IMPLEMENTASI DIAGONALISASI MATRIKS UNTUK MENYELIDIKI PEWARISAN AUTOSOMAL PADA GENERASI KE-N

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Meraih
Gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika
pada Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Alauddin Makassar

Oleh :

AGUSTINI
60600111002

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI ALAUDDIN MAKASSAR

2016

PENGESAHAN SKRIPSI

Skripsi yang berjudul "Implementasi Diagonalisasi Matriks Untuk Menyelidiki Pewarisan Autosomal Pada Generasi Ke-N", yang disusun oleh Saudari **Agustini**, Nim: **60600111001** Mahasiswa Jurusan Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar, telah diuji dan dipertahankan dalam sidang *munaqasyah* yang diselenggarakan pada hari Selasa tanggal **24 Maret 2016 M**, bertepatan dengan **15 Jumadil Akhir 1437 H**, dinyatakan telah dapat diterima sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.).

Makassar, 24 Maret 2016 M
15 Jumadil Akhir 1437 H

DEWAN PENGUJI

Ketua	: Prof. Dr. H. Arifuddin Ahmad, M.Ag.	(……………..……)
Sekretaris	: Wahidah Alwi, S.Si., M.Si.	(……………..……)
Munaqisy I	: Ermawati, S.Pd., M.Si.	(……………..……)
Munaqisy II	: Adnan Sauddin, S.Pd., M.Si.	(……………..……)
Munaqisy III	: Muh. Rusydi Rasyid, S.Ag., M.Ed	(……………..……)
Pembimbing I	: Irwan, S.Si., M.Si.	(……………..……)
Pembimbing II	: Wahyuni Abidin, S.Pd., M.Pd.	(……………..……)

Diketahui oleh:
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Alauddin Makassar

KEMENTERIAN AGAMA RI
FAK. SAINS & TEKNOLOGI
MAKASSAR
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI "ALAUDDIN"

Prof. Dr. H. Arifuddin Ahmad, M.Ag
Nip. 19691205 199303 1 001

MOTTO

Pendidikan merupakan perlengkapan paling baik untuk hari tua

(Aristoteles)

Bermimpilah setinggi langit, sekalipun engkau jatuh maka engkau akan singgah pada bintang-bintang

Kegagalan merupakan himpunan bagian dari kesuksesan.

Berani berbeda, siap dalam kebersamaan

(Yahyar Nurhardiansyah)

Kecerdasan yang tak terorganisir akan terkalahkan oleh kebodohan yang terorganisir

(Nur Hidayat)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan rasa syukur kepada Allah swt. dengan

Segenap kerendahan, ketulusan dan keikhlasan hati

Kupersembahkan skripsiku ini untuk

Orang-orang yang kusayangi:

1. Ibunda Andi Male dan Ayahanda Abdullah yang telah mengasuh, membimbing, dan mendidikku dengan sepenuh jiwa raga serta tak henti-hentinya mendoakan dengan tulus dan memberi kasih sayang yang tak terhingga. Semoga Rahmat dan Hidayah Allah swt. selalu menyertai disetiap langkah beliau.
2. Belahan jiwa pelengkap hidup, imamku Nur hidayat, S.Pd yang telah memberikan cinta, kasih sayang, senantiasa memotivasi dan mendoakan, serta telah bersabar dalam menghadapi cobaan-cobaan dalam rumah tangga kecil kami.
3. Keluarga besar dan kedua kakakku (Abdul Rivai, A.Md dan Sri Mulyani, SE., Ak., CA., M.Ak) yang selalu memberikan semangat dan doa serta bantuannya untuk kelancaran penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
4. Semua guru dan dosenku yang telah memberikan ilmu pengetahuan serta pengalaman yang sangat berarti dalam hidupku. Terima kasih atas segala ilmu yang telah engkau berikan, semoga senantiasa menjadi ilmu yang bermanfaat dan barokah.
5. Sahabat dan semua teman-teman di jurusan Matematika (Limit) angkatan 2011 yang tak mungkin penulis sebutkan satu persatu, untuk kalian semua terimakasih telah menjadi sahabat dan teman terbaik untuk saya selama ini, terimakasih karena selalu ada dan mendoakan yang tebaik untuk saya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.

KATA PENGANTAR

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Assalamu' alaikum Wr.Wb.

Puji syukur kehadirat Allah swt, karena atas rahmat dan hidayah-Nyalah sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian dan penyusunan skripsi ini dengan baik.

Skripsi dengan judul **"Implementasi Diagonalisasi Matriks Untuk Menyelidiki Pewarisan Autosomal Pada Generasi Ke-N"** yang merupakan tugas akhir dalam menyelesaikan studi dan sebagai salah satu syarat yang harus dipenuhi untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) pada program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar.

Perjalanan dalam meraih pengetahuan selama ini merupakan pengalaman yang sangat berharga dengan nilai yang tak terhingga. Ketekunan dan keseriusan senantiasa diiringi do'a telah mengantar penulis untuk mendapatkan semestinya, walaupun tidak seutuhnya. Penulis tidak dapat memungkiri bahwa apa yang diperoleh selama ini adalah perjuangan bersama. Dukungan, semangat dan perhatian yang tulus menjadi embrio semangat baru dalam mengiringi perjalanan penulis untuk menyelesaikan pengembaraan dalam dunia pengetahuan ini. Sejatinya keberhasilan dan kesuksesan ini tidak lepas dari berbagai dukungan dan peran dari berbagai elemen yang terlibat didalamnya.

Secara khusus penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada kedua orang tua tercinta ayahanda **Abdullah** dan ibunda **Andi Male** yang telah mempertaruhkan seluruh hidupnya untuk kesuksesan anaknya, yang telah melahirkan, membesarkan dan mendidik dengan sepenuh hati dalam buaian kasih sayang kepada penulis.

Dalam kesempatan ini pula, penulis mengucapkan terimah kasih banyak yang sedalam-dalamya, kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Musafir Pababbari, M.Si, Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar
2. Bapak Prof. Dr. H. Arifuddin Ahmad, M.Ag, Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Alauddin Makassar
3. Bapak Irwan, S.Si., M.Si, Ketua Jurusan Matematika dan Ibu Wahidah Alwi, S.Si., M.Si, Sekretaris Jurusan Matematika UIN Alauddin Makassar
4. Bapak Irwan, S.Si., M.Si, Pembimbing I, dan Ibu Wahyuni Abidin, S.Pd., M.Pd, Pembimbing II yang dengan penuh kesabaran telah meluangkan waktu dan pikirannya untuk memberikan bimbingan, arahan, dan petunjuk mulai dari membuat proposal hingga rampungnya skripsi ini.
5. Ibu Ermawati, S.Pd., M.Si, Penguji I, dan Bapak Adnan Sauddin, S.Pd., M.Si, Penguji II, dan Bapak Muh. Rusyidi, S.Ag., M.Ag., M.Ed, Penguji III yang dengan penuh kesabaran dalam menguji serta memberi saran demi kesempurnaan dan terselesaikannya skripsi ini.
6. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen Jurusan Matematika dan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Alauddin Makassar yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk mengikuti pendidikan, memberikan ilmu pengetahuan, dan pelayanan yang layak selama penulis melakukan studi.
7. Seluruh keluarga besar penulis, terkhusus dan teristimewa buat Kasrina Kamaluddin dan Ekawati Umasangadji yang telah membantu demi kelancaran penyelesaian skripsi ini.
8. Sahabat dan Teman-teman seperjuangan L1M1T angkatan 2011 (Leader 1n Math ScIenTech) terkhusus untuk L1M1T ‘A’ yang selama ini memberikan banyak motivasi, masukan dan bantuan bagi penulis.
9. Sahabat-sahabat KKN Reguler Angk ke-50 UIN Alauddin Makassar, Kab. Bantaeng, kec. Pa’Jukukang, desa. Biangloe yang telah membantu, memotivasi, menyemangati serta mendoakan penulis.

10. Semua pihak yang telah membantu hingga terselesaikannya skripsi ini, baik secara langsung maupun tidak langsung, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga skripsi yang penulis persembahkan ini dapat bermanfaat. Akhirnya, dengan segala kerendahan hati, penulis memohon maaf yang sebesar-besarnya atas segala kekurangan dan keterbatasan dalam penulisan skripsi ini. Saran dan kritik yang membangun tentunya sangat dibutuhkan untuk penyempurnaan skripsi ini.

Wassalamu alaikum Wr.Wb

Makassar, Maret 2016
Penulis,

Agustini
Nim. 60600111002

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

A	:	Matriks A
P^{-1}	:	Invers matriks P
A^T	:	Transpose matriks A
$\|\ \ \|$	:	Determinan Matriks
λ	:	Lambda

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Nama : Agustini

Nim : 60600111002

Judul : Implementasi Diagonalisasi Matriks untuk Menyelidiki Pewarisan Autosomal pada Generasi Ke-n

Ilmu pengetahuan genetika modern berawal dari penemuan Gregor Mendel tentang ciri-ciri faktor keturunan yang ditentukan oleh unit dasar yang diwariskan dari generasi ke generasi berikutnya. Untuk menyelidiki pewarisan autosomal dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep aljabar matriks, khususnya pada diagonalisasi matriks. Diagonalisasi matriks merupakan alat bantu dalam mengetahui pewarisan ini pada keturunan yang tak hingga dibanding dengan menyilangkan satu per satu induk untuk mendapatkan keturunan terbaik.

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan formula dalam penentuan pewarisan autosomal pada generasi ke-n dengan konsep diagonalisasi matriks. Dengan menggunakan persamaan $X^n = P^{-1}D^nPX^0$ dapat diperoleh formula dari masing-masing genotip keturunan pewarisan autosomal pada generasi ke-n.

Dari penelitian tersebut dapat disimpulkan bahwa formula dalam pewarisan autosomal pada generasi ke-n dengan genotip induk yang terkontrol dapat diperoleh dari persamaan-persamaan berikut:

$$a_n = a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) b_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) c_0 + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1\right) i_0$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) e_0 - \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0$$

$$d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) e_0 + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0$$

$$e_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} i_0$$

$$c_n = f_n = g_n = h_n = i_n = 0, \qquad \text{untuk } n = 1,2,\ldots$$

.

Kata Kunci: *Diagonalisasi Matriks, Nilai Eigen dan Vektor Eigen, Genotip, Autosomal, Dihibrid.*

ABSTRACT

Name : **Agustini**

Nim : **60600111002**

Title : **Implementation of Matrix Diagonalization to Investigate Autosomal Inheritance in Nth Generation**

Modern genetic science begins with Gregor Mendel's discovery of the characteristics of heredity determined by the basic units passed down from generation to generation. To investigate autosomal inheritance can be solved by using the concept of matrix algebra, especially on the diagonalization of the matrix. The diagonalization of the matrix is a tool in knowing this inheritance in the infinite offspring compared to crossing one by one to obtain the best offspring.

This study aims to determine the formula in determining autosomal inheritance in the nth generation with the concept of matrix diagonalization. Using the equation $X^n = P^{-1}D^nPX^0$ can be obtained the formula of each genotype of autosomal inheritance offspring in the nth generation.

From this study it can be concluded that the formula in autosomal inheritance in the nth generation with controlled parent genotypes can be obtained from the following equations:

$$a_n = a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) b_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) c_0 + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1\right) i_0$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) e_0 - \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0$$

$$d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) e_0 + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0$$

$$e_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} i_0$$

$$c_n = f_n = g_n = h_n = i_n = 0, \qquad \text{untuk } n = 1,2,\ldots$$

Keywords: *Matrix Diagonalization, Eigenvalues and Eigenvector, Genotype, Autosomal, Dihibrid.*

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung.[1] Dalam matematika, teori matriks merupakan salah satu cabang ilmu ajabar linear yang menjadi pembahasan paling penting. Sejalan dengan perkembangan ilmu pengetahuan, aplikasi matriks bukan hanya dipergunakan pada ilmu matematika itu sendiri, namun pengaplikasian matriks telah banyak dijumpai pada bidang lain, misalnya pada bidang ekonomi, fisika, dan biologi.

Ilmu matematika dapat dijumpai pula dalam Al-Qur'an secara tersirat pada Q.S. Al-Furqan (25:2) Allah swt. berfirman:

وَخَلَقَ كُلَّ شَيۡءٖ فَقَدَّرَهُۥ تَقۡدِيرٗا ٢

Terjemahnya:

"Dan Dia menciptakan segala sesuatu, lalu menetapkan ukuran-ukurannya dengan tepat." (QS. Al – Furqan 25:2)

Dari ayat tersebut, Allah swt. menetapkan ukuran-ukuran yang sesuai dengan masing-masing ciptaan-Nya, penetapan dan ukuran serapi-rapinya. Setiap jenis memiliki sifat-sifat tertentu yang diwarisi dari generasi ke generasi. Semua itu berjalan menurut hukum dan aturan yang bersifat konstan

[1] Hairur Rahman, *Indahnya Matematika dalam Al-Qur'an*, (Malang: UIN-Malang Press, 2007), h. 1

dan teliti yang menggambarkan secara jelas kebesaran dan kekuasaan Allah swt. Jadi, segala sesuatu termasuk manusia ada takdir yang ditetapkan oleh Allah swt. dan mereka tidak dapat melampaui batas ketetapan itu.[2] Seperti halnya pada ilmu matematika, Allah swt. menetapkan ukuran-ukuran atau batas-batas tertentu dalam setiap tahap penyelesaian masalah, atau dengan kata lain telah ada penetapan rumus-rumus yang sesuai dengan masing-masing teori. Contohnya dalam pembahasan matriks yang tersusun atas sejumlah elemen dengan ukuran $m \times n$ atau $n \times n$ telah ditetapkan rumus masing-masing dalam hal mencari determinan, invers, nilai eigen, vektor eigen, dan lain sebagainya.

Pada penelitian ini akan digunakan teori matriks untuk diimplementasikan pada ilmu biologi khususnya pewarisan genetika. Genetika adalah ilmu yang mempelajari tentang gen, yaitu faktor yang menentukan sifat-sifat suatu organisme. Di dalam genetika dipelajari struktur, proses pembentukan dan pewarisan gen serta mekanisme ekspresinya dalam pengendalian sifat organisme. Ilmu pengetahuan genetika modern berawal dari penemuan Gregor Mendel tentang ciri-ciri faktor keturunan yang ditentukan oleh unit dasar yang diwariskan dari generasi ke generasi berikutnya, yang disebut unit genetik atau gen.

Jauh sebelum Mendel mengemukakan teorinya yang terkait dengan hukum pewarisan sifat, Allah swt. melalui firmannya telah memberikan sejumlah isyarat yang semestinya menantang manusia untuk berpikir dalam

[2] M. Quraish Shihab, *Tafsir Al-Misbah Volume 9*, (Jakarta: Lentera Hati, 2002), h. 419 – 423

mengungkapkan misteri hukum-hukum pewarisan sifat.[3] Salah satu yang patut untuk dipikirkan adalah firman Allah swt. QS. Faatir (35:28) sebagai berikut:

وَمِنَ ٱلنَّاسِ وَٱلدَّوَآبِّ وَٱلْأَنْعَٰمِ مُخْتَلِفٌ أَلْوَٰنُهُۥ كَذَٰلِكَ ۗ إِنَّمَا يَخْشَى ٱللَّهَ

مِنْ عِبَادِهِ ٱلْعُلَمَٰٓؤُا۟ ۗ إِنَّ ٱللَّهَ عَزِيزٌ غَفُورٌ ﴿٢٨﴾

Terjemahnya:

"Dan diantara manusia, binatang-binatang melata dan binatang-binatang ternak, bermacam-macam warnanya seperti itu (pula). Sesungguhnya yang takut kepada Allah diantara hamba-hamba-Nya, hanyalah ulama. Sesungguhnya Allah Maha Perkasa lagi Maha Pengampun." (QS. Faatir 35:28)

Ayat tersebut menggaris bawahi kesatuan sumber materi namun menghasilkan aneka perbedaan. Sperma yang menjadi bahan penciptaan dan cikal bakal kejadian manusia dan binatang, pada hakikatnya nampak tidak berbeda dalam kenyataannya satu dengan yang lain. Ayat ini pun mengisyaratkan bahwa faktor genetislah yang menjadikan tumbuh-tumbuhan, hewan dan manusia tetap memiliki ciri khasnya dan tidak berubah hanya disebabkan oleh habitat dan makanannya.[4]

Dalam pewarisan genetika terdapat istilah pewarisan sifat autosomal, yaitu pewarisan sifat keturunan yang ditentukan oleh gen pada autosom, sehingga dapat dijumpai pada laki-laki maupun perempuan karena keduanya mempunyai autosom yang sama. Tata cara pewarisan genotip tipe ini adalah

[3] Muh. Khalifah Mustami, *Genetika* (Makassar: Alauddin University Press, 2013), h. 1

[4] M. Quraish Shihab, *Tafsir Al-Misbah Volume 11*, (Jakarta: Lentera Hati, 2002), h. 465

bahwa satu individu mewariskan satu gen dari tiap induknya untuk membentuk pasangan gen tersendiri.[5]

Untuk menyelidiki pewarisan sifat autosomal dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep aljabar matriks, khususnya pada diagonalisasi matriks. Diagonalisasi matriks merupakan alat bantu yang akan mempermudah peneliti dalam mengetahui pewarisan ini pada keturunan yang tak hingga dibanding dengan menyilangkan satu per satu induk untuk mendapatkan keturunan terbaik.

Suatu matriks bujursangkar A dikatakan *diagonalizable* jika ada suatu matriks P yang *invertible* sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ adalah suatu matriks diagonal. Matriks P dikatakan mendiagonalkan matriks A. Tahapan untuk mendiagonalkan matriks yaitu menentukan n vektor eigen yang bebas linear; membentuk matriks P dengan $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sebagai vektor-vektor kolomnya; dan matriks $P^{-1}AP$ menjadi matriks diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sebagai unsur-unsur diagonalnya secara berurutan dimana λ_i adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan p_i untuk $i = 1,2, \ldots, n$.

Pada penelitian Jeinne Mumu (2013), perkawinan silang pada satu sifat beda (monohibrid) digunakan untuk menunjukkan genotip yang mungkin pada keturunan berdasarkan genotip induk. Dari hasil penelitiannya, diperoleh persamaan-persamaan yang memenuhi ketiga probabilitas genotip individu adalah sebagai berikut:

[5] Ernawati & Joko Purwadi (2009). “Program Pendeteksian Distribusi Pewarisan Genotip Suatu Populasi untuk Tipe Pewarisan Autosomal dengan Metode QR”. *Jurnal Informatika*, Vol. 5, No. 1, h. 32 – 37

$$a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0$$

$$c_n = 0$$

dimana $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ menuju nol saat n mendekati tak hingga sedemikian sehingga $a_n \to 1,\ b_n \to 0,\ dan\ c_n = 0.$ Sehingga kesimpulan diperoleh bahwa seluruh tumbuhan di dalam populasi akan mempunyai genotip AA.[6]

Dari uraian yang telah dijabarkan di atas, penulis melakukan suatu penelitian tentang "Implementasi Diagonalisasi Matriks untuk Menyelidiki Pewarisan Autosomal pada Generasi Ke-n" menggunakan perkawinan silang dengan dua sifat beda (dihibrid).

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dapat dirumuskan suatu permasalahan yaitu bagaimana formula dalam penentuan pewarisan autosomal pada generasi ke-n dengan konsep diagonalisasi matriks?

C. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan formula dalam pewarisan autosomal pada generasi ke-n dengan konsep diagonalisasi matriks.

[6] Jeinne Mumu (2013), "Pewarisan Autosomal dengan Model Diagonalizable Matrix". *ISTECH*, Vol. 5, No. 2, h. 92 – 98

D. Batasan Masalah

Agar pembahasan penelitian ini tidak meluas, maka peneliti memberikan batasan-batasan sebagai berikut:

1. Pewarisan genotip yang digunakan terkhusus pada pewarisan autosomal.
2. Menggunakan perkawinan silang dengan dua sifat beda (dihibrid) dengan perkawinan yang terkontrol (perkawinan yang memperhatikan genotip atau perkawinan yang sudah diatur atau tak bebas).
3. Matriks yang digunakan adalah matriks $n \times n$ dan dapat didiagonalisasi.

E. Manfaat Penelitian

Ada beberapa manfaat yang ingin dicapai oleh peneliti yaitu sebagai berikut:

1. Bagi Peneliti

   Manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini adalah mengimplementasikan ilmu matematika khususnya tentang matriks pada ilmu lain contohnya pada ilmu genetika.

2. Bagi Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar

   Manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini adalah menambah referensi skripsi perpustakaan UIN Alauddin Makassar yang dapat dijadikan bahan referensi bagi mahasiswa tahap penyusunan skripsi.

3. Bagi Pembaca

   Manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai referensi pada penelitian selanjutnya.

F. Sistematika Penulisan

Secara garis besar sistematika penulisan tugas akhir ini dibagi menjadi tiga bagian, yaitu bagian awal tugas akhir, bagian isi tugas akhir, dan bagian akhir tugas akhir.

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi alasan memilih judul, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah dan sistematika penulisan.

Bab II Tinjauan Pustaka

Dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji yaitu matriks, invers matriks, nilai eigen dan vektor eigen, diagonalisasi matriks serta genetika.

Bab III Metode Penelitian

Dalam bab ini dikemukakan jenis penelitian, lokasi dan waktu penelitian, serta prosedur pelaksanaan penelitian.

Bab IV Hasil dan Pembahasan

Dalam bab ini dijelaskan mengenai proses pengaplikasian diagonalisasi matriks dalam menentukan genotip keturunan pada pewarisan autosomal hingga generasi ke-n.

Bab V Penutup

Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan dari pembahasan pada Bab IV serta saran untuk melangkah pada penelitian selanjutnya.

Daftar Pustaka

Lampiran-Lampiran

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

A. Pengertian Matriks

Definisi 2.1

Matriks didefinisikan sebagai suatu susunan bilangan yang diatur dalam baris dan kolom berbentuk persegi atau persegi panjang.

Banyaknya baris dan banyaknya kolom menentukan ukuran (ordo) sebuah matriks. Pandang matriks $A = [a_{ij}], i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots,n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Karena matriks A tersebut mempunyai m baris dan n kolom, maka $m \times n$ sebagai ukurannya.[7]

Contoh 2.1

Berikut ini adalah matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tetapi

$$\begin{bmatrix} 1 & & 2 \\ 3 & & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & 4 & \\ 5 & & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & 11 & \\ & 7 & \\ 8 & & 10 \\ & 9 & \end{bmatrix}$$

---

[7] Kartono, *Aljabar Linear, Vektor dan Eksplorasinya dengan Maple* (Yogyakarta: Graha Ilmu, 2005), h. 37.

bukan matriks karena bukan susunan persegi panjang yang diatur dalam baris dan kolom.[8]

B. Jenis-Jenis Matriks

1. Matriks baris

Suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris disebut matriks baris (vektor baris). Matriks baris umum $\boldsymbol{a},\ 1 \times n$ ditulis sebagai

$$[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$$

2. Matriks kolom

Suatu matriks yang hanya terdiri satu kolom disebut matriks kolom (vektor kolom). Matriks kolom umum $\boldsymbol{b},\ m \times 1$ ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

3. Matriks Bujur sangkar

Suatu matriks A dengan jumlah baris n dan jumlah kolom n disebut matriks bujur sangkar ordo n (*square matrix of order n*) dan entri $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ merupakan diagonal utama (*main diagonal*) matriks A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ [9]

[8] G. Hadley, *Aljabar Linear* (Jakarta: Erlangga, 1983), h. 51 – 52.

[9] Howard Anton, *Aljabar Linear Elementer edisi kedelapan* (Jakarta: Erlangga, 2004), h. 26-28

4. Matriks Skalar

Matriks diagonal di mana $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = k$ (k skalar = bilangan konstan) atau matriks yang diagonal utamanya bernilai sama, tetapi bukan bernilai 1 dan 0.

Contoh 2.2

$$K = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Matriks Transpose

Jika A adalah sebarang matriks $m \times n$, maka transpose A dinyatakan oleh A^{T} dan didefinisikan dengan matriks $n \times m$ yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari A, kolom kedua baris kedua dari A, dan seterusnya.

Contoh 2.3

Jika $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ maka $A^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ [10]

6. Matriks Nol

Sebuah matriks yang seluruh entrinya adalah bilangan nol, seperti

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [0]$$

disebut matriks nol (*zero matrix*). Sebuah matriks nol dapat dinyatakan sebagai 0; jika ukurannya penting maka kita menuliskannya 0_{mxn} untuk matriks nol $m \times n$.

[10] Ririen Kusumawati, *Aljabar Linear & Matriks* (Malang: UIN-Malang Press, 2009), h. 12.

7. Matriks Identitas

Matriks bujur sangkar dengan bilangan 1 pada diagonal utamanya dan 0 pada entri-entri lainnya, seperti

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{dan seterusnya.}$$

Matriks dengan bentuk seperti ini disebut matriks identitas (*identity matrix*) dan dinyataan dengan I. Jika ukurannya penting maka akan ditulis sebagai I_n untuk matriks identitas $n \; x \; n$.

Jika A adalah sebuah matriks $m \times n$, maka

$$AI_n = A \;\text{ dan }\; I_mA = A$$

Contoh 2.3

Perhatikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Maka

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

dan

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$ [11]

[11] Howard Anton, Op. cit, h. 44-45.

8. Matriks Diagonal

Matriks diagonal merupakan matriks persegi yang semua elemen, unsur atau entrinya di atas dan di bawah diagonalnya bernilai nol, biasanya dinotasikan dengan $\{D\}$.

Contoh 2.4

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas merupakan matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol.

Contoh 2.5

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

10. Matriks Segitiga Bawah

Matriks segitiga bawah merupakan matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol.

Contoh 2.6

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$ [12]

11. Matriks Simetrik

Suatu matriks bujur sangkar A adalah simetrik (*symmetric*) jika $A = A^T$

[12] Irwan, *Pengantar Aljabar Elementer* (Makassar: Alauddin University Press, 2011), h. 189 – 190

Contoh 2.7

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

12. Matriks Skew-Simetris

Matriks bujur sangkar yang mempunyai sifat bahwa $A^t = -A$. Atau matriks bujur sangkar $A = (a_{ij})$ adalah skew-simetris jika $a_{ij} = -a_{ji}$ untuk semua nilai i dan j (entri-entri diagonal utama adalah nol).

Contoh 2.8

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks skew-simetris, sebab

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -A$$ [13]

C. Operasi Matriks dan Sifat-Sifatnya

1. Kesetaraan Matriks

Definisi 2.2

Dua matriks A dan B dikatakan sama, ditulis $A = B$ jika keduanya identik, yaitu jika elemen-elemen bersesuaian adalah sama. Maka $A = B$, jika dan hanya jika $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i, j. Jika A tidak sama dengan B, kita tulis $A \neq B$.

[13] Ririen Kusumawati, *Aljabar Linear & Matriks* (Malang: UIN-Malang Press, 2009), h. 13 – 14.

Contoh 2.9

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$

$A \neq B$ karena $a_{12} \neq b_{12}, a_{22} \neq b_{22}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad A = B$ [14]

2. Penjumlahan Matriks

Jika $A = [a_{jk}]$ dan $B = [b_{jk}]$ mempunyai ukuran yang sama kita mendefinisikan jumlah dari A dan B sebagai $A + B = [a_{jk} + b_{jk}]$.

Contoh 2.10

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ maka

$A + B = \begin{bmatrix} 2+3 & 1-5 & 4+1 \\ -3+2 & 0+1 & 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$

Hukum komutatif dan sosiatif untuk penjumlahan dipenuhi oleh matriks, yaitu untuk suatu matriks A, B dan C yang berukuran sama berlaku

$$A + B = B + A, \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$

3. Pengurangan Matriks

Jika $A = [a_{jk}]$, $B = [b_{jk}]$ berukuran sama, kita mendefinisikan selisih dari A dan B sebagai $A - B = [a_{jk} - b_{jk}]$.

Contoh 2.11

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ maka

$A - B = \begin{bmatrix} 2-3 & 1+5 & 4-1 \\ -3-2 & 0-1 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -5 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$ [15]

[14] G. Hadley, *Aljabar Linear* (Jakarta: Erlangga, 1983), h. 52 – 53.

4. **Kelipatan Skalar**

Definisi 2.3

Jika A adalah matriks sebarang dan c adalah skalar sebarang, maka hasilkalI-nya (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks A dengan bilangan c. Matriks cA disebut sebagai kelipatan skalar (*scalar multiple*) dari A.

Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$, maka

$$(cA)_{ij} = c(A_{ij}) \ = ca_{ij}$$

Contoh 2.12

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Maka

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad (-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

5. **Perkalian Matriks**

Definisi 2.4

Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka hasilkali (*product*) AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, pisahkan baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.

[15] Murray R. Spiegel, *Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuwan* (Jakarta: Erlangga, 2011), h. 363

Secara umum, jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks $m \times r$, dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks $r \times n$, maka

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rj} & \dots & b_{m} \end{bmatrix}$$

entri $(AB)_{ij}$ pada baris i dan kolom j dari AB diperoleh melalui

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$ [16]

Contoh 2.13

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [3(4) + 0(6)] & [3(7) + 0(8)] \\ [1(4) + 1(6)] & [1(7) + 1(8)] \\ [5(4) + 2(6)] & [5(7) + 2(8)] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 21 \\ 10 & 15 \\ 32 & 51 \end{bmatrix}$$

Perkalian matriks tidak memenuhi semua aturan perkalian dari bilangan-bilangan biasa. Salah satu beda yang paling penting ialah kenyataan bahwa pada umumnya perkalian matriks adalah tidak komutatif, yaitu AB dan BA tidak sama.

[16] Howard Anton, *Aljabar Linear Elementer edisi kedelapan* (Jakarta: Erlangga, 2004), h. 28–32

Contoh 2.14

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $AB = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Tetapi, BA tidak dapat didefinisikan karena jumlah kolom B tidak sama dengan jumlah baris A.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (3 + 8 + 5) = 16$$

Dalam contoh ini AB dan BA terdefinisi, tetapi hasil perkaliannya sama sekali berbeda.[17]

Teorema 2.1

Dengan mengasumsikan bahwa ukuran matriks sedemikian rupa sehinggga operasi-operasi yang disebutkan dapat dilakukan, aturan-aturan aritmatika matriks berikut ini berlaku.

(a) $A + B = B + A$ (Hukum komutatif penjumlahan)

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Hukum asosiatif penjumlahan)

(c) $A(BC) = (AB)C$ (Hukum asosiatif perkalian)

(d) $A(B + C) = AB + AC$ (Hukum distributif kiri)

(e) $(B + C)A = BA + CA$ (Hukum distributif kanan)

[17] G. Hadley, *Aljabar Linear* (Jakarta: Erlangga, 1983), h. 58 – 59

(f) $A(B - C) = AB - AC$

(g) $(B - C)A = BA - CA$

(h) $a(B + C) = aB + aC$

(i) $a(B - C) = aB - aC$

(j) $(a + b)C = aC + bC$

(k) $(a - b)C = aC - bC$

(l) $a(bC) = (ab)C$

(m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Contoh 2.15

Sebagai sebuah ilustrasi hukum asosiatif pada perkalian matriks, perhatikan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Maka

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

dan

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

sehingga $(AB)C = A(BC)$.[18]

D. Invers Matriks

Definisi 2.5

Jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik (*invertible*) dan B disebut sebagai invers (*inverse*) dari A. Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai matriks singular.

Contoh 2.16

Matriks

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ adalah invers dari } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

karena

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

dan

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

1. Sifat-sifat Invers

Teorema 2.2

Jika B dan C kedua-duanya adalah invers dari matriks A maka $B = C$.

[18] Howard Anton, Op. cit, h. 42-43

Jika A dapat dibalik, maka inversnya akan dinyatakan dengan simbol A^{-1}. Jadi,

$$AA^{-1} = I \quad \text{dan} \quad A^{-1}A = I$$

Teorema 2.3

Matriks

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dapat dibalik jika $ad - bc \neq 0$, dan inversnya dapat dihitung sesuai dengan rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & -\frac{b}{ad - bc} \\ -\frac{c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

Teorema 2.4

Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dengan ukuran yang sama, maka AB dapat dibalik dan

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Contoh 2.17

Perhatikan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan rumus pada teorema 2.12 diperoleh

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Selain itu,

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.[19]

E. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Pandang sebuah matriks bujur sangkar $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$ dan persamaan vektor

$$A\,x = \lambda\,x$$

dengan λ adalah skalar.

Suatu nilai λ dimana persamaan vektor itu mempunyai solusi $x \neq 0$ dinamakan nilai karakteristik (nilai eigen) dari matriks A. Sedangkan solusi padanannya, yaitu solusi $x \neq 0$ dinamakan vektor karakteristik (vektor eigen) dari matriks A yang berpadanan dengan nilai λ tersebut. Himpunan nilai-nilai karakteristik disebut spektrum dari matriks A dan nilai mutlak terbesar dari nilai karakteristik itu dinamakan radius spektral dari matriks A. Sedangkan himpunan semua vektor karakteristik yang berpadanan dengan nilai karakteristik dari matriks A bersama-sama dengan vektor 0 membentuk suatu ruang yang dinamakan ruang karakteristik matriks A yang berpadanan dengan nilai karakteristik ini.[20]

[19] Ibid, h. 46-49.

[20] Kartono, *Aljabar Linear, Vektor dan Eksplorasinya dengan Maple* (Yogyakarta: Graha Ilmu, 2005), h. 58.

Definisi 2.6

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor taknol x pada R^n disebut vektor eigen (*eigenvector*) dari A jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x; jelasnya,

$$Ax = \lambda x$$

untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen (*eigenvalue*) dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ.

Contoh 2.18

Vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

yang terkait dengan nilai eigen $\lambda = 3$, karena

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x$$

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks $A, n \times n$, kita menuliskan kembali $Ax = \lambda x$ sebagai

$$Ax = \lambda I x$$

atau secara ekuivalen,

$$(\lambda I - A)x = 0$$

Agar λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi taknol dari persamaan ini. Akan tetapi, persamaan di atas memiliki solusi taknol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Persamaan ini disebut persamaan karakteristik (*characteristic equation*) matriks A; skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen A. Apabila diperluas lagi, determinan $\det(\lambda I - A)$ adalah sebuah polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai polinomial karakteristik (*characteristic polynomial*) matriks A.

Dapat ditunjukkan bahwa jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka polinomial karakteristik A memiliki derajat n dan koefisien variabel λ^n adalah 1; jelasnya, polinomial karakteristik $p(x)$ dari sebuah matriks $n \times n$ memiliki bentuk

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

Berdasarkan Teorema Dasar Aljabar bahwa persamaan karakteristik

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

memiliki sebanyak-banyaknya n solusi yang berbeda, sehingga sebuah matriks $n \times n$ memiliki sebanyak-banyaknya n nilai eigen yang berbeda.

Contoh 2.19

Tentukan nilai-nilai eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Polinomial karakteristik A adalah

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

Nilai-nilai eigen dari A oleh karenanya harus memenuhi persamaan kubik

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$$

Untuk menyelesaikan persamaan ini, kita akan mulai dengan mencari solusi-solusi bilangan bulatnya. Pekerjaan ini dapat jauh disederhanakan apabila kita memanfaatkan fakta bahwa semua solusi bilangan bulat bagi sebuah persamaan polinomial dengan koefisien-koefisien bilangan bulat

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

haruslah merupakan faktor-faktor pembagi dari konstanta c_n. Sehingga, solusi bilangan bulat yang mungkin dari (2) hanyalah faktor-faktor pembagi dari bilangan -4, yaitu $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Dengan mensubstitusikan secara berturut-turut nilai-nilai ini ke dalam (2), akan menghasilkan $\lambda = 4$ sebagai sebuah solusi bilangan bulatnya. Sebagai konsekuensinya, $\lambda - 4$ haruslah merupakan salah satu faktor dari sisi kiri (2). Dengan membagi $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$ dengan $\lambda - 4$ akan menunjukkan bahwa (2) dapat dituliskan kembali sebagai

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

Sehingga, solusi-solusi dari (2) yang masih belum diketahui memenuhi persamaan kuadratik

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1$$

yang dapat diselesaikan dengan rumus kuadratik. Dengan demikian, nilai-nilai eigen dari A adalah

$$\lambda = 4, \qquad \lambda = 2 + \sqrt{3}, \qquad dan \qquad \lambda = 2 - \sqrt{3}.$$

Teorema 2.5

Jika A adalah sebuah matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), maka nilai-nilai eigen dari A adalah entri-entri yang terletak pada diagonal utama matriks A.

Contoh 2.20

Tentukan nilai-nilai eigen dari matriks segitiga atas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Dengan mengingat bahwa determinan sebuah matriks segitiga adalah hasilkali entri-entrinya yang terletak pada diagonal utama, kita memperoleh

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ 0 & \lambda - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_{44} \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44})$$

Sehingga persamaan karakteristiknya adalah

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) = 0$$

dan nilai-nilai eigennya adalah

$$\lambda = a_{11}, \qquad \lambda = a_{22}, \qquad \lambda = a_{33}, \qquad \lambda = a_{44}$$

yang tepat merupakan entri-entri diagonal dari matriks A.

Vektor-vektor eigen matriks A yang terkait dengan sebuah nilai eigen λ adalah vektor-vektor taknol x yang memenuhi persamaan $Ax = \lambda x$. Dengan kata lain, vektor-vektor eigen yang terkait dengan λ adalah vektor-vektor taknol di dalam ruang solusi $(\lambda I - A)x = 0$. Kita menyebut ruang solusi ini sebagai ruang eigen (*eigenspace*) dari matriks A yang terkait dengan λ.

Contoh 2.21

Tentukan basis-basis untuk ruang eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik matriks A adalah $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$, atau dalam bentuk terfaktorkan, $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$; sehingga, nilai-nilai eigen dari A adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$, dan dengan demikian terdapat dua ruang eigen dari A.

Menurut definisinya,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

adalah sebuah vektor eigen dari matriks A yang terkait dengan λ jika dan hanya jika x adalah sebuah solusi nontrivial dari $(\lambda I - A)x = 0$, yaitu

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\lambda = 2$, maka (3) menjadi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menyelesaikan sistem ini akan menghasilkan

$$x_1 = -s, \qquad x_2 = t, \qquad x_3 = s$$

Sehingga, vektor eigen dari A yang terkait dengan $\lambda = 2$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$x = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dan \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bebas linear, vektor-vektor ini membentuk sebuah basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda = 2$.

Jika $\lambda = 1$, maka (3) menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menyelesaikan sistem ini akan menghasilkan

$$x_1 = -2s, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = s$$

Dengan demikian, vektor eigen yang terkait dengan $\lambda = 1$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$\begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ sehingga } \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda = 1$.

F. Diagonalisasi

Definisi 2.7

Sebuah matriks bujursangkar A dikatakan dapat didiagonalisasi (*diagonalizable*) jika terdapat sebuah matriks P yang dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal; matriks P dikatakan mendiagonalisasi (*diagonalize*) A.

Teorema 2.6

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka kedua pernyataan berikut ini adalah ekuivalen.

(a) A dapat didiagonalisasi.

(b) A memiliki n vektor eigen yang bebas linear.

Contoh 2.22

Tentukan sebuah matriks P yang mendiagonalisasi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik dari matriks A yaitu

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

dan kita memperoleh basis-basis berikut ini untuk ruang eigen:

$$\lambda = 2;\ \ p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 1;\ \ p_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Terdapat tiga vektor basis secara keseluruhan, sehingga matriks A dapat didiagonalisasi dan

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mendiagonalisasi A karena

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ [21]

[21] Howard Anton, *Aljabar Linear Elementer edisi kedelapan* (Jakarta: Erlangga, 2004), h. 384 – 398

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$ dan P adalah sebuah matriks yang dapat dibalik, maka

$$(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AIAP = P^{-1}A^2P$$

Secara lebih umum, untuk bilangan bulat positif sebarang k

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$$

Dari persamaan ini, jika A dapat didiagonalisasi, dan $P^{-1}AP = D$ adalah sebuah matriks diagonal, maka

$$P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = D^k$$

Dengan menyelesaikan persamaan ini untuk memperoleh A^k akan menghasilkan

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Persamaan terakhir ini menyatakan pangkat ke-k matriks A dalam konteks pangkat ke-k sebuah matriks diagonal D. Jika

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}, \text{ maka } D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$ [22]

G. Genetika

Penerusan sifat dari satu generasi ke generasi berikutnya disebut pewarisan sifat atau hereditas (heredity, dari kata Latin *here*, pewaris). Genetika (*genetics*) adalah bidang sains yang mempelajari hereditas dan

[22] Ibid, h. 403

variasi herediter. Orang tua memberikan informasi terkode kepada anak-anaknya dalam bentuk unit herediter yang disebut gen (*gene*). [23]

1. Peristilahan

a. *Fenotip* adalah karakteristik terukur atau sifat berbeda apapun yang dimiliki oleh suatu organisme. Semua alel yang dimiliki oleh suatu individu menyusun *genotip*nya.

b. Persatuan gamet-gamet yang membawa alel-alel identik menghasilkan sebuah genotip *homozigot*. Suatu *homozigot* mengandung alel-alel yang sama pada suatu lokus tunggal dan menghasilkan hanya satu jenis gamet saja.

c. Persatuan gamet-gamet yang membawa alel-alel yang berbeda menghasilkan genotip *heterozigot*. Suatu *heterozigot* mengandung dua alel yang berbeda pada suatu lokus tunggal dan menghasilkan jenis-jenis gamet yang berbeda.

d. Jika sebuah fenotip tertentu berasosiasi dengan sebuah alel (*a*) hanya jika alel alternatifnya (*A*) tidak ada dalam genotip, alel *a* disebut *resesif*. Fenotip yang diberikan oleh alel *dominan* (*A*) dapat teramati pada heterozigot maupun homozigot.

e. Suatu individu heterozigot yang memiliki alel resesif berbahaya yang tidak muncul secara fenotip karena tertutupi oleh alel dominan normal disebut *pembawa (carrier)*.[24]

[23] Neil A. Campbell, dkk. *Biologi* (Jakarta: Erlangga, 2010), h. 267 – 268

[24] Susan Elrod dan William Stansfield. *Schaum's Outlines Teori dan Soal-Soal Genetika* (Jakarta: Erlangga, 2007), h. 19 – 20

2. Pewarisan Sifat pada Manusia

Pewarisan sifat pada manusia terbagi atas 2 yaitu : pewarisan sifat autosomal dan gonosomal.

a. Pewarisan Sifat Autosomal

Yang dimaksud dengan pewarisan sifat *autosomal* adalah sifat keturunan yang ditentukan oleh gen pada *autosom*. Gen ini ada yang *dominan* dan ada yang *resesif*. Karena laki-laki dan perempuan mempunyai *autosom* yang sama, jadi sifat keturunan yang ditentukan oleh gen *autosomal* dapat dijumpai pada keturunan laki-laki maupun perempuan.

1) Pewarisan *Gen Autosomal Dominan*

Suatu penyakit atau kelainan dikatakan menurun melalui autosom dominan apabila kelainan atau penyakit tersebut timbul meskipun hanya terdapat satu gen yang cacat dari salah satu orang tuanya. Sebagai perbandingan, penyakit autosom resesif akan muncul saat seorang individu memiliki dua kopi gen mutan. Syarat pada pewarisan autosomal dominan antara lain:

i. Sifat tersebut mungkin ada pada pria maupun wanitanya.
ii. Sifat itu juga terdapat pada salah satu orang tua pasangan.
iii. Sekitar 50% anak yang dilahirkan akan memiliki sifat ini meskipun salah satu pasangan tidak memiliki sifat ini.
iv. Pola pewarisan bersifat vertikal, artinya tiap generasi yang ada pasti ada yang memiliki sifat ini.

v. Bila sifat yang diwariskan berupa penyakit keturunan, anak-anak yang tidak menderita penyakit ini bila menikah dengan pasangan yang normal, maka keturunan yang dihasilkan juga akan normal.

Contoh penyakit yang ditimbulkan oleh pewarisan *gen autosomal dominan* adalah *Polidaktil* (jari lebih), kemampuan mengecap *phenylthiocarbamide* (PTC), *Thalasemia*, *Dentinogenesis imperfeca* (gigi opalesen), *Anonychia*, *Retinal aplasia*, dan katarak.

2) Pewarisan *Gen Autosomal Resesif*

Orang tua dari anak yang terinfeksi penyakit akibat kelainan gen resesif pada autosom, mungkin tidak menampakkan penyakit. Anak yang memiliki gejala kelainan menandakan adanya pewarisan gen resesif dari kedua orang tua. Karena kelainan resesif jarang ditemukan, seorang anak memiliki resiko yang lebih tinggi bila orang tua mereka memiliki hubungan saudara. Hal tersebut disebabkan seringnya individu – individu yang memiliki hubungan saudara mewarisi gen yang sama dari nenek moyang mereka. Perkawinan yang sering terjadi pada pewarisan gen resesif pada *autosom* adalah perkawinan antara individu yang memiliki *genotipe heterozigot* (*carier*).

Contoh penyakit yang ditimbulkan oleh pewarisan *gen autosomal resesif* adalah kelainan *Albino*, *Cystic fibrosis*, dan penyakit *Tay-Sachs*.

b. Pewarisan Sifat Gonosomal

1) Pewarisan Gen Resesif Terpaut Kromosom X

Saat *fertilisasi*, ibu menyumbangkan satu *kromosom* X untuk anaknya, sementara ayah menyumbangkan satu *kromosom* X untuk anak perempuannya dan satu *kromosom* Y untuk anak laki-lakinya. Misalkan *kromosom* X abnormal dapat dinyatakan dengan Xh dan kromosom X normal dengan X. Adapun Contoh penyakit akibat pewarisan gen resesif terpaut kromosom X adalah buta warna, *Hemofilia*, dan Anodontia.

2) Pewarisan Gen Dominan Terpaut Kromosom X

Kromosom X abnormal dapat dinyatakan dengan Xr dan kromosom X normal dengan X. Karena *gen* bersifat dominan, tidak terdapat *karier*. Adapun contoh penyakit akibat pewarisan *gen dominan* terpaut *kromosom* X adalah anenamel, penyakit Hutington.

3) Pewarisan Gen Terpaut Kromosom Y

Gen-gen yang terpaut pada kromosom Y hanya diwariskan pada anak laki-laki, oleh karena itu sering disebut sebagai ***gen holandrik***. Contoh dari penyakit yang terpaut kromosom Y adalah *hypertrichosis*, *hystrixgraviour*, dan *webbedtoes*. [25]

3. Pewarisan Mendel

Seorang biarawan dari Austria, bernama Gregor Johann Mendel, menjelang akhir abad ke-19 melakukan serangkaian percobaan persilangan pada kacang ercis (*Pisum sativum*). Dari percobaan yang dilakukannya

[25] Ahmad Alkahestry, *Pewarisan Sifat pada Manusia*. http://sahabat-ilmu-kita.blogspot.com/2012/10/pewarisan-sifat-pada-manusia.html

selama bertahun-tahun tersebut, Mendel berhasil menemukan prinsip-prinsip pewarisan sifat, yang kemudian menjadi landasan utama bagi perkembangan genetika sebagai suatu cabang ilmu pengetahuan. Berkat karyanya inilah, Mendel diakui sebagai Bapak Genetika.[26]

Mendel dapat memberi beberapa kesimpulan penting, yaitu:

i. Hibrid (ialah hasil persilangan dua individu dengan tanda beda) memiliki sifat yang mirip dengan induknya dan setiap hibrid mempunyai sifat yang sama dengan hibrid yang lain dari spesies yang sama.
ii. Karakter (sifat) dari keturunan suatu hibrid selalu timbul kembali secara teratur dan inilah yang memberi petunjuk kepada Mendel bahwa tentu ada faktor-faktor tertentu yang mengambil peranan dalam pemindahan sifat dari satu generasi ke generasi berikutnya.
iii. Mendel merasa bahwa apabila "faktor-faktor keturunan" itu mengikuti distribusi yang logis, maka suatu hukum atau pola akan dapat diketahui dengan cara mengadakan banyak persilangan dan menghitung bentuk-bentuk yang berbeda seperti yang tampak dalam keturunan.[27]

Pada permulaan tahun-tahun 1900 W.L. Johanssen mengusulkan istilah gen untuk menyatakan unit pewarisan. Sekalipun Mendel tidak menyebutnya gen, tetapi unit, namun untuk mudahnya kita gunakan istilah gen. Jadi, gen-gen yang menentukan sifat-sifat yang diteliti Mendel,

[26] Agus Hery Susanto, *Genetika* (Yogyakarta: Graha Ilmu, 2011), h. 13
[27] Suryo, *Genetika Manusia* (Yogyakarta: Gajah Mada University Press, 2005), h. 86 – 88

seperti telah diketahui, bias dominan atau resesif. Marilah kita nyatakan gen yang dominan dengan huruf besar dan gen yang resesif dengan huruf kecil, sebagaimana diusulkan Mendel dan sebagaimana ahli-ahli genetika melakukannya secara tradisional sejak saat itu.[28]

a. *Persilangan Monohibrid*

Mendel mengambil serbuk sari dari bunga tanaman yang bijinya berlekuk dan diserbukkan pada putik dari bunga tanaman yang bijinya bulat. Semua keturunan F_1 yang berupa suatu hibrid berbentuk tanaman yang bijinya bulat. Ketika menyilangkan tanaman-tanaman F_1 didapatkan keturunan F_2 yang memperlihatkan perbandingan fenotif kira-kira 3 biji bulat : 1 biji berlekuk.

Tabel 2.1 Persilangan Monohibrid

	B	B
B	BB (bulat)	Bb (bulat)
B	Bb (bulat)	bb (berlekuk)

Disini tampak bahwa bila terdapat dominansi sepenuhnya, maka persilangan monohibrid menghasilkan 4 kombinasi dalam keturunan dengan perbandingan fenotif 3 : 1. Juga dapat diketahui bahwa suatu individu dapat memiliki fenotif sama (contohnya tanaman

[28] Anna C. Pai, *Dasar-Dasar Genetika* (Jakarta: Erlangga) h. 7

berbiji bulat) tetapi memiliki genotif yang berlainan (contohnya BB dan Bb).

Dari percobaan di atas, Mendel dapat mengambil kesimpulan bahwa pada waktu pembentukan gamet-gamet (serbuk sari dan sel telur) maka gen-gen yang menentukan suatu sifat mengadakan segregasi (memisah), sehingga setiap gamet hanya menerima sebuah gen saja.[29]

b. *Persilangan Dihibrid*

Dalam praktek dua individu dapat mempunyai bedasifat lebih dari satu, misalnya beda mengenai bentuk dan warna biji kapri. Hasil persilangannya (F_1) dinamakan dihibrid.

Mula-mula tanaman kapri yang bijinya berkerut hijau (bbkk) disilangkan dengan tanaman yang bijinya bulat kuning homozigotik (BBKK). Semua tanaman F_1 (dihibrid) adalah seragam, yaitu berbiji bulat kuning (BbKk). Persilangan tanaman F_1 x F_1 menghasilkan keturunan F_2 yang memperlihatkan 16 kombinasi terdiri dari 4 macam fenotif, ialah berbiji bulat kuning, bulat hijau, berkerut kuning, dan berkerut hijau. Mendel dapat mengambil kesimpulan bahwa anggota dari sepasang gen memisah secara bebas (tidak saling mempengaruhi) ketika berlangsung meiosis selama pembentukan gamet-gamet.[30]

---

[29] Suryo, *Genetika Manusia* (Yogyakarta: Gajah Mada University Press, 2005), h. 90 – 91

[30] Suryo, *Genetika Manusia* (Yogyakarta: Gajah Mada University Press, 2005), h. 95

Tabel 2.2 Persilangan Dihibrid

	BK	Bk	bK	bk
BK	BBKK	BBKk	BbKK	BbKk
Bk	BBKk	BBkk	BbKk	Bbkk
bK	BbKK	BbKk	bbKK	bbKk
bk	BbKk	Bbkk	bbKk	bbkk

BAB III
METODE PENELITIAN

A. Jenis Penelitian

Jenis penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*Library Research*) dengan mengumpulkan beberapa literatur baik berupa buku maupun jurnal yang berkaitan dengan penelitian ini.

B. Lokasi dan Waktu Penelitian

1. Lokasi Penelitian adalah perpustakaan UIN Alauddin Makassar yang memiliki buku-buku yang berkaitan dengan Matriks dan Genetika.
2. Waktu penelitian adalah dimulai bulan September 2015 sampai Februari 2016.

C. Prosedur Penelitian

Untuk mencapai tujuan penelitian, maka langkah-langkah yang ditempuh adalah sebagai berikut:

1. Membentuk tabel probabilitas genotip keturunan yang mungkin dari genotip induknya melalui uji persilangan.
2. Membentuk persamaan linear dari tabel probabilitas sedemikian sehingga didapatkan persamaan dalam notasi matriks.
3. Membentuk sebuah matriks M sedemikian sehingga elemen-elemen yang ada pada matriks sesuai dengan tabel probabilitas dari masing-masing genotip.

4. Menentukan nilai-nilai eigen dari matriks M serta vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen tersebut.
5. Membentuk matriks P dari vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen.
6. Menentukan invers dari matriks P dengan cara mereduksi matriks menjadi matriks identitas.
7. Jika PMP^{-1} adalah matriks diagonal, maka matriks M dapat didiagonalisasi sedemikian sehingga $M^k = PD^kP^{-1}$.
8. Membentuk persamaan-persamaan eksplisit dari hasil $M^k = PD^kP^{-1}$.
9. Menyelesaikan limit dari masing-masing persamaan pada langkah ke-8 untuk n menuju tak hingga.
10. Nilai limit yang diperoleh merupakan probabilitas genotip sifat tertentu pada generasi ke-n.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada pembahasan ini akan diterangkan bagaimana cara menentukan kromosom dari orang tua yang diteruskan pada keturunannya, yaitu perkawinan silang yakni persilangan dengan dua sifat beda (dihibrid) dengan perkawinan terkontrol. Genotip dari kedua orang tua yang digunakan pada pembahasan ini yakni gabungan dua kromosom (pembawa sifat) yang disimbolkan dengan huruf AABB dan aabb.

A. Hasil Penelitian

Pada pewarisan autosomal, suatu individu mewarisi satu alel dari tiap pasangan alel induknya untuk membentuk pasangan alelnya sendiri. Sebagai contoh, jika induk mempunyai genotip Aa untuk satu sifat tertentu maka keturunannya akan mewarisi alel A atau alel a dari induk tersebut dengan peluang yang sama[31]. Adapun persilangan terkontrol adalah persilangan antara individu normal dengan seluruh kemungkinan genotip yang ada yaitu sebagai berikut:

1. P (induk) : AABB × AABB

   Gamet : AB dan AB

Tabel 4.1 Persilangan AABB dan AABB

	AB
AB	AABB

[31] Kristina Wijayanti (1997). "Penerapan Diagonalisasi Matriks Dalam Genetika Terapan". *Cakrawala Pendidikan*, No. 3, h. 95

Jadi peluang genotip dari persilangan AABB dan AABB adalah sepenuhnya bergenotip AABB.

2. P (induk) : AABB × AABb

   Gamet : AB dan AB, Ab

Tabel 4.2 Persilangan AABB dan AABb

	AB	Ab
AB	AABB	AABb

Jadi peluang genotip dari persilangan AABB dan AABb adalah $\frac{1}{2}$ AABB dan $\frac{1}{2}$ AABb.

3. P (induk) : AABB × AAbb

   Gamet : AB dan Ab

Tabel 4.3 Persilangan AABB dan AAbb

	Ab
AB	AABb

Jadi peluang genotip dari persilangan AABB dan AAbb adalah sepenuhnya bergenotip AABb.

4. P (induk) : AABB × AaBB

   Gamet : AB dan AB, aB

Tabel 4.4 Persilangan AABB dan AaBB

	AB	aB
AB	AABB	AaBB

Jadi peluang genotip dari persilangan AABB dan AaBB adalah $\frac{1}{2}$ AABB dan $\frac{1}{2}$ AaBB.

5. P (induk) : AABB × AaBb

   Gamet : AB dan AB, Ab, aB, dan ab

Tabel 4.5 Persilangan AABB dan AaBb

	AB	Ab	aB	ab
AB	AABB	AABb	AaBB	AaBb

Jadi peluang genotip dari persilangan AABB dan AaBb adalah $\frac{1}{4}$ AABB, $\frac{1}{4}$ AABb, $\frac{1}{4}$ AaBB dan $\frac{1}{4}$ AaBb.

6. P (induk) : AABB × Aabb

   Gamet : AB dan Ab, ab

Tabel 4.6 Persilangan AABB dan Aabb

	Ab	ab
AB	AABb	AaBb

Jadi peluang genotip dari persilangan AABB dan Aabb adalah $\frac{1}{2}$ AABb dan $\frac{1}{2}$ AaBb.

7. P (induk) : AABB × aaBB

   Gamet : AB dan aB

Tabel 4.7 Persilangan AABB dan aaBB

	aB
AB	AaBB

Jadi peluang genotip dari persilangan AABB dan aaBB adalah sepenuhnya bergenotip AaBB.

8. P (induk) : AABB × aaBb

   Gamet : AB dan aB, ab

Tabel 4.8 Persilangan AABB dan aaBb

	aB	ab
AB	AaBB	AaBb

Jadi peluang genotip dari persilangan AABB dan aaBb adalah $\frac{1}{2}$ AaBB dan $\frac{1}{2}$ AaBb.

9. P (induk) : AABB × aabb

   Gamet : AB dan ab

Tabel 4.9 Persilangan AABB dan aabb

	ab
AB	AaBb

Jadi peluang genotip dari persilangan AABB dan AABb adalah sepenuhnya bergenotip AaBb.

Dengan memperhatikan tabel di atas tentang persilangan dan kemungkinan-kemungkinan keturunan yang dihasilkan, maka selanjutnya akan dipaparkan secara langsung dari probabilitas dari genotip yang mungkin pada keturunan untuk seluruh kombinasi yang mungkin dari genotip induknya.

Tabel 4.10 Peluang genotip dari persilangan dua individu bagi pewarisan autosomal

Keturunan	Genotip Orang Tua																		
	AABB-AABB	AABB-AABb	AABB-AAbb	AABB-AaBB	AABB-AaBb	AABB-Aabb	AABB-aaBB	AABB-aaBb	AABB-aabb	…	Aabb-aaBB	Aabb-aaBb	Aabb-aabb	aaBB-aaBB	aaBB-aaBb	aaBB-aabb	aaBb-aaBb	aaBb-aabb	Aabb-aabb
AABB	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	…	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AABb	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	…	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AAbb	0	0	0	0	0	0	0	0	0	…	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
aaBB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋮	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
aaBb	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋮	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
aabb	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋮	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

Dari tabel 4.10, dapat dipartisi menjadi Sembilan tabel peluang persilangan berdasarkan kemungkinan genotip keturunan yang ada.

Tabel 4.11 Peluang genotip dari persilangan atau perkawinan silang individu normal AABB dengan seluruh kemungkinan genotip yang ada

Genotip keturunan		Genotip dari kedua orang tua								
		AABB-AABB	AABB-AABb	AABB-AAbb	AABB-AaBB	AABB-AaBb	AABB-Aabb	AABB-aaBB	AABB-aaBb	AABB-aabb
		a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	e_{n-1}	f_{n-1}	g_{n-1}	h_{n-1}	i_{n-1}
a_n	AABB	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0
b_n	AABb	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
c_n	AAbb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d_n	AaBB	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
e_n	AaBb	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
f_n	Aabb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
g_n	aaBB	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h_n	aaBb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i_n	aabb	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Untuk menghitung probabilitas gen yang dimiliki satu individu maka dapat dibuat

$$X^n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} \qquad \text{untuk } n = 1, 2, \ldots \qquad (4.1)$$

Keterangan:

a_n = fraksi dari probabilitas individu dengan genotip AABB pada generasi ke-n

b_n = fraksi dari probabilitas individu dengan genotip AABb pada generasi ke-n

c_n = fraksi dari probabilitas individu dengan genotip AAbb pada generasi ke-n

d_n = fraksi dari probabilitas individu dengan genotip AaBB pada generasi ke-n

e_n = fraksi dari probabilitas individu dengan genotip AaBb pada generasi ke-n

f_n = fraksi dari probabilitas individu dengan genotip Aabb pada generasi ke-n

g_n = fraksi dari probabilitas individu dengan genotip aaBB pada generasi ke-n

h_n = fraksi dari probabilitas individu dengan genotip aaBb pada generasi ke-n

i_n = fraksi dari probabilitas individu dengan genotip aabb pada generasi ke-n

Dan $a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0, h_0$ serta i_0 menyatakan distribusi permulaan dari genotip-genotip itu. Berdasarkan tabel 4.11, dapat diperoleh

$$a_n + b_n + c_n + d_n + e_n + f_n + g_n + h_n + i_n = 1 \text{ untuk } n = 1, 2, \ldots \quad (4.2)$$

Dari Tabel 4.11 dapat ditentukan distribusi genotip setiap generasi dari distribusi genotip generasi terdahulu dengan menggunakan persamaan. Dimana persamaan itu menyatakan bahwa semua turunan yang dihasilkan, yakni $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n, h_n$ dan i_n dari individu yang bergenotip AABB, AABb, AAbb, AaBB, AaBb, Aabb, aaBB, aaBb, aabb yang dinyatakan dengan $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, d_{n-1}, e_{n-1}, f_{n-1}, g_{n-1}, h_{n-1}, i_{n-1}$. Sedangkan koefisien-koefisien dari sembilan persamaan itu berasal dari probabilitas genotip yang mungkin dimiliki oleh individu tersebut dari hasil perkawinan, persamaan itu adalah:

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1} + \frac{1}{2} d_{n-1} + \frac{1}{4} e_{n-1}$$

$$b_n = \frac{1}{2} b_{n-1} + c_{n-1} + \frac{1}{4} e_{n-1} + \frac{1}{2} f_{n-1}$$

$$c_n = 0$$

$$d_n = \frac{1}{2} d_{n-1} + \frac{1}{4} e_{n-1} + g_{n-1} + \frac{1}{2} h_{n-1}$$

$$e_n = \frac{1}{4} e_{n-1} + \frac{1}{2} f_{n-1} + \frac{1}{2} h_{n-1} + i_{n-1}$$

$$f_n = g_n = h_n = i_n = 0 \quad (4.3)$$

Pada persamaan (4.3) menunjukkan bahwa keturunan dengan genotip AABB, AABb, AaBB, AaBb, akan mempunyai genotip dalam program pengembangbiakan ini. Kemudian dapat ditulis persamaannya dalam notasi matriks sebagai

$$X^n = AX^{n-1} \tag{4.4}$$

dengan

$$X^n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix}, \ X^{n-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \\ d_{n-1} \\ e_{n-1} \\ f_{n-1} \\ g_{n-1} \\ h_{n-1} \\ i_{n-1} \end{bmatrix}, \text{dan } A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pada persamaan (4.4), jika matriks A dipangkatkan 2, maka persamaan tersebut menjadi

$$(X^n)^2 = A^2(X^{n-1})^2$$

$$X^{2n} = A^2X^{2n-2}$$

$$X^{2n} = A^2X^{n+n-2}$$

$$X^{2n} = A^2X^nX^{n-2}$$

$$\frac{X^{2n}}{X^n} = A^2X^{n-2}$$

$$X^n = A^2X^{n-2}$$

Proses tersebut dapat diulang untuk pangkat bilangan bulat yang lebih tinggi, sehingga hasil umumnya adalah

$X^n = A^n X^{n-n}$

$X^n = A^n X^0$

Jika dapat mencari sebuah pernyataan eksplisit untuk A^n, maka dapat digunakan persamaan $X^n = A^n X^0$ untuk mendapatkan X^n dengan cara mendiagonalisasi matriks A. Untuk mendiagonalisasikan matriks A yaitu dengan mencari matriks P yang dapat dibalik dan matriks diagonal D sedemikian sehingga:

$A = P^{-1}DP$

Dengan diagonalisasi seperti itu, maka untuk $A^2 = P^{-1}D^2P$ maka akan diperoleh

$A^n = P^{-1}D^nP$, untuk $n = 1,2, \ldots$

Dengan

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^{\,n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^{\,n} \end{bmatrix}$$

Berikut penyelesaian diagonalisasi dari matriks A;

$|\lambda I - A| = 0$

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda_1 - 1)\left(\lambda_2 - \frac{1}{2}\right)\lambda_3\left(\lambda_4 - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda_5 - \frac{1}{4}\right)\lambda_6.\lambda_7.\lambda_8.\lambda_9 = 0$$

Sehingga nilai-nilai eigen yang diperoleh adalah

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = \lambda_4 = \frac{1}{2}$

$\lambda_5 = \frac{1}{4}$

$\lambda_3 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0$

Untuk $\lambda = 1$;

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan matriks yang diperbesar, diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena kolom pertama semua bernilai nol, maka 1 utama berada pada kolom kedua sebab ada yang bernilai taknol. Baris pertama dikalikan dengan -2 untuk membentuk 1 utama.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Semua entri di bawah 1 utama dijadikan nol sedemikian sehingga,

untuk baris kedua: baris pertama dikalikan dengan $-\frac{1}{2}$ kemudian dijumlahkan dengan baris kedua.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolom taknol dalam submatriks selanjutnya berada pada kolom kedua sehingga baris kedua dikalikan dengan -1 untuk memperoleh 1 utama.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Semua entri di bawah 1 utama dijadikan nol sedemikian sehingga,

untuk baris ketiga: baris kedua dikalikan dengan -1 kemudian dijumlahkan dengan baris ketiga.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolom taknol dalam submatriks selanjutnya berada pada kolom ketiga sehingga baris ketiga dikalikan dengan -2 untuk memperoleh 1 utama.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Semua entri di bawah 1 utama dijadikan nol sedemikian sehingga,

untuk baris keempat: baris ketiga dikalikan dengan $-\frac{1}{2}$ kemudian dijumlahkan dengan baris keempat.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolom taknol dalam submatriks selanjutnya berada pada kolom keempat sehingga baris keempat dikalikan dengan $-\frac{4}{3}$ untuk memperoleh 1 utama.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Semua entri di bawah 1 utama dijadikan nol sedemikian sehingga,

untuk baris kelima: baris keempat dikalikan dengan $-\frac{3}{4}$ kemudian dijumlahkan dengan baris kelima.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolom taknol dalam submatriks selanjutnya berada pada kolom kelima sehingga baris kelima dikalikan dengan -1 untuk memperoleh 1 utama.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Semua entri di bawah 1 utama dijadikan nol sedemikian sehingga,

untuk baris keenam: baris kelima dikalikan dengan -1 kemudian dijumlahkan dengan baris keenam.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolom taknol dalam submatriks selanjutnya berada pada kolom keenam sehingga baris keenam dikalikan dengan -1 untuk memperoleh 1 utama.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Semua entri di bawah 1 utama dijadikan nol sedemikian sehingga,

untuk baris ketujuh: baris keenam dikalikan dengan -1 kemudian dijumlahkan dengan baris ketujuh.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolom taknol dalam submatriks selanjutnya berada pada kolom ketujuh sehingga baris ketujuh dikalikan dengan -1 untuk memperoleh 1 utama.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Semua entri di bawah 1 utama dijadikan nol sedemikian sehingga,

untuk baris kedelapan: baris ketujuh dikalikan dengan -1 kemudian dijumlahkan dengan baris kedelapan.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolom taknol dalam submatriks selanjutnya berada pada kolom kedelapan sehingga baris kedelapan dikalikan dengan -1 untuk memperoleh 1 utama.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Semua entri di bawah 1 utama dijadikan nol sedemikian sehingga,

untuk baris kesembilan: baris kedelapan dikalikan dengan -1 kemudian dijumlahkan dengan baris kesembilan.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga dapat diperoleh menjadi

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang sesuai adalah sebagai berikut:

$x_2 + x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 0$

$x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_6 = 0$

$x_4 + x_5 + x_6 = 0$

$x_5 + \frac{2}{3}x_6 + \frac{4}{3}x_7 + \frac{2}{3}x_8 = 0$

$x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 0$

$x_7 + x_8 + x_9 = 0$

$x_8 + x_9 = 0$

$x_9 = 0$ sehingga $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 0$

Misalkan $x_1 = s$, maka vektor eigen yang sesuai dengan $\lambda = 1$ adalah

$$\begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ sehingga

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda = 1$.

Untuk $\lambda = \frac{1}{2}$;

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan operasi baris elementer diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Karena kolom pertama ada yang bernilai taknol tepat pada puncak kolom, maka baris pertama dikalikan dengan -2 untuk membentuk 1 utama. Selanjutnya, untuk baris ketiga dikalikan dengan 2 untuk memperoleh 1 utama.

Untuk baris kelima dikalikan dengan 4 untuk memperoleh 1 utama.

Untuk baris keenam dikalikan dengan 2 untuk memperoleh 1 utama.

Untuk baris ketujuh dikalikan dengan 2 untuk memperoleh 1 utama.

Untuk baris kedelapan dikalikan dengan 2 untuk memperoleh 1 utama.

Untuk baris kesembilan dikalikan dengan 2 untuk memperoleh 1 utama.

Karena semua entri di bawah 1 utama bernilai nol, maka diperoleh hasil

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga dapat diperoleh menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang sesuai adalah

$$x_1 + x_2 + x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 0$$

$$-x_3 - \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{2}x_6 = 0$$

$$-\frac{1}{4}x_5 - x_7 - \frac{1}{2}x_8 = 0$$

$$x_5 - 2x_6 - 2x_8 - 4x_9 = 0$$

Sehingga $x_3 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 0$

Misalkan $x_4 = s,\ x_2 = t$, maka

$x_1 = -t - s$

Maka vektor eigen yang sesuai dengan $\lambda = \frac{1}{2}$ adalah

$$\begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ 0 \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ sehingga

$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda = \frac{1}{2}$.

Untuk $\lambda = \frac{1}{4}$;

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan operasi baris elementer diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Karena kolom pertama ada yang bernilai taknol tepat pada puncak kolom, maka baris pertama dikalikan dengan $-\frac{4}{3}$ untuk membentuk 1 utama. Selanjutnya, untuk baris kedua dikalikan dengan -2 untuk memperoleh 1 utama.

Untuk baris ketiga dikalikan dengan 4 untuk memperoleh 1 utama.

Untuk baris keempat dikalikan dengan -2 untuk memperoleh 1 utama.

Untuk baris keenam dikalikan dengan 4 untuk memperoleh 1 utama.

Untuk baris ketujuh dikalikan dengan 4 untuk memperoleh 1 utama.

Untuk baris kedelapan dikalikan dengan 4 untuk memperoleh 1 utama.

Untuk baris kesembilan dikalikan dengan 4 untuk memperoleh 1 utama.

Karena semua entri di bawah 1 utama bernilai nol, maka diperoleh hasil

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga dapat diperoleh menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang sesuai adalah

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = 0$$

$$x_2 + 4x_3 + x_5 + 2x_6 = 0$$

$$x_4 + x_5 + 4x_7 + 2x_8 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_8 - x_9 = 0$$

Sehingga $x_3 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 0$

Misalkan $x_5 = s$, maka

$x_4 = -s, \qquad x_2 = -s, \qquad x_1 = s$

Maka vektor eigen yang sesuai dengan $\lambda = \frac{1}{4}$ adalah

$$\begin{bmatrix} s \\ -s \\ 0 \\ -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ sehingga

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda = \frac{1}{4}$.

Untuk $\lambda = 0$;

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan operasi baris elementer diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena kolom pertama ada yang bernilai taknol tepat pada puncak kolom, maka baris pertama dikalikan dengan -1 untuk membentuk 1 utama. Selanjutnya,

untuk baris kedua dikalikan dengan -2 untuk memperoleh 1 utama.

Untuk baris keempat dikalikan dengan -2 untuk memperoleh 1 utama.

Untuk baris kelima dikalikan dengan -4 untuk memperoleh 1 utama.

Karena semua entri di bawah 1 utama bernilai nol, maka diperoleh hasil

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga dapat diperoleh menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang sesuai adalah

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_5 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 + \frac{1}{2}x_5 + x_6 = 0$$

$$x_4 + \frac{1}{2}x_5 + 2x_7 + x_8 = 0$$

$x_5 + 2x_6 + 2x_8 + 4x_9 = 0$

Misalkan $x_9 = p,\ x_8 = q,\ x_7 = r,\ x_6 = s,\ x_3 = t$, maka

$x_5 = -2s - 2q - 4p$

$x_4 = -\frac{1}{2}(-2s - 2q - 4p) - 2r - q, \qquad x_4 = s + 2p - 2r$

$x_2 = -2t - \frac{1}{2}(-2s - 2q - 4p) - s, \qquad x_2 = -2t + q + 2p$

$x_1 = -\frac{1}{2}(-2t + q + 2p) - \frac{1}{2}(s + 2p - 2r) - \frac{1}{4}(-2s - 2q - 4p)$

$x_1 = t - p + r$

Maka vektor eigen yang sesuai dengan $\lambda = 0$ adalah

$$\begin{bmatrix} -p \\ 2p \\ 0 \\ 2p \\ -4p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q \\ 0 \\ 0 \\ -2q \\ 0 \\ 0 \\ q \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ -2r \\ 0 \\ 0 \\ r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s \\ -2s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = p\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda = 0$.

Terdapat sembilan vektor basis secara keseluruhan, sehingga matriks A dapat didiagonalisasi. Sembilan vektor basis tersebut dibentuk ke dalam matriks P sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menentukan invers matriks P dengan mereduksi matriks P menjadi matriks identitas sebagai berikut:

$[P| \quad I]$

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc|ccccccccc}
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

Semua entri di bawah dan di atas 1 utama dijadikan nol sedemikian sehingga,

untuk baris pertama: baris kedua dikalikan dengan 1 kemudian dijumlahkan dengan baris pertama.

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc|ccccccccc}
1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

Semua entri di bawah dan di atas 1 utama dijadikan nol sedemikian sehingga,

untuk baris pertama: baris ketiga dikalikan dengan 1 kemudian dijumlahkan dengan baris pertama.

Untuk baris kedua: baris ketiga dikalikan dengan 2 kemudian dijumlahkan dengan baris kedua.

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|ccccccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Semua entri di bawah dan di atas 1 utama dijadikan nol sedemikian sehingga,

untuk baris pertama: baris keempat dikalikan dengan 1 kemudian dijumlahkan dengan baris pertama.

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Semua entri di bawah dan di atas 1 utama dijadikan nol sedemikian sehingga,

untuk baris pertama: baris kelima dikalikan dengan 1 kemudian dijumlahkan dengan baris pertama.

Untuk baris kedua: baris kelima dikalikan dengan 1 kemudian dijumlahkan dengan baris kedua.

Untuk baris keempat: baris kelima dikalikan dengan 1 kemudian dijumlahkan dengan baris keempat.

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Semua entri di bawah dan di atas 1 utama dijadikan nol sedemikian sehingga,

untuk baris pertama: baris keenam dikalikan dengan 1 kemudian dijumlahkan dengan baris pertama.

Untuk baris kedua: baris keenam dikalikan dengan 2 kemudian dijumlahkan dengan baris kedua.

Untuk baris keempat: baris keenam dikalikan dengan 1 kemudian dijumlahkan dengan baris keempat.

Untuk baris kelima: baris keenam dikalikan dengan 2 kemudian dijumlahkan dengan baris kelima.

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

Semua entri di bawah dan di atas 1 utama dijadikan nol sedemikian sehingga,

untuk baris pertama: baris ketujuh dikalikan dengan 1 kemudian dijumlahkan dengan baris pertama.

Untuk baris keempat: baris ketujuh dikalikan dengan 2 kemudian dijumlahkan dengan baris keempat.

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

Semua entri di bawah dan di atas 1 utama dijadikan nol sedemikian sehingga,

untuk baris pertama: baris kedelapan dikalikan dengan 1 kemudian dijumlahkan dengan baris pertama.

Untuk baris kedua: baris kedelapan dikalikan dengan 1 kemudian dijumlahkan dengan baris kedua.

Untuk baris keempat: baris kedelapan dikalikan dengan 2 kemudian dijumlahkan dengan baris keempat.

Untuk baris kelima: baris kedelapan dikalikan dengan 2 kemudian dijumlahkan dengan baris kelima.

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Semua entri di bawah dan di atas 1 utama dijadikan nol sedemikian sehingga,

untuk baris pertama: baris kesembilan dikalikan dengan 1 kemudian dijumlahkan dengan baris pertama.

Untuk baris kedua: baris kesembilan dikalikan dengan 2 kemudian dijumlahkan dengan baris kedua.

Untuk baris keempat: baris kesembilan dikalikan dengan 2 kemudian dijumlahkan dengan baris keempat.

Untuk baris kelima: baris kesembilan dikalikan dengan 4 kemudian dijumlahkan dengan baris kelima.

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

Jadi invers dari matriks P yang diperoleh yaitu

$$P^{-1} = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa matriks P dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal.

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&1&2&0&1&2&0&1&2\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&2&2&2\\0&0&0&0&1&2&0&2&4\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&1&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&0&1&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&1&0&1&0&-1\\0&1&-2&0&-1&0&0&1&2\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&-1&1&-2&0&2\\0&0&0&0&1&-2&0&-2&-4\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&\frac{1}{2}&1&0&\frac{1}{2}&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&1&1\\0&0&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&1&0&1&0&-1\\0&1&-2&0&-1&0&0&1&2\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&-1&1&-2&0&2\\0&0&0&0&1&-2&0&-2&-4\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\frac{1}{4}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Akhirnya diperoleh

$$D=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda_3&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\lambda_4&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\lambda_5&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda_6&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\lambda_7&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\lambda_8&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\frac{1}{4}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan $A^n = P^{-1}D^nP$, dapat diperoleh

$$X^n = A^nX^0$$

$$= P^{-1}D^nPX^0$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}
1 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n}-1 & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n}-1 & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-1 \\
0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^{n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & \left(\frac{1}{4}\right)^{n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^{n} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$a_n = a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) b_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) c_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) d_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) e_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right) f_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) g_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right) h_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1\right) i_0$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0$$

$$d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) e_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right) f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} g_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0$$

$$e_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} i_0$$

$$c_n = f_n = g_n = h_n = i_n = 0 \text{ untuk } n = 1,2,\ldots \qquad (4.5)$$

Persamaan (4.5) merupakan persamaan eksplisit untuk fraksi-fraksi dari kesembilan genotip pada generasi ke-n yang ditinjau dari fraksi-fraksi genotip awal. Karena $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ cenderung mendekati 0 untuk n menuju tak terhingga $n \to \infty$, maka limit persamaan di atas adalah sebagai berikut:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) b_0 + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1\right) i_0$$

$$= a_0 - b_0 + c_0 - d_0 + e_0 + g_0 - i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) e_0 + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} i_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} i_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Jadi diperoleh peluang genotip keturunan untuk n menuju tak terhingga yaitu:

$$a_n = a_0 - b_0 + c_0 - d_0 + e_0 + g_0 - i_0$$

$$b_n = c_n = d_n = e_n = f_n = g_n = h_n = i_n = 0$$

B. Pembahasan

Dari proses diagonalisasi matriks, dua individu yang bergenotip AABB yang dipersilangkan dengan seluruh kemungkinan genotipnya diperoleh sembilan formula persamaan yang diantaranya adalah persamaan genotip keturunan AABB yang dinyatakan dengan a_n yaitu

$$a_n = a_0 + \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - 1\right) b_0 + \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right) c_0 + \cdots + \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} - 1\right) i_0$$

di mana $a_0, b_0, \ldots, c_0$ adalah distribusi awal yang diambil dari peluang genotip induk, diantaranya yaitu 1, 0, …, 0 (Lihat Tabel 4.10). Hal ini berarti bahwa untuk generasi selanjutnya, keturunan yang bergenotip AABB akan mempunyai peluang 1, yang artinya bahwa keturunan dari persilangan induk AABB dengan seluruh kemungkinannya akan normal homozigot berdasarkan dari distribusi awal. Nilai n bermula pada 1, 2, 3, dan seterusnya, sebab keturunan berawal dari keturunan pertama, kedua, dan seterusnya.

Ketika distribusi awal dari induk $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, …, 0 (Lihat Tabel 4.10) maka akan diperoleh persamaan peluang genotip keturunan yang bergenotip AABB dan AABb yang masing-masing adalah

$$a_n = a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) b_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) c_0 + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1\right) i_0$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0$$

menghasilkan $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ sebab nilai $a_0 = \frac{1}{2}$, $b_0 = \frac{1}{2}$, $c_0, d_0, \dots, i_0 = 0$ serta peluang genotip keturunan yang bergenotip AABb, $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Ini berarti bahwa hanya dua kemungkinan genotip yang akan muncul pada generasi selanjutnya, yaitu AABB dan AABb. Begitupun seterusnya untuk persamaan-persamaan $c_n, d_n, \dots, i_n$ pada perkawinan yang terkontrol.

Sehingga ketika diberikan n menuju tak terhingga maka limit yang dihasilkan diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) b_0 + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1\right) i_0$$

$$= a_0 - b_0 + c_0 - d_0 + e_0 + g_0 - i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0 = 0$$

Limit untuk peluang genotip AABB memiliki nilai yang menandakan bahwa pada generasi yang tak terhingga genotip ini memiliki peluang muncul pada keturunan. Ketika hasil limit untuk peluang genotip AABb bernilai 0 yang menandakan bahwa pada generasi tak terhingga selanjutnya genotip ini tidak berpeluang muncul pada keturunan.

Untuk persilangan pada AABb dengan seluruh kemungkinan keturunannya juga akan menghasilkan formula yang digunakan untuk menentukan peluang genotip keturunan (Terlampir). Dari keseluruhan formula, terdapat bentuk formula yang berbeda dalam mencari sebuah peluang genotip keturunan. Misalkan distribusi permulaan dari genotip pada pewarisan autosomal $a_0, b_0, \ldots, i_0$ berturut-turut adalah $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0$ (Lihat Tabel 4.11), diperoleh persamaan yang memiliki peluang pada generasi selanjutnya (Persamaan 4.5)

$$a_n = a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) b_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) c_0 + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1\right) i_0$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Dapat dilihat pula pada Persamaan 4.6 (Terlampir) dengan distribusi yang sama dengan formula yang berbeda, yang diantaranya

$$a_n = \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) a_0 + \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) b_0 + \cdots + \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) i_0$$

$$= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

Ketika ditelusuri untuk mencari generasi pertama (a_1) dengan menggunakan kedua persamaan di atas, maka akan menghasilkan

$$a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+1} = \frac{1}{4}$$ Persamaan 4.5

$$a_1 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2} = \frac{1}{4}$$ Persamaan 4.6

Dari hasil yang diperoleh menghasilkan nilai peluang genotip keturunan pertama yang sama ketika digunakan kedua persamaan.

Dari hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa dari kesembilan tabel persilangan, terdapat beberapa persilangan induk yang mempunyai 2 bentuk persamaan, namun memperoleh hasil peluang keturunan yang sama begitupun juga persilangan pada ilmu genetika itu sendiri. Persamaan-persamaan tersebut digunakan untuk menentukan peluang generasi ke-n pada suatu populasi dengan berdasar kepada perkawinan silang yang terkontrol.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan dari hasil penelitian, dapat disimpulkan bahwa formula dalam pewarisan autosomal pada generasi ke-n dengan genotip induk yang terkontrol (Persilangan genotip induk AABB dengan seluruh kemungkinan genotip dihibrid) dapat diperoleh dari persamaan-persamaan berikut:

$$a_n = a_0 + \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - 1\right) b_0 + \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right) c_0 + \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - 1\right) d_0 + \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\tfrac{1}{4}\right)^n\right) e_0 + \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n-1}\right) f_0 + \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right) g_0 + \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n-1}\right) h_0 + \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} - 1\right) i_0$$

$$b_n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 + \left(\left(\tfrac{1}{4}\right)^n - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right) e_0 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n-1} f_0 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 + \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0$$

$$d_n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n d_0 + \left(\left(\tfrac{1}{4}\right)^n + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right) e_0 + \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n-1}\right) f_0 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} g_0 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 + \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0$$

$$e_n = \left(\tfrac{1}{4}\right)^n e_0 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n-1} f_0 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} i_0$$

$$c_n = f_n = g_n = h_n = i_n = 0 \qquad \text{untuk } n = 1,2, \ldots$$

Formula yang diperoleh berdasarkan persilangan/perkawinan silang terkontrol sedemikian sehingga terdapat 9 macam persilangan terkontrol yang menghasilkan 81 bentuk persamaan dalam penentuan peluang genotip keturunan. Pada persilangan induk yang mempunyai 2 bentuk persamaan akan memperoleh hasil peluang keturunan yang sama dengan peluang perkawinan silang ilmu genetika pada umumnya.

B. Saran

Adapun saran yang dapat peneliti sampaikan yaitu selain menggunakan matriks, dapat juga digunakan metode lain untuk perkawinan silang trihibrid atau polihibrid dengan perkawinan acak. Karena dalam perkawinan secara acak akan menghasilkan persamaan-persamaan tak linear, sehingga dapat digunakan metode lain pada penelitian selanjutnya.

DAFTAR PUSTAKA

Alkahestry, Ahmad. 2012. *Pewarisan Sifat pada Manusia*. http://sahabat-ilmu-kita.blogspot.com/2012/10/pewarisan-sifat-pada-manusia.html. Diakses pada tanggal 4 Juni 2015

Anton, Howard. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga

Campbell, Neil A, dkk. 2010. *Biologi*. Jakarta: Erlangga

Ernawati & Joko Purwadi. 2009. *Program Pendeteksian Distribusi Pewarisan Genotip Suatu Populasi untuk Tipe Pewarisan Autosomal dengan Metode QR*. Jurnal Informatika, Vol. 5, No. 1

Hadley, G. 1983. *Aljabar linear*. Jakarta: Erlangga

Irwan. 2011. *Pengantar Aljabar Elementer*. Makassar: Alauddin University Press

Kartono, 2005. *Aljabar Linear, Vektor dan Eksplorasinya dengan Maple*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Kusumawati, Ririen. 2009. *Aljabar Linear & Matriks*. Malang: UIN-Malang Press

Mumu, Jeinne. 2013. *Pewarisan Autosomal dengan Model Diagonalizable Matrix*. ISTECH, Vol. 5, No. 2

Mustami, Muh. Khalifah. 2013. *Genetika*. Makassar: Alauddin University Press

Pai, Anna C. 2008. *Dasar-Dasar Genetika*. Jakarta: Erlangga

Rahman, Hairur. 2007. *Indahnya Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN-Malang Press

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 9*. Jakarta: Lentera Hati

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 11*. Jakarta: Lentera Hati

Spiegel, Murray R. 2011. *Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuwan*. Jakarta: Erlangga

Suryo. 2005. *Genetika Manusia*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press

Susan Elrod dan William Stansfield. 2007. *Schaum's Outlines Teori dan Soal-Soal Genetika*. Jakarta: Erlangga

Susanto, Agus Heri. 2011. *Genetika*. Yogyakarta: Graha Ilmu

LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran 1. Peluang genotip dari persilangan dua individu bagi pewarisan autosomal

Genotip Keturunan	**Genotip dari kedua orang tua**																																											
	AABB-AABB	AABB-AABb	AABB-AAbb	AABB-AaBB	AABB-AaBb	AABB-Aabb	AABB-aaBB	AABB-aaBb	AABB-aabb	AABb-AABb	AABb-AAbb	AABb-AaBB	AABb-AaBb	AABb-Aabb	AABb-aaBB	AABb-aaBb	AABb-aabb	AAbb-AAbb	AAbb-AaBB	AAbb-AaBb	AAbb-Aabb	AAbb-aaBB	AAbb-aaBb	AAbb-aabb	AaBB-AaBB	AaBB-AaBb	AaBB-Aabb	AaBB-aaBB	AaBB-aaBb	AaBB-aabb	AaBb-AaBb	AaBb-Aabb	AaBb-aaBB	AaBb-aaBb	AaBb-aabb	Aabb-Aabb	Aabb-aaBB	Aabb-aaBb	Aabb-aabb	aaBB-aaBB	aaBB-aaBb	aaBB-aabb	aaBb-aaBb	aaBb-aabb	aabb-aabb
AABB	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AABb	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AAbb	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

AaBB	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AaBb	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	0	0
Aabb	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0
aaBB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
aaBb	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
aabb	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

Lampiran 2. Peluang genotip dari persilangan atau perkawinan silang individu AABb dengan seluruh kemungkinan genotip yang ada

Genotip keturunan		Genotip dari kedua orang tua								
		AABb-AABB	AABb-AABb	AABb-AAbb	AABb-AaBB	AABb-AaBb	AABb-Aabb	AABb-aaBB	AABb-aaBb	AABb-aabb
		a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	e_{n-1}	f_{n-1}	g_{n-1}	h_{n-1}	i_{n-1}
a_n	AABB	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0
b_n	AABb	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0
c_n	AAbb	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0
d_n	AaBB	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
e_n	AaBb	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
f_n	Aabb	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
g_n	aaBB	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h_n	aaBb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i_n	aabb	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Berikut penyelesaian diagonalisasi dari matriks A;

$|\lambda I - A| = 0$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda_2 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda_3 - \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \lambda_5 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \lambda_6 - \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga nilai-nilai eigen yang diperoleh adalah

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = \frac{1}{2}, \qquad \lambda = \frac{1}{4}, \qquad \lambda = 0$$

Terdapat sembilan vektor basis secara keseluruhan, sehingga matriks A dapat didiagonalisasi. Sembilan vektor basis tersebut dibentuk ke dalam matriks P sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi invers dari matriks P yang diperoleh yaitu

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa matriks P dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal.

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Akhirnya diperoleh

$$
D=\begin{bmatrix}
\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9
\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Berdasarkan persamaan $A^n = P^{-1}D^nP$, dapat diperoleh

$X^n = A^n X^0$

$\quad = P^{-1}D^nPX^0$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{1}{4} & \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & -3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{4} & -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}
$$

$$\begin{aligned}
a_n = {} & \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) a_0 + \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) b_0 \\
& + \left(-\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) c_0 + \left(-\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) d_0 \\
& + \left(-\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) e_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} f_0 + \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) g_0 \\
& + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} h_0 + \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) i_0
\end{aligned}$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} b_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) c_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right) e_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} g_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) h_0$$

$$c_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} c_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} g_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} h_0$$

$$\begin{aligned}
d_n = {} & \left(-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) a_0 + \left(-\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) b_0 \\
& + \left(1 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) c_0 + \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) d_0 + \left(\frac{1}{2} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) e_0 \\
& + \left(-\frac{1}{2} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) g_0 + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) h_0 + \left(-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) i_0
\end{aligned}$$

$$e_n = f_n = g_n = 0$$

$$h_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} c_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} g_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} h_0$$

$$i_n = \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) a_0 + \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) b_0 + \left(-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right) c_0$$

$$+ \left(-\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) d_0 + \left(-\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right) e_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} f_0 + \frac{1}{4} g_0$$

$$+ \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) i_0$$

$$\text{untuk } n = 1,2,\ldots \qquad (4.6)$$

Persamaan (4.6) merupakan persamaan eksplisit untuk fraksi-fraksi dari kesembilan genotip pada generasi ke-n yang ditinjau dari fraksi-fraksi genotip awal. Karena $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ cenderung mendekati 0 untuk n menuju tak terhingga $n \to \infty$, maka limit persamaan di atas adalah sebagai berikut:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) a_0 + \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) b_0$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) c_0 + \left(-\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) d_0$$

$$+ \left(-\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) e_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} f_0 + \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) g_0$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} h_0 + \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) i_0$$

$$= \frac{1}{4} a_0 + \frac{1}{4} b_0 - \frac{1}{2} c_0 - \frac{1}{4} d_0 - \frac{1}{4} e_0 + \frac{1}{4} g_0 + \frac{1}{4} i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} b_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) c_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right) e_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} g_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) h_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} c_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} g_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} h_0$$

$$= 0$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \left(-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right) a_0 + \left(-\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) b_0$$

$$+ \left(1 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) c_0 + \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) d_0 + \left(\frac{1}{2} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) e_0$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) g_0 + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) h_0 + \left(-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) i_0$$

$$= -\frac{1}{2} a_0 - \frac{1}{2} b_0 + c_0 + \frac{1}{2} d_0 + \frac{1}{2} e_0 - \frac{1}{2} g_0 - \frac{1}{2} i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} c_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} g_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} h_0$$

$$= 0$$

$$\lim_{n\to\infty} i_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right)a_0+\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right)b_0$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right)c_0+\left(-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right)d_0$$

$$+\left(-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right)e_0-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}f_0+\frac{1}{4}g_0$$

$$+\left(\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right)i_0$$

$$=\frac{1}{4}a_0+\frac{1}{4}b_0-\frac{1}{2}c_0-\frac{1}{4}d_0-\frac{1}{4}e_0+\frac{1}{4}g_0+\frac{1}{4}i_0$$

Jadi diperoleh peluang genotip keturunan untuk n menuju tak terhingga yaitu:

$$a_n=\frac{1}{4}a_0+\frac{1}{4}b_0-\frac{1}{2}c_0-\frac{1}{4}d_0-\frac{1}{4}e_0+\frac{1}{4}g_0+\frac{1}{4}i_0$$

$$d_n=-\frac{1}{2}a_0-\frac{1}{2}b_0+c_0+\frac{1}{2}d_0+\frac{1}{2}e_0-\frac{1}{2}g_0-\frac{1}{2}i_0$$

$$i_n=\frac{1}{4}a_0+\frac{1}{4}b_0-\frac{1}{2}c_0-\frac{1}{4}d_0-\frac{1}{4}e_0+\frac{1}{4}g_0+\frac{1}{4}i_0$$

$$b_n=c_n=e_n=f_n=g_n=h_n=0$$

Lampiran 3. Peluang genotip dari persilangan atau perkawinan silang individu AAbb dengan seluruh kemungkinan genotip yang ada

Genotip keturunan		Genotip dari kedua orang tua								
		AAbb-AABB	AAbb-AABb	AAbb-AAbb	AAbb-AaBB	AAbb-AaBb	AAbb-Aabb	AAbb-aaBB	AAbb-aaBb	AAbb-aabb
		a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	e_{n-1}	f_{n-1}	g_{n-1}	h_{n-1}	i_{n-1}
a_n	AABB	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b_n	AABb	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0
c_n	AAbb	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
d_n	AaBB	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_n	AaBb	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
f_n	Aabb	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
g_n	aaBB	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h_n	aaBb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i_n	aabb	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Berikut penyelesaian diagonalisasi dari matriks A;

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda_2 - \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda_3 - 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \lambda_5 - \frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \lambda_6 - \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga nilai-nilai eigen yang diperoleh adalah

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = \frac{1}{2}, \qquad \lambda = \frac{1}{4}, \qquad \lambda = 0$$

Terdapat sembilan vektor basis secara keseluruhan, sehingga matriks A dapat didiagonalisasi. Sembilan vektor basis tersebut dibentuk ke dalam matriks P sebagai berikut:

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi invers dari matriks P yang diperoleh yaitu

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 & -2 & -1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa matriks P dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal.

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Akhirnya diperoleh

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan $A^n = P^{-1}D^nP$, dapat diperoleh

$X^n = A^nX^0$

$= P^{-1}D^nPX^0$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 & -2 & -1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -3\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^{n} & -\left(\frac{1}{4}\right)^{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^{n} - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^{n} & -\left(\frac{1}{4}\right)^{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & \left(\frac{1}{4}\right)^{n} + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & -3\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} - 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$a_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} d_0 - 4e_0$$

$$b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n} b_0 + \left(-\left(\frac{1}{4}\right)^{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right) c_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n} - 1\right) e_0$$

$$c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} c_0$$

$$d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} d_0$$

$$e_n = e_0$$

$$f_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 + 2e_0$$

$$g_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n b_0 + \left(-\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) c_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1\right) e_0$$

$$h_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) c_0 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} - 4\right) e_0$$

$$i_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} d_0 + 2e_0$$

$$\text{untuk } n = 1,2,\ldots \qquad (4.7)$$

Persamaan (4.7) merupakan persamaan eksplisit untuk fraksi-fraksi dari kesembilan genotip pada generasi ke-n yang ditinjau dari fraksi-fraksi genotip awal. Karena $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ cenderung mendekati 0 untuk n menuju tak terhingga $n \to \infty$, maka limit persamaan di atas adalah sebagai berikut:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} d_0 - 4e_0 = -4e_0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n b_0 + \left(-\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) c_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1\right) e_0 = -e_0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n c_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} e_0 = e_0$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 + 2e_0 = 2e_0$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n b_0 + \left(-\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) c_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1\right) e_0 = e_0$$

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) c_0 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n d_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} - 4\right) e_0 = -4e_0$$

$$\lim_{n\to\infty} i_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} d_0 + 2e_0 = 2e_0$$

Jadi diperoleh peluang genotip keturunan untuk n menuju tak terhingga yaitu:

$a_n = h_n = -4e_0$

$b_n = -e_0$

$e_n = g_n = e_0$

$f_n = i_n = 2e_0$

$c_n = d_n = 0$

Lampiran 4. Peluang genotip dari persilangan atau perkawinan silang individu AaBB dengan seluruh kemungkinan genotip yang ada

Genotip keturunan		Genotip dari kedua orang tua								
		AaBB-AABB	AaBB-AABb	AaBB-AAbb	AaBB-AaBB	AaBB-AaBb	AaBB-Aabb	AaBB-aaBB	AaBB-aaBb	AaBB-aabb
		a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	e_{n-1}	f_{n-1}	g_{n-1}	h_{n-1}	i_{n-1}
a_n	AABB	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0
b_n	AABb	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0
c_n	AAbb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d_n	AaBB	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
e_n	AaBb	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
f_n	Aabb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
g_n	aaBB	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
h_n	aaBb	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
i_n	aabb	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Berikut penyelesaian diagonalisasi dari matriks A;

$|\lambda I - A| = 0$

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \lambda_4 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \lambda_5 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & \lambda_7 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & \lambda_8 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga nilai-nilai eigen yang diperoleh adalah

$\lambda = 1, \qquad \lambda = \frac{1}{2}, \qquad \lambda = \frac{1}{4}, \qquad \lambda = 0$

Terdapat sembilan vektor basis secara keseluruhan, sehingga matriks A dapat didiagonalisasi. Sembilan vektor basis tersebut dibentuk ke dalam matriks P sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi invers dari matriks P yang diperoleh yaitu

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa matriks P dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Akhirnya diperoleh

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan $A^n = P^{-1}D^nP$, dapat diperoleh

$X^n = A^nX^0$

$= P^{-1}D^nPX^0$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & -\frac{1}{2} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} & \frac{1}{4} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} & -\frac{3}{4} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}
$$

$$a_n = \frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{2}c_0 - e_0 - \frac{1}{2}f_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)i_0$$

$$\begin{aligned} b_n = &\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \frac{1}{4}\right)a_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)b_0 \\ &+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)c_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} d_0 \\ &+ \left(-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)e_0 + \frac{1}{4}f_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)g_0 \\ &+ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} h_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right)i_0 \end{aligned}$$

$$c_n = -\frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{4}c_0 + \frac{1}{2}e_o + \frac{1}{4}f_0 + \left(-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)i_0$$

$$\begin{aligned} d_n = &\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \frac{3}{4}\right)a_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \frac{3}{4}\right)c_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} d_0 \\ &+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - \frac{3}{2}\right)e_0 - \frac{3}{4}f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} g_0 + (-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \frac{3}{2} \\ &- \left(\frac{1}{2}\right)^{n})i_0 \end{aligned}$$

$$e_n = h_n = 0$$

$$f_n = -\frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{4}c_0 + \frac{1}{2}e_0 + \frac{1}{4}f_0 + \left(-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)i_0$$

$$g_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} a_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) b_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) c_0$$

$$- \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} d_0 + \left(-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) e_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) g_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} h_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) i_0$$

$$i_n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n} i_0 \qquad \text{untuk } n = 1,2,\dots \quad (4.8)$$

Persamaan (4.8) merupakan persamaan eksplisit untuk fraksi-fraksi dari kesembilan genotip pada generasi ke-n yang ditinjau dari fraksi-fraksi genotip awal. Karena $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ cenderung mendekati 0 untuk n menuju tak terhingga $n \to \infty$, maka limit persamaan di atas adalah sebagai berikut:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} a_0 - \frac{1}{2} c_0 - e_0 - \frac{1}{2} f_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right) i_0$$

$$= \frac{1}{2} a_0 - \frac{1}{2} c_0 - e_0 - \frac{1}{2} f_0 + i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \frac{1}{4}\right) a_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) b_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) c_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} d_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) e_0 + \frac{1}{4} f_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) g_0$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} h_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) i_0$$

$$= -\frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{4}c_0 + \frac{1}{2}e_0 + \frac{1}{4}f_0 - \frac{1}{2}i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{4}c_0 + \frac{1}{2}e_o + \frac{1}{4}f_0 + \left(-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)i_0$$

$$= -\frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{4}c_0 + \frac{1}{2}e_o + \frac{1}{4}f_0 - \frac{1}{2}i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \frac{3}{4}\right)a_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \frac{3}{4}\right)c_0$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} d_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - \frac{3}{2}\right)e_0 - \frac{3}{4}f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} g_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)i_0$$

$$= \frac{3}{4}a_0 - \frac{3}{4}c_0 - \frac{3}{2}e_0 - \frac{3}{4}f_0 + \frac{3}{2}i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{4}c_0 + \frac{1}{2}e_0 + \frac{1}{4}f_0 + \left(-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)i_0$$

$$= -\frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{4}c_0 + \frac{1}{2}e_0 + \frac{1}{4}f_0 - \frac{1}{2}i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} a_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) b_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) c_0$$

$$- \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} d_0 + \left(-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) e_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) g_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} h_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) i_0$$

$$= 0$$

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} i_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} i_0 = 0$$

Jadi diperoleh peluang genotip keturunan untuk n menuju tak terhingga yaitu:

$$a_n = \frac{1}{2} a_0 - \frac{1}{2} c_0 - e_0 - \frac{1}{2} f_0 + i_0$$

$$b_n = c_n = f_n = -\frac{1}{4} a_0 + \frac{1}{4} c_0 + \frac{1}{2} e_o + \frac{1}{4} f_0 - \frac{1}{2} i_0$$

$$d_n = \frac{3}{4} a_0 - \frac{3}{4} c_0 - \frac{3}{2} e_0 - \frac{3}{4} f_0 + \frac{3}{2} i_0$$

$$e_n = g_n = h_n = i_n = 0$$

Lampiran 5. Peluang genotip dari persilangan atau perkawinan silang individu AaBb dengan seluruh kemungkinan genotip yang ada

Genotip keturunan		Genotip dari kedua orang tua								
		AaBb-AABB	AaBb-AABb	AaBb-AAbb	AaBb-AaBB	AaBb-AaBb	AaBb-Aabb	AaBb-aaBB	AaBb-aaBb	AaBb-aabb
		a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	e_{n-1}	f_{n-1}	g_{n-1}	h_{n-1}	i_{n-1}
a_n	AABB	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0
b_n	AABb	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0
c_n	AAbb	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0
d_n	AaBB	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
e_n	AaBb	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
f_n	Aabb	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
g_n	aaBB	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
h_n	aaBb	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
i_n	aabb	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Berikut penyelesaian diagonalisasi dari matriks A;

$|\lambda I - A| = 0$

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \lambda_2 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & \lambda_3 - \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & \lambda_4 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \lambda_5 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{8} & \lambda_6 - \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & 0 & \lambda_7 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \lambda_8 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & \lambda_9 - \frac{1}{4} \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga nilai-nilai eigen yang diperoleh adalah

$\lambda = 1, \qquad \lambda = \frac{1}{2}, \qquad \lambda = \frac{1}{4}, \qquad \lambda = 0$

Terdapat sembilan vektor basis secara keseluruhan, sehingga matriks A dapat didiagonalisasi. Sembilan vektor basis tersebut dibentuk ke dalam matriks P sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi invers dari matriks P yang diperoleh yaitu

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{3}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{7}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{7}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa matriks P dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal.

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{3}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{7}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{7}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Akhirnya diperoleh

$$
D = \begin{bmatrix}
\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9
\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix}
\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Berdasarkan persamaan $A^n = P^{-1}D^nP$, dapat diperoleh

$$X^n = A^nX^0$$

$$= P^{-1}D^nPX^0$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{3}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{7}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{7}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & 0 & -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} & \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} & 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} & \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} & -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} & -\frac{3}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} & -3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} & -3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} & 7\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 \\
2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}
$$

$$a_n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right)a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \frac{1}{8}\right)b_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{8}\right)c_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{4}\right)d_0 - \frac{1}{4}e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} f_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right)g_0$$

$$- \frac{1}{8}h_0$$

$$b_n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)b_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)c_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)d_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} g_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)i_0$$

$$c_n = \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)a_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)c_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)d_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} e_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} g_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)i_0$$

$$
\begin{aligned}
d_n = {} & \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} - \frac{1}{8}\right) a_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} + \frac{1}{16}\right) b_0 \\
& + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right) c_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} + \frac{1}{8}\right) d_0 \\
& + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \frac{1}{8}\right) e_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} f_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \frac{1}{8}\right) g_0 \\
& + \frac{1}{16} h_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right) i_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_n = {} & \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} - \frac{1}{8}\right) a_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} + \frac{1}{16}\right) b_0 \\
& + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right) c_0 \\
& + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} + \frac{1}{8}\right) d_0 \\
& + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \frac{1}{8}\right) e_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} f_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \frac{1}{8}\right) g_0 \\
& + \frac{1}{16} h_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right) i_0
\end{aligned}
$$

$$f_n = \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} + \frac{1}{4}\right)a_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} - \frac{1}{8}\right)b_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}\right)c_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} - \frac{1}{4}\right)d_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{4}\right)e_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} f_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \frac{1}{4}\right)g_0$$

$$- \frac{1}{8}h_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}\right)i_0$$

$$g_n = \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} + \frac{3}{8}\right)a_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} - \frac{3}{16}\right)b_0$$

$$+ \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right)c_0$$

$$+ \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} - \frac{3}{8}\right)d_0$$

$$+ \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \frac{3}{8}\right)e_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} f_0$$

$$+ \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \frac{3}{8}\right)g_0 - \frac{3}{16}h_0$$

$$+ \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right)i_0$$

$$h_n = \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} - \frac{1}{4}\right)a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} + \frac{1}{8}\right)b_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}\right)c_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} + \frac{1}{4}\right)d_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right)e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} f_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \frac{1}{4}\right)g_0$$

$$+ \frac{1}{8}h_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}\right)i_0$$

$$i_n = \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + 7\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} - \frac{1}{8}\right)a_0 + \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - 7\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} + \frac{1}{16}\right)b_0$$

$$+ \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - 7\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right)c_0$$

$$+ \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 7\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} + \frac{1}{8}\right)d_0$$

$$+ \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \frac{1}{8}\right)e_0 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} f_0$$

$$+ \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \frac{1}{8}\right)g_0 + \frac{1}{16}h_0$$

$$+ \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 7\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right)i_0$$

untuk $n = 1,2,\ldots$ (4.9)

Persamaan (4.9) merupakan persamaan eksplisit untuk fraksi-fraksi dari kesembilan genotip pada generasi ke-n yang ditinjau dari fraksi-fraksi genotip awal. Karena $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ cenderung mendekati 0 untuk n menuju tak terhingga $n \to \infty$, maka limit persamaan di atas adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} & \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \frac{1}{8}\right) b_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{8}\right) c_0 \\
& + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{4}\right) d_0 - \frac{1}{4} e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} f_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) g_0 \\
& - \frac{1}{8} h_0 \\
= & \frac{1}{4} a_0 - \frac{1}{8} b_0 - \frac{1}{8} c_0 - \frac{1}{4} d_0 - \frac{1}{4} e_0 + \frac{1}{4} g_0 - \frac{1}{8} h_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} & \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) b_0 \\
& + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) c_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) d_0 \\
& + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} g_0 \\
& + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) i_0 = 0
\end{aligned}
$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)a_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)c_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)d_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} e_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} g_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)i_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} - \frac{1}{8}\right)a_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} + \frac{1}{16}\right)b_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right)c_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} + \frac{1}{8}\right)d_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \frac{1}{8}\right)e_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} f_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \frac{1}{8}\right)g_0$$

$$+ \frac{1}{16}h_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right)i_0$$

$$= -\frac{1}{8}a_0 + \frac{1}{16}b_0 + \frac{1}{8}d_0 + \frac{1}{8}e_0 - \frac{1}{8}g_0 + \frac{1}{16}h_0$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} - \frac{1}{8}\right)a_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} + \frac{1}{16}\right)b_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right)c_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} + \frac{1}{8}\right)d_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \frac{1}{8}\right)e_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} f_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \frac{1}{8}\right)g_0$$

$$+ \frac{1}{16}h_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right)i_0$$

$$= -\frac{1}{8}a_0 + \frac{1}{16}b_0 + \frac{1}{8}d_0 + \frac{1}{8}e_0 - \frac{1}{8}g_0 + \frac{1}{16}h_0$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} + \frac{1}{4}\right)a_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} - \frac{1}{8}\right)b_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}\right)c_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} - \frac{1}{4}\right)d_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{4}\right)e_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} f_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \frac{1}{4}\right)g_0$$

$$- \frac{1}{8}h_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}\right)i_0$$

$$= \frac{1}{4}a_0 - \frac{1}{8}b_0 - \frac{1}{4}d_0 - \frac{1}{4}e_0 + \frac{1}{4}g_0 - \frac{1}{8}h_0$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty}\left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} + \frac{3}{8}\right)a_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} - \frac{3}{16}\right)b_0$$

$$+ \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right)c_0$$

$$+ \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} - \frac{3}{8}\right)d_0$$

$$+ \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \frac{3}{8}\right)e_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} f_0$$

$$+ \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \frac{3}{8}\right)g_0 - \frac{3}{16}h_0$$

$$+ \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right)i_0$$

$$= \frac{3}{8}a_0 - \frac{3}{16}b_0 - \frac{3}{8}d_0 - \frac{3}{8}e_0 + \frac{3}{8}g_0 - \frac{3}{16}h_0$$

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} - \frac{1}{4}\right)a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} + \frac{1}{8}\right)b_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}\right)c_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} + \frac{1}{4}\right)d_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right)e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} f_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \frac{1}{4}\right)g_0$$

$$+ \frac{1}{8}h_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}\right)i_0$$

$$= -\frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{8}b_0 + \frac{1}{4}d_0 + \frac{1}{4}e_0 - \frac{1}{4}g_0 + \frac{1}{8}h_0$$

$$\lim_{n\to\infty} i_n = \lim_{n\to\infty}\left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + 7\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} - \frac{1}{8}\right)a_0$$

$$+ \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - 7\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} + \frac{1}{16}\right)b_0 + \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - 7\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right)c_0$$

$$+ \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 7\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} + \frac{1}{8}\right)d_0$$

$$+ \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \frac{1}{8}\right)e_0 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} f_0$$

$$+ \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} - \frac{1}{8}\right)g_0 + \frac{1}{16}h_0$$

$$+ \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 7\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right)i_0$$

$$= -\frac{1}{8}a_0 + \frac{1}{16}b_0 + \frac{1}{8}d_0 + \frac{1}{8}e_0 - \frac{1}{8}g_0 + \frac{1}{16}h_0$$

Jadi diperoleh peluang genotip keturunan untuk n menuju tak terhingga yaitu:

$$a_n = \frac{1}{4}a_0 - \frac{1}{8}b_0 - \frac{1}{8}c_0 - \frac{1}{4}d_0 - \frac{1}{4}e_0 + \frac{1}{4}g_0 - \frac{1}{8}h_0$$

$$d_n = -\frac{1}{8}a_0 + \frac{1}{16}b_0 + \frac{1}{8}d_0 + \frac{1}{8}e_0 - \frac{1}{8}g_0 + \frac{1}{16}h_0$$

$$f_n = \frac{1}{4}a_0 - \frac{1}{8}b_0 - \frac{1}{4}d_0 - \frac{1}{4}e_0 + \frac{1}{4}g_0 - \frac{1}{8}h_0$$

$$e_n = -\frac{1}{8}a_0 + \frac{1}{16}b_0 + \frac{1}{8}d_0 + \frac{1}{8}e_0 - \frac{1}{8}g_0 + \frac{1}{16}h_0$$

$$g_n = \frac{3}{8}a_0 - \frac{3}{16}b_0 - \frac{3}{8}d_0 - \frac{3}{8}e_0 + \frac{3}{8}g_0 - \frac{3}{16}h_0$$

$$h_n = -\frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{8}b_0 + \frac{1}{4}d_0 + \frac{1}{4}e_0 - \frac{1}{4}g_0 + \frac{1}{8}h_0$$

$$i_n = -\frac{1}{8}a_0 + \frac{1}{16}b_0 + \frac{1}{8}d_0 + \frac{1}{8}e_0 - \frac{1}{8}g_0 + \frac{1}{16}h_0$$

$$b_n = c_n = 0$$

Lampiran 6. Peluang genotip dari persilangan atau perkawinan silang individu Aabb dengan seluruh kemungkinan genotip yang ada

Genotip keturunan		Genotip dari kedua orang tua								
		Aabb-AABB	Aabb-AABb	Aabb-AAbb	Aabb-AaBB	Aabb-AaBb	Aabb-Aabb	Aabb-aaBB	Aabb-aaBb	Aabb-aabb
		a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	e_{n-1}	f_{n-1}	g_{n-1}	h_{n-1}	i_{n-1}
a_n	AABB	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b_n	AABb	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0
c_n	AAbb	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0
d_n	AaBB	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_n	AaBb	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
f_n	Aabb	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
g_n	aaBB	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h_n	aaBb	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
i_n	aabb	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Berikut penyelesaian diagonalisasi dari matriks A;

$|\lambda I - A| = 0$

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda_2 - \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda_3 - \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \lambda_5 - \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & \lambda_6 - \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{2} & \lambda_8 - \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \lambda_9 - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga nilai-nilai eigen yang diperoleh adalah

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = \frac{1}{2}, \qquad \lambda = \frac{1}{4}, \qquad \lambda = 0$$

Terdapat sembilan vektor basis secara keseluruhan, sehingga matriks A dapat didiagonalisasi. Sembilan vektor basis tersebut dibentuk ke dalam matriks P sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi invers dari matriks P yang diperoleh yaitu

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa matriks P dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal.

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}
$$

Akhirnya diperoleh

$$
D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}
$$

Berdasarkan persamaan $A^n = P^{-1}D^nP$, dapat diperoleh

$$X^n = A^nX^0$$

$$= P^{-1}D^nPX^0$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & -3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \\
\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \\
\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \\
3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \\
\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \\
\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\
-1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}
$$

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} a_0 + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right) c_0$$

$$+ \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) d_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} e_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) g_0$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} h_0 + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right) i_0$$

$$b_n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) d_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{4}\right) i_0$$

$$c_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} g_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} h_0$$

$$+ \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} i_0$$

$$d_n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) d_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{4}\right) i_0$$

$$e_n = 0$$

$$f_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} a_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right) c_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} g_0$$

$$- \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} h_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} i_0$$

$$g_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} a_0 + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) c_0 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} e_0 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} g_0$$

$$+ \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} h_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} i_0$$

$$h_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) b_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) c_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) d_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} e_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) g_0$$

$$+ \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} h_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) i_0$$

$$i_n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2}\right) b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2}\right) d_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} e_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\right) i_0$$

untuk $n = 1,2, \ldots$ (4.10)

Persamaan (4.10) merupakan persamaan eksplisit untuk fraksi-fraksi dari kesembilan genotip pada generasi ke-n yang ditinjau dari fraksi-fraksi genotip awal. Karena $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ cenderung mendekati 0 untuk n menuju tak terhingga $n \to \infty$, maka limit persamaan di atas adalah sebagai berikut:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} a_0 + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) b_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right) c_0 + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) d_0$$

$$- \left(\frac{1}{2}\right)^{n} e_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) g_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} h_0$$

$$+ \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right) i_0$$

$$= \frac{1}{4} b_0 + \frac{1}{4} d_0 - \frac{1}{4} i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right)b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right)d_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{4}\right)i_0$$

$$= \frac{1}{4}b_0 + \frac{1}{4}d_0 - \frac{1}{4}i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} g_0$$

$$+ \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} h_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} i_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right)b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right)d_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{4}\right)i_0$$

$$= \frac{1}{4}b_0 + \frac{1}{4}d_0 - \frac{1}{4}i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} a_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right)c_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e_0$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} g_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} h_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} i_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} a_0 + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)c_0 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} e_0$$

$$+ 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} g_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} h_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} i_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) b_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) c_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) d_0$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} e_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) g_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} h_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) i_0$$

$$= \frac{1}{4} b_0 + \frac{1}{4} d_0 - \frac{1}{4} i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} i_n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2}\right) b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2}\right) d_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} e_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\right) i_0$$

$$= -\frac{1}{2} b_0 - \frac{1}{2} d_0 + \frac{1}{2} i_0$$

Jadi diperoleh peluang genotip keturunan untuk n menuju tak terhingga yaitu:

$$a_n = b_n = d_n = h_n = \frac{1}{4} b_0 + \frac{1}{4} d_0 - \frac{1}{4} i_0$$

$$i_n = -\frac{1}{2} b_0 - \frac{1}{2} d_0 + \frac{1}{2} i_0$$

$$c_n = e_n = f_n = g_n = 0$$

Lampiran 7. Peluang genotip dari persilangan atau perkawinan silang individu aaBB dengan seluruh kemungkinan genotip yang ada

Genotip keturunan		Genotip dari kedua orang tua								
		aaBB-AABB	aaBB - AABb	aaBB - AAbb	aaBB - AaBB	aaBB - AaBb	aaBB - Aabb	aaBB - aaBB	aaBB - aaBb	aaBB - aabb
		a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	e_{n-1}	f_{n-1}	g_{n-1}	h_{n-1}	i_{n-1}
a_n	AABB	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b_n	AABb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c_n	AAbb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d_n	AaBB	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0
e_n	AaBb	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
f_n	Aabb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
g_n	aaBB	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
h_n	aaBb	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
i_n	Aabb	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Berikut penyelesaian diagonalisasi dari matriks A;

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \lambda_4 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & \lambda_5 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \lambda_7 - 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \lambda_8 - \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga nilai-nilai eigen yang diperoleh adalah

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = \frac{1}{2}, \qquad \lambda = \frac{1}{4}, \qquad \lambda = 0$$

Terdapat sembilan vektor basis secara keseluruhan, sehingga matriks A dapat didiagonalisasi. Sembilan vektor basis tersebut dibentuk ke dalam matriks P sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi invers dari matriks P yang diperoleh yaitu

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -1 & -2 & -3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa matriks P dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal.

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -1 & -2 & -3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Akhirnya diperoleh

$$
D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Berdasarkan persamaan $A^n = P^{-1}D^nP$, dapat diperoleh

$X^n = A^nX^0$

$\quad = P^{-1}D^nPX^0$

$$
\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & -2 & -4 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-2 & -3 & -4 & -1 & -2 & -3 & 0 & -1 & -2 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & -2 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\left(\frac{1}{4}\right)^{n} & 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} & -3 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\left(\frac{1}{4}\right)^{n} & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}
$$

$$a_n = \left(4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right)e_0 - 4f_0 - 2g_0$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n a_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)e_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)f_0 + g_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)h_0$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\right)^n i_0$$

$$c_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n a_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n c_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right)e_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)f_0 - 3g_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)h_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n i_0$$

$$d_n = \left(-2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)e_0 + 2f_0 + g_0$$

$$e_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e_0$$

$$g_n = \left(-2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)e_0 + 2f_0 + g_0$$

$$h_n = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)e_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^n f_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^n h_0$$

$$i_n = f_n = 0 \qquad \text{untuk } n = 1,2, \ldots \qquad (4.11)$$

Persamaan (4.11) merupakan persamaan eksplisit untuk fraksi-fraksi dari kesembilan genotip pada generasi ke-n yang ditinjau dari fraksi-fraksi genotip awal. Karena $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ cenderung mendekati 0 untuk n menuju tak terhingga $n \to \infty$, maka limit persamaan di atas adalah sebagai berikut:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right)e_0 - 4f_0 - 2g_0$$

$$= 4e_0 - 4f_0 - 2g_0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n a_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)e_0$$

$$+\left(-\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)f_0 + g_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)h_0$$

$$+\left(\frac{1}{2}\right)^n i_0$$

$$= -2e_0 + 2f_0 + g_0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^n a_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n c_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right)e_0$$

$$+\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)f_0 - 3g_0$$

$$+\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)h_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n i_0$$

$$= 6e_0 - 6f_0 - 3g_0$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\left(-2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)e_0 + 2f_0 + g_0$$

$$= -2e_0 + 2f_0 + g_0$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} i_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \left(-2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) e_0 + 2f_0 + g_0$$

$$= -2e_0 + 2f_0 + g_0$$

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) e_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^n f_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^n h_0 = 0$$

Jadi diperoleh peluang genotip keturunan untuk n menuju tak terhingga yaitu:

$$a_n = 4e_0 - 4f_0 - 2g_0$$

$$b_n = d_n = g_n = -2e_0 + 2f_0 + g_0$$

$$c_n = 6e_0 - 6f_0 - 3g_0$$

$$e_n = f_n = h_n = i_n = 0$$

Lampiran 8. Peluang genotip dari persilangan atau perkawinan silang individu aaBb dengan seluruh kemungkinan genotip yang ada

Genotip keturunan		Genotip dari kedua orang tua								
		aaBb-AABB	aaBb - AABb	aaBb - AAbb	aaBb - AaBB	aaBb - AaBb	aaBb - Aabb	aaBb - aaBB	aaBb - aaBb	aaBb - aabb
		a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	e_{n-1}	f_{n-1}	g_{n-1}	h_{n-1}	i_{n-1}
a_n	AABB	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b_n	AABb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c_n	AAbb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d_n	AaBB	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0
e_n	AaBb	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0
f_n	Aabb	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0
g_n	aaBB	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
h_n	aaBb	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
i_n	Aabb	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$1/2$

Berikut penyelesaian diagonalisasi dari matriks A;

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \lambda_4 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \lambda_5 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{8} & \lambda_6 - \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & \lambda_7 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \lambda_8 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \lambda_9 - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga nilai-nilai eigen yang diperoleh adalah

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = \frac{1}{2}, \qquad \lambda = \frac{1}{4}, \qquad \lambda = 0$$

Terdapat sembilan vektor basis secara keseluruhan, sehingga matriks A dapat didiagonalisasi. Sembilan vektor basis tersebut dibentuk ke dalam matriks P sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi invers dari matriks P yang diperoleh yaitu

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa matriks P dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal.

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

Akhirnya diperoleh

$$
D = \begin{bmatrix}
\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

Berdasarkan persamaan $A^n = P^{-1}D^nP$, dapat diperoleh

$$X^n = A^nX^0$$

$$= P^{-1}D^nPX^0$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} & \frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} & \frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} & \frac{1}{4}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\
0 & -2 & 0 & -4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}
$$

$$a_n = b_n = 0$$

$$
\begin{aligned}
c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} c_0 + \frac{1}{4} d_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} e_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) f_0 \\
+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) g_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) h_0 \\
+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \frac{1}{4}\right) i_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} c_0 + \frac{1}{4} d_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} e_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) f_0 \\
+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) g_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) h_0 \\
+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \frac{1}{4}\right) i_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} c_0 - \frac{1}{2} d_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} e_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right) f_0 \\
+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2}\right) g_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2}\right) h_0 \\
+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \frac{1}{2}\right) i_0
\end{aligned}
$$

$$f_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} f_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} h_0$$

$$g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} c_0 + \frac{1}{2} d_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) f_0$$
$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\right) g_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\right) h_0$$
$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\right) i_0$$

$$h_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} f_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} h_0$$

$$i_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} c_0 + \frac{1}{4} d_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} e_0$$
$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) f_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) g_0$$
$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{4}\right) h_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \frac{1}{4}\right) i_0$$

untuk $n = 1,2,\ldots$ (4.12)

Persamaan (4.12) merupakan persamaan eksplisit untuk fraksi-fraksi dari kesembilan genotip pada generasi ke-n yang ditinjau dari fraksi-fraksi genotip awal. Karena $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ cenderung mendekati 0 untuk n menuju tak terhingga $n \to \infty$, maka limit persamaan di atas adalah sebagai berikut:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} c_0 + \frac{1}{4}d_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} e_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) f_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) g_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) h_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \frac{1}{4}\right) i_0$$

$$= \frac{1}{4}d_0 + \frac{1}{4}g_0 + \frac{1}{4}h_0 + \frac{1}{4}i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} c_0 + \frac{1}{4}d_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} e_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) f_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) g_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) h_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \frac{1}{4}\right) i_0$$

$$= \frac{1}{4}d_0 + \frac{1}{4}g_0 + \frac{1}{4}h_0 + \frac{1}{4}i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} c_0 - \frac{1}{2}d_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} e_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right) f_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2}\right) g_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2}\right) h_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \frac{1}{2}\right) i_0$$

$$= -\frac{1}{2}d_0 - \frac{1}{2}g_0 - \frac{1}{2}h_0 - \frac{1}{2}i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} f_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} h_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} c_0 + \frac{1}{2}d_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) f_0$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\right) g_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\right) h_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\right) i_0 = \frac{1}{2}d_0 + \frac{1}{2}g_0 + \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} f_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} h_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} i_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} c_0 + \frac{1}{4}d_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} e_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) f_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}\right) g_0$$

$$+ \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{4}\right) h_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \frac{1}{4}\right) i_0$$

$$= \frac{1}{4}d_0 + \frac{1}{4}g_0 + \frac{1}{4}h_0 + \frac{1}{4}i_0$$

Jadi diperoleh peluang genotip keturunan untuk n menuju tak terhingga yaitu:

$$e_n = -\frac{1}{2}d_0 - \frac{1}{2}g_0 - \frac{1}{2}h_0 - \frac{1}{2}i_0$$

$$g_n = \frac{1}{2}d_0 + \frac{1}{2}g_0 + \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}i_0$$

$$c_n = d_n = i_n = \frac{1}{4}d_0 + \frac{1}{4}g_0 + \frac{1}{4}h_0 + \frac{1}{4}i_0$$

$$a_n = b_n = f_n = h_n = 0$$

Lampiran 9. Peluang genotip dari persilangan atau perkawinan silang individu aabb dengan seluruh kemungkinan genotip yang ada

Genotip keturunan		Genotip dari kedua orang tua								
		aabb-AABB	aabb-AABb	aabb-AAbb	aabb-AaBB	aabb-AaBb	aabb-Aabb	aabb-aaBB	aabb-aaBb	aabb-aabb
		a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	e_{n-1}	f_{n-1}	g_{n-1}	h_{n-1}	i_{n-1}
a_n	AABB	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b_n	AABb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c_n	AAbb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d_n	AaBB	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_n	AaBb	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0
f_n	Aabb	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
g_n	aaBB	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h_n	aaBb	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
i_n	Aabb	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Berikut penyelesaian diagonalisasi dari matriks A;

$|\lambda I - A| = 0$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \lambda_5 - \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \lambda_6 - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & \lambda_8 - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \lambda_9 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga nilai-nilai eigen yang diperoleh adalah

$\lambda = 1, \qquad \lambda = \frac{1}{2}, \qquad \lambda = \frac{1}{4}, \qquad \lambda = 0$

Terdapat sembilan vektor basis secara keseluruhan, sehingga matriks A dapat didiagonalisasi. Sembilan vektor basis tersebut dibentuk ke dalam matriks P sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi invers dari matriks P yang diperoleh yaitu

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -2 & -3 & -2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa matriks P dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal.

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -2 & -3 & -2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}
$$

Akhirnya diperoleh

$$
D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}
$$

Berdasarkan persamaan $A^n = P^{-1}D^nP$, dapat diperoleh

$$X^n = A^nX^0$$

$$= P^{-1}D^nPX^0$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -2 & -3 & -2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \\
-4 & -3\left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & -4 & 1 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}
$$

$$a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^n b_0 + d_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n e_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) f_0$$

$$+ \left(-1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) h_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^n i_0$$

$$b_n = -4d_0 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n e_0 + \left(-4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) f_0 + \left(4 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) h_0$$

$$c_n = 2d_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n e_0 + \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) f_0 + \left(-2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) h_0$$

$$d_n = 0$$

$$e_n = 2d_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n e_0 + \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) f_0 + \left(-2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) h_0$$

$$f_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n f_0$$

$$g_n = 2d_0 + \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) f_0 - 2h_0$$

$$h_n = -d_0 + \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) f_0 - h_0$$

$$i_n = 4d_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} e_0 + \left(4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) f_0 + \left(-4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) h_0$$

$$\text{untuk } n = 1,2,\ldots \qquad (4.13)$$

Persamaan (4.13) merupakan persamaan eksplisit untuk fraksi-fraksi dari kesembilan genotip pada generasi ke-n yang ditinjau dari fraksi-fraksi genotip awal. Karena $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ cenderung mendekati 0 untuk n menuju tak terhingga $n \to \infty$, maka limit persamaan di atas adalah sebagai berikut:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n a_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^n b_0 + d_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n e_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) f_0$$

$$+ \left(-1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) h_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^n i_0$$

$$= d_0 + f_0 - h_0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} -4d_0 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n e_0 + \left(-4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) f_0 + \left(4 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) h_0$$

$$= -4d_0 - 4f_0 + 4h_0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} 2d_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n e_0 + \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) f_0 + \left(-2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) h_0$$

$$= 2d_0 + 2f_0 - 2h_0$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} 2d_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n e_0 + \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) f_0 + \left(-2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) h_0$$

$$= 2d_0 + 2f_0 - 2h_0$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n f_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} 2d_0 + \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) f_0 - 2h_0$$

$$= 2d_0 + 2f_0 - 2h_0$$

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} -d_0 + \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) f_0 - h_0$$

$$= -d_0 + f_0 - 2h_0$$

$$\lim_{n\to\infty} i_n = \lim_{n\to\infty} 4d_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} e_0 + \left(4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) f_0 + \left(-4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) h_0$$

$$= 4d_0 + 4f_0 - 4h_0$$

Jadi diperoleh peluang genotip keturunan untuk n menuju tak terhingga yaitu:

$$a_n = d_0 + f_0 - h_0$$

$$b_n = -4d_0 - 4f_0 + 4h_0$$

$$c_n = e_n = g_n = 2d_0 + 2f_0 - 2h_0$$

$$h_n = -d_0 + f_0 - 2h_0$$

$$i_n = 4d_0 + 4f_0 - 4h_0$$

$$d_n = f_n = 0$$

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI " ALAUDDIN " MAKASSAR
UPT PUSAT PERPUSTAKAAN
Jln. Sultan Alauddin No. 63 Telp. 864928-864931 (Fax 864923)

SURAT KETERANGAN
NO: PK/HM.02.1/ 66 /2015

Yang bertanda tangan di bawah ini, menerangkan bahwa :

Nama	: Agustini
Nim	: 60600111002
Semester	: IX (Sembilan)
Fakultas	: Sains & Teknologi UIN Alauddin Makassar
Jurusan	: Matematika

Yang bersangkutan telah melakukan izin penelitian dari tanggal 14 September s/d 14 November 2015 dengan Judul :

"Implementasi Diagonalisasi Matriks Untuk Menyelidiki Pewarisan Autosomal Pada Generasi Ke-n" di UPT Pusat Perpustakaan UIN Alauddin Makassar"

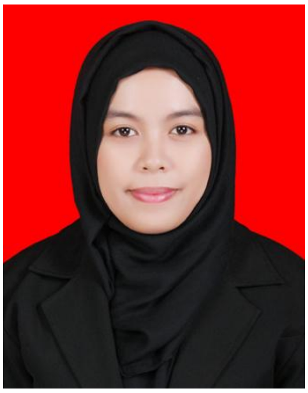
Demikian Surat Keterangan ini dibuat untuk dapat dipergunakan sebagaimana mestinya.

Samata, 10 Desember 2015
Kepala UPT Pusat Perpustakaan

KEMENTERIAN AGAMA PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAKASSAR

Muh. Quraisy Mathar, S.Sos, M.Hum,
NIP. 19760316 200604 1 001

RIWAYAT HIDUP PENULIS



AGUSTINI, lahir pada hari Ahad, tanggal 1 Agustus 1993, di Kabupaten Bulukumba. Anak bungsu dari tiga bersaudara. Buah hati dari pasangan H. Abdullah dan Hj. Andi Male yang menikah pada tahun 1982.

RIWAYAT PENDIDIKAN

1. SDN 1 Benteng di kel. Benteng, Kec. Benteng, kab. Kepulauan Selayar pada tahun 1999-2005.
2. SMPN 1 Benteng di kel. Benteng, Kec. Benteng, kab. Kepulauan Selayar pada tahun 2005-2008
3. SMAN 1 Benteng di kel. Benteng, Kec. Benteng, kab. Kepulauan Selayar pada tahun 2008-2011.
4. Tahun 2011 penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi Negeri jenjang S-1 di Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar pada Fakultas Sains dan Teknologi, Jurusan Matematika.

Atas Rahmat Allah swt. penulis berhasil menyelesaikan studi di tahun 2015 dengan judul Skripsi **"Implementasi Diagonalisasi Matriks Untuk Menyelidiki Pewarisan Autosomal Pada Generasi Ke-N".**