

## MODUL 1

# Model Optimisasi dan Pemrograman Linear

Prof. Dr. Djati Kerami  
Dra. Denny Riama Silaban, M.Kom.



## PENDAHULUAN

---

Sebelum membuat rancangan penyelesaian masalah dalam bentuk riset operasional, kita harus melakukan analisis masalah yang kita hadapi dan menyatakannya ke dalam bentuk model matematis. Dalam melakukan analisis masalah tersebut, kita identifikasi peubah-peubah manakah yang berperan dalam pengambilan keputusan.

Pada modul ini Anda akan mempelajari bagaimana melakukan analisis masalah dan menurunkannya ke dalam model kuantitatif, terutama yang berupa model optimisasi. Dalam modul ini pula, Anda akan mempelajari model optimisasi sederhana yang berupa model pemrograman linear.

Secara terinci, setelah selesai mempelajari modul ini diharapkan Anda dapat:

1. memahami pengertian model matematis;
2. melakukan penurunan model kuantitatif;
3. mendefinisikan peubah keputusan;
4. melakukan penurunan fungsi tujuan dan fungsi kendala;
5. memahami pengertian model optimisasi;
6. memahami prinsip dasar pemrograman linear, meliputi jenis fungsi tujuan dan kendala, daerah layak, titik ekstrim, serta asumsi-asumsi pemrograman linear;
7. mampu menyelesaikan masalah pemrograman linear dua peubah menggunakan metode grafik; dan
8. mampu menyelesaikan masalah pemrograman linear dengan menggunakan metode simpleks.

## KEGIATAN BELAJAR 1

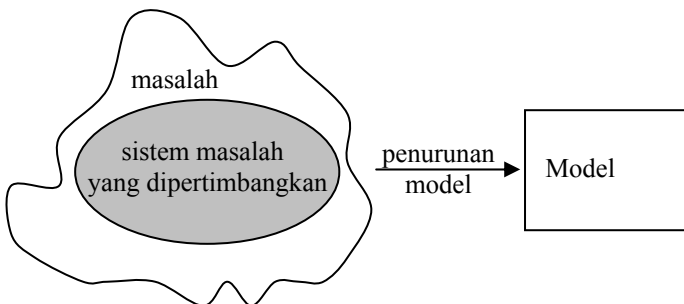
## Model Optimisasi sebagai Model Matematis

Agar suatu masalah yang kita hadapi lebih mudah untuk menentukan pendekatan metode penyelesaiannya, terlebih dahulu kita harus menurunkan model masalah yang kita hadapi. Pada Kegiatan Belajar 1 ini dipelajari bagaimana menurunkan masalah menjadi suatu model masalah, khususnya yang berupa model matematis.

**A. PENURUNAN MODEL**

Sebelum kita menyelesaikan masalah, kita harus mengetahui dahulu bagaimana struktur sistem masalah yang kita hadapi. Apabila tidak, penyelesaian masalah yang kita peroleh besar kemungkinannya tidak akan menjawab masalah yang kita hadapi tersebut. Dalam menyajikan struktur masalah, kita harus melakukan identifikasi dahulu, parameter-parameter yang layak dipertimbangkan dan parameter-parameter yang tidak layak dipertimbangkan (diabaikan). Setelah kita menetapkan parameter-parameter yang layak dipertimbangkan, kita melakukan identifikasi bentuk hubungan antarparameter. Hasil penyajian struktur dari sistem masalah setelah kita melakukan identifikasi dengan cara seperti tersebut di atas, disebut dengan model masalah.

Untuk keseluruhan proses yang dilakukan sampai diperoleh suatu model masalah disebut dengan penurunan model atau pemodelan (lihat Gambar 1.1)



Gambar 1.1.  
Proses Penurunan Model

Dengan demikian, model dari suatu masalah merupakan penyajian masalah dalam bentuk yang lebih sederhana, mudah dipahami dan diharapkan dapat menggambarkan masalah yang kita hadapi. Dalam hal parameter-parameter yang dipertimbangkan dalam masalah bersifat kuantitatif (dalam hal ini dapat berupa bilangan-bilangan atau angka-angka), model masalah tersebut dikenal dengan model matematis atau disebut juga dengan model kuantitatif. Parameter-parameter tersebut dapat berupa peubah ataupun tetapan (konstanta), operasi yang digunakan berupa operasi hitung (+, −, ×, :), sedangkan hubungan antarparameter dapat berupa (=, <, >, ≤, ≥). Peubah yang menentukan dalam pemecahan masalah atau dapat digunakan sebagai penunjang pengambilan keputusan dalam pemecahan masalah disebut dengan peubah keputusan.

Di dalam penurunan model masalah, pemilihan peubah keputusan ini harus dilakukan dengan saksama, oleh karena peubah keputusan ini berpengaruh dalam ketepatan model yang diturunkan. Selanjutnya, metode yang digunakan untuk memecahkan model matematis sering disebut dengan metode matematis atau metode kuantitatif.

Berikut ini diberikan contoh penurunan model matematis dari suatu masalah sederhana.

#### *Contoh 1.1.*

Pada dua hari yang lalu, Budi membeli 2 jenis barang (sebutlah barang 1 dan barang 2), di toko A. Dengan uang Rp50.000,00, Budi dapat memperoleh 2 buah barang 1 dan 4 buah barang 2. Sehari yang lalu di toko yang sama, dengan uang Rp50.000,00 pula, dia dapat membeli 4 buah barang 1 dan 3 buah barang 2. Hari ini dia ingin membeli kedua jenis barang tersebut dan dia punya uang Rp100.000,00. Dia ingin membeli 10 buah barang 1 dan 5 buah barang 2.

Masalah yang dihadapi Budi adalah cukupkah uang yang dia punyai? Kalau cukup, berapakah sisa uangnya? Kalau tidak cukup berapakah kekurangannya?

Cobalah Anda baca dengan saksama dan Anda pahami masalahnya Budi, termasuk latar belakang masalahnya! Selanjutnya, cobalah Anda identifikasi parameter-parameter yang ada dan hubungan antarparameter-parameternya!

Setelah kita baca dan pahami, kita perhatikan bahwa masalah Budi tersebut akan dapat dipecahkan kalau kita mengetahui harga satuan barang 1

dan harga satuan barang 2. Jadi, masalah cukup tidaknya uang Budi dapat kita ubah ke dalam masalah bentuk lain, yaitu:

Berapakah harga satuan kedua barang tersebut?

Dengan demikian, kita pecahkan dahulu masalah tersebut, baru kemudian kita pecahkan masalah semula. Kita dapat mengetahui cara pemecahannya dengan mempertimbangkan informasi yang menjadi latar belakang masalah atau di sini berupa pengalaman Budi membeli kedua jenis barang tersebut pada dua hari dan sehari yang lalu.

### Penurunan Model Matematis:

Kita misalkan dahulu,  $x$  adalah harga satuan barang 1 dan  $y$  adalah harga satuan barang 2. Di sini  $x$  dan  $y$  seperti dinyatakan di atas, dipandang sebagai peubah keputusan, oleh karena dengan telah ditentukannya nilai  $x$  dan  $y$  tersebut, masalah akan dapat diputuskan atau dipecahkan.

Dari pengalaman Budi dua hari yang lalu:

“Dengan uang Rp50.000,00, Budi dapat memperoleh 2 buah barang 1 dan 4 buah barang 2”.

Jadi, di sini dapat kita nyatakan bahwa:  $2x + 4y = 50.000$

Dari pengalaman Budi sehari yang lalu:

“Dengan uang Rp50.000,00, dia dapat membeli 4 buah barang 1 dan 3 buah barang 2”.

Kita dapat menyatakannya dengan:  $4x + 3y = 50.000$ .

Dengan demikian, submasalah: “berapakah harga satuan masing-masing jenis barang dapat dipecahkan dari model matematis sebagai berikut:

Tentukan  $x$  dan  $y$ , yang memenuhi

$$2x + 4y = 50.000$$

$$4x + 3y = 50.000.$$

$$x > 0, y > 0.$$

Coba Anda perhatikan kembali model matematis tersebut di atas!

Simbol  $x$  dan  $y$  menyatakan peubah (*variable*), bilangan 2, 4, 3, dan 50.0000 menyatakan tetapan. Dalam hal ini, operasi hitung yang diperlukan hanya ‘+’; sedangkan tanda ‘=’ menyatakan hubungan antarpeubah. Jadi,

baris pertama dan baris kedua merupakan persamaan linear. Oleh karena persamaan pertama berhubungan dengan persamaan kedua (tidak dapat dipisahkan) maka model matematis di atas disebut dengan sistem persamaan linear.

Persyaratan terakhir yang ditambahkan pada model matematis di atas, diperlukan untuk memberikan batasan bahwa harga satuan barang harus positif. Hal ini memberikan daerah nilai kelayakan dari harga satuan kedua jenis barang.

Penyelesaian dari model matematis di atas dapat kita peroleh dengan mudah, misalnya dengan menggunakan metode substitusi seperti yang telah Anda kenal sebelumnya

$$\begin{array}{r} 2x + 4y = 50.000 \quad (\times 2) \rightarrow 4x + 8y = 100.000 \\ 4x + 3y = 50.000 \quad (\times 1) \rightarrow 4x + 3y = 50.000 \\ \hline 5y = 50.000, \text{ memberikan } y = 10.000 \end{array}$$

Substitusi ke persamaan pertama,  $2x + 4(10.000) = 50.000$ , memberikan  $2x = 10.000$ , dan  $x = 5.000$  (di sini terlihat peubah  $y$  dieliminasi, dan kita hanya bekerja dengan peubah  $x$ ). Jadi, harga satuan barang 1 adalah Rp5.000,00 dan harga satuan barang 2 adalah Rp10.000,00.

Jadi, masalah semula dari Budi: “Dengan uang Rp100.000,00, cukup atau kurangkah apabila dia ingin membeli 10 buah barang 1 dan 5 buah barang 2” sudah dapat dipecahkan. Dalam hal ini, apabila uang Rp100.000,00, apabila dia ingin membeli 10 buah barang 1 dan 5 buah barang 2 maka banyaknya uang yang diperlukan adalah  $10(5000) + 5(10.000) = 100.000$  (dalam rupiah). Jadi, dengan Rp100.000,00, Budi tepat (tidak ada sisa uang) dapat membeli sebanyak barang yang dia inginkan..

Cobalah Anda baca dan pahami lagi masalah Budi di atas dan perhatikan lagi model matematisnya. Demikian juga metode untuk memecahkan model matematis tersebut.

Dapat Anda lihat lagi bahwa model matematisnya berupa sistem persamaan linear, sedangkan metode matematisnya berupa metode eliminasi.

Kita dapat melihat bahwa model matematis tersebut hanya berlaku dengan memberikan anggapan-anggapan (asumsi). Misalnya, harga satuan kedua jenis barang tersebut tidak berubah (dua hari yang lalu, kemarin, dan hari ini).

Cobalah Anda cari lagi anggapan lainnya!

Di dalam proses penurunan model matematis, diberikannya anggapan-anggapan tersebut diperlukan untuk membuat masalah menjadi sederhana.

*Contoh 1.2.*

Suatu pabrik akan membuat 2 jenis produk, katakanlah produk A dan produk B. Baik produk A maupun produk B tersebut memerlukan bahan baku yang sama, yaitu P dan Q. Setiap hari bahan baku P hanya tersedia sebanyak 6 kg dan bahan baku Q tersedia 8 kg. Untuk membuat sebuah produk A diperlukan sebanyak 1 kg bahan P dan 2 kg bahan Q. Untuk membuat sebuah produk B diperlukan sebanyak 2 kg bahan P dan 1 kg bahan Q. Keuntungan per kg produk A dan B masing-masing adalah Rp10.000,00 dan Rp5.000,00.

Masalah yang dihadapi oleh pabrik tersebut adalah bagaimana pabrik tersebut membuat rancangan produksi harian berupa berapa banyak produk A dan produk B harus dibuat sedemikian sehingga memenuhi ketersediaan bahan baku serta keuntungan yang diperoleh maksimum?

Cobalah Anda baca baik-baik dan pahami dahulu masalah serta latar belakang masalah perancangan produksi dari pabrik tersebut.

Agar lebih mudah dipahami, akan lebih baik apabila informasi yang melatarbelakangi masalah tersebut di atas, disajikan dalam bentuk tabel seperti berikut ini:

Tabel 1.1.  
Hubungan Produk dan Bahan Baku

Produk	Bahan Baku yang Diperlukan		Keuntungan (dalam Rp.)
	P (dalam kg)	Q (dalam kg)	
Produk A	1	2	10.000
Produk B	2	1	5.000
Persediaan bahan baku	6	8	

Cobalah Anda perhatikan baris dan kolom, serta bilangan di dalam tabel tersebut di atas, dengan informasi yang menjadi latar belakang masalah!

Dapat Anda pahami bahwa dengan menggunakan tabel tersebut, kita akan lebih mudah melakukan penurunan model matematisnya.

### **Penurunan Model Matematis:**

Kita menginginkan berapa banyak produk A dan produk B sedemikian sehingga memenuhi persyaratan ketersediaan bahan baku dan memberikan keuntungan maksimum. Dengan demikian, yang menjadi peubah keputusannya adalah banyaknya produk A dan produk B. Oleh karena itu, kita misalkan bahwa:

- $x$  adalah banyaknya produk A yang akan diproduksi,
- $y$  adalah banyaknya produk B yang akan diproduksi.

Selanjutnya, kita lakukan penurunan model matematis dengan melakukan peninjauan informasi dari beberapa segi:

- a. Bahan baku yang diperlukan (kolom 2 dan kolom 3 dari tabel)

Bahan baku yang diperlukan dapat dilihat dari susunan bahan baku produk:

Untuk membuat sebuah produk A diperlukan 1 kg bahan P dan 2 kg bahan Q.

Untuk membuat sebuah produk B diperlukan 2 kg bahan P dan 1 kg bahan Q.

Bahan baku A (kolom 2):

Jadi, bahan baku A yang diperlukan untuk membuat produk A adalah  $1 \cdot x$ , dan untuk membuat produk B adalah  $2 \cdot y$  sehingga bahan baku A yang diperlukan untuk membuat kedua produk adalah  $1 \cdot x + 2 \cdot y$ .

Oleh karena banyaknya bahan baku A yang dipergunakan tidak dapat melebihi ketersediaan bahan baku A (yaitu 6 kg) maka dapat kita nyatakan bahwa  $1 \cdot x + 2 \cdot y \leq 6$ .

Bahan baku B (kolom 3):

Dengan menggunakan yang sama, dapat kita nyatakan bahwa:

$$2 \cdot x + 1 \cdot y \leq 8.$$

- b. Keuntungan yang diperoleh (kolom 4 dari tabel)

Telah kita misalkan bahwa banyaknya produk A dan produk B yang dibuat per hari masing-masing adalah  $x$  dan  $y$ . Jadi, besarnya keuntungan per hari dengan diproduksinya  $x$  kg produk A adalah  $10.000 \cdot x$  (dalam

rupiah). Dengan cara yang sama, besarnya keuntungan dengan diproduksinya  $y$  kg produk A adalah  $5000 \cdot y$  dalam rupiah).

Jadi, total keuntungan dengan diproduksinya  $x$  kg produk A dan  $y$  kg produk B adalah  $10.000 \cdot x + 5000 \cdot y$ .

Kembali kita pada masalah:

Berapa banyak produk A dan produk B harus dibuat sedemikian sehingga memenuhi ketersediaan bahan baku serta memberikan keuntungan maksimum?

Coba kita periksa masalah tersebut di atas:

- 1) Memberikan keuntungan maksimum

Persyaratan ini dapat dianggap sebagai tujuan pemecahan masalah.

Apabila  $x$  dan  $y$  masing-masing adalah banyaknya produk A dan produk B yang diproduksi maka tujuan kita adalah memaksimumkan  $10.000 \cdot x + 5000 \cdot y$ .

- 2) Memenuhi ketersediaan bahan baku

Persyaratan ini dapat dianggap sebagai kendala masalah (dari sisi bahan baku).

Apabila  $x$  dan  $y$  masing-masing adalah banyaknya produk A dan produk B yang diproduksi maka kendala bahan bakunya adalah:

$$x + 2y \leq 6$$

$$2x + y \leq 8$$

- 3) Oleh karena banyaknya produk tersebut selalu positif maka kita perlu memberikan penambahan persyaratan:  $x \geq 0$  dan  $y \geq 0$  atau  $x, y \geq 0$ .

Oleh karena itu, masalah tersebut dapat kita nyatakan dalam model matematis sebagai berikut:

Tentukan  $x$  dan  $y$ , yang memenuhi

Maksimumkan  $10.000x + 5000y$

dengan kendala :  $x + 2y \leq 6$

$$2x + y \leq 8.$$

$$x, y \geq 0$$

... (1)

... (2)

... (3)

... (4)



Perhatikan fungsi yang dimaksimumkan (1).

Fungsi tersebut dapat dinyatakan sebagai  $f(x,y) = 10.000x + 5000y$ . Oleh karena fungsi  $f(x,y)$  digunakan sebagai tujuan penyelesaian masalah maka fungsi tersebut disebut dengan fungsi tujuan atau fungsi objektif.

Perhatikan selanjutnya pertaksamaan (2).

Pertidaksamaan tersebut dapat dinyatakan sebagai  $g_1(x,y) \leq 0$ , dengan  $g_1(x,y) = x + 2y - 6$ .

Pertidaksamaan (3) dapat dinyatakan juga sebagai  $g_2(x,y) \leq 0$ , dengan  $g_2(x,y) = 2x + y - 8$ .

Dalam hal ini,  $g_1(x,y)$  dan  $g_2(x,y)$  disebut dengan fungsi kendala.

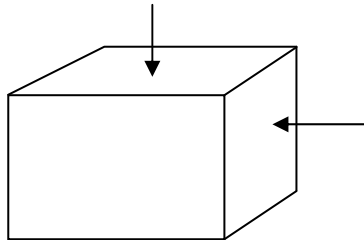
Akhirnya, kita perhatikan (4),  $x, y \geq 0$ .

Kita namakan pertidaksamaan (4) tersebut sebagai kendala kepositifan.

Di dalam menurunkan model matematis di atas, dapatkah Anda memberikan anggapan-anggapan yang diperlukan?

### Contoh 1.3.

Suatu mesin pendingin (AC) digunakan untuk mendinginkan udara suatu ruang berbentuk kotak yang volumenya  $8000 \text{ cm}^3$ .



Gambar 1.2.  
Ruang Berpendingin

Di sini diberikan bahwa laju aliran panas yang masuk melalui permukaan atas sebanyak 1 satuan panas per  $\text{cm}^3$ , melalui permukaan bawah sebanyak 3 satuan panas per  $\text{cm}^3$ , dan melalui permukaan samping sebanyak 2 satuan panas per  $\text{cm}^3$ .

Untuk menghemat energi yang terbuang, kita ingin menentukan dimensi ruang (panjang, lebar, tinggi) yang diharapkan akan meminimumkan panas yang masuk dari luar ruangan.

Coba Anda perhatikan dengan saksama masalah pada Contoh 1.3 di atas.

Untuk luas permukaan (atas, bawah, dan samping) berbeda, banyaknya panas yang berpengaruh ke dalam ruang pun berbeda pula. Jadi, masalahnya adalah bagaimana kita menentukan panjang, lebar, dan tinggi ruang berbentuk kotak tersebut? Oleh karena itu, yang kita jadikan peubah keputusan dalam penurunan masalah tersebut adalah panjang dan lebar (mengapa tinggi tidak dijadikan peubah keputusan?).

### Penurunan Model Matematis:

Kita misalkan bahwa  $x$  adalah panjang kotak dan  $y$  adalah lebar kotak (dalam cm). Oleh karena volumenya adalah  $8000 \text{ cm}^3$  maka tinggi kotak adalah  $\frac{8000}{xy}$  (dalam cm). Dengan demikian, luas permukaan atas dan bawah adalah  $xy$  (dalam  $\text{cm}^2$ ). Luas permukaan samping (kiri, kanan) adalah  $y \cdot \frac{8000}{xy} = \frac{8000}{x}$  (dalam  $\text{cm}^2$ ). Luas permukaan samping (depan, belakang) adalah  $x \cdot \frac{8000}{xy} = \frac{8000}{y}$  (dalam  $\text{cm}^2$ ).

sehingga, total laju aliran panas dari luar ke dalam ruangan adalah:

$$1.xy + 3.xy + 2.(2) \cdot \frac{8000}{x} + 2.(2) \frac{8000}{y} \quad \text{atau} \quad 4xy + \frac{32000}{x} + \frac{32000}{y}$$

Oleh karena ruang tersebut harus ada maka hal itu berhubungan dengan kendala tambahan berupa  $x > 0$  dan  $y > 0$ .

Dengan demikian, model matematis masalah tersebut adalah:

Tentukan  $x$  dan  $y$  yang memenuhi:

$$\text{Minimumkan } f(x,y) = 4xy + \frac{32000}{x} + \frac{32000}{y}$$

$$x, y > 0.$$

Cobalah Anda perhatikan kembali model matematis dari masalah dalam Contoh 1.1, Contoh 1.2, dan Contoh 1.3, yaitu:

a. Tentukan  $x$  dan  $y$ , yang memenuhi:

$$2x + 4y = 50.000$$

$$4x + 3y = 50.000$$

$$x > 0, y > 0$$

- b. Tentukan  $x$  dan  $y$ , yang memenuhi:

Maksimumkan  $10.000x + 5.000y$

dengan kendala  $x + 2y \leq 6$

$$2x + y \leq 8$$

$$x, y \geq 0$$

- c. Tentukan  $x$  dan  $y$ , yang memenuhi:

$$\text{Minimumkan } f(x,y) = 4xy + \frac{32000}{x} + \frac{32000}{y}$$

$$x, y > 0$$

Bandungkan antara uraian masalahnya dengan model matematis yang berhubungan!

Dengan model matematis di atas, masalah yang kita hadapi menjadi lebih sederhana, lebih mudah dipahami dan lebih jelas. Oleh karena itu, model matematis tersebut mempermudah kita dalam menentukan pendekatan penyelesaian maupun metode penyelesaian yang akan digunakan.

Coba Anda perhatikan kembali dengan saksama Contoh 1.1, Contoh 1.2, dan Contoh 1.3!

Model matematis yang diperoleh pada Contoh 1.1 berbeda dengan model matematis pada Contoh 1.2 dan pada Contoh 1.3. Model kuantitatif Contoh 1.2 dan Contoh 1.3 merupakan model dengan tujuan memaksimumkan (atau meminimumkan) fungsi dengan persyaratan tertentu. Model demikian disebut dengan model optimisasi, sedangkan model pada Contoh 1.1 merupakan model sistem persamaan linear.

Model kuantitatif berupa model optimisasi tersebut banyak digunakan dalam Riset Operasional. Oleh karena itu, dalam Modul 1 dan modul-modul selanjutnya model matematis pada Contoh 1.1 tidak menjadi objek Pembahasan. Selanjutnya, dalam modul ini yang disebut dengan model matematis merupakan model optimisasi. Dengan demikian, yang disebut dengan metode matematis merupakan metode yang digunakan dalam menyelesaikan model optimisasi (atau secara umum model riset operasional), seperti yang akan dibahas pada modul-modul selanjutnya.

## B. MODEL OPTIMISASI

Dengan memperhatikan Contoh 1.2 dan Contoh 1.3 di atas, kita dapat menurunkan bentuk umum model masalah optimisasi sebagai berikut:

maks.  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

dengan kendala,

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2$$

.....

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m$$

yang dalam hal ini,  $x_1 \geq 0$ ,

$$x_2 \geq 0,$$

.....

$$x_n \geq 0.$$

Model umum tersebut dapat ditulis secara ringkas sebagai berikut:

maks.  $f(\mathbf{x})$

dengan kendala,

$$g_j(\mathbf{x}) \leq b_j, j = 1, 2, \dots, m$$

yang dalam hal ini,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ , dengan  $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ .

Perhatikan kembali model umum di atas:

1. Fungsi  $f$  disebut dengan fungsi tujuan atau fungsi objektif.
2. maks. $f(\mathbf{x})$  dimaksudkan sebagai memaksimumkan  $f(\mathbf{x})$ .  
 Sesuai dengan keperluan pemecahan masalah dapat disajikan sebagai meminimumkan  $f(\mathbf{x})$  atau min.  $f(\mathbf{x})$ .  
 Dalam hal ini, min.  $f(\mathbf{x})$  = maks.  $-f(\mathbf{x})$ .
3. Sesuai dengan keperluan masalahnya juga tanda pertaksamaan ' $\leq$ ' dalam kendala  $g_j(\mathbf{x}) \leq b_j$ , dapat juga berupa sebagai tanda ' $\geq$ ' atau '=' atau '>' atau pula '<'.

4.  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$  merupakan vektor transpos dari vektor  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$
5.  $n$  adalah banyaknya peubah keputusan,  $m$  adalah banyaknya kendala
6. Kendala  $x_i \geq 0$ , disebut dengan kendala kepositifan.

Secara deskriptif model umum masalah di atas dimaksudkan sebagai berikut:

Carilah peubah keputusan  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$  yang memenuhi kendala  $g_j(\mathbf{x}) \leq b_j$ , serta  $x_i \geq 0$ , serta yang bertujuan memberikan nilai  $f(\mathbf{x})$  sebesar-besarnya (maksimum).

Apabila kita perhatikan kembali model umum masalah tersebut di atas maka kita dapat membuat klasifikasi model optimisasi sebagai berikut.

1. Berdasarkan peninjauan jenis fungsi  $f$  dan  $g$ :
  - a. Apabila fungsi  $f$  dan fungsi  $g$  berupa fungsi linear maka model optimisasi disebut dengan model pemrograman linear.
  - b. Apabila salah satu atau kedua fungsi  $f$  atau fungsi  $g$  berupa fungsi nonlinear maka model optimisasi disebut dengan model pemrograman nonlinear.  
 Lebih spesifik lagi dalam peninjauan ini, apabila fungsi  $f$  berupa fungsi kuadrat dan fungsi  $g$  berupa fungsi linear maka model optimisasi disebut dengan pemrograman kuadrat.
2. Berdasarkan peninjauan ada atau tidaknya kendala:
  - a. Apabila kendala  $g_j(\mathbf{x}) \leq b_j$  tidak ada (atau  $b_j = 0$ ) maka model optimisasi disebut dengan model pemrograman takberkendala.
  - b. Apabila kendala  $g_j(\mathbf{x}) \leq b_j$  ada (atau  $b_j \neq 0$ ) maka model optimisasi disebut dengan model pemrograman berkendala.
3. Berdasarkan peninjauan sifat peubah keputusan  $\mathbf{x}$ :  
 Apabila peubah keputusan  $\mathbf{x}$  merupakan bilangan bulat (atau  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  berupa bilangan bulat) maka model optimisasi disebut dengan pemrograman bilangan bulat atau pemrograman integer.  
 Berdasarkan peninjauan ini, apabila fungsi  $f$  dan  $g$  keduanya merupakan fungsi linear dan peubah keputusan  $\mathbf{x}$  berupa bilangan bulat maka model optimisasi disebut dengan pemrograman linear integer.

*Contoh 1.4.*

Cobalah Anda perhatikan model optimisasi yang diperoleh pada Contoh 1.2 dan Contoh 1.3.

Pada Contoh 1.2:

$$\begin{aligned} &\text{maks. } 10.000x + 5000y \\ &\text{dengan kendala, } x + 2y \leq 6 \\ &\quad 2x + y \leq 8 \\ &\quad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

atau dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} &\text{maks. } 10.000x_1 + 5000x_2. \\ &\text{dengan kendala, } x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ &\quad 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Di sini fungsi tujuan  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = 10.000x_1 + 5000x_2$ , dan terdapat 2 buah fungsi kendala, yaitu  $g_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$  dan  $g_2(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$  dengan ruas kanan pertaksamaan  $b_1 = 6$  dan  $b_2 = 8$ .

Oleh karena baik fungsi  $f$  maupun fungsi  $g_1$  dan  $g_2$  merupakan fungsi linear maka model pada contoh ini disebut dengan model pemrograman linear.

Pada Contoh 1.3:

$$\begin{aligned} &\text{min. } xy + 3xy + 32000/x + 328000/y, \\ &\quad x, y > 0. \end{aligned}$$

atau dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} &\text{min. } x_1x_2 + 3x_1x_2 + 32000/x_1 + 328000/x_2, \\ &\quad x_1, x_2 > 0. \end{aligned}$$

Di sini fungsi tujuan  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1x_2 + 3x_1x_2 + 32000/x_1 + 328000/x_2$ , dan tidak terdapat fungsi kendala. Oleh karena itu, model optimisasi dari Contoh 1.3 tersebut berupa model pemrograman nonlinear takberkendala.

Dalam Buku Materi Pokok Riset Operasional I ini, beberapa jenis model optimisasi tersebut di atas akan menjadi pokok pembahasan.

Anda telah mempelajari beberapa pengertian dasar model matematis. Melalui beberapa contoh sederhana Anda telah mempelajari pula bagaimana

suatu model matematis dari masalah dapat diturunkan. Untuk lebih memahami apa yang telah Anda pelajari, cobalah kerjakan Latihan di bawah ini.



## LATIHAN

---

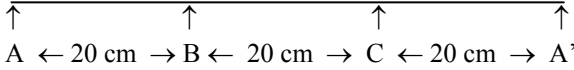
Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

- 1) Diberikan 2 bilangan positif yang jumlahnya 100. Kita ingin menentukan kedua bilangan tersebut yang hasil kalinya maksimum.
  - a) Turunkan model matematis (berupa model optimisasi, tentu saja!) dari masalah tersebut.
  - b) Berikan penjelasan jenis model optimisasi yang diperoleh berdasarkan klasifikasi yang telah diberikan.
- 2) Seorang tukang las mempunyai sejumlah kawat yang panjang standar (baku)nya adalah 3 meter. Dengan bahan kawat tersebut, tukang las itu memperoleh pesanan untuk membuat bangun segitiga sama sisi (panjang sisinya 20 cm) dan bangun bujur sangkar (panjang sisinya 20 cm juga). Perlu diketahui bahwa:
  - a) Untuk membuat satu bangun (bentuk) segitiga sama sisi diperlukan kawat sepanjang  $3 \times 20 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$ .  
Proses pembuatannya adalah sebagai berikut:  
Perhatikan Gambar 1.3a. Sebutlah ujung kiri dan kawat masing-masing adalah titik A dan A', titik B dan C pada kawat dengan jarak A–B, B–C, dan C–A' adalah 20 cm.  
Di titik B dan C kawat ditekuk atau dibengkokkan, ujung kiri A dan ujung kanan dilas sehingga terbentuk bangun segitiga sama sisi (Gambar 1.4a).
  - b) Untuk membuat satu bangun (bentuk) bujur sangkar diperlukan kawat sepanjang  $4 \times 20 \text{ cm} = 80 \text{ cm}$ .

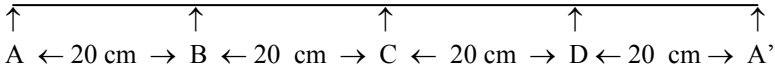
Proses pembuatannya adalah sebagai berikut:

Perhatikan Gambar 1.3b. Sebutlah ujung kiri dan kawat masing-masing adalah titik A dan A', titik B, C, dan D pada kawat dengan jarak A–B, B–C, C–D, dan D–A' adalah 20 cm. Di titik B, C, dan D kawat ditekuk

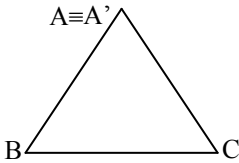
atau dibengkokkan, ujung kiri A dan ujung kanan dilas sehingga terbentuk bangun bujur sangkar (Gambar 1.4a).



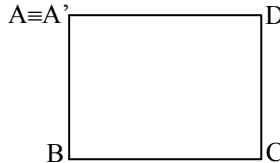
Gambar 1.3a.  
Pembentukan Segitiga Sama Sisi



Gambar 1.3b.  
Pembentukan Bujur Sangkar



Gambar 1.4a.  
Segitiga Sama Sisi yang  
Terbentuk



Gambar 1.4b.  
Bujur Sangkar yang Terbentuk

Perlu diketahui juga bahwa apabila sebuah kawat standar sepanjang 3 m akan digunakan untuk membuat sebuah segitiga sama sisi maka sisa kawatnya adalah  $300 - 60 = 240$  cm. Sisa kawat tersebut dapat digunakan lagi untuk membuat 4 buah bangun segitiga sama sisi lagi. Di sini dia melakukan 4 kali pemotongan dan sisanya adalah 0 cm (tidak ada yang terbuang). Akan tetapi, apabila dengan kawat standar tersebut dia membuat 2 buah segitiga dan 2 buah bujur sangkar maka dia memotong dua kali untuk 2 buah segitiga dan memotong dua kali untuk sebuah bujur sangkar. Di sini, sisa kawatnya adalah  $300 - 2(60) - 2(80) = 20$  cm.

Banyaknya pemesanan bangun segitiga sama sisi dan bujur sangkar masing-masing sebanyak 10 buah dan 20 buah.

Masalah yang dihadapi tukang las tersebut adalah bagaimana dia melakukan pemotongan kawat standar sedemikian sehingga kawat yang



terbuang seminimum mungkin dan banyaknya pemesanan untuk kedua bangun dipenuhi.

- a) Turunkan model matematis masalah tersebut!
- b) Berikan penjelasan jenis model optimisasi yang diperoleh berdasarkan klasifikasi yang telah diberikan!

*Petunjuk Jawab Latihan*

- 1) Misal kedua bilangan yang akan ditentukan adalah  $x_1$  dan  $x_2$ . Kedua bilangan tersebut positif, jadi  $x_1 \geq 0$  dan  $x_2 \geq 0$ . Hasil kali kedua bilangan adalah  $x_1 \cdot x_2$ . Dari informasi yang diberikan, jumlah kedua bilangan adalah 100. Jadi,  $x_1 + x_2 = 100$ .

Dengan demikian, model optimisasi dari masalah di atas adalah:

$$\text{maks. } x_1 \cdot x_2$$

dengan kendala

$$x_1 + x_2 = 100$$

dengan  $x_1 \geq 0$  dan  $x_2 \geq 0$ .

Dapat Anda lihat bahwa fungsi tujuan  $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$  dan terdapat sebuah kendala, yaitu  $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ . Oleh karena fungsi tujuan  $f$  merupakan fungsi nonlinear maka model optimisasi yang diperoleh merupakan model optimisasi nonlinear berkendala.

Dapat ditambahkan bahwa model masalah tersebut dapat dengan mudah dipecahkan, yaitu dengan melakukan substitusi  $x_2 = 100 - x_1$  ke dalam fungsi  $f$ . Hasil substitusi ini merubah  $f$  dari fungsi  $f$  dengan 2 peubah bebas  $x_1$  dan  $x_2$  ke dalam fungsi 1 peubah bebas  $x_1$  sebutlah  $h(x_1)$  seperti berikut ini:

$$h(x_1) = x_1 \cdot (100 - x_1) = -x_1^2 + 100x_1$$

Oleh karena kendala  $x_1 + x_2 = 100$  telah disubstitusikan ke dalam fungsi objektif maka model masalahnya menjadi model optimisasi linear tanpa kendala sebagai berikut:

$$\text{maks. } h(x_1) = -x_1^2 + 100x_1$$

dengan  $x_1 \geq 0$  dan  $x_2 \geq 0$ .

Masalah tersebut adalah sama dengan masalah menentukan titik puncak parabola  $h(x_1)$ , yang dapat diselesaikan dengan mudah menggunakan metode matematis dasar sebagai berikut:

$$h'(x) = -2x_1 + 100 = 0, \text{ memberikan } x_1 = 100/2 = 50.$$

Dapat diperiksa bahwa  $h''(x) = -2$ , yang merupakan indikator bahwa  $x_1 = 50$  merupakan titik maksimum. Selanjutnya  $x_2$  dapat ditentukan dengan mudah, yaitu  $100 - x_1 = 100 - 50 = 50$ .

Dapat Anda periksa kembali bahwa kedua bilangan tersebut jumlahnya adalah 100, dan (memenuhi kendala). Hasil kalinya adalah  $50 \cdot 50 = 2500$ , dapat diperiksa pula bahwa tidak ada pasangan 2 bilangan lain yang jumlahnya 100 dan hasil kalinya lebih besar dari 2500.

- 2) Kita ketahui bahwa panjang standar kawat yang tersedia adalah 3 m, Terdapat 4 alternatif cara pemotongan untuk sebuah kawat standar, yaitu:
- Dibuat untuk sebuah segitiga sama sisi dan 3 buah bujur sangkar.  
Sisa kawat adalah  $300 - 1(60) - 3(80) = 0$  (cm)
  - Dibuat untuk 2 buah segitiga sama sisi dan 2 bujur sangkar.  
Sisa kawat adalah  $300 - 2(60) - 2(80) = 20$  (cm)
  - Dibuat untuk 3 buah segitiga sama sisi dan 1 buah bujur sangkar.  
Sisa kawat adalah  $300 - 3(60) - 1(80) = 40$  (cm).
  - Dibuat untuk 5 buah segitiga sama sisi saja.  
Sisa kawat adalah  $300 - 5(60) = 0$  (cm).

Kita perhatikan bahwa sisa kawat yang terbuang untuk alternatif (2) dan (3) tidak dapat digunakan sama sekali untuk membuat baik segitiga apalagi bujur sangkar.

Banyaknya segitiga sama sisi dan bujur sangkar yang dibutuhkan masing-masing adalah 10 buah dan 20 buah.

Untuk mempermudah penurunan model kuantitatifnya, alternatif-alternatif pemotongan serta kebutuhan setiap bentuk, kita dapat menyatakan dalam Tabel 1.2 di bawah ini.

Tabel 1.2.  
Alternatif Pemotongan dan Kebutuhan

Bangun	Alternatif 1	Alternatif 2	Alternatif 3	Alternatif 4	Kebutuhan
Segitiga sama sisi	1	2	3	5	10 (buah)
Bujur sangkar	3	2	1	0	20 (buah)
Sisa kawat	0 (cm)	20 (cm)	40 (cm)	0 (cm)	

Kita nyatakan:

$x_1$  : banyaknya kawat standar yang dipotong menurut alternatif 1

$x_2$  : banyaknya kawat standar yang dipotong menurut alternatif 2

$x_3$  : banyaknya kawat standar yang dipotong menurut alternatif 3

$x_4$  : banyaknya kawat standar yang dipotong menurut alternatif 4

Dengan menggunakan ketiga alternatif pemotongan tersebut di atas, sisa kawat yang terbuang dapat dinyatakan sebagai:

$$0 x_1 + 20 x_2 + 40 x_3 + 0 x_4$$

Tujuan kita untuk meminimumkan sisa kawat yang terbuang dapat dinyatakan sebagai:

$$\text{minimumkan } 0 x_1 + 20 x_2 + 40 x_3 + 0 x_4$$

Persyaratan yang harus dipenuhi adalah:

Banyaknya segitiga yang dihasilkan harus sama dengan kebutuhan (banyaknya yang dipesan), dapat dinyatakan sebagai:

$$1 x_1 + 2 x_2 + 3 x_3 + 3 x_4 \geq 10$$

Banyaknya bujur sangkar yang dihasilkan harus sama dengan kebutuhan (banyaknya yang dipesan), dapat dinyatakan sebagai:

$$3 x_1 + 2 x_2 + 1 x_3 + 0 x_4 \geq 20$$

Perhatikan bahwa pada kedua persyaratan di atas digunakan tanda ‘ $\geq$ ’, untuk menyatakan bahwa kedua bangun yang dihasilkan paling tidak harus memenuhi banyaknya pemesanan. Dengan perkataan lain, agar pemesanan dipenuhi maka banyaknya kedua bangun yang dihasilkan tidak boleh lebih kecil dari banyaknya pemesanan.

Selanjutnya, dengan mempertimbangkan bahwa banyaknya pemotongan kawat merupakan bilangan bulat positif maka persyaratan tersebut dapat dinyatakan sebagai:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Dengan demikian, model matematis yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$\text{minimumkan } 20x_2 + 40x_3$$

dengan kendala:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \geq 10$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 20$$

dengan

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Terlihat bahwa fungsi tujuan  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 20x_2 + 40x_3$ , fungsi kendala  $g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4$  dan  $g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1 + 2x_2 + x_3$

merupakan fungsi linear. Oleh karena model optimisasi yang diperoleh berupa model pemrograman linear. Akan tetapi, apabila kita mempertimbangkan bahwa peubah-peubah  $x_1, x_2, x_3, x_4$  yang menyatakan banyaknya pemotongan kawat maka keempat peubah tersebut merupakan bilangan bulat positif. Dengan demikian, model optimisasi yang diperoleh dapat diklasifikasikan sebagai model pemrograman linear integer atau secara umum dikatakan sebagai model pemrograman integer.



## RANGKUMAN

---

Anda telah mempelajari bagaimana proses menurunkan model matematis (atau model kuantitatif) dari masalah yang Anda hadapi. Model matematis yang akan Anda pelajari dalam modul riset operasional di sini berupa model optimisasi. Model ini berbentuk mengoptimumkan fungsi tujuan (disebut juga fungsi objektif) yang dapat dilengkapi dengan beberapa fungsi batasan (atau kendala).

Sebelum menurunkan model matematis tersebut, pertama-tama Anda harus menentukan dahulu parameter-parameter dalam masalah. Di antara parameter tersebut manakah yang dijadikan parameter utama dan manakah yang dapat diabaikan. Di antara parameter utama, manakah yang dapat dipertimbangkan menjadi peubah-peubah keputusannya. Selanjutnya, Anda periksa bentuk hubungan matematis antara peubah-peubah yang telah diperoleh. Akhirnya, dengan memeriksa manakah yang menjadi tujuan penyelesaian masalah dan manakah yang menjadi persyaratan atau keterbatasan dalam masalah.

Jika Anda telah mengerjakan semua latihan serta telah memahami semua contoh yang diberikan, Anda dapat mengerjakan Tes Formatif 1 berikut ini.

TES FORMATIF 1

---

**Petunjuk: untuk soal nomor 1) sampai dengan nomor 5)**

- A. Jika (1) dan (2) benar.
  - B. Jika (1) dan (3) benar.
  - C. Jika (2) dan (3) benar.
  - D. Jika (1), (2), dan (3) benar.
- 
- 1) Riset operasional merupakan kumpulan metode yang digunakan dalam penyelesaian masalah yang ....
    - (1) bertujuan mengoptimumkan hasil
    - (2) di dalamnya mengandung keterbatasan sumber daya
    - (3) dapat dioperasionalkan
  
  - 2) Mengoptimumkan hasil dapat berupa ....
    - (1) meminimumkan kerugian
    - (2) memaksimumkan keuntungan
    - (3) mengabaikan masalah keterbatasan sumber daya
  
  - 3) Untuk meminimumkan kerugian maka ....
    - (1) kerugian dinyatakan sebagai fungsi kerugian
    - (2) kerugian dinyatakan sebagai fungsi kendala
    - (3) fungsi tujuannya berupa fungsi kerugian
  
  - 4) Apabila  $x$  : banyaknya uang Ali,  $y$  : banyaknya uang Hasan maka ....
    - (1) jumlah uang Ali dan uang Hasan adalah Rp1.000.000,00 dinyatakan sebagai  $x + y = 1.000.000$
    - (2) jumlah uang Ali dan uang Hasan paling sedikit Rp1.000.000,00 dinyatakan sebagai  $x + y \geq 1.000.000$
    - (3) jumlah uang Ali dan uang Hasan paling banyak Rp1.000.000,00 dinyatakan sebagai  $x + y \leq 1.000.000$
  
  - 5) Apabila  $x$  : keuntungan yang diperoleh suatu toko setiap hari dengan menjual  $x$  buah barang, dan  $f(x) = 2x$  (dalam ribuan rupiah) maka dapat dikatakan bahwa ....
    - (1) keuntungan per hari yang diperoleh tidak tergantung dari banyaknya barang yang terjual
    - (2) semakin banyak barang terjual, semakin banyak pula keuntungannya
    - (3) apabila dalam sehari terjual 100 barang keuntungan per hari adalah Rp200.000,00

**Petunjuk: untuk soal nomor 6) sampai dengan nomor 15) gunakan permasalahan berikut, kemudian pilihlah satu jawaban yang paling tepat!**

Dengan menggunakan kertas karton akan dibuat kotak terbuka di atas, bentuk alas bujur sangkar yang dapat menampung pasir  $256 \text{ dm}^3$ . Tentukan sisi-sisi bujur sangkar dan tinggi kotak sedemikian sehingga luas karton pembentuk kotak adalah minimum!

- 6) Pada masalah di atas, peubah keputusannya adalah ....
- A. volume kotak
  - B. panjang sisi alas dan tinggi kotak yang akan digunakan
  - C. harga sebuah kotak
  - D. banyaknya pasir

Apabila  $x$  : panjang sisi alas kotak (dalam dm)  
 $y$  : tinggi kotak (dalam dm) maka ...

- 7) Luas permukaan kotak yang akan digunakan untuk menampung pasir adalah ....
- A.  $x^2 y$
  - B.  $2x^2 + 4xy$
  - C.  $x^2 + 5xy$
  - D.  $x^2 + 4xy$
- 8) Fungsi tujuan yang sesuai dengan penyelesaian masalah adalah ....
- A.  $f(x,y) = x^2 + 4xy$
  - B.  $f(x,y) = x^2 y$
  - C.  $f(x,y) = 2x^2 + 4xy$
  - D.  $f(x,y) = 256$
- 9) Kendala yang sesuai dengan masalah adalah ....
- A.  $x^2 + 4xy = 0$
  - B.  $x^2 y = 256$
  - C.  $2x^2 + 4xy = 256$
  - D.  $x^2 + 4xy = 256$

- 10) Model matematis dari masalah adalah ....
- |   |  |
|---|--|
| <p>A. <math>\min. f(x,y) = x^2 + 4xy</math><br/>dengan kendala<br/><math>x^2 y &gt; 256</math><br/>dan <math>x, y \geq 0</math></p> | <p>B. <math>\min. f(x,y) = x^2 + 4xy</math><br/>dengan kendala<br/><math>x^2 y &lt; 256</math><br/>dan <math>x, y \geq 0</math></p>              |
| <p>C. <math>\min. f(x,y) = x^2 + 4xy</math><br/>dengan kendala<br/><math>x^2 y = 256</math><br/>dan <math>x, y \geq 0</math></p>    | <p>D. <math>\min. f(x,y) = x^2 + 4xy</math><br/>dengan kendala<br/><math>x^2 y = 256</math><br/>dan <math>x, y</math> bilangan bulat positif</p> |
- 11) Model optimisasi yang diperoleh di atas dapat diklasifikasikan sebagai ....
- Model pemrograman linear
  - Model pemrograman linear integer
  - Model optimisasi tak berkendala
  - Model optimisasi nonlinear
- 12) Model di atas dapat dibawa ke dalam bentuk model optimisasi linear tak berkendala yang berbentuk ....
- $\min. F(x) = x^2 + 256/x$ , dengan  $x, y \geq 0$
  - $\min. f(x, y) = x^2 + 4xy$ , dengan  $x, y \geq 0$
  - $\text{maks. } f(x, y) = x^2 + 4xy - 256$ , dengan  $x, y \geq 0$
  - $\text{maks. } F(x) = x^2 + 256/x$ , dengan  $x, y \geq 0$
- 13) Penyelesaian model optimisasi di atas adalah ....
- volume kotak adalah  $x^2 y = 256$
  - $x = 8, y = 4$
  - panjang sisi alas kotak adalah 8 dm, tinggi kotak adalah 4 dm
  - $x = y = 8$
- 14) Penyelesaian masalah yang kita hadapi adalah ....
- volume kotak adalah  $x^2 y = 256$
  - $x = 8, y = 4$
  - panjang sisi alas kotak adalah 8 dm, tinggi kotak adalah 4 dm
  - $x = y = 8$

- 15) Anggapan (atau asumsi) yang digunakan pada penyelesaian masalah di atas adalah ....
- A. kertas penyambung (pelekat) setiap permukaan kotak diabaikan
  - B. banyaknya lem perekat setiap permukaan kotak diabaikan
  - C. butiran pasir yang akan ditaruh sangat kecil sehingga tumpukan pasir bersifat padat
  - D. jawaban A, B, dan C benar

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali  
80 - 89% = baik  
70 - 79% = cukup  
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.



## KEGIATAN BELAJAR 2

### Pemrograman Linear

Secara umum, dikatakan bahwa pemrograman (linear atau nonlinear) merupakan teknik matematis untuk memilih rencana (atau program) terbaik dari sehimpunan alternatif rencana yang dimungkinkan. Dikatakan terbaik dalam arti memaksimalkan atau meminimumkan fungsi tujuan dengan mempertimbangkan kendala-kendala yang diberikan. Dalam hal fungsi tujuan dan fungsi kendalanya berupa fungsi linear, teknik matematis itu disebut dengan pemrograman linear (atau secara singkat disebut program linear).

Ditinjau dari bentuk model matematis masalahnya, model masalah pemrograman linear merupakan bentuk khusus dari model optimisasi, yang telah Anda pelajari bentuk umumnya pada Kegiatan Belajar 1. Model masalah pemrograman linear merupakan model optimisasi yang fungsi objektif dan fungsi-fungsi kendalanya merupakan fungsi linear.

#### A. GAMBARAN DAN MODEL MATEMATIS MASALAH

Untuk memberi gambaran tentang masalah pemrograman linear, diberikan contoh berikut ini.

##### *Contoh 1.5.*

Sebuah perusahaan roti memproduksi roti manis dan roti asin. Bahan baku yang digunakan di antaranya adalah terigu, mentega dan telur. Setiap roti manis membutuhkan 5 ons terigu, 2 ons mentega, dan 4 butir telur. Setiap roti asin membutuhkan 2 ons terigu, 3 ons mentega, 2 butir telur. Setiap hari perusahaan tersebut hanya menyediakan 150 ons terigu, 100 ons mentega, dan 80 butir telur. Perusahaan roti tersebut dapat menjual seluruh roti yang diproduksi dengan harga jual Rp12.000,00 dari setiap roti manis dan Rp8.000,00 dari setiap roti asin. Perusahaan roti tersebut ingin mengetahui berapa banyak setiap jenis roti harus diproduksi untuk memaksimalkan keuntungan, sesuai dengan persediaan bahan yang ada.

Masalah ini terlebih dahulu dimodelkan secara matematis untuk selanjutnya diselesaikan dengan metode yang sesuai. Seperti telah dijelaskan sebelumnya, untuk menurunkan model matematis dari suatu masalah nyata

kita perlu mendefinisikan dahulu manakah peubah keputusannya. Selanjutnya dibentuk fungsi tujuan, dan jika ada, kendala berupa persamaan atau pertidaksamaan.

Untuk membantu penurunan model matematisnya, informasi pada masalah tersebut dapat disajikan secara lebih jelas dalam Tabel 1.3.

Tabel 1.3.  
Ringkasan Informasi

Produk	Bahan Baku			
	Terigu (ons)	Mentega (ons)	Telur (butir)	Keuntungan/Roti (ribu rupiah)
roti manis	5	2	4	12
roti asin	2	3	2	8
bahan tersedia	150	100	80	

Penurunan model matematis masalah akan dimulai dengan menetapkan manakah peubah keputusan dari masalah. Perusahaan ingin mengetahui berapa banyak masing-masing jenis roti akan diproduksi per hari sehingga kita dapat menyatakan bahwa terdapat 2 buah peubah keputusan, yaitu:

$x_1$  = banyaknya roti manis yang akan diproduksi (per hari)

$x_2$  = banyaknya roti asin yang akan diproduksi (per hari)

Setelah kita menetapkan peubah keputusan, selanjutnya akan dimodelkan fungsi tujuan. Tujuan dari perusahaan adalah memaksimumkan keuntungan. Keuntungan (dalam ribuan rupiah) setiap jenis roti ini berhubungan langsung dengan harga jualnya, yaitu untuk setiap roti manis adalah 12 (dalam ribuan rupiah) dan roti asin 8 (dalam ribu rupiah). Oleh karena itu, keuntungan dari memproduksi sebanyak  $x_1$  roti manis dan  $x_2$  roti asin adalah  $12x_1 + 8x_2$ . Perusahaan roti tersebut ingin memaksimumkan keuntungan sehingga pernyataan tersebut dapat ditulis sebagai

Memaksimumkan  $f(x_1, x_2) = 12x_1 + 8x_2$  (dalam ribuan rupiah).

Di sini yang berperan sebagai fungsi tujuan adalah  $f(x_1, x_2) = 12x_1 + 8x_2$  yang untuk selanjutnya ditulis saja dengan  $f = 12x_1 + 8x_2$ . Dapat Anda lihat bahwa peubah keputusan  $x_1$  dan  $x_2$  tersebut merupakan peubah bebas dari fungsi  $f$ .

Selanjutnya, kita akan menyatakan model matematis dari kendala-kendala masalah. Kendala tersebut berhubungan dengan keterbatasan bahan

baku (sumber daya) yang tersedia. Pada masalah tersebut, bahan bakunya adalah terigu, mentega, dan telur. Untuk memproduksi satu roti manis dibutuhkan 5 ons terigu dan untuk memproduksi satu roti asin dibutuhkan 2 ons terigu sehingga untuk memproduksi sebanyak  $x_1$  roti manis dan  $x_2$  roti asin dibutuhkan  $5x_1 + 2x_2$  ons terigu. Kebutuhan ini tidak boleh melebihi persediaan terigu, yaitu 150 ons. Dengan demikian, kendala untuk terigu dapat dinyatakan sebagai  $5x_1 + 2x_2 \leq 150$ .

Dengan cara yang sama juga akan diperoleh kendala untuk mentega dan telur, yaitu:

$$\text{untuk mentega, } 2x_1 + 3x_2 \leq 100$$

$$\text{untuk telur, } 4x_1 + 2x_2 \leq 80$$

Oleh karena banyaknya roti tidak mungkin negatif maka dibuat kendala tambahan (kepositifan), yaitu:

$$x_1, x_2 \geq 0 .$$

Dengan demikian, formulasi model matematis dari masalah adalah:

$$\text{maks. } f = 12x_1 + 8x_2 \quad \dots (5)$$

d.s

$$5x_1 + 2x_2 \leq 150 \quad \dots (6)$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 100 \quad \dots (7)$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 80 \quad \dots (8)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \dots (9)$$

(untuk selanjutnya memaksimumkan ditulis singkat dengan **maks**, dengan syarat atau dengan kendala ditulis secara singkat dengan **d.s**, seperti yang dituliskan di atas).

Masalah dalam pemrograman linear adalah bagaimana kita menentukan peubah-peubah keputusan (yaitu  $x_1, x_2$ ) yang mengoptimumkan fungsi tujuan (yaitu  $f$  pada (5)), memenuhi kendala utama masalah (yaitu pertaksamaan 6, 7, dan 8), serta memenuhi pula kendala kepositifan (yaitu 9). Di sini dikatakan mengoptimumkan, karena berhubungan dengan memaksimumkan atau meminimumkan dengan mempertimbangkan kendala atau persyaratan yang diberikan.

**Bentuk Umum Model Matematis**

Suatu masalah pemrograman linear dapat diformulasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 &\text{Menciptimumkan } f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
 &\text{dengan syarat: } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
 &\qquad\qquad\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
 &\qquad\qquad\qquad \dots \\
 &\qquad\qquad\qquad \dots \\
 &\qquad\qquad\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
 &\qquad\qquad\qquad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0
 \end{aligned}$$

atau secara matriks dapat ditulis menjadi:

$$\text{Opt. } f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \qquad \dots \text{ (10)}$$

$$\text{d.s } \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j \leq b_j \quad ; i = 1, 2, \dots, m. \qquad \dots \text{ (11)}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \qquad \dots \text{ (12)}$$

Dalam hal ini,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah peubah keputusan,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  adalah fungsi tujuan,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  adalah koefisien dari peubah keputusan pada fungsi tujuan,  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$  adalah koefisien dari peubah keputusan pada kendala ke- $i$ , dan  $b_i$  adalah konstanta (bagian kanan) dari kendala ke- $i$ .

Dapat kita perhatikan bahwa (11) dan (12) merupakan kendala masalah, yang dalam hal ini (11) disebut dengan kendala utama, sedang (12) disebut dengan kendala kepositifan.

**B. METODE PENYELESAIAN**

Menyelesaikan masalah pemrograman linear adalah menentukan nilai dari peubah keputusan yang mengoptimumkan fungsi tujuan dan memenuhi seluruh kendala yang ada. Nilai peubah keputusan yang demikian itu disebut dengan **penyelesaian** (atau solusi) **optimum** dari masalah pemrograman linear. Penyelesaian optimum dari pemrograman linear tidak harus tunggal, tetapi nilai fungsi tujuannya tunggal.

Metode yang biasanya digunakan untuk mencari penyelesaian dari masalah pemrograman linear adalah metode simpleks. Namun, apabila pada masalah hanya terdapat dua buah peubah keputusan, penyelesaiannya dapat dilakukan secara geometris. Cara penentuan penyelesaian secara geometris tersebut dikenal dengan metode grafik, seperti yang akan dibahas berikut ini.

### 1. Metode Grafik

Metode grafik ini dilakukan melalui penyajian geometris menggunakan sistem koordinat kartesius dari fungsi-fungsi kendalanya, kemudian dilakukan interpretasi berdasarkan fungsi tujuannya. Metode grafik terdiri dari 2 langkah, yaitu menentukan daerah layak dan mencari titik optimum sesuai dengan fungsi tujuannya. Daerah layak adalah himpunan titik-titik pada sistem koordinat kartesius yang memenuhi seluruh kendala yang ada, sedangkan titik optimum adalah titik pada daerah layak yang mengoptimalkan fungsi tujuan.

#### *Contoh 1.6.*

Berikut diberikan langkah-langkah metode grafik untuk menyelesaikan masalah yang diberikan pada Contoh 1.5.

**Langkah 1.** Gambarlah masing-masing garis fungsi kendala pada sistem koordinat kartesius, kemudian arsirlah daerah layak, yaitu daerah yang memenuhi semua kendala.

Pada Contoh 1.5 tersebut terdapat empat buah kendala, yaitu (6) sampai dengan (9).

Kita mulai dengan menggambarkan kendala (6) berupa  $5x_1 + 2x_2 \leq 150$

Kita gambarkan dahulu garis dengan persamaan:

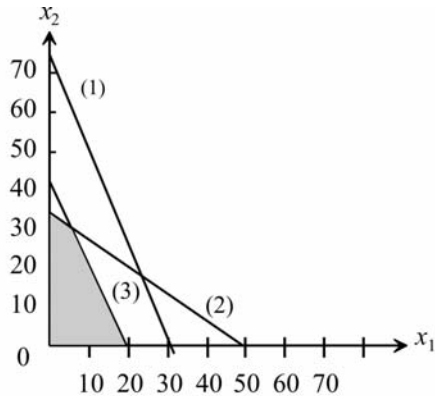
$$5x_1 + 2x_2 = 150. \quad \dots (6')$$

Garis tersebut digambarkan dengan menempatkan  $x_1$  pada sumbu horizontal (sumbu- $x_1$ ) dan  $x_2$  pada sumbu vertikal (sumbu- $x_2$ ). Sebuah garis dapat digambarkan dengan menghubungkan dua titik yang dilaluinya. Cara yang paling sederhana adalah mengambil titik perpotongan garis dengan masing-masing garis sumbu. Garis pada (6') akan berpotongan dengan sumbu- $x_1$  apabila  $x_2 = 0$ . Nilai perpotongan dengan sumbu  $x_1$  diperoleh

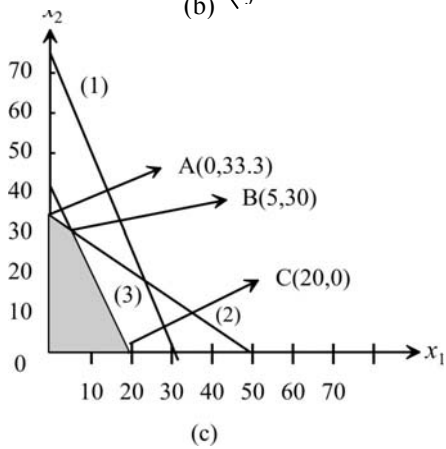
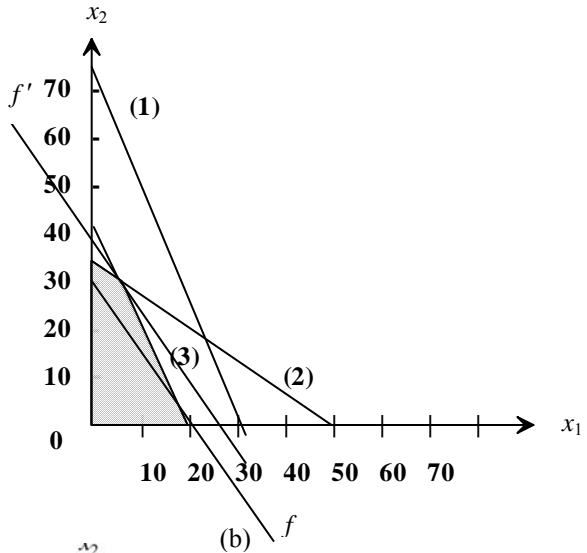
dengan melakukan substitusi  $x_2 = 0$  ke (6'), yaitu  $5x_1 + 2(0) = 150$  sehingga  $5x_1 = 150$  atau  $x_1 = 30$ . Jadi, garis (6') memotong sumbu- $x_1$  di titik (30, 0).

Garis ini berpotongan dengan sumbu- $x_2$  apabila  $x_1 = 0$ . Substitusikan ke (6') diperoleh  $5(0) + 2x_2 = 150$  atau  $x_2 = 75$ . Jadi, garis (6') memotong sumbu- $x_1$  di titik (0, 75). Gambar dari garis (6') dinyatakan dengan (1) pada Gambar 1.5.

Untuk mengetahui daerah yang memenuhi kendala pertama (6), ambil sembarang titik di salah satu sisi garis tersebut. Untuk mudahnya, ambil titik (0, 0) yang berada di sisi kiri garis (lihat Gambar 1.5a). Uji cobakan titik ini ke kendala (6). Diperoleh bahwa  $5(0) + 2(0) \leq 150$  atau  $0 \leq 150$ . Ternyata titik (0, 0) yang berada di sebelah kiri dari garis kendala (6'), memenuhi kendala tersebut sehingga semua titik-titik yang ada di daerah sebelah kiri dari garis (6'), memenuhi kendala (6).



(a)



Gambar 1.5.  
Daerah Layak untuk Contoh 1.6

Cara yang sama dilakukan terhadap kendala kedua (7) dan ketiga (8) dengan menggambar garis:

$$2x_1 + 3x_2 = 100 \quad \dots (7')$$

$$4x_1 + 2x_2 = 80 \quad \dots (8')$$

Garis (7') memotong sumbu- $x_1$  pada titik (50, 0) dan sumbu- $x_2$  pada titik (0, 33.3). Garis ini dinyatakan dengan (2) pada Gambar 1.5a. Dengan mengujicobakan titik (0, 0) diketahui bahwa daerah yang memenuhi kendala (7) adalah daerah di sebelah kiri dari garis (2).

Garis (8') memotong sumbu- $x_1$  pada titik (20, 0) dan sumbu- $x_2$  pada titik (0, 40). Garis ini dinyatakan dengan (3) pada Gambar 1.5. Dengan mengujicobakan titik (0, 0) dapat diketahui bahwa daerah yang memenuhi kendala (8) adalah daerah di sebelah kiri dari garis (3).

Untuk kendala kepositifan (9), yaitu  $x_1, x_2 \geq 0$  menyatakan bahwa hanya titik-titik pada kuadran pertama dari sistem koordinat kartesius yang memenuhi sehingga secara keseluruhan, daerah layak yang merupakan himpunan titik-titik yang memenuhi seluruh kendala (6)-(9) adalah daerah irisan dari semua daerah yang memenuhi kendala, yaitu daerah yang diarsir pada Gambar 5a. Dengan demikian, langkah 1 sudah selesai. Akan dilanjutkan dengan langkah 2.

**Langkah 2.** Cari titik optimum yang ditentukan melalui perhitungan nilai fungsi tujuan.

Terdapat dua cara untuk menemukan titik optimum, yaitu dengan memanfaatkan garis selidik dan dengan uji coba.

Pertama-tama akan dibahas tentang garis selidik, dan langsung diterapkan pada Contoh 1.5. Garis selidik adalah garis yang dibentuk oleh fungsi tujuan. Apabila sebuah garis digeser sejajar maka yang berubah adalah konstanta sisi kanan persamaannya. Garis selidik tersebut akan digeser sejauh mungkin ke kanan (jika tujuan memaksimumkan) atau ke kiri (jika tujuan meminimumkan), sampai garis tersebut menyinggung daerah layak. Titik di mana garis selidik menyinggung daerah layak adalah titik penyelesaian optimum (atau secara singkat disebut titik optimum) dari masalah pemrograman linear.

Kita ketahui bahwa tujuan penyelesaian dari Contoh 1.5 adalah memaksimumkan  $f = 12x_1 + 8x_2$  (dalam ribu rupiah).

Persamaan (5) dapat ditulis menjadi  $x_2 = -\frac{12}{8}x_1 + \frac{f}{8}$ . Oleh karena nilai  $f$  belum diketahui maka (5) merupakan himpunan garis-garis sejajar dengan kemiringan  $-\frac{12}{8}$ . Salah satu dari himpunan garis ini dapat digambar dengan



mengambil nilai  $f$  sembarang. Misalkan diambil nilai  $f = 240$  maka (5) menjadi:

$$12x_1 + 8x_2 = 240 \quad \dots (5')$$

Garis (5') tersebut digambarkan dengan terlebih dahulu mencari titik perpotongannya dengan masing-masing sumbu. Garis (5') berpotongan dengan sumbu- $x_1$  pada titik (20, 0) dan sumbu- $x_2$  pada titik (0, 30). Garis ini dinyatakan dengan garis putus-putus  $f$  pada Gambar 1.5b. Apabila garis  $f$  digeser sejajar ke kanan maka nilai  $f$  akan bertambah, sebaliknya jika digeser sejajar ke kiri maka nilai  $f$  akan berkurang. Oleh karena tujuan dari masalah tersebut adalah memaksimumkan maka garis  $f$  akan digeser sejauh mungkin ke kanan sampai garis tersebut menyinggung daerah layak (dinyatakan dengan garis  $f'$  pada Gambar 1.5b). Garis ini menyinggung daerah layak pada titik perpotongan garis (2) dengan garis (3) pada Gambar 5. Titik ini dapat dicari dengan menyelesaikan sistem persamaan yang dibentuk oleh (7') dan (8') untuk  $x_1$  dan  $x_2$ , sebagai berikut.

$$2x_1 + 3x_2 = 100 \quad \dots (7')$$

$$4x_1 + 2x_2 = 80 \quad \dots (8')$$

Kalikan (7') dengan 2 untuk memperoleh

$$4x_1 + 6x_2 = 200 \quad \dots (7'')$$

Lalu kurangkan (7'') dengan (8') untuk memperoleh  $4x_2 = 120$  atau  $x_2 = 30$ . Substitusikan nilai  $x_2$  ini ke (7') memberikan  $2x_1 + 3(30) = 100$  atau  $x_1 = 5$ .

Dengan demikian, penyelesaian masalah dari Contoh 1.5 adalah  $x_1 = 5$  dan  $x_2 = 30$  dengan  $f = 12(5) + 8(30) = 300$  (ribu rupiah).

Cara lain untuk menentukan titik optimum adalah dengan uji coba. Cara uji coba ini didasarkan pada suatu teorema dasar (di sini tidak dibuktikan) yang mengatakan bahwa **titik optimum dari suatu masalah pemrograman linear terletak di titik sudut** (atau titik puncak) **daerah layak** sehingga untuk mencari titik optimum, cukup dengan menentukan titik-titik sudut dari daerah layak, kemudian menghitung nilai  $f$  di titik-titik tersebut. Titik dengan nilai  $f$  terbesar (jika tujuannya memaksimumkan) atau  $f$  terkecil (jika tujuannya meminimumkan) merupakan titik optimum.

Kembali ke Contoh 1.6 di atas. Pada Gambar 1.5c. terlihat terdapat 4 titik sudut dari daerah layak, yaitu titik O, A, B, dan C. Titik O adalah titik pusat sumbu dengan koordinat (0, 0). Titik A adalah perpotongan garis (3)

dengan sumbu- $x_2$  dengan koordinat  $(0, 33.3)$ . Titik B adalah perpotongan garis (2) dan (3), koordinatnya sudah dihitung pada penjelasan garis selidik yaitu  $(5, 30)$ . Titik C adalah perpotongan garis (2) dengan sumbu- $x_1$ , dengan koordinat  $(20, 0)$ . Nilai  $f$  pada titik-titik tersebut diberikan pada Tabel 1.4 berikut ini:

Tabel 1.4.  
Nilai  $f$  pada Titik Sudut

Titik	$f$
O $(0, 0)$	$12(0) + 8(0) = 0$
A $(0, 33.3)$	$12(0) + 8(33.3) = 266.6$
B $(5, 30)$	$12(5) + 8(30) = 300 \leftarrow$ maks
C $(20, 0)$	$12(20) + 8(0) = 240$

Oleh karena tujuannya adalah memaksimalkan maka penyelesaian optimumnya adalah terletak pada titik dengan nilai  $f$  terbesar, yaitu titik B. Kita dapat memeriksa bahwa penyelesaian yang diperoleh adalah sama dengan yang diperoleh menggunakan garis selidik, yaitu  $x_1 = 5$  dan  $x_2 = 30$  dengan  $f = 12(5) + 8(30) = 300$ .

Dengan demikian, interpretasi penyelesaian optimum yang diperoleh di atas dari masalah yang diberikan pada Contoh 1.5 adalah sebagai berikut:

Agar supaya perusahaan roti tersebut memperoleh keuntungan maksimum maka perusahaan tersebut harus memproduksi 5 roti manis dan 30 roti asin. Dalam hal ini pendapatan yang diharapkan diterima adalah 300 ribu rupiah per hari.

Apabila pada suatu masalah pemrograman linear terdapat lebih dari dua peubah keputusan maka interpretasi geometris akan sulit dilakukan. Untuk itu, digunakan metode aljabar yang disajikan dalam bentuk tabel. Metode ini disebut dengan metode simpleks, yang akan dibahas berikut ini.

## 2. Metode Simpleks

Metode simpleks adalah metode untuk menyelesaikan masalah pemrograman linear berdasarkan manipulasi aljabar yang disajikan dalam

bentuk tabel (disebut dengan tabel simpleks). Metode ini dikembangkan oleh George B Dantzig pada tahun 1947. Langkah-langkah metode simpleks mirip dengan menentukan barisan titik-titik ekstrim dari daerah layak yang berakhir pada titik ekstrim optimal.

Sebelum membahas langkah-langkah metode simpleks, terlebih dahulu dibahas cara mengubah suatu masalah pemrograman linear ke bentuk baku (standar), yang akan digunakan pada metode simpleks.

a. *Mengubah masalah pemrograman linear ke bentuk baku*

Bentuk baku adalah bentuk dari masalah pemrograman linear dengan seluruh kendalanya dinyatakan sebagai persamaan dengan cara sebagai berikut.

- 1) Kendala dengan bentuk  $\leq$  diubah menjadi bentuk persamaan dengan menambahkan peubah *slack* (kekurangan) di sisi kiri dari tanda  $=$ . Peubah kekurangan ini akan menyimpan kekurangan dari sisi kiri terhadap sisi kanan dari tanda  $\leq$ .
- 2) Kendala dengan bentuk  $\geq$  diubah menjadi bentuk persamaan dengan mengurangi peubah *surplus* (kelebihan) di sisi kiri tanda  $=$ . Peubah kelebihan ini akan menyimpan kelebihan dari sisi kiri terhadap sisi kanan tanda  $\geq$ .

Nilai dari peubah kekurangan maupun peubah kelebihan tersebut harus positif atau nol (disebut juga tidak negatif). Koefisien dari peubah kekurangan dan kelebihan pada fungsi tujuan adalah 0.

Untuk lebih memperjelas bentuk baku dan cara mengubah masalah pemrograman linear ke bentuk baku, diberikan contoh-contoh berikut ini.

*Contoh 1.7.* Bentuk baku dari model masalah pemrograman linear dari Contoh 1.5 adalah sebagai berikut.

$$\text{maks. } f = 12x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

d.s

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 150$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 100$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_5 = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Perhatikan bahwa peubah baru  $x_3, x_4, x_5$  merupakan peubah kekurangan. Dengan adanya peubah baru tersebut, kendala kepositifan menjadi:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$ . Demikian pula fungsi objektif  $f$  menjadi:  $f = 12x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$ , seperti yang kita lihat di atas.

*Contoh 1.8.* Diberikan model masalah pemrograman linear seperti berikut:

$$\text{maks. } f = 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4$$

d.s

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 25 \quad \dots (13)$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 15 \quad \dots (14)$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 20 \quad \dots (15)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad \dots (16)$$

Bentuk baku dari model masalah di atas adalah sebagai berikut:

$$\text{maks. } f = 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

d.s

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 25 \quad \dots (13')$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_6 = 15 \quad \dots (14')$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 20 \quad \dots (15)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \quad \dots (16')$$

Perhatikan bahwa kendala (13) yang berbentuk  $\leq$ , diubah ke bentuk persamaan dengan menambahkan peubah kekurangan (atau peubah *slack*)  $x_5$ . Kemudian kendala (14) yang berbentuk  $\geq$ , diubah ke bentuk persamaan melalui pengurangan dengan peubah kelebihan (atau peubah *surplus*)  $x_6$ . Kendala (5), karena sudah berbentuk persamaan maka tidak perlu diubah.

Dengan ditamahnya peubah baru  $x_5, x_6$  tentu saja akan mengubah kendala kepositifan menjadi  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$ . Demikian pula fungsi tujuan  $f$  menjadi:

$$f = 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 + 0x_5 + 0x_6.$$

*b. Peubah basis awal dan penyelesaian basis awal*

Perhatikan kembali bentuk baku dalam Contoh 1.7 di atas. Semua kendala utama (13, 14, dan 15) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , seperti yang disajikan berikut ini.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \mathbf{x} & \mathbf{b} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 150 \\ 100 \\ 80 \end{bmatrix} \\
 \hline
 & & \\
 \leftarrow I_3 \rightarrow & &
 \end{array} \quad \dots (17)$$

Perhatikan bahwa matriks A di atas di dalamnya mengandung matriks satuan  $I_3$ . Elemen satuan pada matriks tersebut berhubungan dengan peubah  $x_3, x_4,$  dan  $x_5$ . Dalam hal ini, peubah-peubah  $x_3, x_4,$  dan  $x_5$  tersebut dianggap sebagai peubah basis. Peubah lainnya, yaitu  $x_1$  dan  $x_2$  dianggap sebagai peubah bukan-basis.

Apabila kita perhatikan sistem persamaan (17) maka sistem tersebut mempunyai takhingga banyaknya penyelesaian. Salah satu penyelesaiannya adalah  $x_3 = 150, x_4 = 100, x_5 = 80,$  dan  $x_1 = x_2 = 0$ . Penyelesaian ini diperoleh dengan menyamakan peubah basisnya dengan nilai ruas kanan  $\mathbf{b}$  dan menyamakan peubah bukan basisnya dengan 0. Penyelesaian ini disebut kemudian penyelesaian basis.

Selanjutnya, dalam penggunaan awal metode simpleks, penyelesaian tersebut disebut kemudian dengan penyelesaian basis awal.

Bagaimana dengan bentuk baku yang terdapat pada Contoh 1.8, apakah di dalamnya terdapat penyelesaian basis juga? Jawabnya tentu saja ‘Tidak’, karena matriks A yang terbentuk tidak mengandung matriks satuan di dalamnya.

Apabila kita tuliskan matriks A dari kendala pada Contoh 1.8 tersebut.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa dalam matriks A di atas tidak terkandung matriks satuan  $I_3$ .

Agar di dalamnya terdapat matriks satuan maka kita perlu menambahkan peubah  $x_7$  pada (14’) dan peubah  $x_8$  pada (15’). Dalam hal ini, peubah baru  $x_7$

dan  $x_8$  tersebut sering disebut sebagai peubah semu (*artificial*). Dengan ditambahkannya peubah semu tersebut maka kita perlu menambahkan pada fungsi objektif  $f$  sesuai dengan tujuan penyelesaian masalah (pemaksimalan atau meminimuman). Hal ini akan dijelaskan kemudian.

Dengan demikian, bentuk model masalah pemrograman linearnya dapat dinyatakan sebagai bentuk baku yang mengandung penyelesaian awal, sebutlah model masalah (18), sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{maks. } f &= 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7 - Mx_8 \\ \text{d.s} & \dots (18) \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 &= 25 & (13'') \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_6 + x_7 &= 15 & (14'') \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_8 &= 20 & (15'') \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 &\geq 0 & (16'') \end{aligned}$$

Dapat Anda perhatikan di dalam sistem persamaan pada kendala di atas, sekarang sudah mengandung matriks satuan (berhubungan dengan peubah basis  $x_5$ ,  $x_7$ , dan  $x_8$ ). Selanjutnya, kita dapat menetapkan bahwa penyelesaian basisnya adalah  $x_5 = 25$ ,  $x_7 = 15$ ,  $x_8 = 20$ , dan  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = 0$ .

Anda perhatikan fungsi objektif  $f$  di atas!

$f$  tersebut kita kurangi  $f$  dengan  $Mx_7$ , juga dikurangi dengan  $Mx_8$ . Dalam hal ini,  $x_7$  dan  $x_8$  berupa peubah semu (atau peubah *artificial*), yang masing-masing terdapat pada persamaan kendala (14'') dan (15''). Di sini  $M$  merupakan konstanta yang nilainya cukup besar. Dalam hal tujuan kita adalah meminimuman maka fungsi objektif  $f$  ditambahkan dengan  $Mx_k$ , dengan  $x_k$  berupa peubah semu.

### c. Bentuk baku dan bentuk baku yang mengandung basis awal

Dalam penggunaan metode simpleks, sering dikatakan bahwa yang disebut dengan bentuk baku masalah adalah bentuk masalah yang semua kendala utamanya berbentuk persamaan (seperti yang dijelaskan sebelumnya) dan di dalamnya sudah mengandung basis awal. Tentu saja dengan bentuk fungsi objektif yang telah ditambahkan atau dikurangi dengan peubah kelebihan, kekurangan ataupun peubah semu.

Jadi, bentuk model masalah dalam Contoh 1.7 merupakan bentuk baku dari bentuk masalah dalam Contoh 1.5. Selanjutnya, bentuk model masalah (18) merupakan bentuk baku dari bentuk masalah dalam Contoh 1.8.

*d. Langkah-langkah metode simpleks*

Secara umum langkah-langkah dari metode simpleks adalah sebagai berikut.

**Langkah 1.** Ubah masalah ke bentuk baku

Kita periksa apakah di dalam sistem persamaannya sudah mengandung  $m$  buah peubah basis.

Jika belum maka kita tambahkan peubah semu, selanjutnya sesuaikan koefisien pada fungsi objektifnya.

Pilih  $m$  peubah ( $m$  adalah banyak kendala) yang membentuk peubah basis awal layak.

Nyatakan tabel awal simpleks dan tentukan penyelesaian basis awal.

**Langkah 2.** Evaluasi keoptimuman

Jika telah dicapai keadaan optimum maka peubah basis yang sedang berlaku merupakan peubah basis optimum sehingga penyelesaian optimumnya sudah diperoleh (berhenti).

Jika tidak, (ke langkah 3)

**Langkah 3.** Pilih peubah bukan basis  $x_m$  yang akan masuk menjadi peubah basis. Kemudian kita pilih peubah basis  $x_k$  yang akan dikeluarkan.

**Langkah 4.** Lakukan operasi pivot untuk mengeluarkan  $x_k$  dari basis dan memasukkan  $x_m$  ke dalam basis.

Kembali ke langkah 3.

Untuk membantu dalam pengaturan langkah-langkah metode simpleks digunakan tabel (disebut kemudian dengan tabel simpleks) yang susunan umumnya sebagai berikut.

Tabel 1.5.  
Tabel Simpleks Umum

			Baris koefisien fungsi tujuan						
$i$	$c_B$	$x_B$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{n-1}$	$x_n$	$b_i$	$\theta_i$
1	peubah basis dan koefisien fungsi obyektif							Nilai dari peubah basis	Kolom evaluasi: Peubah mana yang akan keluar basis ?
2									
⋮			Koefisien fungsi kendala						
$m$									
$m+1$			$z_j$						
$m+2$	$c_j - z_j$	Baris evaluasi: Peubah yang akan masuk basis?							

Pada Tabel 1.5 tersebut  $c_B$  adalah kolom yang berisi koefisien dari peubah basis pada fungsi tujuan,  $x_B$  adalah kolom yang berisi peubah basis,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah peubah kendala,  $b_i$  adalah konstanta (bagian kanan) dari kendala ke- $i$ ,  $c_i$  adalah koefisien peubah  $x_j$  pada fungsi tujuan, sedangkan  $z_j$  dan  $\theta_i$  akan dijelaskan kemudian.

Untuk memahami metode simpleks tersebut dan penggunaannya dalam tabel simpleks di atas, penyelesaian secara rinci akan diberikan sekaligus pada contoh yang diberikan berikut ini.

*Contoh 1.9.* Kita tentukan penyelesaian optimum dari masalah yang diberikan pada Contoh 1.5, dengan menggunakan metode simpleks. Untuk memudahkan, kita nyatakan kembali bentuk model masalah pada tersebut, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{maks. } f &= 12x_1 + 8x_2 \\ \text{d.s } 5x_1 + 2x_2 &\leq 150 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 100 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 80 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Kita lakukan langkah demi langkah dalam metode simpleks:



**Langkah 1. Ubah masalah ke dalam bentuk baku**

Seperti yang telah diberikan pada Contoh 1.7, bentuk bakunya adalah:

$$\text{maks. } f = 12x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

d.s

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 150$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 100$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_5 = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Seperti yang telah dijelaskan pada Contoh 1.7, bentuk baku masalah di atas sudah dapat diberikan penyelesaian basis awal, yaitu:

$$x_3 = 150, x_4 = 100, x_5 = 80, \text{ dan } x_1 = x_2 = 0.$$

Kita buat tabel simpleks awal sebagai berikut:

Tabel 1.6.  
Tabel Awal

		maks	12	8	0	0	0		
<i>i</i>	$c_B$	$x_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b_i$	$\theta$
1	0	$x_3$	5	2	1	0	0	150	30
2	0	$x_4$	2	3	0	1	0	100	50
3	0	$x_5$	4	2	0	0	1	80	20→
4	$z_j$		0	0	0	0	0	0	
5	$c_j - z_j$		12	8	0	0	0	↑	
			↑					<i>f</i>	

Perhatikan Tabel 1.6:

Elemen baris pertama tabel (sebelah kanan ‘maks’) merupakan koefisien fungsi objektif, yaitu:

$$12 \quad 8 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Elemen pada baris  $i = 1, 2,$  dan  $3,$  kolom di bawah  $x_1, \dots, x_5,$  dan  $b_i,$  merupakan koefisien sistem persamaan kendala yang diberikan.

Pada kolom di bawah  $x_B$  di isikan berturut ke bawah adalah  $x_3, x_4, x_5,$  yaitu peubah basis yang sedang berlaku.

Pada kolom di bawah  $c_B$  di isikan berturut ke bawah adalah 0, 0, 0, yaitu koefisien pada fungsi objektif dari peubah basis yang sedang berlaku. Kolom ini berhubungan dengan kolom di bawah  $x_B$ .

Bagaimana dengan pengisian baris  $i = 4$  (yaitu  $z_j$ ) dan  $i = 5$  (yaitu  $c_j - z_j$ )?

Pada baris  $i = 4$ , dalam hal ini untuk kolom  $j$  merupakan  $z_j = \sum_{i=1}^m c_{Bi} a_{ij}$ ,

$j = 1, 2, \dots, n$ .

Pada Tabel 1.6,

$$z_1 = \sum_{i=1}^3 c_{Bi} a_{i1} = c_{B1} a_{11} + c_{B2} a_{21} + c_{B3} a_{31} = 0(5) + 0(2) + 0(4) = 0.$$

$$z_2 = \sum_{i=1}^3 c_{Bi} a_{i2} = c_{B1} a_{12} + c_{B2} a_{22} + c_{B3} a_{32} = 0(2) + 0(3) + 0(2) = 0.$$

.....

$$z_5 = \sum_{i=1}^3 c_{Bi} a_{i5} = c_{B1} a_{15} + c_{B2} a_{25} + c_{B3} a_{35} = 0(0) + 0(0) + 0(1) = 0.$$

Khusus untuk  $j = m+1$ , nilai yang diperoleh merupakan nilai fungsi objektif (sesuai dengan nilai peubah basis yang sedang berlaku).

Pada tabel atas,  $f = \sum_{i=1}^3 c_{Bi} b_i = 0(150) + 0(100) + 0(80) = 0$

Pada  $i = 5$ , ini merupakan elemen untuk  $c_j - z_j$ , ini merupakan pengurangan elemen dari baris pertama (koefisien fungsi objektif) dan elemen baris  $i=4$ .

Pada tabel di atas,

$$c_1 - z_1 = 12 - 0 = 12, c_2 - z_2 = 8 - 0 = 8, \dots, c_5 - z_5 = 0 - 0 = 0$$

### Langkah 2. (iterasi pertama) Evaluasi keoptimuman

Kita perhatikan baris evaluasi  $c_j - z_j$ , yaitu baris  $i = 5$

Dalam hal pemaksimalan, apabila  $c_j - z_j \leq 0$ , untuk semua  $j$  dikatakan bahwa keadaan optimum telah tercapai. Dalam hal meminimuman, keadaan optimum tercapai apabila  $c_j - z_j \geq 0$ , untuk semua  $j$ .

Apabila kita perhatikan tabel awal di atas, keadaan optimum belum tercapai, karena  $c_1 - z_1 = 12$ , dan  $c_2 - z_2 = 8$ .

**Langkah 3.** Pemilihan peubah bukan basis yang akan dimasukkan ke dalam basis.

Kita pilih  $j$  dengan  $c_j - z_j$  terbesar, dalam hal ini  $c_1 - z_1 = 12$ .  $j=1$  tersebut berhubungan kolom  $x_1$ . Jadi, peubah bukan basis  $x_1$  akan dimasukkan ke dalam basis. Kita sebut kolom yang berhubungan dengan peubah yang akan dimasukkan sebagai kolom pivot. Di sini, kolom pertama merupakan kolom pivot.

Pemilihan peubah basis yang akan dikeluarkan:

Hal ini dilakukan dengan bantuan kolom tambahan (yaitu kolom  $\theta_i$ ) yang diletakkan pada kolom paling kanan tabel. Dalam hal ini,  $\theta_i = \frac{b_i}{a_{ij^*}}$  (untuk  $a_{ij^*} > 0$ ), dengan  $j^*$  merupakan kolom yang berhubungan dengan peubah bukan basis yang akan dimasukkan.

Kita pilih peubah basis yang akan dikeluarkan, yaitu peubah yang berhubungan dengan baris  $i^*$  dengan  $\theta_{i^*} = \min [\theta_i]$ . Baris  $i^*$  tersebut disebut dengan baris pivot.

Pada tabel di atas, oleh karena  $x_1$  merupakan peubah yang akan dimasukkan ke basis maka di sini  $j^*=1$ .

$$\text{Jadi, } \theta_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{150}{5} = 30, \quad \theta_2 = \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{100}{2} = 50, \quad \text{dan}$$

$$\theta_3 = \frac{b_3}{a_{31}} = \frac{80}{4} = 20.$$

Nilai  $\theta$  terkecil adalah  $\theta_3$  sehingga peubah yang akan keluar dari basis adalah peubah pada baris ketiga di kolom  $x_B$ , yaitu  $x_5$ . Dalam hal ini, baris ketiga merupakan baris pivot.

Elemen pivotnya adalah perpotongan kolom pivot dengan baris pivot, yaitu  $a_{31} = 4$ .

**Langkah 4.** Lakukan operasi pivot untuk mengeluarkan  $x_5$  dari basis digantikan oleh  $x_1$ .

Maksud dari operasi pivot adalah serangkaian operasi baris terhadap matriks yang bertujuan agar:

- 1) elemen pivot  $a_{pq}$  bernilai 1,
- 2) elemen lain pada kolom pivot  $q$  bernilai 0.

Di sini elemen pivotnya, yaitu  $a_{31} = 4$ . Agar  $a_{31}$  menjadi 1, dilakukan operasi baris sebagai berikut.

- 1) Elemen-elemen pada baris  $i = 3$  kita kalikan dengan  $\frac{1}{4}$ .

Kita lihat baris  $i = 3$  (lama) berturut-turut adalah:

$$4 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 80$$

Elemen baris 3(baru) = elemen baris 3(lama)  $\times \frac{1}{4} =$

$$\frac{1}{4}(4 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 80) =$$

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad 20$$

- 2) Agar  $a_{11} = 0$  maka dilakukan operasi baris sebagai berikut

Elemen pada baris 1 (baru) = elemen baris 1(lama)  $- 5$ [elemen baris 3 (baru)]

$$\begin{array}{r} 5 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 150 \\ 5(1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad 20) \\ \hline 0 \quad -\frac{1}{2} \quad 1 \quad 0 \quad -\frac{5}{4} \quad 50 \end{array}$$

Elemen pada baris 2 (baru) = elemen baris 2(lama)  $- 2$  [elemen baris 3 (baru)]

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 100 \\ 2(1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad 20) \\ \hline 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \quad 60 \end{array}$$

Hasil yang diperoleh dari operasi-operasi baris di atas dimasukkan ke dalam Tabel 1.7 berikut ini.

Tabel 1.7.  
Hasil dari Iterasi Pertama

		maks.	12	8	0	0	0		
$i$	$c_B$	$x_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b_i$	$\theta$
1	0	$x_3$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{5}{4}$	50	-
2	0	$x_4$	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	60	30→
3	12	$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	20	40
4	$z_j$		12	6	0	0	3	240	
5	$c_j - z_j$		0	2	0	0	-3		

↑

Pengisian kolom  $c_B$ ,  $x_B$ , dilakukan dengan cara seperti yang dijelaskan sebelumnya. Demikian pula perhitungan baris  $z_j$  dan  $c_j - z_j$  dihitung seperti sebelumnya.

Di sini,  $z_1 = 0(0) + 0(0) + 12(1) = 12$ ,  $z_2 = 0(-\frac{1}{2}) + 0(2) + 12(\frac{1}{2}) = 0$ , ...,  $z_5 = 0(-\frac{5}{4}) + 0(-\frac{1}{2}) + 12(\frac{1}{4}) = 3$ , dan  $f = 0(50) + 0(60) + 12(20) = 240$ . Demikian pula,  $c_1 - z_1 = 12 - 12 = 0$ ,  $c_2 - z_2 = 8 - 6 = 2$ , ...

**Langkah 2. (iterasi kedua)** Evaluasi keoptimuman

Kita perhatikan baris  $c_j - z_j$  pada Tabel 1.7 di atas. Oleh karena masih terdapat  $j$  di mana  $c_j - z_j > 0$ , yaitu untuk  $j = 2$ ,  $c_2 - z_2 = 2 > 0$  maka keoptimuman belum tercapai.

**Langkah 3.** Pemilihan peubah bukan basis yang akan dimasukkan ke dalam basis

Dapat kita lihat dari tabel bahwa  $x_2$  akan dimasukkan ke dalam basis. Dari perhitungan  $\theta_i$  kita peroleh bahwa  $\theta_1 = -$  (atau tidak dihitung, karena  $a_{12}$  negatif),  $\theta_2 = \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{60}{2} = 30$  dan  $\theta_3 = \frac{b_3}{a_{32}} = \frac{20}{\frac{1}{2}} = 40$ . Nilai  $\theta_i$  yang minimum adalah  $\theta_2$ , ini berhubungan dengan peubah yang akan keluar dari basis, yaitu  $x_4$ .

**Langkah 4.** Kita lakukan operasi pivot untuk mengeluarkan  $x_4$  dari basis diganti dengan  $x_2$

Kita lakukan operasi baris untuk menjadikan elemen pivot  $a_{22} = 1$  dan elemen lain pada kolom yang sama (yaitu  $a_{12}$  dan  $a_{32}$ ) menjadi 0, dengan cara sebagai berikut:

- 1) Elemen baris  $i=2$  (baru) = elemen baris  $i=2$ (lama) dikalikan dengan  $\frac{1}{2}$
- 2) Elemen baris  $i=1$  (baru) = elemen baris  $i=1$ (lama)  $- (-\frac{1}{2})$ [elemen baris 2(baru)]
- 3) Elemen baris  $i=3$  (baru) = elemen baris  $i=3$  (lama)  $-\frac{1}{2}$  [elemen baris 2(baru)]

Tabel baru yang diperoleh adalah sebagai berikut.

Tabel 1.8.  
Hasil Iterasi Kedua

		maks	12	8	0	0	0		
$i$	$c_B$	$x_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b_i$	$\theta$
1	0	$x_3$	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{11}{8}$	65	
2	8	$x_2$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	30	
3	12	$x_1$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	5	
4	$z_j$		12	8	0	1	$\frac{5}{2}$	300	
5	$c_j - z_j$		0	0	0	-1	$-\frac{5}{2}$		

**Langkah 2 (iterasi ketiga).** Evaluasi ke optimuman

Dapat dilihat pada Tabel 1.8 di atas,  $c_j - z_j \leq 0$ , untuk semua  $j$ , dengan demikian maka keadaan optimum telah tercapai. Penyelesaian optimumnya adalah:

$$x_1^* = 5, x_2^* = 30, x_3^* = 65, x_4^* = 0, x_5^* = 0, \text{ dengan } f = 300.$$

Ini sama dengan yang diperoleh dengan metode grafik.

Seperti telah disebutkan pada penjelasan metode grafik, penyelesaian masalah perencanaan produksi dari perusahaan roti adalah memproduksi 5 roti manis dan 30 roti asin. Dengan diproduksinya kedua jenis roti

sebanyak tersebut, diharapkan memberikan keuntungan sebanyak 300 ribu rupiah per hari.

Namun, perhatikan kembali penyelesaian yang diperoleh dengan metode simpleks, yaitu terdapat juga  $x_3^* = 65$ ,  $x_4^* = 0$ ,  $x_5^* = 0$ . Oleh karena  $x_3$  adalah peubah kekurangan dari kendala pertama, yaitu kendala tepung terigu maka ini berarti bahwa terdapat 65 ons tepung terigu yang tidak digunakan. Oleh karena  $x_4^* = 0$  dan  $x_5^* = 0$ , berarti seluruh mentega dan telur yang ada digunakan. Dengan memproduksi 5 roti manis dan 30 roti asin, setiap hari akan tersisa sebanyak 65 ons tepung terigu.

Berikut ini diberikan contoh penerapan metode simpleks untuk masalah pemrograman linear dengan tujuan meminimumkan dengan kendala-kendalanya berupa kendala dari ketiga jenis, yaitu  $\leq$ ,  $\geq$ , dan  $=$ .

*Contoh 1.10.* Akan ditentukan penyelesaian dari masalah pemrograman linear berikut:

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & f = 4x_1 + 5x_2 && \dots (18) \\ \text{d.s} \quad & 3x_1 + x_2 \leq 27 && \dots (19) \\ & x_1 + x_2 = 12 && \dots (20) \\ & 6x_1 + 4x_2 \geq 60 && \dots (21) \\ & x_1, x_2 \geq 0 && \dots (22) \end{aligned}$$

**Langkah 1.** Ubah masalah ke dalam bentuk baku

Kendala pertama berbentuk  $\leq$  sehingga untuk menjadi persamaan perlu ditambahkan peubah kekurangan  $x_3$  pada sisi kiri tanda  $=$ . Kendala kedua sudah dalam bentuk persamaan. Kendala ketiga berbentuk  $\geq$  sehingga perlu dikurangi dengan peubah kelebihan  $x_4$  pada sisi kiri tanda  $=$ . Nilai dari  $x_3$  dan  $x_4$  tidak boleh negatif dan koefisien dari masing-masing pada fungsi tujuan adalah 0.

Dengan demikian, bentuk baku masalah di atas adalah:

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & f = 4x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 && \dots (18') \\ \text{d.s} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 = 27 && \dots (19') \\ & x_1 + x_2 = 12 && \dots (20') \\ & 6x_1 + 4x_2 - x_4 = 60 && \dots (21') \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 && \dots (22') \end{aligned}$$

Dapat Anda lihat bahwa pada bentuk baku di atas, hanya terdapat sebuah peubah basis (yaitu  $x_4$ ), jadi masih diperlukan 2 buah peubah basis lagi. Untuk keperluan ini kita tambahkan peubah semu (*artificial*)  $x_5$  dan  $x_6$  pada

persamaan kedua dan ketiga. Oleh karena tujuannya adalah meminimumkan maka koefisien dari kedua peubah semu  $M$ . Apabila tujuannya adalah memaksimumkan maka koefisiennya adalah  $-M$ , dengan  $M$  menyatakan suatu bilangan yang sangat besar.

Dengan demikian, masalah kita di atas menjadi:

$$\text{min. } f = 4x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5 + Mx_6 \quad \dots (18'')$$

$$\text{d.s } 3x_1 + x_2 + x_3 = 27 \quad \dots (19'')$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 12 \quad \dots (20'')$$

$$6x_1 + 4x_2 - x_4 + x_6 = 60 \quad \dots (21'')$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \quad \dots (22'')$$

Dapat Anda lihat bahwa pada bentuk terakhir di atas, peubah basis (awal)nya adalah  $x_3, x_5,$  dan  $x_6$ . Peubah yang bukan basis, yaitu  $x_1$  dan  $x_2$ . Dalam hal ini, penyelesaian awalnya adalah:

$$x_3 = 27, x_5 = 12, x_6 = 60, x_1 = x_2 = 0, \text{ dengan } f = 0$$

Selanjutnya, dibuat tabel awal seperti yang diberikan oleh Tabel 1.9 di bawah ini.

Tabel 1.9.  
Tabel Awal

min.			4	5	0	0	$M$	$M$			
$i$	$c_B$	$x_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b_j$	$\theta_i$	
1	0	$x_3$	3	1	1	0	0	0	27	9 →	keluar
2	$M$	$x_5$	1	1	0	0	1	0	12	12	
3	$M$	$x_6$	6	4	0	-1	0	1	60	10	
4		$z_j$	$7M$	$5M$	0	$-M$	$M$	$M$	$72M$		
5		$c_j - z_j$	$4-7M$	$5-5M$	0	$M$	0	0			

↑ masuk (paling negatif)

Elemen-elemen pada baris  $i = 4$  (yaitu berhubungan dengan  $z_j$ ) dan  $i = 5$  (berhubungan dengan  $c_j - z_j$ ), ditentukan seperti pada contoh sebelumnya, hanya di sini melibatkan konstanta  $M$  (bilangan yang besar).



**Langkah 2. (iterasi 1) Evaluasi keoptimuman**

Tujuan masalahnya adalah meminimumkan maka keadaan optimum tercapai bilamana  $c_j - z_j \geq 0$ , untuk semua  $j$ . Jika belum tercapai (masih terdapat  $c_j - z_j$  yang negatif) maka peubah dengan nilai  $c_j - z_j$  paling negatif, dipilih sebagai peubah yang akan masuk basis. Pada Tabel 1.9 terlihat bahwa  $c_1 - z_1$  dan  $c_2 - z_2$  negatif sehingga keadaan optimal belum tercapai.

**Langkah 3** . Kita pilih  $x_1$  yang akan masuk basis (kolom  $x_1$  menjadi kolom pivot).

Kita tentukan  $\min [\theta_i] = \min [9, 12, 10] = 9$ , ini berhubungan dengan  $i = 1$ , yang menunjukkan bahwa  $x_3$  akan dikeluarkan dari basis. Dengan demikian maka  $a_{11} = 3$  menjadi elemen pivot.

**Langkah 4**. Lakukan operasi pivot, untuk mengeluarkan  $x_3$  dan memasukkan  $x_1$ .

Lakukan operasi baris untuk menjadikan  $a_{11} = 1$  (dalam hal tetap) dan menjadikan  $a_{21} = a_{31} = 0$ . Selanjutnya, pada baris  $i=1$ , kolom  $x_B$  kita gantikan  $x_3$  dengan  $x_1$  dan kita berikan koefisien  $x_1$  pada kolom  $c_B$  yaitu 4. Kemudian kita hitung elemen pada baris  $z_j$  dan baris  $c_j - z_j$ .

Tabel baru yang diperoleh adalah sebagai berikut.

Tabel 1.10.  
Hasil Iterasi 1

min.		4	5	0	0	M	M			
$i$	$c_B$	$x_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b_j$	$\theta_i$
1	4	$x_1$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	9	27
2	M	$x_5$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	1	3	$\frac{9}{2}$
3	M	$x_6$	0	2	-2	-1	0	0	6	3
4	$z_j$		4	$\frac{4+8M}{3}$	$\frac{4-7M}{3}$	-M	M	M	$54+9M$	
5	$c_j - z_j$		0	$\frac{11-8M}{3}$	$\frac{-4+7M}{3}$	M	0	0		

→ keluar

↑ masuk basis (paling negatif)

**Langkah 2 (iterasi kedua)**. Dapat Anda lihat melalui baris  $c_j - z_j$  bahwa keadaan optimum belum tercapai.

**Langkah 3.** Oleh karena  $c_2 - z_2$  satu-satunya yang negatif maka untuk selanjutnya  $x_2$  akan masuk basis (di sini kolom  $x_2$  menjadi kolom pivot). Hitung  $\theta_i$ . Ternyata nilai  $\theta_i$  yang minimum adalah  $\theta_3$  sehingga peubah yang akan keluar dari basis adalah  $x_6$ . Di sini baris ke-3 menjadi baris pivot dan  $a_{32} = 2$  merupakan elemen pivot.

**Langkah 4.** Kita lakukan operasi baris untuk memasukan  $x_2$  ke basis dan mengeluarkan  $x_6$  dari basis.

Tabel baru yang diperoleh merupakan Tabel 1.11 seperti diberikan di bawah ini.

Tabel 1.11.  
Hasil Iterasi Kedua

min.		4	5	0	0	M	M			
i	c <sub>B</sub>	x <sub>B</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	b <sub>j</sub>	θ <sub>i</sub>
1	4	x <sub>1</sub>	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	8	54
2	M	x <sub>5</sub>	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	1	3
3	5	x <sub>2</sub>	0	1	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	-
z <sub>j</sub>			4	5	$\frac{-7+M}{3}$	$\frac{-11+2M}{6}$	M	$\frac{11-2M}{6}$	47+M	
c <sub>j</sub> - z <sub>j</sub>			0	0	$\frac{7-M}{3}$	$\frac{11-2M}{6}$	0	$\frac{-11+4M}{6}$		

keluar  
→

↑ masuk basis (paling negatif)

**Langkah 2.** (iterasi ketiga). Dapat kita lihat pada baris  $c_j - z_j$ , nilai  $c_4 - z_4$  masih negatif. Jadi, keadaan optimum masih belum tercapai.

**Langkah 3.**  $x_4$  akan kita masukan ke basis (kolom  $x_4$  menjadi kolom pivot).

Kita hitung  $\theta_i$ .  $\theta_3$  tidak dihitung karena  $a_{34}$  negatif. Ternyata nilai  $\theta_i$  yang minimum adalah  $\theta_2$  sehingga peubah yang akan dikeluarkan dari basis adalah  $x_5$ . Baris  $x_5$  (baris ke-3) menjadi baris pivot dan  $a_{24} = \frac{1}{3}$  menjadi elemen pivot.

**Langkah 4.** Kita lakukan operasi pivot untuk mengeluarkan  $x_5$  untuk digantikan dengan  $x_2$ .

Hasil operasi pivot yang dilakukan diberikan dalam Tabel 1.12 di bawah ini.

Tabel 1.12.  
Hasil Operasi Ketiga (Optimum)

min.			4	5	0	0	$M$	$M$		
$i$	$c_B$	$x_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b_j$	$\theta_i$
1	4	$x_1$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{15}{2}$	
2	0	$x_4$	0	0	1	1	3	-1	3	
3	5	$x_2$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{9}{2}$	
$z_j$			4	5	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{11}{2}$	0	$\frac{105}{2}$	
$c_j - z_j$			0	0	$\frac{1}{2}$	0	$M - \frac{11}{2}$	$M$		

**Langkah 2.** (iterasi ketiga)

Dapat kita lihat bahwa untuk semua  $j$ ,  $c_j - z_j \geq 0$ . Ini berarti bahwa keadaan optimum telah tercapai.

Dengan demikian, penyelesaian optimumnya adalah  $x_1^* = \frac{15}{2}$ ,  $x_2^* = \frac{9}{2}$ ,  $x_3^* = 0$ ,  $x_4^* = 3$ ,  $x_5^* = 0$ , dan  $x_6^* = 0$ , dengan  $f = \frac{105}{2}$ .

**Pertimbangan praktis:**

Pada Tabel 1.11, oleh karena peubah semu  $x_5$  sudah dikeluarkan dari basis maka kita tidak perlu lagi menghitung kolom  $x_5$ . Dengan perkataan lain, kolom  $x_5$  dapat dihapuskan saja karena tidak mungkin peubah semu tersebut akan menjadi peubah basis lagi (mengapa?). Jadi, pada Tabel 1.12, juga kita dapat menghapuskan kolom  $x_5$  dan  $x_6$ . Hal ini akan dapat mengurangi banyaknya perhitungan yang dilakukan.

*e. Keadaan khusus*

Dalam menyelesaikan model masalah pemrograman linear, kadang-kadang kita menjumpai keadaan khusus, yaitu (1) terdapatnya lebih dari satu penyelesaian optimum, (2) terdapatnya penyelesaian yang tak terbatas, dan (3) tidak terdapatnya penyelesaian layak.

## 1) Lebih dari satu penyelesaian optimum

Dalam hal ini, masalah pemrograman linear mempunyai lebih dari satu titik optimum, tetapi semua titik tersebut memberikan nilai fungsi objektif yang sama. Di sini dikatakan bahwa suatu titik optimum merupakan titik optimum alternatif dari titik optimum yang lain.

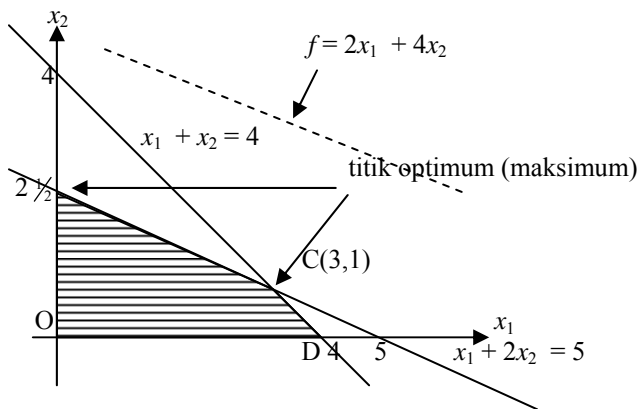
Dalam model masalah program linear dengan 2 peubah keputusan, keadaan tersebut di atas dapat lebih mudah dijelaskan dengan menggunakan grafik. Keadaan terdapatnya lebih dari satu titik optimum tersebut terjadi apabila garis-garis selidik (yang dibentuk oleh fungsi objektif) sejajar dengan salah satu garis yang dibentuk oleh salah satu persyaratan yang diberikan.

Akan tetapi, apabila model masalah program linearnya mempunyai 3 buah apalagi lebih dari 3 buah peubah bebas, kita sulit untuk mengetahui kondisi terdapatnya lebih dari satu titik optimum melalui gambar grafiknya. Dalam hal ini, kita hanya dapat mengetahui terjadinya lebih dari satu titik optimum melalui tabel simpleksnya.

*Contoh 1.11.* Diberikan model masalah program linear sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \text{maks } f &= 2x_1 + 4x_2. \\ \text{d.s} & \qquad \qquad \qquad \dots (23) \\ x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Oleh karena masalah tersebut hanya mempunyai 2 buah peubah bebas maka kita dapat menggambarkan grafik daerah penyelesaiannya, seperti yang diberikan oleh Gambar 1.6 berikut ini:



Gambar 1.6.  
Takhingga Penyelesaian,  $f(0, 2 \frac{1}{2}) = f(3,1) = 10$

Anda dapat menentukan dengan mudah bahwa titik perpotongan antara  $x_1 + 2x_2 = 5$  dan  $x_1 + x_2 = 4$  adalah titik C(3,1). Kita lihat bahwa daerah penyelesaiannya (atau daerah layakannya) adalah bidang O(0,0), B(0, 2 1/2), C(3,1), dan D(4,0).

Dapat Anda periksa bahwa titik B dan titik C memberikan nilai fungsi objektif optimum, yaitu  $f = 10$ . Dikatakan bahwa titik B dan titik C merupakan titik optimum.

Kita dapat memeriksanya lebih lanjut bahwa semua titik pada ruas garis BC selalu memberikan nilai fungsi objektif yang sama ( $f = 10$ ). Dengan perkataan lain, keadaan tersebut menunjukkan bahwa masalah (23) di atas mempunyai takhingga buah penyelesaian optimum.

Kemudian, dapat kita dapat memeriksanya pula bahwa grafik fungsi objektif  $f = 2x_1 + 4x_2$  untuk setiap nilai  $f$  (garis selidik) selalu sejajar garis persyaratan  $x_1 + 2x_2 = 5$ . Jadi, akan terdapat satu garis selidik yang berimpit dengan  $x_1 + 2x_2 = 5$ .

Apabila kita menggunakan metode simpleks, bagaimana kita dapat mengetahui keadaan tersebut di atas melalui tabel simpleks yang terbentuk?

Dapat Anda periksa bahwa tabel optimum yang diperoleh adalah sebagai berikut:

Tabel 1.13.  
Tabel Optimum

maks.			2	4	0	0	
$i$	$\mathbf{c}_B$	$\mathbf{x}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\mathbf{b}$
1	4	$x_2$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
2	0	$x_4$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
3	$z_j$		2	4	2	0	10
4	$c_j - z_j$		0	0	-2	0	

Dapat kita lihat pada tabel di atas,  $c_j - z_j \leq 0$ , untuk  $j = 1, 2, 3, 4$ . Ini menunjukkan keadaan optimum telah tercapai. Dalam hal ini, penyelesaian optimumnya adalah  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{5}{2}$ , dan  $x_3 = x_4 = 0$ , dengan nilai fungsi objektifnya  $f = 10$ . Penyelesaian tersebut pada Gambar 1.6 berhubungan dengan titik B(0,  $2\frac{1}{2}$ ).

Coba perhatikan lagi Tabel 1.13.

Kita lihat bahwa  $c_1 - z_1 = 0$  dan  $x_1$  yang merupakan peubah keputusan yang bukan peubah basis. Marilah kita coba memeriksanya apa yang akan terjadi apabila kita masukkan  $x_1$  ke dalam basis. Dengan memasukkan  $x_1$  ke dalam basis, kita hitung  $\min \theta = \min [5, 2] = 2$ . Ini berarti bahwa  $x_4$  akan dikeluarkan dari basis.

Setelah dilakukan operasi pivot, diperoleh Tabel 1.14 berikut ini.

Tabel 1.14.  
Tabel Optimum Alternatif

maks			2	4	0	0	
$i$	$\mathbf{c}_B$	$\mathbf{x}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\mathbf{b}$
1	4	$x_2$	0	1	1	-1	1
2	2	$x_1$	1	0	-1	2	3
3	$z_j$		2	4	2	0	10
4	$c_j - z_j$		0	0	-2	0	

Dapat kita periksa bahwa tabel di atas merupakan tabel optimum juga. Di sini, penyelesaian optimumnya adalah  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 1$ , dan  $x_3 = x_4 = 0$ , dengan nilai fungsi objektifnya  $f = 10$  (sama seperti sebelumnya). Penyelesaian ini pada Gambar 1.6 berhubungan dengan titik C(3, 1).

Terdapatnya lebih dari sebuah penyelesaian optimum tersebut menunjukkan bahwa masalah program linear (1) di atas mempunyai takhingga buah titik yang memberikan nilai fungsi objektif yang sama.

Jadi, dengan menggunakan metode simpleks:

Misal, kita telah memperoleh tabel optimum. Apabila terdapat  $j$  dengan  $c_j - z_j = 0$  dan  $x_j$  merupakan peubah keputusan yang bukan peubah basis, dan ternyata pemasukan  $x_j$  ke dalam basis tidak merubah nilai fungsi objektifnya maka masalah pemrograman linear yang diberikan mempunyai takhingga banyaknya penyelesaian optimum.

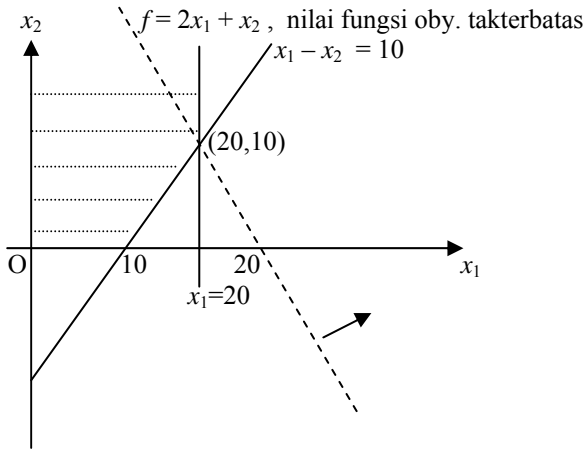
2) Penyelesaian tak terbatas

Dalam penyelesaian model masalah pemrograman linear, nilai dari satu atau beberapa peubah keputusan dapat meningkat secara tak terbatas tanpa melanggar kendala yang diberikan. Hal ini berarti ruang penyelesaiannya berupa ruang takterbatas untuk paling sedikit satu arah. Akibatnya, nilai fungsi objektifnya dapat naik (hal maksimisasi) atau turun (hal minimisasi) secara takterbatas pula. Dapat dikatakan hal tersebut merupakan keadaan dengan ruang penyelesaian maupun nilai ‘optimum’ nya disebut takterbatas. Jenis penyelesaian ini sebenarnya disebut juga dengan penyelesaian takhingga. Akan tetapi, untuk membedakan dengan keadaan dengan takhingga banyaknya penyelesaian, dalam modul ini kita gunakan sebutan penyelesaian takterbatas.

*Contoh 1.12.* Diberikan model masalah pemrograman linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{maks. } f &= 2x_1 + x_2. \\ \text{d.s} & \qquad \qquad \qquad \dots (24) \\ x_1 - x_2 &\leq 10 \qquad \dots (i) \\ 2x_1 &\leq 40 \qquad \dots (ii) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \qquad \dots (iii) \end{aligned}$$

Gambar 1.7 berikut ini menyatakan daerah penyelesaiannya dan garis selidik yang dibentuk oleh fungsi objektif  $f$ .



Gambar 1.7.  
Daerah Penyelesaian Takterbatas

Bidang yang diarsir merupakan daerah penyelesaian dari masalah (24). Dapat kita lihat bahwa daerah penyelesaian tersebut merupakan daerah yang tidak terbatas (di atas). Cobalah kita perhatikan persyaratan (i). Pertaksamaan  $x_1 - x_2 \leq 10$  tersebut, untuk  $x_2$  (positif) berapa pun besarnya asalkan  $x_1 < 20$  akan selalu memenuhi sistem pertaksamaan (i), (ii), dan (iii). Ini menunjukkan bahwa fungsi objektif  $f$  bernilai takterbatas atau dikatakan bahwa masalah (24) mempunyai penyelesaian takterbatas.

Dengan menggunakan metode simpleks, bagaimana kita mengenali keadaan tersebut di atas dari tabel simpleksnya?

Anda dapat memeriksanya bahwa pada suatu iterasi perhitungan diperoleh tabel sebagai berikut:

Tabel 1.15

		maks	2	1	0	0	
$i$	$c_B$	$x_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
1	2	$x_1$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	20
2	1	$x_2$	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	10
3	$z_j$		2	1	-1	$\frac{3}{2}$	30
4	$c_j - z_j$		0	0	1	$-\frac{3}{2}$	



Kita lihat bahwa Tabel 1.15 belum merupakan tabel optimum. Perhatikan bahwa  $c_3 - z_3 = 1 > 0$ . Di sini kita akan memasukkan  $x_3$  ke dalam basis. Akan tetapi, kita tidak dapat memilih peubah basis mana yang akan dikeluarkan. Hal ini karena elemen-elemen  $a_{i3}$  (elemen di kolom di bawah  $x_3$ ), semuanya  $\leq 0$ . Ini menandakan bahwa penyelesaian model masalah (24) adalah takterbatas.

Jadi, apabila digunakan metode simpleks, kita dapat mengenali atau mendeteksi ketakterbatasan penyelesaiannya sebagai berikut:

Jika pada suatu iterasi terjadi keadaan  $a_{ik} \leq 0$  untuk semua  $i$ , dengan  $x_k$  merupakan peubah bukan basis yang mempunyai kemungkinan untuk dimasukkan ke dalam basis maka masalah pemrograman linear mempunyai penyelesaian tidak terbatas.

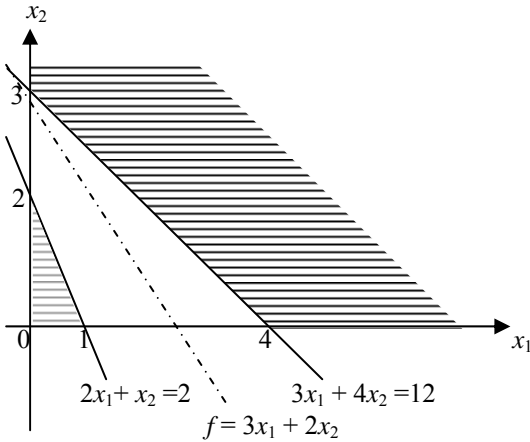
3) Tidak ada penyelesaian layak

Keadaan ini terjadi apabila daerah penyelesaiannya merupakan himpunan hampa. Hal ini tak akan terjadi bila semua kendala berjenis pertaksamaan ' $\leq$ ' karena akan selalu memberikan daerah layak. Akan tetapi apabila terdapat persyaratan berjenis lain ('=' atau ' $\geq$ ') maka harus digunakan peubah semu (*artificial*). Jika persyaratannya tidak dapat dipenuhi secara simultan, masalah program linear yang diberikan dikatakan tidak mempunyai penyelesaian atau mempunyai penyelesaian tak layak.

*Contoh 1.13.* Diberikan masalah pemrograman linear sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \text{maks. } f &= 3x_1 + 2x_2 && \dots (25) \\ \text{d.s} &&& \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2 && \dots (i) \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 12 && \dots (ii) \\ x_1, x_2 &\geq 0 && \end{aligned}$$

Kita perhatikan Gambar 1.8 berikut ini.



Gambar 1.8.  
Daerah Penyelesaian Hampa

Dari Gambar 1.8 dapat kita lihat bahwa daerah yang memenuhi kedua persyaratan merupakan himpunan hampa. Apabila kita gunakan metode simpleks, dapatkah kita mengenali ataupun mendeteksi keadaan tidak adanya penyelesaian layak tersebut melalui tabel simpleksnya?

Kita nyatakan bentuk baku dari (25), kemudian kita menambahkan peubah semu  $x_5$  pada (ii) dalam tabel simpleks awal sebagai berikut:

Tabel 1.16.  
Tabel Awal

			-5	-3	0	0	-M		
<i>i</i>	<b>c<sub>b</sub></b>	<b>x<sub>b</sub></b>	<i>x</i> <sub>1</sub>	<i>x</i> <sub>2</sub>	<i>x</i> <sub>3</sub>	<i>x</i> <sub>4</sub>	<i>x</i> <sub>5</sub>	<b>b<sub>j</sub></b>	<b>θ<sub>i</sub></b>
1	0	<i>x</i> <sub>3</sub>	2	1	1	0	0	2	1/2 →
2	-M	<i>x</i> <sub>5</sub>	3	4	0	-1	1	12	12/3
	<i>z<sub>j</sub></i>		-M	-4M	0	M	-M	-12M	
	<i>c<sub>j</sub> - z<sub>j</sub></i>		3+3M	2+4M	0	-M	0		

↑

Dapat kita lihat bahwa  $x_2$  akan dimasukkan ke dalam basis menggantikan  $x_3$ .

Setelah dilakukan operasi pivot diperoleh Tabel 1.17 berikut ini.

Tabel 1.17.  
Tabel Selanjutnya

			-5	-3	0	0	-M	
$i$	$c_b$	$x_b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b_j$
1	2	$x_2$	2	1	1	0	0	2
2	-M	$x_5$	-5	0	-4	-1	1	4
$z_j$			4+5M	2	2+4M	M	-M	4-4M
$c_j - z_j$			-1-5M	0	-2-4M	0	0	

Dapat Anda lihat bahwa Tabel 1.17 sudah berupa tabel optimum. Akan tetapi peubah semu (yang bernilai positif)  $x_5$  masih berupa peubah basis. Kita tidak dapat mengeluarkannya menjadi peubah bukan-basis. Di sini dikatakan bahwa penyelesaiannya merupakan penyelesaian semu, yaitu:

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_5 = 4.$$

Ini menunjukkan bahwa daerah penyelesaiannya merupakan daerah tidak layak. Dengan perkataan lain, masalah program linear (25) tidak mempunyai penyelesaian layak.

Jadi, kita dapat mengenali keadaan tidak adanya penyelesaian layak sebagai berikut:

Jika pada suatu iterasi telah diperoleh tabel optimum, akan tetapi di dalam himpunan peubah basisnya mengandung peubah semu maka masalah pemrograman linear dikatakan tidak mempunyai penyelesaian layak.

Di samping ketiga jenis keadaan khusus di atas, masih terdapat lagi keadaan khusus lain walaupun jarang terjadi. Keadaan ini dikenal dengan keadaan terjadinya kemerosotan nilai (*degeneracy*). Hal ini terjadi apabila operasi pivot (perpindahan titik puncak) yang dilakukan tidak memberikan perbaikan nilai fungsi objektif. Keadaan kemerosotan

nilai ini dapat mengakibatkan adanya berulangnya proses operasi pivot yang dilakukan.

Apabila ingin mempelajari lebih mendalam mengenai pemrograman linear, Anda dapat mempelajarinya dalam Buku Materi Pokok Pemrograman Linear (MATA4230).

Untuk lebih memahami materi yang telah dijelaskan di atas, cobalah Anda mengerjakan Latihan berikut ini.



## LATIHAN

---

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

- 1) Seorang pengelola kantin makanan di suatu sekolah melakukan perancangan menu makan siang. Setiap hari makan siang berupa nasi ditambah dengan lauk-pauk (sayur dan lauknya). Untuk lauk-pauk digunakan beberapa makanan dasar yang dikombinasikan untuk dimasak. Pengelola tersebut bertanggung jawab untuk menjamin agar makanan (diperhitungkan dari lauk-pauknya) yang disediakan memenuhi kebutuhan minimal dari nutrisi yang diperlukan. Dalam hal ini, kebutuhan minimum kandungan nutrisi yang diperlukan untuk makan siang adalah 10 unit protein, 7 unit vitamin A, dan 8 unit zat besi. Dalam penyusunan menu makan siang digunakan dua makanan dasar, sebutlah F1 dan F2. Setiap 1 gram F1 mengandung 2 unit protein, 2 unit vitamin A, dan  $1\frac{1}{3}$  unit zat besi. Setiap 1 gram F2 mengandung 2 unit protein, 1 unit vitamin A, dan 2 unit zat besi. Harga per gram F1 adalah Rp300,00 dan per gram F2 adalah Rp400,00. Masalah yang dihadapi: bagaimana menentukan campuran F1 dan F2 ke dalam makanan siang sedemikian sehingga setiap siswa akan menerima sejumlah nutrisi yang diperlukan dan biaya makan siang yang minimal. (masalah ini dikenal dengan masalah pengaturan gizi makanan atau *Diet Problem*).
  - a) Tetapkan dahulu peubah keputusannya.
  - b) Turunkan model masalah program linearnya.
  - c) Tentukan penyelesaian optimalnya dengan menggunakan metode grafik.

- d) Tentukan penyelesaian optimalnya dengan menggunakan metode simpleks.
- 2) Tentukan penyelesaian optimal dari:  
maks.  $f = -4x_1 - 5x_2$   
d.s.  
 $3x_1 + x_2 \leq 27$   
 $x_1 + x_2 = 12$   
 $6x_1 + 4x_2 \geq 60$   
 $x_1, x_2 \geq 0$   
dengan menggunakan metode simpleks.

*Petunjuk Jawaban Latihan*

- 1) Kita nyatakan dahulu informasi yang diberikan di atas dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 1.18.  
Informasi Soal Latihan Nomor 1

	Kandungan nutrisi (dalam unit)			Harga / gram (ratusan Rp)
	protein	vitamin A	zat besi	
F1	2	2	$\frac{1}{3}$	3
F2	2	1	2	4
Kebutuhan minimal	10	7	8	

- a) Di sini peubah keputusannya adalah banyaknya F1 (dalam gram) dan banyaknya F2 (dalam gram) yang akan dikombinasikan dalam makanan.
- b) Kita misalkan  
 $x_1 =$  banyaknya F1 (dalam gram)  
 $x_2 =$  banyaknya F2 (dalam gram)

Model program linear:

min.  $f = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow$  biaya pembelian F1 dan F2

d.s

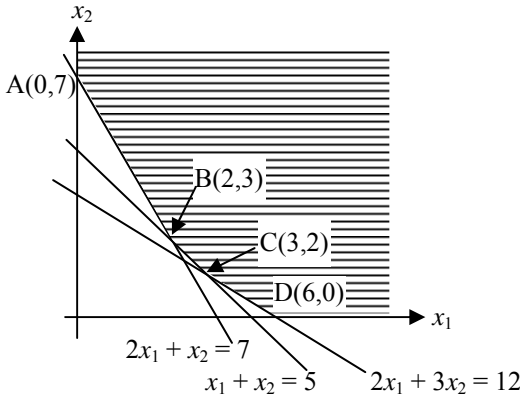
$2x_1 + 2x_2 \geq 10$  atau  $x_1 + x_2 \geq 5 \rightarrow$  persyaratan kandungan protein

$2x_1 + x_2 \geq 7 \rightarrow$  persyaratan kandungan vitamin A

$\frac{1}{3}x_1 + 2x_2 \geq 8$  atau  $2x_1 + 3x_2 \geq 12 \rightarrow$  persyaratan kandungan zat besi

$x_1, x_2 \geq 0 \rightarrow$  kepositifan banyaknya F1, F2

- c) Daerah penyelesaian merupakan daerah yang diarsir



Gambar 1.9.  
Daerah Penyelesaian Tidak Terbatas

Daerah penyelesaian yang diperoleh merupakan daerah yang tidak terbatas dengan puncak-puncaknya adalah A(0,7), B(2,3), C(3,2), dan D(6,0).

Kita periksa nilai fungsi objektif  $f$  pada titik-titik puncak tersebut:

Nilai  $f$  pada A(0,7),  $Z = 3(0) + 4(7) = 28$

B(2,3),  $Z = 3(2) + 4(3) = 18$

C(3,2),  $Z = 3(3) + 4(2) = 17$

D(6,0),  $Z = 3(6) + 4(0) = 18$

Jadi, titik minimum terletak di C(3,2) atau  $x_1 = 3, x_2 = 2$  dengan nilai minimumnya,  $Z = 17$ .

- d) Setiap baris pada sistem persyaratan utamanya kita kurangkan dengan peubah surplus  $x_3, x_4, x_5$ , dan selanjutnya tambahkan peubah-peubah semu  $x_6, x_7, x_8$  sehingga model program linearnya menjadi:

$$\text{min. } 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7 + Mx_8$$

d.s

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 5$$

$$2x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 7$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_5 + x_8 = 12$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 8.$$

Tabel awal diberikan oleh Tabel 1.19 berikut ini.

Tabel 1.19.  
Tabel Awal

min			3	4	0	0	0	M	M	M		
<i>i</i>	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{c}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$\mathbf{b}$	$\theta$
1	$x_6$	M	1	1	-1	0	0	1	0	0	5	5
2	$x_7$	M	2	1	0	-1	0	0	1	0	7	7
3	$x_8$	M	2	3	0	0	-1	0	0	1	12	4 →
4	$z_j$		5M	5M	-M	-M	-M	M	M	M	24M	
5	$c_j - z_j$		3-5M	4-5M	M	M	M	0	0	0		



**Iterasi 1:**

Kita lihat dari Tabel 1.19 di atas, kita dapat memilih  $x_1$  atau  $x_2$  untuk dimasukkan ke dalam basis. Di sini kita pilih  $x_2$  yang akan dimasukkan ke dalam basis dan  $x_8$  akan dikeluarkan dari basis

Tabel baru yang diperoleh adalah sebagai berikut:

Tabel 1.20.  
Hasil Iterasi 1

min			3	4	0	0	0	M	M		
<i>i</i>	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{c}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$\mathbf{b}$
1	$x_6$	M	$\frac{1}{3}$	0	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	0	1	3
2	$x_7$	M	$\frac{4}{3}$	0	0	-1	$\frac{1}{3}$	0	1	3	$\frac{9}{4}$ →
3	$x_2$	4	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	4	6
4	$z_j$		$\frac{8}{3} + \frac{5}{3}M$	4	-M	-M	$-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}M$	M	M	16+4M	
5	$c_j - z_j$		$\frac{1}{3} - \frac{5}{3}M$	0	M	M	$\frac{4}{3} - \frac{2}{3}M$	0	0		



Kita lihat bahwa pada tabel di atas, kolom yang berhubungan dengan  $x_8$  tidak dicantumkan lagi. Dapat diperhatikan pula bahwa  $x_1$  akan masuk ke dalam basis,  $x_7$  akan keluar dari basis.

**Iterasi 2:**

Operasi pivot dengan elemen pivot  $a_{21} = \frac{4}{3}$  (kolom di bawah  $x_7$  tidak diperhitungkan lagi) menghasilkan Tabel 1.21 berikut:

Tabel 1.21.  
Hasil Iterasi 2

		min	3	4	0	0	0	M		
<i>i</i>	$x_B$	$c_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	<b>b</b>	$\theta$
1	$x_6$	M	0	0	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	1 →
2	$x_1$	3	1	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	-
3	$x_2$	4	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{3}$	5
4	$z_j$		3	4	-M	$-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}M$	$-\frac{5}{4} - \frac{1}{4}M$	M	$\frac{1}{4}M + \frac{67}{4}$	
5	$c_j - z_j$				M	$\frac{1}{4} - \frac{1}{4}M$		0		



Kita lihat Tabel 1.21 di atas tidak mencantumkan lagi kolom yang berhubungan dengan  $x_7$ . Dapat diperhatikan pula bahwa  $x_4$  akan masuk ke dalam basis dan  $x_6$  akan keluar dari basis.

**Iterasi 3:**

Operasi pivot dengan elemen pivot  $a_{14} = \frac{1}{4}$  (kolom di bawah  $x_6$  tidak diperhitungkan lagi) menghasilkan Tabel 1.22 berikut:  
Tabel yang diperoleh adalah sebagai berikut:

Tabel 1.22.  
Hasil Iterasi 3

		min	3	4	0	0	0		
<i>i</i>	$x_B$	$c_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	<b>b</b>	$\theta$
1	$x_4$	0	0	0	-4	1	1	1	
2	$x_1$	3	1	0	-3	0	1	3	
3	$x_2$	4	0	1	2	0	-1	2	
4	$z_j$		3	4	-1	0	-1	17	
5	$c_j - z_j$		0	0	1	0	1		



Dapat kita periksa bahwa pada Tabel 1.22 tidak ada lagi kolom yang berhubungan dengan semua peubah semu. Oleh karena itu, pada tabel tersebut ditambahkan baris yang berhubungan dengan evaluasi  $c_j - z_j$ . Di sini, dapat kita periksa bahwa tabel di atas sudah merupakan tabel optimum, karena  $c_j - z_j \geq 0$  untuk semua  $j$ .

Penyelesaian optimumnya adalah:

$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$ , atau dapat ditulis sebagai  $\mathbf{x} = (3, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ , dengan  $f_{\min} = 17$  (dalam makanan digunakan 3 gram F1, 2 gram F2, dengan biaya  $f = \text{Rp}1700,00$ ).

- 2) Dapat kita lihat bahwa sistem persyaratan utama yang diberikan, persyaratan pertama berupa pertaksamaan ' $\leq$ ', persyaratan kedua berupa persamaan '=', dan persyaratan ketiga berupa pertaksamaan ' $\geq$ '.

Kita ubah ke dalam bentuk model program linear sebagai berikut:

$$\text{maks. } f = -4x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5 - Mx_6$$

d.s

$$3x_1 + 1x_2 + x_3 = 27$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 12$$

$$6x_1 + 4x_2 - x_4 + x_6 = 60$$

$$\text{dengan } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.$$

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya,  $x_3$  merupakan peubah *slack*,  $x_4$  merupakan peubah surplus,  $x_5$  dan  $x_6$  merupakan peubah semu.

Bentuk model program linear di atas akan memberikan tabel awal sebagai berikut:

Tabel 1.23.  
Tabel Awal

			-4	-5	0	0	-M	-M		
<i>i</i>	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{c}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b_j$	$\theta_i$
1	0	$x_3$	3	1	1	0	0	0	27	$9 \rightarrow$
2	-M	$x_5$	1	1	0	0	1	0	12	12
3	-M	$x_6$	6	4	0	-1	0	1	60	10
$z_j$			-7M	-5M	0	M	-M	M	-72M	
$c_j - z_j$			-4+7M	-5+4M	0	-M	0	0		

↑ (maksimum)

Perubahan-perubahan basis (dilakukan melalui operasi pivot) yang dilakukan dinyatakan dalam tabel-tabel berikut ini:

Tabel 1.24.  
Iterasi Pertama ( $x_3$  Digantikan oleh  $x_1$ )

			-4	-5	0	0	-M	-M		
$i$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{c}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b_j$	$\theta_i$
1	-4	$x_1$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	9	27
2	-M	$x_5$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	3	$\frac{9}{2}$
3	-M	$x_6$	0	2	-2	-1	0	1	6	3→
$z_j$			-4	$-\frac{4}{3}-\frac{8}{3}M$	$-\frac{4}{3}+\frac{7}{3}M$	M	-M	M	-54-9M	
$c_j-z_j$			0	$-\frac{11}{3}+\frac{8}{3}M$	$\frac{4}{3}-\frac{7}{3}M$	-M	0	0		

↑ (maksimum)

Tabel 1.25.  
Iterasi Kedua ( $x_6$  Digantikan oleh  $x_2$ )

			-4	-5	0	0	-M	-M		
$i$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{c}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b_j$	$\theta_i$
1	-4	$x_1$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0		8	48
2	-M	$x_5$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	1		1	$\frac{9}{2}$
3	-5	$x_2$	0	1	-2	-1	0		3	3→
$z_j$			-4	-5	$\frac{7}{3}-\frac{1}{3}M$	$\frac{11}{6}-\frac{1}{3}M$	-M		-47-M	
$c_j-z_j$			0	0	$-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}M$	$-\frac{11}{6}+\frac{1}{3}M$	0			

↑ (maksimum)

Tabel 1.26.  
Tabel Optimal ( $x_5$  Digantikan oleh  $x_4$ )

			-4	-5	0	0	-M	-M		
$i$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{c}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b_j$	$\theta_i$
1	-4	$x_1$	1	0	$\frac{1}{2}$	0			$\frac{15}{2}$	
2	0	$x_4$	0	0	1	1			3	
3	-5	$x_2$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0			$\frac{9}{2}$	
		$z_j$	-4	-5	$\frac{1}{2}$	0			$\frac{105}{2}$	
		$c_j - z_j$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0				

Kita perhatikan nilai  $c_j - z_j$ .

Ternyata  $c_j - z_j \leq 0$ , untuk semua  $j$ , jadi tabel sudah optimal. Penyelesaian optimalnya (maksimum)nya adalah  $x_1^* = \frac{15}{2}$ ,  $x_2^* = \frac{9}{2}$ ,  $x_3^* = 0$ ,  $x_4^* = 3$ ,  $x_5^* = 0$ , dan  $x_6^* = 0$ , dengan  $f = -\frac{105}{2}$ .

Oleh karena dalam masalah program linear di atas hanya melibatkan 2 peubah bebas (yaitu  $x_1$  dan  $x_2$ ), Anda dapat mencoba menyelesaikannya juga dengan menggunakan metode grafik, dengan terlebih dahulu merubahnya ke dalam bentuk meminimuman, yaitu  $\min. f = 4x_1 + 5x_2$ . Apabila Anda kerjakan, akan diperoleh penyelesaian yang sama, tetapi dengan nilai  $f = \frac{105}{2}$ .



**RANGKUMAN**

Anda telah mempelajari bentuk model masalah program linear serta metode untuk menentukan penyelesaian optimalnya.

Apabila dalam masalah hanya dilibatkan 2 peubah keputusan, kita dapat menggunakan metode grafik untuk menentukan penyelesaiannya. Dalam hal ini, penyelesaian optimalnya terletak pada salah satu titik puncak (titik pojok atau titik ekstrim) dari bidang layaknya.

Apabila dalam masalah terdapat lebih dari 2 buah peubah keputusan maka dalam menentukan penyelesaian optimalnya digunakan metode simpleks. Sebelum digunakannya metode simpleks ini, model masalah terlebih dahulu harus dibawa ke dalam bentuk baku yang di dalamnya mengandung penyelesaian basis awal.

Secara teknis metode ini dilakukan dengan menggunakan tabel (dikenal dengan tabel simpleks). Secara berulang dilakukan pergantian tabel sampai diperoleh tabel optimal (tabel dalam keadaan optimal). Pergantian tabel yang dilakukan merupakan hasil dari penyajian operasi pivot, yaitu operasi baris yang dilakukan untuk menggantikan suatu peubah basis oleh peubah bukan-basis dengan harapan agar nilai fungsi objektifnya menjadi lebih baik.

Jadi, sebelum dilakukan operasi pivot, ditentukan dahulu peubah bukan-basis mana yang akan dimasukkan ke dalam basis (ini dipilih menggunakan baris evaluasi pada tabel simpleks). Kolom tempat peubah bukan basis tersebut berada disebut dengan kolom pivot. Selanjutnya, ditentukan peubah basis mana yang dikeluarkan (ini dipilih dengan menggunakan evaluasi rasio ruas kanan kendala dengan elemen pada kolom pivot). Baris tempat peubah basis tersebut berada disebut dengan baris pivot.

Operasi pivot tidak dilakukan (pergantian tabel dihentikan) apabila keadaan optimal telah tercapai. Tercapai atau belum tercapainya keadaan optimal dapat diketahui dengan pemeriksaan baris evaluasi (baris terakhir) dari tabel simpleks.



## TES FORMATIF 2

---

### Pilihlah:

- A. Jika (1) dan (2) benar.
- B. Jika (1) dan (3) benar.
- C. Jika (2) dan (3) benar.
- D. Jika (1), (2), dan (3) benar.

**Untuk soal nomor 1) sampai dengan nomor 6), diberikan model masalah pemrograman linear sebagai berikut:**

$$\text{maks. } f = x_1 + x_2$$

d.s

$$-x_1 + x_2 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Akan ditentukan penyelesaian optimum menggunakan metode simpleks.

Tabel awalnya adalah:

maks			...	...	...	...	←baris 0
<i>i</i>	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{c}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\mathbf{b}$
1	...	...	-1	1	1	0	10
2	...	...	2	-1	0	1	10
3	$z_j$		0	0	0	0	0
4	$c_j - z_j$		1	1	0	1	

- 1) Periksa!ah pernyataan berikut ini ....
  - (1) ... pada baris 0, berturut-turut adalah 1 1 0 0
  - (2) ... pada kolom  $\mathbf{x}_B$  adalah  $[x_1 \ x_2]^t$
  - (3) ... pada kolom  $\mathbf{c}_B$  adalah  $[0 \ 0]^t$
  
- 2) Pada tabel awal di atas ....
  - (1) Tabel belum optimum, karena belum semua  $c_j - z_j \leq 0$ .
  - (2) Apabila  $x_1$  dimasukkan ke dalam basis maka  $x_4$  dikeluarkan dari basis.
  - (3) Apabila  $x_2$  dimasukkan ke dalam basis maka  $x_4$  dikeluarkan dari basis.

Apabila kita pilih  $x_1$  dimasukkan ke dalam basis maka tabel berikutnya adalah:

maks			1	1	0	0	
<i>i</i>	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{c}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\mathbf{b}$
1	...	...	...	...	...	...	...
2	...	...	...	...	...	...	...
3	$z_j$		1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	5
4	$c_j - z_j$		0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	

- 3) Periksa!ah pernyataan berikut ....
  - (1) ... pada baris  $i = 2$  berturut-turut adalah:
 

$x_1$	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	5
-------	---	---	----------------	---	---------------	---
  - (2) ... pada baris  $i=1$  berturut-turut adalah:
 

$x_3$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	15
-------	---	---	---------------	---	---------------	----
  - (3) Tabel yang diperoleh belum optimum
  
- 4) Pada tabel yang diperoleh di atas ....
  - (1) Nilai fungsi tujuannya  $f = 0$
  - (2) Nilai  $\theta$  adalah  $[30 \ -]^t$
  - (3)  $x_3$  akan dikeluarkan dari basis digantikan oleh  $x_2$

Tabel selanjutnya yang diperoleh adalah:

		Maks	1	1	0	0	
$i$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{c}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\mathbf{b}$
1	..	..	..	..	..	..	..
2	..	..	..	..	..	..	..
3	$z_j$		..	..	..	..	..
4	$c_j - z_j$		0	0	-3	$-\frac{1}{2}$	

5) Periksalah pernyataan berikut ....

(1) ... pada baris  $i = 1$  berturut-turut:

$$x_3 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 30$$

(2) ... pada baris  $i = 2$  berturut-turut:

$$x_1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 20$$

(3) ... pada baris  $i = 3$  berturut-turut:

$$1 \quad 1 \quad 3 \quad \frac{1}{2} \quad 50$$

6) Periksalah ketiga pernyataan berikut ....

(1) Tabel yang diperoleh di atas sudah berupa tabel optimum.

(2) Nilai maksimum fungsi objektifnya adalah 50.

(3) Penyelesaian optimumnya adalah  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = 30$ .

**Untuk soal nomor 7) sampai dengan nomor 13), diberikan model program linear sebagai berikut:**

$$\text{maks. } f = -10x_1 - 10x_2$$

d.s

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

7) Dalam bentuk baku yang diperoleh terdapat ....

(1) Dua buah peubah surplus

(2) Dua buah peubah semu

(3) Fungsi objektif,  $f = -10x_1 - 10x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5 + Mx_6$

(di sini  $x_3$  dan  $x_4$  berupa peubah surplus,  $x_5$  dan  $x_6$  berupa peubah semu, dan  $M$  bilangan besar)

8) Pada tabel awal yang diperoleh:

maks.			-10	-10	0	0	-M	-M	
<i>i</i>	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{c}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$\mathbf{b}$
1	...	-M	2	1	-1	0	1	0	6
2	...	-M	1	2	0	-1	0	1	6
3	$z_j$		...	...	...	...	...	...	...
4									

- (1) Kolom di bawah  $\mathbf{x}_B$  adalah  $[x_3 \ x_4]^t \dots$
- (2) ... pada baris  $i = 3$  (atau  $z_j$ ) berturut-turut adalah:  
 $-3M \quad -3M \quad M \quad M \quad -M \quad -M \quad -12M$
- (3) Nilai fungsi objektif  $f = -12M$

9) Pada tabel awal yang diperoleh pada soal nomor 5) ....

- (1)  $x_1$  atau  $x_2$  dapat dimasukkan ke dalam himpunan peubah basis
- (2) apabila  $x_1$  akan dimasukkan ke dalam basis maka nilai  $\theta$  adalah  $[3 \ 1]^t$
- (3) apabila  $x_2$  akan dimasukkan ke dalam basis maka  $x_6$  akan dikeluarkan dari basis.

10) Pada tabel awal yang diperoleh pada soal nomor 2), apabila  $x_1$  dimasukkan ke dalam basis, dengan elemen pivotnya adalah  $a_{11} = 2$ , tabel baru yang diperoleh adalah ....

maks.			-10	-10	0	0	-M	-M	
<i>i</i>	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{c}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$\mathbf{b}$
1	$x_1$	-10	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	3
2	$x_6$	-M	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	3
3	$z_j$		-10	$5-\frac{3}{2}M$	$5-\frac{1}{2}M$	M	$-5+\frac{1}{2}M$	-M	$-30-3M$
4									

11) Dari tabel baru yang diperoleh di atas, dapat diperiksa bahwa ....

- (1)  $x_2$  akan dimasukkan ke dalam basis.
- (2)  $x_6$  akan dikeluarkan dari basis.
- (3) elemen pivotnya adalah  $a_{12} = \frac{1}{2}$ .

12) Berdasarkan nomor 11), setelah dilakukan operasi pivot, tabel baru yang terbentuk adalah ....

maks.			-10	-10	0	0	-M	-M	
<i>i</i>	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{c}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$\mathbf{b}$
1	$x_1$	-10	..	..	..	..			..
2	$x_2$	-M	..	..	..	..			..
3	$z_j$		...	..	..	..			..
4									

- (1) ... pada baris  $i=1$  berturut-turut : 1      0       $-\frac{2}{3}$        $\frac{1}{3}$       2  
 (2) ... pada baris  $i=1$  berturut-turut : 0      1       $\frac{1}{3}$        $-\frac{2}{3}$       2  
 (3) ... pada baris  $i=1$  berturut-turut : -10      -10       $\frac{10}{3}$        $\frac{10}{3}$       -20

13) Tabel yang diperoleh pada nomor 12) menunjukkan bahwa ....

- (1) tabel sudah optimum  
 (2) titik optimum penyelesaiannya adalah  $x_1 = 10$  dan  $x_2 = 10$   
 (3) nilai maksimum fungsi objektifnya adalah -20

**Untuk soal nomor 14 sampai dengan nomor 18, diberikan model program linear sebagai berikut:**

$$\text{maks. } f = -10x_1 - 10x_2$$

d.s

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Tabel awalnya adalah:

maks.			-10	-10	0	0	-M	-M	
<i>i</i>	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{c}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$\mathbf{b}$
1	$x_5$	-M	2	1	0	-1	1	0	6
2	$x_6$	-M	1	2	0	0	0	1	6
3	$x_3$	0	1	1	1	0	0	0	6
4	$z_j$		-3M	-3M	0	M	-M	-M	-12M
5									



- 14) Pada tabel awal tersebut di atas ....
- (1) peubah *slack* yang digunakan adalah  $x_3$
  - (2) peubah surplus yang digunakan adalah  $x_4$
  - (3) peubah semu yang digunakan adalah  $x_5$
- 15) Pada tabel tersebut.
- (1) Nilai fungsi tujuannya adalah  $f = 12M$ .
  - (2) Jika kita tetapkan  $x_1$  keluar dari basis maka  $x_5$  keluar dari basis.
  - (3) Jika kita tetapkan  $x_2$  keluar dari basis maka  $x_6$  keluar dari basis.

Kita tetapkan  $x_1$  keluar dari basis maka  $x_5$  keluar dari basis maka tabel berikutnya.

		maks.	-10	-10	0	0	-M	-M	
$i$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{c}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$\mathbf{b}$
1	$x_1$	-10	...	...	...	...	...	...	...
2	$x_6$	-M	...	...	...	...	...	...	...
3	$x_3$	0	...	...	...	...	...	...	...
4	$z_j$	-10	$-5 - \frac{3}{2}M$	0	$5 - \frac{1}{2}M$	$5 + M$	-M	...	...
5									

- 16) Pada tabel di atas ....
- (1) ... pada baris  $i = 1$ , berturut-turut:
 
$$1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 3$$
  - (2) ... pada baris  $i = 2$ , berturut-turut:
 
$$0 \quad \frac{3}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 1 \quad 3$$
  - (3) ... pada baris  $i = 3$ , berturut-turut:
 
$$0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 3$$
- 17) Pada tabel di atas ....
- (1) nilai fungsi objektifnya  $f = 30 + 3M$
  - (2) peubah yang keluar dari basis adalah  $x_6$
  - (3) peubah yang masuk ke dalam basis adalah  $x_2$

18) Tabel berikutnya adalah ....

		maks.	-10	-10	0	0	-M	-M	
$i$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{c}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$\mathbf{b}$
1	$x_1$	-10	1	0	0	$-\frac{2}{3}$			2
2	$x_2$	-10	0	1	0	$\frac{1}{3}$			2
3	$x_3$	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$			2
4	$z_j$		...	...	...	...			...
5									

- (1) ... pada baris  $i = 4$ , berturut-turut : -10   -10   0    $\frac{10}{3}$    -40
- (2) tabel di atas masih belum optimum
- (3) penyelesaian optimumnya :  $x_1 = x_2 = 2$ , dengan  $f = -40$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali  
 80 - 89% = baik  
 70 - 79% = cukup  
 < 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

## Kunci Jawaban Tes Formatif

### Tes Formatif 1

- 1) D
- 2) A
- 3) B
- 4) D
- 5) C
- 6) B
- 7) D. Kotak terdiri permukaan alas dan 4 permukaan samping.
- 8) A
- 9) B
- 10) C
- 11) D
- 12) A
- 13) B
- 14) C
- 15) D

### Tes Formatif 2

- 1) B. 2 salah, seharusnya  $[x_3 \ x_4]^t$ .
- 2) A. 3 salah, seharusnya apabila  $x_2$  dimasukkan ke basis maka  $x_3$  dikeluarkan dari basis.
- 3) D
- 4) C. 1 salah, seharusnya nilai fungsi tujuannya  $f = 5$ .
- 5) C. 1 salah seharusnya  $x_3 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0 \ 30$ .
- 6) A. 3 salah, seharusnya  $x_1 = 30, x_2 = 20$ .
- 7) A. 3 salah seharusnya,  $f = -10x_1 - 10x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5 - Mx_6$ .
- 8) C. 1 salah, seharusnya,  $[x_5 \ x_6]^t$ .
- 9) D
- 10) D
- 11) A. 3 salah, seharusnya elemen pivotnya adalah  $a_{22} = \frac{3}{2}$ .
- 12) D
- 13) B. 2 salah, seharusnya  $x_1 = 2$  dan  $x_2 = 2$ .
- 14) A. 3 salah, seharusnya  $x_5$  dan  $x_6$ .
- 15) C. 1 salah seharusnya  $f = -12M$ .
- 16) D
- 17) C. 1 salah, seharusnya  $f = -30 - 3M$ .
- 18) B. 2 salah, seharusnya tabel telah optimum.

## Daftar Pustaka

- Anderson M.Q, R.J.Lievano. (1986). *Quantitative Management – An Introduction*. 2<sup>nd</sup> ed. Kent Publ.Co.
- Gass, S.I. (2003). *Linear Programming: Methods & Applications*. 5<sup>th</sup> ed. Dover Publicatons.
- Hillier, F., Lieberman, G.J. (1995). *Introduction to Operations Research*. Mc Graw-Hill.
- Taha. H.A. (1997). *Operations Research: An Introduction*. Prentice Hall.
- Thieraufft R.J., R.A. Grosse. (1975). *Decision Making Through Operation Research*. 2<sup>nd</sup> ed. John Wiley & Sons.
- Wu, N., Coppins, R. (1981). *Linear Programming and Extention*. Mc Graw-Hill.