MODUL 1

Pernyataan dan Kata Hubung Pernyataan Majemuk

Dr. H. Karso, M.Pd.

PENDAHULUAN

Modul yang pertama dari mata kuliah *Matematika Dasar 1* ini membahas suatu pengertian yang sangat mendasar yang sering kita jumpai dalam pelajaran logika sebagai bagian dari matematika, yaitu tentang pernyataan atau yang disebut proposisi dan operasi-operasinya. Bahasan ini dikenal pula sebagai pernyataan dan kata hubung pernyataan majemuk. Garis besar materi bahasan modul ini terdiri atas dua kegiatan belajar. Kegiatan Belajar 1 membahas kalimat terbuka dan pernyataan, sedangkan pada Kegiatan Belajar 2 membahas kata hubung pernyataan yang dikenal pula sebagai operasi-operasi pernyataan.

Kegiatan Belajar 1 membahas pengertian logika modern dan logika tradisional, kalimat terbuka dan pernyataan, nilai kebenaran suatu pernyataan, variabel dan konstanta, serta penyelesaian kalimat terbuka. Kemudian Kegiatan Belajar 2 membahas kata hubung pernyataan atau operasi-operasi pernyataan, yaitu meliputi operasi negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi, serta tabel kebenarannya.

Materi dalam modul ini sifatnya merupakan prasyarat dalam mempelajari materi-materi modul berikutnya. Oleh karena itu, materi tentang pernyataan dan kata hubung pernyataan majemuk merupakan materi dasar yang penting untuk dipahami dengan baik. Selain itu, bagi Anda sebagai calon guru atau guru di SLTP maupun di SLTA, materi ini akan dipakai sebagai penunjang atau prasyarat materi-materi sekolah lainnya.

Secara umum setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan akan dapat memahami kalimat pernyataan dan operasi-operasinya. Adapun secara khusus setelah mempelajari modul ini diharapkan Anda dapat:

1. menjelaskan logika modern dan logika tradisional;
2. membedakan kalimat terbuka dan pernyataan;

3. menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan;
4. menjelaskan hubungan kalimat terbuka, variabel, dan konstanta;
5. menentukan penyelesaian suatu kalimat terbuka;
6. menentukan negasi dari suatu pernyataan;
7. menuliskan simbol logika dari pernyataan majemuk;
8. membuat tabel kebenaran suatu pernyataan majemuk; dan
9. menganalisis kebenaran suatu pernyataan majemuk.

Materi modul ini disusun menjadi dua kegiatan belajar sebagai berikut.
Kegiatan Belajar 1 : Kalimat Terbuka dan Pernyataan.
Kegiatan Belajar 2 : Kata Hubung Pernyataan atau Operasi-operasi Pernyataan.

Petunjuk Belajar

Untuk dapat memahami modul ini dengan baik serta mencapai kompetensi yang diharapkan, gunakanlah strategi belajar yang berikut ini.

1. Sebelum membaca modul ini, cermati terlebih dahulu Glosarium pada akhir modul yang memuat istilah-istilah khusus yang digunakan dalam modul ini.
2. Baca materi modul dengan saksama, tambahkan catatan pinggir, berupa tanda tanya, pertanyaan, konsep lain yang relevan, dan lain-lain sesuai dengan pemikiran yang muncul.
3. Cermati dan kerjakan soal-soal latihan dan tes formatif seoptimal mungkin dan gunakan rambu-rambu jawaban untuk membuat penilaian tentang kemampuan pemahaman Anda.
4. Buatlah catatan khusus hasil diskusi dalam tutorial untuk digunakan dalam pembuatan tugas dan ujian akhir.
5. Usahakanlah Anda mempelajari buku-buku sumber penunjang lainnya.

KEGIATAN BELAJAR 1

Kalimat Terbuka dan Pernyataan

A. PENGERTIAN LOGIKA

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering mendengar orang berkata: “Keputusan yang diambilnya sangat logis”, atau “Secara logika keputusan yang diambilnya tepat”. Dalam ungkapan tersebut tampak bahwa pengertian kata “logis” atau kata “logik” tentunya terkait dengan istilah “berdasarkan akal atau pikiran yang sehat”. Logika sebagai istilah mempunyai arti sebagai suatu metode, teknik, strategi atau pendekatan yang berhubungan dengan ketepatan dalam bernalar. Sedangkan penalaran (*reasoning*) tentu saja melibatkan kalimat sebagai bentuk pemikiran tentang pengertian atau konsep (*concept*) yang paling sederhana yang dikenal dengan proposisi (*proposition*) atau pernyataan (*statement*). Konsep-konsep penalaran terkait dengan proposisi sebagai bentuk pemikiran akan menjadi landasan dalam logika, baik logika tradisional maupun logika modern.

Istilah logika atau logika matematika adalah terjemahan dari *Symbolic* (*Mathematical*) *Logic* atau Logika Simbolik (Matematika), sedangkan secara etimologis istilah logika berasal dari kata *logos* yang dalam bahasa Yunani berarti kata, ucapan, pikiran secara utuh atau bisa juga bermakna ilmu pengetahuan. Namun, arti logika tidak mudah untuk diterapkan secara eksak dan singkat. Logika terdiri dari berbagai problem dan tidak mempunyai batas-batas yang eksak, adakalanya termasuk matematika (Logika Modern) dan adakalanya termasuk dalam filsafat (Logika Tradisional).

Banyak definisi-definisi tentang logika telah diberikan. Ada yang menyatakan bahwa mempelajari logika adalah mempelajari tentang metode-metode dan prinsip-prinsip yang dapat memisahkan secara tegas antara penalaran yang benar dan penalaran yang salah. Maksudnya bahwa pelajaran logika adalah pelajaran tentang metode dan prinsip yang dipakai untuk membedakan berpikir korek dan tidak korek. Tentu saja definisi ini tidak dimaksudkan untuk menyimpulkan bahwa orang yang akan dapat membedakan antara penalaran yang benar dan yang salah akan dapat membuat perbedaan berpikir korek dan tidak korek hanya ia jika telah mempelajari logika. Maksudnya tidak menyimpulkan bahwa seseorang yang tidak mempelajari logika tidak korek dan orang yang telah mempelajari logika akan bersifat korek. Namun demikian, mereka yang telah mempelajari logika dapat melatih dan mempraktikkan penalaran yang baik atau benar sehingga pelajaran logika dapat membantu seseorang dalam membedakan berpikir korek dan tidak korek.

Untuk memperoleh kemahiran dalam menguji kebenaran suatu pernyataan dan melatih berpikir korek haruslah banyak berlatih dengan kontinu. Jenis kemahiran ini sangat berharga karena dengan kemahiran ini kita akan dapat melihat kesalahan penalaran dengan mudah sehingga kemungkinan kita sendiri berbuat kesalahan akan makin sedikit.

Pada dasarnya logika adalah ilmu yang mempelajari asas-asas penalaran yang benar, tetapi di sini tidak berarti bahwa logika itu adalah ilmu berpikir karena berpikir itu tidak hanya termasuk ilmu logika saja, tetapi juga termasuk ilmu jiwa (psikologi). Psikologi mempelajari perkembangan pikiran, menyelidiki proses berpikir, tentang pengalaman jiwa dan pengaruh perasaan, imajinasi serta keadaan organ-organ yang bekerja selama terjadi kegiatan berpikir. Logika tidak menjelaskan bagaimana karakteristik orang yang berpikir, namun logika menganalisis apakah jalan pikiran atau penarikan kesimpulan absah atau tidak. Logika tidak mempersoalkan bagaimana dan dalam keadaan apa seseorang dapat menarik kesimpulan atau dapat berpikir dengan tepat, namun logika mempersoalkan apakah sebuah kesimpulan ditarik secara sah, secara absah, secara valid atau tidak.

Jadi, ilmu logika hanya mempelajari pekerjaan akal yang dipandang dari kebenaran dan kesalahan, yaitu apakah kesimpulan yang diperoleh dari pernyataan-pernyataan sebelumnya menurut aturan-aturan yang sah atau tidak, dan berusaha membuat syarat-syarat yang diperoleh setepat-tepatnya supaya dapat menerima himpunan pernyataan tersebut.

B. LOGIKA MODERN DAN LOGIKA TRADISIONAL

Dulu kita ketahui bahwa yang dimaksud dengan logika adalah logika matematika yang merupakan terjemahan dari *Symbolic Logic*, yaitu Logika Simbolik Modern, sedangkan Logika Tradisional yang dirintis oleh Aristoteles (348-322 SM) dengan *filsafat sebagai induknya* hanyalah merupakan bagian dari Logika Modern.

1. Logika Modern

Setelah lebih dari 20 abad, logika Aristoteles atau logika tradisional mengalami kemacetan, timbullah Logika Modern yang dipelopori oleh para ahli matematika Inggris George Boole (1815-1864), Augustus De Morgan (1806-1871). Dalam logika modern ini diperkenalkan simbol-simbol yang amat teliti dan bersifat abstrak. Lambang-lambang khusus dari Logika Modern menjadi suatu bahasa tersendiri, yaitu bahasa logika yang diformalkan. Kegunaan bahasa simbolik ini untuk menghindarkan kekaburan dan makna ganda yang umumnya melekat pada bahasa biasa yang dipergunakan orang dalam pergaulan sehari-hari. Memang dalam bahasa sehari-hari praktiknya dipergunakan proses penalaran, tetapi kemampuannya tetap terbatas.

Dengan dipergunakan simbol-simbol pada logika matematika dengan jumlah yang relatif sedikit dan tidak mendua arti maka kaidah-kaidah yang diformulasikan menjadi lebih teliti, lebih sederhana, dan lebih bersifat objektif. Akibatnya tersusunlah suatu sistem logika simbolik. Sistem logika ini memungkinkan kita untuk menganalisis dan menilai perbincangan-perbincangan yang sifatnya sangat rumit atau sangat halus.

Pada logika simbolik ini metode matematika merupakan ciri pokoknya. Logika simbolik dikembangkan dengan metode-metode matematika, misalnya dalam menerapkan dan membuktikan berbagai kaidah logika, seperti aturan komutatif, asosiatif dan distributif. Juga pemakaian bermacam-macam tanda kurung dalam mengolah lambang-lambang logika haruslah memakai tata cara matematika. Malahan karena bersifat matematika, logika mempunyai penerapan dalam jaringan arus listrik dan penggunaan komputer serta kalkulator yang tidak ada sangkut-pautnya dengan pembicaraan filsafat.

Menurut pendapat Albert E. Blumberg pada bukunya *Modern Logic* (1967), diutarakan bahwa yang membedakan logika modern dengan logika kuno atau tradisional bukan karena teknik simbolik dan metode matematika, tetapi juga kekuatan formalnya dan keluasan dari penerapannya yang jauh lebih besar pada logika simbolik. Kemudian, Irving. M. Copi dalam *Introduction to Logic* (1978), menyebutkan bahwa Logika Simbolik Modern telah merupakan suatu alat yang tidak dapat diukur kekuatannya untuk melakukan analisis dan deduksi melalui perkembangan bahasan tekniknya. Simbol-simbol istimewa dari logika modern memungkinkan kita untuk mengemukakan struktur logis proposisi dan perbincangan secara lebih jelas daripada yang dapat dilakukan dalam bentuk pengungkapan bahasa sehari-hari. Bahasan-bahasan tersebut akan kita jumpai dalam sajian diskusi beberapa modul mata kuliah Matematika Dasar 1 yang dikenal pula sebagai mata kuliah Pengantar Dasar Matematika.

2. Logika Tradisional

Logika tradisional dirintis dan diwariskan oleh Aristotheles. Logika tradisional lahir secara bersamaan dengan kelahiran filsafat di Yunani. Logika tradisional berkembang karena adanya usaha-usaha penyampaian pemikiran-pemikiran dari para filsuf Yunani kuno. Malahan tidak jarang terjadi adanya perbedaan-perbedaan dan bantahan-bantahan pemikiran di antara para filsuf tersebut. Kondisi inilah yang menyebabkan tumbuh dan berkembang penalaran dalam logika tradisional.

Salah satu konsep yang terkait dengan penalaran dalam logika tradisional yang berasal dari Aristotheles adalah istilah "penalaran langsung". Penalaran langsung terkait dengan penalaran yang premisnya hanya terdiri dari sebuah proposisi saja dan langsung disusul dengan proposisi lain sebagai kesimpulannya. Dalam hal ini konklusinya ditarik secara langsung dari proposisi tersebut dengan membandingkan subjek (S) dan predikatnya (P).

Subjek (S) adalah pengertian tentang sesuatu yang diterangkan, sedangkan pengertian yang menerangkan disebut predikat (P). Sistem logika tradisional penalarannya langsung didasarkan pada proposisi kategorik bentuk S = P. Proposisi kategorik adalah proposisi yang kaitan di antara S dan P-nya tanpa syarat. Dalam hal ini S maupun P-nya merupakan kata benda yang bersifat substantif. Sedangkan hubungan antara S dan P-nya dikaitkan dengan kata yang berdiri sendiri dan disebut *kopula*.

Contoh

1. Semua bilangan genap itu bilangan yang habis dibagi dua.
2. Harimau itu binatang buas.

"Bilangan genap", "bilangan yang habis dibagi dua", "harimau", dan "binatang buas" adalah kata benda, sedangkan kata "itu" adalah *kopula*. Kedua contoh di atas adalah bentuk proposisi kategorik standar yang dipakai dalam sistem logika Aristotheles. Untuk proposisi-proposisi yang berbeda bentuknya haruslah diubah dengan mengembalikan kepada bentuk proposisi yang standar.

Contoh
1. Bunga mawar itu merah.
2. Ia sedang berjualan.
3. Yang berseragam itu semuanya anggota PGRI.

Dalam contoh nomor 1 di atas substansi yang memiliki sifat "merah" tersebut tidak disebutkan. Karenanya proposisi kategorik demikian harus diubah menjadi bentuk yang standar. Pada contoh nomor 2 aktivitas "berjualan" mesti ada yang melakukannya dan karena yang melakukannya itu sama dengan subjek proposisi, maka subjek yang melakukan aktivitas itu harus dinyatakan secara eksplisit. Demikian pula pada contoh nomor 3 telah terjadi penyimpangan, yaitu susunan proposisinya tidak mengikuti pola S = P. Jadi, proposisi-proposisi yang standar dari ketiga contoh di atas adalah sebagai berikut.
1. Bunga mawar itu bunga yang merah.
2. Ia adalah orang yang sedang berjualan.
3. Semua yang berseragam adalah anggota PGRI.

Dalam proposisi kategorik yang standar telah digunakan *kopula* yang lambangnya dalam bahasa berupa kata-kata "adalah", "itu", "ialah", "sama dengan" dan sebagainya. Dalam ketiga contoh di atas, berturut-turut kita telah menggunakan *kopula* "itu" dan "adalah". Perlu diketahui pula bahwa masih ada kemungkinan penyimpangan proposisi kategorik dalam bentuk standar, misalnya karena proposisi yang tidak lengkap atau karena susunannya. Kesemua ini akan kita jumpai dalam latihan-latihan soal. Perlu pula diketahui bahwa masih banyak hal-hal yang bisa kita diskusikan terkait dengan logika tradisional ini. Karena itu disarankan kepada para pembaca untuk mempelajari literatur-literatur lainnya terutama yang termuat dalam Daftar Pustaka modul ini.

C. KALIMAT TERBUKA DAN PERNYATAAN

Dalam pelajaran logika matematika *kalimat pernyataan* haruslah dibedakan dengan kalimat-kalimat biasa dalam bahasa sehari-hari. Kalimat pernyataan atau disingkat dengan pernyataan tidak sama dengan kalimat biasa, sebab dalam kalimat biasa sering dipilih kata-kata yang pantas, mudah, kiasan atau ungkapan yang kabur, dan kadang-kadang dipakai kata-kata yang bermakna ganda. Sebaliknya pada pernyataan tidaklah demikian, tetapi kalimatnya haruslah lengkap, tidak kabur, dan jelas.

Suatu ciri logis dalam pelajaran matematika bahwa yang dimaksudkan dengan pernyataan, yaitu suatu kalimat yang hanya benar saja atau salah saja, tidak dua-duanya pada saat yang sama, artinya tidak sekaligus benar dan salah, sedangkan kalimat yang benar tidak, salah pun tidak adalah *bukan pernyataan* atau disebut pula kalimat terbuka. Untuk lebih jelasnya kita perhatikan tiga kelompok contoh berikut ini.

Contoh kalimat pernyataan yang benar.

1. Jakarta adalah ibu kota negara Republik Indonesia.
2. $3 + 9 = 12$.
3. Jika x = 4 maka 2x = 8.
4. Semua manusia akan mati.
5. Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan.

Contoh kalimat pernyataan yang salah

1. Udara adalah benda padat.
2. $x – y = y – x$; $x \neq y$.
3. $4 + 9 < 9$.
4. Setiap bilangan prima adalah ganjil.
5. Log (a + b) = log a + log b.

Contoh bukan kalimat pernyataan

1. Salinlah contoh ini!
2. Semoga Anda lulus ujian.
3. $x + 7 = 0$.
4. $x^2 + 2x – 15 = 0$.
5. $a + b > 9$.

Istilah-istilah lain untuk **pernyataan** adalah kalimat matematika tertutup, **kalimat tertutup**, kalimat deklaratif, *statement* atau proposisi, sedangkan istilah lain untuk kalimat yang **bukan pernyataan** adalah kalimat matematika terbuka atau **kalimat terbuka**. Namun, ada beberapa ahli logika dalam bukunya yang membedakan istilah pernyataan dan istilah proposisi dan hal ini berhubungan dengan pemakaiannya. Istilah pernyataan (*statement*) digunakan untuk menyatakan, sedangkan istilah proposisi (*proposition*) digunakan untuk kalimat tertutup. Akan tetapi, pada umumnya para ahli logika tidak membedakan pengertian pernyataan dan pengertian proposisi. Pada modul ini istilah proposisi tetap diartikan sebagai kalimat tertutup, sedangkan kalimat pernyataan akan dipakai untuk keperluan tertentu, umumnya sama seperti buku-buku lainnya bahwa istilah kalimat pernyataan tidak dibedakan dengan pengertian proposisi.

D. NILAI KEBENARAN PERNYATAAN

Seperti Anda ketahui bahwa suatu pernyataan hanyalah bisa benar saja atau salah saja. Kebenaran atau kesalahan dari suatu pernyataan disebut nilai kebenaran dari pernyataan itu. Untuk pernyataan yang mempunyai nilai benar diberi tanda B (singkatan dari benar), sedangkan kepada pernyataan yang bernilai salah diberikan nilai kebenaran S (singkatan dari salah).

Dalam modul ini ucapan *nilai kebenaran* dilambangkan dengan "τ" (huruf Yunani atau = 300). Nilai kebenaran dari suatu pernyataan p ditulis τ(p), dan jika pernyataan p itu adalah benar maka τ(p) = B, sedangkan jika pernyataan p itu salah maka τ(p) = S.

Contoh:
1. Jika p : "5 adalah bilangan genap" maka τ(p) = S.
2. Jika q : "5 < 9 maka τ(q) = B.
3. Jika r : "Semua bilangan prima adalah ganjil" maka τ(r) = S.

Perlu diketahui pula bahwa ada penulis yang memberikan nilai 1 atau benar atau T (*True*) kepada pernyataan yang benar dan memberikan nilai 0 atau salah atau F (*False*) kepada pernyataan yang salah.

E. VARIABEL DAN KONSTANTA

Seperti sudah Anda ketahui bahwa kalimat dalam matematika dibedakan atas dua hal. *Pertama*, kalimat tertutup dan *kedua*, kalimat terbuka. Kalimat terbuka mempunyai dua jenis lambang, yaitu **variabel** (*variable)* dan **konstanta**.

Konstanta adalah sesuatu yang sifatnya menunjukkan atau mewakili satu hal tertentu yang sudah jelas, misalnya orang, bilangan, makhluk hidup lainnya, benda, dan sebagainya, sedangkan variabel atau disebut pula *peubah* tidak mewakili satu hal tertentu yang sudah jelas, tetapi sebaliknya variabel adalah sesuatu yang menunjukkan berlaku umum, misalnya *ini*, *anu*, *ia*, x, y, dan sebagainya.

Adapun contoh konkret dari konstanta, misalnya nama orang, yaitu Ali, Oki, Yayan. Nama gunung, misalnya Semeru, Krakatau, dan lain-lain. Nama sungai, misalnya Citarum, Musi, dan sebagainya, sedangkan contoh konkret dari variabel seperti disebutkan di atas, yaitu hal-hal yang sifatnya kebalikan dari sifat-sifat konstanta.

F. PENYELESAIAN DAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

Selanjutnya, kita tinjau dua contoh kalimat-kalimat matematika seperti berikut.

1. $x - 4 = 7$, x bilangan cacah.
2. $y + 5 < 10$, y bilangan cacah.

Kedua contoh di atas merupakan kalimat-kalimat matematika yang terbuka. Sebagai variabel-variabelnya adalah x dan y yang merupakan pemegang tempat yang bersifat umum dan belum pasti bagi lambang bilangan yang merupakan anggota dari himpunan bilangan-bilangan semesta yang tertentu. Himpunan bilangan-bilangan yang tertentu itu disebut himpunan semestanya dari himpunan pengganti atau himpunan semesta penggantinya.

Ada anggota dari himpunan semesta penggantinya apabila dipakai untuk menggantikan variabel x dan variabel y dari contoh di atas sehingga menghasilkan pernyataan yang bernilai benar. Misalnya, x dan y berturut-turut diganti oleh konstanta-konstanta 11 dan 2 maka jelas bahwa nilai kebenaran kalimat pertama dan kedua menjadi benar, artinya akan menghasilkan pernyataan-pernyataan yang benar. Ada pula konstanta-konstanta pengganti x dan y yang menghasilkan pernyataan-pernyataan yang salah. Misalnya, x diganti dengan konstanta 10 y diganti dengan konstanta 6 maka akan menghasilkan pernyataan-pernyataan yang nilai kebenarannya salah.

Suatu konstanta yang merupakan anggota dari semesta penggantinya apabila dipakai untuk menggantikan variabel dalam suatu kalimat terbuka sehingga menghasilkan pernyataan yang benar, disebut *solution* atau *penyelesaian* atau *jawaban* dari kalimat terbuka itu. Contoh kalimat terbuka di atas, misalnya 11 merupakan penyelesaian, sedangkan 10 bukanlah penyelesaian. Untuk contoh kalimat terbuka yang kedua, 2 merupakan penyelesaian, sedangkan 6 bukanlah penyelesaian.

Apabila kita perhatikan kembali kedua contoh di atas tadi, ternyata bahwa dalam kalimat terbuka yang pertama $x - 4 = 7$, hanya ada satu konstanta yang merupakan anggota dari himpunan semesta penggantinya yang mengakibatkan kalimat terbuka itu menjadi pernyataan yang benar, yaitu 11, sedangkan selain dari itu, kalimat terbuka itu menjadi pernyataan yang salah, tetapi dalam contoh kalimat terbuka yang kedua $y + 5 < 10$, konstanta pengganti variabel y yang menyebabkan pernyataan yang benar tidak hanya satu, yaitu konstanta 2 saja melainkan ada konstanta-konstanta lainnya yang merupakan anggota semesta penggantinya.

Himpunan konstanta dari himpunan semesta penggantinya yang mengakibatkan kalimat terbuka itu menjadi pernyataan yang benar disebut *himpunan penyelesaian* atau *himpunan jawab* kalimat terbuka itu. Misalnya:

1. Himpunan penyelesaian $x - 4 = 7$ ialah $\{11\}$.
2. Himpunan penyelesaian $y + 5 < 10,\ y \in$ bilangan cacah ialah $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
3. Himpunan penyelesaian $x^2 = 9$, ialah $\{3, -3\}$.
4. Himpunan penyelesaian $y \geq 3,$ ialah himpunan yang anggotanya banyak sekali, tetapi bila himpunan y itu terbatas dalam $S = \{y \mid y \in A,\ y < 10\}$ A = {bilangan asli}, dan S merupakan himpunan semesta penggantinya maka himpunan penyelesaiannya ialah $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
5. Himpunan penyelesaian kalimat $p(x)$ ditulis $\{x \mid p(x)\}$.

Adanya himpunan penyelesaian untuk suatu kalimat terbuka, misalnya persamaan dan pertidaksamaan sangat tergantung pada himpunan semesta penggantinya, misalnya dalam persamaan $x + 3 = 3$. Bila himpunan semesta penggantinya himpunan bilangan bulat maka himpunan penyelesaiannya adalah {0}, tetapi apabila himpunan semesta penggantinya himpunan bilangan asli maka himpunan penyelesaiannya $x + 3 = 3$ adalah $\{\ \}$ atau ϕ, sebab tak ada satu pun bilangan asli yang memenuhi persamaan $x + 3 = 3$. Kadang-kadang dalam kalimat terbuka dengan dua variabel himpunan semesta penggantinya dari masing-masing variabel itu berbeda, misalnya himpunan bilangan positif adalah himpunan bilangan semesta pengganti dari x dan himpunan bilangan negatif adalah himpunan semesta pengganti untuk y maka untuk kalimat terbuka:

$$xy^2 \text{ adalah bilangan positif}$$

akan menjadi pernyataan yang benar untuk semua anggota himpunan-himpunan semesta penggantinya karena x bilangan positif dan y^2 bilangan positif maka xy^2 juga merupakan bilangan positif, sedangkan untuk suatu kalimat terbuka:

$$x^2y \text{ adalah bilangan positif}$$

akan menjadi pernyataan yang salah untuk semua anggota himpunan-himpunan penggantinya karena x^2 bilangan positif dan y bilangan negatif maka x^2y adalah bilangan negatif.

Namun, pada umumnya himpunan semesta pengganti untuk variabel-variabel sebuah kalimat matematika terbuka dengan dua variabel merupakan himpunan bilangan yang sama, kecuali kalau ditentukan terlebih dahulu bahwa himpunan-himpunan semesta penggantinya dinyatakan berbeda.

Adapun penyelesaian suatu kalimat terbuka dengan dua variabel adalah pasangan konstanta yang merupakan anggota dari himpunan semesta penggantinya sehingga apabila dipergunakan untuk menggantikan variabel-variabel kalimat terbuka tadi akan dihasilkan pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran yang benar, misalnya beberapa penyelesaian untuk kalimat terbuka.

Gunung x terletak di pulau y.

ialah (Ciremai, Jawa), (Kerinci, Sumatra), (Agung, Bali), (Kinibalu, Kalimantan).

Pasangan-pasangan ini adalah pasangan berurutan, artinya (Ciremai, Jawa) tidak sama dengan (Jawa, Ciremai). Pasangan berurutan (Ciremai, Jawa) merupakan penyelesaian kalimat terbuka di atas, sebab:

Gunung Ciremai terletak di pulau Jawa.

Merupakan pernyataan yang benar. Demikian pula pasangan berurutan (Kerinci, Jawa) bukanlah penyelesaian karena kalimat:

Gunung Kerinci terletak di pulau Jawa.

merupakan pernyataan yang salah.

Contoh lain dalam bentuk persamaan dengan dua variabel, misalnya kalimat terbuka:

$$2x + 4y = 21$$

maka pasangan berurutan $(1,5)$ merupakan penyelesaian, sebab $2(1)+4(5)=21$ atau $(2\times1)+(4\times5)=21$ merupakan pernyataan yang benar, tetapi pasangan $(5,1)$ bukanlah penyelesaiannya, sebab $2(5)+4(1)=21$ atau $(2\times5)+(4\times1)=21$ merupakan pernyataan yang salah.

Himpunan semua pasangan konstanta yang memenuhi variabel-variabel suatu kalimat terbuka sehingga menjadi pernyataan-pernyataan yang benar disebut himpunan penyelesaian kalimat terbuka tersebut.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diskusikanlah dengan kawan Anda, apakah kalimat-kalimat berikut ini merupakan pernyataan atau proposisi (logika modern) atau proposisi kategorik yang tidak standar (logika tradisional)? Jelaskan!
   a. Hanya ada satu bilangan prima yang genap.
   b. Apakah benar 0 adalah bilangan genap?
   c. Gajah itu sebagian binatang liar.

2) Tulislah masing-masing tiga buah contoh!
   a. Pernyataan yang benar.
   b. Pernyataan yang salah.
   c. Bukan pernyataan.

3) Diskusikanlah dengan kawan Anda untuk menjelaskan apakah yang dimaksud dengan istilah-istilah berikut serta hubungan satu sama lainnya!
   a. Kalimat terbuka.
   b. Konstanta.
   c. Variabel.

4) Tentukan sebuah pengganti untuk lambang-lambang □, ∗, dan Δ yang mengubah kalimat terbuka berikut menjadi kalimat tertutup yang benar jika himpunan semesta penggantinya adalah $\{1, 2, 3, 4, ...\}$
   a. $5 \times \square = 5$; $\square = \ldots$
   b. $*$ adalah bilangan prima yang genap; $* = \ldots$
   c. $\Delta : 5 = 7$; $\Delta = \ldots$

5) Tentukan penyelesaian dari tiap-tiap kalimat terbuka berikut.
   a. Pak x suka minum y.
   b. Ibu kota provinsi x adalah kota y.
   c. $x^2 + y^2 = 25$, x dan y bilangan cacah.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a. Pernyataan, sebab kalimat ini membawa informasi yang berarti yang mempunyai nilai kebenaran yang tertentu.
   b. Bukan pernyataan, sebab kalimat ini tidak mengandung penegasan atau penyangkalan dan tidak mempunyai nilai kebenaran yang tertentu.
   c. Contoh tersebut merupakan proposisi yang menyimpang, karena susunan dan predikatnya berupa aktivitas. Bentuk proposisi yang standarnya: "Sebagian gajah adalah binatang liar".
2) a. Misalnya, ada 12 bulan dalam satu tahun.
   b. Misalnya, 13 habis dibagi oleh 2.
   c. Misalnya. ini adalah barang yang silindris.
3) a. Kalimat terbuka adalah kalimat bukan pernyataan karena belum mempunyai nilai kebenaran, disebabkan masih memuat variabel.

b. Konstanta adalah sesuatu yang sifatnya sudah tertentu dengan jelas dan dapat menjadi penyelesaian dari suatu kalimat terbuka jika dengan digantinya variabel oleh konstanta berakibat menjadi kalimat tertutup yang benar.

c. Variabel adalah sesuatu yang sifatnya belum jelas dan termuat dalam kalimat terbuka.

4) a. $\square = 1$

b. $* = 2$

c. $\Delta = \phi$

5) a. Misalnya, x = Ahmad (nama seseorang).
y = kopi (nama suatu minuman).

b. Misalnya, x = Jawa Barat (nama suatu provinsi).
y = Bandung (nama kota sebagai ibu kotanya).

c. Misalnya, x = 5 dan y = 0 atau
y = 0 dan x = 5.

RANGKUMAN

Dalam kehidupan sehari-hari, kita selalu dihadapkan pada berbagai persoalan yang memerlukan penyelesaian. Untuk menghadapi permasalahan ini diperlukan pemikiran dengan dasar-dasar yang ada dan bersifat logis.

Logika adalah salah satu alat yang sangat membantu masalah ini. Berpikir secara logis akan bersifat korek sehingga dapat membantu terhindar dari berbuat kesalahan. Lebih-lebih dalam matematika yang semua persoalannya baik pernyataan maupun definisi-definisi dan teorema-teorema harus ditanggapi berdasarkan logika.

Yang dimaksud dengan logika di sini adalah logika matematika yang merupakan terjemahan dari *symbolic logic* yaitu logika modern. Sedangkan logika tradisional yang dirintis oleh Aristotheles dengan filsafat sebagai induknya merupakan bagian dari logika modern. Logika sebagai istilah mempunyai arti sebagai suatu metode, teknik, strategi atau pendekatan yang berhubungan dengan penalaran dan melibatkan kalimat sebagai bentuk pemikiran tentang pengertian dalam konsep yang paling sederhana yang dikenal dengan proposisi (*proposition*) atau pernyataan (*statement*).

Istilah pernyataan dan bukan pernyataan yang menjadi dasar dalam logika matematika satu sama lainnya dibedakan dengan kalimat-kalimat biasa. Pernyataan adalah kalimat matematika yang sudah jelas, yang sudah pasti benarnya atau salahnya dan tidak mempunyai dua arti, sedangkan lawannya adalah bukan pernyataan, yaitu kalimat yang belum mempunyai kepastian benar atau salah, masih kabur yang kadang-kadang bisa berupa perintah, pertanyaan atau berupa kalimat yang belum lengkap dan bermakna ganda.

Oleh karena setiap pernyataan hanyalah benar atau salah maka kepada setiap pernyataan itu diberi nilai kebenaran, yaitu benar (B) dan salah (S). Dalam hal ini nilai kebenaran itu mencakup pula nilai kebenaran pernyataan tunggal maupun pernyataan majemuk.

Suatu kalimat dalam matematika dilihat dari nilai kebenarannya dibedakan menjadi dua bagian, yaitu kalimat tertutup atau pernyataan dan kalimat terbuka. Kalimat terbuka ialah suatu kalimat yang memuat variabel, dan dapat menjadi suatu kalimat tertutup setelah variabelnya diganti dengan konstanta yang merupakan anggota dari himpunan semesta penggantinya.

Sedangkan yang dinamakan variabel dalam suatu kalimat terbuka, ialah suatu lambang yang sifatnya berlaku umum dan dapat diganti oleh lambang setiap anggota himpunan semesta. Jadi, variabel sifatnya masih sebarang belum jelas. Sebaliknya, konstanta adalah sesuatu yang sifatnya sudah jelas, dapat menunjukkan sesuatu hal yang tertentu. Jika konstanta itu dapat dipakai untuk menggantikan variabel suatu kalimat terbuka sehingga menghasilkan pernyataan yang benar maka disebut penyelesaian atau jawaban kalimat terbuka itu.

Himpunan semua nilai pengganti variabel yang menjadikan suatu kalimat terbuka menjadi pernyataan yang benar, disebut himpunan penyelesaian atau himpunan jawab dari kalimat terbuka tersebut. Jadi, himpunan penyelesaian suatu kalimat terbuka ialah himpunan semua nilai variabelnya yang memenuhi kalimat terbuka itu.

Himpunan penyelesaian suatu kalimat terbuka ditentukan oleh himpunan semesta penggantinya. Himpunan semesta dari kalimat terbuka dengan dua variabel bisa sama bisa juga berlainan, tetapi umumnya sama. Dalam kalimat terbuka dengan dua variabel ini perlu diperhatikan pula tentang pasangan berurutan dari penyelesaiannya karena salah letak pasangan berurutan tersebut berakibat salahnya penyelesaian.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Perbedaan pokok logika modern dengan logika tradisional terletak pada penalaran dengan menggunakan bahasa ....
   A. simbol
   B. kopula
   C. proposisi
   D. *statement*

2) Bentuk proposisi kategorik standar dari proposisi: "Masih ada sebagian siswa yang terlambat datang ke sekolah" adalah ....
   A. Sebagian masih ada siswa yang datang terlambat ke sekolah
   B. Sebagian siswa itu masih ada yang datang terlambat ke sekolah
   C. Masih ada siswa yang datang terlambat ke sekolah
   D. Sebagian ada yang terlambat dari siswa yang datang ke sekolah

3) Pernyataan adalah suatu bentuk penegasan atau penyangkalan yang membawa informasi ….
   A. benar saja
   B. berarti
   C. selalu salah
   D. tidak berarti

4) Kalimat "Operasi tambah pada bilangan real tidak memenuhi sifat komutatif" merupakan ….
   A. pernyataan
   B. bukan pernyataan
   C. dapat berupa pernyataan dapat pula bukan
   D. kalimat berita

5) Jika p : "Semua ikan hidup di dalam air tawar" maka τ (p) = ….
   A. B
   B. S
   C. B atau S
   D. B dan S

6) Jika q : "Untuk setiap $x \in R$, $x^0 = 1$" maka τ (q) = ….
   A. B
   B. S

C. B atau S
D. tidak B dan tidak S

7) Kalimat terbuka $x - 5 = -3$ dengan x sebagai variabel yang merupakan hal yang sudah jelas dan tertentu dari himpunan semesta penggantinya, yaitu ….
A. benar
B. salah
C. tidak mempunyai nilai kebenaran
D. benar tidak salah pun tidak

8) Himpunan penyelesaian dari kalimat terbuka $2x > 3$ dengan x sebagai variabel pada himpunan semesta pengganti bilangan asli yang lebih kecil dari 5 adalah ….
A. $\{1\}$
B. $\{\ \}$
C. $\{2, 3, 4\}$
D. $\{1, 2, 3, 4\}$

9) Penyelesaian yang salah dari kalimat terbuka "Ibu kota negara x adalah y", yaitu pasangan berurutan ….
A. (Filipina, Manila)
B. (Indonesia, Jakarta)
C. (Thailand, Bangkok)
D. (Tokyo, Jepang)

10) Jika himpunan semesta pengganti untuk x adalah himpunan bilangan ganjil dan untuk y adalah bilangan genap maka kalimat terbuka berikut akan menjadi pernyataan yang benar untuk semua himpunan semesta penggantinya, yaitu ….
A. x^2y^2 adalah bilangan genap
B. $x + 2y^2$ adalah bilangan genap
C. x^2y^2 adalah bilangan ganjil
D. $2x^2 + y$ adalah bilangan ganjil

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Kata Hubung Pernyataan (Operasi-operasi Logika)

A. KATA HUBUNG, PERNYATAAN TUNGGAL DAN PERNYATAAN MAJEMUK

Suatu kalimat selain dapat dibedakan atas pernyataan dan bukan pernyataan, kalimat itu dibedakan pula atas pernyataan tunggal (*simple statement*) dan pernyataan majemuk (*compound statement*). Pernyataan tunggal atau pernyataan sederhana ialah pernyataan yang tidak memuat pernyataan lain sebagai bagiannya. Pernyataan majemuk bisa merupakan kalimat baru yang diperoleh dari penggabungan bermacam-macam pernyataan tunggal.

Contoh:

1. Pernyataan "19 adalah bilangan prima" dapat dilambangkan dengan huruf "p" saja.
2. Pernyataan "Dini anak yang rajin" dapat dilambangkan dengan huruf "q".
3. Pernyataan "$x^2 = 1$" dilambangkan "r", dan sebagainya.

Dua pernyataan tunggal atau lebih dapat kita gabungkan menjadi sebuah kalimat baru yang merupakan pernyataan majemuk, sedangkan tiap pernyataan bagian dari pernyataan majemuk itu disebut komponen-komponen pernyataan majemuk. Komponen-komponen dari pernyataan majemuk itu tidak selamanya harus pernyataan tunggal, tetapi mungkin saja berupa pernyataan majemuk. Namun, yang perlu untuk kita adalah bagaimana mengusahakan cara menggabungkan pernyataan-pernyataan tunggal menjadi pernyataan majemuk.

Untuk menggabungkan pernyataan-pernyataan tunggal menjadi pernyataan majemuk dapat dipakai **kata hubung** atau **kata perangkai** yang disebut **operasi-operasi logika matematika**. Pada pelajaran logika ini Anda jumpai operasi-operasi seperti dalam pelajaran matematika lainnya, yaitu operasi binar (*binary operation*) atau operasi yang dikenakan pada dua pernyataan, dan operasi monar (*monary operation*) atau operasi pada sebuah pernyataan.

Adapun operasi-operasi yang dapat membentuk pernyataan majemuk yang kita kenal adalah berikut ini.

1. Negasi atau ingkaran atau sangkalan, dengan kata penyangkalan "tidaklah benar".
2. Konjungsi, dengan kata perangkai "dan".
3. Disjungsi dengan kata perangkai "atau".
4. Implikasi atau kondisional, dengan kata perangkai "jika … maka …".
5. Biimplikasi atau bikondisional, dengan kata perangkai "… jika dan hanya jika …".

Operasi-operasi ini akan Anda jumpai penjelasannya secara lebih lanjut dalam bagian-bagian mendatang, sedangkan untuk lebih memahami pernyataan-pernyataan majemuk dapatlah kita perhatikan beberapa contoh berikut ini.

1. Bunga mawar berwarna merah dan bunga melati berwarna putih.
2. Ani dan Ana anak kembar.
3. Cuaca cerah atau udara panas.
4. Jika $x > 0$, maka $\sqrt{x^2} = x$
5. Suatu segitiga adalah sama sisi jika dan hanya jika ketiga sudutnya sama.
6. Tidaklah benar bahwa 15 adalah bilangan prima.

Contoh 1 adalah pernyataan majemuk, yaitu suatu konjungsi, sebab pernyataan "Bunga mawar berwarna merah dan bunga melati berwarna putih" terdiri dari dua pernyataan tunggal sebagai komponen-komponennya, yaitu "Bunga mawar berwarna merah" dan "Bunga melati berwarna putih". Sedangkan contoh 2 adalah bukan pernyataan majemuk bentuk konjungsi, sebab dalam contoh ini tidak memuat dua komponen meskipun menggunakan kata "dan", tetapi ini adalah pernyataan tunggal yang menyatakan hubungan, tetapi contoh 3 sampai contoh 6 adalah bentuk-bentuk pernyataan majemuk.

Seperti sudah diuraikan di atas, bahwa untuk membentuk suatu pernyataan majemuk dari beberapa pernyataan tunggal diperlukan adanya kata perangkai. Kata perangkai disebut pula kata hubung atau perakit yang fungsinya hampir sama dengan operasi-operasi dalam pelajaran matematika yang sudah Anda kenal, seperti operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan sebagainya.

Kata perangkai ini disebut operasi-operasi logika matematika. Untuk selanjutnya Anda harus dapat menentukan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan tunggal. Hal ini akan dapat dilakukan jika diketahui nilai kebenaran komponen-komponennya, yaitu pernyataan-pernyataan yang digabungkan. Maka, sangatlah penting untuk memahami sungguh-sungguh apa arti masing-masing operasi logika matematika tersebut.

B. NEGASI

Operasi negasi (*negation*) atau penyangkalan atau ingkaran adalah operasi yang dikenakan hanya pada sebuah pernyataan. Operasi negasi dilambangkan dengan tanda "~" atau "–" yang disebut *tilde* atau *curl*. Untuk selanjutnya akan dipakai simbol ~.

Seandainya p sebuah pernyataan tunggal maka "~ p" dibaca *negasi p* atau *tidak p* atau *bukan p*, adalah pernyataan majemuk. Mungkin ada yang merasa agak janggal bahwa negasi merupakan suatu operasi logika matematika sehingga suatu pernyataan bernegasi atau penyangkalan dari suatu pernyataan merupakan suatu pernyataan majemuk. Namun, jelaslah bahwa dalam pernyataan-pernyataan negasi itu pertama-tama terdapat suatu pernyataan atau proposisi yang bersifat tunggal, misalnya berikut ini.

Harimau adalah binatang buas.

Untuk menjadikan suatu pernyataan negasi diperlukan pernyataan lain yang menyatakan bahwa proposisi yang pertama tadi tidak benar, misalnya:

Itu tidak benar.

Dengan demikian, terdapatlah suatu proposisi negasi yang majemuk, yaitu:

(Itu) tidak benar bahwa harimau adalah binatang buas.

Proposisi negasi ini sering dibahasakan dengan menggunakan kata *tidak* atau *bukan*. Proposisi majemuk di atas juga bisa dinyatakan sebagai berikut.

Harimau adalah bukan binatang buas.

atau:

Tidak benar bahwa harimau binatang buas.

Untuk lebih memahaminya coba Anda perhatikan beberapa contoh berikut ini.

1. Jika p : $3 + 4 = 7$
   maka ~ p : Tidaklah benar $3 + 4 = 7$
   atau : $3 + 4 \neq 7$
2. Jika q : Semua bilangan prima adalah bilangan ganjil
   maka ~ q : Tidaklah benar semua bilangan prima adalah bilangan ganjil
   atau : Beberapa bilangan prima bukan bilangan ganjil
3. Jika p : Si Manis adalah binatang yang berkaki dua
   maka ~ p : Salah bahwa si Manis binatang yang berkaki dua
   atau : Tidak benar bahwa si Manis binatang yang berkaki dua
   atau : Si manis bukan binatang yang berkaki dua.

Kalau Anda perhatikan, ternyata bahwa negasi dari sebuah pernyataan *yang benar* adalah *salah* dan negasi dari pernyataan *yang salah* adalah *benar*. Jadi, jika τ (p) = B maka τ (~p) = S dan jika τ (q) = S maka τ (~q) = B. Secara umum berlaku:

Definisi:

Sebuah pernyataan dan penyangkalannya mempunyai nilai kebenaran yang berlawanan

Definisi ini dapat ditulis dalam bentuk tabel kebenaran, seperti tabel berikut ini.

	p	~p
(1)	B	S
(2)	S	B

Baris pertama (1) merupakan singkatan dari pernyataan "Jika p benar maka ~p adalah salah"

Contoh:

1. Jika p : $30 + 10 \leq 20$, τ (p) = S
   maka ~ p : Tidak benar bahwa $30 + 10 \leq 20$, τ (~p) = B
   atau : $30 + 10 > 20$, τ (~p) = B
2. Jika q : Semua manusia akan mati, τ (q) = B
   maka (~q) : Tidak benar bahwa semua manusia akan mati, τ (~q) = S
   atau : Salah bahwa semua manusia akan mati, τ (~q) = S

atau : Beberapa manusia tidak akan mati, τ (~q) = S

3. Jika r : Beberapa penerbang adalah wanita, τ (r) = B
maka ~r : Tidak benar bahwa beberapa penerbang adalah wanita, τ (~r) = S
atau : Salah bahwa beberapa penerbang adalah wanita, τ (~r) = S
atau : Semua penerbang bukan wanita, τ (~r) = S

C. KONJUNGSI

Suatu pernyataan majemuk yang dibentuk dengan cara menggabungkan dua pernyataan tunggal dengan memakai kata perangkai *dan* disebut *konjungsi (conjunction)*, sedangkan pernyataan-pernyataan tunggal yang digabungkannya disebut konjung-konjung (komponen-komponen).

Dalam logika matematika operasi konjungsi, yaitu kata *dan* yang berfungsi sebagai penghubung dua pernyataan tunggal menjadi pernyataan majemuk dinotasikan dengan tanda "$\wedge$" atau "**.**" (dot), tetapi dalam modul ini yang akan dipakai adalah notasi " $\wedge$ ".

Contoh:

1. Jika p : Dini anak rajin
dan q : Dini anak yang cerdas
maka $p\wedge q$: Dini anak rajin dan Dini anak yang cerdas
atau : Dini anak yang rajin dan cerdas.
2. Jika p : 7 – 2 = 5
dan q : 5 adalah bilangan prima
maka $p\wedge q$: 7 – 2 = 5 dan 5 adalah bilangan prima.
3. Jika p : Bandung ibu kota Jawa Barat
dan q : 3 + 7 = 10
maka $p \wedge q$: Bandung ibu kota Jawa Barat dan 3 + 7 = 10.

Untuk membentuk pernyataan majemuk *tidaklah diharuskan* bahwa pernyataan-pernyataan tunggal yang digabungkan satu sama lainnya mempunyai suatu arti. Seperti halnya contoh tiga di atas, antara pernyataan tunggal yang satu dengan pernyataan tunggal yang satunya lagi tidak mempunyai kaitan arti apa-apa. Hal ini berlaku pula untuk kalimat-kalimat majemuk lain yang dibentuk oleh operasi-operasi logika yang lainnya.

Suatu pernyataan majemuk seperti halnya pernyataan tunggal adakalanya mempunyai nilai kebenaran benar atau salah, tidak dua-duanya pada saat yang sama. Nilai kebenaran suatu pernyataan majemuk tergantung pada nilai kebenaran konjung-konjungnya, yaitu nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan asalnya.

Untuk lebih jelasnya coba Anda perhatikan satu contoh berikut ini.

Jika p : Ati adalah seorang wanita yang cantik.
dan q : Ati adalah seorang wanita yang pandai.
maka $p \wedge q$: Ati adalah anak yang cantik dan pandai.

Sekarang akan dicari nilai kebenaran pernyataan-pernyataan majemuk $p \wedge q$ jika nilai kebenaran dari komponen-komponennya, yaitu p dan q diketahui.

Dalam hal ini jelas bahwa jika $p \wedge q$ benar maka p, q dua-duanya benar. Demikian pula jika p dan q masing-masing merupakan pernyataan yang benar maka dengan sendirinya $p \wedge q$ benar pula.

Sebaliknya jika p dan q dua-duanya salah maka $p \wedge q$ pasti salah. Demikian pula jika salah satu dari p atau q salah maka $p \wedge q$ juga salah. Secara umum berlaku definisi berikut.

Definisi 1.1:

Sebuah konjungsi benar jika komponen-komponennya benar, tetapi salah jika salah satu komponennya salah atau kedua-duanya salah.

Dalam bentuk tabel kebenaran definisi tersebut dapat Anda lihat seperti berikut.

	p	~p	$p \wedge q$
(1)	B	B	B
(2)	B	S	S
(3)	S	B	S
(4)	S	S	S

Baris pertama (1) merupakan singkatan dari pernyataan: Jika p benar dan q benar maka p dan q adalah benar.

Perlu Anda perhatikan bahwa dalam menyusun suatu tabel kebenaran, segala kemungkinan dari nilai kebenaran komponen-komponennya haruslah disusun secara sistematis di bawah tiap komponen itu yang selanjutnya digabungkan dengan operasi yang telah ditentukan.

Contoh 1.1:

1. Jika r : Semua bilangan ganjil merupakan bilangan bulat; $\tau(r) = B$

   dan s : Semua bilangan genap merupakan bilangan bulat; $\tau(s) = B$

   maka $r \wedge s$: Semua bilangan ganjil dan bilangan genap merupakan bilangan bulat; $\tau(r \wedge s) = B$.

2. Jika p : $2 + 2 \neq 3$; $\tau(p) = B$

   dan q : $4 < 3$; $\tau(q) = S$

   maka $p \wedge q$: $2 + 2 \neq 3$ dan $4 < 3$; $\tau(p \wedge q) = S$

   dan $q \wedge p$: $4 < 3$ dan $2 + 2 \neq 3$; $\tau(q \wedge p) = S$

3. Jika x : Jakarta Ibu kota Jawa Barat ; $\tau(x) = S$

   dan y : Anjing matanya tiga ; $\tau(y) = S$

   maka $x \wedge y$: Jakarta Ibu kota Jawa Barat dan Anjing matanya tiga; $\tau(x \wedge y) = S$

D. DISJUNGSI

Seandainya dua buah pernyataan tunggal digabungkan dengan kata-kata “atau “ maka pernyataan majemuk yang diperoleh disebut “disjungsi” (*disjunction* atau *alternation*), dan masing-masing dari kedua pernyataan tunggal itu disebut “disjung-disjung” (*alternative*).

Pengertian disjungsi, yaitu yang berkaitan dengan kata “atau“ mempunyai dua arti yang berbeda. *Pertama*, “atau yang *inclusive*“ yang disebut juga “atau yang lemah” atau “atau mencakup” yang dalam bahasa Latin ditunjukkan dengan kata “*vel* “, yaitu kata “atau yang diartikan “dan atau” maksudnya menyatakan salah satu atau kedua-duanya. Dalam pengertian yang pertama ini kata “atau” dinotasikan dengan tanda “$\vee$“ yang merupakan huruf pertama dari kata *vel* dan simbol ini disebut “*wedge*” atau “*vel*“. Untuk lebih jelasnya dari atau inklusif, perhatikan contoh berikut.

“Ia sedang bercerita *atau* ia sedang memberikan pelajaran”.

Kata “*atau*” di sini dapat membenarkan kedua bagian pernyataan itu, artinya mencakup bagian-bagiannya. Sebab orang bisa bercerita sambil memberi pelajaran.

Pengertian yang kedua, yaitu kata “atau yang *exclusive*” yang disebut juga “atau yang kuat” atau “atau memisah”. Dalam kata Latinnya disebut *out*, yaitu kata “atau” yang menyatakan salah satu, tetapi tidak kedua-duanya, dan ditulis dengan simbol “$\veebar$”. Sebagai contoh disjungsi eksklusif ini adalah pernyataan majemuk berikut dari seorang guru yang marah di kelas.

“Saya yang keluar *atau* Anda yang keluar dari kelas”

Kata atau pada contoh ini berfungsi sebagai penghubung yang memisahkan pernyataan yang satu dari yang lain, yaitu memisahkan “saya yang keluar” *atau* “Anda yang keluar”. Dalam pernyataan ini tidak mungkin “saya dan Anda yang keluar”, tetapi harus salah satu “saya atau Anda yang keluar”.

Jadi, sebuah disjungsi yang menggunakan “atau inklusif” menyatakan bahwa *paling sedikit satu komponen benar*. sedangkan disjungsi yang menggunakan “atau eksklusif” menyatakan bahwa *paling sedikit satu komponennya benar, tetapi tidak dua-duanya*. Secara umum dapat dinyatakan seperti berikut.

Definisi:

Sebuah disjungsi inklusif bernilai benar jika paling sedikit satu komponennya benar, dan sebuah disjungsi eksklusif bernilai benar jika paling sedikit satu komponennya benar, tetapi tidak dua-duanya.

Tabel kebenaran “atau inklusif” ($\vee$), dan “atau eksklusif” ($\veebar$) adalah, seperti tabel berikut.

P	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

p	Q	$p \veebar q$
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Untuk pembahasan selanjutnya yang dimaksudkan dengan kata “atau” adalah “atau inklusif” dengan notasi “$\vee$”, sedangkan untuk “atau eksklusif” dalam pemakaiannya akan disebutkan secara tegas.

Contoh:

1. Jika p : $2 - 3 \neq 3 - 2$; $\tau(p) = B$
   dan q : $2 + 3 = 3 + 2$; $\tau(q) = B$
   maka $p \vee q$: $2 - 3 \neq 3 - 2$ atau $2 + 3 = 3 + 2$; $\tau(p \vee q) = B$

2. Jika r : $4 > 3$; $\tau(r) = B$
   dan s : $3 < 2$; $\tau(s) = S$
   maka $r \vee s$: $4 > 3$ atau $3 < 2$; $\tau(r \vee s) = B$
   dan $s \vee r$: $3 < 2$ atau $4 > 3$; $\tau(r \vee s) = B$

3. Jika x = 27 habis dibagi 2 ; $\tau(x) = S$
   dan y : Jakarta ada di Sumatra ; $\tau(y) = S$
   maka $x \vee y$: 27 habis dibagi 2 atau Jakarta ada di Sumatra;
   $\tau(x \vee y) = S$

4. Jika a : $1 - 2 \neq 2 - 1$; $\tau(a) = B$
   dan b : $1 + 2 = 2 + 1$; $\tau(b) = B$
   maka $\sim a \wedge \sim b$: $1 - 2 = 2 - 1$ dan $1 + 2 \neq 2 + 1$; $\tau(\sim a \wedge \sim b) = S$
   Sedangkan $\sim a \vee b$: $1 - 2 = 2 - 1$ atau $1 + 2 = 2 + 1$; $(\sim a \vee b) = B$

5. Contoh disjungsi eksklusif
   Dua garis dalam bidang sejajar atau berpotongan.
   Ia sedang membaca buku atau tidur.
   Saya lahir di Bandung atau Jakarta.

E. IMPLIKASI

Dalam matematika sering ditemukan pernyataan-pernyataan dalam bentuk “jika … maka ...”. Pernyataan dalam bentuk *jika maka* ini diperoleh dari penggabungan dua pernyataan tertentu. Misalnya, dari pernyataan tunggal p dan pernyataan tunggal q, dibentuk kalimat baru yang merupakan pernyataan majemuk dalam bentuk “jika p maka q”. Pernyataan-pernyataan yang berbentuk demikian disebut *implikasi* (*implication*) atau kondisional (*conditional statement*) atau pernyataan-pernyataan bersyarat.

Pernyataan “Jika p maka q” dinotasikan “ $p \rightarrow q$” atau “$p \supset q$”, sedangkan kata penghubung dengan notasi “$\rightarrow$ “ atau “ $\supset$ “ disebut operasi implikasi. Selanjutnya notasi implikasi yang akan dipakai dalam modul ini adalah notasi “$\rightarrow$”

Perhatikan sebuah contoh pembentukan pernyataan implikasi sebagai berikut.

Jika p	:	Segitiga ABC sama kaki
dan q	:	Segitiga ABC mempunyai dua sudut yang sama
maka $p \rightarrow q$	:	Jika semua segitiga ABC sama kaki maka segitiga ABC mempunyai dua sudut yang sama.

Dalam pernyataan implikasi, komponen kalimat yang terletak di antara *jika* dan *maka*, yaitu bagian kalimat yang lebih dulu yang menjadi syarat disebut “*anteseden*” (*antecedent*), sedangkan komponen pernyataan yang ditulis kemudian, yaitu bagian belakang yang merupakan akibatnya atau yang mengikutinya disebut “*konsekuen*” (*consequent*).

Untuk contoh di atas yang menjadi anteseden adalah kalimat p: “Segitiga ABC sama kaki”, dan yang menjadi konsekuen adalah kalimat q: “Segitiga ABC mempunyai dua sudut yang sama.

Sekarang akan diselidiki nilai kebenaran dari suatu implikasi, tetapi sebelumnya kita tinjau dahulu beberapa implikasi yang berbeda sehingga kita dapat melihat adanya macam-macam implikasi yang berlainan.

1.	Jika	p	:	Semua kucing suka makan tikus
	dan	q	:	Si Belang adalah seekor kucing
	maka	$p \rightarrow q$	:	Jika semua kucing suka makan tikus, maka si Belang sebagai seekor kucing suka makan tikus.
2.	Jika	p	:	Gambar ini adalah sebuah segitiga
	dan	q	:	Semua segitiga mempunyai tiga sisi
	maka	$p \rightarrow q$	:	Jika gambar ini sebuah segitiga maka gambar ini mempunyai tiga sisi
3.	Jika	p	:	Karet direndam dalam bensin
	dan	q	:	Karet larut dalam bensin
	maka	$p \rightarrow q$	:	Jika karet direndam dalam bensin maka karet tersebut akan larut.

Kebenaran implikasi ini bukan persoalan logika atau definisi, tetapi konsekuennya merupakan akibat. Dalam contoh terakhir ini yang ditonjolkan bersifat sebab-menyebab atau hubungan sebab-akibat dan harus diselidiki secara empiris.

Ketiga contoh di atas memperlihatkan adanya macam-macam implikasi yang mempunyai pengertian yang berbeda-beda tentang ungkapan "Jika … maka …".

Dengan memperhatikan adanya perbedaan-perbedaan itu kita akan berusaha menemukan arti yang sama atau sebagian arti yang sama mengenai tipe-tipe implikasi tersebut. Dalam hal ini sebagian arti yang sama dari macam-macam implikasi yang berlainan akan dapat diketahui, bila kita bertanya "Keadaan apakah yang cukup untuk menentukan kesalahan sebuah pernyataan implikasi?".

Apabila kita tinjau contoh ketiga di atas maka pernyataan itu akan salah jika "Karet itu benar-benar direndam dalam bensin dan tidak larut". Padahal, berdasarkan pengalaman memang karet itu larut dalam bensin.

Untuk lebih jelasnya tentang dalam hal manakah implikasi yang berbeda-beda itu salah, kita tinjau kembali ketiga contoh di atas dalam keadaan berikut.

1. Jika semua kucing suka makan tikus maka si Belang sebagai seekor kucing *tidak* suka makan tikus.
2. Jika gambar itu benar-benar sebuah segitiga maka gambar itu *tidak* mempunyai tiga sisi.
3. Jika karet itu benar-benar direndam dalam bensin maka karet itu tidak akan larut.

Nilai kebenaran dari ketiga implikasi yang baru ini, adalah salah. Jadi, suatu implikasi dengan *anteseden benar* dan *konsekuen salah haruslah salah*. Karenanya tiap implikasi "Jika p maka q" bernilai salah dalam hal konjungsi "$p \wedge \sim q$" benar, tetapi agar implikasi "Jika p maka q" bernilai benar maka konjungsi "$p \wedge \sim q$" harus salah. Dengan kata lain, supaya suatu implikasi "Jika p maka q" benar maka $\sim (p \wedge \sim q)$ harus benar. Tabel kebenarannya seperti berikut.

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$	$p \rightarrow q$
B	B	S	S	B	B
B	S	B	B	S	S
S	B	S	S	B	B
S	S	B	S	B	B

Atau secara singkatnya tabel kebenarannya seperti berikut.

p	q	p→ q
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Secara umum berlaku:

Definisi:

Suatu pernyataan implikasi hanya salah jika antesedennya benar dan konsekuennya salah, dalam kemungkinan lainnya pernyataan implikasi itu adalah benar.

Contoh:

Apabila p dan q pernyataan-pernyataan yang benar, sedangkan r dan s adalah pernyataan-pernyataan yang salah, maka

$\tau\,(p \rightarrow q) = B$

$\tau\,(q \rightarrow r) = S$

$\tau\,(r \rightarrow s) = B$

$\tau\,(s \rightarrow p) = B$

$\tau\,(r \rightarrow (r \rightarrow s)) = B$

$\tau\,((r \rightarrow s) \rightarrow s) = S$

$\tau\,((r \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow s)) = S$

$\tau\,((r \rightarrow p) \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim p)) = S$

$\tau\,([(p \wedge r) \rightarrow S\,] \rightarrow (p \rightarrow s)) = S$

F. BIIMPLIKASI

Selain operasi-operasi negasi, konjungsi, disjungsi, dan implikasi dalam logika matematika dikenal pula operasi biimplikasi. Operasi biimplikasi disebut juga operasi *bikondisional* (*biconditional*) atau *operasi implikasi dwi arah atau operasi ekuivalensi*. Operasi biimplikasi ini dinotasikan dengan " ↔" yang dapat dibaca sebagai *materially implication* atau *jika dan hanya jika*.

Seperti halnya operasi-operasi biner lainnya maka untuk membentuk pernyataan majemuk biimplikasi diperlukan dua pernyataan sebagai komponen-komponennya. Misalnya, komponen pertama adalah pernyataan p dan komponen kedua adalah pernyataan q. Maka, pernyataan majemuk "p ekuivalen dengan q" atau "p jika dan hanya jika q" yang dinotasikan "$p \leftrightarrow q$" mempunyai arti bahwa $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$.

Selanjutnya sebagai konsekuensi logisnya, $p \leftrightarrow q$ akan mempunyai nilai kebenaran yang benar hanya jika $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$ kedua-duanya bernilai benar, sedangkan sudah Anda ketahui bahwa implikasi $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$ dua-duanya akan benar hanya jika p benar dan q benar atau p salah dan q salah, sedangkan dalam keadaan lainnya tidak mungkin. Sebab jika p dan q nilai kebenarannya tidak sama maka $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$ tidak akan saling menyimpulkan berarti kedua-duanya tidak akan benar. Secara umum berlaku:

Definisi:

Suatu biimplikasi $p \leftrightarrow q$ benar jika nilai kebenaran p sama dengan nilai kebenaran q, dan biimplikasi $p \leftrightarrow q$ salah jika nilai kebenaran p tidak sama dengan nilai kebenaran q.

Tabel kebenarannya:

P	q	$p \leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Contoh:

1. Jika p : 2 + 2 = 5 ; (S)
   dan q : 5 adalah bilangan prima ; (B)
   maka $p \leftrightarrow q$: 2 + 2 = 5 jika dan hanya jika 5 adalah bilangan prima
   $\tau (p \leftrightarrow q) = S$, sebab $\tau (p \rightarrow q) = B$ dan $\tau (q \rightarrow p) = S$

2. Jika p : Indonesia anggota ASEAN ; (B)
   dan q : Filipina anggota ASEAN ; (B)
   maka $p \leftrightarrow q$: Indonesia anggota ASEAN jika dan hanya jika Filipina anggota ASEAN.
   $\tau (p \leftrightarrow q) = B$, sebab $\tau (p \rightarrow q) = B$ dan $\tau (q \rightarrow p) = B$

3. Jika $p : 4 < 3$; (S)
   dan $q : 4 = 3$; (S)
   maka $p \leftrightarrow q$: $4 < 3$ jika dan hanya jika $4 = 3$
   $\tau (p \leftrightarrow q) = B$, sebab $\tau (p \to q) = B$ dan $\tau (q \to p) = B$
4. Jika p : x bilangan genap
   dan q : x^2 bilangan genap
   maka $p \leftrightarrow q$: x bilangan genap jika dan hanya jika x^2 bilangan genap
   $\tau (p \leftrightarrow q) = B$, sebab $\tau (p \to q) = B$ dan $\tau (q \to p) = B$
5. Jika p pernyataan yang benar dan q pernyataan yang salah, maka
   a. $\tau ((p \to q) \leftrightarrow \sim p) = B$
   b. $\tau ((p \vee q) \leftrightarrow q \to \sim p) = B$
   c. $\tau ([(p \wedge \sim q) \leftrightarrow p]) = B$

G. URUTAN PEMAKAIAN KATA HUBUNG (OPERASI)

Untuk menentukan nilai kebenaran sebuah pernyataan majemuk yang lebih dari dua pernyataan tunggal dan lebih dari satu operasi, pertama-tama dicari nilai kebenaran pernyataan-pernyataan yang terletak di dalam tanda kurung kecil (...), kemudian yang terletak di dalam tanda kurung siku [...], dan seterusnya.

Misalnya, untuk mencari nilai kebenaran dari pernyataan majemuk $\{\sim [p \wedge (\sim q \vee r)]\}$, urutan pengerjaannya adalah:

$\tau (\sim q)$
$\tau (\sim q \vee r)$
$\tau [p \wedge (\sim q \vee r)]$
$\tau \{\sim [p \wedge (\sim q \vee r)]\}$

Jika dalam sebuah pernyataan majemuk tidak ada tanda-tanda pengelompokan, seperti kurung kecil ( ), kurung siku [ ] maka operasi-operasi logika dikerjakan menurut urutan berikut.

1. Negasi.
2. Konjungsi.
3. Disjungsi.
4. Implikasi.
5. Biimplikasi.

Untuk memudahkan urutan pengerjaan operasi-operasi logika sebaiknya gunakanlah tanda kurung sebagaimana dijelaskan di atas.

Sebagai contoh, pernyataan-pernyataan $p \to q \wedge \sim r$ dan $p \to (q \wedge \sim r)$ mempunyai nilai kebenaran yang sama karena baik tanpa kurung maupun memakai tanda kurung langkah-langkah pengerjaannya ialah:

1. $\tau\,(\sim r)$.
2. $\tau\,(q \wedge \sim r)$.
3. $\tau\,[p \to q \wedge \sim r]$.

Akan tetapi, nilai kebenaran pernyataan majemuk $p \to q \wedge \sim r$ tidak sama dengan nilai kebenaran $(p \to q) \wedge \sim r$, sebab untuk mencari $\tau\,[(p \to q) \wedge \sim r]$ langkah yang harus ditempuh adalah:

1. $\tau\,(p \to q)$
2. $\tau\,(\sim r)$
3. $\tau\,[(p \to q) \wedge \sim r)]$

Untuk lebih jelasnya Anda perhatikan beberapa contoh langkah-langkah pengerjaan untuk mencari nilai kebenaran pernyataan majemuk berikut.

Contoh:

1. Langkah-langkah pengerjaan $p \vee q \to r \wedge {\sim}p \leftrightarrow r$
   sama dengan $\{ (p \vee q) \to [r \wedge ({\sim}p)] \} \leftrightarrow r$
   yaitu:
   a. $\tau\,(p \vee q)$
   b. $\tau\,({\sim}p)$
   c. $\tau\,[r \wedge ({\sim}p)]$
   d. $\tau\,\{(p \vee q) \to [r \wedge ({\sim}p)]\}$
   e. $\tau\,[\{(p \vee q) \to [r \wedge ({\sim}p)]\} \leftrightarrow r]$
2. Sedangkan langkah-langkah pengerjaan pernyataan $p \vee {\sim}q \wedge r \leftrightarrow q \to r \vee {\sim}p$ sama dengan: $\{p \vee [({\sim}q) \wedge r]\} \leftrightarrow \{q \to [r \vee ({\sim}p)]\}$
   yaitu:
   a. $\tau\,({\sim}q)$
   b. $\tau\,({\sim}p)$
   c. $\tau\,[({\sim}q) \wedge r]$
   d. $\tau\,[r \vee ({\sim}p)]$
   e. $\tau\,\{p \vee [({\sim}q) \wedge r]\}$
   f. $\tau\,\{q \to [r \vee ({\sim}p)]\}$
   g. $\tau\,\{p \vee [({\sim}q) \wedge r]\} \leftrightarrow \{q \to [r \vee ({\sim}p)]\}$

3. Apabila x dan y adalah pernyataan-pernyataan yang benar, sedangkan z adalah pernyataan-pernyataan yang salah maka nilai kebenaran dari pernyataan $x \rightarrow \sim y \wedge z \leftrightarrow y \vee \sim x \rightarrow \sim z$ adalah S, dengan langkah-langkah pengerjaan sebagai berikut.
   a. $\tau(\sim y) = S$
   b. $\tau(\sim x) = S$
   c. $\tau(\sim z) = B$
   d. $\tau[(\sim y) \wedge z] = S$
   e. $\tau[y \vee (\sim x)] = B$
   f. $\tau\{x \rightarrow [(\sim y) \wedge z]\} = S$
   g. $\tau\{[y \vee (\sim x)] \rightarrow (\sim z)\} = B$
   h. $\tau[\{x \rightarrow [(\sim y) \wedge z]\} \leftrightarrow \{[y \vee (\sim x)] \rightarrow (\sim z)\}] = S$

H. TABEL KEBENARAN

Agar lebih mudah menentukan nilai kebenaran dari suatu pernyataan majemuk, pergunakan suatu tabel yang disebut tabel kebenaran (*truth table*). Sebenarnya penggunaan tabel kebenaran ini sepintas telah kita gunakan dalam bahasan sebelumnya

Oleh karena sudah diketahui bahwa suatu pernyataan itu hanya dapat benar atau salah saja maka setiap pernyataan itu hanya mempunyai dua kemungkinan, yaitu kemungkinan yang pertama adalah benar dan kemungkinan yang kedua adalah salah. Seandainya ada dua buah pernyataan tunggal yang akan kita gabungkan maka komposisi gabungan kedua pernyataan itu adalah sebagai berikut.

1. Pernyataan yang pertama benar, pernyataan yang kedua benar.
2. Pernyataan yang pertama benar, pernyataan yang kedua salah.
3. Pernyataan yang pertama salah, pernyataan yang kedua benar.
4. Pernyataan yang pertama salah, pernyataan yang kedua salah.

Jika pernyataan yang pertama itu ialah p dan pernyataan yang kedua ialah q maka empat komposisi gabungan kedua pernyataan seperti di atas dapat dibuat tabel kebenaran seperti berikut.

	p	q
(1)	B	B
(2)	B	S
(3)	S	B
(4)	S	S

Seperti sudah Anda ketahui pula dalam tabel kebenaran negasi, tabel kebenaran konjungsi, disjungsi, implikasi, dan tabel kebenaran biimplikasi yang dinamakan *tabel-tabel kebenaran dasar* bahwa banyaknya komposisi tergantung pada banyaknya pernyataan yang akan digabungkan. Ternyata bila ada dua pernyataan, didapatkan empat macam komposisi. Sedangkan dari tiga pernyataan, akan didapatkan delapan macam komposisi, dan dari empat pernyataan didapatkan enam belas macam komposisi, dan seterusnya.

Jadi, banyaknya komposisi itu tergantung pada banyaknya pernyataan yang akan digabungkan. Secara umum berlaku jika banyaknya pernyataan ada n maka banyaknya komposisi ada 2^n.

Contoh:

1. Carilah $\tau\ [\sim (p \vee \sim q)]$

   Langkah-langkah pengerjaan yang sudah Anda kenal adalah sebagai berikut

   a) $\tau\ (p)$
   b) $\tau\ (q)$
   c) $\tau\ (\sim q)$
   d) $\tau\ (p \vee \sim q)$
   e) $\tau\ [\sim (p \vee \sim q)]$

   Dengan menggunakan tabel kebenaran, seperti berikut.

p	q	~ q	p ∨ ~ q	~ (p ∨ ~ q)
B	B	S	B	S
B	S	B	B	S
S	B	S	S	B
S	S	B	B	S
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

   Jadi, $\tau\ [\sim (p \vee \sim q)]$ = SSBS

Penyusunan tabel kebenaran di atas dapat disederhanakan sebagai berikut.

~	(p	∨	~	q)
S S B S	B B S S	B B S B	S B S B	B S B S
(5)	(1)	(4)	(3)	(2)

2. Carilah τ [(p ∨∧ q) → r]

(p	∨	q	→	r)
B B B B S S S S	B B B B B B S S	B B S S B B S S	B S B S B S B B	B S B S B S B S
(1)	(4)	(2)	(5)	(3)

Jadi, τ [(p ∨∧ q) → r] = BSBSBSBB

3. Jika a dan b pernyataan-pernyataan yang benar, sedangkan c dan d pernyataan-pernyataan yang salah maka tabel kebenaran pernyataan majemuk ~ a ↔ b ∨ c → ~ d ∧ ~ a adalah:

~	a	↔	b	∨	c	→	~	d	∧	~	a
S	B	B	B	B	S	S	B	S	S	S	B
(5)	(1)	(10)	(2)	(8)	(3)	(9)	(6)	(4)	(7)	(5)	(1)

Jadi, τ (~ a ↔ b ∨ c → ~ d ∧ ~ a) = B

Dalam setiap kolom tabel kebenaran dibubuhkan nomor urut langkah-langkah pengerjaan untuk mencari nilai kebenaran, sedangkan pada lajur akhir langkah pengerjaan dibatasi oleh garis rangkap dua. Lajur terakhir ini merupakan penyelesaian nilai kebenarannya.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tentukan negasi dari tiap pernyataan berikut dan tentukan pula nilai kebenarannya!
   a. p : Beberapa murid menganggap matematika sukar.
   b. q : Semua kucing mempunyai mata
   c. r : $40 - 10 \geq 20$
2) Jika p : Semua kucing mempunyai ekor
   dan q : 3 adalah bilangan genap
   Susunlah pernyataan-pernyataan tunggal tersebut ke dalam suatu pernyataan majemuk dengan operasi logika sebagai berikut dan tentukan pula nilai kebenarannya, yaitu:
   a. $\sim p \vee \sim q$
   b. $p \wedge \sim q$
   c. $\sim p \vee q$
3) Jika x : Hari ini udara mendung
   dan y : Hari ini udara panas
   Tulislah pernyataan-pernyataan majemuk berikut dengan simbol logika matematika
   a. Hari ini udara tidak mendung dan tidak panas.
   b. Hari ini udara tidak panas atau mendung.
   c. Tidak benar bahwa hari ini udara mendung dan tidak panas.
4) Tentukan nilai kebenaran pernyataan berikut.
   a. $(7 < 3) \rightarrow (7 + 2 < 3 + 2)$
   b. $(2 > 1) \leftrightarrow \sim (4 \neq 5)$
5) Carilah nilai kebenaran dari pernyataan majemuk berikut:
   a. $[(p \vee q) \rightarrow r]$
   b. $[(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)]$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a. $\sim p$: Tidak ada murid yang menganggap matematika sukar.
   atau : Tidak benar bahwa beberapa murid menganggap matematika sukar.
   atau Salah bahwa beberapa murid menganggap matematika sukar.
   $\tau(\sim p) = S$
   Perlu diketahui bahwa dalam soal latihan 1a, pernyataan itu menyatakan kata "beberapa" yang berarti sekurang-kurangnya ada satu murid sehingga negasinya harus menyatakan semua murid tidak menganggap matematika sukar. Jadi, negasinya seperti di atas.
   b. $\sim q$: Beberapa kucing tidak mempunyai mata.
   atau : Tidak semua kucing mempunyai mata.
   atau : Salah bahwa semua kucing mempunyai mata.
   $\tau(\sim q) = S$
   Dalam soal 1b ini, pernyataan yang ditentukan adalah benar untuk semua kucing maka negasinya harus menyatakan bahwa sekurang-kurangnya ada satu kucing yang tidak mempunyai mata. Jadi, negasinya seperti di atas.
   c. $\sim r$: $40 - 10 < 20$.
   atau : $40 - 10 \not\geq 20$
   atau : Salah bahwa $40 - 10 \geq 20$
   $\tau(\sim r) = S$.
2) a. Beberapa kucing tidak mempunyai ekor atau 3 bukan bilangan genap (B).
   b. Semua kucing mempunyai ekor dan 3 bukan bilangan genap (B).
   c. Beberapa kucing tidak mempunyai ekor atau 3 bilangan genap (S).
3) a. $\sim x \wedge \sim y$.
   b. $\sim y \vee x$.
   c. $\sim x \wedge \sim y$.
4) a. B, sebab $S \rightarrow S$ adalah B.
   b. B, sebab $B \leftrightarrow B$ adalah B.
5) a. $\tau[(p \vee q) \rightarrow r]$ = BSBSBSBB (lihat uraian sebelumnya).
   b. $\tau[(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)]$ = BBBSSSSS (lihat uraian sebelumnya).

RANGKUMAN

Kalimat-kalimat matematika dibedakan atas pernyataan tunggal dan pernyataan majemuk. Pernyataan tunggal adalah pernyataan sederhana yang hanya terdiri dari satu kalimat dan tidak mengandung suatu pernyataan lain sebagai komponen atau komponen bagiannya. Sebaliknya pernyataan majemuk adalah pernyataan yang mengandung pernyataan lain sebagai komponennya.

Kata hubung (operasi) negasi adalah operasi monar dari operasi logika matematika. Adapun fungsinya untuk membentuk pernyataan majemuk dari suatu pernyataan tunggal, sedangkan nilai kebenaran dari suatu negasi adalah selalu berlawanan dengan nilai kebenaran pernyataan asalnya.

Kata hubung (operasi) konjungsi dan operasi disjungsi adalah operasi-operasi biner, yaitu operasi yang dikenakan pada dua pernyataan. Lain halnya dengan operasi negasi, operasi tersebut hanya dikenakan pada satu pernyataan. Kata perangkai dari operasi konjungsi adalah kata-kata *dan* yang dapat menggabungkan dua pernyataan tunggal menjadi satu pernyataan majemuk, sedangkan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk itu tergantung dari nilai kebenaran pernyataan-pernyataan tunggalnya. Dalam hal ini didefinisikan bahwa nilai kebenaran pernyataan majemuk konjungsi hanya benar kalau pernyataan-pernyataan asalnya (konjung-konjungnya) benar, dan dalam keadaan lainnya salah.

Kata perangkai *atau* adalah operasi logika untuk membentuk pernyataan majemuk disjungsi. Seperti halnya pernyataan majemuk lainnya bahwa nilai kebenaran pernyataan majemuk disjungsi bergantung pula pada nilai-nilai kebenaran pernyataan-pernyataan asalnya.

Pengertian disjungsi dibedakan atas dua pengertian, yaitu disjungsi inklusif dan disjungsi eksklusif. Disjungsi inklusif yang seterusnya disebut disjungsi saja adalah kata perangkai *atau* yang berarti *salah satu atau dua-duanya* (mencakup). Maksudnya jika salah satu atau kedua-duanya dari pernyataan tunggalnya benar maka nilai kebenaran dari pernyataan yang baru (pernyataan majemuk) yang terbentuk adalah benar.

Suatu disjungsi eksklusif adalah benar hanya jika salah satu disjungnya benar, tidak dua-duanya (memisah). Artinya, suatu pernyataan majemuk itu hanya benar jika salah satu dari disjungnya benar, tetapi tidak dua-duanya.

Persoalan-persoalan dalam matematika banyak yang berbentuk pernyataan implikasi, yaitu pernyataan yang mempergunakan operasi "jika … maka …". Suatu implikasi terbentuk dari dua buah pernyataan, *pertama* disebut anteseden yang merupakan syarat, *kedua* disebut konsekuen yang merupakan akibatnya.

Kebenaran pernyataan implikasi itu pada dasarnya ada tiga macam. *Pertama*, kebenaran yang didasarkan pada logika, *kedua* kebenaran yang didasarkan pada definisi, dan *ketiga* kebenaran yang didasarkan pada hubungan sebab akibat (empiris). Namun demikian, kebenaran-kebenaran tersebut mempunyai arti yang sama.

Dalam hal ini pernyataan implikasi itu akan bernilai salah jika pernyataan antesedennya benar, sedangkan konsekuennya salah, tetapi dalam keadaan-keadaan lainnya adalah benar. Selain pernyataan implikasi dikenal pula suatu pernyataan lain yang berdasarkan implikasi, yaitu pernyataan biimplikasi. Dalam pernyataan biimplikasi ini, dipakai operasi *jika dan hanya jika*, sedangkan nilai kebenarannya tergantung pada nilai kebenaran pernyataan-pernyataan komponen yang digabungkannya.

Misalnya, untuk dua pernyataan p dan q maka pernyataan biimplikasi "p jika dan hanya jika q" atau dinotasikan dengan " $p \leftrightarrow q$", yang artinya $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$. Hal ini berarti bahwa "$p \leftrightarrow q$" akan bernilai benar jika $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$ bernilai benar, sedangkan $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$ akan benar jika p dan q mempunyai nilai yang sama, apakah benar kedua-duanya atau salah kedua-duanya. Sehingga secara umum berlaku bahwa $p \leftrightarrow q$ akan benar jika p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama.

Agar lebih mudah dalam menentukan nilai kebenaran dipergunakan suatu tabel yang disebut tabel kebenaran. Banyaknya baris dan banyaknya kolom dari tabel ini tergantung pada banyaknya komponen pernyataan yang akan dicari nilai kebenarannya, sedangkan langkah-langkah mencari nilai kebenaran dari pernyataan majemuk yang memuat berbagai operasi logika diadakan suatu aturan tertentu. Prioritas utama langkah pengerjaan adalah operasi negasi, operasi konjungsi, disjungsi, implikasi, dan yang terakhir operasi biimplikasi, kecuali kalau ada tanda-tanda kurung tertentu yang meminta diprioritaskan. Dalam hal ini kurung kecil sebagai prioritas pengerjaan utama, dilanjutkan dengan kurung siku, kemudian kurung kurawal, dan seterusnya.

Adapun banyaknya baris tabel kebenaran tergantung pada banyaknya komponen pernyataan yang akan kita gabungkan. Jika banyaknya komponen itu ada n maka banyaknya baris pada tabel kebenaran ada sebanyak 2^n. Banyaknya baris tabel kebenaran ini adalah akibat dari banyaknya kemungkinan komposisi penggabungan nilai-nilai kebenaran pernyataan yang akan digabungkan.

Selanjutnya agar lebih mudah menentukan nilai kebenaran pernyataan majemuk tersebut maka pada tabel kebenaran dalam setiap langkah prioritas pengerjaannya dibubuhkan nomor-nomor urut sesuai dengan aturan-aturan operasi.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Negasi dari pernyataan “Semua anak pria adalah petualang” adalah ….
   A tidak ada anak pria yang petualang
   B. semua anak pria bukan petualang
   C. beberapa anak pria bukan petualang
   D. tidak ada anak pria yang bukan petualang

2) Di antara pernyataan berikut yang bukan negasi dari pernyataan “$2 + 3 < 5$”, yaitu ….
   A. tidak benar $2 + 3 < 5$
   B. $2 + 3 \geq 5$
   C. $2 + 5 \nless 5$
   D. $2 + 3 > 5$

3) Jika p : “Semua bilangan asli merupakan bilangan real” dan
   q : “Semua bilangan ganjil merupakan bilangan genap”
   maka di antara berikut yang benar adalah ….
   A. $\sim (p \vee q)$
   B. $\sim p \wedge \sim q$
   C. $\sim p \vee q$
   D. $\sim (p \wedge q)$

4) Jika x : “Tiada murid yang menyukai ujian” dan
   y : “$4 + 3 = 7$”
   maka simbol logika dari “Semua murid tidak menyukai ujian dan $4 + 3 \neq 7$” adalah …
   A. $\sim (\sim x \wedge \sim y)$
   B. $\sim x \wedge \sim y$
   C. $\sim (x \wedge y)$
   D. $x \wedge y$

5) Jika r : "Matematika merupakan ilmu penting" dan
s : "Matematika diajarkan di sekolah"
maka kalimat dari simbol logika $s \vee \sim r$ adalah ….
A. matematika diajarkan di sekolah dan matematika bukan ilmu yang penting
B. matematika tidak diajarkan di sekolah atau matematika bukan ilmu yang penting
C. matematika tidak diajarkan di sekolah dan matematika ilmu yang penting
D. matematika diajarkan di sekolah atau matematika ilmu yang penting

6) Misalkan ditentukan "Jika ayah pergi maka saya ada di rumah" adalah benar maka di antara berikut yang benar, yaitu ….
A. jika saya pergi maka ayah pergi
B. jika saya pergi maka ayah ada di rumah
C. jika ayah ada di rumah maka saya pergi
D. jika saya ada di rumah maka ayah ada di rumah

7) Manakah di antara pernyataan berikut yang benar?
A. $x \in A \leftrightarrow x \in A \cap B$
B. $A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A$
C. $A = B \leftrightarrow A \cup B = B$
D. $x \in (A \cup B) \leftrightarrow x \in A$.

8) $\tau\ (p \to q \vee \sim q)$ adalah ….
A. BBBB
B. BSBS
C. BBBS
D. SSBB

9) $\tau\ \{\sim [p \wedge (\sim p)]\}$ adalah ….
A. BS
B. SB
C. SS
D. BB

10) Manakah di antara pernyataan berikut yang salah?
A. Jika $x > 0$ maka $\sqrt{x^2} = x$.
B. Jika $x < 0$ maka $\sqrt{x^2} = -x$.

C. Jika $x^2 = -1$ maka $x = -1$.
D. Jika $x^2 = 1$ maka $x = \pm 1$.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) A Perbedaan pokok logika modern dengan logika tradisional adalah dalam penggunaan bahasa simbol yang bersifat abstrak dan menjadi bahasa tersendiri yang diformalkan.
2) B Proposisi tersebut masih terjadi penyimpangan, karena susunan dan predikatnya menunjukkan sifat.
3) B Pernyataan adalah kalimat yang membawa informasi yang berarti, yaitu benar atau salah tidak kedua-duanya.
4) A Kalimat ini merupakan pernyataan, sebab mempunyai nilai kebenaran, dalam hal ini nilai kebenarannya adalah salah.
5) B τ (p) = S karena ada ikan yang hidup tidak dalam air tawar.
6) A τ (q) = B karena dalam matematika untuk setiap $x \in R$ maka $x^0 = 1$
7) B Memang betul x adalah sebagai variabel dari kalimat terbuka, tetapi bukanlah sesuatu hal yang sudah jelas dan tertentu.
8) C $2x > 3$, berarti $x > 1{,}5$ dan himpunan penggantinya {1 , 2 , 3 , 4} maka himpunan penyelesaiannya {2 , 3 , 4}.
9) D x sebagai negara dan y sebagai ibu kota negara yang kedua-duanya merupakan variabel serta merupakan suatu pasangan berurutan yang tidak dapat ditukarkan. Dalam hal ini nilai kebenarannya salah.
10) A. Kuadrat bilangan ganjil kali kuadrat bilangan genap adalah genap.

Tes Formatif 2

1) A Negasinya harus menyatakan paling sedikit ada pria yang bukan petualang.
2) D τ (2 + 3 > = τ (2 + 3 < 5) = S
3) D τ (p) = D, τ (q) = S dan τ ($\sim$ (p $\wedge$ q)) = B
4) B Karena x semua murid tidak menyukai ujian dan $\sim$ y : $4 + 3 \neq 7$.
5) A $s \vee \sim r$ Matematika diajarkan di sekolah atau matematika bukan ilmu yang penting.
6) B Sebab nilai kebenaran pernyataan $p \rightarrow q$ adalah sama dengan nilai kebenaran pernyataan $\sim q \rightarrow \sim p$.
7) A $\subset B \rightarrow A \cap B = A$ dan $A \cap B = A \rightarrow A \subset B$ sehingga $A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A$.
8) A τ ($p \rightarrow q \vee \sim q$) = BBBB. Didapat dari tabel nilai kebenaran.
9) D τ {$\sim$ [p $\wedge$ ($\sim$ p)]} = BB. Didapat dari tabel nilai kebenaran.
10) C Sebab jika $x^2 = -1$ maka $x = \pm 1$.

Glosarium

Binary operation, operasi biner	:	operasi dalam logika yang diberlakukan pada dua pernyataan.
Biimplication atau *biconditional* atau *materially implication*	:	operasi dalam logika matematika yang dipergunakan untuk menggabungkan dua pernyataan dengan memakai kata perangkai "jika dan hanya jika".
Compound statement	:	pernyataan majemuk merupakan kalimat baru yang diperoleh dari penggabungan bermacam-macam pernyataan tunggal.
Conjunction	:	konjungsi adalah operasi dalam logika matematika yang dipergunakan untuk menggabungkan dua pernyataan dengan memakai kata perangkai "dan".
Disjunction atau *alternation*, disjungsi	:	operasi dalam logika matematika yang dipergunakan untuk menggabungkan dua pernyataan dengan memakai kata perangkai "atau".
Equality, kesamaan	:	kalimat matematika tertutup yang memuat tanda sama dengan.
Equation	:	persamaan, yaitu kalimat matematika terbuka yang memuat tanda sama dengan.
Implication atau *conditional*, implikasi atau kondisional	:	yaitu operasi dalam logika matematika yang dipergunakan untuk menggabungkan dua pernyataan dengan memakai kata perangkai "jika maka".
Inequation	:	pertidaksamaan, yaitu kalimat matematika terbuka yang memuat tanda ketidaksamaan.
Inequality	:	ketidaksamaan, yaitu kalimat matematika tertutup yang memuat tanda ketidaksamaan.
Monary operation, operasi monar	:	yaitu operasi dalam logika matematika yang diberlakukan pada satu pernyataan.
Negation, negasi	:	penyangkalan atau ingkaran adalah operasi dalam logika matematika yang dikenakan pada

		sebuah pernyataan yang mengakibatkan nilai kebenarannya berlawanan.
Proposition, proposisi atau kalimat pernyataan atau kalimat matematika tertutup	:	kalimat yang mempunyai nilai kebenaran, yaitu kalimat yang hanya bernilai benar saja atau salah saja tidak dua-duanya pada saat yang sama.
Simple statement, pernyataan tunggal atau pernyataan sederhana	:	pernyataan yang tidak memuat pernyataan lain sebagai bagiannya.
Solution, solusi, penyelesaian atau jawaban	:	pengganti variabel sehingga menghasilkan kalimat tertutup yang benar.
Truth table, tabel kebenaran	:	tabel yang dipergunakan untuk menentukan nilai kebenaran dari suatu pernyataan majemuk.
Variable, variabel atau peubah	:	adalah suatu jenis lambang yang tidak mewakili suatu hal tertentu yang sudah jelas, tetapi sebaliknya variabel adalah sesuatu yang menunjukkan berlaku umum.

Daftar Pustaka

Bunarso Tanuatmodjo, dkk. (1977). *Matematika Jilid 1*. Bandung: BPG Tertulis. Depdikbud.

Irving M. Copi. (1973). *Symbolic Logic*. Fourth Edition. New York: Macmilan Publishing, Co.

Karso. (2003). *Pengantar Dasar Matematika*. Cetakan Keempat. Jakarta: Pusat Penerbitan Universitas Terbuka.

Oesman, Arif. (1978). *Logika Simbol (Logika Modern)*. Jakarta, Surabaya: Bina Ilmu.

Ruseffendi, E.T. (1979). *Dasar-dasar Matematika Modern untuk Guru*. Edisi Ketiga. Bandung: Tarsito.

Robert Sharvy. (1970). *Logic on Outline*. Totowa, New Jersey: Little Field, Adam & Co.

Soekadijo, R.G. (1983). *Logika Dasar*. Jakarta: Gramedia.

Wahyudin. (1984). *Pengantar Sistem Matematika*. Bandung: Epsilon Grup.

Tim (1979). *Matematika untuk SMA*. Jakarta: Depdikbud.