

## PEMODELAN ASURANSI JIWA BERDASARKAN ASUMSI MORTALITA WEIBULL

**Des Alwine Zayanti**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Sriwijaya

Email : dalwinezayanti@yahoo.com

### ABSTRAK

Pemodelan asuransi jiwa berdasarkan asumsi mortalita Weibull diawali dengan memodelkan fungsi-fungsi aktuarial, seperti fungsi survival, fungsi densitas, dan peluang hidup berdasarkan laju mortalita (*force of mortality*) dengan asumsi mortalita Weibull. Selanjutnya fungsi-fungsi aktuarial tersebut dipergunakan untuk menghitung mean dan variansi dari nilai sekarang (*present value*) asuransi berjangka  $n$  tahun dengan benefit dibayarkan diakhir tahun kematian berdasarkan asumsi Weibull. Selain itu juga akan diperhitungkan bentuk mean dan variansi dari anuitas hidup berjangka  $n$  tahun. Berdasarkan nilai sekarang aktuarial (*Actuarial Present Value*) dan anuitas hidup, diperoleh pemodelan premi asuransi jiwa berdasarkan asumsi Mortalita Weibull. Sehingga model ini dapat menjadi alternatif bagi perhitungan asuransi jiwa.

Kata Kunci : laju mortalita, fungsi survival, fungsi densitas, anuitas, hukum mortalita Weibull.

### 1. PENDAHULUAN

Asuransi adalah pengalihan risiko dari pihak tertanggung kepada pihak penanggung. Upaya pengalihan risiko bertujuan untuk mengurangi beban tertanggung apabila terjadi risiko terhadap tertanggung pada suatu waktu. Pihak penanggung akan memberikan manfaat dengan syarat tertanggung harus membayar premi. Pembayaran premi disesuaikan dengan jumlah manfaat (*benefit*) yang ingin diperoleh ketika terjadi risiko.

Artikel hasil penelitian ini memodelkan fungsi-fungsi aktuarial pada asuransi jiwa berdasarkan asumsi mortalita Weibull. Sehingga dapat merupakan alternatif perhitungan pada asuransi jiwa, khususnya asuransi jiwa berjangka  $n$  tahun untuk benefit yang dibayarkan diakhir tahun kematian.

### 2. TUJUAN PENELITIAN

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Memperoleh hubungan *force of mortality* berdasarkan asumsi mortalita Gompertz dengan fungsi-fungsi aktuarial lainnya, seperti: fungsi survival, fungsi densitas, peluang hidup dan peluang kematian.

2. Memperoleh bentuk bentuk mean dan variansi dari *APV* asuransi jiwa berjangka  $n$  tahun dengan benefit dibayarkan diakhir tahun kematian berdasarkan asumsi Gompertz.
3. Memperoleh bentuk bentuk mean dan variansi dari anuitas hidup berjangka  $n$  tahun dengan variabel tingkat bunga  $i$  berdasarkan asumsi Gompertz.
4. Memodelkan premi asuransi berjangka  $n$  tahun berdasarkan asumsi Gompertz. dengan variabel tingkat bunga

### 3. PEMBAHASAN

**Memodelkan hubungan laju mortalita berdasarkan asumsi Weibull :**

$$\mu(x) = kx^n, \text{ dengan } k > 0, n > 0, x \geq 0$$

Atau

$$\mu_{x+t} = k(x+t)^n$$

hubungan dengan fungsi-fungsi aktuaria lainnya, seperti :

i. fungsi survival

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{-\frac{d}{dy}s(x)}{s(x)} \\ &= \frac{-s'(x)}{s(x)} \end{aligned}$$

$$\mu(y) = \frac{-s'(y)}{s(y)}$$

$$-\mu(y) = \frac{s'(y)}{s(y)}$$

$$-\mu(y) = \frac{d}{dy}[\ln s(y)]$$

$$-\mu(y)dy = d[\ln s(y)]$$

mengintegalkansuatupernyataandari  $x$  ke  $x + n$ , sehinggadidapat

$$\begin{aligned} -\int_0^x \mu(y)dy &= \int_0^x d[\ln s(y)] \\ -\int_0^x \mu(y)dy &= \ln s(x) - \ln s(0) \end{aligned}$$

$$s(x) = \exp \left[ - \int_0^x \mu(s) ds \right]$$

Berdasarkan asumsi Weibull :

$\mu(x) = kx^n$ , dengan  $k > 0$ ,  $n > 0$ ,  $x \geq 0$  dan  $t$  tetapan;

$$s(x) = \exp \left[ - \int_0^x ks^n ds \right]$$

$$s(x) = \exp \left[ - ux^{n+1} \right] \quad \text{dengan } u = \frac{k}{n+1}$$

ii. Peluang hidup dan peluang kematian

Peluang hidup dihitung dengan pendekatan *force of mortality* :

$$\mu(y) = \frac{-s'(y)}{s(y)}$$

$$-\mu(y) = \frac{s'(y)}{s(y)}$$

$$-\mu(y) = \frac{d}{dy} [\ln s(y)]$$

$$-\mu(y)dy = d[\ln s(y)]$$

mengintegrasikan suatu pernyataan dari  $x$  ke  $x + n$ , sehingga didapat

$$- \int_x^{x+n} \mu(y)dy = \int_x^{x+n} d[\ln s(y)]$$

$$- \int_x^{x+n} \mu(y)dy = \ln s(x+n) - \ln s(x)$$

$$- \int_x^{x+n} \mu(y)dy = \ln \frac{S(x+n)}{S(x)}$$

$$- \int_x^{x+n} \mu(y)dy = \ln({}_n P_x)$$

sehingga diperoleh

$${}_n P_x = \exp \left[ - \int_x^{x+n} \mu(y) dy \right]$$

dengan  $s = y - x$ . Sehingga diperoleh :

$${}_n P_x = \exp \left[ - \int_0^n \mu(x + s) ds \right]$$

Berdasarkan asumsi Weibull :

$\mu(x) = kx^n$ , dengan  $k > 0$ ,  $n > 0$ ,  $x \geq 0$  dan  $t$  tetap;

Atau

$$\mu_{x+t} = k(x+t)^n$$

$${}_t P_x = \exp \left[ - \int_0^t k(x+s)^n ds \right]$$

$${}_t P_x = \exp \left[ - u \left( (x+t)^{n+1} - x^{n+1} \right) \right] \quad \text{dengan } u = \frac{k}{n+1}.$$

iii. fungsi densitas

$F_{T(x)}(t)$  dan  $f_{T(x)}(t)$  menunjukkan masing-masing fungsi distribusi dan fungsi kepadatan peluang dari  $T(x)$ , sisa umur dari  $x$ . Dan dapat ditunjukkan bahwa  $F_{T(x)}(t) = {}_t q_x$ .

$$F_{T(x)}(t) = {}_t q_x$$

$$F_{T(x)}(t) = 1 - {}_t p_x$$

$$F_{T(x)}(t) = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

Sehingga,

$$F'_{T(x)}(t) = f_{T(x)}(t) = \frac{d}{dt} \left[ 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} \right]$$

$$f_{T(x)}(t) = \frac{-s'(x+t)}{s(x)} \cdot \frac{s(x+t)}{s(x+t)}$$

$$f_{T(x)}(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} \cdot \frac{-s'(x+t)}{s(x+t)}$$

$$f_{T(x)}(t) = {}_tP_x \mu(x+t)$$

Berdasarkan asumsi Weibull:

$$f_T(t) = u(n+1)(x+t)^n \exp[-u((x+t)^{n+1} - x^{n+1})]$$

**Memodelkan nilai sekarang aktuarial untuk asuransi jiwa berjangka n tahun dengan benefit dibayarkan diakhir tahun kematian berdasarkan asumsi mortalitas Weibull.**

Asuransi jiwa berjangka mengasumsikan bahwa seseorang yang berusia ( $x$ ) akan mendapatkan 1 (satu) unit manfaat ketika orang tersebut mengalami risiko selama  $n$  tahun masa kontrak, sehingga jika orang tersebut tidak mengalami risiko hingga akhir masa kontrak maka orang tersebut tidak akan mendapatkan manfaat.

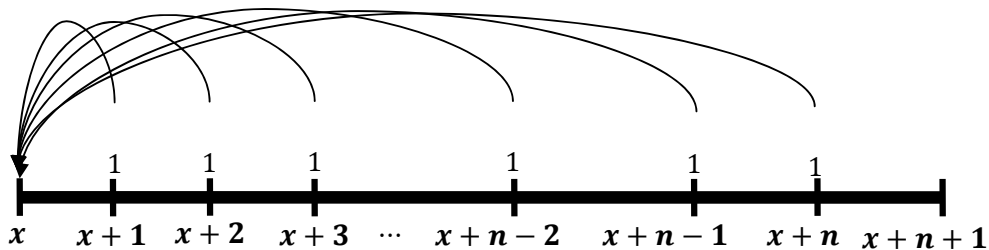
Asuransi berjangka  $n$  tahun dengan benefit dibayarkan diakhir tahun kematian, dengan asumsi benefit dibayarkan sebesar 1 unit. Dalam kasus ini terdapat 3 fungsi yang digunakan, yaitu fungsi benefit  $b_{k+1}$ , fungsi discount  $v_{k+1}$ , dan statistik probabilitas  $Z_{k+1}$ .

1, untuk  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$

$b_{k+1} =$   $\left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ untuk } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ 0, \text{ untuk lainnya} \end{array} \right.$

$$v_{k+1} = v^{k+1}$$

$Z_{k+1} =$   $\left\{ \begin{array}{l} v^{k+1}, \text{ untuk } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ 0, \text{ untuk lainnya} \end{array} \right.$



Gambar 1. Garis Bilangan Nilai Sekarang Aktuarial Asuransi Jiwa Berjangka

Nilai sekarang aktuarial yang diperoleh adalah

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = 1 \cdot v^1 \cdot {}_0p_x \cdot q_x + 1 \cdot v^2 \cdot {}_1p_x \cdot q_{x+1} + 1 \cdot v^3 \cdot {}_2p_x \cdot q_{x+2} + \dots + 1 \cdot v^{n-1} \cdot {}_{n-2}p_x \cdot q_{x+n-2} + 1 \cdot v^n \cdot {}_{n-1}p_x \cdot q_{x+n-1} + 0 \cdot v^n \cdot {}_np_x$$

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}$$

Secara umum untuk benefit sebesar b :

$$E[Z] = A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot b_{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}$$

Berdasarkan asumsi mortalita Weibull :

$$E[Z] = A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot b_{k+1} \int_k^{k+1} u(n+1)(x+t)^n \exp[-u((x+t)^{n+1} - x^{n+1})] dt$$

dan besar moment ke-2,

$$E[Z^2] = {}^2A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)} \cdot b_{k+1}^2 \int_k^{k+1} u(n+1)(x+t)^n \exp[-u((x+t)^{n+1} - x^{n+1})] dt$$

Variansi dari Asuransi berjangka n-tahun adalah

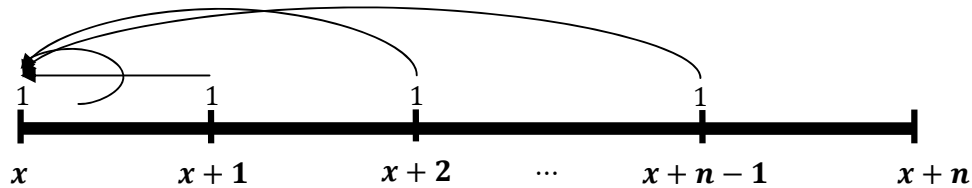
$$Var(Z) = {}^2A^1_{x:\overline{n}|} - (A^1_{x:\overline{n}|})^2$$

$$Var(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)} \cdot b_{k+1}^2 \int_k^{k+1} u(n+1)(x+t)^n \exp[-u((x+t)^{n+1} - x^{n+1})] dt - \left( \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot b_{k+1} \int_k^{k+1} u(n+1)(x+t)^n \exp[-u((x+t)^{n+1} - x^{n+1})] dt \right)^2$$

**Memodelkan mean dan variansi dari anuitas hidup berjangka n tahun berdasarkan asumsi Weibull.**

Anuitas hidup yang digunakan untuk pembayaran premi perlindungan adalah anuitas *due* berjangka n tahun untuk

seseorang yang berusia ( $x$ ). Tertanggung akan melakukan pembayaran premi perlindungan di usia ( $x$ ) jika tertanggung bertahan hidup di usia ( $x$ ), dan tertanggung akan melakukan pembayaran premi perlindungan di usia ( $x + 1$ ) jika tertanggung bertahan hidup dari usia ( $x$ ) hingga ( $x + 1$ ), dan seterusnya. Seluruh kemungkinan tertanggung membayarkan premi perlindungan harus diperhitungkan di awal kontrak atau di usia ( $x$ ) sehingga kemungkinan tersebut dipengaruhi oleh besarnya faktor diskonto dengan interval waktu yang disesuaikan. Berikut garis bilangan untuk anuitas *due* berjangkan tahun



Gambar 2. Anuitas *Due* untuk Anuitas Hidup Berjangkan Tahun

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= 1 \cdot v^0 \cdot {}_0p_x + 1 \cdot v^1 \cdot {}_1p_x + 1 \cdot v^2 \cdot {}_2p_x + \dots + 1 \cdot v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_x \\ &= v^0 \cdot {}_0p_x + v^1 \cdot {}_1p_x + v^2 \cdot {}_2p_x + \dots + v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_x \end{aligned}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_k p_x.$$

Nilai sekarang dari peubah acak Anuitas *Due* untuk Anuitas Hidup Berjangkan Tahun dari pembayaran sebesar 1 unit pertahun adalah

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & 0 \leq K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & K \geq n \end{cases}$$

dan premi tunggal bersihnya adalah

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E[Y] = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \cdot {}_k p_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_n p_x.$$

Penjumlahan per bagian dapat digunakan untuk mentransformasikan menjadi

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_k p_x,$$

Karena  $Y = (1-Z)/d$ , dimana

$$Z = \begin{cases} v^{k+1} & 0 \leq K < n \\ v^n & K \geq n \end{cases}$$

Merupakan nilai awal peubah acak untuk sebuah unit asuransi jiwa yang dibayarkan pada akhir tahun kematian, sehingga

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{1 - E[Z]}{d} = \frac{1 - A_{x:\bar{n}|}}{d}$$

Dapat dinyatakan :

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{1}{d} \left\{ 1 - \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \int_k^{k+1} u(n+1)(x+t)^n \exp[-u((x+t)^{n+1} - x^{n+1})] dt \right\}$$

**Memodelkan premi asuransi berjangka n tahun berdasarkan asumsi Weibull.**

Premi asuransi jiwa berjangka yang harus dibayar oleh tertanggung supaya mendapatkan 1 unit manfaat ketika terjadi risiko adalah :

$$P_{x:\bar{n}|}^1 = \frac{A_{x:\bar{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\bar{n}|}}$$

Premi asuransi berjangka n tahun dengan variabel tingkat bunga berdasarkan asumsi Weibull :

$$P_{x:\bar{n}|}^1 = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot b_{k+1} \int_k^{k+1} u(n+1)(x+t)^n \exp[-u((x+t)^{n+1} - x^{n+1})] dt}{\frac{1}{d} \left\{ 1 - \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \int_k^{k+1} u(n+1)(x+t)^n \exp[-u((x+t)^{n+1} - x^{n+1})] dt \right\}}$$

#### 4. KESIMPULAN

Premi Asuransi jiwa berjangka n tahun dengan benefit dibayarkan diakhir tahun kematian berdasarkan asumsi Weibull :

$$P_{x:\bar{n}|}^1 = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot b_{k+1} \int_k^{k+1} u(n+1)(x+t)^n \exp[-u((x+t)^{n+1} - x^{n+1})] dt}{\frac{1}{d} \left\{ 1 - \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \int_k^{k+1} u(n+1)(x+t)^n \exp[-u((x+t)^{n+1} - x^{n+1})] dt \right\}}$$



## DAFTAR PUSTAKA

Bowers, N.L. 1997. *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries. Schaumburg: Illinois.

Kellison, S.G. 2005. *The Theory of Interest*. Singapore: Library of Congress Cataloging.

Liyan W, Zhang Xiaodong, 2009, *Increasing Endowment Assurance Policy Actuarial Models under Random Rate of Interest*, Second International Workshop on Computer Science, 178 – 181

Nofridawati, Nova, 2013, Premi Asuransi Jiwapada Akhir Kematian dan pada Saat Kematian Terjadi. *Matematika*, 1, (2): 79-84.

Ping H., Wei Xiang, 2009, *Discrete life insurance Actuarial Models with Variable interest Rate Based on Moivre's and Makeham's Law of Mortality*, IEEE. Computer Society, 160 – 163.

Sholahudin, T. 2013. Teori Tingkat Suku Bunga. <http://thoifursholahudin.blogspot.com/2013/03/teori-tingkat-suku-bunga.html>. Diakses pada tanggal 18 September 2013.

Syamrilaode. 2010. Pengertian Premi Asuransi. <http://id.shvoong.com/writing-and-speaking/presenting/2063124-pengertian-premi-asuransi/#ixzz2kegdr9Xa>. Diakses