et pour ces raisons, il y avait un fort doute sur la validité générale des équations de Maxwell. Cependant l'expérience (de Michelson-Morley) est venue appuyer cette conclusion en montrant que le mouvement de la source ou du récepteur ne semblait pas influencer sur la vitesse de propagation des rayons lumineux. Dès lors il fut assez naturel d'imaginer que les rayons lumineux étaient des ondes se propageant dans un milieu immatériel et déconnecté du monde des corps massifs. On l'appela l'éther, et il était tentant d'identifier cet éther avec l'espace absolu de Newton. Le problème majeur de cette approche est la contradiction entre l'invariance de la vitesse de la lumière et la formule d'additivité des vitesses. La relativité restreinte lèvera ce paradoxe.

1. On démontre de façon immédiate, avec les transformations de Galilée, que si un corps A se déplace à la vitesse v'_A par rapport à un référentiel \mathcal{R}' , lui même se déplaçant à la vitesse v par rapport à un référentiel \mathcal{R} , alors la vitesse de A par rapport à \mathcal{R} vaut $v_A = v + v'_A$

Chapitre 5

La théorie de la relativité restreinte

Quoique relativement dépourvus de formules mathématiques, les sujets traités jusqu'ici restent un peu délicats au niveau des concepts. La meilleure preuve en est sans doute qu'il a fallu trois siècles d'efforts et de discussions acharnées, depuis Galilée, pour arriver à la théorie d'Einstein. Commençons donc par un bilan des chapitres précédents.

- Est supposé le principe d'inertie, à savoir l'existence de référentiels privilégiés, dits référentiels inertiels, qui sont tous en translation uniforme les uns par rapport aux autres et dans lesquels la première loi de Newton est vraie¹.
- Est supposé le principe de relativité qui affirme que la physique doit être identique dans tous les référentiels inertiels. On peut l'énoncer de façon équivalente sous la forme d'un principe de covariance, c'est-à-dire en requérant que toutes les équations de la physique gardent la même forme sous l'action d'un groupe de transformations de coordonnées spécifique². Jusqu'ici nous n'avons pas considéré le groupe de transformations de coordonnées le plus général, mais le groupe restreint des transformations de coordonnées entre référentiels inertiels définis comme étant ceux dans lesquels la première loi de Newton est vraie³. En théorie de Galilée/Newton,

1. La relativité générale reviendra sur la question naturelle que l'on se pose : pourquoi y a-t-il des observateurs privilégiés ? D'ailleurs, en RG, il n'est plus vrai que les référentiels inertiels sont en translation uniforme les uns par rapport aux autres.

2. On donnera au chapitre 7 une caractérisation plus précise du fait que les équations « gardent la même forme » *via* la notion de tenseur et d'équations tensorielles.

3. C'est cette restriction des changements de coordonnées qui a conduit à l'appellation « relativité restreinte » versus « relativité générale ».

il s'agit des transformations de Galilée, dont une conséquence notable est la loi d'addition des vitesses. La théorie dynamique de Newton est compatible avec ces transformations (*i. e.* elle est covariante de Galilée).

- Est démontré théoriquement que les équations de l'électromagnétisme (et donc de la lumière), ne sont pas compatibles avec la transformation de Galilée.
- Est démontré expérimentalement que la lumière se déplace dans le vide à vitesse finie, $c \approx 3 \times 10^8 m.s^{-1}$, et que cette vitesse est invariante dans tous changements de référentiels inertiels.

Le point le plus frappant est sans doute la contradiction manifeste entre l'invariance de la vitesse de la lumière par changement de référentiel, et la formule d'addition des vitesses qui apparaît pourtant comme une évidence de « bon sens ».

Si l'on prend au sérieux le résultat expérimental sur l'invariance de la vitesse de la lumière alors il devient nécessaire de modifier la loi d'addition des vitesses. Or la loi d'addition des vitesses provient directement de la transformation de Galilée, qu'il faut donc également modifier. La transformation de Galilée, quant à elle, est compatible avec la loi de Newton, qu'il faudra donc également modifier.

C'est le chemin qu'a emprunté Einstein en 1905 (quoique selon un autre raisonnement que nous allons voir ci-dessous). Sa théorie permet donc de :

1. Maintenir le principe de relativité
2. Maintenir l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide

Pour ce faire, il faut définir une nouvelle covariance des équations de la physique (ce sera la *covariance de Lorentz*).

3. Définir une généralisation des lois dynamiques de Newton admettant pour groupe de covariance le groupe de Lorentz. Cela aura pour conséquence inattendue la célèbre formule $E = mc^2$.

5.1 Relativité de la simultanéité

Considérons un instant la relativité galiléenne et sa loi de transformation des coordonnées. Soit E_1 et E_2 deux événements (*i. e.* deux points de l'espace-temps Newtonien). Soit (t_1, x_1, y_1, z_1) et (t_2, x_2, y_2, z_2) les coordonnées de ces événements dans un référentiel \mathcal{R} . Il est naturel de dire que deux événements

sont *simultanés* si et seulement si $t_1 = t_2$. Sont-ils encore simultanés dans un autre référentiel \mathcal{R}' ? Oui, car on a vu que la loi de transformation des coordonnées est $t'_1 = t_1 = t_2 = t'_2$. Ainsi, dans l'espace-temps de Newton, la simultanéité entre deux événements est une notion absolue (*i. e.* que tous les observateurs s'accordent sur le fait que les deux événements sont simultanés).

Einstein fait la remarque cruciale que la simultanéité doit devenir relative⁴, c'est-à-dire que deux événements simultanés pour un observateur donné ne seront pas nécessairement simultanés pour un autre observateur, si l'on tient compte du fait que la vitesse de la lumière est finie, et non infinie. Pour le comprendre, il faut considérer la définition *opérationnelle* de la simultanéité. Comment, concrètement, décide-t-on que deux événements qui se produisent en deux endroits différents, se produisent en même temps?

Cette question n'est pas triviale. D'un point de vue opérationnel, il faut a minima que de l'information soit transmise depuis les événements vers l'observateur. Einstein considère alors la lumière comme véhicule naturel de cette information. Un diagramme d'espace-temps (*cf.* schéma en cours) nous donne des indications. On peut par exemple décider que deux événements sont simultanés si la lumière émise depuis ces deux événements arrive en même temps au point équidistant entre ces deux événements. Soit maintenant un autre observateur (=référentiel) qui coïncide avec le premier à $t = 0$ (le moment où sont émis les rayons lumineux), se déplaçant vers les x croissants à vitesse constante. Du fait du postulat de l'invariance de la vitesse de la lumière, la lumière se propage encore à c dans ce référentiel en mouvement. Par conséquent le rayon émis par l'événement à gauche (*cf.* diagramme) doit arriver *après* celui émis par l'événement à droite! Ainsi pour cet observateur en mouvement, les deux événements *ne sont plus simultanés*.

Cela démontre que la formule galiléenne $t' = t$ est inexacte. Pour donner un sens à cette formule, il faudrait être capable de donner un sens *empirique* à une simultanéité absolue. Or l'argument précédant montre bien qu'une telle simultanéité absolue requiert l'existence de signaux physiques se déplaçant à une vitesse *infinie*. Nous retrouvons donc là un problème bien connu de la mécanique Newtonienne, dont nous n'avions pas parlé jusqu'à présent mais qui a fait couler beaucoup d'encre au cours des siècles, à savoir que la mécanique Newtonienne autorise les interactions à distance et instantanées (un exemple en est la gravitation Newtonienne), ce qui ne semble pas naturel (et de fait, ne l'est pas).

Einstein suppose alors que de telles interactions n'existent pas, et qu'il existe

4. Il écrira plus tard qu'une fois avoir compris la relativité de la simultanéité, il ne lui a fallu plus que cinq semaines pour achever la théorie de la relativité restreinte.

une limite supérieure à la vitesse de toute propagation (qui n'a pas de raisons *a priori* de coïncider avec la vitesse de la lumière, mais il se trouve que c'est le cas). Il est alors nécessaire de modifier la loi $t = t'$. C'est cette modification qui va permettre de résoudre le problème de la formule d'addition des vitesses et sa contradiction avec le fait que la lumière se propage à c dans tous les référentiels.

5.2 Les transformations de Lorentz

Ayant maintenant à l'esprit que la loi de changement de coordonnées ne peut contenir la formule $t' = t$, nous sommes en position d'obtenir la loi correcte, que l'on appelle *la transformation de Lorentz*. La démonstration rigoureuse est plutôt longue (voir par exemple [1]), aussi nous emprunterons ici quelques raccourcis sans conséquences. Il y a plusieurs façons d'arriver aux transformations de coordonnées d'espace-temps (*i. e.* de changement de référentiels) qui laissent invariante la vitesse de la lumière. Considérons la suivante.

Soit un référentiel \mathcal{R} , de coordonnées (t, x, y, z) . Imaginons qu'à $t = 0$, depuis l'origine du référentiel ($x = y = z = 0$), on émet pendant un instant très court de la lumière dans toutes les directions (*i. e.* on allume et on éteint une lampe). La lumière se propageant à la vitesse c , au bout d'un temps t la lumière sera répartie sur une sphère de rayon $R = ct$. L'équation de cette sphère, dans le référentiel \mathcal{R} , est

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (5.1)$$

Soit maintenant un autre référentiel \mathcal{R}' , se déplaçant à la vitesse v par rapport à \mathcal{R} , et mettons, dans la direction de l'axe x vers les x croissants. On choisit \mathcal{R}' de telle sorte que les deux référentiels coïncident à $t = 0$. Pour un observateur dans \mathcal{R}' , la lumière se déplace encore à vitesse c dans toutes les directions, de sorte que au bout d'un temps t' , la lumière se répartit sur une sphère d'équation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (5.2)$$

Nous avons donc là une description dans deux jeux de coordonnées différents d'un seul et même objet : la sphère de lumière à un moment donné. Il est par conséquent nécessaire qu'un point P donné quelconque atteint par cette sphère ait à la fois les coordonnées (t, x, y, z) telles que $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ dans \mathcal{R} , et les coordonnées (t', x', y', z') telles que $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$ dans \mathcal{R}' . En particulier on déduit une relation entre les coordonnées primées et

non primées :

$$-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0 \quad (5.3)$$

[Le lecteur vérifiera sans peine que la transformation de Galilée ne satisfait pas cette loi]. On cherche une solution linéaire de la forme $t' = At + Bx$ et $x' = Dt + Ex$. Le second repère se déplaçant le long de l'axe x , il est assez naturel⁵ de chercher une solution telle que $y' = y$ et $z' = z$. On note que l'origine du repère \mathcal{R}' est définie à la fois par $x' = 0$ et par $x = vt$ dans le référentiel \mathcal{R} . Ainsi on obtient donc $0 = (D + Ev)t$ et donc $D = -Ev$. De même l'origine de \mathcal{R} a pour équation $x = 0$ et pour équation $x' = -vt'$. Reportant, on trouve alors $D = -Av$ et donc aussi $A = E$. Nous avons donc

$$t' = At + Bx \quad (5.4)$$

$$x' = A(x - vt) \quad (5.5)$$

et $y' = y$, $z' = z$ Reportant dans la relation trouvée plus haut, on trouve

$$-c^2t^2 + x^2 = -c^2(At + Bx)^2 + A^2(x - vt)^2$$

et cette relation doit valoir pour tout (t, x) . En particulier si on choisit $x = 0$, on obtient

$$-c^2t^2 = -c^2A^2t^2 + A^2v^2t^2$$

que l'on résout facilement avec

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Cette quantité est si importante en relativité restreinte qu'on lui a donné un nom : on l'appelle *le facteur de Lorentz*, et on le note γ .

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (5.6)$$

Par ailleurs on notera aussi la vitesse ramenée à la vitesse de la lumière par la lettre β :

$$\boxed{\beta = v/c} \quad (5.7)$$

5. Il est possible d'être plus précis que cela : on peut démontrer que si l'espace-temps est homogène et isotrope, alors la transformation de coordonnées est nécessairement linéaire ; on peut aussi démontrer que nécessairement $y' = y$ et $z' = z$. Mais la démonstration devient alors assez longue.

Ainsi,

$$\boxed{\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}} \quad (5.8)$$

En posant ensuite $x = 0$, on résout pour B et on trouve $B = \pm\gamma\beta/c$. Pour fixer ce signe, un peu de travail supplémentaire est nécessaire. Collectant les résultats précédents, nous avons :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \pm\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Nous aurions pu raisonner à l'envers, et trouver les coordonnées de ct, x , en fonction des coordonnées primées, en notant que \mathcal{R} se déplace à la vitesse $-v$ par rapport à \mathcal{R}' . On aurait alors trouvé :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \mp\gamma\beta \\ +\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

En combinant les Eqs. (5.9) et (5.10), (le faire), on trouve que le signe moins doit être retenu. La loi de changement de coordonnées (le long de x , pour \mathcal{R}' vers les x croissants) qui laissent invariant la vitesse de la lumière c est donc, finalement :

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ce sont les transformations de Lorentz. La transformation de Lorentz inverse, donnant (ct, x, y, z) en fonction des coordonnées primées s'obtient simplement en changeant le signe $\beta \rightarrow -\beta$ (γ ne change pas de signe dans cette opération).

5.3 Addition des vitesses en relativité restreinte

Soit \mathcal{R}' se déplaçant le long de x à la vitesse u par rapport à \mathcal{R} . Soit un mobile A se déplaçant à vitesse v'_A par rapport à \mathcal{R}' . Quelle est sa vitesse v_A par rapport à \mathcal{R} ?

L'équation de la trajectoire du mobile A dans \mathcal{R}' est $x'_A = v'_A t'$. La transformation de Lorentz inverse (d'où le signe + ci-dessous) de Eq. (5.11) donne

$$\frac{x_A}{t_A} = \frac{\gamma(x'_A + ut')}{\gamma\left(t' + \frac{ux'_A}{c^2}\right)}$$

Utilisant $x'_A = v'_A t'$, on trouve donc

$$v_A = \frac{u + v'_A}{1 + \frac{uv'_A}{c^2}} \quad (5.12)$$

On note que cette équation se réduit bien à la formule Galiléenne $v_A = u + v'_A$ dans la limite non-relativiste $c \rightarrow \infty$. Par ailleurs on note qu'elle prédit aussi l'invariance de la vitesse de la lumière. En effet si $v'_A = c$, alors on trouve, quel que soit u , $v_A = c$. Ainsi est résolu le conflit entre la covariance galiléenne et l'invariance de la vitesse de la lumière : la covariance galiléenne n'est qu'une symétrie approchée de la nature, valable uniquement dans le cas où les vitesses en jeu sont non relativistes. Dans le cas général, il faut en fait considérer des équations covariantes de Lorentz, et non covariante de Galilée. Nous verrons plus bas comment cela modifie la seconde loi de Newton.

5.4 L'espace-temps devient relatif

5.4.1 Durées et distances

Dans les ouvrages de vulgarisation (et même dans les références académiques), on trouve souvent écrit que, avec la relativité restreinte, l'espace et le temps deviennent relatifs (parce que les transformations de Lorentz mélangent les coordonnées d'espace et de temps). Cette affirmation est plutôt vague et prête à confusion. Un véritable « drame » de la physique moderne est de systématiquement parler du temps, alors que l'on parle en fait (de manière sous-entendue) de *mesures du temps*, c'est à dire de *durées*. En effet, aucun appareil de mesure ne peut indiquer la valeur de la coordonnée t d'un événement (on peut toujours choisir que $t = 0$!), en revanche une horloge peut servir à mesurer la durée qui s'écoule entre deux événements, c'est-à-dire l'intervalle de temps les séparant. De même, il faut parler de distances spatiales entre des événements.

Lorsque l'on affirme qu'en relativité restreinte l'espace-temps devient relatif, il faut en fait comprendre le fait suivant : la durée séparant deux événements

donnés *dépend* de l'observateur (*i. e.* du référentiel), et de même la distance séparant deux événements. Nous allons le démontrer ci-dessous. Avant cela, il faut bien comprendre qu'il s'agit d'une véritable révolution pour la physique moderne. Selon l'état de mouvement, un phénomène peut être perçu comme durant plus ou moins longtemps ! On parle de *dilatation du temps*.

En théorie Newtonienne, en revanche, durées et distances sont absolues. En effet la durée séparant deux événements t_1 et t_2 vaut $\Delta t = t_2 - t_1$, et, puisque $t' = t$, clairement, $\Delta t' = \Delta t$. On dit que le temps Newtonien est *absolu*. De même, la distance d entre deux événements, vaut, on l'a vu (chp. 2.1) $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, et il est aisé de démontrer que $d' = d$. L'espace est lui aussi absolu. Cela n'est plus vrai en relativité restreinte, comme le montre l'application des transformations de Lorentz.

5.4.2 Dilatation du temps et rythme des horloges

Oublions (sans perte de généralité) les coordonnées y et z et travaillons sur les coordonnées t, x . Soit avec un référentiel \mathcal{R}' en mouvement par rapport à \mathcal{R} à la vitesse v vers les x croissants. Considérons deux événements E_1 et E_2 de coordonnées $t_1 = 0, x_1 = 0$ et $t_2 = T, x_2 = 0$. Pour l'observateur lié au référentiel \mathcal{R} , la durée séparant ces deux événements vaut donc $\Delta t = t_2 - t_1 = T$.

Appliquons maintenant la transformation de Lorentz afin de déterminer les coordonnées primées des événements E_1 et E_2 . On trouve sans peine $t'_1 = 0$ et $x'_1 = 0$, et puis $t'_2 = \gamma T$ et $x'_2 = -\gamma\beta cT$. Ainsi, pour l'observateur lié au référentiel \mathcal{R}' , la durée séparant les deux événements vaut $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma T$. Notons que γ est nécessairement plus grand que 1 (voir sa définition), de sorte que

$$\Delta t' = \gamma \Delta t > \Delta t \quad (5.13)$$

Cette formule, valable pour toute vitesse v , indique que *la durée mesurée entre deux événements dans tout référentiel est toujours plus grande que la durée mesurée dans le référentiel où ces deux événements se produisent au même point*. On appelle cet effet la *dilatation du temps*. On appelle *temps propre* la durée entre deux événements se produisant au même point d'espace (ici Δt). Le temps propre (*i. e.* la durée propre) est notée en général par la lettre τ (*i. e.* $\Delta\tau$). La formule précédente s'écrit donc

$$\Delta t' = \gamma \Delta\tau \quad (5.14)$$

Interprétons cette formule en termes de mesures de durées à l'aide d'horloges. Une horloge a une certaine période *propre* qui vaut n secondes. Soit une telle

horloge associée à l'observateur \mathcal{R} . Entre deux « tics » de l'horloge, il s'écoule, selon \mathcal{R} , n secondes. Selon \mathcal{R}' , en revanche, il s'écoule $n' = \gamma n > n$ secondes. La période de l'horloge de \mathcal{R} , du point de vue de \mathcal{R}' , est donc augmentée d'un facteur γ , et inversement, la fréquence de l'horloge est diminuée d'un facteur $1/\gamma$. L'observateur \mathcal{R}' perçoit donc que l'horloge de \mathcal{R} bat plus lentement que ce qu'elle devrait⁶. Mais, toujours du point de vue de \mathcal{R}' , c'est le référentiel \mathcal{R} qui est en mouvement. Ainsi on arrive à la conclusion que, dans tout référentiel en mouvement (par rapport à un référentiel donné), *les horloges ralentissent*, ou, pour ainsi dire, que *le temps s'écoule plus lentement*.

Considérons à titre d'exemple le voyage spatial. Un vaisseau se rend depuis la Terre jusqu'à l'autre bout de la galaxie, et parcourt ainsi, disons, 100 000 années-lumière. Supposons que le vaisseau se déplace à une vitesse très proche de celle de la lumière (par rapport à la Terre). Ainsi, pour l'observateur terrestre, le voyage dure environ $T = 100000$ ans. Quelle est la durée du voyage pour le passager ? Cette durée est la durée propre pour le voyageur. Cette durée propre est celle mesurée par l'horloge de bord, car dans le référentiel du vaisseau, l'horloge est fixe. Il s'agit donc bien d'une durée propre que l'on note τ . La durée mesurée par l'observateur terrestre est reliée à cette durée propre *via* la formule ci-dessus Eq. (5.14). Ainsi, on a $T = \gamma\tau$. Si le facteur γ est suffisamment grand (par exemple $\gamma = 5000$, c'est-à-dire si le vaisseau se déplace à une vitesse très proche de celle de la lumière), alors, pour le voyageur, le voyage ne dure que $\tau = T/\gamma \approx 20$ ans. Il est donc possible de traverser la galaxie en quelques années seulement (pour le voyageur) ! La relativité restreinte rend donc plausible le voyage interstellaire. En revanche, il nous est tout à fait impossible à l'heure actuelle de concevoir des propulseurs qui permettraient à un tel vaisseau d'atteindre des vitesses aussi grandes.

5.4.3 Contraction des longueurs

Montrons maintenant qu'une règle se déplaçant par rapport à \mathcal{R} apparaît contractée. Soit une règle au repos dans le référentiel \mathcal{R}' : les deux extrémités sont situées à $x'_1 = 0$ et $x'_2 = L_0$. On appelle L_0 la longueur propre de la règle (dans le référentiel où elle est immobile). Comment est mesurée cette longueur dans \mathcal{R} , alors que la règle est en mouvement ? Une façon de faire est de prendre une « photographie » de la règle en mouvement, et d'en mesurer la

6. Par cela on entend que l'horloge de \mathcal{R} bat plus lentement qu'une horloge identique emportée par \mathcal{R}'

longueur⁷. Cela signifie ici que pour mesurer cette longueur, il faut mesurer la distance séparant les deux extrémités à un instant donné, donc il faut que $\Delta t = 0$. La loi de Lorentz nous donne $\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t)$. Avec $\Delta x' = L_0$, $\Delta t = 0$, et $\Delta x = L$, on a

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \quad (5.15)$$

La longueur de la règle en mouvement est donc plus courte d'un facteur $1/\gamma$.

5.5 Géométrie de la relativité restreinte : l'espace temps de Minkowski

En première lecture on peut omettre la section 5.5.3 qui est plus technique.

5.5.1 Distance pseudo-euclidienne et métrique

La première question (géométrique) qui vient à l'esprit est de savoir si l'on a encore une notion de distance en relativité restreinte. Une bonne notion de distance serait une distance qui soit invariante, *i. e.* sur laquelle tous les observateurs s'accordent. Or on a vu que ni la durée ni la longueur ne sont de tels invariants (dilatation du temps, contraction des longueurs). En revanche, on peut montrer que la combinaison

$$s^2 = -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad (5.16)$$

pour deux événements E_1 et E_2 de coordonnées (t_1, \mathbf{x}_1) et (t_2, \mathbf{x}_2) est une quantité invariante sous les transformations de Lorentz. [On l'a vu et on l'a déjà utilisé dans le cas où $s^2 = 0$, mais cela est vrai aussi pour toutes valeurs de s^2]. On nomme cette quantité *l'intervalle*. C'est un bon candidat pour une notion de « distance » dans l'espace-temps, hormis, bien sûr, que l'intervalle n'est pas défini positif. On dit que l'intervalle est :

- De genre espace si $s^2 > 0$ (*spacelike*)
- De genre lumière si $s^2 = 0$ (*lightlike* ou *null*)
- De genre temps si $s^2 < 0$ (*timelike*)

7. C'est-à-dire que dans \mathcal{R} , nous avons deux observateurs séparés d'une distance L , qui simultanément sont situés en face des deux extrémités de la règle en mouvement.

Noter que le carré est simplement une notation d'usage. De façon différentielle, l'intervalle élémentaire vaut

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2 \quad (5.17)$$

L'espace-temps de la relativité restreinte (ou de Minkowski) est toujours un espace vectoriel. On peut donc poser quatre vecteurs de base ($\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) et définir un « produit scalaire » (entre guillemets car il est non défini positif) tel que⁸

$$\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = -1 \quad \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_i = 0 \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

On peut alors former la matrice de ces produits scalaires (comparer au cas Newtonien en Section 2.1!)

$$\eta_{\mu\nu} = [\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que l'on appellera la *métrique* de l'espace temps de Minkowski. Ici nous rencontrons une notation qui sera systématique dans la suite : les indices grecs tels que μ prennent les valeurs 0, 1, 2, ou 3 ; les indices latins, comme i , ne prennent pour valeurs que 1, 2, 3. La valeur 0 est réservée à la composante temporelle, les valeurs i aux composantes spatiales. Ainsi la métrique est un objet $\eta_{\mu\nu}$ à 16 composantes, que l'on peut en l'occurrence ranger dans une matrice symétrique réelle.

La différence essentielle avec le cas Newtonien est le signe « moins » pour le produit $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = -1$, qui singularise la dimension temporelle par rapport aux dimensions (spatiales). La métrique comprenant ce signe négatif, on dit qu'elle est de signature Lorentzienne ou encore hyperbolique (un signe moins, $d - 1$ signes plus, où $d = 4$ est la dimension de l'espace-temps, par opposition à une signature euclidienne, qui ne comporterait que des signes plus).

C'est la signature particulière de cette métrique qui explique la notation suivante pour l'espace de Minkowski : $\mathbb{R}^{3,1}$. En termes strictement mathématique, l'espace de Minkowski n'est rien d'autre que l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 sur \mathbb{R} muni d'une forme bilinéaire symétrique et non-dégénérée, dont la forme quadratique associée est de signature (1, 3) (voir cours d'algèbre bilinéaire).

8. La bonne notion mathématique ici n'est pas celle du produit scalaire, car celui-ci est par définition défini positif. Il faut plutôt parler d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. Par abus de langage on continuera à parler de produit scalaire dans la suite.

Remarque : A partir de cette section, et dans toute la suite de ce cours, nous choisirons la signature $(-, +, +, +)$ pour la métrique. Un autre choix, tout à fait équivalent, serait de considérer $(+, -, -, -)$. Les physiciens travaillant en gravitation privilégient en général la première, les physiciens des particules la seconde. Il faut toujours faire attention aux conventions utilisées par les auteurs, puisque nombre de formules changent de signe d'un ouvrage à l'autre, selon la convention utilisée.

5.5.2 Vecteurs et notations quadri dimensionnelles

Soit un système de coordonnées (SC) cartésiennes dans l'espace de Minkowski. Soit M un point de coordonnées (t, x, y, z) . Le vecteur position \mathbf{OM} s'écrit, dans la base canonique \mathbf{e}_μ :

$$\mathbf{OM} = \sum_{\mu=0}^{\mu=3} x^\mu \mathbf{e}_\mu = x^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (\text{convention d'Einstein}) \quad (5.18)$$

où l'on a utilisé la notation $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, et $x^3 = z$. Les coordonnées x^μ de M sont donc aussi les composantes du vecteur \mathbf{OM} dans la base canonique \mathbf{e}_μ . De façon plus générale, tout vecteur \mathbf{v} dans l'espace de Minkowski peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{v} = v^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (5.19)$$

où les v^μ sont les composantes, dites *contravariantes*, du vecteur \mathbf{v} . Il est alors d'usage de commettre l'abus de langage suivant : on désignera souvent un vecteur \mathbf{v} par ses composantes, et on parlera du « vecteur v^μ ». Ce faisant, il ne faudra pas oublier qu'on entend en fait l'Eq. (5.19). La pseudo-norme (Lorentzienne) d'un vecteur \mathbf{v} est simplement obtenue en prenant le produit scalaire du vecteur avec lui-même, comme dans le cas Euclidien :

$$\mathbf{v}^2 = (v^\mu \mathbf{e}_\mu) \cdot (v^\nu \mathbf{e}_\nu) = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu v^\mu v^\nu = \eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \quad (5.20)$$

On introduit alors les *composantes covariantes* du vecteur \mathbf{v} : par définition

$$v_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} v^\nu \quad (5.21)$$

de telle sorte que, effectuant la somme implicite, si $v^\mu = (v^0, v^i)$, alors $v_\mu = (v_0, v_i)$ avec $v_0 = -v^0$ et $v_i = v^i$. En ces termes le carré d'un vecteur s'écrit simplement

$$\mathbf{v}^2 = v_\mu v^\mu \quad (5.22)$$

Les indices contravariants sont en haut, les indices covariants en bas. Dans ces notations, l'intervalle entre deux points M et M' de coordonnées x^μ et x'^μ est

$$\begin{aligned} s_{MM'}^2 &= -c^2(x'^0 - x^0)^2 + (x'^1 - x^1)^2 + (x'^2 - x^2)^2 + (x'^3 - x^3)^2 \\ &= \eta_{\mu\nu}(x'^\mu - x^\mu)(x'^\nu - x^\nu) = (x'_\mu - x_\mu)(x'^\mu - x^\mu) = \mathbf{MM}'^2 \end{aligned} \quad (5.23)$$

[Attention le prime ici n'indique pas une transformation de Lorentz, mais les coordonnées du point M']. Entre deux points infiniment proches, l'intervalle élémentaire s'écrit donc

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu \quad (5.24)$$

5.5.3 Retour sur les transformations de Lorentz

Les composantes du vecteur position x^μ d'un point M de l'espace-temps, sont, on le sait, transformées en des coordonnées primées x'^μ données par la transformation de Lorentz, c'est-à-dire lorsque considérées dans un autre référentiel \mathcal{R}' . On peut écrire cette transformation de la façon suivante :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (5.25)$$

où $\Lambda^\mu{}_\nu$ est une matrice. Dans le cas d'une transformation de Lorentz (*boost* en anglais) le long de x , on sait que cette matrice vaut

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cf. Eq. (5.11). De façon différentielle,

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu \quad (5.26)$$

L'invariance de l'intervalle élémentaire signifie que $ds'^2 = ds^2$. Or on a :

$$\begin{aligned} ds'^2 &= \eta_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma dx^\rho dx^\sigma \end{aligned}$$

et donc pour respecter l'invariance de l'intervalle il est nécessaire que la matrice de Lorentz satisfasse

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \quad (5.27)$$

On pourra vérifier à titre d'exercice que c'est effectivement le cas.

Considérons maintenant un déplacement élémentaire $d\mathbf{M} = dx^\mu \mathbf{e}_\mu$. Clairement cet objet étant un vecteur sur l'espace de Minkowski reliant deux points donnés, sa valeur ne doit pas changer dans un changement de coordonnées. Il faut donc que dans une transformation de Lorentz $dx'^\mu \mathbf{e}'_\mu = dx^\mu \mathbf{e}_\mu$. Comme $dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$, on en déduit que les vecteurs de base du nouveau référentiel \mathcal{R}' sont reliés aux vecteurs de base de \mathcal{R} par

$$\mathbf{e}_\nu = \Lambda^\mu_\nu \mathbf{e}'_\mu \quad (5.28)$$

On peut inverser cette relation en définissant la matrice de Lorentz inverse Λ_μ^ν [noter la position différente des indices, conventionnelle, pour indiquer qu'il s'agit de la matrice inverse tout en conservant le même symbole Λ] telle que

$$\Lambda^\mu_\rho \Lambda_\nu^\rho = \delta_\mu^\nu$$

où l'on a introduit le symbole de Kronecker 4-dimensionnel. Alors, multipliant Eq. (5.28) par Λ_ρ^ν , on obtient

$$\Lambda_\rho^\nu \mathbf{e}_\nu = \Lambda_\rho^\nu \Lambda^\mu_\nu \mathbf{e}'_\mu \quad (5.29)$$

soit donc

$$\mathbf{e}'_\rho = \Lambda_\rho^\nu \mathbf{e}_\nu \quad (5.30)$$

Explicitons ce résultat, en oubliant les coordonnées y et z . La matrice inverse de Lorentz, on l'a vu, s'obtient très simplement en inversant le signe de la vitesse. Par conséquent l'équation précédente s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_0 \\ \mathbf{e}'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

et donc on a

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_0 &= \gamma(\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1) \\ \mathbf{e}'_1 &= \gamma(\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Cela va nous permettre de construire les diagrammes d'espace-temps et d'expliciter la façon dont est vu l'espace-temps par l'observateur \mathcal{R}' .

5.5.4 Cône de lumière et diagrammes d'espace-temps

Représentons l'espace-temps de Minkowski avec une seule dimension spatiale x , et la dimension temporelle ct . Portons sur ce schéma la trajectoire des

rayons lumineux. Ils ont pour équations $x = \pm ct$, et sont donc représentés par des lignes droites à 45 degrés. Ces deux lignes définissent *le cône de lumière*, depuis l'origine O . Si l'on inclut une autre dimension spatiale y , on voit la forme d'un cône (*cf.* Fig. 5.1 ci-dessous). En quatre dimensions en revanche le cône de lumière est plus difficile à se représenter : il s'agit de sphères concentriques augmentant de rayon avec le temps qui passe.

Les points M situés dans la partie supérieure du cône peuvent être atteints depuis O en se déplaçant moins vite que la lumière, c'est-à-dire encore par un chemin partout de genre temps ($ds^2 < 0$ tout le long de la trajectoire). On dit qu'ils forment le *futur* de O . Les points situés dans la partie inférieure du cône peuvent influencer la physique en O par des interactions subluminiques. On dit qu'ils forment le *passé* de O . Tous les autres points ne peuvent pas être en contact causal avec O , à moins de disposer de signaux se propageant plus vite que la lumière, ce qui semble ne pas exister (on verra d'ailleurs dans la suite qu'une particule massive ne peut jamais dépasser la vitesse de la lumière). On l'appelle *l'ailleurs*. De façon assez intéressante, on voit donc sur la figure Fig 5.1 que, à tout instant, l'espace n'existe pas pour l'observateur O . Ce dernier ne fait jamais que reconstruire l'espace à l'aide des informations issues de son passé.

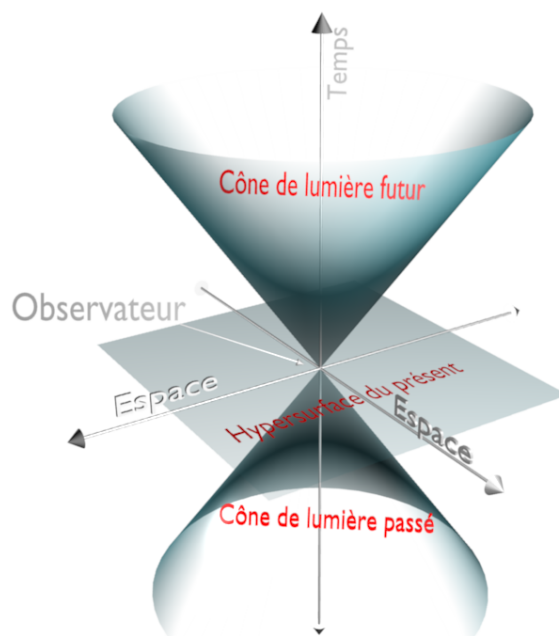


FIGURE 5.1 – Le cône de lumière

Remarque : on peut montrer que le signe de $t_2 - t_1$ entre deux événements E_1 et E_2 est un invariant de Lorentz, pour peu que l'intervalle entre ces deux événements soit de genre temps, ce qui donne donc du sens aux notions (absolues) de futur et de passé utilisées plus haut.

Pour terminer, illustrons les résultats trouvés en section 5.3.3, notamment sur la transformations des vecteurs de base lors d'une transformation de Lorentz (dite aussi un *boost*). Les formules Eqs. (5.32) impliquent le graphe suivant, en vue de coupe (Fig. 5.2), puisque les axes primés sont engendrés par les vecteurs de base primés. On note aussi que la simultanéité dans le référentiel \mathcal{R}' , définie par $t' = cst$ est différente de celle définie dans \mathcal{R} . Les lignes rouges figurent le cône de lumière.

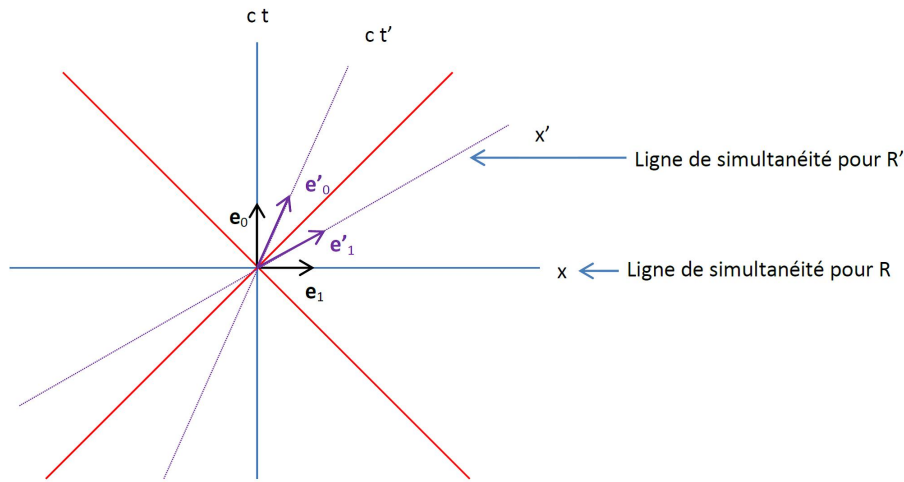


FIGURE 5.2 – Transformations des coordonnées dans un *boost* le long de x .

5.6 Cinématique

La section précédente traitait de la géométrie de l'espace-temps de la relativité restreinte. Nous pouvons maintenant passer à l'étude des mouvements des particules massives.

5.6.1 Trajectoires et temps propre

Un corps ponctuel définit une courbe (continue) dans l'espace-temps. On l'appelle sa *ligne d'Univers*. Il y a plusieurs façons de la définir. On pourrait se donner cette ligne d'Univers par l'ensemble des lieux $\mathbf{x}(t)$ en fonction du temps t d'un référentiel \mathcal{R} . C'est ce qu'on fait en général en mécanique Newtonienne. Cela amènerait à une notion de *vitesse coordonnée* de la particule définie comme

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \quad (5.33)$$

Cette paramétrisation n'est pas très commode par contre puisque $t' \neq t$ dans un autre référentiel. Il est donc naturel d'introduire un paramètre réel indexant la position dans l'espace *et dans le temps* de la particule. On se donne donc la ligne d'Univers par quatre fonctions $x^\mu(\lambda)$, où λ est ledit paramètre. On peut toujours retrouver une paramétrisation de type newtonienne en utilisant que $t(\lambda)$ peut s'inverser pour trouver λ en fonction de t , et donc $x(\lambda) = x(\lambda(t))$.

Bien que l'on puisse choisir tout paramètre λ , on utilisera souvent le temps propre de la particule (*i. e.* le temps indiqué par une horloge embarquée avec la particule), qui a l'avantage d'être un invariant de Lorentz. Rappelons en effet que l'intervalle élémentaire s'écrit

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2 = -c^2 dt^2 \left(1 - \left(\frac{d\mathbf{x}}{cdt} \right)^2 \right) = -c^2 dt^2 (1 - \beta^2) = -\frac{c^2 dt^2}{\gamma^2}$$

de sorte que le temps propre élémentaire $d\tau$ est relié de façon très simple à l'intervalle élémentaire *via* :

$$\boxed{ds^2 = -c^2 d\tau^2} \quad (5.34)$$

où l'on rappelle l'expression du temps propre $d\tau$ en fonction du temps coordonné :

$$\boxed{d\tau = \frac{dt}{\gamma}} \quad (5.35)$$

(γ est réel pourvu que la vitesse coordonnée n'excède pas la vitesse de la lumière!). Si, par contre, on veut décrire la trajectoire d'un photon, on ne peut utiliser le temps propre du photon. En effet on a $ds^2 = 0$ le long de la trajectoire du photon, et donc $d\tau = 0$ (ce qui signifie que si le photon pouvait embarquer avec lui une horloge, cette horloge serait figée, ce dont on peut déduire (entre guillemets seulement), que le temps n'avance pas pour les photons). Le temps propre n'est donc pas un paramètre approprié le long

de la trajectoire des photons. En revanche pour les particules massives se déplaçant moins vite que la lumière, on a $d\tau > 0$ et donc le temps propre τ le long de la trajectoire est un paramètre admissible.

Dans la suite nous considérons donc une ligne d'Univers paramétrée par son temps propre : $x^\mu(\tau)$.

5.6.2 Quadri-vitesse, impulsion, accélération

Par définition, la quadrivitesse d'un corps ponctuel est un 4-vecteur

$$U^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} = \left(\frac{cdt}{d\tau}, \frac{dx^i}{d\tau} \right) \quad (5.36)$$

Puisque, par définition, $dt/d\tau = \gamma$, on peut exprimer cette quadrivitesse en fonction de la vitesse coordonnée \mathbf{v} ou $\beta = \mathbf{v}/c$ (il est sous entendu ici que β est un 3-vecteur malgré l'absence de la notation en caractère gras) :

$$\boxed{U^\mu = (\gamma c, \gamma \beta c)} \quad (5.37)$$

La quadrivitesse en indices bas (covariants) est donc

$$U_\mu = (-\gamma c, \gamma \beta c) \quad (5.38)$$

et la norme de la (quadri)vitesse vaut donc

$$\mathbf{U}^2 = U^\mu U_\mu = -\gamma^2 c^2 + \gamma^2 \beta^2 c^2 = -c^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) = -c^2 \quad (5.39)$$

et on note qu'elle est constante. Nous voulons maintenant généraliser la notion Newtonienne d'impulsion d'une particule de masse m : $\mathbf{p}_N = m\mathbf{v}$. Le plus direct semble de former la quadri-impulsion ainsi :

$$P^\mu = mU^\mu = (\gamma mc, m\gamma \beta c) \quad (5.40)$$

La composante spatiale est donc $m\gamma \beta c = \gamma \mathbf{p}_N$: la 3-impulsion relativiste \mathbf{p} vaut l'impulsion Newtonienne multipliée par le facteur de Lorentz γ .

$$\boxed{\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}} \quad (5.41)$$

A quoi peut correspondre la composante temporelle ? On note que γmc est homogène à une énergie divisée par c , et cela suggère de poser que l'énergie de la particule vaut

$$\boxed{E = \gamma mc^2} \quad (5.42)$$

Dans le cas où la particule est au repos, on a $\gamma = 1$ et donc

$$\boxed{E = mc^2} \quad (5.43)$$

qui est sans conteste la formule la plus célèbre de la physique. Cependant ce n'est pas l'expression la plus générale : celle-ci contient un facteur γ pour une particule en mouvement. Si l'on développe γ en puissance de $1/c$, on obtient

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \mathcal{O}(1/c^2) \quad (5.44)$$

c'est-à-dire, *l'énergie de masse*, puis l'énergie cinétique Newtonienne, puis des *corrections relativistes*. Il faut aussi noter que γ diverge lorsque $v \rightarrow c$ *i. e.* lorsque $\beta \rightarrow 1$. Ainsi on voit déjà (sans avoir encore la loi dynamique) qu'il faudrait dépenser une énergie infinie pour qu'un corps massif atteigne la vitesse de la lumière. C'est clairement impossible et la vitesse de la lumière apparaît alors comme indépassable, justifiant *a posteriori* l'hypothèse faite au tout début (revoir section 5.1).

L'identification de l'énergie avec cP^0 n'a pas été justifiée outre mesure ici, et semble donc contestable. En fait il faudrait introduire le formalisme hamiltonien pour identifier de façon contrôlée l'énergie au hamiltonien, et l'on retrouve alors le résultat $E = \gamma mc^2$ (voir aussi section suivante pour une autre justification). Notons enfin que le carré de la quadri-impulsion vaut $-m^2c^2$, mais qu'il vaut aussi $-E^2/c^2 + \mathbf{p}^2$, et donc on a

$$\boxed{E^2 = m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2} \quad (5.45)$$

Cette formule est plus utile que les précédentes puisqu'elle permet aussi de couvrir le cas de particules sans masse, tels les photons. Auquel cas on trouve

$$\boxed{E = |\mathbf{p}|c} \quad (5.46)$$

Finalement en redérivant la quadrivitesse par rapport au temps propre, on trouve la quadri accélération

$$A^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} \quad (5.47)$$

On note qu'elle est (quadri)orthogonale à la (quadri)vitesse puisque $U^2 = cst$ implique que

$$A^\mu U_\mu = 0 \quad (5.48)$$

5.7 Dynamique

On lit souvent, notamment dans le cadre du traitement du paradoxe des jumeaux (et même parfois dans des livres académiques), que la relativité restreinte ne peut décrire autre chose que des trajectoires à vitesse constante. C'est bien entendu faux. D'ailleurs la section précédente traitait de lignes d'Univers quelconques (de genre temps).

La seconde loi de Newton s'écrit $d\mathbf{p}_N/dt = \Sigma\mathbf{F}$. La généralisation relativiste est donc directe, et l'équation dynamique s'écrit

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = \Sigma F^\mu \quad (5.49)$$

où l'on introduit des quadriforces dont il s'agira de trouver l'expression. En général, la masse peut varier sous l'effet d'une force (en relativité restreinte), mais supposons pour simplifier que la masse est constante. Dans ce cas

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = mA^\mu$$

Par conséquent

$$U_\mu \frac{dP^\mu}{d\tau} = 0$$

Ainsi, multipliant l' Eq. (5.49) par U_μ , on voit que

$$0 = F^\mu U_\mu = \gamma c \left(-F^0 + \mathbf{F} \cdot \vec{\beta} \right)$$

de sorte que la composante temporelle de la quadriforce a nécessairement l'expression

$$F^0 = \mathbf{F} \cdot \vec{\beta} \quad (5.50)$$

Pour faire le lien avec la loi de Newton, posons ensuite $\mathbf{F} = \gamma\mathbf{F}_N$, et donc $F^0 = \gamma\mathbf{F}_N \cdot \vec{\beta}$. L'équation dynamique devient alors, utilisant $d\tau = dt/\gamma$:

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = \gamma \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{E}{c} \right), \frac{d}{dt} (\gamma m \mathbf{v}) \right) = \gamma \left(\mathbf{F}_N \cdot \vec{\beta}, \mathbf{F}_N \right)$$

c'est-à-dire, terme à terme

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F}_N \cdot \mathbf{v} \quad (5.51)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_N \quad (5.52)$$

$$(5.53)$$

avec les expressions $E = \gamma mc^2$ et $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$. La première équation justifie l'identification de P^0 avec E/c puisqu'on reconnaît dans le membre de droite l'expression de la puissance en théorie Newtonienne, et usant du fait, par ailleurs, que par définition la puissance vaut la dérivée de l'énergie par rapport au temps. La seconde équation est quasiment identique à la seconde loi de Newton, au facteur γ près. Il s'agit bien, dans le membre de droite, de la force Newtonienne, puisqu'on peut toujours se placer dans un référentiel instantanément comobile avec la particule, et dans lequel γ vaut 1.

Concluons par un mot sur la covariance de cette équation dynamique Eq. (5.49). L'équation est manifestement covariante de Lorentz si et seulement si les quadriforces se transforment comme des vecteurs. En effet, on sait que le vecteur position se transforme comme

$$x'^{\mu}(\tau) = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}(\tau),$$

le temps propre étant un invariant de Lorentz. Pour cette même raison, les dérivées (quadri-vitesse et quadri-accélération) se transforment également de cette façon. Ainsi en va-t-il donc aussi de la dérivée de la quadri-impulsion, la masse de la particule étant évidemment invariante sous les changements de coordonnées. Donc, dans une transformation de Lorentz, on a :

$$\frac{dP'^{\mu}}{d\tau} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \frac{dP^{\nu}}{d\tau}$$

et l'équation dynamique généralisant la seconde loi, Eq. (5.49), conservera sa forme dans tous changements de référentiels inertiels pour peu que les quadriforces se transforment également selon

$$F'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} F^{\nu}$$

c'est-à-dire, si elles se transforment comme un 4-vecteur. Dit autrement, les seules quadriforces admissibles sont celles s'exprimant comme un 4-vecteur, sous peine de briser la covariance de Lorentz et donc le principe de relativité restreinte. Les forces électromagnétiques, en particulier, sont bien 4-vectorielles.

5.8 L'électromagnétisme relativiste

Abordé en TD.

Troisième partie

La théorie de la relativité générale

Chapitre 6

Vers l'espace-temps courbe

6.1 Comment faire une gravitation relativiste ?

Au premier abord construire une théorie relativiste de la gravitation semble assez simple. Il suffit a priori de rendre relativiste les équations fondamentales de la gravitation Newtonienne, à savoir l'équation de Poisson, et l'équation donnant la force subit par une *particule-test*¹.

Ainsi on écrirait naturellement la théorie la plus simple qui soit, à savoir :

$$\square\Phi = 4\pi G\rho \quad (6.1)$$

où

$$\square = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6.2)$$

est l'opérateur d'Alembertien. La 4-force subit par la particule massive serait par exemple

$$F_\mu = -m \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \quad (6.3)$$

Remarque : quelques notations. Il existe une façon compacte d'écrire le d'Alembertien, à l'aide de la métrique plate $\eta_{\mu\nu}$ et de son inverse qui vaut $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ dans un système de coordonnées cartésiennes, et de la règle permettant de monter et descendre les indices :

$$\square = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\mu \partial^\mu \quad (6.4)$$

1. Par définition c'est une particule de masse infinitésimale de telle sorte qu'on puisse négliger l'effet de son propre champ de gravitation sur sa propre trajectoire

où l'on écrit

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (6.5)$$

La théorie précédente a un problème immédiat : elle n'est pas covariante de Lorentz. Le membre de gauche $\square\Phi$ est bien covariant de Lorentz, et même un invariant de Lorentz (cf TD) mais le membre de droite ne l'est pas. Cela est dû à la contraction des longueurs : dans un boost de Lorentz, une boîte de taille L^3 contenant de la matière est contractée en une boîte de taille L^3/γ , de sorte que la densité n'est pas un invariant de Lorentz. On pourrait cependant remédier à cela en utilisant une quantité que nous définirons plus loin, le tenseur-énergie impulsion $T_{\mu\nu}$, et en particulier sa trace $T \equiv T^\mu_\mu$, qui est bien un invariant de Lorentz. On peut alors définir la théorie suivante :

$$\square\Phi = 4\pi GT \quad (6.6)$$

et

$$F_\mu = -m\partial_\mu\Phi \quad (6.7)$$

et cela suffit à caractériser complètement la théorie gravitationnelle. C'est l'exemple le plus simple de ce qu'on appelle une *théorie scalaire de la gravitation*. On parle d'une théorie scalaire en référence au champ Φ qui est un champ scalaire (c'est-à-dire une fonction) sur l'espace-temps de Minkowski².

Dans une telle théorie, la gravitation apparaît comme une force tout à fait standard, au même titre que l'électromagnétisme rencontré précédemment (cf TD) : la matière (plus précisément l'énergie-impulsion) agit comme source du potentiel gravitationnel Φ , et le champ gravitationnel $\partial_\mu\Phi$ réagit sur le mouvement des sources.

Le problème majeur de cette théorie est qu'elle est invalidée par l'expérience. Par exemple, elle ne prédit pas la bonne valeur pour l'avance du périhélie de Mercure, et ne prédit pas non plus de déflexion de la lumière par une masse (nous reverrons cela plus loin). La relativité générale est fondamentalement différente d'une telle théorie scalaire de la gravitation dans le sens où dans cette théorie *la gravitation n'est pas une force standard*, mais apparaît liée à (ou traduite par) la courbure de l'espace-temps. Cela signifiera, de façon plus fondamentale encore, que la gravitation est codée dans les propriétés métrique de l'espace-temps, de telle sorte que le champ de gravitation est celui qui détermine les distances et les intervalles de temps. Pour arriver à ces conclusions totalement neuves, il nous faut revenir à l'universalité de la chute libre, rencontrée au chapitre 3.

2. Il y a une infinité de théories scalaires possibles, par exemple $f(\Phi, \square\Phi) = 4\pi GT$ pour une fonction f quelconque

6.2 L'universalité de la chute libre

Dans la théorie de Newton, il apparaît deux notions a priori distinctes de masses. Il y a la *masse inerte* ou *masse inertielle*, qui indique la résistance d'un corps à se mettre en mouvement sous l'action d'une force (on appelle cela *l'inertie*). C'est la masse m_i qui apparaît dans la seconde loi :

$$m_i \mathbf{a} = \Sigma \mathbf{F} \quad (6.8)$$

Puis il y a les masses gravitationnelles ou *masses graves*, m_g , qui donnent l'intensité de la force entre deux masses graves m_g et M_g : $|F| = Gm_g M_g / r^2$. Considérons alors le mouvement de la masse m dans le champ créé par la masse M :

$$m_i \mathbf{a} = -Gm_g M_g / r^2 \mathbf{u} \quad (6.9)$$

où \mathbf{u} est le vecteur unitaire approprié. On voit alors que le mouvement de la masse m ne dépend pas de m si et seulement la masse inerte est égale à la masse grave $m_i = m_g$. Dans ce cas, l'accélération subie par m ne dépend que de la masse source M_g et non de m , de sorte que tous les corps, quelque soit leurs masses, tombent de la même façon dans un champ gravitationnel.

Galilée fut le premier à établir expérimentalement ce résultat en lâchant des objets en chute libre depuis la tour de Pise. Ainsi, non seulement un kilo de plumes tombe aussi vite qu'un kilo de plomb, mais également 10 kilos de plumes tombent encore de la même façon qu'un kilo de plomb (en négligeant les frottements de l'air)! La chute dans un champ gravitationnel ne dépend ni de la masse du corps, ni de sa composition chimique précise. Les moyens modernes ont permis de vérifier ce résultat avec des précisions impressionnantes de l'ordre de 10^{-20} .

L'égalité des masses inertes et graves ne fait pas partie en soi de la théorie de Newton ; c'est un postulat qui doit y être ajouté (et que nous avons implicitement ajouté au cours du chapitre 3). Jusqu'ici nous avons considéré des corps en chute libre mais sans rotation. L'expérience permet d'aller plus loin et de montrer (avec une précision moindre, cependant) que des corps en rotation tombent de la même façon que des corps dépourvus de rotation, indiquant que l'espace-temps courbe doit être dépourvu de torsion (cf plus loin).

6.3 Le principe d'équivalence d'Einstein

Dans sa construction de la relativité générale, Einstein comprend l'importance capitale de l'universalité de la chute libre. Quoiqu'il s'agisse avant tout d'un résultat expérimental qui pourrait s'avérer faux (ou disons, pas exactement vérifié), Einstein suppose l'exacte validité de ce résultat.

Comme dit au chapitre 3, l'universalité de la chute libre a des conséquences remarquables qui fournit de précieuses indications sur la nature de la gravitation. La première conséquence majeure est qu'il apparait que l'effet de la gravitation est indistinguable de l'effet d'un champ d'accélération (*cf.* équations newtoniennes plus haut). Nous avons établi ce résultat dans le cadre newtonien pour des corps massifs, et sous la condition que les masses inertes et graves d'un corps soient égales. Mais l'on sait que le monde n'est pas seulement constitué de particules massives, électriquement neutres et sans rotation. Il y a aussi les champs électromagnétiques, par exemple.

Einstein décide donc d'étendre l'équivalence gravitation-accélération pour couvrir également ces cas, et postule alors la loi suivante :

Principe d'équivalence d'Einstein : Soit un observateur donné. Quelque soit les expériences de physique que cet observateur puisse mener dans son voisinage immédiat, il lui est impossible de décider s'il est plongé dans un champ gravitationnel réel créé par un corps massif avoisinant ou s'il est simplement dans un référentiel accéléré.

Quelques commentaires. Tout d'abord l'équivalence gravitation-accélération est étendue à tous les phénomènes physiques en requérant qu'aucune expérience, quelle qu'elle soit, permettrait de les distinguer. Ensuite, il est précisé que ce principe n'est valable que *localement*. La raison en est assez claire et bien illustrée par le schéma suivant. (maison sur terre, effet de marées, vs force d'inertie ds une cabine accélérée)

Ainsi le champ gravitationnel n'est certes pas distinguable d'un champ d'accélération, mais seulement localement.

Enfin, le principe d'équivalence a une conséquence remarquable : le *principe d'effacement local*. La gravitation n'est pas localement distinguable d'un champ d'accélération. Un observateur qui suit ce champ d'accélération (*i. e.* qui est en chute libre) ne ressent plus cette accélération, et donc, en vertu du principe d'équivalence, ne peut plus ressentir le champ gravitationnel dans lequel il tombe. Localement, en chute libre, le champ gravitationnel est comme *effacé*. C'est le phénomène d'apesanteur bien connu. Einstein l'a traduit dans

un expérience de pensée restée célèbre : celle de l'ascenseur en chute libre. Lorsque l'ascenseur est à l'arrêt, l'observateur sent la gravité l'attirer vers le bas. Le principe d'équivalence dit dans ce cas que la physique dans la cabine de l'ascenseur n'est en rien différente de ce que serait la physique dans une même cabine, perdue au fond de l'espace et loin de toutes masses, mais qui serait accélérée (vers le haut de la cabine), avec une accélération égale en norme au champ de pesanteur. Maintenant imaginons que les câbles de l'ascenseur lâchent. La cabine, l'air de la cabine, l'observateur, et globalement tous les autres objets dans la cabine vont alors tomber de la même façon dans le champ gravitationnel de la Terre. Puisque tous les objets de la cabine ont la même accélération vers le bas (dans le référentiel terrestre), il est clair que les objets de la cabine ont entre eux une accélération relative nulle³. Les objets de la cabine se meuvent en ligne droite les uns par rapport aux autres et par rapport à la cabine. En particulier l'observateur « flotte » dans la cabine, c'est le phénomène d'apesanteur.

Ce que montre aussi cette description de la physique à l'intérieur de l'ascenseur est que le référentiel en chute libre est un référentiel dans lequel la première loi de Newton est valable. Par conséquent, nous avons démontré que l'universalité de la chute libre et son extension le principe d'équivalence, et sa conséquence le principe d'effacement, implique que les référentiels d'inertie sont les référentiels en chute libre. A chaque distribution de champ gravitationnel correspond une distribution des référentiels inertiels. Cela répond à la question de la spécificité des référentiels d'inertie, de qui sont-ils et de comment les trouver. La physique prend une forme simple dans ces référentiels privilégiés (absence de gravitation). Cependant cela n'est vrai que localement, encore une fois. En effet si l'on dessine à nouveau un ascenseur en chute libre de taille terrestre, on voit que les mouvements ne sont pas exactement inertiels. Cependant, localement, c'est vrai. Ainsi tout référentiel en chute libre est localement inertiel, et dans ce référentiel, la gravité ne se manifeste que *via* les effets de marées. Schéma. Une boule devient ovale.

Le principe d'équivalence et le principe d'effacement nous amène naturellement à deux arguments forts en faveur d'un espace-temps courbe.

3. on suppose qu'il n'y a pas de force autres, par exemple électriques, s'exerçant entre les objets de la cabine

6.4 Premier argument en faveur d'un espace-temps courbe

Ce premier argument est issu du principe d'équivalence et est basé sur le décalage gravitationnel vers le rouge. Le principe d'équivalence implique que la physique est identique, localement, dans une cabine accélérée (avec une accélération \mathbf{a} et loin de toute masse) à celle dans une même cabine au repos dans un champ de gravitation (par exemple à la surface de la Terre), pourvu que le champ de pesanteur soit $\mathbf{g} = -\mathbf{a}$. Cf dessin au tableau.

Considérons alors la cabine accélérée, et un observateur au plancher qui émet une lumière de fréquence ν_{plancher} vers le plafond, où l'on place un détecteur. Soit h la hauteur de la cabine, et on supposera que h est petit de sorte que le principe d'équivalence puisse s'appliquer⁴. On demande quelle est la fréquence reçue au plafond, ν_{plafond} . Pour ce faire on considère la cabine dans un référentiel localement inertiel dans lequel les lois de la relativité restreinte s'appliquent. On considère aussi que la cabine a une vitesse nulle dans ce référentiel à l'instant où est émis la lumière. Noter que le plafond a donc un mouvement accéléré dans ce référentiel. La lumière prend un temps $\delta t \approx h/c$ au premier ordre pour atteindre le plafond. Pendant ce temps là, le plafond, et donc le récepteur, a pris une vitesse $\beta \approx a\delta t/c \approx ah/c^2 \ll 1$ en norme. Par conséquent il y a un décalage de fréquence en vertu de l'effet Doppler, dont on a vu (cf TD) qu'il est donné par

$$\frac{\nu_{\text{plafond}}}{\nu_{\text{plancher}}} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \sim 1 - \beta + \mathcal{O}(\beta^2) = 1 - \frac{ah}{c^2} + \mathcal{O}(c^{-3}) \quad (6.10)$$

Il s'ensuit que la lumière reçue au plafond de la cabine accélérée est *décalée vers le rouge* (*i. e.* de fréquence moindre). En vertu du principe d'équivalence, il doit alors s'ensuivre que la lumière est décalée vers le rouge lorsqu'elle monte dans un champ gravitationnel. On parle de décalage vers le rouge gravitationnel, ou plus communément *gravitational redshift*. La formule donnant ce décalage, par exemple pour une cabine posée sur le sol terrestre, est donc :

$$\frac{\nu_{\text{plafond}}}{\nu_{\text{plancher}}} = 1 - \frac{gh}{c^2} + \mathcal{O}(c^{-3}) \quad (6.11)$$

Cette formule constitue en elle-même une prédiction de la relativité générale, et est considérée comme un des trois tests classiques de la théorie. Cet effet

4. h étant dimensionné, il faut comparer cette longueur à une longueur typique du problème. En utilisant l'accélération a de la cabine et la vitesse de la lumière, on voit que c^2/a a la dimension d'une longueur, et donc on suppose que $ah/c^2 \ll 1$.

a été vérifié expérimentalement pour la première fois en 1960 par Pound et Rebka [check]. Les deux autres tests classiques sont la déflexion de la lumière et l'avance de périhélie de Mercure sur lesquels nous reviendrons dans le chapitre 9.

Mais cet effet n'est pas seulement un test de la théorie, car il nous permet aussi de montrer un argument très fort en faveur d'un espace-temps courbe. En effet, le champ de gravitation terrestre étant statique, il doit être vrai que les lignes d'univers de deux photons émis depuis le plancher jusqu'au plafond, et émis à un intervalle de durée coordonnée ΔT , doivent être parallèle dans un diagramme d'espace-temps en t, r où r est la coordonnée radiale des coordonnées sphériques. (*cf.* schéma en cours). Ainsi il est nécessaire que la durée coordonnée entre les deux émissions soit égale à la durée coordonnée entre les deux réceptions : $\delta t_{\text{emiss.}} = \delta t_{\text{recep.}} = \Delta T$. Les deux observateurs au plancher et au plafond étant statiques également, il s'ensuit que si la géométrie de l'espace-temps était celle de Minkowski, alors la durée propre entre les deux émissions et les deux réceptions devraient être égales ($\delta \tau_{\text{emiss.}} = \delta \tau_{\text{recep.}} = \Delta T$). Autrement dit la fréquence de tout signal périodique ne devrait pas être affectée par la présence du champ gravitationnel. Or nous venons d'établir que cela n'est pas le cas, et il est donc nécessaire que la durée propre dépende à la fois de la durée coordonnée *et* de la position dans l'espace, et en particulier de la hauteur où l'on se trouve dans le champ gravitationnel.

Pour mieux le comprendre on peut se demander quelle métrique dépendant de la hauteur (*i. e.* de r) permettrait d'expliquer la loi du redshift gravitationnel au premier ordre. Considérons la métrique (non-Minkowskienne) la plus simple possible :

$$ds^2 = -f(r)c^2dt^2 + d\mathbf{x}^2 \tag{6.12}$$

Cela signifie que le temps propre est relié au temps coordonné ($d\mathbf{x} = 0$ pour le temps propre) par : $c^2d\tau^2 = -ds^2 = f(r)c^2dt^2$, de sorte que

$$d\tau = \sqrt{f(r)}dt \tag{6.13}$$

Reprenons alors la loi ci-dessus pour le redshift, Eq. (6.11). On note que la période d'un signal est relié à sa fréquence par $T = 1/\nu$, tandis que la période d'une horloge est toujours sa période propre. Dès lors on doit avoir, entre le plancher situé à r et le plafond à $r + h$, la relation

$$\frac{\nu_{\text{plafond}}}{\nu_{\text{plancher}}} = \frac{T_{\text{plancher}}}{T_{\text{plafond}}} = \frac{\sqrt{f(r)}\Delta T}{\sqrt{f(r+h)}\Delta T} = 1 - \frac{gh}{c^2} \tag{6.14}$$

En élevant au carré, avec $f(r+h) = f(r) + hf'(r)$, inversant, et au premier ordre, on obtient

$$\frac{f(r) + hf'(r)}{f(r)} \sim (1 - gh/c^2)^{-2} \sim 1 + 2\frac{gh}{c^2} \quad (6.15)$$

Par ailleurs, le champ de gravitation valant, d'après la théorie Newtonienne, $g(r) = GM/r^2$, on a

$$h\frac{f'(r)}{f(r)} \sim 2\frac{GMh}{r^2c^2} \quad (6.16)$$

Le terme en h se simplifie. En intégrant, on trouve donc

$$f(r) = K \exp\left(-2\frac{GM}{rc^2}\right) \sim K\left(1 - 2\frac{GM}{rc^2}\right) \quad (6.17)$$

au premier ordre. On peut demander que la métrique soit Minkowskienne à l'infini (du corps M), et cela revient à poser $K = 1$. Reportant, on trouve alors que la métrique :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\left(1 - 2\frac{GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 + d\mathbf{x}^2 \quad (6.18)$$

est suffisante pour décrire l'effet de redshift gravitationnel créé par un corps massif de masse M – en tout cas pour des photons se déplaçant radialement, et au premier ordre. En fait il se trouve que ce résultat (pour la partie temporelle-temporelle) est exact, malgré les approximations faites ici. Dans la solution complète de la métrique autour d'un corps sphérique et massif (solution de Schwarzschild, cf. chapitre 9), nous retrouverons cette même partie temporelle-temporelle (cad. $g_{00} = 1 - 2GM/rc^2$), mais la partie radiale-radiale sera différente.

A l'aide du principe d'équivalence (et de la propagation à vitesse finie de la lumière), nous avons donc obtenu le fait remarquable suivant : l'espace-temps doit être décrit par une métrique qui dépend généralement des masses dans cet espace-temps, et de la distance à ces masses. Ainsi il est nécessaire que la métrique dépende de façon générale du point considéré : $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$, et il n'est pas possible (sauf en l'absence de gravitation) de réduire cette métrique à sa forme fondamentale en tous points, cad qu'il n'existe pas de système de coordonnées dans lequel la métrique se réduit à son expression Minkowskienne. Cela, nous le verrons au chapitre suivant, signifie que l'espace-temps est courbe, et comme on l'a vu, qu'il est courbé par le contenu en matière. Par ailleurs l'effet de la gravitation est ici complètement codé dans l'expression de la métrique, une conclusion que l'on peut aussi obtenir d'une autre manière, cf ci-dessous. Nous avons donc l'équation heuristique fondamentale « gravitation = courbure », qui permet d'achever la théorie très rapidement.

6.5 Second argument en faveur d'un espace-temps courbe

Revenons sur le point concernant le principe d'inertie (Section 6.3). On a vu que le passage d'un référentiel quelconque à un référentiel en chute libre permet d'annuler localement la gravité. Par conséquent, le chemin inverse, depuis le référentiel en chute libre vers un référentiel quelconque doit nous indiquer quelles sont les quantités mathématiques qui doivent décrire le champ de gravitation.

Explicitement, dotons nous d'un système de coordonnées quelconque (x^μ) et d'un corps de référence A , en chute libre, et de coordonnées x_A^μ . Le principe d'effacement local implique l'existence de coordonnées localement inertielles (X^I) pour lesquelles l'équation du mouvement du corps A (de coordonnées $X_A^I(\tau)$), s'écrit

$$\frac{d^2 X_A^I}{d\tau^2} = 0, \quad (6.19)$$

où τ est le temps propre. La relation entre les deux systèmes de coordonnées (x) et (X) peut s'écrire sous forme différentielle :

$$dX^I(x^\mu) = e_\mu^I(x^\mu) dx^\mu, \quad (6.20)$$

où les quantités \tilde{e}_μ^I , nommées tétrades sont définies par

$$e_\mu^I(x^\lambda) \equiv \frac{\partial X^I}{\partial x^\mu}(x^\lambda), \quad (6.21)$$

et représentent donc, en x , la matrice Jacobienne du changement de système de coordonnées x^μ vers les coordonnées localement inertielles X^I en x . L'équation de la trajectoire de A (dite des géodésiques) dans le système de coordonnées quelconque (x^μ) s'écrit alors

$$e_\mu^I(x_A^\lambda) \frac{d^2 x_A^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 X^I}{\partial x^\mu \partial x^\nu}(x_A^\lambda) \frac{dx_A^\mu}{d\tau} \frac{dx_A^\nu}{d\tau} = 0, \quad (6.22)$$

et l'effet du champ gravitationnel sur la matière dans le système de coordonnées non inertielles (x) apparaît finalement être codé dans les dérivées de la tétrade au point considéré :

$$\frac{\partial^2 X^I}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial e_\mu^I}{\partial x^\nu} \quad (6.23)$$

Ce résultat montre que l'effet d'un champ de gravitation sur la matière se déduit de la donnée d'un champ de tétrades $e_\mu^I(x^\lambda)$ dans un système de coordonnées (x^μ) quelconque.

Il faut noter que, fort de notre connaissance de la relativité restreinte, nous supposerons naturellement que la physique inertielle (dans le référentiel en chute libre), est bien décrite par la relativité restreinte. Ainsi donc les indices I ci-dessus sont Lorentziens (en particulier, on peut les “monter” ou les “descendre” avec l'aide de la métrique Minkowskienne η_{IJ}).

Les tétrades se combinent alors pour former le tenseur métrique :

$$g_{\mu\nu}(x^\lambda) \equiv \eta_{IJ} e_\mu^I(x^\lambda) e_\nu^J(x^\lambda). \quad (6.24)$$

Nous nous restreignons bien sûr à des changements de système de coordonnées (entre x et X) qui sont inversibles, de sorte que la matrice Jacobienne (la tétrade) est inversible en x . Les tétrades étant inversibles, le tenseur métrique est lui même inversible et de même signature que η .

Naturellement, en un point donné il est toujours possible de trouver une tétrade ($e_\mu^I = \delta_\mu^I$) telle que la métrique $g_{\mu\nu}$ prennent en ce point la valeur Minkowskienne $\eta_{\mu\nu}$. En revanche, on sait que le référentiel en chute libre est seulement localement inertiel, ce qui signifie qu'il n'est pas possible que le tenseur métrique prennent partout la valeur Minkowskienne (sinon le référentiel en chute libre serait globalement inertiel). Nous concluons donc cette section en affirmant que les tétrades portent l'information du champ gravitationnel, information que l'on peut aussi bien coder dans le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$, qui, si localement peut toujours prendre la forme Minkowskienne, ne peut pas en général prendre cette forme partout d'ans l'espace-temps (sauf en cas d'absences d'effets de marées, *i. e.* d'absence de gravitation tout court). Autrement dit la métrique $g_{\mu\nu}$, en présence de gravitation, doit en général dépendre de l'espace $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ de façon non-triviale. Ainsi la gravitation doit être décrite par une métrique variable qui définit les distances et intervalles de temps ; par ailleurs, le fait qu'elle dépende en général de la position signifie, comme nous le verrons, que l'espace-temps est courbe.

On peut aller encore une étape plus loin et déduire déjà la forme de l'équation de la trajectoire des particules dans un champ de gravitation. La multiplication de l'équation (6.22) par l'inverse de la tétrade e_I^ρ définie par $e_I^\rho e_\mu^I = \delta_\mu^\rho$ conduit à l'équation dite des géodésiques :

$$\frac{d^2 x_A^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx_A^\mu}{d\tau} \frac{dx_A^\nu}{d\tau} = 0, \quad (6.25)$$

où la connexion Γ définie par $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho = \tilde{e}_I^\rho \partial_{(\mu} \tilde{e}_{\nu)}^I$ est manifestement symétrique par rapport aux deux indices bas. Nous verrons plus bas que cette connexion s'exprime en fonction du tenseur métrique via

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\eta} (\partial_\mu g_{\nu\eta} + \partial_\nu g_{\mu\eta} - \partial_\eta g_{\mu\nu}), \quad (6.26)$$

Chapitre 7

Aspects mathématiques de l'espace-temps courbe

7.1 L'espace-temps comme variété différentiable

7.1.1 Notion intuitive de variété différentiable

Le bon cadre mathématique pour décrire un espace-temps courbe et suffisamment lisse est celui des variétés métriques et différentielles. Nous nous contenterons ici d'une notion intuitive de ce qu'est une variété. Pour une définition exacte, et l'essentiel des résultats sur ces espaces, voir le cours de A. Füzfa sur la géométrie différentielle.

Une variété est essentiellement un espace (topologique) de points qui peuvent en plus être paramétrés continûment par des coordonnées x^1, \dots, x^N où N est la dimension de la variété. (Dans la suite on prendra $N = 4$ pour la dimension de l'espace-temps). La possibilité de co-ordonner les points P de la variété s'exprime ainsi : pour tout point P de la variété \mathcal{M} , il existe un voisinage ouvert de P et contenant P qui soit homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^N , cad qu'il existe une application ϕ_P bijective et bicontinue qui aux points Q du voisinage de P , associent un N-uplet de nombres appartenant à \mathbb{R}^N . Ces nombres sont, précisément, les coordonnées de Q . La continuité implique par exemple la propriété naturelle que deux points proches de la variété doivent avoir des coordonnées dont la différence est infinitésimale.

L'analogie avec la cartographie de la sphère terrestre est très utilisée dans les cours d'introduction à la géométrie différentielle. On voit en effet que la procédure ci-dessus permet de définir une *carte* explicite (un ensemble

de nombres) aux points de la variété abstraite. Une variété est finalement, mathématiquement, un objet qui peut être complètement décrit par un ensemble de telles cartes ; en continuant la métaphore de la géographie, on parle d'un *atlas*.

Mais le point essentiel qu'il faut retenir ici est finalement que, *localement*, on peut se permettre d'identifier complètement le voisinage de tous points de la variété à un morceau de l'espace \mathbb{R}^N . Une variété est donc en quelque sorte un recollement de proche en proche d'espaces \mathbb{R}^N , qui peuvent être « orientés » différemment les uns par rapport aux autres. Le cas de la 2-sphère plongée dans \mathbb{R}^3 permet de visualiser immédiatement cela. De notre point de vue, la surface terrestre semble plate, et on peut manifestement utiliser des coordonnées du plan pour décrire la surface. Négliger localement la courbure de la Terre, c'est travailler dans l'espace \mathbb{R}^2 , localement homéomorphe à la sphère, et qui apparaît être le plan *tangent* à la sphère. Il est clair en revanche que le plan tangent au pôle Nord ne se confond pas avec le plan tangent défini sur un point de l'équateur, par exemple.

Finalement, le fait que la variété soit différentielle signifie *en pratique* que toutes les fonctions que l'on définira sur la variété (*via* leur définitions sur les coordonnées des points abstraits) seront infiniment dérivables. (Pour une définition mathématique, voir cours cité plus haut).

En résumé, l'espace-temps sera considéré comme une entité abstraite, une variété différentiable de dimension 4, ce qui nous permettra de définir localement des coordonnées sur la variété (une carte), et qui plus profondément nous indique qu'à tout point P de l'espace-temps est associé un espace tangent \mathbb{R}^4 , noté T_P : les points Q infiniment proches de P pourront être considérés comme faisant partie de l'espace tangent de P , au premier ordre, pour ainsi dire. Cela, comme on va le voir, permettra de considérer un calcul vectoriel (et tensoriel) même dans les espaces courbes.

7.1.2 Système de coordonnées et lois de transformations

Comme on l'a dit, un système de coordonnées (SC) constitue une carte locale sur l'espace-temps. Notons le x^μ . (Note : en général un SC ne couvre pas tout l'espace-temps, il faut parfois, souvent même, considérer plusieurs cartes, *i. e.* un atlas). Nous aurions pu utiliser une autre carte autour d'un même point P , et nous aurions alors le SC donné par les x'^μ , qui sont fonctions des

anciennes :

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu}) \quad (7.1)$$

On peut alors différentier cette relation. Avant cela, introduisons une convention qui sera valable pour toute la suite de ce cours. Afin de signaler les nouvelles coordonnées, nous écrirons plutôt des indices primés que des x primés. C'est un abus de notation, mais il est très utile. Ainsi on écrit $x'^{\mu} = x^{\mu'}$, et donc en différentiant, on obtient

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \quad (7.2)$$

où la convention d'Einstein est utilisée, comme d'habitude, sur les indices répétés en haut et en bas (ici μ). Notons d'ores et déjà la puissance du calcul tensoriel (*i. e.* cette manipulation d'indices), puisqu'il n'y a pas besoin de connaître cette formule par cœur : en repérant la position des indices, et en sachant qu'il faut considérer un indice haut au dénominateur comme étant un indice bas au numérateur, le lecteur se convaincra que la loi ci-dessus est la seule possible qui soit cohérente vis-à-vis de indices.

On note que $\left[\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right]$ est la matrice Jacobienne du changement de coordonnées. Elle est inversible (à moins de choisir un changement de SC pathologique, ce que l'on évitera). Cela revient à dire que l'on peut aussi exprimer les anciennes coordonnées en fonctions des nouvelles

$$x^{\mu} = x^{\mu}(x^{\nu'}) \quad (7.3)$$

de sorte qu'il est nécessaire d'avoir la relation suivante entre les matrices jacobienes :

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} = \delta_{\nu'}^{\mu'} \quad (7.4)$$

7.2 Scalaires et vecteurs sur la variété

7.2.1 Champs scalaires

Un champ scalaire (en langage physicien) est l'application la plus simple sur une variété. C'est simplement une fonction définie sur \mathcal{M} et à valeurs réelles (ou complexe). On le note en général par la lettre $\phi : P \rightarrow \phi(P)$. Mais au lieu d'utiliser les points P abstraits, on utilise les cartes locales, ie les SC, et on écrit $\phi(x^{\mu})$, même s'il faut comprendre un abus de notation derrière cette écriture : $\phi(P) = \Phi(x^{\mu}(P))$. Il faut noter que la valeur $\phi(P)$ ne dépend

que de P et ne peut donc pas dépendre du SC choisi. Ainsi il est nécessaire que $\Phi(x^\mu(P)) = \Phi'(x^{\mu'}(P))$. Les valeurs sont égales, mais comme $x^{\mu'} \neq x^\mu$, il s'agit en fait de deux fonctions différentes Φ et Φ' , qui, toutes les deux, cependant, décrivent la même fonction $\phi(P)$.

7.2.2 Champs de vecteurs

Lorsque l'on considère la surface terrestre comme variété, on voit qu'il est impossible de définir un vecteur qui soit « trop grand », comme par exemple entre Pékin et New-York puisque ce vecteur sortirait de la variété (passerait par l'intérieur de la Terre). En revanche, l'espace étant localement identique à \mathbb{R}^N , on définit localement des vecteurs, en utilisant le fait que \mathbb{R}^N est naturellement un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Nous arrivons donc à l'idée principale du calcul vectoriel (et tensoriel) sur la variété : on profite de l'existence de l'espace tangent en tout point pour définir en chaque point un vecteur appartenant à l'espace tangent de ce point. De la sorte on peut définir un *champ de vecteur* sur la variété \mathcal{M} .

Soit l'espace tangent au point P , T_P , et soit $\vec{e}_\mu \equiv \mathbf{e}_\mu$ une base de cet espace vectoriel, formé de quatre vecteurs. En répétant la procédure en tout point, nous avons donc des bases des espaces tangents $\mathbf{e}_\mu^P = \mathbf{e}_\mu(x^\lambda)$ en utilisant un SC. La définition d'un champ de vecteur, telle que décrite plus haut, s'écrit alors

$$\mathbf{v}(x^\lambda) = v^\mu(x^\lambda) \mathbf{e}_\mu(x^\lambda) \quad (7.5)$$

ie en introduisant les composantes contravariantes $v^\mu(x^\lambda)$ de ce champ de vecteur. Il est très standard de désigner le vecteur uniquement par ses composantes. On parlera du vecteur v^μ (il est aussi sous-entendu que les composantes dépendent du point considéré), mais il faut se souvenir que la valeur de ces composantes dépendent évidemment de la base choisie dans l'espace tangent. La section suivante considère un choix particulièrement important (et classique) de choix de base.

7.2.3 Base locale formée des vecteurs tangents aux courbes coordonnées

Nous disposons d'un système de coordonnées x^μ défini autour d'un point P . Il est alors très naturel de définir les vecteurs de base de l'espace tangent T_P comme étant les vecteurs tangents (en P) aux courbes coordonnées. On parle aussi de base naturelle. Dans cette base naturelle, le déplacement infinitésimal

entre deux points P et Q s'écrit

$$d\vec{s} = dx^1 \vec{e}_1 + \dots = dx^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (7.6)$$

(Cela n'est vrai que parce que ces vecteurs sont ceux tangents aux lignes coordonnées!). Clairement, ce vecteur déplacement ne dépend que de P et de Q , et non pas du SC choisi. Soit donc un autre SC $x^{\mu'}$ et sa base naturelle associée $\mathbf{e}_{\mu'}$. On doit avoir

$$dx^\mu \mathbf{e}_\mu = dx^{\mu'} \mathbf{e}_{\mu'} \quad (7.7)$$

En utilisant les lois de transformations Eq. (7.2) et sa réciproque, on montre aisément que

$$\mathbf{e}_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \mathbf{e}_\mu \quad (7.8)$$

$$\mathbf{e}_\mu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \mathbf{e}_{\mu'} \quad (7.9)$$

La encore, on se convaincra *via* les indices et leurs positions, que c'est la seule loi que l'on pouvait écrire. Ces lois nous permettent de calculer la manière dont de transforment les composantes d'un champ de vecteur lorsque l'on change de SC.

7.2.4 Loi de transformation des 4-vecteurs

Soit un champ de vecteur \mathbf{v} et ses composantes contravariantes v^μ dans la base naturelle associée au SC (x^μ) , et soit le SC $(x^{\mu'})$. Ce qui était valable pour le déplacement élémentaire $d\vec{s}$ doit valoir aussi pour \mathbf{v} , puisque le vecteur est défini dans l'espace tangent, et ne dépend donc pas du SC. On a par conséquent

$$\mathbf{v} = v^\mu \mathbf{e}_\mu = v^{\mu'} \mathbf{e}_{\mu'} \quad (7.10)$$

Le lecteur notera la similitude de cette équation avec celle pour le déplacement, et on en déduit donc (on pourra le vérifier à titre d'exercice à l'aide des Eqs. (7.8)) que

$$v^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} v^\mu \quad (7.11)$$

et sa loi réciproque (il suffit d'inverser les indices primés et non primés). C'est la loi de transformation des composantes (contravariantes) d'un vecteur. On peut en fait même définir un vecteur par cette propriété.

7.3 Variétés métriques et espaces pseudo Riemannien

7.3.1 Métrique sur l'espace-temps

Jusqu'ici nous avons seulement profité de l'existence d'un espace tangent considéré comme espace vectoriel. Le principe d'équivalence en RG nous indique cependant que la gravité peut être localement effacée (dans un SC en chute libre), de sorte que les lois de la relativité restreinte s'appliquent localement dans ce référentiel en chute libre. Cela suggère évidemment d'identifier l'espace tangent dont nous avons parlé jusqu'ici avec l'espace de Minkowski. Autrement dit, à partir de maintenant, l'espace tangent ne sera plus seulement \mathbb{R}^4 , mais possèdera aussi la structure Minkowskienne, cad. qu'on ajoute, ou on définit, dans cet espace tangent, une métrique, dont on a vu qu'il s'agissait d'un (pseudo) produit scalaire permettant de définir en particulier le produit $g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$. On dit que $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique défini sur la variété. Il est manifestement symétrique (par symétrie du produit scalaire), cad que $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Une variété différentielle munie d'une métrique est dite Riemannienne si la signature de la métrique est euclidienne (++ ++ ou -- --), et pseudo-Riemannienne ou encore Lorentzienne dans le cas d'une signature hyperbolique (+ - - - ou - + + +).

Ainsi, dorénavant, l'espace tangent en tous point sera l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$. Il existe bien sur toujours un SC local tel que la base naturelle associée soit orthonormale pour ce produit scalaire, *i. e.* telle que le tenseur métrique prennent sa forme fondamentale $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Cependant, dans un SC quelconque, la métrique ne prend pas nécessairement cette forme.

Ce produit scalaire nous permet de définir une distance dans la variété. En formant le produit scalaire du déplacement infinitésimal $d\vec{s}$ par lui-même, nous trouvons l'intervalle élémentaire

$$ds^2 = d\vec{s} \cdot d\vec{s} = (dx^\mu \mathbf{e}_\mu) \cdot (dx^\nu \mathbf{e}_\nu) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (7.12)$$

qui est par définition indépendant du SC choisi. Cela signifie que la relation suivante doit être valide

$$\boxed{g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu}} \quad (7.13)$$

Cette formule est assez utile puisqu'il n'est pas rare en RG d'opérer des changements de SC, et que l'objet le plus important de la théorie est certainement le tenseur métrique.

7.3.2 Monter et abaisser les indices

La métrique nous servira encore à monter ou abaisser les indices. Ainsi à un champ de vecteur contravariant v^{mu} est associé un champ de vecteur covariant $v_\mu \equiv g_{\mu\nu}v^\nu$. De même, les vecteurs de bases coordonnées peuvent s'écrire en indices haut *via* $\mathbf{e}^\mu = g^{\mu\nu}\mathbf{e}_\nu$, où la métrique en indices haut est définie comme l'inverse de la métrique en indices bas, par

$$\boxed{g_{\mu\nu}g^{\mu\rho} = \delta_\nu^\rho} \quad (7.14)$$

En particulier, donc, on a aussi

$$\boxed{g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = 4} \quad (7.15)$$

On a alors les relations suivantes :

$$g^{\mu\nu} = \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu \quad (7.16)$$

$$d\vec{s} = dx^\mu \mathbf{e}_\mu = g^{\mu\lambda} dx_\lambda g_{\mu\rho} \mathbf{e}^\rho = \delta_\rho^\lambda dx_\lambda \mathbf{e}^\rho = dx_\rho \mathbf{e}^\rho = dx_\mu \mathbf{e}^\mu \quad (7.17)$$

$$\mathbf{v} = v^\mu \mathbf{e}_\mu = v_\mu \mathbf{e}^\mu \quad (7.18)$$

et les lois complètes de transformations (indices haut ou bas)

$$v^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} v^\mu \quad (7.19)$$

$$v^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} v^{\mu'} \quad (7.20)$$

$$v_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} v_\mu \quad (7.21)$$

$$v_\mu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} v_{\mu'} \quad (7.22)$$

7.4 Tenseurs et covariance générale

7.4.1 Définition

Les tenseurs sont des objets généralisant les vecteurs. De façon pratique, ce sont des objets avec plusieurs composantes, comme $T_{\mu\nu\dots}$. Ils peuvent se définir dans l'espace tangent, comme pour les vecteurs, et en fait, sans même

l'aide du tenseur métrique. Ici nous empruntons à dessein un raccourci pour définir les tenseurs *via* le tenseur métrique¹.

Revenons d'abord sur le champ de vecteur \mathbf{v} . Disposant d'un produit scalaire (*i. e.* une métrique), on voit qu'on peut identifier ce champ de vecteur à l'application linéaire qui à un vecteur \mathbf{u} de l'espace tangent associe un nombre, le produit $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$. Ce point de vue permet une généralisation immédiate. De façon similaire, on peut définir une application multilinéaire T qui à m vecteurs $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ associe un nombre $T(\mathbf{u}_{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{(m)})$. Cette application est dite un tenseur, et peut s'écrire sous la forme :

$$T(\mathbf{u}_{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{(m)}) = T_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \nu_p} u_{(1)}^{\mu_1} \dots u_{(n)}^{\mu_n} u_{(n+1) \nu_1} \dots u_{(m) \nu_p} \quad (7.23)$$

avec $m = n + p$. On dit que T est n fois covariant, et p fois contravariant. Comme pour les vecteurs, on identifiera par abus de langage le tenseur à ses composantes $T_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \nu_p}$, et les indices peuvent être montés ou abaissés à l'aide de la métrique. Ce tenseur peut aussi s'écrire à l'aide du produit tensoriel \otimes dans l'espace tangent (et cotangent ; voir cours d'algèbre multilinéaire), sous la forme de

$$T = T_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \nu_p} \mathbf{e}^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{\mu_n} \otimes \mathbf{e}_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{\nu_p} \quad (7.24)$$

7.4.2 Loi de transformation des tenseurs

Cette dernière expression permet de voir comment se transforme un tenseur dans un changement de coordonnées. On a :

$$T_{\mu'_1 \dots \mu'_n}^{\nu'_1 \dots \nu'_p} = \frac{\partial x^{\nu'_1}}{\partial x^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu'_p}}{\partial x^{\nu_p}} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}} T_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \nu_p} \quad (7.25)$$

qui sert aussi de définition à un tenseur.

7.4.3 Exemples

Un vecteur contravariant est aussi un tenseur une fois contravariant, zéro fois covariant. La métrique elle-même $g_{\mu\nu}$ est deux fois covariante, zéro fois

1. La définition plus exacte est la suivante. Un tenseur est une application multilinéaire depuis un produit tensoriel d'espace tangent et cotangent en P , *i. e.* une application multilinéaire ayant pour argument des vecteurs et des formes linéaires. Les tenseurs existent donc indépendamment de la métrique. Le tenseur métrique définit cependant un isomorphisme entre les vecteurs (indices haut) et les formes (indices bas), ce qui explique (et est résumé par) la règle pour monter et abaisser les indices. En référence au solfège, on parle d'*isomorphismes musicaux* entre les espaces tangent et cotangent, *cf.* cours de géométrie différentielle.

contravariante, etc. Le tenseur électromagnétique (*cf.* TD) est deux fois covariant et est aussi antisymétrique : $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. Le tenseur énergie impulsion (*cf.* chapitre 8) est lui symétrique : $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$.

Il n'est pas rare de trouver dans les références académiques les opérateurs dits *symétriseurs* et *antisymétriseurs*, notés respectivement par des parenthèses ou des crochets ainsi :

$$Z_{(\mu\nu)} \equiv \frac{Z_{\mu\nu} + Z_{\nu\mu}}{2} \quad (7.26)$$

et

$$Z_{[\mu\nu]} \equiv \frac{Z_{\mu\nu} - Z_{\nu\mu}}{2} \quad (7.27)$$

et qui ont pour effets de ne garder que la partie symétrique (respectivement antisymétrique) d'un tenseur donné.

7.4.4 Tenseurs et covariance générale

Revenons un moment sur l'utilité de tout ceci. Pourquoi les tenseurs (incluant les vecteurs) sont-ils des objets importants pour la théorie ? La réponse est qu'ils le sont parce qu'ils sont des objets intrinsèques à la variété, *i. e.* qui existent indépendamment de tout SC. On dit qu'ils sont, pour cette raison, des objets « géométriques ». L'utilité est manifeste, si l'on se souvient du souci de la covariance des équations sur laquelle nous avons beaucoup insisté dans les premiers chapitres. Il est nécessaire que tous les observateurs décrivent le même monde physique, puisque celui-ci est unique. Cela est en fait automatiquement garanti par l'utilisation d'équations tensorielles. Si une équation s'écrit, en effet, $G = T$, ou en composantes (par exemple avec deux indices), $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ dans un SC donné, alors un autre observateur, dans un SC différent ($x^{\mu'}$), décrira lui aussi l'équation $G_{\mu'\nu'} = T_{\mu'\nu'}$, et ces deux équations sont compatibles du fait de la loi de transformation des composantes d'un tenseur que nous venons de voir.

Ainsi l'écriture des lois de la physique sous forme tensorielle permet une description unifiée valable pour tous les observateurs, quelque soit leurs états de mouvement relatifs. Grâce au formalisme (et aux équations) tensoriels, il n'y a plus d'observateurs privilégiés comme cela était le cas en mécanique de Newton et en relativité restreinte. On appelle cela la *covariance générale* des équations. Cela ne signifie pas pour autant qu'il n'existe plus d'observateurs privilégiés. Il y en a encore, et ce sont ceux en chute libre dans un champ de gravitation. Pour eux la physique est « plus simple », puisqu'ils ne sentent plus immédiatement l'effet de la gravitation, et dans leur référentiel,

le principe d'inertie s'applique. Cependant, avec la covariance générale des équations, nous parvenons à décrire tout à la fois ces observateurs spéciaux et ceux qui ne sont pas en chute libre.

Einstein a accordé énormément d'importance à la covariance générale dans sa démarche heuristique vers la relativité générale. Il la considérait comme un postulat essentiel de sa théorie qu'il appelait plutôt *le principe ou postulat de relativité générale* (*i. e.* équivalence de tous les points de vue pour décrire le monde), d'où le nom de sa théorie. Cependant on a réalisé plus tard que la covariance générale n'est pas l'apanage de la relativité générale. En effet, on peut tout aussi bien mettre la théorie de Newton sous forme covariante générale (même si dans ce cas elle prend une forme assez compliquée; *cf.* travaux d'Elie Cartan dans les années 1920), ainsi que la RR. La covariance générale est donc un principe important qui revient essentiellement à décrire les équations de la physique sous forme tensorielle, mais cela ne suffit pas à définir complètement la théorie. Le postulat vraiment essentiel de la RG, ce n'est pas la covariance générale, c'est la structure géométrique donnée par l'identification de l'espace-temps avec une variété différentielle dont l'espace tangent est celui de Minkowski. Le troisième et dernier postulat est celui des équations dynamiques proprement dites, *cf.* chapitre 8.

7.5 Dérivée covariante des vecteurs et des tenseurs

7.5.1 Connexion et dérivée covariante d'un vecteur

Maintenant que nous disposons des vecteurs et des tenseurs, nous voulons pouvoir effectuer quelques opérations sur ces quantités, et notamment les dériver. Considérons donc la dérivée d'un champ de vecteur en un point : $\partial_\alpha \mathbf{v}$. On a

$$\partial_\alpha \mathbf{v} = \partial_\alpha v^\mu \mathbf{e}_\mu + v^\mu \partial_\alpha \mathbf{e}_\mu \quad (7.28)$$

Pour procéder plus avant il nous faut savoir ce que vaut la dérivée des vecteurs de base associés aux courbes coordonnées. Clairement, on peut la décomposer sur la base, et nous écrivons donc

$$\partial_\alpha \mathbf{e}_\mu \equiv \Gamma_{\alpha\mu}^\rho \mathbf{e}_\rho \quad (7.29)$$

où les Γ s'appellent la *connexion affine de la variété*, ou encore *symboles de Christoffel* sur laquelle nous reviendrons plus bas. Reportant, on a donc

$$\partial_\alpha \mathbf{v} = (\partial_\alpha v^\rho + \Gamma_{\alpha\mu}^\rho v^\mu) \mathbf{e}_\rho \quad (7.30)$$

On définit la *dérivée covariante* du vecteur (contravariant) comme

$$\partial_\alpha \mathbf{v} = (\nabla_\alpha v^\mu) \mathbf{e}_\mu \quad (7.31)$$

et l'on a donc

$$\boxed{\nabla_\alpha v^\mu = \partial_\alpha v^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu v^\beta} \quad (7.32)$$

L'utilité de la dérivée covariante est que ni $\partial_\alpha v^\mu$, ni $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ ne se transforment comme des tenseurs, tandis que $\nabla_\alpha v^\mu$ est un tenseur (comme on peut le démontrer). Ainsi, pour dériver (les composantes d') un champ de vecteur, il faut utiliser la dérivée covariante pour obtenir un tenseur, et non la dérivée partielle seulement. On aurait pu faire ce calcul avec les composantes covariantes du vecteur, et nous aurions obtenu le résultat suivant

$$\boxed{\nabla_\alpha v_\mu = \partial_\alpha v_\mu - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta v_\beta} \quad (7.33)$$

Noter les moyens mnémotechniques sur le signe (+ pour la dérivée covariante d'un indice haut, – pour celle d'un indice bas) et sur la façon de compléter les indices.

7.5.2 Dérivée covariante d'un tenseur

Ce type de considérations se généralise pour les tenseurs possédant davantage d'indices. Pour un tenseur à deux indices, nous avons

$$\nabla_\alpha T^{\mu\nu} = \partial_\alpha T^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu T^{\beta\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu T^{\mu\beta} \quad (7.34)$$

$$\nabla_\alpha T_\nu^\mu = \partial_\alpha T_\nu^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu T_\nu^\beta - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta T_\beta^\mu \quad (7.35)$$

$$\nabla_\alpha T_{\mu\nu} = \partial_\alpha T_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta T_{\beta\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta T_{\mu\beta} \quad (7.36)$$

et ainsi de suite s'il y a plus d'indices dans le tenseur à dériver.

En pratique, la notion de dérivée covariante est cruciale en RG, puisqu'il suffit en quelque sorte de transformer en dérivées covariantes toutes les dérivées partielles apparaissant dans la théorie de la relativité restreinte pour obtenir la généralisation de ces lois en espace courbe (puisque cette opération permet, *in fine*, de transformer des équations covariantes de Lorentz en des équations covariantes générales). Ainsi, une équation valable en espace-temps plat, par exemple (penser à l'électromagnétisme, *cf.* chapitre 4) :

$$\square V = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu V = \partial_\mu \partial^\mu V = S \quad (7.37)$$

doit devenir, lorsque l'on tient compte de la gravitation

$$\square V = \nabla_\mu \nabla^\mu V = S \quad (7.38)$$

où $\nabla^\mu \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\nu$. Il s'agit encore du d'Alembertien mais cette fois en espace courbe (attention, on utilise souvent le même symbole!). Il diffère du d'Alembertien en espace plat, car

$$\square_{\text{courbe}} V = \nabla_\mu (\partial^\mu V) = \partial_\mu \partial^\mu V + \Gamma_{\mu\rho}^\mu \partial^\rho V = \square_{\text{plat}} V + \Gamma_{\mu\rho}^\mu \partial^\rho V \quad (7.39)$$

où l'on a utilisé que V est un scalaire (et donc $\nabla_\mu V = \partial_\mu V$).

7.5.3 Calcul de la connexion métrique

Par définition de la connexion, nous avons $\partial_\alpha \mathbf{e}_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \mathbf{e}_\rho$. Nous pouvons donc calculer la dérivée partielle du tenseur métrique :

$$\begin{aligned} \partial_\alpha g_{\mu\nu} &= (\partial_\alpha \mathbf{e}_\mu) \cdot \mathbf{e}_\nu + \mathbf{e}_\mu \cdot (\partial_\alpha \mathbf{e}_\nu) \\ &= \Gamma_{\alpha\mu}^\rho \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\nu + \Gamma_{\alpha\nu}^\rho \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\mu \\ &= g_{\rho\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^\rho + g_{\rho\mu} \Gamma_{\alpha\nu}^\rho \end{aligned} \quad (7.40)$$

Et nous voyons ainsi que les Γ vont pouvoir s'exprimer comme une certaine fonction des dérivées partielles du tenseur métrique. Pour ce faire il faut considérer des permutations d'indices de l'équation précédente, contracter par la métrique en indice haut, et on trouve tous calculs faits (voir par exemple Hobson) :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\eta} (\partial_\mu g_{\nu\eta} + \partial_\nu g_{\mu\eta} - \partial_\eta g_{\mu\nu}) \quad (7.41)$$

Cette formule est essentielle. On voit que la connexion affine (définie indépendamment de l'existence ou non d'une métrique), prend une expression particulière dans un espace pseudo-Riemannien. On l'appelle dans ce cas la *connexion métrique*, ou encore la *connexion de Levi-Civita*. On remarque aussi qu'elle est symétrique par rapport aux deux indices bas :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho \quad (7.42)$$

Une propriété essentielle de cette connexion est qu'elle est, comme on dit, *compatible avec la métrique*, c'est-à-dire que

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \quad (7.43)$$

comme on peut le démontrer directement à l'aide de la formule pour la dérivée covariante d'un tenseur, et la formule pour les symboles de Christoffel. Cette formule a un grand intérêt pratique, puisqu'elle signifie en particulier qu'on peut monter ou descendre les indices à l'intérieur de la dérivée covariante :

$$\nabla_\alpha v^\mu = \nabla_\alpha (g^{\mu\rho} v_\rho) = g^{\mu\rho} \nabla_\alpha v_\rho \quad (7.44)$$

de sorte que, par exemple, on a

$$v_\mu \nabla_\alpha t^\mu = v^\mu \nabla_\alpha t_\mu \quad (7.45)$$

pour v et t des vecteurs, et toute formule similaire.

7.5.4 Formulaire utile

Complétons cette section par quelques formules utiles. En introduisant le déterminant de la métrique, $g = \text{Det}[g_{\mu\nu}]$, qui est négatif du fait de la signature, on a les formules suivantes.

$$\nabla_\mu V = \partial_\mu V \quad (\text{pour un scalaire } V) \quad (7.46)$$

$$\square_{\text{courbe}} V = \square_{\text{plat}} V + \Gamma_{\mu\rho}^\mu \partial^\rho V \quad (7.47)$$

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} A^\mu) \quad (7.48)$$

$$\Gamma_{\alpha\mu}^\mu = \partial_\alpha \ln \sqrt{-g} \quad (7.49)$$

$$\nabla_\mu A^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} A^{\mu\nu}) \quad (\text{si le tenseur est antisymétrique}) \quad (7.50)$$

7.6 Courbure de la variété métrique

Nous sommes maintenant en mesure de voir le lien qu'a tout ceci avec la courbure à proprement parler de la variété. Pour cela il nous faut d'abord introduire la notion de transport parallèle.

7.6.1 Transport parallèle d'un vecteur et géodésiques

Considérons une trajectoire dans l'espace-temps $x^\mu(\lambda)$, et soit $u^\mu(\lambda) = dx^\mu/d\lambda$ son vecteur vitesse, qui est aussi le vecteur tangent à la courbe. On dit le vecteur tangent est transporté parallèlement le long de la courbe si et seulement

si

$$\frac{Du^\mu}{D\lambda} \mathbf{e}_\mu \equiv \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} = 0 \quad (7.51)$$

où nous avons introduit avec l'opérateur $D/D\lambda$, l'analogue de la dérivée covariante, mais cette fois le long d'une courbe paramétrée par λ . Cela correspond bien à la notion de transport parallèle : nous voulons que le vecteur vitesse ne change pas entre deux points infiniment proches sur la courbe.

Calculons

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} &= \frac{du^\mu}{d\lambda} \mathbf{e}_\mu(x^\rho(\lambda)) + u^\mu(\lambda) \frac{d\mathbf{e}_\mu(x^\rho(\lambda))}{d\lambda} \\ &= \frac{du^\mu}{d\lambda} \mathbf{e}_\mu(x^\rho(\lambda)) + u^\mu u^\rho \partial_\rho \mathbf{e}_\mu \\ &= \left(\frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\rho\alpha}^\mu u^\rho u^\alpha \right) \mathbf{e}_\mu \end{aligned} \quad (7.52)$$

Au passage, on établit donc (pour le vecteur vitesse le long d'une courbe)

$$\boxed{\frac{Du^\mu}{D\lambda} = \frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\rho\alpha}^\mu u^\rho u^\alpha} \quad (7.53)$$

La condition de transport parallèle du vecteur vitesse est donc équivalente à l'équation des géodésiques dans l'espace courbe². Il faut noter qu'on peut aussi déplacer un vecteur parallèlement à lui même le long d'une courbe, sans nécessairement qu'il s'agisse du vecteur vitesse. Si l'on transporte un tel vecteur \mathbf{t} , alors la condition de transport parallèle s'écrit

$$\frac{Dt^\mu}{D\lambda} = \frac{dt^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\rho\alpha}^\mu u^\rho t^\alpha = 0 \quad (7.54)$$

En géométrie euclidienne, les courbes dont les vecteurs vitesses sont transportés parallèlement à eux mêmes sont les lignes droites. Ainsi nous voyons que les géodésiques généralisent la notion de ligne droite dans un espace courbe. On peut même aller plus loin, puisqu'en géométrie euclidienne, la ligne droite correspond aussi à la courbe de plus court chemin entre deux points A et B . C'est encore le cas en géométrie pseudo-Riemannienne. On peut en effet démontrer que la pseudo-distance entre A et B dans un espace courbe, donnée par

$$d = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_A^B \sqrt{-g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\lambda \quad (7.55)$$

2. Pour une version en « indices bas » de l'équation des géodésiques, refaire le calcul ci-dessus en indices bas ; pour le résultat, voir Eq. (10.5), section 9.2.

est extrémale pour la courbe géodésique reliant A et B (démonstration : voir Hobson). Une analogie utile ici est celle de la sphère. Pour relier deux points de la surface terrestre, le plus court chemin sont les trajectoires empruntées par les avions (des arcs de cercles). La géodésique est seulement un extrémum de distance, et pas nécessairement un minimum ou un maximum, puisque comme on le voit sur le cas du vol en avion, il y a toujours deux façons géodésiques de rejoindre A et B .

7.6.2 Une première manifestation de la courbure

Reprenons le cas de la sphère terrestre. On voit que deux lignes initialement (*i. e.*, localement) parallèles et dirigées, par exemple, vers le Nord, finiront par se croiser au Pôle Nord. Au contraire de la géométrie euclidienne, les lignes parallèles entre elles finissent par se croiser en général dans un espace courbe. Cela signifie que la distance entre deux lignes parallèles varie avec le paramètre λ de la courbe. On appelle cela la *déviations géodésique*. C'est une manifestation directe de la courbure. Son calcul doit donc mettre en évidence l'objet qui code, ultimement, la courbure intrinsèque d'une variété.

Lorsque l'on effectue le calcul de cette variation de la distance, nous trouvons, introduisant T^μ le vecteur tangent à l'une des courbes, et S^μ le vecteur joignant les deux géodésiques initialement proches :

$$\frac{D^2 S^\mu}{D\lambda^2} = R^\mu_{\alpha\beta\gamma} T^\alpha T^\beta S^\gamma \quad (7.56)$$

où l'on voit apparaître le *tenseur de Riemann* $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$ et qui est donné par (dans nos conventions de signes, attention !)

$$\boxed{R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\lambda\delta} \Gamma^\lambda_{\beta\gamma}} \quad (7.57)$$

et sur lequel nous reviendrons plus bas. Comme dit, c'est le tenseur qui doit donc représenter la courbure de l'espace-temps. On l'appelle donc aussi le tenseur de courbure. Pour plus de détails sur la déviation géodésique (et la preuve de la formule ci-dessus), voir par exemple [6].

7.6.3 Une deuxième manifestation de la courbure

Un autre effet sur la sphère terrestre nous permet encore de caractériser la courbure. Imaginons que l'on parte du Pole Nord dans une direction particulière (*i. e.* nécessairement vers le Sud), le long d'un méridien, qui est une

géodésique de la sphère, et transportons parallèlement un vecteur le long de cette trajectoire (par exemple le vecteur vitesse initial). Clairement, arrivé à l'équateur, ce vecteur est toujours dirigé vers le Sud. Déplaçons nous maintenant vers l'Ouest le long de l'équateur, en transportant parallèlement à lui même ce vecteur (dans ce cas il ne s'agit plus du vecteur vitesse!). Arrivé à un point B de l'équateur, ce vecteur pointe alors toujours vers le Sud, mais le long d'un méridien différent. Remontons au point d'origine, le Pole Nord. On voit alors que le transport parallèle de ce vecteur le long de cette trajectoire fermée a transformé le vecteur initial (orienté le long d'un méridien donné vers le Sud), en un vecteur orienté vers le Sud, mais le long d'un *autre* méridien. Autrement dit le transport parallèle d'un vecteur le long d'une courbe fermée a pour effet de le faire pivoter sur lui-même. C'est un effet de la courbure terrestre, puisque dans un espace plat, le vecteur final coïncide toujours avec le vecteur initial, comme on s'en convaincra aisément sur un schéma.

On peut effectuer le calcul de cette transformation du vecteur v^ρ transporté parallèlement à lui même le long d'une trajectoire fermée infinitésimale (un parallélogramme de coté δa et δb engendré respectivement par les vecteurs A^μ et B^ν), et on trouve alors

$$\frac{\delta v^\rho}{\delta a \delta b} = R_{\sigma\mu\nu}^\rho v^\sigma A^\nu B^\mu \quad (7.58)$$

où le tenseur de courbure apparait à nouveau.

7.6.4 Propriété du tenseur de Riemann et de ses contractions

Le tenseur de Riemann a quatre indices et donc $4^4 = 256$ composantes, mais celles-ci ne sont pas toutes indépendantes. En effet, de par sa définition, on voit qu'il possède quelques propriétés de symétrie, en l'occurrence :

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = -R_{\beta\delta\gamma}^\alpha \quad (7.59)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} \quad (7.60)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \quad (7.61)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0 \quad (7.62)$$

(cf. TD), où l'on a posé $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu} R_{\beta\gamma\delta}^\mu$. Un calcul pas complètement trivial montre alors que le nombre de composantes indépendantes du tenseur de Riemann vaut

$$\frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1) \quad (7.63)$$

où n est la dimension de l'espace-temps. Pour $n = 4$, on trouve qu'il reste seulement 20 composantes indépendantes. Pour une démonstration de ces propriétés, voir par exemple [6].

Du fait de ces propriétés de symétries, on montre également qu'il n'existe qu'une seule contraction non nulle du tenseur de Riemann. Il s'agit du *tenseur de Ricci*, défini par

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} \quad (7.64)$$

(sommé sur α , donc), et qui est symétrique par rapport aux indices μ et ν . Enfin on peut à nouveau contracter le tenseur de Ricci pour obtenir le *scalaire de courbure*, R , défini par

$$R = R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (7.65)$$

Une combinaison de ces tenseurs à une propriété remarquable. Considérons le *tenseur d'Einstein* $G_{\mu\nu}$, défini par

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (7.66)$$

Il satisfait *l'équation de Bianchi*, à savoir :

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0 \quad (7.67)$$

7.6.5 Conclusion : gravitation et courbure

Dans le chapitre 6 nous avons vu la nécessité de décrire l'espace-temps par une métrique dépendant généralement de la position. Nous avons dit que cela signifie que l'espace temps est courbe. En effet, le théorème suivant permet cette conclusion.

Théorème : L'espace-temps est plat si et seulement si le tenseur de Riemann s'annule partout $R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} = 0$, auquel cas il est toujours possible de trouver un SC global dans lequel la métrique prend en tous points sa forme fondamentale $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Réciproquement, s'il est possible de trouver un tel SC, alors l'espace-temps est plat. Lorsque l'espace-temps n'est pas plat, en revanche, un tel SC n'existe pas, et réciproquement.

Le principe d'effacement local de la gravitation, enfin, signifie, dans ce cadre géométrique pseudo-Riemannien, que l'on peut toujours trouver autour d'un point P un SC tel que la métrique en ce point soit celle de la relativité restreinte, et qui plus est, pour lequel les symboles de Christoffel s'annulent en

ce point. En revanche il est impossible d'annuler les composantes du tenseur de Riemann si celles-ci sont non nulles. On a donc, aux premiers ordres, l'équation formelle, autour de tout point P , et dans un SC adapté :

$$g_{\mu\nu}(x^\lambda) = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}(R_{\dots} x^\cdot x^\cdot) \quad (7.68)$$

où nous n'écrivons pas explicitement les indices. Cela montre que l'effet de la gravitation est effacée au premier ordre, mais qu'il reste toujours un effet du second ordre impossible à annuler, et qui est responsable des effets de marées évoqués lors de la discussion du principe d'équivalence, mais aussi de la déviation géodésique, etc.

Chapitre 8

Théorie de la relativité générale

8.1 Résumé des idées principales

Nous avons vu que le redshift gravitationnel implique que la métrique doit dépendre de la position, et en particulier de la position par rapport aux masses (et plus généralement, *via* $E = mc^2$, de la position par rapport au contenu en énergie-matière). Il est clair dès lors que l'énergie, sous toutes ses formes doit être un terme de source de la métrique, elle même pouvant être considérée comme traduisant la gravitation *via* la courbure de l'espace-temps. Pour compléter la théorie de la relativité générale, il nous faut donc trouver cette équation dynamique, qui doit être de la forme « courbure = dérivées de la métrique = source ».

Par ailleurs cette équation doit être tensorielle pour respecter la covariance générale de la théorie. Enfin, l'autre aspect de la théorie, à savoir comment la matière se déplace dans l'espace-temps courbe a déjà été abordé plusieurs fois. La matière doit suivre, simplement, des lignes droites dans l'espace-temps courbe, cad des géodésiques. (Si en revanche on considère une particule chargée électriquement, dans un espace courbe, et soumise en plus à un champ électrique, alors le mouvement ne sera plus géodésique!). Le mouvement géodésique est le mouvement libre d'une particule, cad quand elle ne subit pas d'autres forces que celle de la gravitation. La gravitation cependant ne se comprend plus vraiment comme une force dans cette théorie, mais est traduite par la courbure de l'espace-temps ¹.

1. Même si on peut toujours, il est vrai, écrire l'équation des géodésiques comme $a^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta$ et interpréter ce membre de droite comme étant la force gravitationnelle

8.2 Les deux équations de la relativité générale

Ce que nous n'avons pas dit jusqu'ici, c'est qu'il existe déjà en relativité restreinte un tenseur à deux composantes permettant de définir le contenu en énergie-impulsion dans l'espace-temps Minkowskien. On l'appelle le *tenseur énergie-impulsion* ou *stress energy-tensor*, et on le note $T^{\mu\nu}$. Il satisfait une équation de conservation (de l'énergie), donnée par $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. La généralisation en RG est immédiate. Nous considérerons qu'il existe un tel tenseur, dont la dérivée covariante est nulle $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. On cherche alors une équation de type « tenseur de courbure à deux indices dont la dérivée covariante est nulle = le tenseur énergie impulsion ». Au vu du chapitre précédant, cette équation est simplement

$$\boxed{G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}} \quad (8.1)$$

C'est l'équation d'Einstein définissant la relativité générale. Quelques commentaires. Un théorème d'Elie Cartan a démontré que cette loi est la plus générale possible, pour peu que l'on se restreigne à une équation ne contenant pas plus que des dérivées secondes de la métrique. C'est bien le cas ici, comme on peut le voir sur l'expression du tenseur de Riemann. Par ailleurs, cette équation contient un terme constant, Λ , nommée la *constante cosmologique*, et que l'on peut, à ce stade, prendre égale à zéro. Les observations actuelles favorisent une constante cosmologique très faible, n'ayant aucun rôle observable sur la dynamique des systèmes auto-gravitant, tels que le système solaire, les galaxies, ou même les amas de galaxies. Elle agit comme une force répulsive (si $\Lambda > 0$), et ne joue un rôle qu'aux échelles cosmologiques, d'où son nom. A cette échelle, en revanche, son rôle est déterminant sur le destin de l'Univers. La constante cosmologique est le candidat le plus simple pour l'énergie noire évoquée en début de ce cours, puisqu'elle produit l'accélération de l'expansion de l'Univers tardif, dont la découverte récente, on l'a dit, a reçu le prix Nobel 2011. Elle intègre donc le *modèle concordant de la cosmologie* moderne, ou Λ CDM, sur lequel nous reviendrons dans les chapitres sur la cosmologie relativiste.

Notons enfin que l'équation d'Einstein contient un facteur $8\pi G/c^4$. Cette valeur est fixée en demandant que la théorie se réduise à la théorie de Newton (l'équation de Poisson) dans la limite non relativiste et en champs faibles, comme nous le démontrons plus bas.

La seconde équation complétant la théorie d'Einstein est, comme l'a dit, l'équation des géodésiques.

8.3 Le tenseur énergie impulsion du fluide parfait

Il nous reste bien sûr une question à ce stade. Que vaut le tenseur énergie impulsion, et comment le définir ? Il dépend bien sûr du type de matière que l'on considère. Dans cette section, nous nous contenterons de donner son expression dans le cas d'un *fluide parfait*, c'est-à-dire dépourvu de viscosité et au sein duquel il n'y a pas de transfert de chaleur. Auquel cas le fluide est simplement défini par sa densité ρ en $kg.m^{-3}$ et sa pression p (en joules par mètre cube). On a

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho c^2)u^\mu u^\nu + pg_{\mu\nu} \quad (8.2)$$

où il est entendu que cette équation est valable en tous points (la densité et la pression peuvent bien sûr dépendre du point considéré), et où u^μ est la quadrivitesse d'un élément infinitésimal du fluide au point considéré. Dans le modèle standard de la cosmologie, nous utiliserons des fluides parfaits. Par ailleurs nous supposerons qu'ils sont en plus homogènes et isotropes (*cf.* Chp. 10), de sorte que la densité et la pression ne dépendront que du temps cosmique, et non de la position spatiale.

8.4 Limite Newtonienne

Montrons maintenant comment cette théorie englobe la théorie de la gravitation de Newton. Pour ce faire, considérons un fluide parfait statique (une certaine distribution de matière qui n'évolue pas dans le temps). Ce caractère statique nous permettra de poser $\partial_0 = 0$ dans tous les calculs qui suivent. Nous ferons dans tout ce qui suit les approximations (non relativistes) suivantes :

- Le champ gravitationnel est faible : la métrique peut s'écrire comme $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ avec $h_{\mu\nu} \ll 1$, et nous développerons au premier ordre en h .
- Les vitesses des particules suivant une géodésique sont petites devant la vitesse de la lumière, et ce, par rapport au (référentiel défini par le) fluide parfait considéré comme statique. Cette quadrivitesse s'écrit $u^\mu = (\gamma, \gamma\beta)$ dans un référentiel inertiel lié au fluide. Nous supposerons $\beta \ll 1$, et donc $\gamma \sim 1$. Par conséquent on a : $u^0 \gg u^i$.
- La densité de matière, apparaissant multipliée par c^2 dans le tenseur énergie impulsion, est supposée satisfaire $\rho c^2 \gg p$.

Nous commençons par le mouvement des particules tests dans ce champ gravitationnel.

8.4.1 Limite Newtonienne de l'équation géodésique

A l'aide de $u^i \ll 1$, on voit que l'équation des géodésiques se réduit à

$$\frac{d^2 x^\mu}{c^2 d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu (u^0)^2 = 0 \quad (8.3)$$

Examinons la composante zéro, et calculons pour ce faire

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{0\mu} (\partial_0 g_{0\mu} + \partial_0 g_{\mu 0} - \partial_\mu g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{0i} \partial_i g_{00} \quad (8.4)$$

où l'on a utilisé $\partial_0 = 0$. Ensuite, on développe en h . On note que $\partial\eta = 0$, de sorte que

$$-\frac{1}{2} g^{0i} \partial_i g_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{0i} \partial_i h_{00} = 0 \quad (8.5)$$

au premier ordre, car $\eta^{0i} = 0$. Donc nous avons $\Gamma_{00}^0 = 0$ dans cette limite, et par conséquent

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0 \quad (8.6)$$

c'est-à dire, $dt/d\tau = cst$. Nous choisissons $dt/d\tau = 1$, et donc $u^0 = 1$. Les composantes i de l'équation des géodésiques sont alors

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + c^2 \Gamma_{00}^i = 0 \quad (8.7)$$

Calculons ce symbole de Christoffel. On a :

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{i\mu} (\partial_0 g_{0\mu} + \partial_0 g_{\mu 0} - \partial_\mu g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{ij} \partial_j g_{00} \quad (8.8)$$

où l'on a utilisé $\partial_0 = 0$, et une somme sur les indices $j = 1, 2, 3$. Développons en $g = \eta + h$, on trouve

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} g^{ij} \partial_j g_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{ij} \partial_j h_{00} = -\frac{1}{2} \partial^i h_{00} \quad (8.9)$$

Nous avons donc que l'accélération Newtonienne $a^i = d^2 x^i / dt^2$ est donnée par

$$\mathbf{a} = \frac{c^2}{2} \nabla h_{00} \quad (8.10)$$

à comparer à la formule Newtonienne du chapitre 3, $\mathbf{a} = -\nabla\Phi$ avec Φ le potentiel gravitationnel Newtonien. Donc nous avons

$$\boxed{h_{00} = -2\frac{\Phi}{c^2}} \quad (8.11)$$

et

$$\boxed{g_{00} = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)} \quad (8.12)$$

Dans le cas d'un potentiel Newtonien à symétrie sphérique, $\Phi = -GM/r$, et retrouvons que $g_{00} = -(1 - 2GM/rc^2)$, ce que nous avons trouvé au chapitre 6 à l'aide de l'effet de *redshift* gravitationnel.

8.4.2 Limite Newtonienne de l'équation d'Einstein

Ayant ces éléments en main, nous pouvons retrouver l'équation de Poisson pour Φ à partir de l'équation d'Einstein. Posons la constante cosmologique à zéro, et réintroduisons une constante inconnue dans l'équation d'Einstein : $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$. Prenons d'abord la trace de cette équation, c'est-à-dire qu'on la multiplie par $g^{\mu\nu}$. On note que

$$g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}R) = -R = \kappa T \quad (8.13)$$

avec $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ la trace du tenseur énergie impulsion. (Nous avons utilisé $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$, cf. chapitre 7). Cela permet d'écrire l'équation d'Einstein sous la forme alternative (mais équivalente) suivante :

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + \frac{g_{\mu\nu}}{2}R = \kappa T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}\kappa T = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (8.14)$$

Examinons le membre de droite. On a $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho c^2, p, p, p)$ (cf. Eq. (8.2)), et donc $T^{\mu\nu} \sim \text{diag}(\rho c^2, 0, 0, 0)$ à l'ordre dominant. Donc nous avons aussi $T_{\mu\nu} \sim \text{diag}(\rho c^2, 0, 0, 0)$, et $T = -T^{00} = -\rho c^2$, en utilisant $g_{00} = -1$ au premier ordre. Au final, le membre de droite est donc non nul seulement sur la composante temporelle-temporelle, et vaut

$$R_{00} = \frac{\kappa}{2}\rho c^2 \quad (8.15)$$

Calculons alors $R_{00} = R_{0\alpha 0}^\alpha$. Comme $R_{00}^0 = 0$ par antisymétrie du tenseur de Riemann, nous avons

$$R_{00} = R_{0i0}^i \quad (8.16)$$

Rappelons nous maintenant que les Christoffels sont en dérivées de la métrique et sont donc d'ordre h , de sorte que les termes en $\Gamma\Gamma$ dans l'expression du tenseur de Riemann sont d'ordre 2, et nous les négligerons. Il ne reste que

$$R_{00} = R_{0i0}^i = \partial_i \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{i0}^i = \partial_i \Gamma_{00}^i \quad (8.17)$$

Mais nous avons vu que $\Gamma_{00}^i = -\partial^i h_{00}/2$, de sorte que

$$R_{00} = -\frac{1}{2} \partial_i \partial^i h_{00} = -\frac{\Delta h_{00}}{2} \quad (8.18)$$

Utilisons enfin la relation entre h_{00} et Φ , et obtenons ainsi

$$R_{00} = \frac{\Delta \Phi}{c^2} = \frac{\kappa}{2} \rho c^2 \quad (8.19)$$

soit l'équation

$$\Delta \Phi = \frac{\kappa c^4}{2} \rho \quad (8.20)$$

En comparant à l'équation de Poisson, on voit que la relativité générale se réduit à la théorie de Newton si et seulement si on pose $\kappa = 8\pi G/c^4$, comme annoncé.

Chapitre 9

Solution à symétrie sphérique dans le vide et trou noir de Schwarzschild

Ce chapitre étudie une des solutions les plus importantes des équations d'Einstein. C'est la solution à symétrie sphérique *dans le vide*, autour d'un corps sphérique de masse M , et dans le cas où la constante cosmologique est prise égale à zéro. La solution isotrope dans le vide avec $\Lambda \neq 0$ s'appelle la solution de Schwarzschild-de Sitter et ne sera pas étudiée dans ce cours. Notons seulement qu'à l'aide de cette dernière, et avec la connaissance de l'ordre de grandeur de la constante cosmologique (voir chapitres 11 et 12 de cosmologie), on montre sans peine que Λ n'a qu'une influence négligeable dans toutes les situations astrophysiques réalistes. Par conséquent, on se limitera ici à l'étude de la solution avec $\Lambda = 0$.

Cette solution, découverte par Karl Schwarzschild en 1916, décrit un espace-temps statique. Elle décrit *l'extérieur* de tout corps sphérique – aussi bien les corps « ordinaires » isolés (étoiles, etc), dont la taille physique excède leur propre rayon de Schwarzschild, que les corps dont la taille physique est, à un certain moment, passée en deça de r_S , ce que l'on appellera par la suite un trou noir (sous-entendu, de Schwarzschild). Cette solution ne décrit pas par contre l'intérieur (non vide) d'un corps. Afin de décrire l'intérieur des étoiles par exemple, il faut reprendre l'analyse trouvée ci-dessous en tenant compte dans les équations d'Einstein du tenseur énergie-impulsion de la matière stellaire, généralement considérée comme un fluide parfait en première approximation (voir les chapitres *relativistic stars* dans les références académiques).

Il existe d'autres solutions exactes extérieures (de trous noirs), mais nous ne les étudierons pas dans ce cours. Le trou noir de Schwarzschild est dépourvu de rotation propre et de charge électrique. Le trou noir sans rotation et chargé électriquement est décrit par la solution dite de Reissner-Nordström. Le trou noir avec rotation et sans charge électrique est le trou noir de Kerr. Enfin un trou noir à la fois chargé et en rotation est appelé un trou noir de Kerr-Newman.

9.1 Métrique de Schwarzschild

La solution de Schwarzschild est la plus simple que l'on puisse trouver pour un corps astrophysique. On suppose que ce corps est à symétrie sphérique et statique, de sorte qu'il est naturel de se restreindre à des solutions isotropes et statiques¹. Il a été démontré en TD que toute métrique isotrope et stationnaire (c'est-à-dire telle que les composantes du tenseur métrique ne dépende pas de la coordonnée temporelle t) prend la forme suivante en quatre dimensions

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 d^2\Omega \quad (9.1)$$

où $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Il faut noter que cette métrique est donc automatiquement statique (c'est-à-dire invariante sous $t \rightarrow -t$). Remarquons que la métrique d'un corps en rotation uniforme est stationnaire mais non statique, puisque changer t en $-t$ change le sens de rotation. Cela apparaît dans la métrique par l'existence de termes $\propto dt dr$ qui ne peuvent pas être éliminés globalement par un changement de variable (voir la solution de Kerr par exemple).

L'étape suivante consiste alors à résoudre les équations d'Einstein dans le vide pour l'élément de longueur donné en Eq. (9.1). Les composantes du tenseur métrique sont

$$g_{00} = -A \quad g_{rr} = B \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta \quad (9.2)$$

La métrique étant diagonale, la métrique inverse se calcule directement :

$$g^{00} = -1/A \quad g^{rr} = 1/B \quad g^{\theta\theta} = 1/r^2 \quad g^{\phi\phi} = 1/(r^2 \sin^2 \theta) \quad (9.3)$$

Noter qu'en TD le calcul est fait dans une paramétrisation différente pour les fonctions libres apparaissant dans la métrique. Remarquez aussi qu'on écrira

1. L'isotropie impose déjà que le corps est dépourvu de rotation, puisque sinon il existe clairement un axe privilégié.

au choix g_{00} ou g_{tt} pour les composantes temporelles ; les deux écritures sont standard. On montre alors que les symboles de Christoffel non-nuls sont

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0r}^0 &= \frac{A'(r)}{2A(r)} \\
\Gamma_{00}^r &= \frac{A'(r)}{2B(r)} \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{B'(r)}{2B(r)} \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{B(r)} \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r \sin^2 \theta}{B(r)} \\
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta \\
\Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r} \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}
\end{aligned} \tag{9.4}$$

Les composantes non-nulles du tenseur de Ricci sont alors

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rB} \\
R_{rr} &= -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{rB} \\
R_{\theta\theta} &= 1 - \frac{1}{B} - \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) \\
R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}
\end{aligned} \tag{9.5}$$

Dans le vide et en l'absence de constante cosmologique, les équations d'Einstein s'écrivent $G_{\mu\nu} = 0$, ce qui implique $R = 0$ (en prenant la trace), et donc aussi, simplement, $R_{\mu\nu} = 0$. On peut alors former

$$\frac{B}{A} R_{00} + R_{rr} = 0$$

afin d'obtenir $A'/A + B'/B = 0$ et donc $AB = cst$. Notant $B = \alpha/A$ et reportant dans $R_{\theta\theta} = 0$, on trouve $\alpha - A - rA' = 0$, c'est-à-dire $(rA)' = \alpha$. On en déduit que A s'écrit $A(r) = \alpha(1 + k/r)$, et donc $B(r) = 1/(1 + k/r)$. Cela résout toutes les équations $R_{\mu\nu} = 0$ sans spécifier les deux constantes d'intégration α et k , comme on le vérifiera. Examinons cependant la composante temporelle-temporelle de la métrique :

$$ds^2 = \alpha \left(1 + \frac{k}{r} \right) dt^2 + \dots$$

et comparons-la à la métrique trouvée au chapitre 6 *via* l'étude du redshift gravitationnel, Eq. (6.18), ou encore à l'équation Eq. (8.12) (limite Newtonienne de la RG). Il en ressort que la métrique que l'on a trouvé ici peut

décrire l'espace-temps autour d'un corps de masse M , pour peu que l'on identifie $\alpha = -c^2$ (de sorte que l'espace soit Minkowskien à l'infini $r \rightarrow \infty$; on parle d'espace asymptotiquement plat), et $k = -2GM/c^2$. La métrique de Schwarzschild s'écrit alors de la façon suivante :

$$\boxed{ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} + r^2 d^2\Omega} \quad (9.6)$$

C'est la métrique autour d'un corps sphérique et statique de masse M . Le principe d'équivalence nous avait permis d'en calculer la composante temporelle-temporelle et ce de façon exacte (accidentellement), voir Section 6.4. En revanche la partie spatiale n'était pas correcte, et seule l'utilisation des équations d'Einstein permet d'arriver à la forme ci-dessus.

Signalons aussi le résultat suivant : une métrique seulement isotrope (et pas *a priori* stationnaire), mais solution des équations d'Einstein dans le vide, est en fait nécessairement statique, *i. e.* se réduit à la métrique de Schwarzschild. C'est le théorème de Birkhoff. En pratique, cela signifie par exemple qu'une étoile pulsant de façon sphérique crée autour d'elle le même espace-temps qu'une étoile statique. Autrement dit de telles pulsations ne se propagent pas dans l'espace, et ne créent donc pas d'ondes gravitationnelles.

9.2 Géométrie de Schwarzschild

La forme même de la métrique de Schwarzschild est très intéressante à plusieurs égards. Posons d'abord une quantité homogène à une longueur, le *rayon de Schwarzschild* :

$$r_S = \frac{2GM}{c^2}, \quad (9.7)$$

et écrivons la métrique sous la forme :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (9.8)$$

Sur la mesure des quantités physiques, d'abord, nous notons que :

- La partie angulaire de la métrique a la forme standard des coordonnées sphériques, de sorte que l'aire des sphères de rayon r vaut $4\pi r^2$. C'est en fait la définition des coordonnées de Schwarzschild (on peut en effet écrire la métrique de Schwarzschild dans d'autres systèmes de coordonnées où cette propriété n'est plus vraie, et cependant on décrit toujours le même espace-temps; un exemple concret et couramment utilisé est la solution

de Schwarzschild en *coordonnées isotropes*, sur lequel le lecteur pourra se renseigner).

- La coordonnée radiale r n'exprime pas, attention, la distance physique entre un point situé à r et l'origine. Pour calculer la distance physique entre deux points situés le long d'un même rayon vecteur (même θ et ϕ) en r_1 et r_2 (*i. e.* la distance qu'on obtiendrait en reportant de proche en proche un étalon-mètre entre ces deux points), on doit utiliser :

$$L_{\text{phys}} = \int_{r_1}^{r_2} ds|_{dt=d\theta=d\phi=0} = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{g_{rr}} dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{1 - \frac{r_S}{r}} \quad (9.9)$$

qui converge si $r_2 \geq r_1 > r_S$.

- On note qu'un observateur fixe dans la géométrie de Schwarzschild ($r = cst, \theta = cst, \phi = cst$) a un temps propre donné par :

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_S}{r}} dt \quad (9.10)$$

Par conséquent la coordonnée temporelle t coïncide avec le temps propre d'observateurs statiques situés à l'infini ($r \rightarrow \infty$). On note par ailleurs que pour tout autre observateur (fixe autour du corps central), on a $d\tau < dt$. Autrement dit l'écoulement du temps, relativement à celui à l'infini, est ralenti par la présence du corps central. Plus on s'approche du corps central, plus le temps est ralenti. On remarque même que le temps s'arrête en quelque sorte en $r = r_S$, puisqu'un observateur fixe en $r = r_S$ (si cela était possible mais ça ne l'est pas) aurait $d\tau = 0$.

La suite de ce raisonnement montrerait qu'il se passe des choses étranges en $r \leq r_S$: le temps propre *semble* devenir imaginaire, à en croire l'équation Eq. (9.10), ce qui n'a évidemment aucun sens. Avant d'étudier plus en détail ce qu'il se passe en $r = r_S$, signalons juste que ce rayon est extrêmement petit en pratique. Pour un objet de la masse terrestre, on trouve $r_S \approx 9$ mm, et pour la masse du Soleil, $r_S \approx 3$ km. Bien entendu, les considérations suivantes ne s'appliquent donc pas à ces objets, pour lesquels la solution de Schwarzschild n'est correcte qu'à l'extérieur du corps. En fait les points suivants ne s'appliquent qu'aux objets dont la taille est inférieure à r_S , mais alors ces objets sont tous identiques entre eux, comme nous allons le voir. Il s'agit d'un trou noir. Sur le rayon de Schwarzschild, on note les points suivants.

- D'abord, la métrique de Schwarzschild est singulière en $r = r_S$, comme c'est manifeste sur l' Eq. (9.8). On note qu'elle est aussi singulière en $r = 0$.
- On note que si $r > r_S$, la coordonnée $x^0 = ct$ est une coordonnée temporelle, puisque $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = g_{00} = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) < 0$. De même, si $r > r_S$, les

coordonnées r, θ, ϕ sont spatiales. En revanche, si $r < r_S$, cela s'inverse, comme on le vérifiera : la coordonnée t devient une coordonnée spatiale, et la coordonnée r devient une coordonnée temporelle. Ainsi il n'est pas vrai que le temps propre des lignes d'Univers devient imaginaire en $r < r_S$, cela n'était qu'un artefact dû à la mauvaise identification de la coordonnée temporelle.

- On peut vérifier que la courbure de l'espace-temps n'est pas singulière en r_S . L'examen du scalaire de courbure n'a pas d'intérêt dans le cas présent puisqu'il est nécessairement nul en tous points, et ce pour toutes solutions des équations d'Einstein dans le vide ; en revanche, on peut calculer le *scalaire de Kretschmann*

$$R_{\mu\nu\sigma\lambda}R^{\mu\nu\sigma\lambda} = 48 \frac{G^2 M^2}{r^6 c^4} \quad (9.11)$$

Cela nous dit d'une part que la solution de Schwarzschild décrit bien un espace courbe (c'est toujours bien de le vérifier!), et d'autre part que la courbure est certes singulière en l'origine $r = 0$, mais ne l'est pas en $r = r_S$. Il faut donc comprendre la singularité de la métrique (9.8) comme étant une singularité du système de coordonnées utilisé. Il doit exister d'autres SC non singuliers en r_S et qui permettent de mieux comprendre ce qu'il se passe à ce rayon. La singularité en r_S est apparente, celle en $r = 0$ est intrinsèque.

Afin de mieux comprendre ces comportements étonnants à la traversée de r_S , il est utile d'étudier la structure causale de la solution de Schwarzschild, c'est-à-dire d'étudier la forme des cônes de lumière depuis l'infini jusqu'à $r = 0^+$, en passant par $r = r_S$.

9.3 Structure causale de la solution de Schwarzschild

Notre but est ici de tracer le diagramme spatio-temporel en (ct, r) de la solution de Schwarzschild, *i. e.* la répartition des cônes de lumières en fonction du rayon vecteur r . Nous étudions donc le mouvement radial de la lumière dans cette géométrie. La lumière satisfait $ds^2 = 0$, ce qui donne, pour des trajectoires radiales $d\theta = d\phi = 0$, et après simplifications, l'équation :

$$\frac{cdt}{dr} = \pm \left| 1 - \frac{r_S}{r} \right|^{-1}, \quad (9.12)$$

dans le plan (ct, r) . Le signe + correspond, pour $r > r_S$, à de la lumière sortante (car alors $dr/dt > 0$), et le signe - à de la lumière entrante. Ainsi

nous disposons des deux branches des cônes de lumière. L'intégration de l'équation précédente donne respectivement

$$ct = \pm \left[r + r_S \ln \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right| \right] + cste \quad (9.13)$$

dont le tracé est le suivant. Comme il y a inversion de la coordonnée tempo-

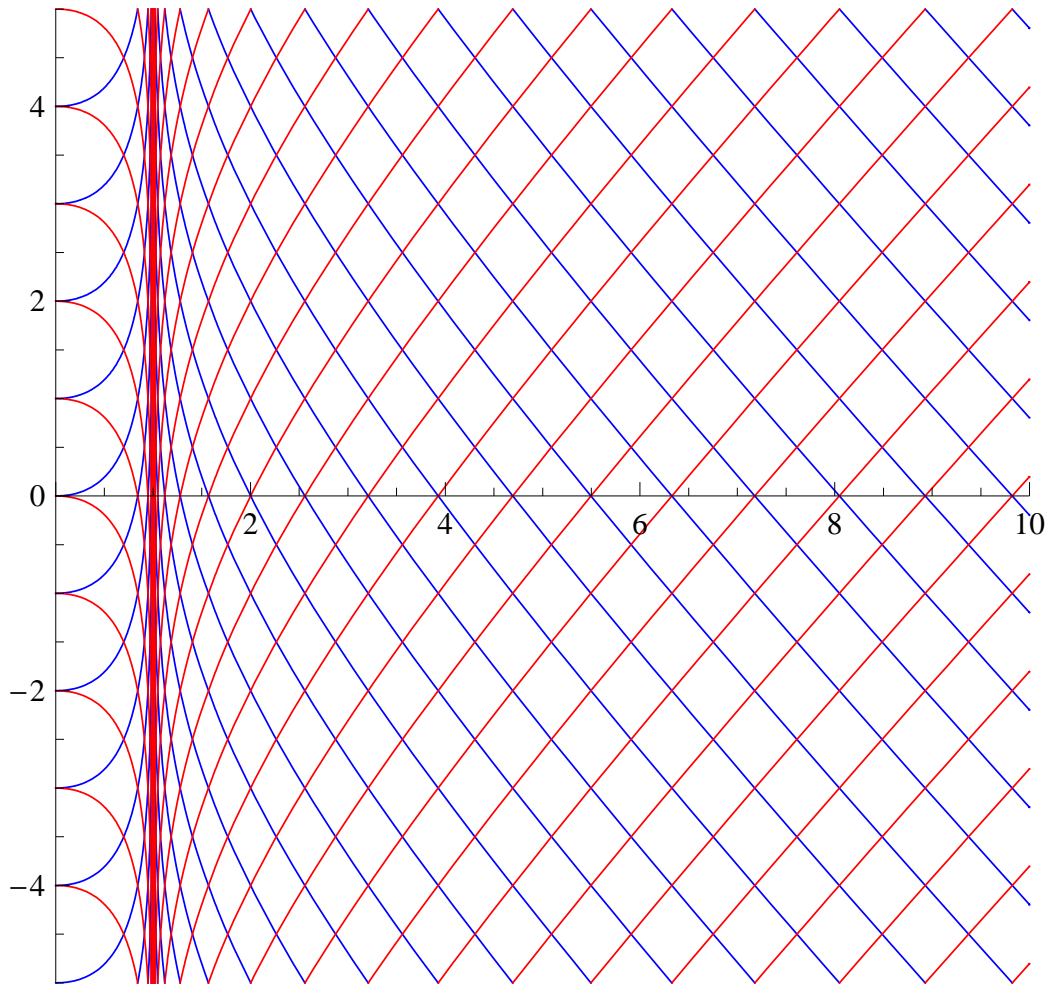


FIGURE 9.1 – Trajectoire des rayons lumineux entrants (en bleu) et sortants (en rouge), dans le plan $(ct, r/r_S)$. Ici θ et ϕ sont fixés mais quelconques, ou tout aussi bien, si l'on veut, chaque point du diagramme ci-dessus représente une sphère du rayon r correspondant.

relle en deçà de r_S , la terminologie de lumière entrante ou sortante n'a plus de sens sur ce diagramme en $r < r_S$. Néanmoins nous conservons le même code

couleur à l'intérieur de r_S . Les trajectoires des rayons lumineux traçant les cônes de lumière, on remarque immédiatement la structure quasi Minkowskienne de l'espace-temps à grand rayon, tandis que les cônes de lumière se déforment sous l'effet de la gravitation à l'approche du rayon de Schwarzschild. Le comportement en $r < r_S$ se comprend mieux en agrandissant la figure près du rayon de Schwarzschild, *cf.* ci-dessous, où nous avons ajouté explicitement les cônes de lumière. Les cônes de lumière sont tracés lo-

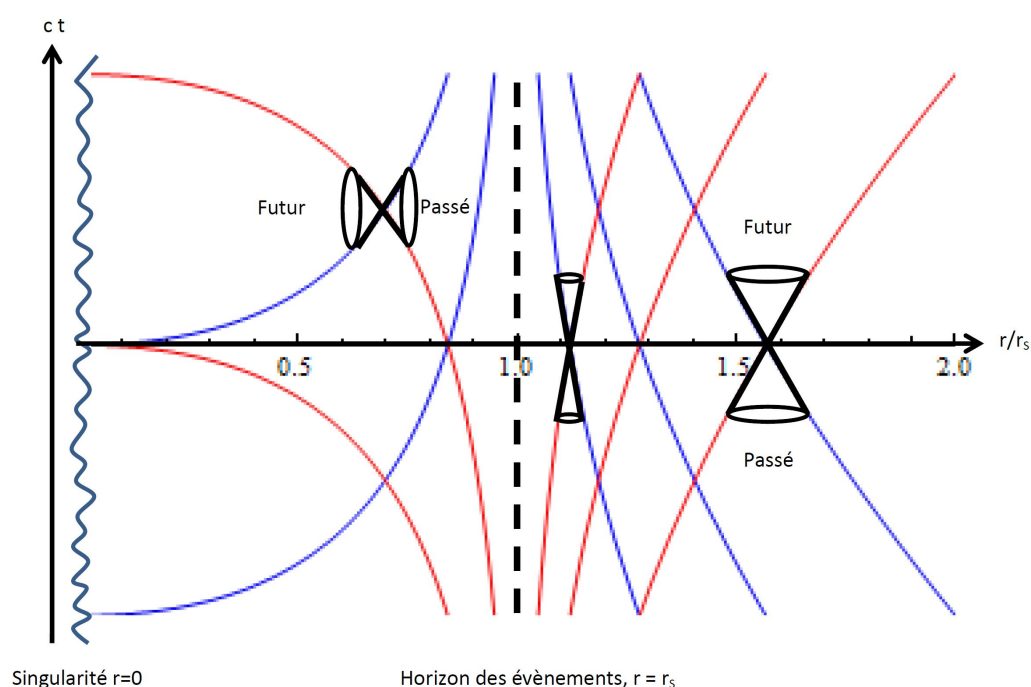


FIGURE 9.2 – Zoom de la figure précédente. La singularité en $r = 0$ est représentée par une ligne ondulée. Le pointillé signale le rayon r_S (pris égal à l'unité dans ce schéma), appelé aussi l'horizon. Les cônes de lumière, ainsi que le futur et passé absolu local ont été ajoutés.

calement de telle sorte qu'ils englobent la zone de genre temps, *i. e.* la zone satisfaisant $ds^2 \leq 0$. Le cône est donc vertical pour $r > r_S$ mais horizontal en $r < r_S$, comme on s'en convaincra à l'aide de la métrique. Comme on le voit par ailleurs sur l'équation Eq. (9.12), à la limite $r = r_S$, on a

$$\frac{cdt}{dr} = \pm\infty, \quad (9.14)$$

signifiant que le cône de lumière sur la sphère $r = r_S$ a une ouverture égale à zéro². La position du futur et du passé autour de ces cônes est plus difficile à justifier (en tout cas dans la zone intérieure), du fait de la singularité du système de coordonnées utilisé. En fait, par continuité, et en n'oubliant pas qu'il s'agit seulement d'une singularité de coordonnées, il est nécessaire que le futur dans la zone intérieure soit orienté vers les r négatifs. Qu'il en soit ainsi sera plus immédiat dans le SC étudié en section 9.4 plus bas³.

Ce diagramme est très intéressant puisque toute particule, massive ou non, doit avoir une trajectoire toujours comprise dans son cône de lumière en chaque point. On donc voit en particulier que :

- Puisque $r = r_S$ est l'asymptote de toutes les lignes bleues, il faut un temps coordonnée infini pour atteindre la surface $r = r_S$. Dit autrement, un observateur situé à l'infini reçoit jusqu'en $t = +\infty$ des signaux d'un corps tombant dans le trou noir. Pour cet observateur, la chute vers le trou noir semble infiniment longue. Il n'en est pas de même cependant pour le corps lui-même, qui franchit $r = r_S$ en un temps propre fini (voir section 10.2.2).
- De la même façon, il faut un temps coordonnée infini pour s'échapper de la surface $r = r_S$.
- Conformément à la discussion sur le caractère temporel ou spatial des coordonnées r et t , les cônes de lumières s'inversent (ou « tiltent » en $r < r_S$. Par ailleurs, du fait de l'orientation des cônes de lumière, que l'on soit une particule « entrante » ou « sortante », avec ou sans masse, dans tous les cas, on voit que dans cette zone on est inexorablement mené depuis $r < r_S$ vers $r = 0$, *i. e.* vers la singularité⁴.

Résumons : il semble impossible depuis l'extérieur de joindre la zone intérieure. Cela n'est en fait pas correct. Il est vrai que cela prend un temps coordonnée infini, mais un temps propre fini seulement, comme nous le montrerons explicitement au prochain chapitre (section 10.2.2). Ces infinis sont liés à la singularité du système de coordonnées. En revanche, il est impossible de sortir de la zone intérieure. La frontière $r = r_S$ est donc une frontière causale que l'on peut pénétrer dans un sens mais pas dans l'autre. On l'appelle *l'horizon des événements* (du fait qu'aucun événement intérieur ne peut in-

2. Cela semble indiquer que la lumière vivant en $r = r_S$ doit nécessairement y rester, cela n'est en fait pas correct : le fait que le cône de lumière devienne singulier en r_S est un effet de la singularité du SC ; pour mieux comprendre, voir section 9.4.

3. Il faut cependant noter que l'on pourrait aussi avoir une figure entièrement renversée au niveau causal, avec le futur orienté vers le bas dans la zone extérieure, et vers la droite dans la zone intérieure. Il s'agirait alors d'un trou blanc, et non d'un trou noir. Pour plus d'explications à ce propos, voir section 9.4.

4. Du fait de l'orientation futur/passé des cônes .

fluencer la dynamique extérieure, autrement dit la physique intérieure à r_S est définitivement cachée par l'horizon, et inaccessible).

La zone intérieure ainsi que l'horizon des événements en $r = r_S$ définissent ensemble le trou noir de Schwarzschild. Un analogue simple au trou noir est un écoulement fluide dans un entonnoir, suffisamment rapide (et de plus en plus rapide vers le centre de l'entonnoir) pour qu'à un certain point (l'horizon), la vitesse du fluide dans le référentiel du laboratoire dépasse la vitesse du son à l'intérieur du fluide. Alors, il est impossible d'envoyer depuis la zone intérieure des ondes sonores qui attendraient la zone extérieure, *i. e.* qui « remonteraient » le courant et dépasseraient l'horizon. En fait, ces ondes tombent nécessairement vers $r = 0$. C'est un *trou noir acoustique*⁵. Cette analogie permet aussi de mieux comprendre la possibilité d'avoir des ondes sonores suivant des trajectoires circulaires (au chapitre suivant nous montrerons en effet que des photons peuvent suivre des trajectoires circulaires autour du trou noir). Bien qu'en ce point, la vitesse du son soit plus grande que celle de l'écoulement, ce qui implique naïvement dans une vue en coupe (de type Fig. 9.2) que les cônes sonores sont ouverts, et donc qu'une onde radiale doit soit s'échapper, soit tomber vers le trou noir acoustique, cela est oublier la présence d'autres dimensions au problème. Ainsi la vitesse du son se répartit en une vitesse radiale compensant exactement la vitesse d'entraînement du fluide, et une vitesse orthoradiale assurant une trajectoire uniforme et circulaire à l'onde sonore « en orbite » autour de l'horizon sonique. A l'horizon sonique, en revanche, les ondes sonores purement radiales ont exactement la vitesse de l'écoulement, de sorte qu'elles peuvent soit rester sur place si dirigées radialement vers l'extérieur, ou tomber vers l'intérieur sinon. C'est là encore une analogie de la structure causale à l'horizon, telle que représentée dans les *coordonnées avancées d'Eddington-Finkelstein*, section 9.4 ci-dessous.

En symétrie sphérique, un trou noir se forme donc lorsque qu'un corps s'effondre sur lui-même jusqu'à atteindre son propre rayon de Schwarzschild. Ce trou noir satisfait alors $GM/rc^2 = 1/2$. Tous les corps sphériques ordinaires ont donc une *compacité* s inférieure : $s = GM/rc^2 < 1/2$. La compacité maximale est celle du trou noir. Cela est une des conséquences les plus inattendues peut-être, et probablement des plus importantes de la relativité générale en vue d'une théorie quantique de la gravitation : *Il est impossible,*

5. Ces objets sont intensément étudiés de façon théorique et expérimentale, puisque l'analogie avec la gravitation est quasiment totale. En réalisant alors l'écoulement d'un fluide quantique avec horizon, on peut espérer mesurer l'analogie de l'effet Hawking, et plus généralement, les propriétés de l'intrication quantique entre l'intérieur et l'extérieur de l'horizon (sonique).

en principe, de stocker dans une région sphérique de taille R , une énergie supérieure à $E = Rc^4/2G$, ou encore $R/2$ en unités naturelles. Et cela parce que, si l'on injecte davantage de masse (ou d'énergie) dans un trou noir déjà formé, la taille de son horizon croît de sorte que l'équation $GM/Rc^2 = 1/2$ soit toujours strictement respectée (en tout cas à l'équilibre). Il faut noter, et cela aussi est surprenant, qu'il ne s'agit pas d'une borne sur la densité maximale d'énergie dans l'espace-temps. La « densité effective » d'un trou noir (définie comme la densité moyenne M/R^3) est en fait quelconque. Il n'est pas nécessairement vrai qu'un trou noir est « extrêmement dense », comme on le lit souvent, ou que sa gravité à sa surface est très grande. Cela est vrai pour les trous noirs légers. En revanche, des trous noirs extrêmement massifs pourraient très bien avoir une densité moyenne de type celle que nous avons sur Terre⁶ (encore une fois cette densité moyenne n'a pas de signification physique a priori, puisque la solution de Schwarzschild semble indiquer que toute la matière à l'intérieur de l'horizon est projetée vers la singularité centrale). Il se trouve même que le GM/rc^2 de l'Univers est proche de $1/2$ (c'est relié *grosso modo* au fait que le $\Omega_T \sim 1$, cf. chapitres 11 et 12), ce qui a amené nombres de spéculations intéressantes sur la possibilité que notre Univers lui-même soit simplement l'intérieur d'un trou noir.

9.4 Autres systèmes de coordonnées

Il est possible de trouver des systèmes de coordonnées qui ne soient pas singuliers au rayon de Schwarzschild. Il faut noter, en parfait accord avec la notion même de variété, que le recours à d'autres SC va peut-être nous amener à décrire une partie plus grande – ou plus restreinte – ou encore une partie autre, de la variété totale. Le SC n'est qu'une carte locale, tandis que la variété ne se décrit qu'à l'aide d'un atlas, en général non-trivial. C'est le cas de la géométrie de Schwarzschild. Nous allons ici introduire les coordonnées avancées d'Eddington-Finkelstein qui ne couvrent pas davantage de la variété que le SC de Schwarzschild lui-même, mais qui a l'avantage d'être régulier en r_S , de sorte que les propriétés causales (les cônes de lumières) sur, et à l'intérieur de l'horizon seront plus claires et manifestes que dans le SC de Schwarzschild.

Les coordonnées avancées d'Eddington-Finkelstein sont définies par le changement de variable de (ct, r, θ, ϕ) vers le SC (ct', r, θ, ϕ) , avec $ct' = ct +$

6. Par exemple, un trou noir de masse aussi grande que celle d'une galaxie aurait une « densité moyenne » effective plus faible que l'air.

$2M \ln |r/2M - 1|$. Cela conduit à une métrique régulière à l'horizon :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt'^2 - 2 \frac{r_S}{r} c dt' dr + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

et le tracé du diagramme causal donne la Fig. 9.3. On y voit la régularité des géodésiques entrantes (mais singularité des sortantes ; la situation s'inverse dans le cas du SC retardé), et en particulier, donc, la régularité des cônes de lumière au passage de l'horizon, indiquant également que dans la zone intérieure, le futur se termine sur la singularité.

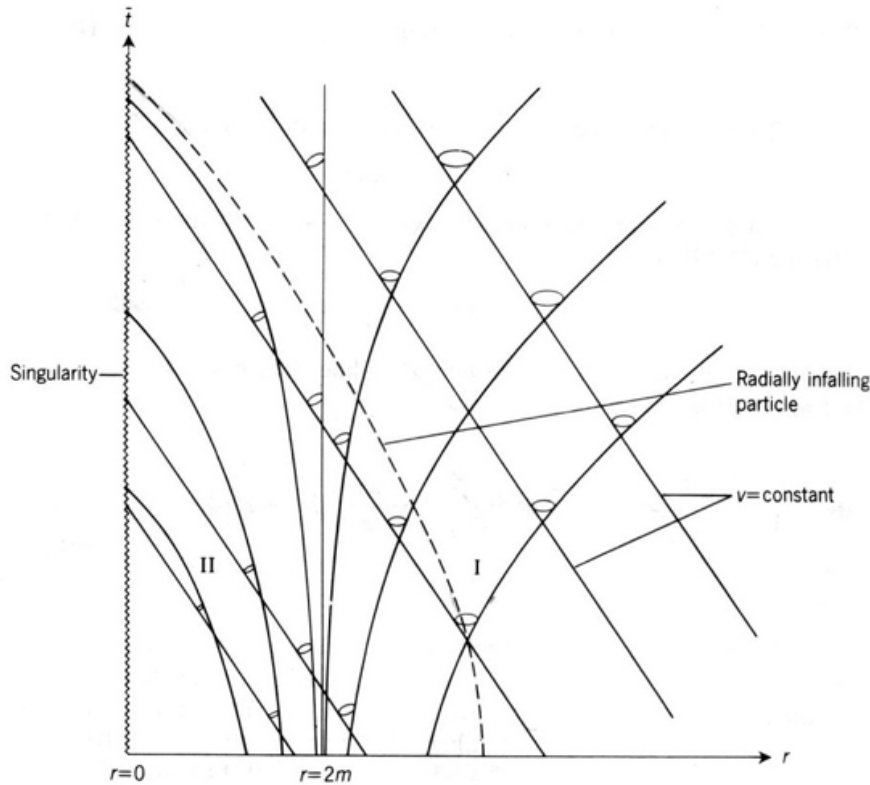


FIGURE 9.3 – Structure causale du trou noir de Schwarzschild dans les coordonnées avancées d'Eddington-Finkelstein.

Signalons également l'existence des coordonnées retardées d'Eddington-Finkelstein qui décrivent essentiellement le même type d'espace, mais avec une causalité inversée, c'est-à-dire possédant un horizon duquel on ne peut que s'échapper, mais dans lequel on ne peut pas pénétrer. C'est l'opposé du trou noir, et

cette solution a par conséquent été baptisée trou blanc, ou *white hole* (de Schwarzschild). Il faut comprendre que ce SC est une autre carte de la variété complète de Schwarzschild, qui, par conséquent, ne possède pas seulement un trou noir, mais aussi un trou blanc. En fait, on peut démontrer qu'il existe une *extension maximale* à la solution initiale de Schwarzschild, appelé solution de Kruskal, et décrit par les coordonnées du même nom, qui décrit une solution de type trou noir/trou blanc qui se conçoivent comme des singularités (resp.) futures et passés, connectées par un trou de ver (*wormhole*), ainsi que deux Univers causalement déconnectés, et extérieurs à ces horizons. Pour plus détails, voir par exemple [5, Chp. 11].

Chapitre 10

Mouvements dans la géométrie de Schwarzschild ; les tests classiques de la relativité générale

Ce chapitre étudie comment les particules – massives ou non – se meuvent dans la géométrie de Schwarzschild. Cette géométrie représente bien, entre autre, la forme de l'espace-temps à l'extérieur du Soleil¹, de sorte que l'on pourra comparer les trajectoires théoriques aux trajectoires effectivement observées des planètes ou de la lumière dans le système solaire. Cela constitue les *tests classiques* de la relativité générale. L'accord entre théorie et « expérience » atteint désormais une valeur relative de environ 10^{-5} .

Plus précisément nous étudierons les mouvements de ce que l'on appelle des *particules-tests*. Les particules-tests sont par définition des corps (massifs ou non) qui influencent de façon négligeable la géométrie fixée par la masse centrale M . Autrement dit nous négligerons dans cette section l'auto-gravitation du corps sur son propre mouvement². L'effet de l'auto-champ gravitationnel sur le mouvement du corps s'appelle l'auto-force, ou plus couramment la *self-force*. En bref, elle s'oppose typiquement au champ d'accélération auquel est soumis le corps, de manière analogue au cas électromagnétique (le

1. En négligeant en première approximation la rotation propre ainsi que l'aplatissement aux pôles du Soleil.

2. Noter qu'un photon, quoique dépourvu de masse, n'est pas dépourvu d'énergie, de sorte qu'un faisceau électromagnétique génère effectivement une courbure de l'espace-temps.

phénomène du *Bremsstrahlung*). En conséquence, le corps orbitant autour de M perd de l'énergie (par émission d'ondes gravitationnelles), de sorte qu'au lieu de décélérer, ce corps accélère en fait en spiralant vers le corps central (sa vitesse orbitale augmente, sa distance radiale diminue). L'effet est en général totalement négligeable à moins que les deux corps soient proches et de masses comparables. La Terre, par exemple, perd effectivement de l'énergie sous l'effet de sa self-force, mais cet effet n'est même pas mesurable [2].

Négliger la self-force est une hypothèse quasiment inévitable, dans le sens où tenir compte à la fois de la gravitation engendrée par le corps central, *et* de celle engendrée par le satellite à ce corps, est extrêmement difficile techniquement. On entre en fait dans la description du *mouvement à deux corps*, qui, bien que immédiate en gravitation Newtonienne, est excessivement difficile en relativité générale (du fait, notamment, de la non-linéarité des équations d'Einstein), et dont la solution exacte n'est pas connue³.

Rappelons pour clore cette introduction que nous avons les résultats suivants en théorie Newtonienne :

- La lumière n'est pas déviée par la gravitation.
- Les particules massives suivent des coniques, soit ouvertes (hyperboles, paraboles), soit fermées (ellipses).

Le premier point n'est plus vrai en relativité générale, tandis que le schéma pour les particules massives se complique sensiblement en relativité générale.

10.1 Géodésiques de la géométrie de Schwarzschild

Nous étudions donc les géodésiques des particules massives et non massives. Dans les deux cas les équations géodésiques sont identiques, à savoir :

$$\frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu u^\rho u^\sigma = 0, \quad (10.1)$$

pour la quadrivitesse définie ici par $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$ où λ est un paramètre affine quelconque ayant la dimension d'une longueur, paramétrant la trajectoire

3. Pour des raisons astrophysiques, on s'intéresse beaucoup à la dynamique de deux étoiles à neutrons et/ou trous noirs spiralant l'un vers l'autre. En effet ces systèmes spiralant sont *a priori* des sources majeures d'ondes gravitationnelles (*i. e.* des perturbations ondulatoire de la métrique) comme expliqué plus haut. On tente encore aujourd'hui de détecter directement sur Terre ces ondes gravitationnelles par interférométrie (expériences LIGO et VIRGO, opérationnelles, ainsi que le projet LISA, qui semble pour le moment abandonné).

$x^\mu(\lambda) = (t(\lambda), r(\lambda), \theta(\lambda), \phi(\lambda))$ de la particule test dans les coordonnées de Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) . La seule différence entre les particules massives et sans masses tient à la normalisation différente du carré de la quadrivitesse. Dans la suite nous utiliserons plutôt la forme alternative – en indices bas – de l'équation des géodésiques⁴ :

$$\boxed{\ddot{x}_\mu = \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} \quad (10.5)$$

Ici un point marque une dérivée par rapport à λ . Cette forme de l'équation des géodésiques est très commode dans le cas où la métrique $g_{\mu\nu}$ ne dépend pas de certaines coordonnées. Si par exemple elle ne dépend pas de la coordonnée temporelle x^0 , c'est-à-dire si $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$, alors on obtient immédiatement que $\ddot{x}_0 = 0$ et donc que $\dot{x}_0 = cst$ est une constante du mouvement. La métrique de Schwarzschild ne dépend ni du temps t , ni de l'angle azimutal ϕ . Par conséquent le problème est déjà à moitié résolu : il existe deux constantes, notées $-k$ (le signe négatif est conventionnel ici) et L , telles que $u_t \equiv u_0 = -k$ et $u_\phi = L$. Noter que $u_0 = g_{0\mu} u^\mu = g_{00} u^0$ puisque la métrique est diagonale, de sorte que l'on a ($u^0 = ct$ par définition) :

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} = k \quad (10.6)$$

où l'on a pris $G = c = 1$ pour simplifier l'écriture (k est sans dimension, puisque λ est choisi de la dimension d'une longueur). On rétablira les

4. Cette formule se démontre à l'aide du chapitre 7. En section 7.6, nous avons vu que la géodésique est la courbe qui transporte parallèlement à lui-même son vecteur tangent. Au lieu de calculer $d\mathbf{u}/d\lambda = 0$ en indices haut (cf. Eq. (7.52)), on peut le calculer en indices bas. Le plus simple est de procéder ainsi : $d\mathbf{u}/d\lambda = u^\rho \partial_\rho \mathbf{u}$. On utilise l'équation Eq. (7.31) et le fait que la connexion est compatible avec la métrique ($\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$). Alors on a

$$\partial_\rho \mathbf{u} = (\nabla_\rho u^\mu) \mathbf{e}_\mu = (\nabla_\rho u_\mu) \mathbf{e}^\mu = (\partial_\rho u_\mu - \Gamma_{\mu\rho}^\alpha u_\alpha u^\rho) \mathbf{e}^\mu \quad (10.2)$$

Comme on a $u^\rho \partial_\rho u_\mu = du_\mu/d\lambda$, on trouve l'équation des géodésiques en indices bas :

$$\frac{Du_\mu}{D\lambda} = \frac{du_\mu}{d\lambda} - \Gamma_{\mu\rho}^\alpha u_\alpha u^\rho = 0 \quad (10.3)$$

En exprimant le symbole de Christoffel, on trouve

$$\frac{du_\mu}{d\lambda} = \Gamma_{\mu\beta}^\alpha u_\alpha u^\beta = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\alpha}) u^\alpha u^\beta \quad (10.4)$$

Les deux derniers termes s'annulent entre eux par symétrie du calcul sur les indices α et β , et on trouve le résultat souhaité. Une autre façon de procéder est simplement d'abaisser les indices de l'équation des géodésiques en indices haut. Cependant, ce faisant, il faut prendre garde que $du_\mu/d\lambda \neq g_{\mu\rho} du^\rho/d\lambda$! (Savez-vous pourquoi?). Il faut introduire un terme correctif, et finalement obtenir le bon résultat.

constantes dimensionnées à la fin du calcul. De même, on a $u_\phi = g_{\phi\phi}u^\phi$, soit donc

$$r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = L. \quad (10.7)$$

L'équation sur θ donne (attention à l'indice bas !)

$$\ddot{x}_\theta = \frac{d}{d\lambda}(u_\theta) = \frac{d}{d\lambda}(g_{\theta\theta}u^\theta) = \frac{d}{d\lambda}(r^2\dot{\theta}) = r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}$$

et donc, en divisant par r^2 :

$$\ddot{\theta} + 2\frac{\dot{r}\dot{\theta}}{r} = \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2, \quad (10.8)$$

dont une solution évidente est $\theta = \pi/2$. (Par isotropie de la solution, on peut toujours changer les axes du SC afin que le mouvement se fasse dans le plan équatorial d'équation $\pi/2$). Quoiqu'il n'est pas prouvé ici que c'est la seule solution, il se trouve que cela est le cas [6, Chp. 7], et nous retrouvons ainsi le résultat Newtonien, qui se comprend au mieux comme issu de la conservation du moment cinétique, et qui veut que les mouvements orbitaux soient plans. Dans la suite nous prendrons donc $\theta = \pi/2$. L'équation pour l'évolution de la distance radiale r peut aussi être déterminée à partir de Eq. (10.5). Cependant il est plus simple d'utiliser l'intégrale première du mouvement qui nous est fournie par le fait que le carré de la quadrivitesse est constante. Ici l'analyse se scinde en deux, selon que l'on étudie des particules sans masses, pour lesquelles on a nécessairement⁵ $u_\mu u^\mu = 0$ tout le long de la trajectoire (géodésiques de genre lumière, ou *null geodesics*, voire « géodésiques nulles »), ou que l'on étudie des particules massives qui suivent des trajectoires de type temps (*timelike geodesics*), c'est-à-dire qui satisfont $u_\mu u^\mu = -1$, lorsque le paramètre affine est choisi de façon à coïncider avec la l'intervalle le long de la trajectoire : $u^\mu = dx^\mu/(cd\tau)$. En effet, avec un tel choix pour le paramètre affine $\lambda = c\tau$ (que nous prendrons par la suite dans le cas de particules massives), on a $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = (g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu)/c^2 d\tau^2 = ds^2/c^2 d\tau^2 = -1$ (cf. Eq. (5.34)).

Un calcul direct à l'aide de la métrique de Schwarzschild Eq. (9.6) fournit

5. Rappelons que cela provient de la relativité restreinte. Avec λ le paramètre affine le long de la trajectoire, on a $u_\mu u^\mu = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu/d\lambda^2$. Or on a vu en relativité restreinte que les photons obéissent à l'équation tensorielle $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$, qui, étant vraie localement, doit être vraie partout le long de la trajectoire en espace courbe, du fait du principe d'équivalence – ou si l'on préfère, du fait que l'espace est localement Minkowskien en tous points.

alors l'équation radiale :

$$\begin{aligned}
 u_\mu u^\mu &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \\
 u_\mu u^\mu &= \frac{-k^2 + \dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{L^2}{r^2} \\
 &= 0 \quad \text{ou} \quad -1
 \end{aligned} \tag{10.9}$$

où l'on a utilisé les deux lois de conservation Eqs. (10.6) et (10.7), ainsi que $\theta = \pi/2$. Par ailleurs on a pris pour simplifier $G = c = 1$. Dans les sections suivantes, nous étudierons tour à tour les orbites des particules massives puis non massives.

10.2 Géodésiques de genre temps

10.2.1 Équations du mouvement et potentiel effectif

Équations du mouvement. Fort de la section précédente nous savons que toute particule massive libre a un mouvement donné par les équations suivantes :

$$\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c\dot{t} = k \tag{10.10}$$

$$r^2 \dot{\phi} = L \tag{10.11}$$

$$\theta = \pi/2 \tag{10.12}$$

$$\dot{r}^2 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2GML^2}{r^3 c^2} = k^2 - 1 \tag{10.13}$$

où l'on a simplifié $u^2 = -1$ en utilisant Eq. (10.10), et l'on a réintroduit les constantes dimensionnées (on notera avec Eq. (10.7) que L a la dimension d'une longueur). On rappelle que le point dénote une dérivation par rapport à $c\tau$, de sorte que l'on peut aussi écrire l'équation radiale sous une forme plus suggestive, en divisant par deux, et en multipliant par la masse m de la particule massive :

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GMmC^2}{r^3 c^2} = mc^2 \frac{(k^2 - 1)}{2} \tag{10.14}$$

où l'on a défini également $C = L \times c$, de sorte à retrouver la constante des aires rencontrée dans les lois de Képler de la gravitation Newtonienne (chapitre 3, section 3.4). On vérifiera à titre d'exercice l'homogénéité de la formule précédente, en notant que C s'exprime en $m^2 \cdot s^{-1}$.

Interprétation. Hormis le fait que l'on dérive ici par rapport au temps propre le long de la trajectoire, et aussi le fait que la coordonnée radiale r dans la géométrie de Schwarzschild n'indique pas la distance physique (c'est-à-dire, mesurée) au corps central (*cf.* chapitre 9, section 9.2), la formule ci-dessus est relativement limpide physiquement puisqu'elle coïncide presque avec l'équation radiale Newtonienne rencontrée au chapitre 3. En effet, on reconnaît dans les trois premiers termes de Eq. (10.14), respectivement, « l'énergie cinétique radiale », puis le couplage au potentiel Newtonien $-GM/r$ (liée à la force centrale), et enfin « l'énergie de rotation autour du corps central » (liée à la force centrifuge due à la rotation, si $C \neq 0$). On comparera donc à profit l'équation Eq. (10.14) avec l'équation Newtonienne Eq. (3.12). Cela permet de constater que le quatrième terme de Eq. (10.14), à savoir :

$$-\frac{GMmC^2}{r^3c^2}$$

est nouveau, en revanche. Sans surprise, il doit donc s'annuler dans la limite Newtonienne, *i. e.* avec $c \rightarrow \infty$. C'est effectivement le cas, puisque $C = r^2\dot{\phi}c = r^2d\phi/d\tau \rightarrow r^2d\phi/dt$ est fini dans la limite $c \rightarrow \infty$. Ce nouveau terme est donc une *correction relativiste*, en général négligeable en champ gravitationnel faible, mais qui domine largement les autres termes à petit rayon r , ou encore en champ fort, du fait de la dépendance en $1/r^3$. Cela a pour effet de changer totalement les comportements possibles des orbites à petit rayons (si $C \neq 0$), comme nous allons le voir. On voit plus précisément que ce terme est négligeable par rapport au second terme (couplage à la gravitation), ssi

$$\frac{GMmC^2}{r^3c^2} \ll \frac{GMm}{r} \Leftrightarrow \frac{r\dot{\phi}}{c} \ll 1$$

c'est-à-dire quand la vitesse orbitale est négligeable devant celle de la lumière. Par ailleurs cette correction en forme de force centripète reste négligeable par rapport au terme centrifuge Newtonien (troisième terme), ssi :

$$\frac{GMmC^2}{r^3c^2} \ll \frac{mC^2}{2r^2} \Leftrightarrow \frac{GM}{rc^2} \ll \frac{1}{2} \Leftrightarrow r \gg r_S$$

c'est-à-dire loin de l'horizon. Proche de l'horizon, par conséquent, ce nouveau terme centripète domine; en conséquence le trou noir capte toutes géodésiques s'aventurant trop près de l'horizon, *cf.* plus bas.

Potentiel effectif. La comparaison avec l'équation Newtonienne et l'existence d'une énergie mécanique conservée (voir Eq. (3.13)) nous suggère d'introduire l'énergie totale de la particule. Il faut cependant distinguer l'énergie

newtonienne (cinétique plus potentielle) de la notion correcte d'énergie relativiste (énergie de masse plus cinétique plus potentielle). D'après les lois de la relativité restreinte, l'énergie de la particule test s'identifie à $E = -p_0 = -mu_0 = mk$ (avec $c = 1$). Puisque k est sans dimension, on rétablit la constante c dans le calcul avec $k = E/mc^2$, où E est donc l'énergie (relativiste) conservée. Remarquons que le membre de droite de l'équation (10.14) correspond manifestement à une énergie cinétique plus potentielle, de sorte qu'il s'agit en fait de l'énergie Newtonienne⁶ (elle aussi conservée, puisque k est constant), et que l'on peut écrire $\mathcal{E}_N = mc^2(k^2 - 1)/2 = mc^2(E^2 - 1)/2$. Pour simplifier le traitement à venir, nous choisissons $m = 1$ par la suite, les résultats ne dépendant pas, de toute façon, de la masse m du corps en orbite. L'équation radiale peut alors s'écrire sous la forme suivante, analogue au cas Newtonien, avec $m = 1$:

$$\mathcal{E}_N = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad (10.15)$$

et pour un potentiel effectif (régissant la dynamique de la variable r), donné par

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{C^2}{2r^2} - \frac{GMC^2}{r^3c^2} \quad (10.16)$$

L'étude de ce potentiel effectif fournit alors toutes les informations qualitatives que l'on peut souhaiter avoir sur le mouvement d'une particule massive en orbite autour d'un corps. Disposer de solutions analytiques est cependant plus difficile dans le cas général, du fait du terme en $1/r^3$.

Formules de Binet appliquées au cas relativiste. Le traitement analytique que l'on vient d'évoquer sera toujours plus aisé *via* le même changement de variables que celui effectué en théorie Newtonienne, et qui consiste à résoudre l'équation différentielle pour la variable $u = 1/r$ en fonction de ϕ . Nous obtenons ainsi la généralisation relativiste des formules de Binet rencontrées dans le cas Newtonien.

On dérive d'abord l'intégrale première Eqs. (10.15) et (10.16) par rapport au temps propre (ce qui élimine l'énergie conservée), puis, à l'aide des formules de Binet Eqs. (3.14, 3.15) rencontrées au chapitre 3, on montre que l'équation des orbites massives est donnée par

$$u'' + u = \frac{GM}{C^2} + \frac{3GMu^2}{c^2}, \quad (10.17)$$

6. On vérifiera en effet, avec $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ que l'on a $\mathcal{E}_N = p^2/2m$ qui est l'expression de l'énergie en théorie non-relativiste.

où le prime note une dérivée par rapport à ϕ . À nouveau, l'équation relativiste coïncide avec l'équation Newtonienne Eq. (3.16) à l'exception d'un nouveau terme (non-linéaire) qui empêche de disposer d'une expression analytique pour le mouvement orbital.

Dans les sous-sections suivantes, nous résolvons d'abord exactement le cas de la chute libre radiale, puis étudions qualitativement les orbites non-radiales à l'aide du potentiel effectif. Nous montrons finalement une solution approchée de la formule de Binet, et qui montre la précession du périhélie des orbites liées; cela permet de tester la théorie sur le mouvement de Mercure, par exemple.

10.2.2 Cas particulier de la chute libre radiale

Dans ce cas, on a $C = 0$. L'équation radiale est alors, simplement (*cf.* Eq. (10.14)) :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{GM}{r} = c^2 \frac{(k^2 - 1)}{2} \quad (10.18)$$

Dans la suite nous nous contenterons d'étudier, pour simplifier, le mouvement d'une particule test lâchée depuis l'infini et sans vitesse initiale dans le trou noir central. C'est donc la trajectoire caractérisée par $k^2 = 1$ (ou si on veut $E = mc^2$ ou encore $\mathcal{E}_N = 0$), au vu de l'équation précédente. L'équation se simplifie donc en

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \frac{2GM}{r} \quad (10.19)$$

On note d'ailleurs, en dérivant, que cela s'écrit aussi $\ddot{r} = -GM/r^2$ précisément comme en gravitation Newtonienne, aux nuances évoquées dans la section précédente (dérivée par rapport au temps propre et r qui ne donne pas la distance physique). Nous avons, pour une trajectoire tombant vers le trou noir (signe $-$) :

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad \text{et} \quad \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \quad (10.20)$$

On en déduit notamment, en intégrant la première équation, que le temps propre écoulé $\Delta\tau$ entre un rayon initial r_i et final r_f est donné par

$$\Delta\tau = \frac{2}{3\sqrt{2GM}} \left(r_i^{3/2} - r_f^{3/2} \right) \quad (10.21)$$

de sorte que la durée propre cumulée ne diverge effectivement pas à la traversée de l'horizon (et jusqu'à la singularité), comme annoncé au chapitre

9. C'est le point principal que nous voulions démontrer ici. Il est possible de résoudre complètement le mouvement radial dans les coordonnées (ct, r) , voir par exemple [5, p. 211]. Cela permet de montrer à nouveau que $t \rightarrow \infty$ si $r \rightarrow r_S$.

10.2.3 Orbites non-radiales

Nous montrons ci-contre le graphe du potentiel effectif donné en Eq. (10.16), où le rayon est tracé en unités de M (on prend $M = 1, G = 1, c = 1$, c'est-à-dire encore que $r = 3$ signifie $r = 3GM/c^2$, etc.). Dans ces unités, C a aussi la dimension d'une longueur et donc d'une masse. Comparons d'abord le cas Newtonien au cas relativiste, *cf.* Fig. (10.1).

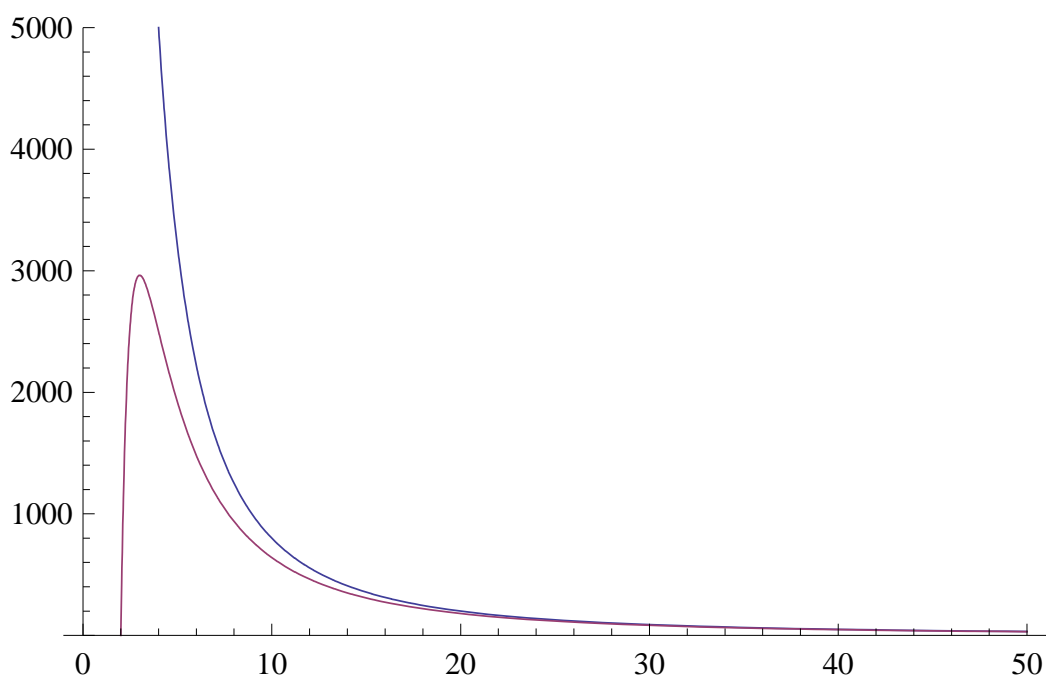


FIGURE 10.1 – Potentiel effectif pour le mouvement orbital d'une particule-test : cas Newtonien (en bleu) et cas relativiste (en mauve). Ici $C = 400M$, en unités naturelles.

Les deux potentiels coïncident à grande distance du corps central, comme attendu. A faible distance en revanche, la barrière de potentiel Newtonienne ($V_{\text{Newt}}(r) \rightarrow \infty$ si $r \rightarrow 0$) s'affaïsse dans le cas relativiste, puisque $V \rightarrow -\infty$ en $r \rightarrow 0$. Là où, en théorie Newtonienne, il est impossible à un

corps possédant un moment cinétique de tomber sur le corps central supposé ponctuel, cela devient possible en relativité générale, à énergie suffisamment grande. Il faut comprendre ici, à énergie radiale initiale suffisamment grande par rapport à celle du moment angulaire, c'est-à-dire que c'est surtout fonction de la direction initiale de la particule-test : plus la trajectoire initiale est quasi-radiale initialement, plus il devient aisé de franchir la barrière de potentiel. Plus on passe près du trou noir, plus il est probable de se faire capturer par ce dernier ; la section efficace d'un trou noir est donc typiquement plus grande que sa surface. Autrement dit encore, le trou noir capte irrémédiablement certaines trajectoires géodésiques *timelike* non-radiales⁷.

Si nous traçons maintenant seulement le potentiel total relativiste, et faisons varier C , alors nous obtenons le faisceau de courbes suivant, cf Fig. (10.2). Plus la constante des aires est élevée, plus le moment cinétique est élevé, et

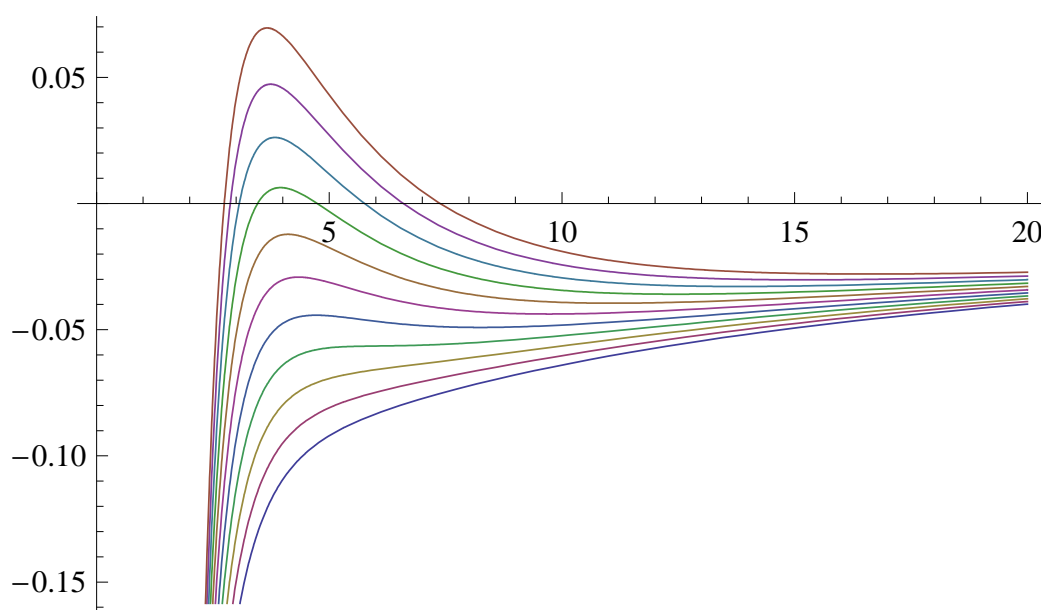


FIGURE 10.2 – Potentiel effectif pour le mouvement orbital d'une particule-test, cas relativiste. Ici C varie régulièrement de $3M$ (courbes supérieures) à $4.5M$ (courbes inférieures), en unités naturelles.

par conséquent, plus la barrière de potentiel est haute. Cela est naturel au vu de la discussion précédente sur la captation par le trou noir de géodésiques

⁷. Tant que l'on n'est pas passé sous $r_S = 2GM$, on peut toujours activer un moyen quelconque de propulsion pour échapper au trou noir, mais alors, on ne suit plus une trajectoire géodésique ; ici nous parlons uniquement des trajectoires géodésiques.

quasi-radiales mais non radiales. Outre le fait, clair analytiquement, que $V \rightarrow -\infty$ pour $r \rightarrow 0$ (et non plus $V \rightarrow \infty$ comme dans le cas Newtonien), nous notons d'autres points intéressants sur ce graphe.

Cas particulier des orbites circulaires. Sur les courbes supérieures, il existe deux points pour lesquels la dérivée du potentiel s'annule : il y a un minimum sur la partie droite (peu visible ici), et un maximum au sommet de la barrière de potentiel. En revanche, pour les courbes inférieures, il n'y a plus aucun point où la dérivée s'annule. C'est important car les points où $V'(r_0) = 0$ sont les seuls qui autorisent un mouvement circulaire $r = r_0$. En effet, à partir de $\mathcal{E}_N = \dot{r}^2/2 + V_{\text{eff}}(r)$, on obtient $\ddot{r} = V'_{\text{eff}}(r)$ et donc $V'(r_0) = 0$ pour une trajectoire circulaire. Par ailleurs, les maximums locaux $V'(r) = 0$ correspondent à des mouvements circulaires instables, et les minimums à des orbites stables. On montre que $V'(r) = 0$ est une équation du second ordre dont le discriminant est strictement positif si et seulement si $C > 2\sqrt{3}GM/c$, auquel cas on a deux orbites circulaires

$$r_{\pm} = \frac{C^2 \pm C\sqrt{C^2 - 3r_S^2}}{r_S} \quad (10.22)$$

avec $c = 1$, le signe plus correspondant à l'orbite circulaire stable, le signe moins à l'orbite instable. On note que $r_+ \geq C^2/r_S \geq 3r_S$ en utilisant l'inégalité ci-dessus. Les seules orbites circulaires stables ont donc $r \geq 3r_S = 6M$. De même, on montre que les orbites circulaires instables vont de $r_- = 3M$ à $r_- = 6M$. Finalement, il n'y a pas d'orbites circulaires du tout (discriminant négatif) en deçà de $r = 3M = 3r_S/2$. On note que $r = 3M$ est aussi le point où la force liée au moment angulaire,

$$-\nabla \left(\frac{C^2}{2r^2} - \frac{GMC^2}{r^3 c^2} \right)$$

change de signe et devient centripète ($r < 3M$) au lieu de centrifuge.

10.2.4 Précession du périhélie de Mercure

L'équation du mouvement Eq. (10.17) contient, comme on l'a vu, un terme supplémentaire, non-linéaire, par rapport au cas Newtonien. Comme nous allons le voir rapidement, cela implique que les orbites fermées, qui sont des ellipses en théorie Newtonienne, deviennent non elliptiques en relativité générale. En fait, au premier ordre, les trajectoires fermées sont des ellipses

dont le grand axe tourne sur lui-même, de sorte que la trajectoire d'un satellite dessine pour ainsi dire une sorte de rosace.

L'équation Newtonienne du mouvement

$$u'' + u = \frac{GM}{C^2} \quad (10.23)$$

a pour solution $u_N = GM(1 + e \cos \phi)/C^2$, où $0 \leq e < 1$ est l'excentricité de l'orbite. Dans le cas où la perturbation induite par le nouveau terme est petite (du fait du $1/c^2$), nous cherchons une solution perturbée de la forme $u = u_N + \delta u$. Cela revient en fait à calculer la première perturbation dans un développement en puissances de $1/c$, ce qu'on appelle aussi un *développement post-Newtonien*. Le calcul montre alors que δu satisfait

$$\delta u'' + \delta u = \frac{3G^3 M^3}{C^4 c^2} (1 + e^2 \cos^2 \phi + 2e \cos \phi)$$

dont la solution (voir [5, Chp. 10]) est de type

$$\delta u = \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right) + \frac{3G^3 M^3}{C^4 c^2} \times e \phi \cos \phi$$

où le premier terme est donc négligeable par rapport au second, puisqu'il est certes lui aussi $1/c^2$, mais cumulatif en ϕ . Si l'on ne retient que ce terme, alors on montre que la solution de Eq. (10.17) est, au premier ordre en $1/c^2$ et en e :

$$u = \frac{GM}{C^2} (1 + e \cos((1 - \alpha)\phi)), \quad (10.24)$$

comme on pourra le vérifier directement. Ici $\alpha = 3G^2 M^2 / (C^2 c^2) \ll 1$. On voit alors que l'orbite est périodique mais de période $2\pi/(1 - \alpha)$, supérieure à 2π . Cela implique la précession du grand-axe, qui se décale d'un angle $\delta\phi = 2\pi/(1 - \alpha) - 2\pi \sim 2\pi\alpha$ à chaque révolution (dit autrement c'est par exemple le décalage angulaire de la position de l'aphélie ($r = r_{\max}$) après une révolution). En utilisant finalement un résultat Newtonien liant la constante des aires à l'excentricité de l'orbite e et au demi grand-axe a ,

$$a = \frac{C^2}{GM(1 - e^2)},$$

on obtient finalement la formule de la précession du périhélie :

$$\boxed{\delta\phi = \frac{6\pi GM}{a(1 - e^2)c^2} = \frac{3\pi}{1 - e^2} \frac{r_S}{a}} \quad (10.25)$$

L'effet est donc d'autant plus grand que l'orbite est petite et que l'excentricité est grande. Le candidat idéal pour tester cette formule est donc la planète Mercure, à la fois la plus proche du Soleil et avec en plus une excentricité assez grande : $e \approx 0.2$. Les calculs précis montrent que la précession du grand-axe due aux corrections relativiste vaut théoriquement ≈ 43.03 secondes d'arc par siècle, ce qui correspond effectivement à la valeur observée de 43.1 ± 0.5 [5, Chp. 10], une fois que l'on a retiré des corrections provenant d'autres effets (précession des équinoxes et perturbation de l'orbite de Mercure par les autres planètes). C'est l'un des succès historiques majeurs de la relativité générale, puisque l'anomalie de l'orbite de Mercure était connue depuis la seconde moitié du 19ème siècle, mais inexpliquée avant la découverte du résultat ci-dessus, publié par Einstein en 1915.

10.3 Géodésiques de genre lumière

Équations du mouvement. A partir de Eq. (10.10), nous obtenons

$$\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c\dot{t} = k \quad (10.26)$$

$$r^2\dot{\phi} = L \quad (10.27)$$

$$\theta = \pi/2 \quad (10.28)$$

$$\dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2GML^2}{r^3c^2} = k^2 \quad (10.29)$$

pour les géodésiques de genre lumière, où le point est une dérivation par rapport à un paramètre affine λ , homogène à une longueur, et qui ne peut être le temps propre ou l'intervalle dans ce cas-là, puisqu'il est nul ; et k est sans dimension. De la même façon que dans le cas massif, on peut tracer et étudier le potentiel effectif. Enfin, dans les variables de Binet, l'équation de la trajectoire devient :

$$u'' + u = \frac{3GMu^2}{c^2}, \quad (10.30)$$

à comparer au cas des trajectoires massives Eq. (10.17).

10.3.1 Géodésiques radiales et circulaires

Les géodésiques radiales ont déjà été étudiés et discutés au chapitre 9, les trajectoires étant données par l'équation Eq. (9.13). On peut ajouter à cela que

la solution du rayon vecteur en fonction du paramètre affine est très simple : pour une trajectoire radiale, l'équation du mouvement devient simplement (prendre $L = 0$ dans Eq. (10.29)) $\dot{r} = \pm k$, de sorte que le paramètre affine écoulé entre un point initial quelconque et le moment où le photon tombe sur la singularité (en passant par l'horizon) est fini, mimant le résultat sur la chute libre radiale de particules massives.

Existe-t-il maintenant des orbites circulaires pour les photons? Cette question peut sembler surprenante, et pourtant la réponse est oui! En effet, il suffit de poser $u = cst$ dans l' Eq. (10.30) pour trouver que des photons peuvent avoir une trajectoire circulaire en $r = 3GM/c^2$. Pour cette raison, on parle de la *sphère de photons*, ou *photon sphere* en anglais. En revanche ces orbites sont instables (comme on le verrait en traçant le potentiel effectif), de sorte que l'effondrement gravitationnel d'un trou noir (exactement dépourvu de moment angulaire ou de charge électrique, ce qui est déjà une idéalisation) ne conduit sans doute pas à peupler de façon significative la sphère de photons, qui a dès lors une existence surtout théorique.

10.3.2 Déflexion de la lumière

Nous terminons ce chapitre par le calcul de la déflexion de la lumière par un potentiel central, et l'appliquons au cas de la déflexion de la lumière en incidence rasante auprès du Soleil. Le calcul est assez simple. Puisque nous cherchons l'angle $\Delta\phi$ entre les deux asymptotes à la trajectoire (hyperbolique) du photon, nous cherchons d'abord l'expression de $d\phi/dr$. Nous avons $d\phi/d\lambda$ et $dr/d\lambda$ dans les équations précédentes Eqs. (10.28) et (10.29). Notons d'abord que l'on peut exprimer la valeur de k de Eq. (10.29) en fonction de la distance minimale d'approche du rayon lumineux par rapport au corps central, r_0 , tel que $\dot{r}_0 = 0$. Alors on a

$$\frac{L^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{r_S}{r_0}\right) = k^2$$

de sorte que

$$\dot{r}^2 = \frac{L^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{r_S}{r_0}\right) - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)$$

Alors on a, en utilisant aussi Eq. (10.28), et après simplifications

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \left(1 - \frac{r_S}{r_0}\right) - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \right]^{-1/2} \quad (10.31)$$

Par symétrie du problème autour de r_0 , l'angle de déflexion s'exprime alors comme $\Delta\phi = 2(\phi(\infty) - \phi(r_0)) - \pi$, soit donc

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left(1 - \frac{r_S}{r_0} \right) - \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) \right]^{-1/2} - \pi \quad (10.32)$$

de manière exacte. On peut maintenant développer cette expression au premier ordre en $1/c^2$. Cela donne un premier terme Newtonien

$$2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r} \left[\frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right]^{-1/2} = \pi$$

et une correction relativiste

$$2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r} \frac{(r^2 + rr_0 + r_0^2)r_S}{2rr_0(r + r_0)\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}} = \frac{2r_S}{r_0}$$

Dans le cas d'une lumière rasant la surface du Soleil, $r_0 = R_{\odot}$ (le rayon du Soleil), et dans ce cas, la déflexion vaut, au premier ordre,

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{4GM}{R_{\odot}c^2}} \quad (10.33)$$

qui s'évalue numériquement à 1.74 secondes d'arc, en très bon accord avec les observations.

Quatrième partie
Cosmologie relativiste

Chapitre 11

Modèles d'Univers homogènes et isotropes

Le lecteur trouvera peut-être utile de relire à ce stade la section sur la cosmologie Newtonienne (Section 3.6). Dans ce chapitre, nous revenons d'abord sur les principes de la cosmologie relativiste. Nous décrivons ensuite la géométrie puis la dynamique des Univers homogènes et isotropes. Les observables et la détermination des paramètres cosmologiques sont discutés au chapitre suivant.

11.1 Principes de la cosmologie

Comme nous l'avons vu dans les premiers chapitres, le contenu de l'Univers est structuré de façon complexe. Afin d'étudier la dynamique de l'Univers dans son ensemble, il est nécessaire de simplifier (considérablement) l'analyse en empruntant des raccourcis qu'il s'agira de justifier *a posteriori*¹. Nous avons vu que l'Univers semblait relativement homogène à très grande échelle (> 100 Mpc), et que ses propriétés ne semblaient pas dépendre de la direction de l'observation. Il est alors naturel de supposer que cela ne nous est en rien spécifique (c'est le principe copernicien qui demande que nous n'occupions pas une place privilégiée dans l'Univers), de telle sorte que l'on est amené à supposer que l'Univers doit être isotrope en *tous* points, ce qui implique alors qu'il est nécessairement homogène. Dans ce cadre l'Univers ne peut être rempli que de divers fluides de densités uniformes dans l'espace. On parle

1. C'est une tâche difficile qui n'est pas encore menée à son terme aujourd'hui, *cf.* ci-dessous

aussi du *principe cosmologique*. Il a deux versions : le principe cosmologique fort, qui demande que les propriétés de l'Univers soient identiques pour tous les observateurs, ce qui requiert homogénéité et isotropie dans l'espace, *et* homogénéité dans le temps, *i. e.* un Univers uniforme et statique. Cette piste étant depuis longtemps abandonnée, on arrive au principe cosmologique faible, qui demande que les propriétés de l'Univers soient indépendantes de la position spatiale des observateurs, *i. e.* qui requiert homogénéité et isotropie de l'espace.

Ce principe est bien entendu une idéalisation à laquelle il ne faut pas accorder trop de sens philosophique². Localement, l'Univers n'est manifestement pas isotrope et homogène (*cf.* système solaire par exemple), mais on peut envisager que cette description puisse permettre de comprendre en partie le cosmos aux grandes échelles, en oubliant la structuration complexe de la matière et en la modélisant par un fluide dont la densité uniforme est calculée par un processus de moyennisation.

Ce cours ne se penchera pas sur les aspects historiques de la cosmologie et de ses pionniers, mais il n'est pas inutile de rappeler cependant que ces hypothèses ont été faites (par Einstein lui même dès 1917, puis Friedmann, Lemaître, et autres) avant même de savoir ce que contenait réellement l'Univers, sans la connaissance non plus que l'Univers était en expansion. Ainsi Einstein cherchait – justement – une solution décrivant un Univers statique (ce qui l'a amené à introduire la constante cosmologique Λ). Le principe cosmologique a servi à l'époque de guide heuristique pour établir des modèles d'Univers.

Le point de vue moderne est désormais complètement opposé : il s'agit dorénavant de comprendre pourquoi le principe cosmologique est si efficace pour décrire l'Univers observable, alors que l'on sait de nos jours que l'Univers est fortement inhomogène depuis plusieurs milliards d'années. Ainsi un point central est le fait que l'évolution dynamique ne commute pas avec le processus de moyennisation décrit plus haut. On peut démontrer que moyenniser la distribution de matière et la laisser évoluer (c'est ce que l'on fait implicitement dans les modèles homogènes et isotropes), ou bien laisser évoluer une distribution de matière non homogène puis la moyenniser ne sont pas des procédures équivalentes pour l'histoire de l'expansion de l'Univers. Malgré tout, le succès des modèles homogènes et isotropes est indiscutable, et cela provient en partie du fait que l'Univers primordial était effectivement très homogène, comme le démontre l'analyse du CMB. Ainsi, l'influence des inhomogénéités ne peut être importante que dans l'Univers tardif, après la formation des structures

2. En tout cas dans la cosmologie moderne.

(*i. e.* après environ un milliard d'années). La quantification précise de ces effets, à la fois sur l'expansion de l'Univers à proprement parler, et sur les observables (*i. e.* la propagation de la lumière), est cependant délicate. C'est un sujet très actuel et très actif, et d'autant plus pressant que nous entrons dans une phase de *cosmologie de précision* où les observations sont de plus en plus fines, de sorte que les imprécisions de mesure sont peut-être déjà³ en deçà des erreurs systématiques, notamment de celles qui proviennent de l'interprétation de ces données dans le cadre théorique de la cosmologie homogène qui, malgré son succès, est cependant inexacte.

11.2 Géométrie des modèles homogènes et isotropes

Nous allons voir que l'homogénéité et l'isotropie restreignent considérablement la forme de la métrique. Il y a plusieurs manières d'arriver à cette métrique. Nous en proposons une parmi d'autres ici⁴. (Il existe des démonstrations purement mathématiques et rigoureuses).

11.2.1 Système de coordonnées synchrones et comobiles

Le contenu d'un tel Univers ne peut être qu'un (ou plusieurs) fluides parfaits de densité et de pression uniformes dans l'espace, mais pouvant évoluer dans le temps. Les équations $p = cste$ et $\rho = cste$ doivent donc définir des hypersurfaces globales Σ (*i. e.* des espaces à trois dimensions) de genre espace. L'espace-temps \mathcal{M} doit être feuilleté par ces hypersurfaces et a donc la topologie $\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}$. Autrement dit ces équations définissent une notion naturelle de simultanéité globale : l'ensemble des points d'une hypersurface $\rho = cste$ ont pour coordonnée un certain temps commun t , que l'on appellera le *temps cosmique* (ou *temps cosmologique*).

Il faut comprendre que l'Univers ne peut pas paraître isotrope pour tous les observateurs. Considérons par exemple le CMB qui est un fluide de photons. Si l'on se déplace par rapport à ce fluide, alors on voit un bain de photons qui est décalé vers le bleu (*blueshift* en anglais) devant nous, et décalé vers

3. Il s'agit d'une question ouverte.

4. Une méthode consistant à utiliser l'équation de conservation $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ pour le fluide cosmique est également très élégante.

le rouge (*redshift*) derrière nous, au lieu d'observer des propriétés similaires dans toutes les directions⁵. Afin de pouvoir exploiter la propriété d'isotropie il nous faut donc l'appliquer à des observateurs privilégiés qui sont liés au fluide, c'est-à-dire qui sont *comobiles* avec le fluide. On les appelle aussi en cosmologie les *observateurs fondamentaux*. En fait les éléments infinitésimaux du fluide coïncident avec ces observateurs.

Il est alors naturel de chercher à introduire un système de coordonnées adapté, *comobile*, c'est-à-dire dans lequel chaque élément infinitésimal de fluide a des coordonnées (x^1, x^2, x^3) constantes dans le temps. En particulier, la quadrivitesse des éléments de fluide doit valoir $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$ dans ce SC. On va par ailleurs chercher un SC tel que le temps propre de tous ces observateurs soit égal entre eux, c'est-à-dire de telle sorte que les horloges de tous les éléments de fluide marchent au même rythme et indiquent toutes le même temps t (le temps cosmique introduit plus haut). On parle de *coordonnées – ou de jauge – synchrones*. Ainsi on veut imposer $d\tau = dt$, de sorte que $u^0 = dt/d\tau = 1$.

Mais un tel système de coordonnée existe-t-il? Les éléments de fluide sont libres et suivent des géodésiques. Il nous faut donc trouver un SC dont la métrique admet $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ pour géodésiques. En écrivant l'équation des géodésiques on trouve alors

$$\dot{u}^0 + \Gamma_{00}^0 = 0 \quad (11.1)$$

$$\dot{u}^i + \Gamma_{00}^i = 0 \quad (11.2)$$

où l'on a utilisé $u^i = 0$ et $u^0 = 1$. Par ailleurs $\dot{u}^0 = 0$ et $\dot{u}^i = 0$, et on doit donc avoir $\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{00}^i = 0$ dans tout SC comobile et synchrone. On montre que ces équations sont satisfaites si $g_{0i} = 0$, $g^{0i} = 0$, et $g_{00} = -1$, comme on pourra le vérifier. La métrique en coordonnées comobiles synchrone produit donc l'élément de longueur suivant

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j \quad (11.3)$$

qui est adapté à l'étude des Univers homogènes et isotropes dont la topologie, on l'a vu, est $\Sigma \times \mathbb{R}$, ce qui est manifeste dans l'élément de longueur ci-dessus. Il faut noter que l'homogénéité et l'isotropie spatiale n'ont pas encore été imposées à ce stade. En revanche, ce qu'on a fait est de définir un SC adapté à la topologie de l'espace-temps et dans lequel on peut requérir de façon

5. C'est d'ailleurs le cas du CMB tel qu'on l'observe depuis la Terre : la Terre se meut dans le CMB et on voit donc un dipôle blueshift/redshift dans le CMB ; il faut soustraire ce dipôle pour observer un CMB quasiment isotrope, aux fluctuations primordiales près, qui sont de l'ordre de 10^{-5} en valeur relative.

non-ambiguë ces propriétés. Il apparait en effet qu'il suffit maintenant de demander que la métrique purement spatiale g_{ij} soit homogène et isotrope, c'est-à-dire aussi que les hypersurfaces Σ soient *maximalement symétriques*.

11.2.2 Métrique FLRW

Comme cela a été vu en TD, cette analyse restreint alors les formes possibles de la métrique g_{ij} , et l'on obtient les métriques de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, ou FLRW. Ces trois métriques possibles sont données par

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d^2\Omega \right) \quad (11.4)$$

avec $k = +1$, $k = 0$, ou $k = -1$, et $d^2\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Les hypersurfaces spatiales sont respectivement sphériques, plates, et hyperboliques. Ces métriques décrivent donc respectivement un Univers sphérique, fermé, de volume fini et sans bords, un Univers plat et infini, et un Univers ouvert et infini. La géométrie de ces espaces a été davantage étudiée en TD. La métrique est ici écrite en coordonnées sphériques (t, r, θ, ϕ) , avec r sans dimension, tandis que $a(t)$, le *facteur d'échelle* (cf. Section 3.6), décrivant l'expansion des sections spatiales, a la dimension d'une longueur. Ce sont des coordonnées *comobiles* de telle sorte qu'une galaxie, par exemple, qui a pour coordonnées (r, θ, ϕ) à un instant donné, a encore ces mêmes coordonnées à un instant ultérieur indépendamment de l'expansion de l'Univers, pour peu en tout cas que cette galaxie n'ait pas de *vitesse particulière* par rapport aux fluides cosmiques (c'est-à-dire, essentiellement, le CMB).

Un changement de variable amène l'élément de longueur sous une forme alternative que nous utiliserons également dans la suite :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 (d\chi^2 + S_k(\chi)^2 d^2\Omega) \quad (11.5)$$

avec

$$\begin{aligned} S_k(\chi) &= \sin \chi & \text{si } k &= 1 \\ S_k(\chi) &= \chi & \text{si } k &= 0 \\ S_k(\chi) &= \sinh \chi & \text{si } k &= -1 \end{aligned} \quad (11.6)$$

Notons que dans le cas plat ($k = 0$) on peut aussi utiliser des coordonnées cartésiennes avec un élément de longueur équivalent donné par

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (11.7)$$

Par la suite nous utiliserons aussi le facteur d'échelle réduit, adimensionné, normalisé par sa valeur aujourd'hui : on pose $a_0 = a(t_0)$ avec t_0 l'instant présent, puis

$$\hat{a}(t) = \frac{a(t)}{a_0} \quad (11.8)$$

de sorte que $\hat{a}(t_0) = \hat{a}_0 = 1$. Dans la suite nous poserons également $c = 1$, c'est-à-dire que nous travaillerons dans un « système d'unités relativistes » où l'unité de longueur est par exemple une seconde-lumière si l'unité de temps est d'une seconde, etc.

11.3 Dynamique des modèles FLRW

La métrique FLRW ne dépend que de la fonction inconnue $a(t)$, le facteur d'échelle décrivant l'expansion des sections spatiales, *i. e.* l'évolution de l'expansion de l'Univers. La dynamique de cette fonction est trouvée en écrivant l'équation d'Einstein pour la métrique FLRW, et en spécifiant le contenu en énergie-impulsion. Dans un premier temps, nous donnons la forme des symboles de Christoffel, puis du tenseur de Ricci et du scalaire de courbure, et enfin du tenseur d'Einstein. Nous obtenons ainsi le membre de gauche de l'équation d'Einstein. Nous décrivons ensuite le contenu en matière par un fluide parfait, et nous introduisons une notion assez centrale (en cosmologie) *d'équation d'état du fluide*. Les équations d'Einstein prennent alors une forme simple, connue sous le nom *d'équations de Friedmann*, et qui sont les principales équations dynamiques de la cosmologie.

11.3.1 Expressions des symboles de Christoffel

De l'expression de l'élément de longueur Eq. (11.4) nous déduisons l'expression des symboles de Christoffel non-nuls. Le calcul donne (avec $c = 1$, et un

point étant la dérivée par rapport au temps cosmique)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rr}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} & \Gamma_{\theta\theta}^0 &= r^2 a\dot{a} & \Gamma_{\phi\phi}^0 &= r^2 \sin^2 \theta a\dot{a} \\
\Gamma_{0r}^r &= \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma_{rr}^r &= \frac{kr}{1-kr^2} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r(1-kr^2) \\
\Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \sin^2 \theta (1-kr^2) \\
\Gamma_{0\theta}^\theta &= \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\cos \theta \sin \theta \\
\Gamma_{0\phi}^\phi &= \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma_{\phi r}^\phi &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \cot \theta
\end{aligned} \tag{11.9}$$

Noter que ces expressions ne sont valables que dans le SC (t, r, θ, ϕ) .

11.3.2 Expressions des tenseurs de courbure

On en déduit alors les expressions suivantes. Le tenseur de Ricci est diagonal avec

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -3 \frac{\ddot{a}}{a}, \\
R_{rr} &= \frac{2k + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{1-kr^2}, \\
R_{\theta\theta} &= r^2(2(k + \dot{a}^2) + a\ddot{a}), \\
R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}.
\end{aligned} \tag{11.10}$$

Le scalaire de courbure vaut

$$R = 6 \frac{k + \dot{a}^2 + a\ddot{a}}{a^2}, \tag{11.11}$$

et le tenseur d'Einstein est diagonal avec

$$\begin{aligned}
G_{00} &= 3 \frac{k + \dot{a}^2}{a^2}, \\
G_{rr} &= -\frac{k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}}{1-kr^2}, \\
G_{\theta\theta} &= -r^2(k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}), \\
G_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta G_{\theta\theta},
\end{aligned} \tag{11.12}$$

où nous rappelons encore que nous avons pris $c = 1$.

11.3.3 Contenu en matière-énergie et équation d'état

Forme du tenseur énergie-impulsion

Dans le cadre de la cosmologie homogène, nous décrirons le contenu en énergie-matière de l'Univers par un ou plusieurs fluides parfaits de densités et pressions $\rho_i(t)$ et $p_i(t)$ pour un certain nombre d'indices i . Rappelons qu'un fluide parfait admet pour tenseur énergie-impulsion :

$$T_i^{\mu\nu} = (p_i + \rho_i c^2) u^\mu u^\nu + p_i g^{\mu\nu} \quad (11.13)$$

où nous rétablissons provisoirement c . Cette expression vaut en tous points x^λ , et $u^\mu(x^\lambda)$ est alors la quadrivitesse d'un élément infinitésimal de fluide situé en x^λ . Dans notre système de coordonnées synchrone et comobiles, la pression et la densité ne dépendent que du temps cosmique t , tandis que la quadrivitesse est $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, cf. Section 10.2.1 ci-dessus. Dans les coordonnées (t, r, θ, ϕ) que nous avons considérées jusqu'ici, il s'ensuit que le tenseur-énergie impulsion est diagonal et s'écrit, en indices haut, comme :

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \text{diag} (p + \rho c^2 - p, p g^{rr}, p g^{\theta\theta}, p g^{\phi\phi}) \\ &= \text{diag} \left(\rho c^2, p \frac{1 - kr^2}{a^2}, \frac{p}{r^2 a^2}, \frac{p}{r^2 a^2 \sin^2 \theta} \right), \end{aligned} \quad (11.14)$$

où nous avons supprimé par commodité l'indice i . Nous avons calculé le tenseur d'Einstein en indices bas, et il nous est donc plus utile d'avoir l'expression du tenseur énergie-impulsion en indices bas. Le calcul ($T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} T^{\alpha\beta}$, ou directement, $T_{\mu\nu} = (p + \rho c^2) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}$), donne alors

$$T_{\mu\nu} = \text{diag} \left(\rho c^2, \frac{a^2 p}{1 - kr^2}, p r^2 a^2, p r^2 a^2 \sin^2 \theta \right) \quad (11.15)$$

dans notre SC. Il suffit ensuite d'écrire terme à terme les équations d'Einstein $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ afin de trouver les équations dynamiques pour $a(t)$, cf. ci-dessous. Avant d'arriver à ces équations cependant, nous introduisons d'abord la notion d'équation d'état et décrivons plus avant les divers fluides emplissant notre Univers.

Notion d'équation d'état et exemples importants

La pression et la densité d'un fluide donné sont en général reliées l'une à l'autre par une équation d'état (de nature thermodynamique). L'équation d'état la plus célèbre est celle des gaz parfaits (un gaz parfait est une idéalisation

d'un gaz réel, décrit comme un ensemble de particules identiques, classiques (= non quantiques), non relativistes, et sans interaction les unes avec les autres. La loi des gaz parfait s'écrit, dans une enceinte de volume V :

$$pV = Nk_B T, \quad (11.16)$$

avec p la pression, N le nombre de particules, k_B est la constante de Boltzmann $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ en Joules par Kelvin, et T est la température du gaz en Kelvin. N et V sont reliés à la densité ρ du gaz par

$$\rho = \frac{Nm}{V} \quad (11.17)$$

avec m la masse des particules. On introduit alors l'équation d'état :

$$w \equiv \frac{p}{\rho c^2} \quad (11.18)$$

La loi des gaz parfaits prend alors la forme particulièrement élégante suivante :

$$w_{GP} = \frac{k_B T}{mc^2} \quad (11.19)$$

On note que l'équation d'état w est un nombre sans dimension, donné dans le cas présent (cela n'est vrai que pour un gaz parfait), par le rapport de l'énergie thermique à l'énergie de masse des particules individuelles. La température d'un gaz est directement proportionnelle à l'énergie cinétique des particules qui le composent⁶ (on parle d'*agitation thermique*), de sorte qu'il faut voir la formule ci-dessus comme :

$$w_{GP} = \frac{\text{énergie cinétique moyenne d'une particule}}{\text{énergie de masse d'une particule}}.$$

La loi des gaz parfaits présuppose que le gaz est non relativiste, c'est-à-dire que l'énergie cinétique moyenne d'une particule est très faible devant son énergie de masse, c'est-à-dire aussi que $k_B T \ll mc^2$, de sorte que pour un gaz parfait on a $w \ll 1$ et $w \approx 0$ au premier ordre.

La température de l'Univers (c'est-à-dire, celle du CMB, nous y reviendrons) est suffisamment faible depuis les temps primordiaux pour que l'on ait effectivement $k_B T \ll mc^2$ pour la plupart des particules constituant la matière ordinaire (*i. e.* les atomes), exception faite des neutrinos qui sont massifs

6. Par définition, en fait, de la température.

mais extrêmement légers⁷. On dit pour cette raison que la matière ordinaire est *froide*⁸. Autrement dit sa pression est négligeable par rapport à sa densité : $w \approx 0 \Rightarrow p \ll \rho c^2$, et en pratique on prendra dans la suite $p = 0$ (ou $w = 0$) pour la matière ordinaire. On parle aussi de *poussière* ou encore de *dust* en anglais.

La nature de la matière noire (que nous avons évoquée aux chapitres 1 et 3) est encore mal connue. Son rôle cosmologique dépend fortement de la masse des particules qui la composent. Il y a donc eu des modèles de *Hot Dark Matter* ou matière noire chaude, *i. e.* une matière noire légère $k_B T \gg m_{DM} c^2$ pour la plupart de l'histoire de l'Univers (la température T dépend du temps!), mais aussi des modèles de matière noire tiède ($k_B T \sim m_{DM} c^2$ aux époques récentes). Ces modèles ont été éliminés, et le scénario restant aujourd'hui est celui d'une matière noire froide, ou *Cold Dark Matter* ou CDM. La matière noire serait composée de particules – hypothétiques – très massives (au moins 100 fois la masse d'un proton), et n'interagissant que *via* les interactions faibles⁹. Du point de vue uniquement de la dynamique cosmologique, il suffit de savoir que l'on pose $w = 0$ pour la matière noire froide.

Dans la limite relativiste, il semble, si l'on extrapole la loi des gaz parfaits, que w tend vers l'infini. Il n'en est rien. C'est un artefact provenant du fait que la loi des gaz parfaits donnée plus haut n'est valable que si, précisément, $w \ll 1$. Un traitement relativiste permet en fait de montrer les deux points suivants (on l'admettra ici) :

- Dans le cas d'un gaz de particules relativistes et non quantiques tel que $k_B T \gg mc^2$, on a $w \rightarrow 1/3$, et on considérera $w \approx 1/3$.
- Dans le cas de particules sans masse (les photons par exemple), on a exactement $w = 1/3$.

Notons aussi que l'on peut associer une équation d'état à la constante cosmologique Λ . En effet on peut voir $\Lambda g_{\mu\nu}$ dans l'équation d'Einstein comme étant un terme de source $T_{\mu\nu} = -c^4 \Lambda / (8\pi G) g_{\mu\nu}$ dans le membre de droite.

7. Leurs masses sont inconnues à ce jour, mais on sait qu'elles sont au moins un milliard de fois plus petites que celle d'un proton.

8. Exception faite, donc, des neutrinos, dont le rôle cosmologique est cependant négligeable, *cf.* ci-dessous.

9. Cela étant, il n'y a pas un unique modèle admis à ce jour pour la matière noire, mais un grand nombre de tels modèles ! Une telle particule ne fait pas partie du modèle standard de la physique des particules et nécessite une extension (par exemple supersymétrique) du modèle standard. En l'absence à ce jour d'une détection directe sur Terre de cette particule, les modèles théoriques foisonnent.

Ce terme se comporte comme un fluide parfait avec, comme on peut le voir facilement, $p = -\rho = -\Lambda$ (ici $c = 1$), de sorte que l'équation d'état de la constante cosmologique est $w = -1$. De façon plus générale (*cf.* Section 1.4), tout fluide *d'énergie noire* est, par définition, un fluide qui a une équation d'état qui vaut environ -1 dans l'Univers tardif, de sorte qu'un tel terme puisse expliquer l'accélération récente de l'expansion de l'Univers sans faire référence à une quelconque constante cosmologique.

Pour terminer, les *conditions d'énergie* en relativité générale (nous n'aborderons pas ce point dans ce cours) permettent de montrer que tout fluide « raisonnable » doit satisfaire $-1 \leq w \leq 1$. On parle de *matière raide* ou *stiff matter* si $w = 1$ (exemple, un fluide de champ scalaire libre), de rayonnement ou de radiation si $w = 1/3$, de poussière si $w = 0$, d'énergie noire si $w = -1$, et de *matière fantôme* si $w < -1$.

11.3.4 Équations de Friedmann

Revenons aux équations d'Einstein appliquées aux modèles FLRW, et posons à nouveau $c = 1$. Nous avons l'expression de $G_{\mu\nu}$ dans l'Eq. (11.12) ainsi que celle du tenseur énergie-impulsion dans l'Eq. (11.15). Avec, enfin, la formule

$$\Lambda g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(-\Lambda, \frac{\Lambda a^2}{1 - kr^2}, r^2 \Lambda a^2 r^2, \Lambda a^2 r^2 \sin^2 \theta \right)$$

nous trouvons que les composantes 00 et rr de l'équation d'Einstein donnent :

$$\begin{aligned} \frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^3} &= \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} \\ -\frac{k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}}{a^2} + \Lambda &= 8\pi G p \end{aligned} \quad (11.20)$$

En injectant la première équation dans la seconde, on peut réécrire ce système sous la forme suivante :

$$\boxed{H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}} \quad (11.21)$$

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}} \quad (11.22)$$

où l'on a défini le *paramètre de Hubble* :

$$\boxed{H(t) = \frac{\dot{a}}{a}} \quad (11.23)$$

Ce sont les *équations de Friedmann*, avec $c = 1$, et écrites ici pour un seul fluide. Si plusieurs fluides sont présents, on effectuera simplement le remplacement $\rho \rightarrow \sum \rho_i$ et $p \rightarrow \sum p_i$.

On vérifiera à titre d'exercice que les composantes $\theta\theta$ et $\phi\phi$ de l'équation d'Einstein n'apportent pas d'information supplémentaire.

On note finalement qu'en l'absence de constante cosmologique $\Lambda = 0$, la seconde équation de Friedmann montre que l'Univers est décéléré si et seulement si $\rho + 3p > 0$, c'est-à-dire si $w > -1/3$, et accéléré si et seulement si $w < -1/3$. Pour accélérer l'expansion de l'Univers, il faut une pression fortement négative (la densité d'énergie étant en général positive, en tout cas dans les modèles réalistes).

11.3.5 Équation de conservation

On note qu'avec les équations de Friedmann nous avons deux équations différentielles pour trois fonctions inconnues $a(t)$, $p(t)$, $\rho(t)$. Le système d'équation est fermé si l'on ajoute une équation d'état $w = p/\rho$, que l'on supposera dorénavant constante dans le temps¹⁰.

Afin de faire apparaître une dérivée de la densité ρ , on peut dériver par rapport au temps la première équation de Friedmann Eq. (11.21) :

$$2H\dot{H} = 2H \left(\frac{\ddot{a}}{a} - H^2 \right) = \frac{8\pi G}{3} \dot{\rho} + 2H \frac{k}{a^2}, \quad (11.24)$$

puis utiliser la seconde équation de Friedmann Eq. (11.22), diviser le tout par $2H$, réutiliser Eq. (11.21) pour éliminer H^2 , et trouver finalement :

$$\sum_i \dot{\rho}_i = -3H \sum_i (\rho_i + p_i). \quad (11.25)$$

Considérons d'abord le cas d'un seul fluide d'équation d'état w . On a alors l'équation :

$$\boxed{\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w) \frac{\dot{a}}{a}} \quad (11.26)$$

qui s'intègre immédiatement en

$$\boxed{\rho(t) \propto a(t)^{-3(1+w)}} \quad (11.27)$$

10. C'est une simplification dont on veillera par la suite à l'applicabilité. On a vu que l'équation d'état dépend typiquement de la température de l'Univers qui elle-même dépend du temps, et il faut noter aussi que l'équation d'état peut aussi dépendre explicitement du temps, comme c'est le cas par exemple de l'équation d'état d'un champ scalaire.

Cette équation est cruciale puisqu'elle permet de voir comment un fluide d'équation d'état w se dilue avec l'expansion cosmique. Il nous faut faire ici quelques commentaires importants sur cette équation.

- L'équation Eq. (11.26) pour un seul fluide est connue sous le nom d'équation de conservation (de l'énergie), car on peut montrer qu'elle provient également de la conservation du tenseur énergie-impulsion du fluide en question : $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.
- Il n'est pas étonnant que cette équation soit en fait codée dans les équations de Friedmann, puisque celles-ci proviennent de l'équation d'Einstein qui intègre automatiquement la conservation de l'énergie *via* l'identité de Bianchi $\nabla_\mu (G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}) = 0$, puisque, on le rappelle, la métrique est compatible avec la connexion, *i. e.* $\nabla_\mu g^{\alpha\beta} = 0$.
- Dans le cas où plusieurs fluides sont présents, la seule loi de conservation que l'on ait à disposition est la conservation du tenseur énergie-impulsion *total* : $\nabla_\mu (\sum_i T_i^{\mu\nu}) = 0$ pour les $i = 1 \dots n$ fluides. Cela conduit directement à l'Eq. (11.25). Si l'on veut aller plus loin et obtenir une équation de type Eq. (11.27) pour chacun des fluides, il est nécessaire de supposer qu'ils sont indépendants les uns des autres, c'est-à-dire qu'ils n'interagissent pas (ou de façon négligeable), c'est-à-dire encore qu'ils n'échangent pas d'énergie entre eux. Si cela est vrai¹¹ on a alors séparément $\nabla_\mu T_i^{\mu\nu} = 0$ pour tout i , et on a, pour tous les fluides d'équation d'état w_i , l'équation :

$$\boxed{\rho_i(t) \propto a(t)^{-3(1+w_i)}} \quad (11.28)$$

Nous supposons dans la suite que les divers fluides emplissant notre Univers (c'est-à-dire, simplement, la radiation, la matière ordinaire, et la matière noire) sont effectivement découplés, de sorte que l'équation ci-dessus est valable. En fait du point de vue de la dynamique cosmologique il n'y a pas de raison particulière pour séparer matière ordinaire et matière noire puisque toutes les deux ont la même équation d'état $w_m = 0$. Ainsi la densité de matière (ordinaire plus noire), ρ_m satisfait

$$\boxed{\rho_m(t) \propto a(t)^{-3}} \quad (11.29)$$

11. Cela n'est pas forcément le cas. Imaginons, par exemple, que la matière noire se désintègre spontanément en photons. Alors une partie de la densité de CDM passe vers la densité de rayonnement. Autre exemple : l'Univers primordial est suffisamment chaud pour que les photons donnent spontanément naissance à des paires fermions/antifermions, et inversement. A cette époque il y a donc effectivement transfert d'énergie entre radiation et matière baryonique. Cependant, dans ce cas-ci, cela n'affecte en rien la dynamique cosmologique puisque l'Univers est suffisamment chaud pour que la matière baryonique soit ultra-relativiste et se comporte donc essentiellement comme de la radiation.

Cette équation est parfaitement intuitive, puisque la matière est composée de particules, et que la densité de particules doit bien diminuer par $8 = 2^3$ si l'Univers double de taille. Considérons maintenant le cas de la radiation, avec $w_r = 1/3$. On trouve alors

$$\boxed{\rho_r(t) \propto a(t)^{-4}} \quad (11.30)$$

Cette équation est un peu moins intuitive mais s'explique encore aisément. Les photons étant des particules, la densité de photons diminue bien comme le volume lors de l'expansion de l'Univers. Mais à cela s'ajoute un effet de *redshift cosmologique*, comme nous le verrons au prochain chapitre : les longueurs d'onde des photons augmente de la même façon que $a(t)$, leurs fréquences va donc comme $1/a(t)$, et, en vertu d'une loi de la mécanique quantique¹², l'énergie d'un photon est donnée par $E = h\nu$ avec h la constante de Planck et ν la fréquence du photon. Au final, la densité de photon va comme $1/a^3$ et leur énergie comme $1/a$, expliquant ainsi le comportement de la densité d'énergie de la radiation $\rho_r(t) \propto a(t)^{-4}$.

Notons qu'un fluide d'énergie noire $w = -1$ ne se dilue pas malgré l'expansion cosmique : $\rho_{DE} = cste$. C'est bien le cas de la constante cosmologique qui est, précisément, constante. Encore moins intuitifs sont les fluides fantômes $w < -1$ dont la densité d'énergie croît avec l'expansion de l'Univers (!), alors que par ailleurs ils accélèrent cette expansion (*cf.* seconde équation de Friedmann). On voit donc que la présence de matière fantôme conduit à une fin catastrophique de l'Univers où, on peut le montrer, le facteur d'échelle tend vers l'infini en un temps fini (si w est supposé constant et inférieur à -1). Ce scénario hautement spéculatif (et, il faut le dire, assez marginal) est connu sous le nom de *Big Rip*, ou de « grande déchirure », puisque les galaxies, les systèmes stellaires, et même les atomes eux-mêmes, etc. devraient être détruits par l'expansion divergente de l'Univers.

11.4 Étude des équations de Friedmann

Dans cette section nous analysons les propriétés essentielles des équations de Friedmann et de quelques unes de ses solutions. Cela amène naturellement à poser des quantités sans dimensions, dits *paramètres de densité*, dont la détermination expérimentale est cruciale et sera abordée au chapitre suivant.

12. C'est la loi de Planck-Einstein.

11.4.1 Retour sur les équations de Friedmann

Les équations de conservation de l'énergie nous permettent d'écrire complètement les équations de Friedmann. Dans la suite nous considérerons un fluide de radiation (le CMB) et un fluide de matière (baryonique plus noire) d'équations d'état respectivement $w = 1/3$ et $w = 0$. On sait que la matière, par exemple, a une densité qui satisfait $\rho(t) \propto a(t)^{-3}$. On peut donc écrire que la densité de matière évolue dans le temps selon

$$\rho_m(t) = \rho_m(t_0) \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^3 \quad (11.31)$$

où l'on a introduit t_0 un instant quelconque, que nous choisirons dans toute la suite être le temps cosmique aujourd'hui. On notera $a_0 = a(t_0)$ et $\rho_{m,0} = \rho_m(t_0)$. De la même façon la densité de la radiation satisfait

$$\rho_r(t) = \rho_{r,0} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^4 \quad (11.32)$$

de sorte que la première équation de Friedmann devient

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho_{m,0} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 + \rho_{r,0} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^4 \right] + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a(t)^2}. \quad (11.33)$$

On voit donc sur cette équation qu'un Univers Λ CDM en expansion éternelle ($a(t) \rightarrow \infty$ pour $t \rightarrow \infty$) finit toujours par être dominé par la constante cosmologique si celle-ci est non nulle. On a en effet, pour $a(t) \rightarrow \infty$,

$$H(t) \sim \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \quad (11.34)$$

qui conduit à une solution exponentielle pour le facteur d'échelle $a(t) \sim \exp(\sqrt{\Lambda/3}t)$, dite aussi phase de *de Sitter* (on a supposé ici que Λ est positif). A l'inverse, dans l'Univers primordial et dans un scénario de Big Bang où $a(t) \rightarrow 0$ pour un certain instant origine t_i , le terme de radiation domine la dynamique.

Nous voyons ainsi apparaître les différentes ères de notre Univers (le scénario Big Crunch semblant exclu de nos jours, *cf.* plus bas) : l'Univers primordial est dominé par la radiation, puis dominé par la matière non relativiste, ensuite par la courbure (si non-nulle), et enfin par la constante cosmologique (même remarque). La transition entre l'ère de la radiation et l'ère de matière

se fait lorsque les deux termes le décrivant sont égaux, ce qui se produit à un certain moment t_{eq} , dit le moment de *l'équivalence radiation-matière* :

$$\rho_{m,0} \left(\frac{a_0}{a(t_{eq})} \right)^3 = \rho_{r,0} \left(\frac{a_0}{a(t_{eq})} \right)^4 \quad (11.35)$$

Dans notre Univers, cet instant se produit un petit peu avant la recombinaison et l'émission du CMB¹³, de sorte que l'on peut négliger l'influence de la radiation dès 300 000 ans après le Big Bang.

11.4.2 Densité critique et paramètres de densité

Revenons un instant sur l'équation de Friedmann en l'absence d'une constante cosmologique $\Lambda = 0$. On a alors

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \quad (11.36)$$

On peut diviser cette équation par H^2 , et introduire *la densité critique*

$$\boxed{\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}} \quad (11.37)$$

que l'on a déjà rencontrée en Section 3.6. L'équation de Friedmann s'écrit alors

$$1 = \frac{\rho}{\rho_c} - \frac{k}{a^2 H^2} \quad (11.38)$$

de sorte que le rapport de la densité de matière à la densité critique détermine la courbure spatiale de l'espace (si, et seulement si, $\Lambda = 0$) :

$$\begin{aligned} \rho &> \rho_c \Rightarrow k = 1 \\ \rho &= \rho_c \Rightarrow k = 0 \\ \rho &< \rho_c \Rightarrow k = -1 \end{aligned}$$

Cela rejoint la discussion esquissée en cosmologie Newtonienne (*cf.* Section 3.6). Par ailleurs on peut démontrer que le destin de l'Univers, dans ce cas, est aussi lié à sa géométrie, avec un scénario Big Bang-Big Crunch si $\rho > \rho_c \Rightarrow k = 1$, et des scénarios d'expansion éternelle sinon. Cette correspondance entre le destin de l'Univers et sa géométrie n'est plus valable

¹³. Pour le démontrer il faut connaître la valeur des paramètres cosmologiques tels que $\rho_{r,0}$ et $\rho_{m,0}$, nous y reviendrons.

lorsqu'on introduit une constante cosmologique, comme nous le verrons ci-dessous.

Afin de généraliser cette discussion il apparaît dès lors naturel d'introduire les paramètres de densité pour un fluide i par

$$\boxed{\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}} \quad (11.39)$$

Par ailleurs on définit un paramètre de densité pour la constante cosmologique :

$$\boxed{\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H^2}} \quad (11.40)$$

et un paramètre de « densité de courbure » par

$$\boxed{\Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2 H^2}} \quad (11.41)$$

Tous ces paramètres Ω dépendent du temps. En ces termes, la première équation de Friedmann prend une forme très simple, à savoir

$$1 = \sum_i \Omega_i + \Omega_\Lambda + \Omega_k \quad (11.42)$$

Il est d'usage de définir le « oméga total »

$$\Omega_T \equiv \sum_i \Omega_i + \Omega_\Lambda \quad (11.43)$$

sur les fluides i , de sorte que l'équation de Friedmann devient

$$\boxed{\Omega_k = 1 - \Omega_T} \quad (11.44)$$

On voit alors que l'Univers est sphérique si et seulement si $\Omega_T > 1$, plat si $\Omega_T = 1$, hyperbolique si $\Omega_T < 1$. Dans la suite nous considérerons un Univers Λ CDM, à savoir constitué du fluide de radiation (le CMB), de paramètre Ω_r , du fluide de matière (baryonique plus noire), de paramètre Ω_m . Ainsi on aura

$$\boxed{\Omega_T = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda} \quad (11.45)$$

Les paramètres de densité dépendent du temps. On peut maintenant utiliser les équations de conservation pour écrire les paramètres de densité au temps t en fonction de leurs valeurs aujourd'hui ($t = t_0$). Par exemple :

$$\Omega_m = \frac{8\pi G \rho_m}{3H^2} = \frac{H_0^2}{H^2} \frac{8\pi G \rho_{m,0}}{3H_0^2} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 = \frac{H_0^2}{H^2} \frac{\Omega_{m,0}}{\hat{a}(t)^3} \quad (11.46)$$

où l'on a posé le paramètre de densité de la matière aujourd'hui :

$$\Omega_{m,0} \equiv \Omega_m(t_0) = \frac{8\pi G\rho_{m,0}}{3H_0^2} \quad (11.47)$$

et $H_0 = H(t_0)$ est la *constante de Hubble*. On rappelle enfin que $\hat{a}(t) = a(t)/a_0$. Procédant de la sorte pour les autres paramètres, avec $\Omega_{i,0} = \Omega_i(t_0)$ pour tout i , nous voyons que la première équation de Friedmann peut s'écrire finalement, en utilisant Eq. (11.44), comme :

$$H^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_{m,0}}{\hat{a}(t)^3} + \frac{\Omega_{r,0}}{\hat{a}(t)^4} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{(1 - \Omega_{T,0})}{\hat{a}(t)^2} \right] \quad (11.48)$$

et on note que $H(t)$ s'écrit aussi en fonction du facteur d'échelle réduit $\hat{a}(t)$ comme

$$H = \frac{1}{\hat{a}} \frac{d\hat{a}}{dt} \quad (11.49)$$

En combinant les Eqs. (11.22, 11.37, 11.39, 11.40) on peut enfin écrire la seconde équation de Friedman de la façon suivante

$$-\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{\hat{a}\ddot{\hat{a}}}{\dot{\hat{a}}^2} = \frac{\Omega_m}{2} + \Omega_r - \Omega_\Lambda \quad (11.50)$$

Il est d'usage d'introduire le *paramètre de décélération* $q(t) \equiv -a\ddot{a}/\dot{a}^2$, qui est positif si l'Univers décélère, et négatif si l'Univers accélère son expansion. On a alors

$$q = \frac{\Omega_m}{2} + \Omega_r - \Omega_\Lambda \quad (11.51)$$

La matière et la radiation décélèrent l'expansion, comme attendu, tandis qu'une constante cosmologique positive a tendance à l'accélérer. On notera $q_0 = \Omega_{m,0}/2 + \Omega_{r,0} - \Omega_{\Lambda,0}$ la valeur du paramètre de décélération aujourd'hui. Nous verrons au prochain chapitre que ce paramètre est directement observable. Notez que l'équation pour q_0 est souvent écrite, simplement $q_0 \approx \Omega_{m,0}/2 - \Omega_{\Lambda,0}$, c'est-à-dire en négligeant le terme de radiation qui contribue peu aujourd'hui (*cf.* ci-dessous)

La forme des équations de Friedmann obtenue ci-dessus est particulièrement commode puisque donnée en fonctions de paramètres de densités $\Omega_{i,0}$ à notre époque, et qui sont, comme nous le verrons au chapitre suivant, directement accessibles *via* les observations. Les observations actuelles favorisent

$$\begin{aligned} \Omega_{m,0} &\approx 0.3 \\ \Omega_{r,0} &\approx 5 \times 10^{-5} \\ \Omega_{\Lambda,0} &\approx 0.7 \\ \Omega_{k,0} &\approx 0 \end{aligned} \quad (11.52)$$

tandis que la valeur du Ω_0 pour les neutrinos (dont nous n'avons pas parlé jusqu'ici) est elle aussi négligeable. Indépendamment de ces résultats, la discussion des modèles cosmologiques revient alors à classifier les solutions possibles des équations de Friedmann en fonction des valeurs de ces quatre paramètres aujourd'hui. En particulier nous chercherons à savoir si l'Univers est ouvert, plat, ou fermé, si la solution possède ou non un Big Bang et/ou un Big Crunch, ou encore si l'Univers est en décélération ou accélération à un instant donné.

11.4.3 Comportement des Univers Λ CDM

Nous nous plaçons à $t = t_0$. Comme dit plus haut, nous négligerons ici la radiation (qui devient de plus en plus négligeable avec le temps). On voit d'abord sur le paramètre de décélération $q_0 \approx \Omega_{m,0}/2 - \Omega_{\Lambda,0}$ que l'Univers est en expansion accélérée à $t = t_0$ si $\Omega_{\Lambda,0} > \Omega_{m,0}/2$, et décélérée sinon - voir Fig. 11.1 ci-contre.

L'univers est plat ($k = 0$) si et seulement si $\Omega_{T,0} \approx \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$. Cette équation dessine une ligne droite d'équation $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0}$ dans le plan des conditions initiales $(\Omega_{\Lambda,0}, \Omega_{m,0})$. Au dessus de cette ligne, l'Univers est fermé, en dessous il est ouvert - voir même figure.

Afin de savoir ensuite si l'Univers Λ CDM va se contracter à nouveau ou plutôt être en expansion éternelle, on cherche dans l'équation de Friedmann un point où la dérivée du facteur d'échelle change de signe, *i. e.* l'instant de recontraction pour lequel on doit avoir $\dot{a} = 0$. Cela revient à trouver une solution à l'équation suivante

$$0 = \Omega_{\Lambda,0} \hat{a}(t)^3 + (1 - \Omega_{T,0}) \hat{a}(t) + \Omega_{m,0}, \quad (11.53)$$

obtenue à partir de la première équation de Friedmann en négligeant encore la radiation. C'est une équation du troisième degré en \hat{a} , dont les solutions physiques ont nécessairement $\hat{a} > 0$. Une analyse un peu technique et sans guère d'intérêt, dont on trouvera le détail par exemple dans Hobson, section 15.4, permet finalement de classifier les modèles sans Big-Bang, avec Big-Bang, et avec ou sans Big Crunch. On trouve finalement la figure ci-contre dans le plan $(\Omega_{\Lambda,0}, \Omega_{m,0})$.

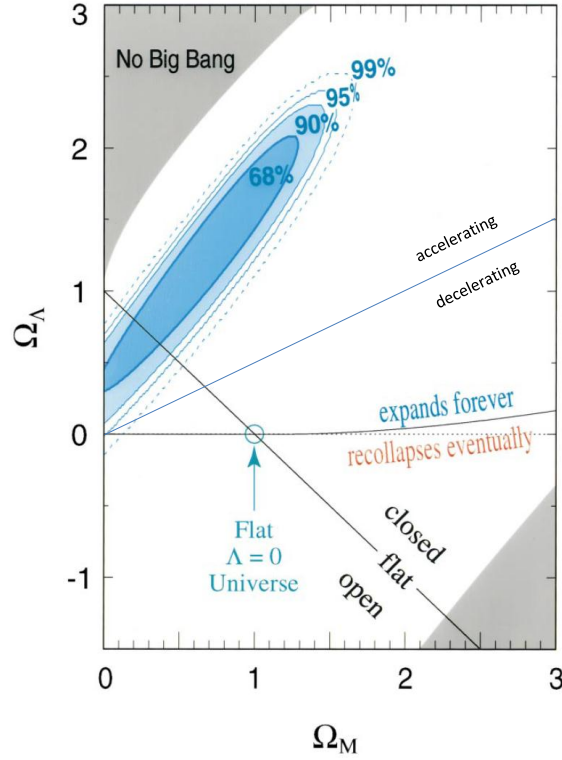


FIGURE 11.1 – Bilan du comportement des Univers Λ CDM dans le plan $(\Omega_\Lambda, \Omega_m)$, à $t = t_0$. Extrait, et complété, de Perlmutter et. al. (The Astrophysical Journal, 517 : 565-586, 1999). Dans le cas $\Lambda = 0$, il y a un lien direct entre le destin de l'Univers et sa géométrie, mais cela n'est plus vrai sinon. La ligne $\Omega_{\Lambda,0} = \Omega_{m,0}/2$ sépare les Univers présentement en expansion accélérée ou décélérée. La droite $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0}$ sépare les Univers fermés, plats, ou ouverts. La ligne $\Omega_{\Lambda,0} = 0$ jusqu'à $\Omega_{m,0} = 1$, puis légèrement incurvée ensuite sépare les Univers en expansion éternelle de ceux qui se termineront en Big Crunch. La zone grisée dans le cadran supérieur gauche correspond à des Univers sans Big Bang mais avec un point $H = 0$ dans le passé, c'est-à-dire des *Univers à rebond* (contraction suivie d'une expansion sans passer par $a = 0$). La majeure partie de cette zone est directement exclue par l'existence d'objets astrophysiques de grand redshift (*cf.* Section 11.4). La zone blanche décrit des Univers avec Big Bang. La zone grisée en bas à droite est une zone avec Big Bang mais directement exclue expérimentalement, car dans ce cas l'âge de l'Univers est inférieur à l'âge des plus vieilles étoiles observées, pour toute valeur $H_0 \geq 50 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$. Enfin les ellipses bleues indiquent la zone de confiance pour les valeurs observées de $(\Omega_{\Lambda,0}, \Omega_{m,0})$ déduite de l'analyse de la luminosité des supernovae, *cf.* chapitre suivant. Le cas $\Lambda = 0$ est très nettement exclu.

11.4.4 Complément : quelques solutions analytiques

Il n'est pas inutile en cosmologie de connaître quelques solutions particulières simples correspondant à des situations idéalisées. On a déjà vu, par exemple, qu'un Univers dominé seulement par la constante cosmologique connaît une expansion exponentielle avec $a(t) \propto \exp(\sqrt{\Lambda/3}t)$.

Considérons maintenant le cas de l'Univers primordial, qui est essentiellement dominé par la radiation, comme on l'a vu. Il s'agit alors de résoudre l'équation de Friedmann Eq. (11.48) qui se simplifie en :

$$H^2 \approx H_0^2 \frac{\Omega_{r,0}}{\hat{a}(t)^4} \quad (11.54)$$

et $\Omega_{r,0} \approx 1$ en vertu de Eq. (11.42). En séparant les variables on obtient

$$\hat{a} d\hat{a} = H_0 dt \quad (11.55)$$

qui s'intègre en

$$\hat{a} = (cste + 2H_0 t)^{1/2} \quad (11.56)$$

Il faut imposer la condition $\hat{a}(t_0) = 1$, de sorte que, au final

$$a(t) = a_0 (1 + 2H_0(t - t_0))^{1/2} \quad (11.57)$$

[Ici il ne faut pas considérer que t_0 est l'instant présent dans notre Univers, puisqu'il ne serait pas vrai que la radiation dominerait. Il faut plutôt voir t_0 comme un instant quelconque tel que pour tout $t < t_0$ la radiation domine]. Il est plus fréquent de trouver cette loi pour l'évolution du facteur d'échelle à partir du temps origine t_* pour lequel $a = 0$. On trouve, avec l'équation ci-dessus, $t_* = t_0 - 1/(2H_0)$, et, remplaçant

$$\hat{a}(t) = \sqrt{2H_0} (t - t_*)^{1/2} \quad (11.58)$$

On peut enfin poser la convention $t_* = 0$, de sorte que le facteur d'échelle, à partir de l'instant origine, se comporte comme $t^{1/2}$. C'est une expansion éternelle et décélérée de l'Univers.

De la même façon, on montre que pendant l'ère de matière qui succède à l'ère de radiation (et en négligeant cette fois la courbure, la radiation, et la constante cosmologique), le facteur d'échelle se comporte comme $a \propto t^{2/3}$. Plus précisément un Univers seulement constitué de matière admet pour solution exacte

$$a(t) = a_0 \left(1 + \frac{3}{2} H_0 (t - t_0) \right)^{2/3} \quad (11.59)$$

La généralisation pour un Univers constitué d'un unique fluide d'équation d'état $w \neq -1$ est la suivante :

$$a(t) = a_0 \left(1 + \frac{3}{2}(1+w)H_0(t-t_0) \right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \quad (11.60)$$

Le lecteur intéressé trouvera une discussion plus poussée des quelques solutions analytiques connues de l'équation de Friedmann dans le Hobson, chapitre 15.

Chapitre 12

Observables en cosmologie

Au chapitre précédant nous avons déterminé la forme géométrique des Univers homogènes et isotropes. Nous avons aussi identifié les équations qu'ils satisfont, et nous avons indiqué les comportements dynamiques les plus importants. Cette analyse ne saurait être complète en l'absence de la discussion de ce qui est observable du cosmos depuis la Terre, de l'influence de cette expansion dynamique sur ces observations, et de la détermination expérimentale des paramètres de densités $\Omega_{i,0}$.

Nous devons nous limiter dans ce chapitre à certaines observables, sous peine d'être beaucoup trop long. En particulier, nous ne discuterons pas ce que la formation des structures (depuis les fluctuations thermiques du CMB jusqu'à la formation proprement dite des amas de galaxie) nous apprend sur la valeur de ces paramètres. Nous ne discuterons pas non plus l'histoire thermique et thermodynamique de l'Univers, en particulier la nucléosynthèse primordiale. On peut montrer par exemple que le rapport photons/baryons $[[? ?]]$ et le rapport hydrogène/hélium dépend de la dynamique de l'Univers au moment de la recombinaison, de sorte que la connaissance empirique de ces rapports contraint l'espace des paramètres. Nous ne donnerons que les principaux résultats, et discuterons surtout de la notion de distance en cosmologie et des corrections relativistes à la loi de Hubble, qui permettent, à l'aide des *chandelles standard* que sont les supernovae de type I, de déterminer le paramètre de décélération. C'est ce qui a conduit à la découverte majeure (1998) que l'Univers est présentement accéléré avec $\Omega_{\Lambda,0} \approx 0.7$, et a conduit à la naissance du *modèle concordant* Λ CDM.

12.1 Le redshift cosmologique

Nous commençons notre discussion par une notion cruciale en cosmologie observationnelle, le redshift cosmologique. Du fait de l'expansion de l'Univers *pendant* le temps de vol d'un photon émis d'une source lointaine et qui arrive sur Terre, la longueur d'onde du photon est dilatée pendant son trajet. Il s'ensuit que plus une source est lointaine, plus son spectre lumineux est décalé vers le rouge. Le calcul précis de ce redshift cosmologique est simple.

Dilatation du temps cosmique et redshift cosmologique

Dans le système de coordonnées comobiles (t, χ, θ, ϕ) rencontré en Section 10.2, notons avec un indice e la source émettrice du photon, avec $t_e < t_0$, t_0 étant le temps d'observation. Centrons le SC sphérique sur la Terre, de sorte que nous occupions la position $\chi = 0$, tandis que la source est située à la coordonnée χ_e . On peut démontrer, à l'aide des équations géodésiques pour un photon, qu'un photon se déplace dans un Univers homogène et isotrope selon des lignes $\theta = cste$ et $\phi = cste$, ce qui est très intuitif. Nous admettrons ici ce résultat. Il s'ensuit qu'un photon, suivant par définition $ds^2 = 0$ avec $d\theta = d\phi = 0$, satisfait $dt = a(t)d\chi$, de sorte que la distance comobile de la source χ_e est donnée par

$$\chi_e = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (12.1)$$

Soient alors deux photons émis respectivement à t_e et $t_e + T_e$ avec $T_e \ll t_e$. Ces photons sont reçus respectivement à t_0 et $t_0 + T_r$. En négligeant la vitesse particulière de la source lumineuse, on peut considérer qu'elle reste entre t_e et $t_e + T_e$ à la même coordonnée comobile χ_e . Dès lors on a

$$\chi_e = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+T_e}^{t_0+T_r} \frac{dt}{a(t)} \quad (12.2)$$

soit

$$\chi_e = \int_{t_e}^{t_e+T_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+T_r} \frac{dt}{a(t)} \quad (12.3)$$

en vertu de la relation de Chasles. Utilisant $T_e \ll t_e$ et $T_r \ll t_0$ on a donc

$$\int_{t_e}^{t_e+T_e} \frac{dt}{a(t)} \approx \frac{T_e}{a(t_e)} \quad (12.4)$$

et

$$\int_{t_0}^{t_0+T_r} \frac{dt}{a(t)} \approx \frac{T_r}{a(t_0)} \quad (12.5)$$

de sorte que

$$\boxed{\frac{T_r}{a(t_0)} = \frac{T_e}{a(t_e)}} \quad (12.6)$$

Cette équation montre deux choses. D'abord, un effet de *dilatation du temps au niveau cosmologique* : toute durée T_e entre deux événements se produisant à t_e est *observée* comme étant dilatée un instant plus tard, selon la loi $T_r = a(t_r)T_e/a(t_0)$. On note que $T_r > T_e$ dans un Univers en expansion entre t_e et t_0 , mais $T_r < T_e$ dans un Univers qui s'est contracté entre ces deux époques.

Ensuite, on peut considérer les événements à t_e et à $t_e + T_e$ comme étant deux crêtes successives d'une onde électromagnétique monochromatique (dont la période est alors celle du photon véhiculé), de sorte que la fréquence du rayonnement électromagnétique est elle-même affectée par cette dilatation du temps cosmologique. La fréquence de ce photon émis vaut $\nu_e = 1/T_e$, et il est reçu avec une fréquence $\nu_0 = 1/T_r$, de sorte que l'on a

$$\frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (12.7)$$

Le photon est observé avec une fréquence moindre (il est redshifté) si $\nu_0 < \nu_e$, c'est-à-dire si $a(t_0) > a(t_e)$, et donc si l'Univers s'est étendu entre t_e et t_0 . On définit le redshift z par

$$1 + z = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{a_0}{a_e} \quad (12.8)$$

Cette équation est certainement beaucoup plus utile lorsque écrite de la façon suivante :

$$\boxed{a(t) = \frac{a_0}{1 + z}} \quad (12.9)$$

Le redshift est une quantité directement observable, et ce avec une grande précision (il suffit par exemple de considérer la fréquence observée pour une transition entre deux niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène, et la comparer à la fréquence sur Terre ; cela vaut aussi pour toute autre raie spectrale). La seule imprécision réelle¹ dans la mesure du redshift provient en fait de l'éventuel mouvement particulier de la source (d'où un effet Doppler supplémentaire) qu'il faut soustraire lorsque ce mouvement est connu.

1. Il pourrait aussi y avoir un décalage spectral supplémentaire si le photon émis doit s'extraire d'un puits gravitationnel suffisamment profond pour que l'effet soit non-négligeable.

Les quatre variables temporelles de la cosmologie

On note que, pour peu que l'évolution du facteur d'échelle soit monotone dans le temps cosmique (ce qui est le cas du modèle concordant Λ CDM, et ce que nous supposons par la suite), alors la relation temps–facteur d'échelle est bijective, et ainsi en est-il des relations redshift–temps ou redshift–facteur d'échelle. Autrement dit et le facteur d'échelle, et le redshift, sont de toutes aussi bonnes variables temporelles que le temps t lui-même. Le redshift a même l'avantage considérable sur t et $a(t)$ d'être directement observable, alors que ces deux derniers ne le sont pas. Il est donc très fréquent en cosmologie d'utiliser le redshift comme la variable temporelle de référence. On note qu'il est infini au Big Bang et décroît avec le temps. Pour référence, le redshift à l'époque du CMB ($t \approx 300\,000$ ans) vaut environ $z = 1100$. Les différentes relations entre ces trois variables temporelles sont les suivantes.

- La relation entre le facteur d'échelle et le temps : $a(t)$ ou $t(a)$, donné comme solution de l'équation de Friedmann
- La relation entre le facteur d'échelle et le redshift : $a(t) = a_0/(1+z)$
- Et enfin la relation entre le *temps de regard en arrière* ou aussi le *look-back time*, $t_0 - t > 0$, et le redshift z .

Pour trouver cette dernière relation on différencie le logarithme de $a(t) = a_0/(1+z)$:

$$\frac{da}{a} = H(t)dt = -\frac{dz}{1+z}$$

de sorte que

$$t_0 - t = \int_t^{t_0} dt = - \int_z^0 \frac{dz'}{H(z')(1+z')}$$

soit

$$\boxed{t_0 - t = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')(1+z')}} \quad (12.10)$$

où le paramètre de Hubble est donné en fonction du redshift par

$$\boxed{H^2 = H_0^2 [\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_{T,0})(1+z)^2]} \quad (12.11)$$

en vertu de Eq. (11.48) et de Eq. (12.9).

La relation redshift–temps est évidemment non-linéaire (et déterminée par la connaissance de $a(t)$ et donc des paramètres cosmologiques). Un redshift de 1 correspond déjà à des instants d'émission reculés de plusieurs milliards d'années², et donc aussi à des sources éloignées d'autant. Les objets les plus

2. Voir par exemple Hobson Fig. (15. 7) et une formule approchée ci-dessous.

vieux jamais observés, exception faite du CMB lui-même, doivent être des objets très lumineux (puisqu'il est nécessairement très lointains), et sont en l'occurrence les quasars, c'est-à-dire des disques d'accrétion de matière sur des trous noirs supermassifs³. Les plus vieux quasars observés ont un redshift atteignant $z = 7$, ce qui correspond à un âge d'environ $0.9H_0^{-1}$, *i. e.* émettant leur lumière environ un milliard d'années après le Big-Bang⁴ dans le modèle concordant $\Omega_\Lambda = 0.7, \Omega_m = 0.3$ (voir par exemple Hobson Fig. (15. 7) pour la relation entre z et le temps de regard en arrière).

Aux faibles redshifts $z \ll 1$, on peut développer en série $a(t_e) \sim a(t_0) - (t_0 - t_e)H_0 + \dots$, et écrire le redshift comme

$$z \approx (t_0 - t_e)H_0,$$

de sorte qu'aux temps courts, le redshift correspond au temps de vol des photons, pondéré par la constante de Hubble, qui est l'inverse d'un temps, et dont l'inverse est un bon ordre de grandeur pour l'âge de l'Univers (*cf.* ci-dessous) $1/H_0 \sim 13.5$ milliards d'années. Pour repère, on a donc :

$$z \approx \frac{(t_0 - t_e)}{13.5 \times 10^9 \text{ans}}$$

si, et seulement si, $(t_0 - t_e) \ll 13.5 \times 10^9 \text{ans}$, *i. e.* $z \ll 1$.

Pour terminer cette discussion notons rapidement que la température de l'Univers (sous-entendue celle du plasma de matière avant la recombinaison, puis celle du CMB ensuite) est aussi une variable temporelle admissible. En effet il est connu qu'un fluide de radiation à température T (dite température de corps noir) a une densité d'énergie allant comme T^4 . Au vu de l'équation (11.13) ci-dessus, on voit que la température d'un fluide cosmique de radiation évolue comme $T(z) \propto 1 + z$ avec l'expansion de l'Univers.

12.2 Distances en cosmologie

On voit tout de suite qu'il n'y a pas de notion intuitive de distance en cosmologie, puisqu'une source est observée dans le passé, de sorte que la distance

3. Une fraction significative de l'énergie de masse des particules de gaz formant le disque d'accrétion est libérée par la friction intra-gaz lors de la chute « spiralee » vers le trou noir, de sorte que de tels disques d'accrétion constituent les sources énergétiques et lumineuses les plus puissantes de l'Univers.

4. Ce qui n'est pas d'ailleurs sans poser un défi pour comprendre comment des trous noirs supermassifs peuvent se former aussi vite après le Big Bang.

physique nous séparant de cette source a augmenté avec le temps pendant le trajet des rayons lumineux. Quelle notion de distance adopter, dans ce cas ? Cela est nécessairement conventionnel. Pour restreindre le choix, il est naturel de se limiter à des distances qui soient en principes observables (mesurables) *via* des observations sur Terre. Dans cette section nous aborderons la notion de distance luminosité et de distance angulaire.

12.2.1 La distance luminosité

Dans un espace euclidien et sans expansion, une source de luminosité totale L (en Watts) émet de la lumière de façon sphérique (en tout cas nous nous limitons à ces sources là), de sorte que le flux d'énergie ϕ , en Watts par mètre carré, reçu à une distance euclidienne d vaut

$$\phi = \frac{L}{4\pi d^2} \quad (12.12)$$

en vertu de la conservation de l'énergie émise (ce qui présuppose que la lumière n'est pas absorbée le long du chemin, par exemple par des nuages de gaz interstellaires ou intergalactiques). Par analogie, nous définirons en cosmologie la *distance-luminosité* d_L telle que la formule ci-dessus soit valable :

$$\phi = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (12.13)$$

Il faut noter que la distance-luminosité n'est pas directement observable. Ce qui est observé, c'est le flux ϕ sur Terre. En revanche, si l'on connaît la luminosité intrinsèque de la source L , on peut en déduire la distance d_L , dont on va voir ci-dessous comment elle peut s'exprimer en fonction du redshift de la source et de l'histoire de l'expansion de l'Univers. Autrement dit la connaissance de L , la mesure de ϕ et de z , permettent directement d'accéder à des informations sur l'histoire de l'expansion de l'Univers, c'est-à-dire aussi une mesure des paramètres cosmologiques $\Omega_{i,0}$. Les formules ci-dessous préciseront cela.

Calculons d'abord la distance-luminosité d'une source en fonction de sa coordonnée radiale χ_e . Il faut noter que dans la métrique FLRW en coordonnées (t, χ, θ, ϕ) la surface de la sphère centrée sur χ_e , de rayon coordonné χ_e (*i. e.*, qui atteint la Terre à $t = t_0$) vaut $4\pi a_0^2 S_k(\chi_e)^2$. Par ailleurs, la luminosité L de la source étant en Watts (*i. e.* en Joules par seconde), le flux reçu doit être divisé par $1 + z$ du fait de la dilatation du temps cosmique abordé à la section précédente. Enfin les photons reçus sont aussi redshiftés d'un facteur

$1+z$, de sorte que leur énergie à la réception est divisée par $1+z$ par rapport à l'énergie qu'ils portaient à l'instant de leur émission. Au final, le flux reçu vaut :

$$\phi = \frac{L}{(1+z)^2 4\pi a_0^2 S_k(\chi_e)^2} \equiv \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (12.14)$$

de telle sorte que la distance luminosité vaut, dans la métrique FLRW,

$$\boxed{d_L(z) = (1+z)a_0 S_k(\chi_e(z))} \quad (12.15)$$

où il faut noter que la coordonnée comobile χ_e de la source est une fonction du temps d'émission t_e *via* l'Eq. (12.1), et donc fonction du redshift de cette source, puisque le redshift est aussi une variable temporelle valable. Pour exprimer χ_e en fonction du redshift z de la source, effectuons les changements de variables successifs $da = a'(t)dt$, puis $da = -a_0 dz/(1+z)^2$:

$$\chi_e = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{a_e}^{a_0} \frac{da}{a'(t)a(t)} = \int_{a_e}^{a_0} \frac{da}{H(t)a^2(t)} = - \int_z^0 \frac{a_0 dz}{H(z)a_0^2} \quad (12.16)$$

de sorte que

$$\boxed{\chi_e(z) = \frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz}{H(z)}} \quad (12.17)$$

Remarquons au passage que cette loi est une généralisation de la loi de Hubble établie en Section 3.6. En effet, pour $z \ll 1$, la formule ci-dessus se réduit à $a_0\chi(z) = z/H_0$. On reconnaît la distance physique $d = a_0\chi(z)$, et si l'on interprète z comme un redshift Doppler dû à la vitesse de récession, on a $z = v/c$ au premier ordre. Ainsi nous retrouvons bien au premier ordre $v = H_0 d$ qui est la loi de Hubble. Cette loi de Hubble est cependant purement cinématique et ne prend pas en compte les effets de retard de la propagation des rayons lumineux, de sorte que lorsqu'on observe une galaxie lointaine, on l'observe aussi dans le passé. Il est donc naturel que la relation entre la distance et la vitesse apparente de récession (plus exactement du redshift), dépende en fait de l'histoire de l'expansion de l'Univers entre le moment d'émission et celui de la réception des rayons lumineux. C'est bien ce qu'indique la formule ci-dessus. C'est la forme relativiste correcte de la loi de Hubble. L'équation Eq. (12.23) ci-dessous exprime cette loi jusqu'au second ordre en z . Le premier terme correctif à la loi de Hubble, en z^2 , dépend de l'accélération instantanée de l'Univers *via* le paramètre de décélération q_0 , comme on pouvait s'y attendre, *cf.* Eq. (12.23).

Nous pouvons maintenant revenir à l'intérêt pratique de ces formules pour la mesure des paramètres cosmologiques. Supposons que nous ayons observé

une source de redshift z , de luminosité intrinsèque L supposée connue, et un flux ϕ sur Terre. On a

$$\phi = \frac{L}{(1+z)^2 4\pi a_0^2 S_k^2 \left(\frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \right)} \quad (12.18)$$

de laquelle on peut déduire, en principe, la valeur de cette intégrale (si k est connu). Cette formule est effectivement utilisée avec les chandelles standard que sont les supernovae de type Ia, dont la luminosité intrinsèque est relativement bien connue. Cependant on peut écrire cette dernière formule sous une forme beaucoup plus commode si les sources sont situées à un petit redshift (les SN Ia les plus lointaines utilisées ont $z \approx 1 - 1.5$). Nous développons donc en puissances de z et utilisons que $S_k(\chi) \sim \chi$ au premier ordre.

Pour ce faire il est plus aisé de repartir du développement de $a(t)$, en supposant que $t_0 - t \ll H_0^{-1}$. On a aux premiers ordres

$$a(t) = a_0 \left(1 - (t_0 - t)H_0 - \frac{(t_0 - t)^2}{2} q_0 H_0^2 + \mathcal{O}((t_0 - t)^3) \right) \quad (12.19)$$

où q_0 est le paramètre de décélération $q_0 = -a''(t_0)a_0/a'(t_0)^2$, cf. Section 10.4. On en déduit une expression approchée pour la distance comobile

$$\begin{aligned} \chi &= \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \\ &= \frac{1}{a_0} \int_t^{t_0} \frac{dt}{1 - (t_0 - t)H_0 + \mathcal{O}((t_0 - t)^2)} \\ &= \frac{1}{a_0} \left[(t_0 - t) + \frac{1}{2}(t_0 - t)^2 H_0 + \mathcal{O}((t_0 - t)^3) \right] \end{aligned} \quad (12.20)$$

ainsi qu'une expression pour le redshift

$$z = \frac{a_0}{a(t)} - 1 = (t_0 - t)H_0 + \frac{(t_0 - t)^2}{2} \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) + \mathcal{O}((t_0 - t)^3) \quad (12.21)$$

tous calculs faits. On inverse finalement cette série pour trouver $t_0 - t$ en fonction de z aux premiers ordres :

$$t_0 - t \sim H_0^{-1} \left(z - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) z^2 \right) + \mathcal{O}(z^3) \quad (12.22)$$

Reportant dans l'expression pour χ , le développement limité donne finalement

$$\chi(z) = \frac{1}{a_0 H_0} \left(z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right) \quad (12.23)$$

On en déduit que le flux (observé) est lié au redshift z (mesuré) et à la luminosité intrinsèque (connue), par

$$\phi = \frac{LH_0^2}{4\pi z^2} [1 + (q_0 - 1)z] + \mathcal{O}(z^0) \quad (12.24)$$

ce qui permet de déterminer par le biais d'observations le paramètre de décélération $q_0 = \Omega_{m,0}/2 - \Omega_{\Lambda,0}$.

12.2.2 Distance angulaire

Une autre notion de distance est la distance angulaire. À nouveau, dans un espace Euclidien, il est vrai que deux points séparés d'une distance l et tous deux distants de d d'un observateur O sont vus par O sous un angle $\theta = l/d$ au premier ordre (*i. e.* dans la limite $l \ll d$). De la même façon nous définirons la distance angulaire d_A en cosmologie de telle sorte que cette formule $d_A = l/\theta$ soit encore valable, et où l est la distance physique entre les deux points éloignés.

De la même façon que pour la distance-luminosité, nous allons voir comment la distance angulaire d_A s'exprime en fonction de la taille réelle de la source l , de son redshift, et de l'histoire de l'Univers entre l'émission des rayons lumineux et leurs observations. Afin de contraindre les paramètres cosmologiques à l'aide de la distance angulaire, il est donc nécessaire de disposer de sources lumineuses de redshift connus, et dont on puisse observer la taille angulaire dans le ciel d'une part, et dont on connaisse la taille physique l d'autre part. On pourrait songer à utiliser les galaxies elles-mêmes, mais celles-ci ont des tailles fortement variables de l'une à l'autre et ne peuvent servir d'étalon. Un exemple concret d'application de la distance angulaire est la mesure de la taille angulaire de la « couronne d'éjection » d'une supernova de type II (la *photosphère*) dont la taille physique est connue en mesurant la vitesse d'expansion de la surface en explosion (par effet Doppler), et en mesurant par ailleurs le temps écoulé depuis l'explosion. C'est la méthode de la *photosphère en expansion*, qui cependant ne s'applique pas telle quelle au cas de supernovae extragalactiques puisque dans ce cas la séparation angulaire est trop faible pour être résolue. Cependant une technique annexe utilisant la loi de Stefan permet de mesurer cet angle de façon indirecte, et permet ainsi une mesure alternative (mais moins précise) de q_0 (voir [8][Chp. 2] pour plus de détails).

Il nous suffit ici de calculer la distance angulaire dans une métrique de FLRW. Sans perte de généralité, prenons deux extrémités de l'objet de taille

l , émettant de la lumière vers l'observateur (situé à $t = t_0$ et $\chi = 0$) à un instant t_e . Ces deux événements sont vus sous un angle θ , par l'observateur, de sorte que leurs coordonnées sont, sans perte de généralité $(t_e, \chi_e, 0, 0)$ et $(t_e, \chi_e, \theta, 0)$. On cherche la distance physique séparant ces deux événements à $t = t_e$: il s'agit de

$$l = \int_0^\theta a(t_e) S_k(\chi_e) d\theta = a(t_e) S_k(\chi_e) \theta \quad (12.25)$$

(cf. $dt = 0, d\chi = 0, d\phi = 0$ dans l'élément de longueur FLRW). On en déduit $d_A = l/\theta = a(t_e) S_k(\chi_e)$. Avec $a(t_e) = a_0/(1+z)$ il vient :

$$\boxed{d_A = \frac{a_0 S_k(\chi(z))}{1+z}} \quad (12.26)$$

On remarque une relation entre distance angulaire et distance luminosité : $d_A = d_L/(1+z)^2$. Il se trouve que cette dernière relation est un résultat général valable dans tous les espace-temps (pas nécessairement homogènes ni isotropes). C'est le théorème (non-trivial) de *réciprocité* : on a toujours $d_A = d_L/(1+z)^2$.

12.3 Détermination des paramètres cosmologiques

Nous proposons ici un survol des techniques utilisées pour l'estimation de divers paramètres cosmologiques.

12.3.1 La constante de Hubble

La constante H_0 joue un rôle central en cosmologie. C'est l'inverse d'un temps, et son inverse donne une estimation correcte de l'âge de l'Univers $T_0 \sim 1/H_0$. Par ailleurs la quantité $d_H = c/H_0$ est une distance, dite *distance de Hubble*, et qui est une bonne estimation de la taille de l'Univers observable, c'est-à-dire de la taille de l'horizon des particules (voir chapitre suivant). Enfin H_0 entre dans la loi de Hubble $v = H_0 d$ qui est valable pour des petites distances $d \ll d_H$, ou, c'est équivalent, pour des vitesses de récession $v \ll c$, ou encore pour des redshifts cosmologiques petits $z \ll 1$, avec $v \sim cz$. A grand z , il faut utiliser la relation distance-redshift qui généralise la loi de Hubble, cf. Eq. (12.17).

On détermine H_0 à l'aide de la loi de Hubble à faible redshifts, où la correction due à l'accélération q_0 peut-être négligée (typiquement $z \leq 0.1$, cf. Eq. (12.23). Par ailleurs il ne faut pas oublier que les galaxies sont en général animées de vitesses particulières de l'ordre de $100 km.s^{-1}$. Pour pouvoir négliger ces vitesses particulières, on se restreindra aux galaxies ayant une vitesse de récession $v \geq 1000 km.s^{-1}$, c'est-à-dire ayant un redshift supérieur à 0.003. Au final, pour déterminer H_0 , on utilise donc la loi de Hubble dans l'intervalle $z \sim 0.003 - 0.1$ ou encore $\sim 10 Mpc - 300 Mpc$. Pour ce faire il faut maintenant disposer d'une mesure indépendante de la distance des objets que l'on considérera. C'est le point qui est de loin le plus délicat.

Déterminer la distance d'une source sans l'aide de la loi de Hubble est une tâche non-triviale. Pour les objets proches, on peut par exemple utiliser la méthode du parallaxe qui exploite la différence de position angulaire dans le ciel d'une étoile lorsqu'elle est observée sur Terre à six mois d'intervalle. C'est la seule méthode de mesure directe de distances que nous ayons à disposition. La limite de cette méthode provient de la limite en résolution angulaire du télescope utilisé. On peut ainsi mesurer des distances jusqu'à quelques centaines de parsec (mission satellite Hipparcos, décennie 1990), ce qui reste donc interne à notre galaxie, et ne peut donc en aucun cas être utilisé pour mesurer H_0 .

Pour aller plus loin, il faut se reposer sur des méthodes indirectes. La méthode principale consiste à repérer des *chandelles standard*, c'est-à-dire tous types d'objets (étoiles, supernovae, ...) dont la luminosité intrinsèque est invariable d'une occurrence à une autre. Les étoiles variables dites Céphéides (géantes jaunes) ont joué un rôle particulièrement important en astronomie. Ces étoiles ont une luminosité qui est fonction périodique du temps, et il existe une relation entre la période et la luminosité intrinsèque. Il a donc suffi de mesurer directement, par la méthode du parallaxe, la distance des Céphéides proches (il en existe une petite dizaine dans le voisinage solaire dont la distance est ainsi accessible) pour déterminer leur luminosité absolue⁵. Ces Céphéides, promues ensuite au rang de chandelles standard, permettent alors des mesures indirectes de la distance de leurs galaxies hôtes en comparant la luminosité intrinsèque et le flux reçu. C'est un exemple de construction d'une échelle de distance de proche en proche. Les Céphéides étant particulièrement brillantes, on peut résoudre des distances allant jusqu'à ~ 30 Mpc par ce biais, ce qui permet déjà une mesure de H_0 .

Il existe d'autres méthodes pour déterminer des distances. Nous avons par exemple cité dans la section précédente la méthode de la photosphère en ex-

5. On le calibre aussi à l'aide des céphéides du nuage de Magellan.

pansion qui a la particularité, elle, de ne pas demander la connaissance de la luminosité intrinsèque (puisque basée sur la distance angulaire). Cependant la plupart des autres méthodes nécessitent bien la connaissance luminosité intrinsèque d'un objet. Un exemple important est l'utilisation de la *loi de Tully-Fischer*, qui est une loi empirique reliant la luminosité absolue d'une galaxie elliptique à sa dispersion de vitesse⁶, et qui s'écrit sous la forme $\sqrt{L} \propto \langle v^2 \rangle$. La constante de proportionnalité doit être d'abord déterminée en appliquant cette loi à des galaxies proches dont les distances sont connues indépendamment, par exemple à l'aide des Céphéïdes⁷. Ensuite, on peut utiliser cette loi pour déterminer la distance de galaxies lointaines, en mesurant par effet Doppler leurs dispersions de vitesse, et en mesurant le flux lumineux reçu sur Terre. Terminons ce paragraphe par un mot sur les objets vraiment lointains. La méthode la plus efficace dans ce cas est celle basée sur les supernovae de type Ia dont nous avons déjà parlé.

Toutes ces méthodes s'accordent pour donner (chacune avec des intervalles de confiance différent) $H_0 \sim 73 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$, à, disons, plus moins dix pour cent près, ce qui implique une première estimation de l'âge de l'Univers $T_0 \sim 1/H_0 \approx 13.5$ milliards d'années, et une distance de Hubble de 13.5 milliards d'années-lumière soit environ 3000 Mpc. Une fois la constante H_0 connue, la loi de Hubble aux petits redshifts peut-être utilisée dans l'autre sens pour déterminer cette fois la distance d'une source lointaine de façon directe. Par conséquent, les incertitudes sur la valeur de H_0 impactent très souvent l'incertitude sur la valeur d'autres paramètres cosmologiques. Nous y reviendrons. Pour cette raison, on introduit souvent un nombre, h_{70} , défini par

$$H_0 = h_{70} \times 70 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1} \quad (12.27)$$

et on exprime la valeur des autres paramètres cosmologiques en fonction de h_{70} (s'il y a lieu d'être), afin de montrer qu'une incertitude sur h_{70} se répercute sur une incertitude sur ce paramètre (par exemple, un des $\Omega_{i,0}$).

12.3.2 Les paramètres Ω

Pour commencer, la densité critique $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$ est connue en fonction de h_{70} . La densité de radiation peut être mesurée directement. On montre en effet que la grande majorité de l'énergie du rayonnement se trouve dans le

6. C'est-à-dire à la moyenne du carré des vitesses des étoiles liées gravitationnellement au sein de la galaxie

7. Nous sommes donc toujours dans l'idée d'une détermination de proche en proche des distances.

CMB et non dans la lumière émise par les étoiles et les galaxies. Une loi du rayonnement de corps noir⁸ donne alors cette densité d'énergie en fonction de la température de ce rayonnement⁹. On en déduit alors $\rho_{r,0}$ et on trouve

$$\Omega_{r,0} \approx 5 \times 10^{-5} h_{70}^{-2} \quad (12.28)$$

qui est donc négligeable aujourd'hui. L'estimation du Ω des neutrinos dépend du nombre d'espèces de neutrinos (trois sont connues à ce jour mais cela n'est peut-être pas le fin mot de l'histoire), ainsi que de leurs masses. Quoiqu'il en soit il est correct de considérer qu'il est également négligeable.

La densité de baryons : la densité de matière visible (lumineuse, *i. e.* essentiellement stellaire) est faible : $\Omega_{\text{visible},0} \sim 0.003$, tandis que l'on sait que la densité totale de matière baryonique vaut $\Omega_{b,0} \sim 0.04 \pm 1 \times h_{70}^{-2}$, qui provient que ce nombre est nécessaire pour que la nucléosynthèse primordiale produise le rapport 75%–25% d'hydrogène et d'hélium. Cela suggère qu'une grande partie des baryons se trouvent sous forme noire ou peu lumineuse¹⁰, par exemple sous la forme de gaz moléculaires froids (dihydrogène), de gaz chauds intergalactiques, ou encore naines brunes, naines blanches, trous noirs, étoiles à neutrons, etc.

La matière noire : le rapport de la masse baryonique à la masse totale dans les amas de galaxies (cette dernière étant notamment estimée par l'étude de la dynamique interne des amas, mais aussi par effet de lentille gravitationnelle, etc.) est de l'ordre de $0.12 h_{70}^{-3/2}$ (avec de fortes imprécisions ici), de sorte qu'on trouverait une densité totale de la matière non relativiste (baryonique + CDM) de l'ordre de $\Omega_{m,0} \sim 0.33 h_{70}^{-1}$. Comme annoncé dans les premiers chapitres, cela indique une forte présence de matière noire non baryonique et froide, dans des proportions de l'ordre de huit pour un. D'autres effets viennent conforter ce chiffre pour le $\Omega_{m,0}$. L'influence principale de la densité de matière est naturellement le rythme de la formation des structures au cours du temps cosmique. Nous n'aborderons pas cette question dans ce cours, mais nous pouvons ajouter ici que plusieurs observables liées à la formation des structures, et notamment le spectre des fluctuations de densités et l'évolution du nombre d'amas au cours du temps, viennent confirmer que

$$\Omega_{m,0} \sim 0.3 \quad (12.29)$$

8. On démontre à partir de la loi de Planck du corps noir, que la densité d'énergie u d'un rayonnement à la température T vaut $u = \sigma T^4$, où σ est la constante de Stefan-Boltzmann.

9. Aujourd'hui $T \approx 2.725$ K, ce qui correspond à une longueur d'onde dominante de l'ordre 1.8 mm, d'où le caractère micro-onde du fond diffus cosmologique – voir théorie du corps noir.

10. Il faut cependant la distinguer de la matière noire non baryonique, *i. e.* la CDM.

Deux mesures orthogonales viennent alors compléter ce tableau. Le CMB est quasiment homogène et isotrope. Cependant on observe des petites fluctuations de températures selon la direction dans laquelle on le regarde. Ces zones un peu plus chaudes indiquent la présence de surdensités de matière qui formeront plus tard les grandes structures par effondrement gravitationnel. On peut décomposer les anisotropies du CMB en harmoniques sphériques et obtenir ainsi le *spectre de puissance angulaire* du fond de rayonnement cosmologique. Ce spectre possède des pics qui indiquent certaines tailles angulaires privilégiées pour lesquelles les inhomogénéités sont les plus importantes. Une analyse de la physique sous-jacente montre que la position du premier pic est liée aux paramètres Ω . Les mesures du spectre de puissance angulaire des missions COBE puis WMAP ont alors permis de montrer que le Ω total doit être assez proche de 1, *i. e.* que l'Univers est plat ou quasiment plat (de courbure négligeable). À notre époque où la radiation est également négligeable, cela revient essentiellement à dire que $\Omega_m + \Omega_\Lambda \approx 1$. Cela suggère donc que le Ω_Λ n'est pas nul. Cela est en fait vérifié de façon totalement indépendante par l'étude de la distance-luminosité, dont nous avons vu précédemment qu'elle permettait de déterminer q_0 . L'utilisation des supernovae Ia jusqu'à des redshifts de $z \approx 1.5$ a permis de sonder la loi de Hubble généralisée et de déterminer que l'Univers est accéléré avec

$$q_0 = -0.55 \pm 0.2 \quad (12.30)$$

Rappelons que $q_0 = \Omega_{m,0}/2 - \Omega_{\Lambda,0}$ de sorte que l'on établit le modèle concordant Λ CDM avec $\Omega_{\Lambda,0} \sim 0.7$ et $\Omega_{m,0} \sim 0.3$, qui, par ailleurs, s'insèrent parfaitement bien dans tout le faisceau des observables (mesures directes de Ω_m , CMB, formation des structures, etc.), et dont l'étude détaillée demanderait un cours entier.

Un commentaire sur ce dernier résultat. On voit sur l' Eq. (12.23) que la distance d'une source de redshift z est une fonction décroissante de q_0 , de sorte qu'une galaxie apparaît plus lointaine dans un Univers accéléré ($q_0 < 0$) que dans un Univers décéléré ($q_0 > 0$). Autrement dit aussi le flux ϕ reçu, Eq. (12.24) est une fonction croissante de q_0 : les supernovae de type Ia apparaissent moins brillantes dans un Univers accéléré que dans un Univers décéléré. C'est bien ce que l'on a mesuré. Cependant, il faut prendre soin de démontrer que des explications alternatives et peut-être plus naturelles qu'une accélération de l'Univers ne sont pas satisfaisantes ici. Par exemple l'extinction du flux lumineux par absorption et diffusion de la lumière sur des nuages intergalactiques doit être prise en compte. Par ailleurs la plus faible luminosité des supernovae lointaines pourrait s'expliquer par des abondances chimiques différentes dans les galaxies plus anciennes. Nous ne pouvons pas

élaborer trop sur ces questions dans ce cours. Bien que ces pistes font encore l'objet de recherches à l'heure actuelle, il est dorénavant admis que q_0 est effectivement négatif.

12.4 L'âge de l'Univers

D'autres contraintes sur les paramètres cosmologiques proviennent du fait que l'âge de l'Univers doit, naturellement, être supérieur aux objets les plus anciens jamais observés.

L'âge de l'Univers, c'est-à-dire le temps écoulé depuis la singularité initiale $a = 0$, s'exprime aisément en reprenant l'expression du look-back time :

$$t_0 - t = \int_t^{t_0} dt = \int_a^{a_0} \frac{da}{\dot{a}} = \int_a^{a_0} \frac{da}{aH} = \int_{\hat{a}}^1 \frac{d\hat{a}}{\hat{a}H} \quad (12.31)$$

A l'aide de l'expression de H , Eq. (11.48), et avec T_0 l'âge de l'Univers, on trouve alors

$$T_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{d\hat{a}}{\hat{a} [\Omega_{m,0}\hat{a}^{-3} + \Omega_{r,0}\hat{a}^{-4} + \Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_{T,0})\hat{a}^{-2}]^{1/2}} \quad (12.32)$$

Cette intégrale ne peut s'évaluer que numériquement, sauf dans des cas simples comme $\Omega_{m,0} = 1, \Omega_{\Lambda,0} = 0, \Omega_{r,0} = 0, \Omega_k,0 = 0$ qui décrit un Univers composé seulement de matière non-relativiste, ce qui est une bonne approximation pour l'Univers réel puisque la période de radiation est courte¹¹. Dans ce cas on trouve $T_0 = 2/3H_0 \approx 0.9 h_{70}^{-1} 10^{10}$ ans. Dans le cas du modèle concordant, on trouve numériquement

$$\boxed{(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}) = (0.3, 0.7) \Rightarrow T_0 \approx 1.4 h_{70}^{-1} 10^{10} \text{ ans}}$$

Rappelons que certains modèles évitent la singularité initiale. Nous avons vu notamment que certains modèles Λ CDM sont des Univers à rebond (*cf.* la zone « no Big-Bang » que nous avons déjà rencontré dans la figure 11.1), où le facteur d'échelle est d'abord décroissant puis rencontre un minimum a_{\min} , puis « rebondit », ouvrant ainsi une phase d'expansion. Ces Univers ont un redshift maximal correspondant au minimum de a : $1 + z_{\max} = a_0/a_{\min}$. Le fait que nous ayons observé des galaxies et des quasars avec des redshifts

11. On rappelle que l'équivalence radiation-matière se situe un peu avant l'émission du CMB, tandis que $\Omega_{\Lambda,0}$ ne domine que tardivement.

aussi grands que $z \sim 7$ implique $z_{\max} \geq 7$, ce qui exclu en fait une grande partie de cette zone « no Big-Bang ».

Notons aussi que l'on peut estimer l'âge des étoiles à l'aide de modèles de population stellaire. Ainsi on a pu déterminer que certaines étoiles situées dans les amas globulaires du halo de la Voie Lactée ont un âge d'au moins 10^{10} ans, ce qui impose $T_0 \geq 10^{10}$ ans, et exclut ainsi la deuxième zone grisée¹², dans le bas à droite de la figure 11.1.

Terminons cette section en notant que l'Univers pourrait tout aussi bien avoir un âge infini depuis la singularité initiale $a = 0$ (i. e. un âge infini ne requiert pas nécessairement un modèle à rebond). Pour ce faire il faudrait que l'intégrale diverge aux alentours de $a \sim 0$, et cela est possible en incluant un contenu matériel qui se comporte différemment de ceux introduits jusqu'à présent. En effet, revenons à l'expression de H en terme de la densité totale $\rho(a)$ (matière, constante cosmologique, matière exotique, etc.) : $H^2 = 8\pi G\rho(a)/3 + H_0^2(1 - \Omega_{T,0})/\hat{a}^2$, alors l'âge de l'Univers est donné cette fois par

$$T_0 = \int_0^1 \frac{d\hat{a}}{\hat{a} [8\pi G\rho(\hat{a})/3 + H_0^2(1 - \Omega_{T,0})\hat{a}^{-2}]^{1/2}} \quad (12.33)$$

depuis la singularité initiale. On voit que l'intégrale diverge par exemple dans le cas plat $\Omega_{T,0} = 1$ si et seulement si $\rho(\hat{a})$ se comporte comme \hat{a}^n avec $n \geq 0$. Un cas particulier important est une ère inflationnaire primordiale dominée par la constante cosmologique ou une forme d'énergie noire¹³ : $\rho = cste$. Dans ce cas le facteur d'échelle va comme $\hat{a} = \exp(\sqrt{\Lambda/3}t)$ depuis la singularité initiale $a = 0$ qui se situe à $t = -\infty$ (l'âge de l'Univers est donc bien infini dans ce cas), jusqu'à la fin de l'inflation.

Remarquons de façon plus générale qu'un comportement non standard pour la densité de matière à l'approche de la singularité initiale n'a rien d'impensable physiquement, car, après tout, dans l'intégrale Eq. (12.32) ci-dessus, nous extrapolons la physique connue (le contenu matériel ainsi que les lois de conservation, la relativité générale, etc.) dans le domaine $a \rightarrow 0$ où l'on sait que les densités et la température tendent vers l'infini et où, par conséquent, une théorie de gravité quantique devrait prendre le relais. Il n'est donc pas du tout exclu que l'âge de l'Univers soit en réalité beaucoup plus grand que le nombre avancé plus haut, ou même infini. En fait, lorsque l'on dit que l'Univers a 14 milliards d'années selon le modèle concordant Λ CDM, il est plus

12. En supposant que $H_0 \geq 50 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$, ce qui est conservatif.

13. Dans le paradigme de l'inflation, l'Univers est vide pendant l'ère inflationnaire, tandis que les particules, dont le rayonnement, sont créées lors de la fin de l'inflation dans le processus de *reheating*, voir chapitre suivant.

conservateur de comprendre que l'on parle surtout de la durée écoulée depuis l'instant où la physique est connue, c'est-à-dire depuis des températures de l'ordre de $k_B T \sim m_p c^2$ où m_p est ici la masse du proton. Un calcul indique que c'est une température de l'ordre de 1.1×10^{13} K, soit depuis un redshift de l'ordre de $z \sim 5 \times 10^{12}$ (on rappelle que T varie comme $T(z) \propto 1 + z$ et que la température actuelle est de 2.725 K), ou encore un temps infime ($\sim 10^{-5}$ s) après le Big-Bang, si l'on suppose qu'aucune autre physique ne prend le relai vers $a \rightarrow 0$.

12.5 Univers observable et horizons

Le fait que l'Univers ait (ou en tout cas puisse avoir) un âge fini implique naïvement que nous ne pouvons voir qu'une partie finie de l'Univers, que l'on appelle l'Univers observable. C'est l'ensemble des points de coordonnées comobiles χ desquels on peut aujourd'hui recevoir un signal. La frontière de l'Univers observable s'appelle *l'horizon des particules*. Si l'ensemble de ces points se confond avec l'ensemble des coordonnées comobiles possibles, alors il n'y a pas d'horizon. Revenons à l'expression de la distance comobile χ dans le SC où l'observateur (la Terre) est en $\chi = 0$. L'équation 12.1 donnait

$$\chi(t) = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (12.34)$$

pour la distance comobile d'un signal émis à t . Comme $a > 0$, les signaux les plus lointains en terme de distance comobile, et qui nous proviennent aujourd'hui, ont été émis au moment du Big-Bang. La taille de l'horizon est donc

$$\chi_{\text{hor}} = \int_{t_*}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (12.35)$$

où t_* est tel que $a(t_*) = 0$. Un changement de variable permet d'écrire cela sous la forme

$$\chi_{\text{hor}} = \frac{d_H}{a_0} \int_0^1 \frac{d\hat{a}}{\hat{a}^2 [\Omega_{m,0} \hat{a}^{-3} + \Omega_{r,0} \hat{a}^{-4} + \Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_{T,0}) \hat{a}^{-2}]^{1/2}} \quad (12.36)$$

où l'on a utilisé $d_H = c/H_0$. Le fait qu'une partie seulement ou non de l'Univers soit observable se traduit par les propriétés de convergence de cette intégrale. On note que les deux intégrales donnant l'âge de l'Univers d'une part et la distance comobile de l'horizon d'autre part diffère d'un facteur $1/\hat{a}(t)$ dans l'intégrand. Il faut donc être prudent sur l'intuition naïve : âge fini

implique existence d'un horizon des particules, et considérer avec attention les propriétés de convergence. Par exemple, dans le cas plat avec une densité de matière allant comme $\rho = \hat{a}^n$ si $\hat{a} \sim 0$, l'horizon existe (χ_{hor} est fini) si $n \leq -2$ et n'existe pas sinon, tandis que l'âge est fini si $n \leq 0$. Ainsi dans le cas $-2 < n \leq 0$, l'âge de l'Univers est fini mais pour autant l'Univers observable est infini. Ce résultat non intuitif provient du rôle de l'expansion dans la propagation des rayons lumineux. Dans le cas du modèle concordant Λ CDM, la radiation domine la dynamique primordiale (on ne tient pas compte de l'inflation ici), et par conséquent $n = -4$, de sorte que l'âge de l'Univers est fini, et il existe un horizon des particules.

Notons que la taille physique aujourd'hui de l'horizon est donnée par $d = a_0 \chi_{\text{hor}}$, de sorte qu'elle est de l'ordre de $d_H = c/H_0$, modulo l'intégrale qu'il faut évaluer numériquement, cf. Eq. (12.36) ci-dessus. On obtient donc un Univers observable de taille physique donnée typiquement par 3000 Mpc à l'époque actuelle, même s'il faut bien voir qu'il s'agit de la taille aujourd'hui de l'Univers que l'on ne peut observer que dans le passé. Il s'agit donc d'un chiffre seulement indicatif et sans signification réelle. Remarquons aussi que notre époque n'ayant rien de particulier, la taille de l'horizon à toute époque est typiquement de l'ordre de $d_H(t)$, i. e. d'ordre $c/H(t)$.

Un autre horizon est celui des *événements*. Nous voyons que l'Univers observable croît avec le temps cosmique, comme il est assez intuitif. Est-ce à dire que l'on peut, à condition d'attendre suffisamment longtemps, avoir toujours accès à l'ensemble des points χ, θ, ϕ de l'hypersurface initiale à $t = t_*$ telle que $a(t_*) = 0$? Autrement dit, peut-on espérer voir un jour tout l'Univers dans son ensemble (même si, encore une fois, nous ne voyons qu'une coupe de l'Univers, le long du cône de lumière)? Cela ne sera vrai que si l'intégrale suivante, qui donne la distance comobile maximale d'une lumière émise à t_i et reçue à t_{max}

$$\chi(t) = \int_{t_i}^{t_{max}} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (12.37)$$

diverge (ici t_{max} est fini ou infini selon le modèle d'expansion éternelle ou de recollapse en Big Crunch). Dans le cas où cette intégrale converge, il existe une zone de coordonnées comobiles que l'on ne pourra jamais, même en principe, observer. Cette frontière est alors bornée par une surface de genre lumière que l'on nomme *l'horizon des événements*. Il faut noter que c'est aussi la zone de coordonnées comobiles que l'on peut atteindre (influencer) avec de la lumière émise à l'instant t_i .

Chapitre 13

Aperçu des problèmes de la cosmologie moderne

13.1 Le problème de l'horizon

Ce problème se comprend très bien intuitivement. Nous observons que le CMB est fortement homogène et isotrope avec des fluctuations de température du rayonnement de corps noir de l'ordre de $\delta T/T \sim 10^{-5}$, quelle que soit la direction sous laquelle on regarde le CMB dans le ciel. Prenons par exemple deux directions diamétralement opposées. Le CMB dans ces deux directions a été émis vers la Terre depuis une distance comobile $a_0\chi$ de l'ordre de 14×10^9 années-lumière. Ainsi ces deux zones du plasma primordial qui ont émis le CMB étaient séparés d'une grande distance comobile χ telle que $\sim a_0\chi \sim 28 \times 10^9$ années-lumière. On comprend alors sans peine que ces deux régions du plasma primordial n'ont pas eu le temps (en général) d'avoir été en contact causal, du fait du temps disponible relativement court ($\sim 300\,000$ ans) après le Big-Bang. Il n'y a donc aucune raison *a priori* pour que la température du CMB (qui est un traceur direct de la densité de la matière à l'époque de son émission) soit quasiment égale dans ces deux zones causalement déconnectées. Bien sûr, les propriétés d'expansion de l'espace peuvent invalider cette conclusion ; en particulier, le paradigme inflationnaire (*cf.* plus bas) qui suppose l'existence d'une phase d'expansion très rapide et très importante dans l'Univers très primordial (vers $\sim 10^{-33}$ s) est une « astuce » qui permet de mettre en contact causal toutes ces régions qui ont émis le CMB qui nous parvient aujourd'hui. En l'absence cependant d'un tel mécanisme, i. e. dans le cadre du strict modèle Λ CDM, on peut calculer que le CMB

observé aujourd'hui est constitué d'un grand nombre¹ de telles zones causalement déconnectées, et pourtant toutes ces zones ont les mêmes propriétés de température, de densités, et partagent la même amplitude des fluctuations de température. C'est le *problème de l'horizon*.

13.2 Le problème de la platitude

Ce problème est aussi connu sous le nom du *problème des Ω* . Du fait de la définition des Ω , on voit sans peine que le oméga total évolue en fonction du paramètre d'échelle réduit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\Omega_T(\hat{a}) &= \frac{\Omega_{r,0}\hat{a}^{-4} + \Omega_{m,0}\hat{a}^{-3} + \Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{r,0}\hat{a}^{-4} + \Omega_{m,0}\hat{a}^{-3} + \Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_{T,0})\hat{a}^{-2}} \\ &= 1 - \frac{(1 - \Omega_{T,0})\hat{a}^{-2}}{\Omega_{r,0}\hat{a}^{-4} + \Omega_{m,0}\hat{a}^{-3} + \Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_{T,0})\hat{a}^{-2}}\end{aligned}\quad (13.1)$$

On en déduit que, dans l'ère de radiation, on a

$$1 - \Omega_T(\hat{a}) \approx \frac{(1 - \Omega_{T,0}(\hat{a})) \hat{a}^2}{\Omega_{r,0}}, \quad (13.2)$$

et on voit que, pour avoir un Univers quasiment plat aujourd'hui (puisque l'on sait, de façon conservative, que $|1 - \Omega_{T,0}| < 0.5$), il a fallu que l'Univers soit extrêmement plat dans le passé, avec une valeur de $\Omega_T(\hat{a})$ qui tend vers 1 si $\hat{a} \rightarrow 0$, et en l'occurrence qui vaut 1 suivi de 56 zéros à l'époque de grande unification². Cela pose un problème de « réglage fin » (*fine-tuning* en anglais) des conditions initiales, qui doivent être très particulières afin d'avoir $|1 - \Omega_{T,0}| < 0.5$ aujourd'hui (quoique ce problème disparaît si l'Univers est exactement plat avec $k = 0$ et $\Omega_T(t) = 1 \forall t$). Le paradigme inflationnaire amène également une réponse à ce problème, comme nous allons le voir.

1. Typiquement, la taille de l'horizon à l'époque du CMB, qui définit la zone causalement connectée (à cette époque) autour de toute direction donnée dans le ciel, est perçue depuis la Terre avec une ouverture angulaire de l'ordre de 1° . Le CMB est donc, selon le modèle concordant, constitué d'un grand nombre de zones causalement déconnectées les unes des autres.

2. Une époque supposée vers $a/a_0 \sim 10^{-28}$, où l'ensemble des forces fortes et électrofaibles seraient unifiées en une seule et unique force, aux alentours d'une température de l'ordre de $T = 10^{15}$ GeV. Un GeV = 10^9 eV, et un électron-Volt (eV) vaut 1.6×10^{-19} Joule par définition. La conversion température - énergie se fait *via* $k_B T = E$. La température du plasma primordial où les forces sont supposées s'unifier est donc de l'ordre de 10^{28} Kelvins.

13.3 Le paradigme inflationnaire

La théorie de l'inflation consiste essentiellement à supposer que l'ère de radiation ne s'étend pas jusqu'à la singularité initiale $a(t) = 0$, mais qu'elle est en fait précédée d'une phase d'expansion accélérée, typiquement exponentielle (i. e. de type de Sitter). Bien entendu, pour que cela soit possible, il faut modifier le contenu en énergie-matière de l'Univers primordial. On suppose donc qu'il existe une phase (située vers 10^{-33} s, cf. ci-dessous), où l'Univers est essentiellement vide de la matière ordinaire, mais rempli d'un fluide de type énergie noire (i. e. une équation d'état $w \approx -1$), provenant d'un nouveau champ nommé *l'inflaton*. Cela conduit à une phase de type de Sitter, pour laquelle l'expansion de l'Univers est exponentielle : le paramètre de Hubble est environ constant, et le facteur d'échelle va comme $e^{H_{\text{inflation}}(t-t_i)}$. Il faut bien entendu mettre un terme à cette inflation, et, à cet instant, repeupler l'Univers des particules connues. Le modèle privilégié est typiquement, une désintégration spontanée de l'inflaton en radiation et en matière, que l'on appelle la phase de *reheating*³.

Commençons par le problème de l'horizon. Soit \hat{a}_2 le facteur d'échelle au début de la phase inflationnaire, et \hat{a}_1 sa valeur à la fin de l'inflation. Supposons l'Univers rempli d'un seul fluide de densité $\rho(\hat{a}) \sim \text{cste}$ pendant cette période. La contribution entre \hat{a}_2 et \hat{a}_1 à l'expression de la taille comobile de l'horizon des particules est donnée par

$$\chi_{\text{hor}} = \int_{t_2}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} \approx \frac{1}{a_0} \int_{\hat{a}_2}^{\hat{a}_1} \frac{d\hat{a}}{\hat{a}^2 [8\pi G\rho(\hat{a})/3]^{1/2}} \quad (13.3)$$

en négligeant la contribution de la courbure. On peut donc repousser l'horizon à l'infini en faisant tendre \hat{a}_2 vers 0 (auquel cas l'Univers observable se confond avec l'Univers en entier). Nous pouvons alors estimer l'ampleur nécessaire de l'inflation pour résoudre le problème de l'horizon. Essentiellement, nous voulons que l'horizon à la fin de l'inflation inclue le volume de Hubble actuel, de sorte que toutes les parties émettrices du CMB observé actuellement aient été en contact causal par le passé. Puisque $\rho(\hat{a}) \sim \text{cste}$ pendant cette période, le paramètre de Hubble est environ constant $H_1 \approx H_2$, et le facteur d'échelle évolue comme $\hat{a}(t) \sim \hat{a}_2 e^{H_1(t-t_2)}$. La taille de l'horizon

3. Quoiqu'un modèle plus complet serait : inflation, désintégration de l'inflaton dans les champs de la théorie Grand Unifiée, eux mêmes se transformant en les champs ordinaires (radiation et matière) à la brisure de symétrie grand unifiée vers les symétries résiduelles de l'interaction forte et électrofaible.

à la fin de l'inflation est donc donné par, environ

$$\chi_{end} \sim \frac{dt}{a(t)} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{a_2 H_1}\right) \quad (13.4)$$

On demande que $a_0 \chi_{end} > H_0^{-1}$, c'est-à-dire

$$\frac{a_0}{a_2 H_1} = \frac{a_0 a_1}{a_1 a_2} \frac{1}{H_1} > \frac{1}{H_0} \quad (13.5)$$

On utilise la loi de Friedmann pour évaluer H_1 . A la fin de l'inflation (à $t = t_1$), on a rempli à nouveau l'Univers de radiation, de sorte que, d'après Eq. (11.48), on a

$$H_1^2 \sim H_0^2 \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^4 \Omega_{r,0} \quad (13.6)$$

Avec $\Omega_{r,0} \approx 10^{-4}$ (en fait 5×10^{-5}), on en déduit, tous calculs faits, que cette condition s'écrit

$$\frac{a_1}{a_2} > 10^{-2} \frac{a_0}{a_1} \quad (13.7)$$

En conséquence, plus l'inflation a lieu tôt (i. e. plus le rapport a_0/a_1 est grand), plus l'expansion pendant l'inflation (a_1/a_2) doit être grande pour résoudre le problème de l'horizon. On suppose en général que l'inflation a lieu pendant l'ère de grande unification des interactions, ou aussi au moment de la brisure de cette unification des forces et de son groupe de symétrie étendu, en les forces standard et leurs groupes de symétries résiduelles associées, i. e. vers 10^{15} GeV, ce qui correspond à $a_1/a_0 \sim 10^{-28}$. Nous trouvons donc que pour résoudre le problème de l'horizon avec une ère inflationnaire, il faut que celle-ci étende l'espace d'un facteur $a_1/a_2 \sim 10^{26} \approx e^{60}$. On parle aussi du nombre d'*efolds* N , défini par $e^N = a_1/a_2$. Il faut donc $N \geq 60$ pour résoudre le problème de l'horizon avec l'inflation.

Il se trouve que l'on obtient le même ordre de grandeur pour N si l'on demande que l'inflation soigne également le problème de la platitude. En effet, on peut écrire, pendant la phase inflationnaire dominée par un seul fluide de densité ρ , et tenant compte de la courbure :

$$\Omega_T(a) = \frac{\Omega_T(a_2)}{\Omega_T(a_2) + (1 - \Omega_T(a_2))(a/a_2)^{-2}} \quad (13.8)$$

Pour $a_1 \gg a_2$, on voit que

$$1 - \Omega_T(a_1) = \frac{1 - \Omega_T(a_2)}{\Omega_T(a_2)} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \sim \frac{1 - \Omega_T(a_2)}{\Omega_T(a_2)} 10^{-52} \quad (13.9)$$

Cela signifie que l'on peut très bien avoir des conditions initiales pré inflationnaire de type $\Omega_T \sim 1$ (et non nécessairement ajusté à 50 décimales près à 1), *et* un oméga total proche de 1 encore aujourd'hui : la formule précédente indique que le oméga total est très proche de 1 à la fin de l'inflation, mais cela dynamiquement, et non à l'aide de conditions initiales trop spécifiques.

Bibliographie

- [1] J. M. Raimond. Électromagnétisme et relativité. Accessible en ligne : www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/electromagnetisme.htm
- [2] S. Weinberg. Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity. New York : John Wiley & Sons (1972)
- [3] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. Gravitation. San Francisco : W. H. Freeman (1973)
- [4] R. M. Wald. General Relativity. University of Chicago Press, 1984.
- [5] M. P. Hobson , G. P. Efstathiou , and A. N. Lasenby. General Relativity : An introduction for Physicists. Cambridge University Press (2006)
- [6] S. M. Carroll. Lecture notes on general relativity. arXiv (gr-qc) 9712019 (1997). Version française : <http://www-cosmosaf.iap.fr/MIT-RG1F.htm>
- [7] B. Linet. Notes de cours de relativité générale (2004). Accessible en ligne : <http://www.lmpt.univ-tours.fr/~linet/coursRG.pdf>
- [8] J. Rich. Principes de la cosmologie. Les éditions de l'École Polytechnique (2002). Accessible en ligne : http://catalogue.polytechnique.fr/Files/p_PrincCosmo.pdf
- [9] R. Durrer. Cosmologie (2001). Accessible en ligne : <http://theory.physics.unige.ch/~durrer/courses/cosmo.pdf>
- [10] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft, *Nature*, 425 :374–376, September 2003.
- [11] C. Brans and R. H. Dicke, Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation, *Phys. Rev.* , 124 :925–935, November 1961.
- [12] T. Damour and K. Nordtvedt, General relativity as a cosmological attractor of tensor-scalar theories, *Physical Review Letters*, 70 :2217–2219, April 1993.

- [13] T. Damour and K. Nordtvedt, Tensor-scalar cosmological models and their relaxation toward general relativity, *Phys. Rev. D*, 48 :3436–3450, October 1993.
- [14] P. Jordan, Formation of the Stars and Development of the Universe, 164 :637–640, October 1949.
- [15] C. M. Will, Theory and Experiment in Gravitational Physics, March 1993.