



# Métrica $D$ y estructura de denominación de especies monetarias en Colombia

◆ Carlos Varela ◆ Mauricio Salazar ◆  
◆ Fernando Arias ◆ Luisa Silva\* ◆

En este artículo se explica la aplicación de la métrica  $D^1$  al caso colombiano, a partir del análisis de la estructura de denominaciones de billetes y monedas y su evolución en el tiempo. Igualmente, se presenta la actualización del estudio de Arango, Misas y Hernández (2004) para determinar, de acuerdo con esta métrica, el momento en que se debería introducir la nueva denominación de \$100.000.

La primera parte del artículo explica la métrica  $D$  y sus alcances. En la segunda se presenta la evolución de la estructura de denominaciones en el caso colombiano y su relación con la métrica  $D$ . En la tercera se explica la metodología utilizada con un ejemplo hipotético de solo tres denominaciones. En la cuarta parte se realizan los cálculos para Colombia y se presentan las proyecciones realizadas en 2013 para los años siguientes. La parte final expone las conclusiones.

## I. Métrica $D$

### A. Modelo e implicaciones

Los resultados principales de este modelo, introducido por Payne y Morgan (1981), se basan en el estudio empírico de la estructura de denominaciones de billetes y monedas en un grupo de países, con especial énfasis en el Reino Unido. Su principal característica consiste en que la estructura de denominaciones está estrechamente

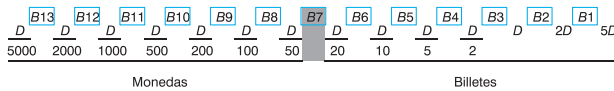
\* Miembros del Departamento Técnico y de Información Económica de la Subgerencia de Estudios Económicos del Banco de la República. Se agradece a Sebastián Sanín por su valiosa participación y por sus sugerencias y comentarios en la elaboración del presente artículo. Los resultados y opiniones son responsabilidad exclusiva de los autores y su contenido no compromete al Banco de la República ni a su Junta Directiva.

<sup>1</sup> La métrica  $D$  es una metodología presentada en Payne y Morgan (1981:45-53).

ligada al promedio diario de las transacciones en efectivo, medido por un parámetro denominado  $D$ . Los autores utilizan como referencia para  $D$  el salario promedio diario para diferentes países, y obtienen como resultado las siguientes conclusiones, que se pueden ver en el Gráfico 1:

- a) Existen dos denominaciones por encima del valor de  $D$ .
- b) El límite entre billetes y monedas está entre  $D/20$  y  $D/50$ .

**Gráfico 1**  
Estructura denominacional según la métrica  $D$



Fuente: Arango *et al.* (2004).

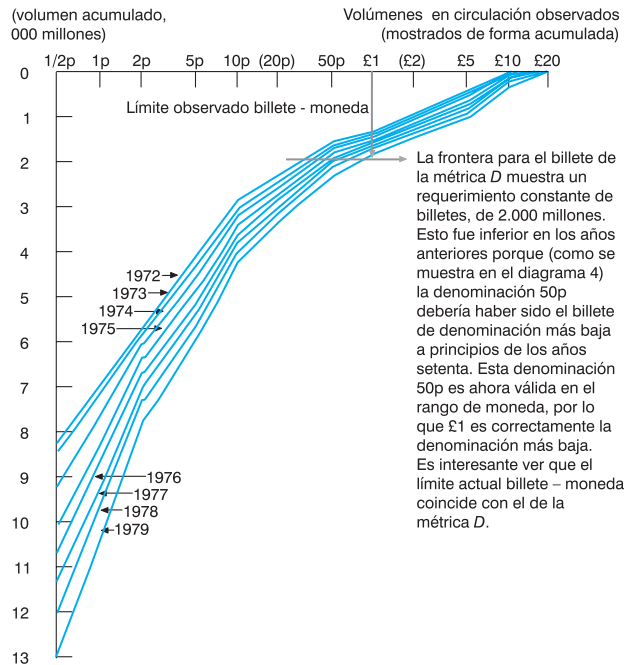
Adicionalmente, Payne y Morgan (1981) encuentran que, dada una cantidad de personas y un nivel de precios creciente, los volúmenes irán siempre al alza, como se presenta en el panel A del Gráfico 2. En dicho gráfico se muestra, para el Reino Unido, el valor nominal acumulado de las denominaciones en el eje vertical, y cada una de las denominaciones en el horizontal, ordenadas de izquierda a derecha de menor a mayor denominación.

Adicionalmente, al dividir los valores nominales acumulados entre el índice de precios, se obtiene el valor real acumulado de piezas, caso en el cual Payne y Morgan encuentran que las líneas tienden a converger entre los diferentes años (Gráfico 2, panel B). Así, los autores concluyen que, suponiendo el crecimiento de la población y otras variables constantes, el valor real acumulado en circulación tiende a ser constante a lo largo del tiempo.

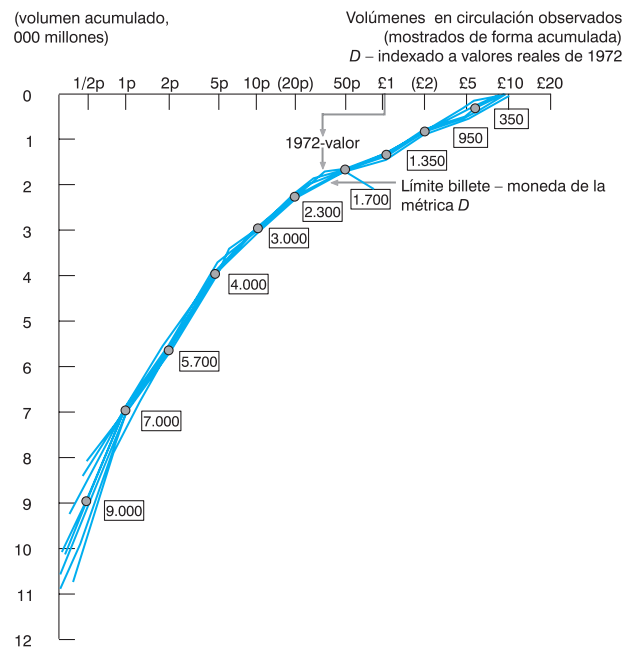
Los autores también encuentran que, a medida que aumenta el valor nominal de las transacciones realizadas con efectivo, los

**Gráfico 2**

**A. Volumen actual en circulación (acumulado)**



**B. Volumen actual en circulación (acumulado)**  
**( $D$ -indexado a valores reales de 1972)**



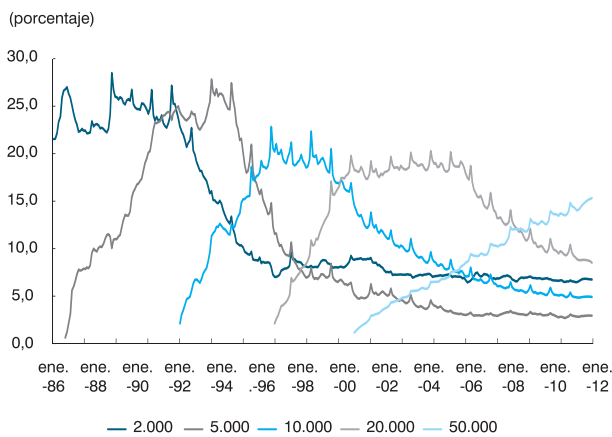
Fuente: Payne y Morgan (1981).

agentes tienden a utilizar más piezas de altas denominaciones en sustitución de las menores. Eventualmente, se llega al punto en que se deja de utilizar la especie de menor valor.

### B. Caso colombiano

En el caso colombiano se observa como regularidad empírica que cuando la mayor denominación ha pasado a tener el mayor número de piezas en circulación, se han emitido las nuevas denominaciones (Gráfico 3).

Gráfico 3  
Participaciones sobre total de piezas (2.000 a 50.000)



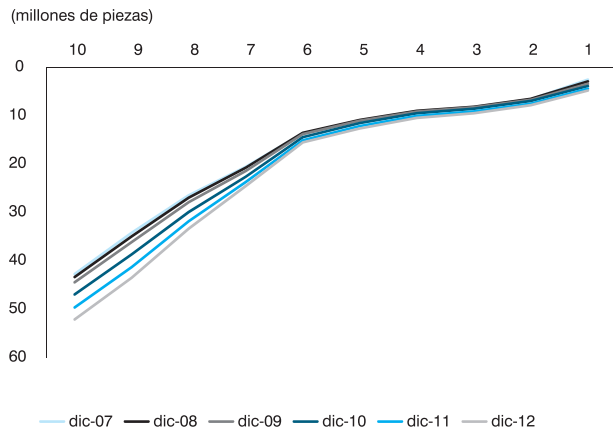
Fuente: Banco de la República.

Igualmente, se observa que al replicar el gráfico de Payne y Morgan para la primera década de 2000, en general se cumple el supuesto del volumen constante en términos reales (Gráfico 4).

Teniendo en cuenta lo anterior, se procedió a adaptar esta metodología para el caso colombiano, siguiendo el procedimiento utilizado en Misas, Arango y Hernández (2004). En particular, se utilizó la estructura de la participación de cada denominación y, a partir de su evolución en el tiempo, se estimó el valor del parámetro  $D$ .

Se parte del hecho de que la evolución de este parámetro debe reflejar el patrón de

Gráfico 4  
Volúmenes acumulados deflactados para el caso colombiano<sup>41</sup>



Fuente: cálculos de los autores.

gasto de los agentes que se fondea con efectivo. Cuando los agentes incrementan el número de piezas para realizar sus transacciones, se produce un aumento en sus costos de transacción. Con el fin de evitar estos costos, los agentes tienden a utilizar un número más elevado de piezas de alto valor y disminuyen el uso de las de menor valor. Este comportamiento se ve reflejado en el valor del parámetro  $D$ .

El objetivo del ejercicio es el de calcular el valor del parámetro  $D$  implícito en la estructura de participaciones de cada denominación. Luego, a partir de la proyección de estas participaciones por medio de métodos estadísticos, se determina el momento en el que se debería introducir una nueva denominación.

## II. Calibración del parámetro $D$

### 1. Ejemplo hipotético e intuición

Suponga que se tiene una estructura de tres denominaciones, donde  $B3$  corresponde a una denominación de \$2.000,  $B2$  a una de \$5.000 y  $B1$  a una de \$10.000. El volumen acumulado total deflactado ( $\bar{V}$ ) es constante e igual a 85

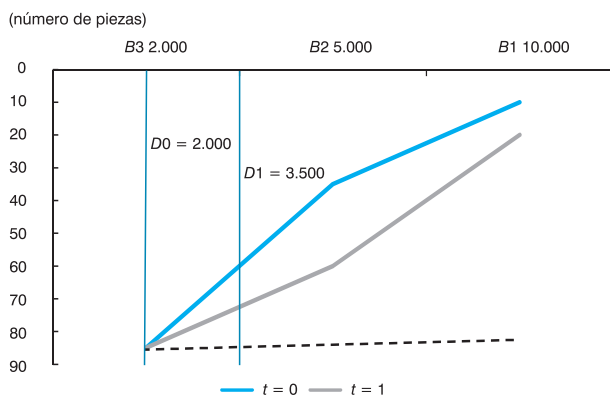
unidades. Los siguientes gráficos muestran el volumen acumulado en el eje vertical, y cada denominación en el horizontal. Si  $D$  no creciera, los volúmenes acumulados se deberían mantener constantes. Sin embargo, tanto  $D$  como los volúmenes de cada denominación cambian en el tiempo, aunque el volumen total se mantenga igual (línea punteada en el Gráfico 5). Por tanto, se ve afectada la participación de cada denominación.

En el Gráfico 5 se supone que en el primer año ( $t = 0$ ), el valor del parámetro  $D = D_0$  es igual a la menor denominación, que es el billete de \$2.000. En el segundo periodo ( $t = 1$ ),  $D$  aumenta a  $D_1 = \$3.500$ . Este movimiento crea un factor de desplazamiento entre  $B_3$  y  $D_1$ , que llamamos  $\lambda_1$ , el cual es igual a \$1.500. Como resultado, se presenta un cambio en los volúmenes individuales, como se observa en el Cuadro 1 y el Gráfico 6. De acuerdo con esta métrica, mientras el valor del factor  $\lambda_1$  sea menor a la diferencia entre las denominaciones (\$3.000 en el ejemplo), no se debería introducir una nueva denominación.

Nótese que la pérdida de volumen del billete de \$2.000 ( $B_3$ ) lo ganan las otras denominaciones:

$$VAC_{t+1,(\$5.000, \$10.000)} = VAC_{t,(\$5.000, \$10.000)} + \text{pérdida de vol. } \$2.000$$

Gráfico 5  
Estructura de tres denominaciones



Fuente: cálculos de los autores.

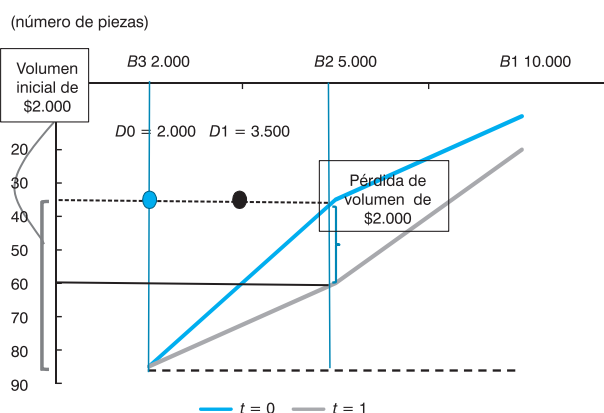
Cuadro 1<sup>a/</sup>  
Volúmenes de piezas

	Volúmenes individuales		Volúmenes acumulados	
	$t = 0$	$t = 1$	$t = 0$	$t = 1$
B3 2.000	50	25	85	85
B2 5.000	25	40	35	60
B1 10.000	10	20	10	20

a/ Las cifras de este cuadro corresponden a un ejemplo hipotético.

Fuente: cálculos de los autores.

Gráfico 6  
Estructura de tres denominaciones



Fuente: cálculos de los autores.

Donde  $VAC_{t+1,(\$5.000, \$10.000)}$  y  $VAC_{t,(\$5.000, \$10.000)}$  es el volumen acumulado de piezas de los billetes de \$5.000 y \$10.000 en cada momento,  $t + 1$  y  $t$ , respectivamente, y *pérdida de vol. \$2.000* corresponde a la pérdida del volumen de piezas del billete de \$2.000 entre los periodos  $t$  y  $t + 1$ .

Todo esto indica que la pérdida de volumen de  $B_3$  (\$2.000) está relacionada con la evolución de  $D$ , como se ilustra a continuación<sup>2</sup>:

■  $\frac{D - B_3}{B_2 - B_3}$  es igual a  $\frac{\text{pérd. vol. } B_3}{\text{vol. inicial } B_3}$

<sup>2</sup> La siguiente relación se establece a partir de la definición de tangente de un triángulo rectángulo.

■ Ello implica:  $\text{pérd. vol. } B3 = \frac{D - B3}{B2 - B3} \text{ vol.}$

$\text{inicial de } B3 = \varphi \times \text{vol. inicial de } B3$

donde  $\varphi = \frac{D - B3}{B2 - B3}$

Así, la fórmula de cálculo de los volúmenes acumulados es

$$VAC_{t+1, B1B2} = VAC_{t, B1B2} + \varphi \times \text{vol. inicial de } B3$$

El ejercicio también se puede hacer en participaciones, al dividir por el valor total del número de piezas  $VAC_{B1B2B3}$ , que se supone constante y en este caso es igual a 85:

$$PAC_{t+1, B1B2} = PAC_{t, B1B2} + \varphi \text{ part. indiv. de } B3$$

Si  $D = B3 \frac{D - B3}{B2 - B3} = \varphi = 0$

Si  $B3 < D < B2 \ 0 < \frac{D - B3}{B2 - B3} = \varphi < 1$

Si  $D = B2 \frac{D - B3}{B2 - B3} = \varphi = 1$  (nueva denominación)

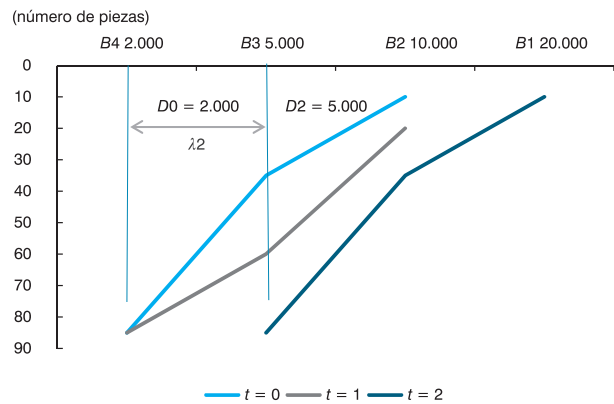
Si  $D > B2 \frac{D - B3}{B2 - B3} = \varphi > 1$  (se debió haber emitido una nueva denominación)

En el momento en que  $D$  alcance el valor  $D2 = \$5.000$  (que en la parte inicial del ejemplo corresponde a  $B2$ ), el factor de desplazamiento  $\lambda 2 = 3.000$  será igual a la diferencia de las denominaciones y  $\varphi$  se vuelve igual a 1, lo cual sugiere la introducción de una nueva denominación ( $\$20.000$ ) (Gráfico 7).

Dado que el volumen acumulado es igual en todas las fechas, en el tercer período ( $t = 2$ ) la nueva denominación de  $\$20.000$  empieza a ganar volumen, como se ve en el Cuadro 2, a la vez que la menor denominación lo pierde (i. e.: la de  $\$2.000$ )<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Este argumento es coherente con las fórmulas presentadas anteriormente.

Grafico 7  
Estructura de tres denominaciones



Fuente: cálculos de los autores.

Cuadro 2  
Volúmenes de piezas

	Volúmenes individuales		Volúmenes acumulados	
	t = 0	t = 2	t = 0	t = 2
B4 2.000	50	0	85	0
B3 5.000	25	50	35	85
B2 10.000	10	25	10	35
B1 20.000	0	10	0	10

Fuente: cálculos de los autores.

En el Gráfico 8, cuando  $D = 5.000$  y se introduce el nuevo billete, se ve que el volumen que poseía la menor denominación (antes  $B3$  ahora  $B4 = \$2.000$ ), es reemplazado por las demás denominaciones, haciendo que su participación caiga a cero.

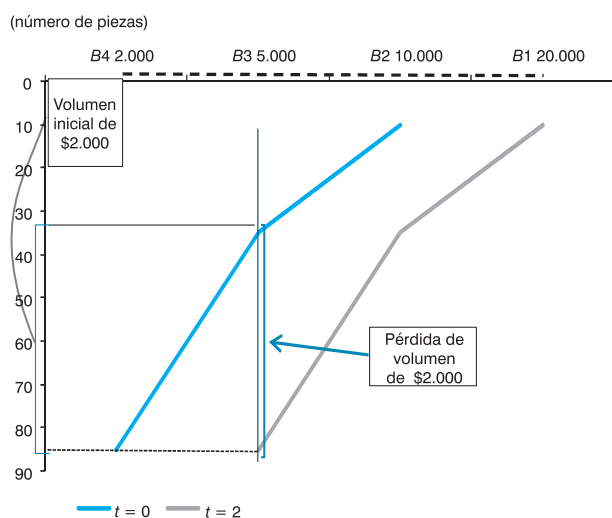
Alternativamente, como se explicó, se puede afirmar que la pérdida de volumen del billete de  $\$2.000$  (inicialmente  $B3$ ) es una proporción de su volumen inicial. A su vez, las demás denominaciones ganan volumen, donde el nuevo nivel es la suma de su volumen anterior más la proporción perdida por  $B3$ .  $D$  determina el valor tomado por  $\varphi$ . Expresando el ejemplo hipotético en términos de participaciones, se construye el Cuadro 3.

Cuadro 3  
Participaciones de cada una de las denominaciones en el total  
(porcentaje)

	Participaciones individuales (pi)			Participaciones acumuladas (Pi)		
	t = 0	t = 1	t = 2	t = 0	t = 1	t = 2
B4 2.000	58,82	29,41		100,00	100,00	
B3 5.000	29,41	47,06	58,82	41,18	70,59	100,00
B2 10.000	11,76	23,53	29,41	11,76	23,53	41,18
B1 20.000			11,76			11,76

Fuente: cálculos de los autores.

Gráfico 8  
Estructura 3 denominaciones



Fuente: cálculos de los autores.

### III. Calibración del parámetro $\varphi$ para Colombia

Para el caso colombiano, se sigue la metodología expuesta en Arango *et al.* (2004) (Anexo1), de 2003 a 2012. De acuerdo con esta metodología, se estima el valor de  $\varphi$  de acuerdo con la explicación de la sección anterior<sup>4</sup>. Para los valores proyectados de las participaciones se utilizan los modelos de las redes neuronales

<sup>4</sup> Cabe anotar que a partir de la estimación de  $\varphi$  se puede conocer el valor de  $D$  implícito en la estructura de denominaciones.

artificiales (RNA), ya que, de acuerdo con Arango *et al.*, estos son los modelos que mejor explican el comportamiento de las variables en cuestión.

#### A. Resultados históricos de $\varphi$

Partiendo del hecho de que los billetes de \$5.000, \$10.000, \$20.000 y \$50.000 fueron las denominaciones de mayor valor facial en diferentes momentos del tiempo, se tomó como referencia el valor promedio de las participaciones de los tres o cuatro primeros años de vida de cada una de estas especies monetarias hasta el momento en que el Banco de la República decidió emitir una nueva especie monetaria.

$$\text{Así: } \varphi_{i-1} = \frac{P_{i-1, \tau} - P_{i-1, \text{primeros años}}}{P_{i, \text{primeros años}}}$$

Donde  $\tau >$  primer año de emisión,  $e, i > 2$

De esta forma, para el período 1987-2014 se procedió a calcular la pérdida de participación del número de piezas del billete de la denominación anterior, frente a la mayor denominación introducida en cada momento del tiempo. Así,  $\varphi_1$  se calculó para cada período de la siguiente manera<sup>5</sup>:

<sup>5</sup> Cabe resaltar que en los ejercicios que se desarrollaron para definir el parámetro a utilizar, también se calcularon los valores para los parámetros  $\varphi_2, \varphi_3$  y  $\varphi_9$ . Sin embargo, los resultados presentaron ambigüedades en algunos casos o lentos crecimientos en otros. Los gráficos se presentan en el Anexo.

$$1987-1991: \varphi_1 = \frac{P_{\$5.000,t} - P_{\$5.000, \overline{1986-1988}}}{P_{\$2.000, \overline{1986-1988}}}$$

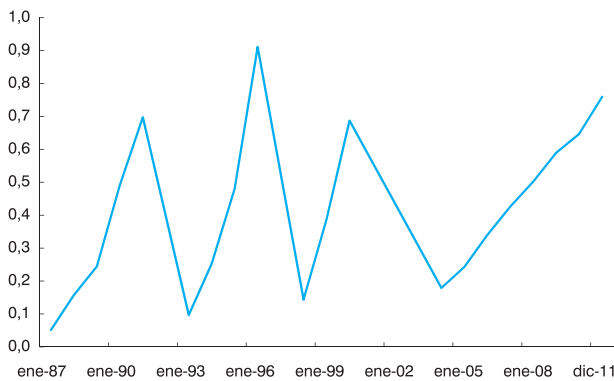
$$1992-1996: \varphi_1 = \frac{P_{\$10.000,t} - P_{\$10.000, \overline{1991-1994}}}{P_{\$5.000, \overline{1991-1994}}}$$

$$1997-2000: \varphi_1 = \frac{P_{\$20.000,t} - P_{\$20.000, \overline{1996-1999}}}{P_{\$10.000, \overline{1996-1999}}}$$

$$2001-2014: \varphi_1 = \frac{P_{\$50.000,t} - P_{\$50.000, \overline{2000-2003}}}{P_{\$20.000, \overline{2000-2003}}}$$

En el Gráfico 9 se muestra  $\varphi_1$  y su evolución en el tiempo.

Gráfico 9  
 $\varphi_1$  en el tiempo

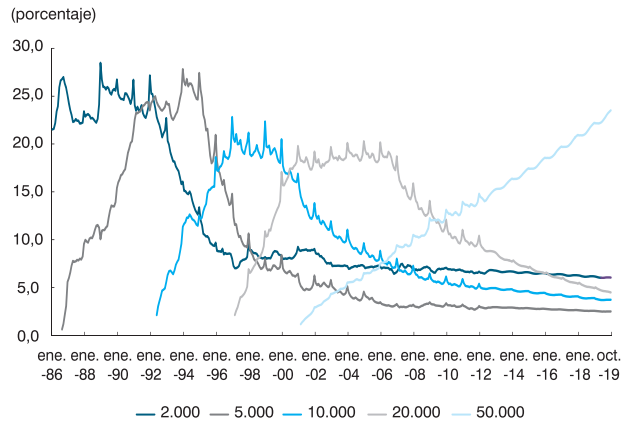


Fuente: cálculos de los autores.

**Proyecciones de  $\varphi$**

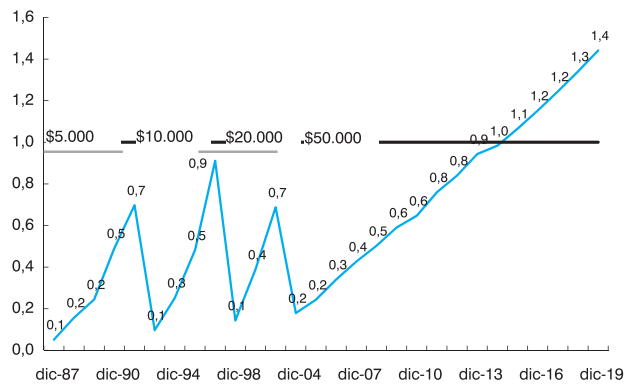
Al proyectar el parámetro  $\varphi_1$  utilizando la técnica de redes neuronales, el modelo arroja los resultados presentados en los gráficos 10 y 11. En particular, el Gráfico 10 presenta la proyección de las participaciones sobre el total de piezas de las denominaciones ubicadas en el rango \$2.000-\$50.000. El Gráfico 11 muestra la evolución proyectada de  $\varphi_1$  en el tiempo, donde se nota que, cuando se acerca a 1, se emite una nueva denominación. En la última fecha de estimación, y con los pronósticos realizados, alrededor de finales de 2015

Gráfico 10  
Participaciones sobre total de piezas (2.000 a 50.000)



Fuente: Banco de la República; cálculos de los autores.

Gráfico 11  
 $\varphi_1$  en el tiempo



Fuente: cálculos de los autores.


o comienzos de 2016 el valor de 1 es sobrepasado. Según lo sugerido por la metodología, el resultado indica la introducción de la nueva denominación de \$100.000.

**IV. Conclusiones**

Los resultados de esta calibración y los pronósticos arrojados por las redes neuronales artificiales, en concordancia con el criterio

de esta métrica, indican que la economía va a necesitar la nueva denominación de \$100.000 entre 2015 y 2016.

Este resultado se obtiene a partir del análisis del cambio en las participaciones de las diferentes denominaciones en el número total de piezas en circulación y es coherente con el aumento observado de la participación del billete de \$50.000.

Dada la utilización de un modelo estadístico (redes neuronales artificiales) para proyectar valores no observados, los pronósticos puntuales están sujetos a incertidumbre y, por tanto, deben interpretarse como una aproximación estadística. 

## Referencias

Arango, C. A.; Misas, M.; Hernández J. N. (2004). “La demanda de especies monetarias en Colombia: estructura y pronóstico”, Borradores de Economía, núm. 309, Banco de la República de Colombia.

Correa, P. (1983). “Método para la determinación de la estructura óptima de billetes en un país con inflación (Colombia, 1973-1988)”, mimeo, Bogotá.

Payne, L. C.; Morgan, H. M. (1981). “UK Currency Needs in the 1980s”, *Banker*, abril, pp. 45-53.





## Anexo 1

### Metodología de calibración del valor $D$

Se siguen las metodologías de Arango, Misas y Hernández (2004) y Correa (1983) para estimar el valor  $D$ , para esto se emplean los valores del número de piezas observados o estimados para cada denominación.

1. Se toman los valores mensuales de circulación para cada una de las especies en circulación.

$$Vac_{it} = \sum_{s=1era}^i \# \text{ de piezas}_s, i = 1era, 2nda, \dots, m$$

$$m = 10$$

$$Vd_{i,t} = Vac_{it} / IPC_t$$

$$\text{después } \overline{Vd}_{it} = \sum_{j=0}^{11} Vd_{i,t-j}$$

Y se toman únicamente los promedios anuales.

2. Se calcula la proporción acumulada promedio anual para cada denominación:

$$P_i = \frac{\overline{Vd}_{it}}{\overline{Vd}_{mt}}$$

3. La proporción por denominación promedio anual es igual a:

$$p_i = P_i - P_{i-1}$$

4. La relación entre  $D$  y la estructura denominacional establece que  $D$  debe estar entre la segunda y tercera denominación. Se define el parámetro  $\varphi$ , que medirá la distancia relativa de  $D$ , con la segunda y tercera denominación:

$$\varphi = \frac{D - B3}{B2 - B3} = \frac{\lambda}{B2 - B3}$$

Si  $D$  es conocido y  $\varphi > 1$ , será momento de introducir una nueva denominación.

5. De acuerdo con la métrica  $D$ , el parámetro  $\varphi$  establece una regla de evolución de las proporciones acumuladas:

$$P_{i-1,t+1} = P_{i-1,t} + \varphi p_{i,t}$$

Esta regla busca medir, mediante  $\varphi$ , qué tanto de la proporción acumulada en  $t + 1$  para la denominación  $i - 1$  se debe a pérdidas en la proporción promedio de  $i$ :

$$P_{\$50.000,t+1} = P_{\$50.000,t} + \varphi P_{\$20.000,t}$$

$\varphi$  indicará en qué grado la nueva participación acumulada de \$50.000 le restó participación individual al billete de \$20.000, y cuando  $\varphi > 1$ , será momento de introducir una nueva denominación. Si se conociera  $D$ , se podría encontrar  $\varphi$  (paso 4).

Sin embargo, el proceso de calibración de  $\varphi$ , empleado por Arango *et al.* (2004), parte de  $\varphi$  para encontrar  $D$ . Esto lo hicieron de manera consistente con los datos observados, específicamente con la proporción del billete de \$50.000 sobre el total de piezas en diciembre de 2003 con respecto al promedio de 2000 a 2003:

$$\varphi_{i-1} = \frac{P_{i-1,03} - P_{i-1,\{00,03\}}}{P_{i,\{00,03\}}}; i = [2,10]$$

Dependiendo del período,  $P_{i-1,t+1}$  puede ser observado o deberá ser estimado con los modelos de redes neuronales.

Según Arango *et al.* (2004):

Como ya se explicó, la métrica  $D$  responde a una mecánica en donde las proporciones

relativas de las diferentes denominaciones se van desplazando de acuerdo al poder adquisitivo de la estructura. Una vez calculado el promedio de los últimos tres años, se calibró el factor de desplazamiento,  $\varphi_1$ , para que la proporción del billete de \$50.000 sobre el total de piezas en circulación a diciembre de 2003 fuera consistente

con el volumen de piezas de \$50.000 en circulación a esa fecha.

Debido a que esta definición no deja claro cuál  $\varphi_{i-1}$  que utilizaron para encontrar el valor  $D$  de 10.700, en el presente artículo se calibraron todos los  $\varphi_{i-1}(\varphi_1, \varphi_9)$ , de acuerdo con Arango *et al.* (2004):

Cuadro A1.1  
Estimación del parámetro  $\varphi$

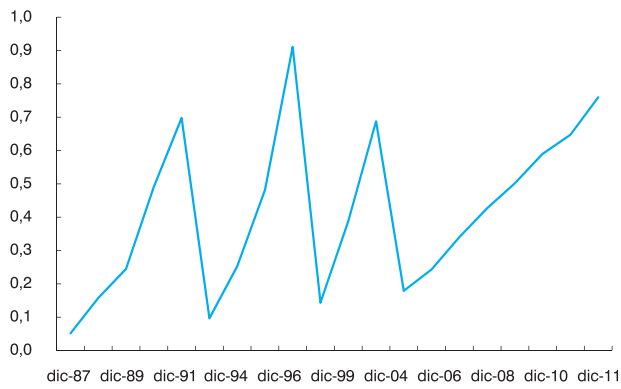
Valor de la denominación	Denominación	Millones de piezas		P_prom.	P_dic.-2003	P_prom.	p_dic.-2003		$\varphi$
		Promedio 2000-2003	Dic.-2013						
50	10	32,74	40,13	1,00	1,00	0,24	0,22	9	0,078
100	9	25,01	31,39	0,76	0,78	0,19	0,18	8	0,126
200	8	18,91	24,11	0,58	0,60	0,14	0,13	7	0,228
500	7	14,48	18,98	0,44	0,47	0,11	0,12	6	0,194
1.000	6	10,77	14,08	0,33	0,35	0,05	0,06	5	0,361
2.000	5	9,00	11,81	0,27	0,29	0,05	0,04	4	0,504
5.000	4	7,42	10,07	0,23	0,25	0,03	0,03	3	0,804
10.000	3	6,35	8,83	0,19	0,22	0,08	0,07	2	0,503
20.000	2	3,71	6,18	0,11	0,15	0,10	0,12	1	0,222
50.000	1	0,34	1,33	0,01	0,03	0,01	0,03		

Fuente: Misas *et al.* (2004).

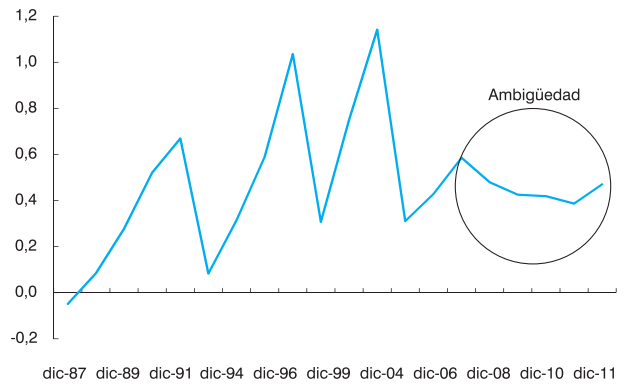
## Anexo 2

Gráfico A2.1  
Gráficos para  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  y  $\varphi_9$

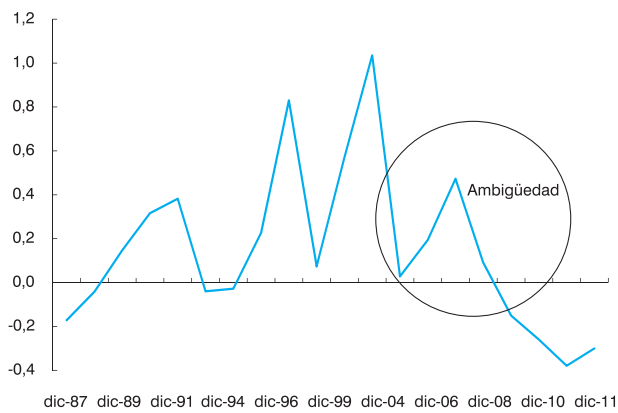
A.  $\varphi_1$  en el tiempo



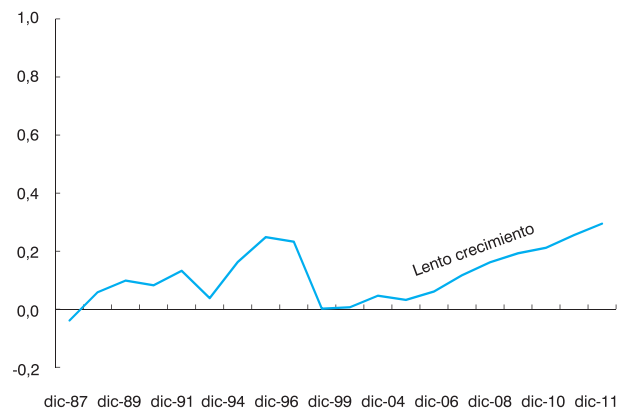
B.  $\varphi_2$  en el tiempo



C.  $\varphi_3$  en el tiempo



D.  $\varphi_9$  en el tiempo



Fuente: cálculos de los autores.