SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Robert Bozoki

VEKTORI U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc. dr. sc. Maja Starčević

Zagreb, rujan, 2018

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom radu opisat ćemo obradu gradiva vezanog za vektore u školi te primjenu vektora u raznim tipovima zadataka. Vektori se prvi put pojavljuju u gradivu 8. razreda osnovne škole, a zatim u 3. razredu srednje škole. U prvom poglavlju naglasak će biti na tome kako se definira pojam vektora u raznim udžbenicima za osnovnu i srednju školu. Osim toga, bit će navedene definicije i svojstva svih ključnih pojmova, te razlike u definicijama i njihovom redoslijedu.
Zadaci koji će biti riješeni u sljedeća dva poglavlja dio su nastavnog gradiva koje se koristi za dodatnu nastavu i služi za pripremu natjecatelja 3. i 4. razreda srednjih škola, a neki zadaci se mogu riješiti na redovnoj nastavi. Prva ideja koja pada na pamet nakon čitanja bilo kojeg od tih zadataka je da se mogu riješiti geometrijskom metodom, ali vektorska metoda u nekim od tih zadataka može biti brža ili jednostavnija.
U drugom poglavlju bit će sustavno navedene vrste zadataka koji se mogu riješiti vektorskom metodom. Cilj klasifikacije zadataka u ovom poglavlju jest motivacija za češću uporabu vektorske metode.
U trećem poglavlju riješit ćemo nekoliko zadataka koji se osim geometrijskom, mogu riješiti vektorskom i analitičkom metodom. Svaki zadatak riješit ćemo pomoću sve tri metode. Komentirat ćemo koja je metoda rješavanja bila najjednostavnija. Vidjet ćemo da vektorska metoda ne mora nužno biti kraća, ali ona zahtjeva nešto manji geometrijski zor.

Poglavlje 1

Uvođenje pojma vektora i osnovni pojmovi

U ovom poglavlju bit će opisano kako se uvodi pojam vektora u osnovnoj i srednjoj školi pomoću nekoliko udžbenika za 8. razred osnovne škole i 3. razred srednje škole. Nakon toga navest ćemo osnovne pojmove vezane za vektore. Napomenut ćemo ako se definicije u udžbenicima razlikuju.

1.1 Osnovna škola

Na početku drugog polugodišta 8. razreda na nastavi matematike uvodi se pojam vektora. Pomoću nekoliko udžbenika opisat ćemo načine uvođenja pojma vektora. Osim toga, navest ćemo osnovne pojmove vezane za vektore i operacije s vektorima za prvi udžbenik, a za ostale udžbenike će biti navedene razlike u odnosu na prvi udžbenik. Motivacijski primjer će biti naveden ako ga neki pojam ima.

1.1.1 Matematika 8 (Profil)

Osim uvođenja pojma vektora, u ovome potpoglavlju bit će navedene definicije i svojstva, te motivacijski primjeri onim redoslijedom kako se nalaze u udžbeniku u poglavlju "Vektori". Prvi udžbenik koji promatramo je "Matematika 8" (vidi [7]).

Pojam vektora

Na početku poglavlja "Vektori" prvo se ponavlja definicija dužine, a zatim se definira vektor. Potom se naglašava da su se učenici u 7. razredu susreli s pojmom vektora kada su na nastavi fizike obrađivali poglavlje vezano za sile.

U ovom udžbeniku nalazimo sljedeće definicije.

Duljina, smjer i orijentacija vektora

Definicija 1.1.1. *Vektor je usmjerena dužina i ima svoju duljinu. Duljina vektora* $\overrightarrow{AB}$ *jednaka je duljini dužine* $\overline{AB}$*. Duljina vektora označava se* $|\overrightarrow{AB}|$*. Vrijedi:* $|\overrightarrow{AB}|=|\overline{AB}|$.

Definicija 1.1.2. *Za dva vektora koja pripadaju istim ili usporednim pravcima kaže se da su istog smjera ili kolinearni.*

Definicija 1.1.3. *Ako strelice obaju vektora pokazuju na istu stranu, za te vektore kažemo da imaju istu orijentaciju.*

Definicija 1.1.4. *Ako strelice vektora pokazuju na suprotne strane, kažemo da ti vektori imaju suprotne orijentacije.*

Napomena 1.1.5. *O istoj ili suprotnoj orijentaciji ima smisla govoriti samo ako vektori pripadaju istim ili usporednim pravcima, tj. ako su istog smjera (kolinearni).*

Jednaki i suprotni vektori, nul-vektor

Definicija 1.1.6. *Dva su vektora jednaka ako imaju jednake duljine, isti smjer i istu orijentaciju.*

Definicija 1.1.7. *Dva su vektora suprotna ako imaju jednake duljine, isti smjer i suprotne orijentacije.*

Definicija 1.1.8. *Vektor suprotan vektoru* $\overrightarrow{a}$ *označava se* $-\overrightarrow{a}$.

Definicija 1.1.9. *Vektor koji počinje i završava u istoj točki naziva se nul-vektor.*

Zbrajanje vektora

Prije definicija zbrajanja vektora, prvo se naglašava da su se učenici u 7. razredu na nastavi fizike susreli sa silama i njihovim oznakama. Također, učenici su tada određivali silu koja nastaje kada na isto tijelo djeluju dvije sile. Zatim slijede dvije definicije i dva svojstva.

Definicija 1.1.10. *Zbroj* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ *vektor je koji počinje u početnoj točki prvog vektora, a završava u završnoj točki drugog. Dakle,* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$*. Ovakvo zbrajanje vektora naziva se zbrajanje vektora po pravilu trokuta.*

Definicija 1.1.11. *Zbroj vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$, koji imaju zajedničku početnu točku, je vektor $\overrightarrow{AC}$ koji je dijagonala paralelograma $ABCD$. Takav postupak zovemo zbrajanje vektora po pravilu paralelograma.*

Samo u ovom od razmatranih udžbenika za osnovnu školu se definira svojstvo komutativnosti.

Definicija 1.1.12. *Za zbrajanje vektora vrijedi svojstvo komutativnosti, to jest $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$.*

Definicija 1.1.13. *Zbroj dvaju suprotnih vektora je nul-vektor, to jest $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$.*

Oduzimanje vektora

Prije definicije oduzimanja vektora napominje se da za brojeve vrijedi $a - b = a + (-b)$, te da isto vrijedi za vektore.

Definicija 1.1.14. *Od vektora $\overrightarrow{a}$ oduzeti vektor $\overrightarrow{b}$ znači vektor $\overrightarrow{a}$ zbrojiti s vektorom suprotnim vektoru $\overrightarrow{b}$, to jest s vektorom $-\overrightarrow{b}$:*

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b}).$$

1.1.2 Matematički izazovi 8 (Alfa)

Drugi udžbenik koji spominjemo, a u kojemu se uvodi pojam vektora je "Matematički izazovi 8" (vidi [4]). U ovom potpoglavlju bit će navedeni pojmovi i definicije koje su različiti u odnosu na Profil-ov udžbenik.

Pojam vektora

U uvodu poglavlja "Vektori" spominju se tri primjera.
U prvom primjeru spominje se potok. Kad u njega stavimo štap, smjer kapljica vode se mijenja. Osim brzine gibanja kapljica važan je i njihov smjer.
Drugi primjer je vjetrovito polje. Vjetar pomiče vlati trave u određenom smjeru. Taj se pomak tada označava strelicom.
Treći primjer je vezan za životinje u vrtu. Nakon nekog vremena svaka životinja promjeni svoj položaj. Strelicama su označeni njihovi pomaci. Na temelju slike u udžbeniku, učenici trebaju reći koja se životinja najviše pomaknula, koja najmanje, koje su se jednako pomaknule i u kojem smjeru. Poslije toga se navodi da strelice zovemo vektorima i slijedi definiranje vektora i osnovnih pojmova vezanih za vektore.

Definicije i svojstva

Prije definicija jednakih i suprotnih vektora, spominje se što su vektori jednakih i suprotnih orijentacija. Prije definicije zbrajanja vektora pravilom trokuta nalazi se jedan primjer. U primjeru gazdarica dvaput pomiče macu koja spava. Od učenika se traži da povežu ukupan pomak s pojedinim pomacima.

1.1.3 Tajni zadatak 008 (Školska knjiga)

Treći udžbenik koji promatramo je "Tajni zadatak 008" (vidi [5]).

Pojam vektora

U uvodu poglavlja "Vektori" nalaze se dva primjera.
U prvom primjeru se nalazi slika na kojoj su dvije sile istog smjera, iste orijentacije i jednake duljine koje djeluju na autić. Učenici su se upoznali s pojmom sile i vektorskom oznakom sile u 7. razredu na nastavi fizike. Nakon toga nalazi se nekoliko pitanja o tome djeluju li sile duž istog pravca, kako su usmjerene i jesu li jednake veličine.
U drugom primjeru su dvije sile istog smjera, različite orijentacije i jednake duljine koje djeluju na autić. Nakon toga slijede ista pitanja kao u prethodnom primjeru. Potom slijedi definicija vektora i osnovni pojmovi vezani za vektore.

Definicije i svojstva

Nakon definicije vektora spominje se da orijentaciju vektora pokazuje njegova strelica.
Nakon definicije jednakih vektora slijedi pojam vektora predstavnika:

Definicija 1.1.15. *Sve međusobno jednake vektore možemo predočiti jednim, među njima odabranim, vektorom. Taj vektor je predstavnik svih međusobno jednakih vektora.*

Na početku nastavne jedinice "Zbrajanje i oduzimanje vektora" nalazi se motivacijski primjer. Dvije ekipe povlače uže, gdje je za svaku ekipu zadan iznos sile. Nakon toga slijedi nekoliko pitanja o smjeru djelovanja sila, orijentaciji, o tome tko će pobijediti te je zadano da se nacrtaju sile.
Prije definicije zbrajanja vektora pravilom trokuta nalazi se motivacijski primjer. Zadane su brzine morske struje i plivača koji pliva okomito s obzirom na smjer struje. Zatim se traži da se odredi duljina i smjer rezultante.
U ovom udžbeniku se ne spominje zbrajanje vektora po pravilu paralelograma.

1.1.4 Matematika 8 (Školska knjiga)

Četvrti udžbenik koji promatramo je ”Matematika 8” (vidi [6]). U ovom udžbeniku, umjesto istaknutih definicija, pojmovi su opisani u nekoliko rečenica uz pomoć slika.

Pojam vektora

Pojam vektora se uvodi na sljedeći način. Pomoću slike pravca i točke na pravcu navodi se da pomakom te točke po pravcu dobivamo neku drugu točku i te dvije točke su krajnje točke dužine. Ta dužina je usmjerena jer je pomakom točke po pravcu određeno koja je točka početna, a koja završna. Nakon toga slijedi definicija vektora.

Definicije i svojstva

U prvih nekoliko rečenica koristi se pojam usmjerena dužina umjesto vektor i pojam usmjerenje umjesto orijentacije. Definicija koja se pojavljuje samo u ovom udžbeniku nakon definicije vektora je translacija točke za vektor i opisana je uz pomoć slike. U ostalim udžbenicima translacija se obrađuje nakon vektora. Pomoću translacije točke za vektor definiraju se jednaki vektori.

Definicija 1.1.16. *Dva su vektora jednaka ako određuju isti paralelni pomak, odnosno istu translaciju ravnine.*

Tek nakon definicije jednakih vektora spominje se da je drugi naziv za usmjerenu dužinu vektor. Još jedan pojam koji se nalazi samo u ovom udžbeniku je pojam paralelnog pomaka (translacije ravnine) za usmjerenu dužinu. Također, samo u ovom udžbeniku se nalazi uvjet da su vektori koji ne pripadaju istom pravcu jednaki ako su njihove krajnje točke vrhovi paralelograma.
Prije definicije zbrajanja vektora po pravilu paralelograma, nalaze se dvije definicije.

Definicija 1.1.17. *Uzastopna primjena dviju translacija također je translacija.*

Definicija 1.1.18. *Uzastopna primjena translacije za vektor $\overrightarrow{AB}$ i translacije za vektor $\overrightarrow{BC}$ je translacija za vektor $\overrightarrow{AC}$.*

Pravilo paralelograma otkriva se pomoću paralelograma na kojemu prvo treba odrediti zbroj dva vektora pravilom trokuta, a zatim se prisjetiti definicije jednakih vektora iz ovog udžbenika.

1.2 Srednja škola

Na početku drugog polugodišta 3. razreda srednje škole u nastavi matematike se obrađuje pojam vektora. Definicije i svojstva koja su ista kao u osnovnoj školi bit će samo spomenuti. Zatim će se navesti definicije i svojstva koja se sada prvi put obrađuju. Isto kao za udžbenike osnovne škole, za drugi udžbenik će biti navedene razlike.

1.2.1 Matematika 3 (Element)

Sljedeći udžbenik koji promatramo je "Matematika 3" (vidi [1]) koji je namijenjen za opću gimnaziju.

Pojam vektora

Prije poglavlja "Vektori" u nekoliko se rečenica spominju skalarne veličine (površina, temperatura, tlak, volumen, energija), te se uočava da se ne mogu sve veličine izraziti skalarom (brojem). Zatim se pomoću nekoliko fizikalnih veličina (sila, brzina, moment sile) opisuje da je kod njih važan iznos i smjer, te da se takve veličine nazivaju vektori. Potom slijedi definicija vektora.

Definicije i svojstva

Sada ćemo navesti razlike između ovog udžbenika i četiri promatrana udžbenika osnovne škole. Motivacija za kolinearne vektore je slika sa silnicama električnog polja paralelnih ploča.

Definicija 1.2.1. *Neka vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ imaju zajednički početak. Tada je njihova razlika $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ vektor koji počinje u završetku vektora $\overrightarrow{b}$, a završava u završetku vektora $\overrightarrow{a}$.*

Teorem 1.2.2. *Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ $(A \neq D)$ jednaki su onda i samo onda ako je četverokut $ABCD$ paralelogram.*

Propozicija 1.2.3. *Neka je O bilo koja točka ravnine (ili prostora) i $\overrightarrow{AB}$ zadani vektor. Tada postoji jedinstvena točka T u ravnini (ili prostoru) za koju je $\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{AB}$. Vektor $\overrightarrow{OT}$ nazivamo radijvektor točke T.*

Dva su motivacijska primjera zbrajanja vektora. U prvom primjeru čamac plovi preko rijeke okomito na njezin tok. Pri tome se čamac giba po dijagonali odgovarajućeg pravokutnika. U drugom primjeru na tijelo djeluju dvije sile. Zbroj tih dviju sila je rezultantna sila (vektor za koji će se pomaknuti tijelo) koja je dijagonala paralelograma kojeg razapinju te dvije sile.

Kod zbrajanja vektora pravilom trokuta kažemo da se vektori nadovezuju ili su ulančani. Dva vektora su ulančani ako se završetak prvog podudara s početkom drugog. Zbroj dvaju ulančanih vektora je vektor koji spaja početnu točku prvog vektora i završnu točku drugog vektora. U ovom udžbeniku su navedena sljedeća svojstva i njihovi dokazi: svojstva komutativnosti zbrajanja vektora, asocijativnosti zbrajanja vektora, zbroj suprotnih vektora i zbroj vektora i nul-vektora. U udžbenicima osnovne škole se ne nalaze dokazi ovih svojstava i ne spominju se asocijativnost zbrajanja vektora i zbrajanje vektora s nul-vektorom. Nijedna od sljedećih definicija se ne nalazi u udžbenicima osnovne škole.

Množenje vektora skalarom

Množenje se u osnovnoj školi definira kao uzastopno zbrajanje. Isto vrijedi i za množenje vektora skalarom što je u udžbeniku prikazano na nekoliko primjera i slika.

Definicija 1.2.4. *Vektor $\overrightarrow{a}$ množi se skalarom α tako da se dobije vektor $\alpha\overrightarrow{a}$ sa svojstvima:*

1. *duljina mu je jednaka umnošku apsolutne vrijednosti skalara α i duljine vektora $\overrightarrow{a}$:*
$$|\alpha\overrightarrow{a}| = |\alpha||\overrightarrow{a}|;$$
2. *smjer mu je jednak smjeru vektora $\overrightarrow{a}$;*
3. *orijentacija mu je jednaka orijentaciji vektora $\overrightarrow{a}$ ako je $\alpha > 0$, a suprotna orijentaciji vektora $\overrightarrow{a}$ ako je $\alpha < 0$.*

Za vektor $\overrightarrow{a}$ kažemo da je jedinični vektor (ili ort) ako je njegova duljina $|\overrightarrow{a}| = 1$.

Definicija 1.2.5. *Vektori $\overrightarrow{a_1}$ i $\overrightarrow{a_2}$ ($\overrightarrow{a_2} \neq \overrightarrow{0}$) kolinearni su ako i samo ako postoji skalar k takav da vrijedi*
$$\overrightarrow{a_1} = k\overrightarrow{a_2}.$$

Linearna nezavisnost vektora

Definicija 1.2.6. *Dva su vektora $\overrightarrow{a_1}$ i $\overrightarrow{a_2}$ linearno nezavisna ako iz jednakosti*
$$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{0}$$
nužno slijedi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
U suprotnom slučaju su $\overrightarrow{a_1}$ i $\overrightarrow{a_2}$ linearno zavisni. Tada postoji linearna kombinacija jednaka nul-vektoru, kojoj svi koeficijenti nisu jednaki nuli.
Za svaka dva linearno nezavisna vektora $\overrightarrow{a_1}$ i $\overrightarrow{a_2}$ kažemo da čine bazu vektorskog prostora V^2.

Teorem 1.2.7. *Dva su vektora kolinearna ako i samo ako su linearno zavisni. Dakle, dva su vektora nekolinearna ako i samo ako su linearno nezavisni.*

Vektori u Kartezijevom koordinatnom sustavu

Prije definicija navodi se nekoliko pojmova. Točka O je ishodište koordinatnog sustava. Vektor $\vec{i}$ je jedinični vektor na osi apscisa, a vektor $\vec{j}$ jedinični vektor na osi ordinata. Oba vektora imaju početnu točku u točki O, a završetak na pozitivnim dijelovima koordinatnih osi.

Propozicija 1.2.8. *Radijvektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ točke $A(x, y)$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ na sljedeći način:*

$$\overrightarrow{OA} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}.$$

Realne brojeve x i y nazivamo koordinatama vektora $\overrightarrow{OA}$.

Propozicija 1.2.9. *Vektor $\overrightarrow{AB}$ s početkom u točki $A(x_1, y_1)$ i završetkom u točki $B(x_2, y_2)$ ima prikaz*

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j}.$$

Teorem 1.2.10. *Dva su vektora, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ jednaka ako i samo ako im se podudaraju njihove pravokutne koordinate:*

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_x = b_x, \quad a_y = b_y.$$

Dijeljenje dužine u zadanom omjeru

Definicija 1.2.11. *Neka je λ pozitivan realni broj. Točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru λ ako vrijedi:*

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}.$$

Skalarni umnožak

Definicija 1.2.12. *Skalarni umnožak vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je realni broj $\vec{a} \cdot \vec{b}$ definiran s*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}),$$

gdje je $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Propozicija 1.2.13. *Skalarni umnožak vektora $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ računa se formulom*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Propozicija 1.2.14 (Svojstva skalarnog umnoška)**.** *Za sve vektore* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ *i svaki skalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

(a) *pozitivnost:*

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} \geq 0, \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0 \iff \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}; \tag{1.1}$$

(b) *komutativnost:*

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}; \tag{1.2}$$

(c) *homogenost:*

$$(\lambda \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}); \tag{1.3}$$

(d) *distributivnost:*

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}. \tag{1.4}$$

1.2.2 Matematika 3 (Školska knjiga)

Usporedimo definicije i svojstva koja se nalaze u ovom udžbeniku (vidi [2]), udžbenicima osnovne škole i udžbeniku srednje škole iz prethodnog potpoglavlja. Poglavlja kao što su ”Vektorski umnožak” i ”Mješoviti umnožak” dio su nastavnog gradiva za prirodoslovno-matematičke gimnazije i zato se ne nalaze u promatranom Element-ovom udžbeniku koji je namijenjen za opću gimnaziju.

Pojam vektora

Na početku poglavlja ”Vektori” nalazi se tablica sa smjerom i brzinom vjetra u 17 hrvatskih gradova. Navodi se da oznaka '$\uparrow$' označava smjer vjetra prema sjeveru. Usporedbom odgovarajućih vjetrova nastavnik dovodi učenike do zaključka da vjetrovi mogu biti suprotno orijentirani. Zatim se napominje da se fizikalne veličine dijele na skalarne i vektorske. Vektorske veličine (sila, brzina) određene su smjerom, orijentacijom i veličinom, a skalarne su potpuno određene veličinom (temperatura). Zatim se pomoću definicije dužine uvodi pojam vektora tako da se napominje da je kod vektora važno koja je točka početna, a koja završna.

Zbrajanje vektora

Prije definicije zbrajanja vektora po pravilu trokuta nalazi se motivacijski primjer. U motivacijskom primjeru opisuje se let zrakoplova. Jedan vektor određuje kretanje zrakoplova, a drugi smjer u kojemu puše vjetar. Nadovezivanjem ovih vektora jedan na drugi dobiva se smjer leta zrakoplova. U primjeru u kojemu treba zbrojiti sile ponavlja se određivanje rezultantne sile. Nakon toga slijedi definicija zbrajanja vektora po pravilu paralelograma.

Sada ćemo navesti neka svojstva množenja vektora skalarom koja se ne spominju u prethodnom udžbeniku.

Množenje vektora skalarom

Propozicija 1.2.15 (Svojstva množenja vektora skalarom)**.** *Za sve vektore $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i svaki skalar λ i $\mu \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

(*a*) $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$;

(*b*) $\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a}$;

(*c*) $(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$;

(*d*) $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$.

Skalarni umnožak

Osim navedenih svojstava u Element-ovom udžbeniku, u ovom udžbeniku se nalaze još dva svojstva.

Propozicija 1.2.16 (Svojstva skalarnog umnoška)**.** *Dvije posljedice definicije skalarnog umnoška vektora su:*

(*a*) *Ako su vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ okomiti, onda je:*

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0; \tag{1.5}$$

(*b*) *Neka su vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ različiti od $\overrightarrow{0}$. Vrijedi:*

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}. \tag{1.6}$$

Vektorski umnožak

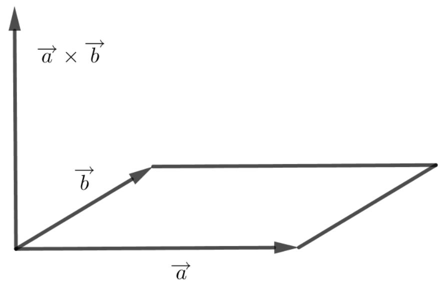
Definicija 1.2.17. *Vektorski umnožak dvaju vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$*, različitih od* $\overrightarrow{0}$ *jest vektor* $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$*. Svojstva su vektora* $\overrightarrow{c}$*:*

1. *okomit je na ravninu određenu vektorima* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$*, tj. okomit je na oba vektora;*
2. *ima duljinu jednaku površini paralelograma određenog vektorima* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$*, tj.*

$$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \cdot \sin\alpha,$$

   gdje je α *kut između vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$*,* $\alpha \in [0, \pi]$;

3. *uređena trojka vektora* $\overrightarrow{a}$*,* $\overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{c}$ *čini desni sustav, što znači da vrtnjom vektora* $\overrightarrow{a}$ *u pozitivnom smjeru, gledano iz vrha vektora* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$*, dolazimo u smjer vektora* $\overrightarrow{b}$*.*



Slika 1.1

Propozicija 1.2.18 (Svojstva vektorskog umnoška)**.** *Vrijede sljedeća svojstva:*

(*a*) *za svaka dva vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *vrijedi:*

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}; \tag{1.7}$$

(*b*) *ako su* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *linearno zavisni (kolinearni) vektori, onda je:*

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}; \tag{1.8}$$

(*c*) *za svaka dva vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *i realni broj k vrijedi:*

$$(k\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = k(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} \times (k\overrightarrow{b}); \tag{1.9}$$

(d) *za svaka tri vektora* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ *vrijedi:*

$$\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}, \tag{1.10}$$

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}; \tag{1.11}$$

(e) *za svaka tri vektora* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ *vrijedi:*

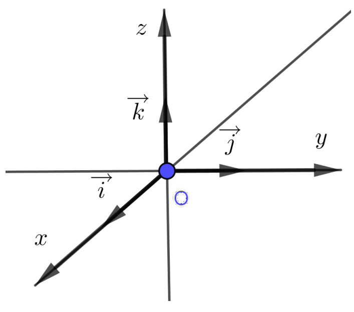
$$\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}, \tag{1.12}$$

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a}. \tag{1.13}$$

Neka su $a = x_1 \overrightarrow{i} + y_1 \overrightarrow{j} + z_1 \overrightarrow{k}$ i $b = x_2 \overrightarrow{i} + y_2 \overrightarrow{j} + z_2 \overrightarrow{k}$. Vrijedi:

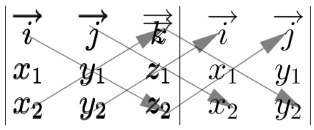
$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

U ovome udžbeniku napisan je izvod ove formule. Do elemenata determinante 3. reda dolazi se tako da se vektorski pomnože vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ i dobije se zapis iz kojega su vidljivi svi elementi determinante. Vektori $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{k}$ su tri međusobno okomita vektora u prostoru duljine 1 tako da je $\overrightarrow{i}$ pozitivno orijentiran u smjeru $x-$osi, $\overrightarrow{j}$ pozitivno orijentiran u smjeru $y-$osi, a $\overrightarrow{k}$ pozitivno orijentiran u smjeru $z-$osi (Slika 1.2). Točka O je ishodište koordinatnog sustava, a pravci x, y i z su koordinatne osi.



Slika 1.2

Glavna dijagonala determinante je dijagonala koja ide od gornjeg lijevog ruba prema donjem desnom rubu. Sporedna dijagonala determinante je dijagonala koja ide od donjeg lijevog ruba prema gornjem desnom rubu. Determinantu 3. reda računamo na sljedeći način. Prvo nadopišemo prvi i drugi stupac determinante s desne strane ruba determinante. Zatim pomnožimo sve tri glavne dijagonale (glavnu dijagonalu početne matrice i ostale dijagonale proširene matrice koje su joj paralelne) i od njihovog zbroja oduzmemo zbroj tri sporedne dijagonale (sporednu dijagonalu početne matrice i ostale dijagonale proširene matrice koje su joj paralelne) (Slika 1.3).



Slika 1.3

Ovaj način računanja determinante zove se Sarrusovo pravilo pomoću kojega ćemo kasnije u jednom zadatku odrediti površinu paralelograma.

Mješoviti umnožak

Definicija 1.2.19. *Mješoviti umnožak vektora* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *je skalarni umnožak vektora* $\vec{a}$ *i vektorskog umnoška* $\vec{b} \times \vec{c}$ *i označavamo ga s* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$*.*

Propozicija 1.2.20 (Svojstva mješovitog umnoška)**.** *Za sve vektore* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *i sve skalare* $m, n \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

(*a*) *Mješoviti umnožak ne mijenja se pri cikličkoj zamjeni vektora, a mijenja predznak pri bilo kojoj drugoj zamjeni:*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}); \tag{1.14}$$

(*b*) *Mješoviti umnožak triju vektora od kojih su barem dva jednaka jednak je nuli. Isto vrijedi ako su barem dva vektora linearno zavisna, odnosno vrijedi:*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}, m\vec{b}) = (\vec{b}, m\vec{b}, n\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}, m\vec{a} + n\vec{b}) = 0; \tag{1.15}$$

(*c*) *Skalar možemo izlučiti ispred mješovitog umnoška vektora. Vrijedi:*

$$(m\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, m\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, m\vec{c}) = m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}); \tag{1.16}$$

(d) *Mješoviti umnožak distributivan je s obzirom na zbrajanje vektora. Vrijedi:*

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}). \tag{1.17}$$

Kao i kod vektorskog umnoška dvaju vektora, mješoviti umnožak triju proizvoljnih vektora $\overrightarrow{a} = x_1 \overrightarrow{i} + y_1 \overrightarrow{j} + z_1 \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = x_2 \overrightarrow{i} + y_2 \overrightarrow{j} + z_2 \overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{c} = x_3 \overrightarrow{i} + y_3 \overrightarrow{j} + z_3 \overrightarrow{k}$ daje Laplaceov razvoj determinante. Stoga vrijedi:

$$\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Mješoviti umnožak koristi se za računanje volumena paralelepipeda razapetog vektorima $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$. Determinanta može biti bilo koji realan broj stoga se pri računanju volumena stavlja još i apsolutna vrijednost:

$$V = |\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})| = \left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\right|.$$

Poglavlje 2

Vrste zadataka rješivih vektorskom metodom

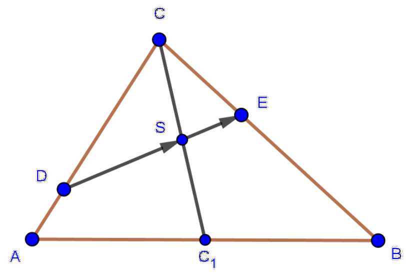
Mnogi matematički zadaci se mogu riješiti vektorskom metodom. S jedne strane, pomoću vektora možemo provoditi dokaze, poput dokaza konkurentnosti ili okomitosti pravaca, ili pak kolinearnosti točaka. S druge strane, možemo izračunati razne vrijednosti poput kuta između pravaca, površine trokuta ili volumena paralelepipeda. U ovom poglavlju ćemo opisati takve vrste zadataka i navesti neke konkretne primjere.

2.1 Dokaz kolinearnosti točaka

U ovom potpoglavlju će se pisati o kolinearnosti točaka koja se može dokazati pomoću vektora. Kolinearne točke su točke koje leže na istom pravcu. U srednjoj školi učenici se s kolinearnosti točaka susreću nekoliko puta. U planimetriji prvog razreda, obradi vektora i analitičkoj obradi pravca u trećem razredu. Sljedeći primjer bit će riješen vektorskom metodom. U dokazu ćemo se pozvati na uvjet kolinearnosti triju točaka koji glasi: "Tri različite točke P_1, P_2 i P_3 su kolinearne ako i samo ako postoji realan broj λ takav da vrijedi $\overrightarrow{P_1P_2} = \lambda\overrightarrow{P_2P_3}$, odnosno ako i samo ako su $\overrightarrow{P_1P_2}$ i $\overrightarrow{P_2P_3}$ kolinearni vektori".

Zadatak 2.1.1. *Neka je dan trokut ABC i neka točka D dijeli stranicu $\overline{AC}$ u omjeru 1:3, a točka E stranicu $\overline{BC}$ u omjeru 5:3. Točka S je polovište težišnice iz vrha C. Dokažite da su D, S i E kolinearne točke.*

Dokaz. Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Odredimo sada vektore $\overrightarrow{DS}$ i $\overrightarrow{SE}$ (Slika 2.1). Ako pokažemo da su vektori $\overrightarrow{DS}$ i $\overrightarrow{SE}$ kolinearni, onda su točke D, S i E kolinearne. Odredimo prvo vektor $\overrightarrow{DS}$. Vrijedi:



Slika 2.1

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DS} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CS} \\
&= \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1} \\
&= \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1}) \\
&= \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \frac{3}{4}\overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{a}\right) \\
&= \frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{1}{4}\overrightarrow{b}.
\end{aligned}$$

Odredimo sada vektor $\overrightarrow{SE}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{SE} &= \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CE} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1C} + \frac{3}{8}\overrightarrow{CB} \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AC}) + \frac{3}{8}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \frac{3}{8}(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \frac{3}{8}(-\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}) \\
&= \frac{1}{8}\overrightarrow{a} + \frac{1}{8}\overrightarrow{b}.
\end{aligned}$$

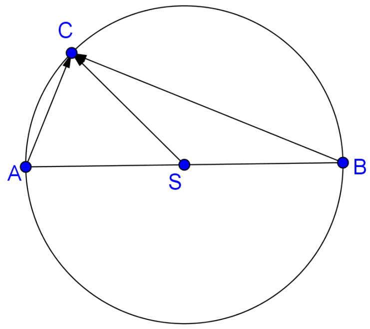
Vrijedi $\overrightarrow{DS} = 2\overrightarrow{SE}$. Vektori $\overrightarrow{DS}$ i $\overrightarrow{SE}$ su stoga kolinearni pa točke D, S i E leže na istom pravcu, odnosno kolinearne su.

□

2.2 Dokaz okomitosti pravaca

Pravci u ravnini su okomiti ako i samo ako je skalarni produkt njihovih vektora smjera jednak nuli. Pomoću ove činjenice ćemo dokazati sljedeći teorem.

Teorem 2.2.1 (Talesov poučak)**.** *Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.*



Slika 2.2: Obodni kut nad promjerom $\overline{AB}$

Dokaz. Neka je dana kružnica $k(S, r)$ i neka je $\overline{AB}$ njezin promjer (Slika 2.2). Želimo dokazati da je točka C koja se nalazi na kružnici k i koja je različita od točaka A i B vrh kuta $\angle ACB$ koji je pravi.

Drugim riječima, želimo dokazati $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Dužine $\overline{AS}$, $\overline{BS}$ i $\overline{CS}$ su radijusi kružnice k. Stoga vrijedi $|\overrightarrow{AS}| = |\overrightarrow{BS}| = |\overrightarrow{CS}| = r$. Prvo imamo:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC})(\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SC}). \tag{2.1}$$

Vektori $\overrightarrow{AS}$ i $\overrightarrow{BS}$ su kolinearni i jednake duljine, ali su različite orijentacije. Dakle, $\overrightarrow{AS} = -\overrightarrow{BS}$. Iz (2.1) vrijedi:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} =(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC})(-\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC})$$

$$\begin{aligned}
&=(\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{AS})(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{AS})\\
&=\overrightarrow{SC}^2 - \overrightarrow{AS}^2\\
&=|\overrightarrow{SC}|^2 - |\overrightarrow{AS}|^2\\
&=0.
\end{aligned}$$

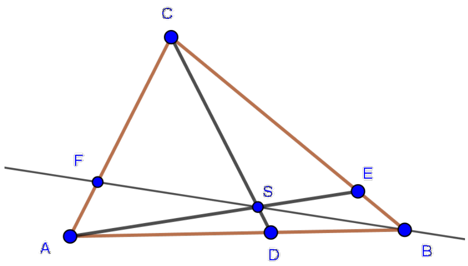
Dakle, obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.

□

2.3 Određivanje omjera i razmjera

Najčešća metoda kojom se rješavaju zadaci u kojima se pojavljuju omjeri ili razmjeri je geometrijska metoda. Razni zadaci u kojima treba odrediti omjer ili razmjer mogu se riješiti i vektorskom metodom što ćemo pokazati na sljedeća dva primjera. Ideja slijedećeg dokaza je da zapišemo jedan vektor na dva načina pomoću dva linearno nezavisna vektora. S obzirom na to da je prikaz vektora u bazi jedinstven, dobit ćemo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. Još jednim ponavljanjem ovog postupka za neki drugi vektor dobit ćemo traženi omjer.

Zadatak 2.3.1. *U trokutu ABC točka D dijeli stranicu $\overline{AB}$ u omjeru $3:2$, točka E stranicu $\overline{BC}$ u omjeru $1:4$. Točka S je sjecište dužina $\overline{CD}$ i $\overline{AE}$. Pravac BS siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki F. U kojem omjeru točka F dijeli stranicu $\overline{AC}$?*



Slika 2.3: Zadatak 2.3.1

Dokaz. Neka su $\overrightarrow{DS} = \alpha \cdot \overrightarrow{DC}$ i $\overrightarrow{ES} = \beta \cdot \overrightarrow{EA}$, gdje su α i β iz $\langle 0, 1\rangle$. Tada je:

$$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DS}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \alpha\overrightarrow{DC} \\
&= -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \alpha(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) \\
&= -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \alpha\left(-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \\
&= \left(-\frac{2}{5} - \frac{3\alpha}{5}\right)\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{AC}. \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

Nadalje vrijedi:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BS} &= \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ES} \\
&= \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{EA} \\
&= \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + \beta(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA}) \\
&= -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} + \beta\left(\frac{4}{5}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}\right) \\
&= -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} + \beta\left(\frac{4}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AC}\right) \\
&= -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} + \beta\left(-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{5} - \frac{4\beta}{5}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{5} - \frac{\beta}{5}\right)\overrightarrow{AC}. \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

Vektor $\overrightarrow{BS}$ prikazali smo na dva načina. Izjednačavanjem koeficijenata uz vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ u (2.2) i (2.3) dobivamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. Vrijedi:

$$
\begin{aligned}
-\frac{2}{5} - \frac{3\alpha}{5} &= -\frac{1}{5} - \frac{4\beta}{5}, \\
\alpha &= \frac{1}{5} - \frac{\beta}{5}.
\end{aligned}
$$

Rješavanjem ovog sustava dobivamo $\alpha = \frac{3}{23}$ i $\beta = \frac{8}{23}$. Uvrštavanjem $\alpha = \frac{3}{23}$ u (2.2) i sređivanjem dobivamo:

$$
\overrightarrow{BS} = -\frac{11}{23}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{23}\overrightarrow{AC}. \qquad (2.4)
$$

Neka su $\overrightarrow{BS} = \gamma\overrightarrow{BF}$ i $\overrightarrow{AF} = \delta\overrightarrow{AC}$, gdje su γ i δ iz $\langle 0, 1\rangle$. Tada je:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BS} &= \gamma\overrightarrow{BF} \\
&= \gamma(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}) \\
&= \gamma(-\overrightarrow{AB} + \delta\overrightarrow{AC}) \\
&= -\gamma\overrightarrow{AB} + \gamma\cdot\delta\overrightarrow{AC}. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ iz (2.4) i (2.5) dobivamo:

$$\begin{aligned}
-\gamma &= -\frac{11}{23}, \\
\gamma\cdot\delta &= \frac{3}{23}.
\end{aligned}$$

Rješavanjem gornjeg sustava dobivamo $\delta = \frac{3}{11}$. Iz toga slijedi $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{11}\overrightarrow{AC}$ iz čega dobivamo $\overrightarrow{FC} = \frac{8}{11}\overrightarrow{AC}$. Tada je:

$$|\overrightarrow{AF}| : |\overrightarrow{FC}| = \frac{3}{11} : \frac{8}{11} = 3 : 8.$$

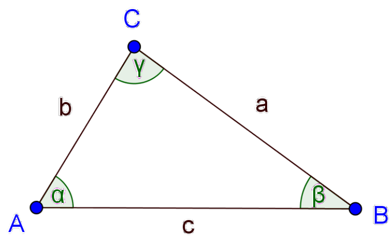
Dakle, točka F dijeli stranicu $\overline{AC}$ u omjeru $3 : 8$.

□

U drugom primjeru dokazat ćemo poučak o sinusima. Najprije ćemo odrediti površinu određenog trokuta pomoću vektorskog produkta na dva načina. Izjednačavanjem tih dviju površina dobit ćemo razmjer u kojemu su omjer dviju stranica trokuta i omjer sinusa odgovarajućih kutova. Analognim postupkom dobivamo još jedan razmjer koji konačno vodi do tvrdnje.

Teorem 2.3.1 (Poučak o sinusima)**.** *Duljine stranica trokuta odnose se kao sinusi nasuprotnih kutova trokuta.*

Dokaz. Neka je dan trokut ABC. Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ i $\angle BCA = \gamma$. Neka je $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$ i $|\vec{c}| = c$ (Slika 2.4). Po definiciji, duljina vektora koji je vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednaka je površini paralelograma određenog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Površina trokuta određenog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednaka je polovini površine paralelograma određenog tim vektorima, tj. :



Slika 2.4: Trokut ABC

$$P(ABC) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|. \tag{2.6}$$

Analogno,

$$P(ABC) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}|. \tag{2.7}$$

Izjednačavanjem (2.6) i (2.7) dobivamo niz ekvivalentnih jednakosti:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}|, \\
|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \sin \sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) &= |\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}| \sin \sphericalangle(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}), \\
ab \sin \gamma &= bc \sin \alpha, \\
\frac{a}{c} &= \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \\
a : c &= \sin \alpha : \sin \gamma.
\end{aligned}$$

Analognim postupkom dobivamo $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$.
Dakle, vrijedi $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$ što je i trebalo dokazati.

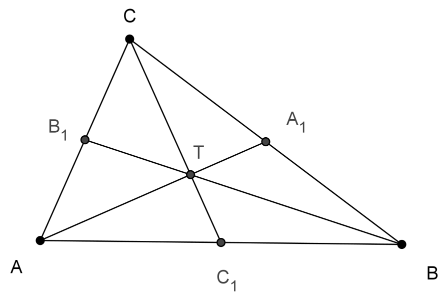
□

2.4 Dokaz konkurentnosti pravaca

Kada tri ili više pravaca prolazi istom točkom, njih zovemo konkurentnim pravcima. Dokaz konkurentnosti pravaca često je složen problem, ali se može olakšati uporabom vektora. U sljedeća dva primjera pokazat ćemo kako se pomoću vektora dokazuje da se pravci sijeku u jednoj točki. U prvom primjeru ćemo dokazati da se težišnice sijeku u jednoj točki. U dokazu prvog primjera prvo ćemo označiti točku u kojoj se sijeku dvije težišnice. Cilj nam je dokazati da je vektor čija je početna točka treći vrh trokuta, a završna točka sjecište odabranih težišnica kolinearan s vektorom kojeg određuje treća težišnica. Prikazat ćemo taj vektor na dva načina kako bi ga odredili.

Teorem 2.4.1 (Poučak o težištu trokuta)**.** *Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki koju zovemo težište. Težište trokuta dijeli svaku težišnicu u omjeru 2:1 (mjereći od vrha trokuta).*

Dokaz. Neka su A_1, B_1 i C_1 polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom trokuta ABC (Slika 2.5).



Slika 2.5: Težište trokuta

Označimo $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{b}$ i s T označimo presjek težišnica $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$. Neka su $\overrightarrow{AT} = \alpha\overrightarrow{AA_1}$ i $\overrightarrow{BT} = \beta\overrightarrow{BB_1}$, gdje su α i β iz intervala $\langle 0, 1\rangle$. Tada je:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CT} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AT}\\ &= \overrightarrow{CA} + \alpha\overrightarrow{AA_1}\\ &= \overrightarrow{CA} + \alpha\left(\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)\\ &= \overrightarrow{a} + \alpha\left(-\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right)\\ &= (1-\alpha)\overrightarrow{a} + \frac{\alpha}{2}\overrightarrow{b}. \qquad (2.8)\end{aligned}$$

Prikažimo vektor $\overrightarrow{CT}$ na još jedan način:

$$\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BT}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overrightarrow{CB} + \beta\overrightarrow{BB_1} \\
&= \overrightarrow{CB} + \beta\left(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right) \\
&= \overrightarrow{b} + \beta\left(-\overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{a}\right) \\
&= \frac{\beta}{2}\overrightarrow{a} + (1-\beta)\overrightarrow{b}.
\end{aligned}
$$

Prikaz vektora $\overrightarrow{CT}$ u bazi je jedinstven pa dobivamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$1 - \alpha = \frac{\beta}{2}, \qquad \frac{\alpha}{2} = 1 - \beta.$$

Rješenje ovog sustava jednadžbi je $\alpha = \frac{2}{3}$ i $\beta = \frac{2}{3}$. Uvrštavanjem α i β u (2.8) dobivamo $\overrightarrow{CT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}$. Preostaje dokazati da treća težišnica prolazi težištem. Dovoljno je pokazati da su vektori $\overrightarrow{CT}$ i $\overrightarrow{CC_1}$ linearno zavisni. Vrijedi:

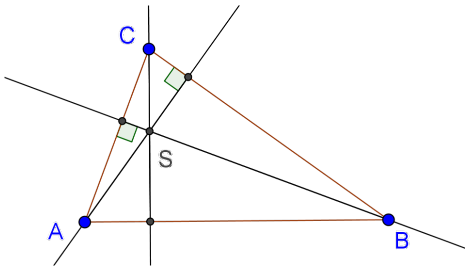
$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{CC_1} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1} \\
&= \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \\
&= \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}\right) \\
&= \frac{3}{2}\overrightarrow{CT}.
\end{aligned}
$$

Dakle, vektori $\overrightarrow{CC_1}$ i $\overrightarrow{CT}$ su linearno zavisni pa točka T pripada težišnici $\overline{CC_1}$. Dakle, težišnice $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ se sijeku u jednoj točki. S obzirom na to da vrijedi $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$ i $\overrightarrow{CT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$, težište trokuta dijeli težišnice u omjeru $2:1$ mjereći od vrha trokuta.

□

U sljedećem primjeru dokazat ćemo da se pravci na kojima leže visine trokuta sijeku u jednoj točki. Prvo ćemo odabrati visine iz dva vrha trokuta i sjecište pravaca kojima one pripadaju. Skalarni produkt vektora čija je početna točka jedan od dva promatrana vrha trokuta, a krajnja sjecište promatranih pravaca i vektora određenog nasuprotnom stranicom jednak je nuli. Tako dobivamo dva skalarna produkta koja su jednaka nuli. Sređivanjem i oduzimanjem tih izraza dobit ćemo da i pravac kojem pripada treća visina prolazi sjecištem pravaca na kojima leže odabrane visine. U ovome zadatku naglasak će dakle biti na primjeni skalarnog produkta. U ovom primjeru vektorska metoda nam ujedno omogućava da ne moramo razmatrati posebno slučaj šiljastokutnog, pravokutnog i tupokutnog trokuta.

Teorem 2.4.2 (Poučak o visinama trokuta)**.** *Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki koju nazivamo ortocentar.*



Slika 2.6: Teorem 2.4.2

Dokaz. Zadan je trokut ABC. Neka je točka S sjecište pravaca kojima pripadaju visine spuštene iz vrhova A i B na pravce na kojima leže stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Pravci AS i BC su okomiti iz čega slijedi da su i vektori $\overrightarrow{AS}$ i $\overrightarrow{BC}$ okomiti. Analogno, pravci BS i AC su okomiti pa su okomiti i vektori $\overrightarrow{BS}$ i $\overrightarrow{AC}$. Treba dokazati da su vektori $\overrightarrow{CS}$ i $\overrightarrow{AB}$ također okomiti.

Iz svega navedenog dobivamo jednakosti: $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ i $\overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Pomoću ovih jednakosti želimo dobiti $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \overrightarrow{AS}(\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SC}) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{SC} = 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\begin{aligned}\iff \quad & \overrightarrow{BS}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC}) = 0 \\ \iff \quad & \overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{SC} = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Oduzimanjem (2.9) i (2.10) dobivamo:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \\ \iff \quad & \overrightarrow{SC}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}) = 0 \\ \iff \quad & \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \end{aligned}$$

Dobili smo da su vektori $\overrightarrow{SC}$ i $\overrightarrow{AB}$ okomiti, tj. pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki.

□

2.5 Računanje površine i volumena

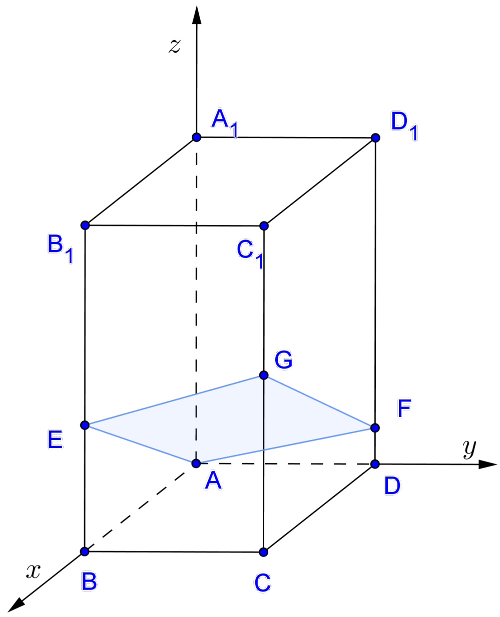
Površinu paralelograma možemo izračunati pomoću vektorskog produkta, a volumen paralelepipeda pomoću mješovitog produkta. U sljedećem zadatku površinu presjeka kvadra ravninom dobit ćemo tako da dokažemo da je presjek paralelogram, a zatim ćemo odrediti površinu paralelograma pomoću vektorskog produkta.

Zadatak 2.5.1. *Zadan je kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$ čije duljine bridova su $|AB| = 5cm$, $|BC| = 4cm$ i $|AA_1| = 30cm$. Na bridu $\overline{BB_1}$ zadana je točka E, a na bridu $\overline{DD_1}$ točka F, tako da je $|BE| = 12$ cm i $|DF| = 3$ cm. Izračunajte površinu presjeka kvadra i ravnine određene točkama A, E i F.*

Dokaz. Postavimo kvadar u koordinatni sustav u prostoru tako da je $A = (0, 0, 0)$, $B = (5, 0, 0)$, $C = (5, 4, 0)$, $D = (0, 4, 0)$, $A_1 = (0, 0, 30)$, $B_1 = (5, 0, 30)$, $C_1 = (5, 4, 30)$ i $D_1 = (0, 4, 30)$. S obzirom na to da je $|BE| = 12$ cm, a $|DF| = 3$ cm, tada je $E = (5, 0, 12)$ i $F = (0, 4, 3)$. Neka je G točka u kojoj ravnina AEF siječe brid $\overline{CC_1}$ (Slika 2.7).

Koordinate točke G određujemo tako da odredimo presjek ravnine određene točkom $A = (0, 0, 0)$ i vektorima $\overrightarrow{AE} = 5\vec{i} + 12\vec{k}$ i $\overrightarrow{AF} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$ i pravca koji sadrži brid $\overline{CC_1}$. Parametarski koordinatni oblik pravca CC_1 je:

$$\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 4 \\ z &= \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.11}$$



Slika 2.7: Kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$

Jednadžbu ravnine možemo odrediti pomoću vektora normale i jedne točke te ravnine, tj. pomoću vektora $\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AF}$ i točke A. Odredimo prvo vektor $\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AF}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AF} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i} \cdot 0 \cdot 3 + \vec{j} \cdot 12 \cdot 0 + \vec{k} \cdot 5 \cdot 4 - 0 \cdot 0 \cdot \vec{k} - 4 \cdot 12 \cdot \vec{i} - 3 \cdot 5 \cdot \vec{j} \\
&= -48\vec{i} - 15\vec{j} + 20\vec{k}. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
AEF... \qquad -48(x-0) - 15(y-0) + 20(z-0) &= 0, \\
-48x - 15y + 20z &= 0. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem (2.11) u (2.13) dobivamo da je $\lambda = 15$. Iz toga slijedi da je $G = (5, 4, 15)$. Preostaje dokazati da je četverokut $AEGF$ paralelogram. Vrijedi $\overrightarrow{EG} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$ i $\overrightarrow{FG} = 5\vec{i} + 12\vec{k}$. Dakle, vektori $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{FG}$ su jednaki i vektori $\overrightarrow{AF}$ i $\overrightarrow{EG}$ su jednaki. Iz toga slijedi da je četverokut $AEGF$ paralelogram čiju površinu računamo pomoću vektorskog produkta.

Površina paralelograma je duljina vektora koji je vektorski produkt vektora $\overrightarrow{AE} = 5\vec{i} + 12\vec{k}$ i $\overrightarrow{AF} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$. Iz (2.12) dobivamo:

$$\begin{aligned} P(AEGF) &= |\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AF}| \\ &= |-48\vec{i} - 15\vec{j} + 20\vec{k}| \\ &= \sqrt{48^2 + 15^2 + 20^2} \\ &= \sqrt{2929}. \end{aligned}$$

□

Volumen paralelepipeda možemo odrediti pomoću mješovitog produkta tri vektora. Korištenjem svojstava vektorskog i mješovitog produkta pokazat ćemo tvrdnju vezanu za volumene paralelepipeda.

Zadatak 2.5.2. *Neka je V_1 volumen paralelepipeda određenog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, a V_2 volumen paralelepipeda određenog vektorima plošnih dijagonala prvog paralelepipeda, odnosno vektorima $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$ i $\vec{b} + \vec{c}$. Dokažite da je $V_2 = 2V_1$.*

Dokaz. Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ vektori koji određuju paralelepiped volumena V_1 (Slika 2.8). Volumen V_1 jednak je normi mješovitog produkta vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, tj.

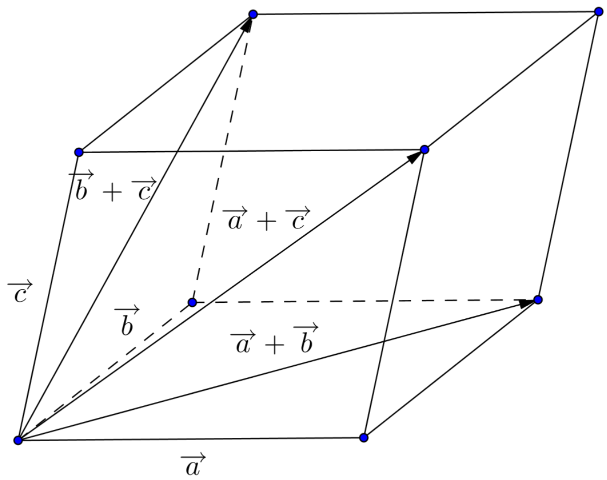
$$V_1 = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Plošne dijagonale $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ i $\vec{a} + \vec{c}$ određuju paralelepiped volumena V_2. Pri računanju ćemo se pozivati na svojstva skalarnog, vektorskog i mješovitog produkta koja su navedena u prvom poglavlju. Vrijedi:

$$\begin{aligned} V_2 &= |((\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{c})) \cdot (\vec{b} + \vec{c})| \\ &\overset{(1.8),\ (1.10),\ (1.11)}{=} |(\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c})| \\ &\overset{(1.2),\ (1.4),\ (1.5)}{=} |(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} + (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}| \\ &\overset{(1.14)}{=} |-(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} - (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \\ &= 2|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = 2V_1. \end{aligned}$$

Dakle, volumen V_2 dvostruko je veći od volumena V_1.

□



Slika 2.8: Paralelepiped određen vektorima $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$

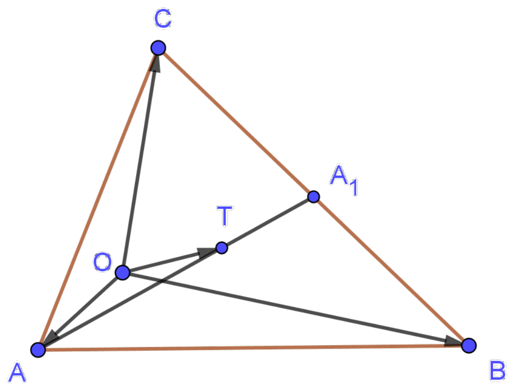
2.6 Dokaz podudarnosti točaka

Uporabom vektora često je moguće jednostavno dokazati da se dvije točke podudaraju. Promatramo vektore sa završnim točkama koje odgovaraju zadanim točkama i istom početnom točkom. Ako se ta dva vektora podudaraju, onda i zadane točke moraju biti jednake. U sljedećem zadatku točke koje se podudaraju su težišta dvaju trokuta. Da bi dokazali ovu tvrdnju dokazujemo da je radijvektor težišta prvog trokuta jednak radijvektoru težišta drugog trokuta. Time će biti dokazano da se težišta tih dvaju trokuta podudaraju.

Teorem 2.6.1. *Točke P, Q i R dijele stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ trokuta ABC u jednakim omjerima. Dokažite da trokuti ABC i PQR imaju zajedničko težište.*

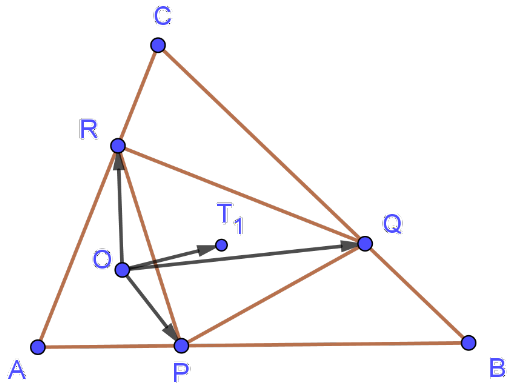
Dokaz. Neka točke P, Q i R dijele stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ u omjeru $\lambda : \mu$. Neka je T težište trokuta ABC, točka O čvrsta točka ravnine trokuta ABC i A_1 polovište stranice $\overline{BC}$ (Slika 2.9). Tada vrijedi $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AO}$ i $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$. Dakle, imamo:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OT} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AO} \\
&= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{OA} \\
&= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC})\right) + \overrightarrow{OA} \\
&= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).
\end{aligned}
$$



Slika 2.9: Težište T trokuta ABC

Neka je T_1 težište trokuta PQR (Slika 2.10). Analognim postupkom kao za $\overrightarrow{OT}$ dobivamo:



Slika 2.10: Težište T_1 trokuta PQR

$$\overrightarrow{OT_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}). \tag{2.14}$$

Odredimo prvo vektor $\overrightarrow{OP}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}, \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\overrightarrow{AB}, \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),
\end{aligned}$$

$$= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{OB}. \tag{2.15}$$

Analognim postupkom dobivamo vektore $\overrightarrow{OQ}$ i $\overrightarrow{OR}$:

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\overrightarrow{OB} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{OC}, \tag{2.16}$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\overrightarrow{OC} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{OA}. \tag{2.17}$$

Uvrštavanjem (2.15), (2.16) i (2.17) u (2.14) dobivamo izraz iz kojeg nakon sređivanja slijedi:

$$\overrightarrow{OT_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Dakle, $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_1}$ pa trokuti ABC i PRQ imaju isto težište.

□

2.7 Kut između pravaca

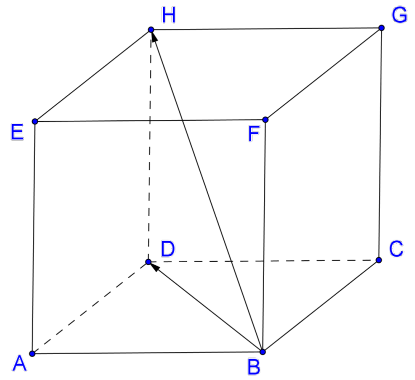
Kut između pravaca možemo odrediti pomoću skalarnog ili vektorskog produkta. U ovom zadatku ćemo doći do rješenja primjenom skalarnog produkta i činjenice da je skalarni produkt dva okomita vektora jednak nuli.

Zadatak 2.7.1. *Izračunajte kut kojeg zatvaraju jedna plošna i prostorna dijagonala povučene iz istog vrha kocke.*

Dokaz. Neka je $ABCDEFGH$ kocka, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BF}$ vektori baze ze V^3 i neka je $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BF}| = a$ (Slika 2.11). Zapišimo prvo vektore $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{BH}$ u toj bazi. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC},\\ \overrightarrow{BH} &= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DH}\\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}.\end{aligned}$$

Iz skalarnog produkta vektora $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{BH}$ odredit ćemo traženi kut. Vrijedi:



Slika 2.11: Kocka $ABCDEFGH$

$$
\begin{aligned}
& \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BH} = |\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BH}| \cdot \cos \sphericalangle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BH}) \\
\Longleftrightarrow \quad & \cos \sphericalangle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BH}) = \frac{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BH}}{|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BH}|} \\
\Longleftrightarrow \quad & \cos \sphericalangle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BH}) = \frac{(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF})}{|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BH}|}.
\end{aligned}
$$

Vektori $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BF}$ su međusobno okomiti. Stoga je $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$. Skalarni produkt vektora sa samim sobom jednak je kvadratu njegove duljine. Tada je:

$$
\cos \sphericalangle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BH}) = \frac{|\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2}{|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BH}|}.
$$

Duljina vektora $\overrightarrow{BD}$ jednaka je duljini dijagonale $\overline{BD}$ kvadrata $ABCD$. Kako je duljina stranice kvadrata $ABCD$ duljine a, duljina dijagonale je:

$$
|BD| = a\sqrt{2}.
$$

Dužina $\overline{BH}$ je prostorna dijagonala kocke. Stoga je duljina vektora $\overrightarrow{BH}$ jednaka $a\sqrt{3}$, tj.

$$
|BH| = a\sqrt{3}.
$$

Iz toga slijedi:

$$\cos \sphericalangle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BH}) = \frac{2a^2}{a^2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Konačno, zaključujemo da je kut $\sphericalangle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BH})$ jednak 35.26°.

$\square$

Poglavlje 3

Usporedba vektorske metode s analitičkom i geometrijskom metodom

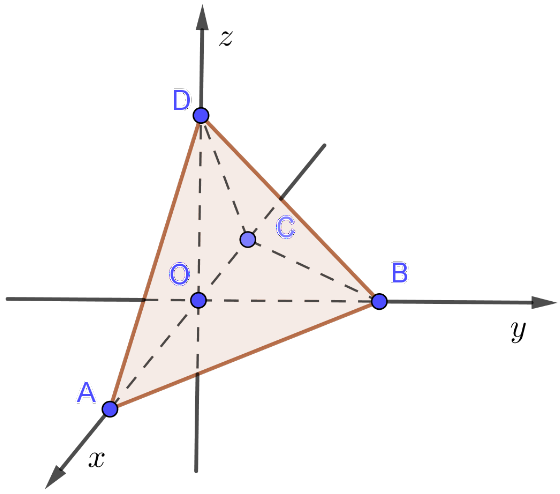
Čest je u matematici slučaj da se zadatak može riješiti na više načina. U ovom poglavlju bit će navedeno nekoliko geometrijskih zadataka koji se osim geometrijskom mogu riješiti i vektorskom i analitičkom metodom. Međutim neka rješenja mogu biti jednostavnija od drugih. Pomoću nekoliko zadataka pokazat ćemo da svaka od tri metode može biti najjednostavnija. U vektorskoj metodi, kao i u analitičkoj, naglasak je često na dugačkom računu i sređivanju izraza. S druge strane, geometrijska metoda je kraća od drugih dviju metoda, ali zahtjeva više zaključivanja i geometrijskog zora.

Zadatak 3.0.1. *Dvije strane tetraedra su jednakostranični trokuti čiji je brid duljine a. Druge dvije strane su jednakokračni pravokutni trokuti. Izračunajte volumen tetraedra.*

1. rješenje (analitička i vektorska metoda)

Dokaz. Neka je dan tetraedar $ABCD$. Postavimo tetraedar $ABCD$ u pravokutni koordinatni sustav tako da točke A i C leže na x-osi, točka B na y-osi. Neka je strana ABC jednakokračan pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu B. Tada je po uvjetu zadatka strana ACD jednakokračan pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu D, a strane ABD i BCD su jednakostranični trokuti. Točka D se zbog svojstava strana tetraedra nalazi u presjeku ravnine koja je okomita brid $\overline{AB}$ i raspolavlja ga, te ravnine koja je okomita na brid $\overline{AC}$ i raspolavlja ga. Taj presjek je z os. Primijetimo da je ishodište ovog koordinatnog sustava polovište brida $\overline{AC}$. Neka je to točka O (Slika 3.1).

Trokut AOD je jednakokračan i pravokutan jer je $\sphericalangle DAO = 45^\circ$ i $\sphericalangle AOD = 90^\circ$. Analogno, trokuti CDO, ABO i BCO su jednakokračni i pravokutni. Iz toga slijedi da vrijedi



Slika 3.1: Tetraedar $ABCD$

$$|AO| = |BO| = |CO| = |DO|. \tag{3.1}$$

Neka je $A = (u, 0, 0)$, $B = (0, u, 0)$, $C = (-u, 0, 0)$ i $D = (0, 0, u)$. Iz zadatka vrijedi $|AB| = |BD| = |AD| = |BC| = |CD| = a = u\sqrt{2}$. Tada je:

$$u = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \tag{3.2}$$

Volumen tetraedra V jednak je šestini volumena paralelepipeda određenog vektorima $\overrightarrow{DA} = u\vec{i} - u\vec{k}$, $\overrightarrow{DB} = u\vec{j} - u\vec{k}$ i $\overrightarrow{DC} = -u\vec{i} - u\vec{k}$. Tada je:

$$V = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} u & 0 & -u \\ 0 & u & -u \\ -u & 0 & -u \end{matrix}\right\| = \frac{u^3}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{matrix}\right\| = \frac{u^3}{3}. \tag{3.3}$$

Uvrštavanjem (3.2) u (3.3) dobivamo:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}a^3}{8} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

□

2. rješenje (geometrijska metoda)

Dokaz. Neka su oznake iste kao u *1. rješenju*. Tetraedar $ABCD$ je trostrana piramida. Volumen piramide je trećina umnoška površine baze i visine. Vrijedi:

$$V(ABCD) = \frac{1}{3} \cdot P(ABC) \cdot |DO|.$$

Trokut ABC je jednakokračan pravokutan trokut čija je kateta duljine a. Iz (3.1) slijedi da je $|DO| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} V(ABCD) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{a^3\sqrt{2}}{12}. \end{aligned}$$

Dakle, volumen tetraedra $ABCD$ jednak je $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

□

U prethodnom zadatku najjednostavnija metoda bila je geometrijska. Zadatak je postavljen tako da je visina tetraedra okomita na jednu njegovu stranu. Primjenom formule za volumen trostrane piramide dobili smo rješenje. Kod rješenja koje je kombinacija analitičke i vektorske metode trebalo je također prvo uočiti koje su strane tetraedra međusobno okomite. Zatim je tetraedar postavljen u koordinatni sustav. Pomoću tri linearno nezavisna vektora određen je volumen paralelepipeda koji nadopunjuje piramidu. Na kraju je pomoću veze između volumena tetraedra i volumena paralelepipeda određen volumen tetraedra.

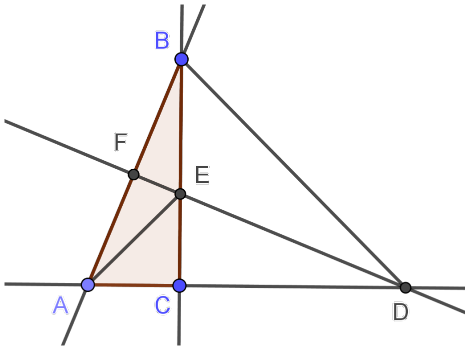
Zadatak 3.0.2. *Zadan je pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C za koji je $\angle BAC > \angle ABC$. Na produžetku stranice $\overline{AC}$ preko vrha C odabrana je točka D takva da je $|BC| = |CD|$. Točka E je presjek stranice $\overline{BC}$ i okomice iz D na stranicu $\overline{AB}$. Treba dokazati da je trokut ACE jednakokračan.*

1. rješenje (geometrijska metoda)

Dokaz. Trokuti BFE i BCA slični su po $K-K$ poučku o sličnosti trokuta. Stoga vrijedi $\angle FEB = \angle BAC$. Kutovi $\angle FEB$ i $\angle DEC$ su vršni kutovi pa vrijedi $\angle FEB = \angle DEC$. Dakle, vrijedi $\angle BAC = \angle DEC$. Trokuti BCA i DCE sukladni su po $K-S-K$ poučku o sukladnosti trokuta ($\angle ACB = \angle ECD = 90°$, iz zadatka vrijedi $|CD| = |CB|$ i $\angle BAC = \angle DEC$). Iz toga slijedi tražena tvrdnja, tj. $|AC| = |CE|$.

□

2. rješenje (vektorska metoda)



Slika 3.2: Zadatak 3.0.2

Dokaz. Neka je $|BC| = a$ i $|AC| = b$ i neka je $\overrightarrow{CE} = \alpha\overrightarrow{CB}$, gdje je $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Tada je $\overrightarrow{CD} = \frac{a}{b}\overrightarrow{AC}$. Zapišimo skalarni produkt $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{AB}$ pomoću vektora $\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{AC}$. Vrijedi:

$$
\begin{aligned}
& & \overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{AB} &= 0\\
&\iff & (\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{AB} &= 0\\
&\iff & \left(-\alpha\overrightarrow{CB}+\frac{a}{b}\overrightarrow{AC}\right)\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}) &= 0\\
&\iff & -\alpha\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}-\alpha\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}+\frac{a}{b}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{a}{b}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} &= 0\\
&\iff & -\alpha\cdot a^2+\frac{a}{b}\cdot b^2 &= 0\\
&\iff & \alpha\cdot a^2 &= a\cdot b\\
&\iff & \alpha &= \frac{b}{a}.
\end{aligned}
$$

Sada preostaje usporediti duljine vektora $\overrightarrow{CE}$ i $\overrightarrow{AC}$. Vrijedi:

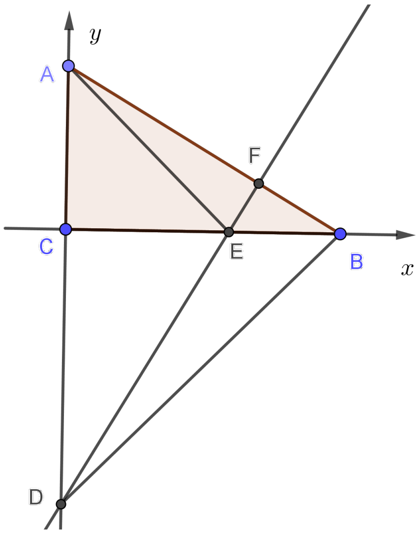
$$|\overrightarrow{CE}| = \left|\frac{b}{a}\overrightarrow{CB}\right| = \frac{b}{a}|\overrightarrow{CB}| = \frac{b}{a}\cdot a = b = |\overrightarrow{AC}|.$$

Dakle, dobili smo da tražena tvrdnja vrijedi, odnosno $|AC| = |CE|$.

□

3. rješenje (analitička metoda)

Dokaz. Postavimo trokut ABC u pravokutni koordinatni sustav tako da točka A leži na pozitivnom dijelu y-osi, točka B leži na pozitivnom dijelu x-osi, a točka C je ishodište



Slika 3.3

koordinatnog sustava. Tada je $A = (0, b)$, $B = (a, 0)$ i $D = (0, -a)$. Odredimo prvo koordinate točke E koju ćemo dobiti kao presjek pravaca BC i DE (Slika 3.3). S obzirom na to da je pravac BC x-os, njegova je jednadžba $y = 0$. Jednadžbu pravca DE odredit ćemo pomoću pravca AB koji je okomit na pravac DE. Vrijedi:

$$
\begin{aligned}
AB\ldots \qquad y - b &= \frac{0-b}{a-0}(x-0),\\
y &= -\frac{b}{a}x + b.
\end{aligned}
$$

Koeficijent smjera k_{AB} pravca AB jednak je $-\frac{b}{a}$. Neka je k_{DE} koeficijent smjera pravca DE. Iz uvjeta za koeficijente okomitih pravaca $k_{AB} \cdot k_{DE} = -1$ dobivamo $k_{DE} = \frac{a}{b}$. Dakle, jednadžba pravca DE je:

$$
DE\ldots \qquad y = \frac{a}{b}x - a.
$$

Tada je presjek pravca DE i x-osi točka $E = (b, 0)$. Određivanjem udaljenosti između točaka C i E i točaka C i A dobivamo da vrijedi $|CE| = |CA|$ što je i trebalo dokazati.

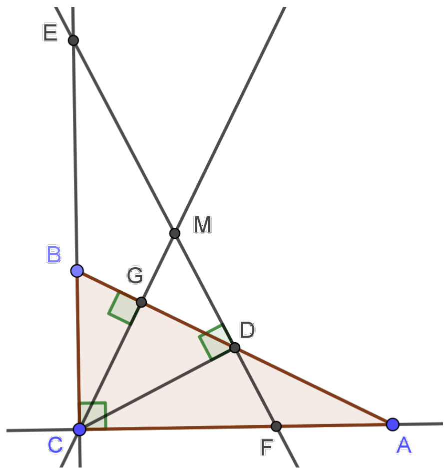
□

U prethodnom zadatku geometrijska i analitička metoda su podjednako teške, a vektorska metoda je najteža. U geometrijskoj metodi koristi se poučak o sličnosti trokuta i poučak o sukladnosti trokuta.

U vektorskoj metodi skalarni produkt okomitih vektora zapisujemo pomoću druga dva vektora koji su također okomiti. Tada dobivamo duljine vektora pomoću kojih dobivamo tvrdnju zadatka.
U analitičkoj metodi postavljamo trokut u koordinatni sustav, određujemo odgovarajuće pravce i pomoću uvjeta okomitih pravaca dobivamo tvrdnju zadatka.

Zadatak 3.0.3. *Dan je pravokutan trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C tako da je $|AC| > |BC|$. Neka je točka D polovište hipotenuze $\overline{AB}$ tog trokuta, a p pravac točkom D okomit na pravac CD. Pravac p siječe pravac BC u točki E, a dužinu $\overline{AC}$ u točki F. Dokažite da okomica iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$ siječe dužinu $\overline{EF}$ u njezinom polovištu.*

1. rješenje (geometrijska metoda)



Slika 3.4: Zadatak 3.0.3

Dokaz. Neka je $\angle BAC = \alpha$ i neka je točka G nožište okomice iz točke C na hipotenuzu $\overline{AB}$. Tada je $\angle ABC = 90^\circ - \alpha$ i $\angle CGB = 90^\circ$. Iz toga slijedi da su trokuti CGB i ACB slični po $K - K$ poučku o sličnosti trokuta. Sada imamo $\angle BCG = \angle BAC = \alpha$.
S obzirom na to da je trokut ABC pravokutan, po Talesovom poučku točka D je središte tom trokutu opisane kružnice. Tada je $|BD| = |AD| = |CD|$ pa je trokut BDC jednakokračan iz čega slijedi $\angle DCB = 90^\circ - \alpha$. Imamo da je $\angle DEC = \alpha$ jer je trokut CDE pravokutan s pravim kutom u vrhu D i kutom $\angle DCB = 90^\circ - \alpha$.
Neka je sjecište pravaca CG i EF točka M. Kutovi uz stranicu $\overline{CE}$ trokuta CME su jednaki što znači da je taj trokut jednakokračan, tj. vrijedi:

$$|MC| = |ME|. \tag{3.4}$$

Iz sličnosti trokuta ABC, CBG i CFD slijedi da su kutovi uz stranicu $\overline{CF}$ trokuta CFM jednaki što znači da je taj trokut jednakokračan, tj. vrijedi:

$$|MC| = |MF|. \tag{3.5}$$

Iz (3.4) i (3.5) slijedi tražena tvrdnja.

□

2. rješenje (vektorska metoda)

Dokaz. Neka je $|\overrightarrow{CA}| = b$ i $|\overrightarrow{CB}| = a$. Vektori $\overrightarrow{DF}$ i $\overrightarrow{DC}$ su okomiti pa je njihov skalarni produkt jednak nuli. Njihov skalarni produkt prikazat ćemo pomoću $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$ čiji skalarni produkt je isto jednak nuli. Neka je $\overrightarrow{CF} = \alpha\overrightarrow{CA}$, $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DC} &= (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}) \cdot \overrightarrow{DC} \\
&= (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} + \alpha\overrightarrow{CA})(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) \\
&= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CA}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CA}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{CB}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CA}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) \\
&= \left(\left(-\frac{1}{2} + \alpha\right)\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) \\
&= \left(\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA} + \left(\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} \\
&= \left(\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot b^2 + \frac{1}{4} \cdot a^2.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Izjednačavanjem (3.6) s nulom i sređivanjem dobivamo:

$$\alpha = \frac{a^2 + b^2}{2b^2}. \tag{3.7}$$

Neka je $\overrightarrow{FE} = \beta\overrightarrow{FD}$, gdje je $\beta \in \langle 0, 1\rangle$. Zapišimo vektor $\overrightarrow{FA}$ pomoću vektora $\overrightarrow{CA}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FA} &= \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CF}\\ &= \overrightarrow{CA} - \alpha\overrightarrow{CA}\\ &= (1-\alpha)\overrightarrow{CA}.\end{aligned}$$

Vektori $\overrightarrow{CF}$ i $\overrightarrow{CE}$ su okomiti pa je njihov skalarni produkt jednak nuli. Vrijedi:

$$\begin{aligned}0 &= \overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{CE}\\ &= \overrightarrow{CF}\cdot(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FE})\\ &= \overrightarrow{CF}\cdot(\overrightarrow{CF}+\beta\overrightarrow{FD})\\ &= \overrightarrow{CF}\cdot(\overrightarrow{CF}+\beta(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AD}))\\ &= \overrightarrow{CF}\cdot\left(\overrightarrow{CF}+\beta\left((1-\alpha)\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})\right)\right)\\ &= \overrightarrow{CF}\cdot\left(\overrightarrow{CF}+\beta\left((1-\alpha)\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\right)\right)\\ &= \alpha\overrightarrow{CA}\cdot\left(\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\left(\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)\right)\\ &= \alpha\overrightarrow{CA}\cdot\left(\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\overrightarrow{CA}+\frac{\beta}{2}\overrightarrow{CB}\right)\\ &= \alpha^2|\overrightarrow{CA}|^2+\alpha\beta\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)|\overrightarrow{CA}|^2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Uvrštavanjem (3.7) i $|\overrightarrow{CA}| = b$ u (3.8) i sređivanjem dobivamo:

$$\beta = \frac{a^2+b^2}{a^2}.$$

Neka je $\overrightarrow{FM} = \gamma\overrightarrow{FD}$, gdje je $\gamma \in \langle 0,1\rangle$. Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{MC}$ su okomiti pa je njihov skalarni produkt jednak nuli. Raspišimo sada $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC}$ pomoću vektora $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}0 &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC}\\ &= (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})(\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FC})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})(-\gamma\overrightarrow{FD} - \alpha\overrightarrow{CA}) \\
&= (-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})(-\gamma(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD}) - \alpha\overrightarrow{CA}) \\
&= (-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})\left(-\gamma\left((1-\alpha)\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) - \alpha\overrightarrow{CA}\right) \\
&= (-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})\left(-\gamma\left((1-\alpha)\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})\right) - \alpha\overrightarrow{CA}\right) \\
&= (-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})\left(-\gamma(1-\alpha)\overrightarrow{CA} + \frac{\gamma}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{\gamma}{2}\overrightarrow{CB} - \alpha\overrightarrow{CA}\right) \\
&= \gamma(1-\alpha)|\overrightarrow{CA}|^2 - \frac{\gamma}{2}|\overrightarrow{CA}|^2 - \frac{\gamma}{2}|\overrightarrow{CB}|^2 + \alpha|\overrightarrow{CA}|^2. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem (3.7), $|\overrightarrow{CB}| = a$ i $|\overrightarrow{CA}| = b$ u (3.9) i sređivanjem dobivamo:

$$\gamma = \frac{a^2 + b^2}{2a^2}.$$

Tada je $\overrightarrow{FM} = \frac{a^2+b^2}{2a^2}\overrightarrow{FD}$. S obzirom na to da je $\overrightarrow{FE} = \frac{a^2+b^2}{a^2}\overrightarrow{FD}$, vrijedi $\overrightarrow{FM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$, odnosno točka M je polovište dužine $\overline{EF}$ što je i trebalo dokazati.

□

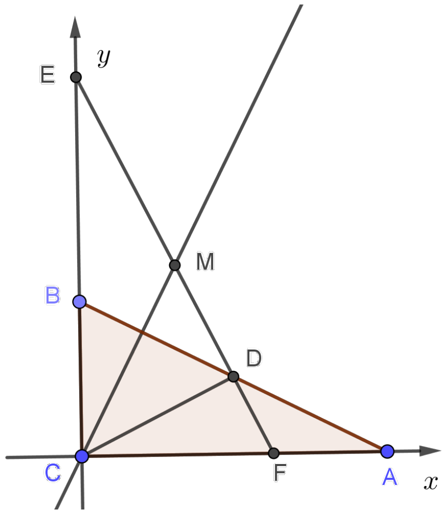
3. rješenje (analitička metoda)

Dokaz. Postavimo trokut ABC u pravokutni koordinatni sustav. Neka se točka C nalazi u ishodištu i neka točka $A = (b, 0)$ leži na x-osi, a točka $B = (0, a)$ na y-osi. Točka D je polovište dužine $\overline{AB}$ pa vrijedi $D = (\frac{b}{2}, \frac{a}{2})$ (Slika 3.5). Odredimo prvo jednadžbu pravca CD. Vrijedi:

$$
\begin{aligned}
CD... \qquad y - 0 &= \frac{\frac{a}{2} - 0}{\frac{b}{2} - 0}(x - 0) \\
y &= \frac{a}{b}x.
\end{aligned}
$$

Koeficijent smjera pravca CD jednak je $\frac{a}{b}$. Pravac EF je okomit na pravac CD pa vrijedi:

$$k_{CD} \cdot k_{EF} = -1, \qquad (3.10)$$



Slika 3.5

gdje je k_{CD} koeficijent smjera pravca CD, a k_{EF} koeficijent smjera pravca EF. Uvrštavanjem $k_{CD} = \frac{a}{b}$ u (3.10) dobivamo $k_{EF} = -\frac{b}{a}$. Pravac EF prolazi točkom D. Vrijedi:

$$EF\ldots \qquad y - \frac{a}{2} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{b}{2}\right),$$
$$y = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{b}{2}\right) + \frac{a}{2}.$$

Pravac EF siječe y-os u točki E, a x-os u točki F. Koordinate tih točaka su $E = (0, \frac{a^2+b^2}{2a})$ i $F = (\frac{a^2+b^2}{2b}, 0)$.

Neka okomica kroz točku C na pravac AB siječe pravac EF u točki M. Da bismo odredili koordinate točke M, prvo ćemo odrediti jednadžbu pravca AB. Vrijedi:

$$AB\ldots \qquad y - 0 = \frac{a-0}{0-b}(x-b)$$
$$y = -\frac{a}{b}(x-b).$$

Neka je k_{AB} koeficijent smjera pravca AB i neka je k_{CM} koeficijent smjera pravca CM. Tada vrijedi:

$$k_{AB} \cdot k_{CM} = -1. \tag{3.11}$$

Uvrštavanjem $k_{AB} = -\frac{a}{b}$ u (3.11) dobivamo $k_{CM} = \frac{b}{a}$. S obzirom na to da je točka C ishodište, jednadžba pravca CM glasi:

$$CM... \qquad y = \frac{b}{a}x.$$

Presjek pravaca EF i CM je točka $M = (\frac{a^2+b^2}{4b}, \frac{a^2+b^2}{4a})$. Preostaje odrediti udaljenosti između točaka E i M i točaka M i F. Vrijedi:

$$\begin{aligned} d(E,M) &= \sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{4a} - \frac{a^2+b^2}{2a}\right)^2 + \left(\frac{a^2+b^2}{4b} - 0\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{16a^2} + \frac{(a^2+b^2)^2}{16b^2}}. \end{aligned}$$

Nadalje:

$$\begin{aligned} d(F,M) &= \sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{4a} - 0\right)^2 + \left(\frac{a^2+b^2}{4b} - \frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{16a^2} + \frac{(a^2+b^2)^2}{16b^2}}. \end{aligned}$$

Dobili smo da je udaljenost između točaka E i M jednaka udaljenosti točaka F i M što je i trebalo dokazati.

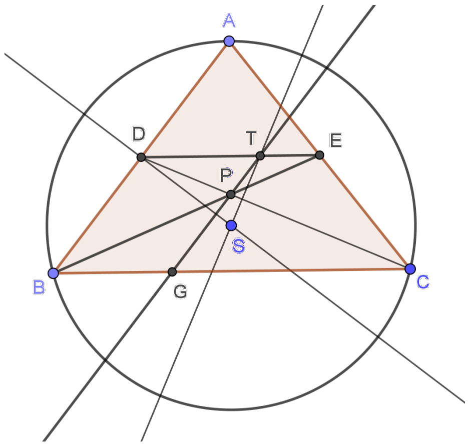
□

Geometrijska metoda je najjednostavnija. U toj metodi pomoću sličnosti trokuta i Talesovog teorema o kutu nad promjerom kružnice mogu se odrediti kutovi trokuta koji su jednakokračni iz čega slijedi tvrdnja zadatka.
Vektorska metoda je najteža. U toj metodi tri skalarna produkta okomitih vektora raspisujemo pomoću druga dva okomita vektora. Time dobivamo kolinearne vektore pomoću kojih dobivamo tvrdnju zadatka.
U analitičkoj metodi prvo postavljamo trokut u koordinatni sustav. Pravce određujemo pomoću jednadžbe pravca kroz dvije točke. Zatim koristimo uvjet okomitosti pravaca i određujemo odgovarajuće presjeke pravaca. Na kraju odredimo udaljenost odgovarajućih točaka i dobivamo tvrdnju zadatka.

Zadatak 3.0.4. *Točka S središte je trokutu ABC opisane kružnice, a dužina $\overline{CD}$ je njegova težišnica. Težište trokuta ADC je točka T. Dokažite ekvivalenciju $ST \perp CD \iff |AB| = |AC|$.*

1. rješenje (geometrijska metoda)

Dokaz. Neka je točka E polovište stranice $\overline{AC}$. Primijetimo da točka T pripada težišnici $\overline{DE}$ trokuta ACD, što je ujedno i srednjica trokuta ABC paralelna sa stranicom $\overline{BC}$. Tada je $DE \parallel BC$. Neka je P presjek dijagonala četverokuta $BCED$ i neka je G točka presjeka pravca TP i stranice $\overline{BC}$ (Slika 3.6).

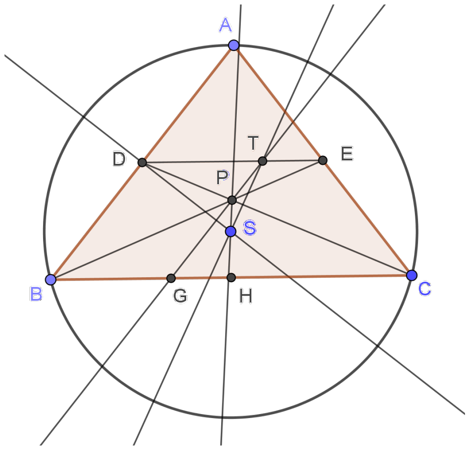


Slika 3.6

Trokuti BCP i EDP su slični po $K - K$ poučku o sličnosti trokuta jer je $DE \| BC$ što povlači $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PED$ i $\sphericalangle PCB = \sphericalangle PDE$. Stranice trokuta BCP su dvostruko dulje od odgovarajućih stranica trokuta EDP jer je dužina $\overline{DE}$ srednjica trokuta ABC pa vrijedi $2|DE| = |BC|$. Iz činjenice da točka T dijeli dužinu $\overline{DE}$ u omjeru $2:1$ i iz sličnosti trokuta BCP i EDP zaključujemo da je $|BG| = |DT|$. Drugim riječima, četverokut $BGTD$ je paralelogram pa je $BD \parallel GT$. Kako je SD simetrala stranice $\overline{AB}$, ona je okomita na tu stranicu pa je okomita i na pravac GT. To znači da u trokutu TPD pravac kojem pripada visina iz D na stranicu $\overline{TP}$ prolazi kroz S.

Prvo pretpostavimo da je $|AB| = |AC|$. Zbog jednakokračnosti trokuta ABC očito je da pravac kojem pripada visina iz P na stranicu $\overline{DT}$ prolazi isto kroz S. Dakle, S je ortocentar trokuta TDP. Preostala visina pripada pravcu ST i okomita je na stranicu $\overline{DP}$ koja pripada pravcu CD i time smo dokazali jedan smjer tvrdnje.

Obrnuto, pretpostavimo da je pravac ST okomit na pravac CD. Kako smo već prije zaključili da je pravac SD okomit na pravac TG, zaključujemo opet da je S ortocentar trokuta TDP. Stoga pravac kojem pripada visina iz vrha P tog trokuta prolazi kroz S.

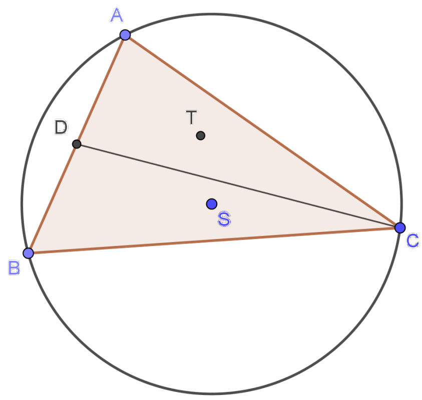


Slika 3.7

Ta visina tada pripada simetrali stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC. Neka simetrala stranice $\overline{BC}$ siječe tu stranicu u točki H (Slika 3.7). Trokuti PBH i PCH su sukladni po $S-K-S$ poučku o sukladnosti trokuta ($|BH| = |CH|$, $\sphericalangle BHP = \sphericalangle CHP = 90°$ i stranica $\overline{HP}$ je tim trokutima zajednička) pa vrijedi $|PB| = |PC|$. Nadalje, trokuti PBC i PED su slični po $K-K$ poučku o sličnosti trokuta pa vrijedi $|PE| = |PD|$. Također, trokuti PBD i PCE su sukladni po $S-K-S$ poučku o sukladnosti trokuta (kutovi $\sphericalangle BPD$ i $\sphericalangle CPE$ su vršni, $|PB| = |PC|$ i $|PE| = |PD|$). Tada je $\sphericalangle DBH = \sphericalangle ECH$. Iz toga slijedi da je $|AB| = |AC|$.

□

2. rješenje (vektorska metoda)



Slika 3.8

Dokaz. Pretpostavimo prvo da su pravci ST i CD okomiti. Označimo $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{r_A}$, $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{r_B}$, $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{r_C}$ i $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{s_D}$. Neka je $k(S, R)$ kružnica opisana trokutu ABC, gdje je S središte kružnice, a R njezin radijus. Stoga je $|SA| = |SB| = |SC| = R$. Točka D je polovište dužine $\overline{AB}$, točka T težište trokuta ADC (Slika 3.8) pa se kao u dokazu Teorema 2.6.1 može pokazati da vrijedi $\overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B})$ i $\overrightarrow{ST} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D})$. Prikažimo vektore $\overrightarrow{ST}$ i $\overrightarrow{CD}$ pomoću vektora $\overrightarrow{r_A}$, $\overrightarrow{r_B}$ i $\overrightarrow{r_C}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{ST} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B})) \\
&= \frac{1}{6}(3\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + 2\overrightarrow{r_C}), \\
\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_C} \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B}) - \overrightarrow{r_C} \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} - 2\overrightarrow{r_C}).
\end{aligned}$$

Pravci ST i CD su okomiti ako je skalarni produkt vektora $\overrightarrow{ST}$ i $\overrightarrow{CD}$ jednak nuli. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
ST \perp CD &\iff \overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \\
&\iff \frac{1}{6}(3\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + 2\overrightarrow{r_C}) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} - 2\overrightarrow{r_C}) = 0 \quad / \cdot 12 \\
&\iff (3\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + 2\overrightarrow{r_C}) \cdot (\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} - 2\overrightarrow{r_C}) = 0 \\
&\iff 3\overrightarrow{r_A}^2 + 3\overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_B} - 6\overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_B}^2 - 2\overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_C} + 2\overrightarrow{r_C} \cdot \overrightarrow{r_A} + 2\overrightarrow{r_C} \cdot \overrightarrow{r_B} \\
&\quad - 4\overrightarrow{r_C}^2 = 0 \\
&\iff 3R^2 + 4\overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_B} - 4\overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_C} + R^2 - 4R^2 = 0 \\
&\iff 4\overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_B} - 4\overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_C} = 0 \quad / : 4 \\
&\iff \overrightarrow{r_A}(\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_C}) \\
&\iff \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \\
&\iff SA \perp CB.
\end{aligned}$$

Točka S leži na visini iz vrha A trokuta ABC, a to je moguće samo ako je $|AB| = |AC|$. Obrnuto, pretpostavimo da je $|AB| = |AC|$. Analognim zaključivanjem dolazimo do tvrdnje da su pravci ST i CD okomiti.

□

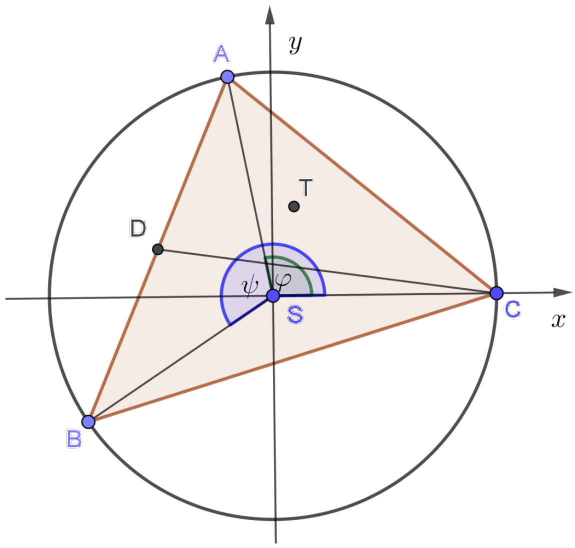
3. rješenje (analitička metoda)

Dokaz. Uvedimo koordinatni sustav u ravnini trokuta ABC sa središtem u točki S. Neka pozitivni dio koordinatne osi x prolazi kroz točku C i neka je R radijus kružnice opisane trokutu ABC (Slika 3.9). Tada su koordinate točke C jednake $(R, 0)$. Točke A i B su također udaljene od S za R pa postoje realni brojevi φ i ψ takvi da je $A = (R\cos\varphi, R\sin\varphi)$ i $B = (R\cos\psi, R\sin\psi)$. Tada su koordinate točke D jednake

$$D = \left(\frac{R(\cos\varphi + \cos\psi)}{2}, \frac{R(\sin\varphi + \sin\psi)}{2}\right),$$

a koordinate točke T su

$$T = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{R(2 + 3\cos\varphi + \cos\psi)}{2}, \frac{1}{3} \cdot \frac{R(3\sin\varphi + \sin\psi)}{2}\right).$$



Slika 3.9

Koristeći koordinate točaka dobivamo da je koeficijent smjera pravca CD jednak

$$k_{CD} = \frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\cos\varphi + \cos\psi - 2},$$

dok je koeficijent smjera pravca ST jednak

$$k_{ST} = \frac{3\sin\varphi + \sin\psi}{2 + 3\cos\varphi + \cos\psi}.$$

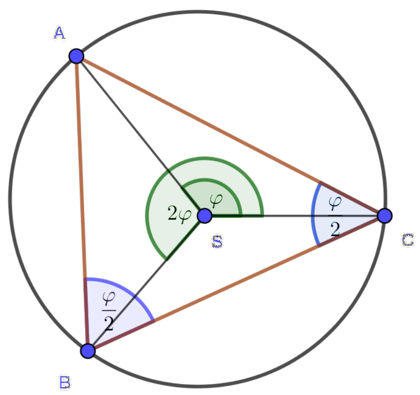
Prethodno vrijedi u slučaju kad nijedan od pravaca nije paralelan s y-osi. Pogledajmo prvo slučaj kada je $k_{CD} \neq 0$ i $k_{ST} \neq 0$. Tada su pravci ST i CD okomiti ako i samo ako su im koeficijenti smjera recipročni i suprotni, odnosno ako je

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\cos\varphi + \cos\psi - 2} = -\frac{2 + 3\cos\varphi + \cos\psi}{3\sin\varphi + \sin\psi}.$$

Sređivanjem se dobije

$$\cos(\psi - \varphi) = \cos\varphi,$$

iz čega imamo da je $\psi - \varphi = \varphi + 2k\pi$ ili $\psi - \varphi = -\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Drugi slučaj ne vrijedi jer je $\psi \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Iz istog razloga iz prve jednakosti imamo $\psi = 2\varphi$. Sada korištenjem Teorema o obodnom i središnjem kutu dobivamo da je $\sphericalangle BCA = \sphericalangle CBA$ pa je $|AB| = |AC|$ (Slika 3.10). Ako pak pretpostavimo da je $|AB| = |AC|$, analognim zaključivanjem, uz iste pretpostavke na koeficijente smjerova pravaca CD i ST, dolazimo do zaključka da su CD i ST okomiti pravci.



Slika 3.10

Proučimo još slučajeve kada je barem jedan od pravaca ST i CD paralelan s nekom od osi koordinatnog sustava. Pretpostavimo još da je $|AB| = |AC|$. Tada možemo kao prije zaključiti da je $\psi = 2\varphi$. Sada imamo sljedeće situacije:

1. Pravac ST je paralelan s y-osi, odnosno jednak je pravcu $x = 0$ s obzirom da je S ishodište koordinatnog sustava. Tada je $3\sin\varphi + \sin\psi = 0$. Kada se uvrsti $\psi = 2\varphi$, dobije se niz ekvivalentnih tvrdnji:

   $$\begin{aligned} 3\sin\varphi + \sin 2\varphi &= 0, \\ 3\sin\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi &= 0, \\ \sin\varphi(3 + 2\cos\varphi) &= 0. \end{aligned}$$

   Razlikujemo dva slučaja:

   $$\sin\varphi = 0, \qquad\qquad 3 + 2\cos\varphi = 0.$$

   Rješenja jednadžbe $\sin\varphi = 0$ su:

   $$\varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

   Jednadžba $\sin\varphi = 0$ ima samo jedno rješenje u skupu $\langle 0, 2\pi\rangle$ i to je $\varphi = \pi$. Međutim, tada je $\psi = 2\pi$ što nije kut iz intervala $\langle 0, 2\pi\rangle$.

   Druga jednadžba nema rješenja jer je $\cos\varphi \in [-1, 1]$ pa nikada ne vrijedi $3+2\cos\varphi = 0$.

   Konačno, zaključujemo da je uz uvjet $|AB| = |AC|$ ovaj slučaj nemoguć.

2. Pravac ST je paralelan s x-osi, odnosno jednak pravcu $y = 0$. Tada je $2 + 3\cos\varphi + \cos\psi = 0$. Uvrštavanjem $\psi = 2\varphi$ dobivamo:

   $$\begin{aligned} 2 + 3\cos\varphi + \cos 2\varphi &= 0, \\ 2 + 3\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi &= 0, \\ 2 + 3\cos\varphi + \cos^2\varphi - (1 - \cos^2\varphi) &= 0, \\ 2\cos^2\varphi + 3\cos\varphi + 1 &= 0. \end{aligned}$$

   Stavimo $t = \cos\varphi$. Dobili smo kvadratnu jednadžbu:

$$2t^2 + 3t + 1 = 0.$$

Njezina su rješenja $t = -1$ i $t = -\frac{1}{2}$. Tada je:

$$\cos\varphi = -1, \qquad\qquad \cos\varphi = -\frac{1}{2}.$$

Rješenja jednadžbe $\cos\varphi = -1$ su:

$$\varphi = \pi + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Jednadžba $\cos\varphi = -1$ ima jedno rješenje u skupu $\langle 0, 2\pi\rangle$ i to je $\varphi = \pi$. Međutim, tada je $\psi = 2\pi$ što nije kut iz intervala $\langle 0, 2\pi\rangle$.
Rješenja jednadžbe $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ su:

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{i} \qquad \varphi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Jednadžba $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ ima dakle dva rješenja u skupu $\langle 0, 2\pi\rangle$ i to su $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ i $\varphi = \frac{4\pi}{3}$. Za te kutove dobivamo redom $\psi = \frac{4\pi}{3}$ i $\psi = \frac{8\pi}{3}$. Kako su oba kuta u intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ imamo samo rješenje $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ i $\psi = \frac{4\pi}{3}$. Dakle, dobili smo da je trokut ABC jednakostraničan pa se lako vidi da je ST y-os, a CD x-os pa su ta dva pravca okomita.

3. Pravac CD je paralelan s x-osi. Tada je $\sin\varphi + \sin\psi = 0$. Tu jednadžbu svodimo na oblik:

$$\sin\varphi = \sin(-2\varphi).$$

Njezina su rješenja:

$$\begin{aligned} \varphi &= -2\varphi + 2k\pi, \\ 3\varphi &= 2k\pi, \end{aligned} \qquad \text{i} \qquad \begin{aligned} \varphi &= \pi - (-2\varphi) + 2k\pi, \\ -\varphi &= (2k+1)\pi, \end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}k, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad\qquad \varphi = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Jednadžba $\sin\varphi = \sin(-2\varphi)$ ima tri rješenja na skupu $\langle 0, 2\pi\rangle$ i to su $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $\varphi = \pi$ i $\varphi = \frac{4\pi}{3}$. Ali $\psi = 2\varphi$ je samo za $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ u intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$. Tada opet dobivamo da je trokut ABC jednakostraničan i zaključujemo da su ST i CD okomiti pravci direktnim računom.

4. Pravac CD je paralelan s y-osi. Tada je $\cos\varphi + \cos\psi - 2 = 0$, a to vrijedi samo ako je $\cos\varphi = \cos\psi = 1$. To nije moguće jer su oba kuta iz $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Obratno, promotrimo iste specijalne slučajeve uz pretpostavku da je ST okomit na CD:

1. Pretpostavimo da je CD paralelan s x-osi. Tada je $\cos\varphi + \cos\psi - 2 = 0$ za što smo u 4. slučaju prethodnog smjera dokazali da nije moguće.

2. Pretpostavimo da je CD paralelan s y-osi. Tada ST mora biti paralelan s x-osi pa vrijedi:

$$\sin\varphi + \sin\psi = 0, \tag{3.12}$$
$$2 + 3\cos\varphi + \cos\psi = 0. \tag{3.13}$$

Iz (3.12) dobivamo $\sin\varphi = \sin(-\psi)$ iz čega imamo $\varphi = -\psi + 2k\pi$ ili $\varphi = \pi - (-\psi) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Prvi slučaj vrijedi samo kada je $\varphi = 2\pi - \psi$. Uvrštavanjem u (3.13) i sređivanjem dobivamo $\cos\psi = -\frac{1}{2}$, odnosno vrijedi $\psi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ili $\psi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$. Tražimo rješenja za koja vrijedi $\psi > \varphi$, a ostala odbacujemo. Jedino rješenje je $\psi = \frac{4\pi}{3}$ i $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Iz toga slijedi da je $|AB| = |AC|$. Drugi slučaj vrijedi samo kada je $\varphi = \psi - \pi$. Uvrštavanjem u (3.13) i sređivanjem dobivamo $\cos\psi = 1$. Jednadžba $\cos\psi = 1$ nema rješenje na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ pa je ovaj slučaj nemoguć.

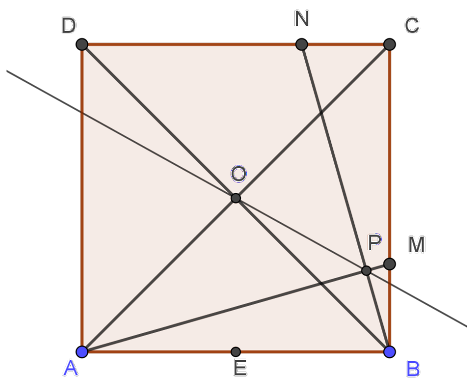
□

U prethodnom zadatku vektorska metoda je najjednostavnija, a analitička najteža. U geometrijskoj metodi potrebno je nacrtati jednu dužinu i jedan pravac na određenim mjestima da bi bilo moguće uočiti slične trokute te paralelogram. Zatim pomoću činjenice da je središte trokutu opisane kružnice također i ortocentar određenog trokuta dobiva se tražena tvrdnja.
U vektorskoj metodi pomoću skalarnog produkta okomitih vektora dobivamo tvrdnju iz koje je tražena tvrdnja očita.
U analitičkoj metodi postavljamo trokut u koordinatni sustav. Dano je središte trokutu

opisane kružnice. S obzirom na to, postavljamo središte trokutu opisane kružnice u ishodište koordinatnog sustava. Tada ostale točke zapisujemo tako da su apscise kosinusi realnih brojeva, a ordinate odgovarajući sinusi realnih brojeva, pomnoženi radijusom opisane kružnice zadanog trokuta. Primjenom trigonometrijskih identiteta i uvjeta okomitih pravaca dobivamo trigonometrijsku jednadžbu pomoću čijih rješenja dobivamo traženu tvrdnju. Rješenje je bilo složenije jer smo morali proučiti dosta specijalnih slučajeva.

Zadatak 3.0.5. *Zadan je kvadrat $ABCD$ i točka M na stranici $\overline{BC}$ te točka N na stranici $\overline{CD}$ tako da vrijedi $|BM| = |CN|$. Točka P je presjek pravaca AM i BN, dok je O sjecište dijagonala kvadrata $ABCD$. Dokažite da je pravac PO simetrala kuta $\angle APN$.*

1. rješenje (geometrijska metoda)



Slika 3.11: Zadatak 3.0.5

Dokaz. Trokuti ABM i BCN su sukladni po $S-K-S$ poučku o sukladnosti ($|AB| = |BC|$ i $\angle ABM = \angle BCN = 90°$ jer je $ABCD$ kvadrat, a $|BM| = |CN|$ vrijedi iz uvjeta zadatka). Stoga je $\angle MAB = \angle NBC$. Iz toga slijedi da je $\angle AMB = 90° - \angle NBC$ pa je $\angle APB = 90°$. Imamo i $\angle AOB = 90°$ pa po Talesovom teoremu točke O i P leže na kružnici s promjerom $\overline{AB}$. Tada su obodni kutovi $\angle OPA$ i $\angle OBA$ jednaki i iznose 45°. Iz toga slijedi da je pravac PO simetrala kuta $\angle APN$.

□

2. rješenje (vektorska metoda)

Dokaz. Neka je duljina stranice kvadrata a i $|BM| = |CN| = d$ i neka je $\overrightarrow{BP} = \alpha\overrightarrow{BN}$ gdje je $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Uzmimo bazu $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ za V^2. Prvo odredimo prikaz vektora $\overrightarrow{AP}$ na dva načina u toj bazi. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} \\
&= \overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{BN} \\
&= \overrightarrow{AB} + \alpha(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) \\
&= \overrightarrow{AB} + \alpha\left(\overrightarrow{AD} - \frac{d}{a}\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \left(1 - \frac{d}{a}\cdot\alpha\right)\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{AD}. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Neka je $\overrightarrow{AP} = \beta\overrightarrow{AM}$ gdje je $\beta \in \langle 0, 1\rangle$. Tada je:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} &= \beta\overrightarrow{AM} \\
&= \beta(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \\
&= \beta\left(\overrightarrow{AB} + \frac{d}{a}\overrightarrow{BC}\right) \\
&= \beta\overrightarrow{AB} + \frac{d}{a}\cdot\beta\overrightarrow{AD}. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem (3.14) i (3.15) dobivamo:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{d}{a}\cdot\alpha &= \beta, \\
\alpha &= \frac{d}{a}\cdot\beta.
\end{aligned}$$

Rješavanjem gornjeg sustava jednadžbi dobivamo:

$$\alpha = \frac{da}{a^2+d^2} \quad \text{i} \quad \beta = \frac{a^2}{a^2+d^2}.$$

Uvrštavanjem $\beta = \frac{a^2}{a^2+d^2}$ u (3.15) dobivamo prikaz vektora $\overrightarrow{AP}$, odnosno:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{a^2}{a^2+d^2}\overrightarrow{AB} + \frac{ad}{a^2+d^2}\overrightarrow{AD}. \qquad (3.16)$$

Odredimo sada vektore $\overrightarrow{PO}$ i $\overrightarrow{PN}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PO} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AO} \\
&= -\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{-a^2}{a^2+d^2}\overrightarrow{AB} + \frac{-ad}{a^2+d^2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \\
&= \frac{-2a^2+a^2+d^2}{2(a^2+d^2)}\overrightarrow{AB} + \frac{-2ad+a^2+d^2}{2(a^2+d^2)}\overrightarrow{AD}.
\end{aligned}$$

$$= \frac{-a^2+d^2}{2(a^2+d^2)}\overrightarrow{AB} + \frac{-2ad+a^2+d^2}{2(a^2+d^2)}\overrightarrow{AD}.$$

Nadalje:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \\
\iff \quad \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PN} &= \overrightarrow{AD} - \frac{d}{a}\overrightarrow{AB} \\
\iff \quad \overrightarrow{PN} &= \overrightarrow{AD} - \frac{d}{a}\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) \\
&= \overrightarrow{AD} - \frac{d}{a}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} - \frac{a^2}{a^2+d^2}\overrightarrow{AB} - \frac{ad}{a^2+d^2}\overrightarrow{AD} \\
&= \left(-\frac{d}{a} + 1 - \frac{a^2}{a^2+d^2}\right)\overrightarrow{AB} + \left(1 - \frac{ad}{a^2+d^2}\right)\overrightarrow{AD} \\
&= \left(\frac{d(-a^2-d^2+ad)}{a(a^2+d^2)}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{a^2+d^2-ad}{a^2+d^2}\right)\overrightarrow{AD}.
\end{aligned}$$

Pomoću skalarnog produkta odredit ćemo kut između vektora $\overrightarrow{PO}$ i $\overrightarrow{PN}$, a zatim između vektora $\overrightarrow{PO}$ i $\overrightarrow{PA}$. Odredimo prvo $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PN}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PN} &= \left(\frac{d^2-a^2}{2(a^2+d^2)}\overrightarrow{AB} + \frac{(a-d)^2}{2(a^2+d^2)}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{d(-a^2-d^2+ad)}{a(a^2+d^2)}\overrightarrow{AB} + \frac{a^2+d^2-ad}{a^2+d^2}\overrightarrow{AD}\right) \\
&= \frac{d^2-a^2}{a(a^2+d^2)} \cdot \frac{d(-a^2-d^2+ad)}{2(a^2+d^2)} \cdot a^2 + \frac{(a-d)^2}{a^2+d^2} \cdot \frac{a^2+d^2-ad}{2(a^2+d^2)} \cdot a^2 \\
&= \frac{ad(-a^2-d^2+ad)(d^2-a^2)}{2(a^2+d^2)^2} + \frac{a^2(a^2+d^2-ad)(a-d)^2}{2(a^2+d^2)^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(-a^2 - d^2 + ad)(ad(d^2 - a^2) - a^2(a-d)^2)}{2(a^2 + d^2)^2}.$$

Sređivanjem gornjeg izraza dobivamo:

$$\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PN} = \frac{(-a^2 - d^2 + ad)(ad - a^2)}{2(a^2 + d^2)}. \tag{3.17}$$

Odredimo sada $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} &= \left(\frac{d^2 - a^2}{2(a^2 + d^2)}\overrightarrow{AB} + \frac{(a-d)^2}{2(a^2 + d^2)}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(-\frac{a^2}{a^2 + d^2}\overrightarrow{AB} - \frac{ad}{a^2 + d^2}\overrightarrow{AD}\right) \\
&= \frac{d^2 - a^2}{2(a^2 + d^2)} \cdot \frac{-a^2}{a^2 + d^2} \cdot a^2 + \frac{(a-d)^2}{2(a^2 + d^2)} \cdot \frac{-ad}{a^2 + d^2} \cdot a^2 \\
&= \frac{-a^4(d^2 - a^2) - a^3 d(a-d)^2}{2(a^2 + d^2)^2}. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Odredimo sada još $|\overrightarrow{PA}|$ i $|\overrightarrow{PN}|$. Duljine tih vektora odredit ćemo pomoću skalarnog produkta. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AP}|^2 &= \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} \\
&= \left(\frac{a^2}{a^2 + d^2}\overrightarrow{AB} + \frac{ad}{a^2 + d^2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{a^2}{a^2 + d^2}\overrightarrow{AB} + \frac{ad}{a^2 + d^2}\overrightarrow{AD}\right) \\
&= \frac{a^4}{(a^2 + d^2)^2}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{a^2 d^2}{(a^2 + d^2)^2}|\overrightarrow{AD}|.
\end{aligned}$$

Sređivanjem gornjeg izraza dobivamo:

$$|\overrightarrow{AP}| = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + d^2}}. \tag{3.19}$$

Analognim postupkom dobivamo $|\overrightarrow{PN}|$. Vrijedi:

$$|\overrightarrow{PN}| = \frac{a^2 + d^2 - ad}{\sqrt{a^2 + d^2}}. \tag{3.20}$$

Ako su $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{PO},\overrightarrow{PA})$ i $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{PO},\overrightarrow{PN})$ jednaki, onda je pravac PO simetrala kuta $\sphericalangle APN$. Račun je mogao biti kraći i jednostavniji da smo umjesto vektora $\overrightarrow{PA}$ i $\overrightarrow{PN}$ odredili vektore $\overrightarrow{MA}$ i $\overrightarrow{BN}$ jer oni imaju jednostavniji zapis. Nadalje, kut između $\overrightarrow{PO}$ i $\overrightarrow{BN}$ jednak kutu između $\overrightarrow{PO}$ i $\overrightarrow{PN}$, te je kut između $\overrightarrow{PO}$ i $\overrightarrow{PA}$ jednak kutu između $\overrightarrow{PO}$ i $\overrightarrow{MA}$. Nadalje vrijedi:

$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{PO},\overrightarrow{PA})=\frac{\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PO}|\cdot|\overrightarrow{PA}|}. \tag{3.21}$$

Uvrštavanjem (3.18) i (3.19) u (3.21) dobivamo:

$$\begin{aligned}\cos\sphericalangle(\overrightarrow{PO},\overrightarrow{PA})&=\frac{\dfrac{-a^4(d^2-a^2)-a^3d(a-d)^2}{2(a^2+d^2)^2}}{|\overrightarrow{PO}|\cdot\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+d^2}}}\\&=\frac{\sqrt{a^2+d^2}(-a^4(d^2-a^2)-a^3d(a-d)^2)}{|\overrightarrow{PO}|\cdot 2(a^2+d^2)^2\cdot a^2}.\end{aligned}$$

Vrijedi:

$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{PO},\overrightarrow{PN})=\frac{\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PN}}{|\overrightarrow{PO}|\cdot|\overrightarrow{PN}|}. \tag{3.22}$$

Uvrštavanjem (3.17) i (3.20) u (3.22) dobivamo:

$$\begin{aligned}\cos\sphericalangle(\overrightarrow{PO},\overrightarrow{PN})&=\frac{\dfrac{(-a^2-d^2+ad)(ad-a^2)}{2(a^2+d^2)}}{|\overrightarrow{PO}|\cdot\dfrac{a^2+d^2-ad}{\sqrt{a^2+d^2}}}\\&=\frac{-(a^2+d^2-ad)(ad-a^2)\sqrt{a^2+d^2}}{|\overrightarrow{PO}|\cdot 2(a^2+d^2)(a^2+d^2-ad)}\\&=\frac{-(ad-a^2)\sqrt{a^2+d^2}}{|\overrightarrow{PO}|\cdot 2(a^2+d^2)}.\end{aligned}$$

Tada je $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{PO},\overrightarrow{PA})$ jednak $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{PO},\overrightarrow{PN})$ ako i samo ako je:

$$\frac{\sqrt{a^2+d^2}(-a^4(d^2-a^2)-a^3d(a-d)^2)}{|\overrightarrow{PO}|\cdot 2(a^2+d^2)^2\cdot a^2} = \frac{-(ad-a^2)\sqrt{a^2+d^2}}{|\overrightarrow{PO}|\cdot 2(a^2+d^2)}$$

$$\iff \qquad \frac{-a^4(d^2-a^2)-a^3d(a-d)^2}{(a^2+d^2)\cdot a^2} = -(ad-a^2)$$

$$\iff \qquad \frac{a^2(a^2(a^2-d^2)-ad(a-d)^2)}{a^2\cdot(a^2+d^2)} = -ad+a^2 \quad /\cdot(a^2+d^2)$$

$$\iff \qquad a^2(a^2-d^2)-ad(a^2-2ad+d^2) = (-ad+a^2)(a^2+d^2)$$

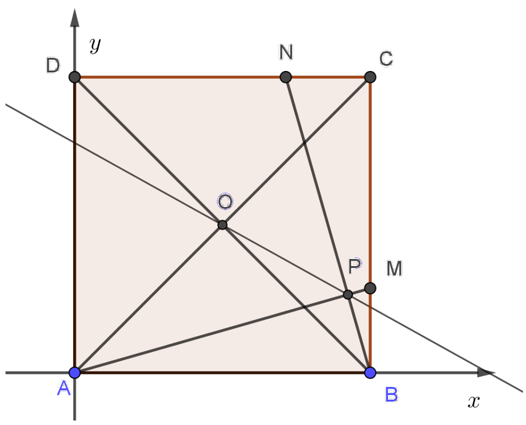
$$\iff \qquad a^4-a^2d^2-a^3d+2a^2d^2-ad^3 = -a^3d-ad^3+a^4+a^2d^2$$

$$\iff \qquad 0=0.$$

Dobili smo da je $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{PO},\overrightarrow{PA}) = \cos\sphericalangle(\overrightarrow{PO},\overrightarrow{PN})$. Dakle, pravac PO je simetrala kuta $\sphericalangle APN$.

□

3. rješenje (analitička metoda)



Slika 3.12

Dokaz. Postavimo kvadrat $ABCD$ u pravokutni koordinatni sustav tako da je točka A u ishodištu, točka B na x-osi, a točka D na y-osi (Slika 3.12). Neka je duljina stranice kvadrata a i neka je $|BM| = |CN| = d$. Tada je $B=(a,0)$, $C=(a,a)$, $D=(0,a)$, $M=(a,d)$ i $N=(a-d,a)$. Prvo odredimo jednadžbe pravaca AM i BN te njihov presjek. Vrijedi:

$$
\begin{aligned}
AM\ldots \qquad y - 0 &= \frac{d-0}{a-0}(x-0) \\
y &= \frac{d}{a}x.
\end{aligned}
$$

Nadalje:

$$
\begin{aligned}
BN\ldots \qquad y - 0 &= \frac{a-0}{a-d-a}(x-a) \\
y &= -\frac{a}{d}(x-a).
\end{aligned}
$$

Dakle, jednadžba pravca AM je $y = \frac{d}{a}x$, a jednadžba pravca BN je $y = -\frac{a}{d}(x-a)$. Presjekom pravaca AM i BN dobivamo koordinate točke P. Rješavanjem sustava tih dviju jednadžbi dobivamo:

$$
x = \frac{a^3}{a^2+d^2} \quad \text{i} \quad y = \frac{a^2 d}{a^2+d^2}.
$$

Dakle, $P = (\frac{a^3}{a^2+d^2}, \frac{a^2 d}{a^2+d^2})$. Da bismo odredili jednadžbu pravca PO, treba još odrediti koordinate točke O. Točka O je sjecište dijagonala kvadrata $ABCD$, odnosno $O = (\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$. Sada možemo odrediti jednadžbu pravca PO. Vrijedi:

$$
PO\ldots \qquad y - \frac{a}{2} = \frac{\frac{a^2 d}{a^2+d^2} - \frac{a}{2}}{\frac{a^3}{a^2+d^2} - \frac{a}{2}}\left(x - \frac{a}{2}\right).
$$

Sređivanjem gornjeg izraza dobivamo:

$$
PO\ldots \qquad y = -\frac{a-d}{a+d}\left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2}.
$$

Odredimo sada kut između pravaca PO i AM pomoću njihovih koeficijenata smjera $k_{PO} = -\frac{a-d}{a+d}$ i $k_{AM} = \frac{d}{a}$. Vrijedi:

$$
\operatorname{tg} \sphericalangle(PO, AM) = \left| \frac{\frac{-(a-d)}{a+d} - \frac{d}{a}}{1 + \frac{d}{a} \cdot \left(-\frac{a-d}{a+d}\right)} \right|
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \frac{\frac{(d-a)a - d(a+d)}{a(a+d)}}{\frac{a(a+d) - d(a-d)}{a(a+d)}} \right| \\
&= \left| \frac{ad - a^2 - da - d^2}{a^2 + ad - ad + d^2} \right| \\
&= \left| \frac{-(a^2 + d^2)}{a^2 + d^2} \right| \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Dakle, kut između pravaca PO i AM je $45°$. S obzirom na to da su koeficijenti smjera pravaca AM i BN suprotni i recipročni, pravci AM i BN su okomiti. Iz toga slijedi da je pravac PO simetrala kuta $\sphericalangle APN$.

□

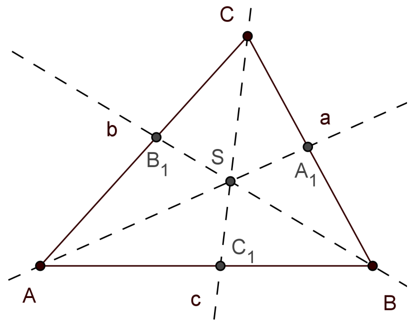
U prethodnom zadatku geometrijska metoda je najjednostavnija. Potrebno je primijeniti poučak o sukladnosti trokuta, te uočiti koji kutovi su jednaki. Zatim se pomoću Talesovog teorema o kutu nad promjerom kružnice dobije tvrdnja zadatka.
Vektorska metoda je najteža. Da bi se riješio zadatak, potrebno je prvo raspisati isti vektor na dva načina iz čega dobivamo duljine nekih drugih vektora. Zatim određujemo kosinus kuta između dva para vektora. Dobivamo da su ti kosinusi jednaki čime je dokazana tvrdnja zadatka.
U analitičkoj metodi prvo postavljamo kvadrat u koordinatni sustav. Određujemo sjecište određenih pravaca pomoću kojeg dobivamo jednadžbu pravca za koji trebamo dokazati da je simetrala odgovarajućeg kuta. Pomoću tangensa određujemo kut između dva pravca i pomoću uvjeta okomitih pravaca dobivamo tvrdnju zadatka.

Na kraju ćemo usporediti vektorsku i geometrijsku metodu u dokazu jednog teorema.

Teorem 3.0.1 (**Poučak o središtu trokutu upisane kružnice**). *Središte trokutu upisane kružnice dijeli svaku simetralu unutarnjeg kuta trokuta u omjeru zbroja duljina stranica uz taj kut i duljine stranice nasuprot tom kutu.*

1. rješenje (vektorska metoda)

Dokaz. Neka je dan trokut ABC takav da je $|AB| = c$, $|BC| = a$ i $|AC| = b$ i neka su A_1, B_1 i C_1 točke u kojima simetrale unutarnjih kutova trokuta ABC sijeku stranice $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom. Označimo s S presjek simetrala unutarnjih kutova trokuta ABC (Slika 3.13).



Slika 3.13

Odredimo prvo prikaz vektora $\overrightarrow{BA_1}$ i $\overrightarrow{AB_1}$ pomoću vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. Po teoremu o simetrali unutarnjeg kuta trokuta vrijedi:

$$|\overrightarrow{BA_1}| = \frac{c}{b+c} \cdot |\overrightarrow{BC}|,$$
$$|\overrightarrow{AB_1}| = \frac{c}{a+c} \cdot |\overrightarrow{AC}|.$$

Tada je $\overrightarrow{BA_1} = \frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AB_1} = \frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC}$. Neka je $\overrightarrow{AS} = \lambda\overrightarrow{AA_1}$ i $\overrightarrow{B_1S} = \mu\overrightarrow{B_1B}$, gdje su λ, $\mu \in \langle 0, 1\rangle$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AS} &= \lambda\overrightarrow{AA_1} \\
&= \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}) \\
&= \lambda\left(\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}\right) \\
&= \lambda\left(\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\right) \\
&= \left(\lambda - \frac{c}{b+c} \cdot \lambda\right)\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} \cdot \lambda\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{b}{b+c} \cdot \lambda\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} \cdot \lambda\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

Nadalje:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AS} &= \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1S} \\
&= \overrightarrow{AB_1} + \mu\overrightarrow{B_1B} \\
&= \overrightarrow{AB_1} + \mu(\overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1-\mu)\overrightarrow{AB_1} + \mu\overrightarrow{AB} \\ &= \mu\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+c}\cdot(1-\mu)\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Vektor $\overrightarrow{AS}$ prikazali smo na dva načina. Prikaz vektora u bazi je jedinstven pa dobivamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. Vrijedi:

$$\frac{b}{b+c}\cdot\lambda = \mu \quad \text{i} \quad \frac{c}{b+c}\cdot\lambda = (1-\mu)\frac{c}{a+c}.$$

Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dobivamo $\lambda = \frac{b+c}{a+b+c}$ i $\mu = \frac{b}{a+b+c}$. Tada je:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{AA_1}. \tag{3.23}$$

Da bismo dobili traženi omjer, preostaje odrediti vektor $\overrightarrow{SA_1}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SA_1} = \overrightarrow{AA_1} \\ \iff \quad & \overrightarrow{SA_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AS} \\ & = \overrightarrow{AA_1} - \frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{AA_1} \\ & = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{AA_1}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Iz (3.23) i (3.24) dobivamo prvu traženu tvrdnju, odnosno:

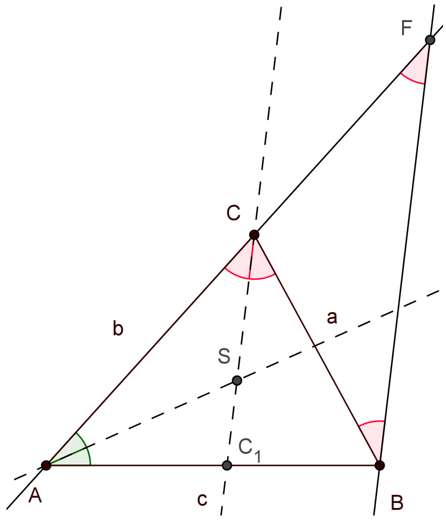
$$|\overrightarrow{AS}| : |\overrightarrow{SA_1}| = (b+c) : a.$$

Analognim postupkom dobivamo preostala dva omjera.

□

2. rješenje (geometrijska metoda)

Dokaz. Neka je dan trokut ABC, točka S sjecište je simetrala kutova uz vrhove A i C, a točka C_1 sjecište je simetrale CS i stranice $\overline{AB}$. Neka je $|AB| = c$, $|BC| = a$ i $|AC| = b$ i neka je točka F sjecište paralele s pravcem CS kroz točku B i pravca AC (Slika 3.14). Trokuti AC_1C i ABF su slični po $K-K$ teoremu o sličnosti trokuta jer imaju zajednički kut $\sphericalangle FAB$ i jer su pravci CC_1 i FB paralelni pa vrijedi $\sphericalangle C_1CA = \sphericalangle BFA$. Pravac BC je transverzala paralelnih pravaca CC_1 i FB pa vrijedi $\sphericalangle BCC_1 = \sphericalangle CBF$. S obzirom na to da je pravac CC_1 simetrala kuta $\sphericalangle BCA$, vrijedi $\sphericalangle C_1CA = \sphericalangle BCC_1 = \sphericalangle CBF = \sphericalangle BFA$. Iz toga slijedi da je trokut BFC jednakokračan pa je $|BC| = |CF|$. Tada je $|AF| = a + b$.



Slika 3.14

Primjenom teorema o simetrali unutarnjeg kuta trokuta na trokut AC_1C dobivamo:

$$|CS| : |SC_1| = |AC| : |AC_1|. \tag{3.25}$$

Iz sličnosti trokuta AC_1C i ABF određujemo $|AC_1|$:

$$\begin{aligned} & |AC_1| : |AB| = |AC| : |AF| \\ \Longleftrightarrow \quad & |AC_1| : c = b : (a+b) \\ \Longleftrightarrow \quad & |AC_1| = \frac{bc}{a+b}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Uvrštavanjem (3.26) u (3.25) dobivamo:

$$|CS| : |SC_1| = b : \frac{bc}{a+b}. \tag{3.27}$$

Sređivanjem (3.27) dobivamo traženi razmjer:

$$|CS| : |SC_1| = (a+b) : c.$$

Analognim postupkom dobivamo preostala dva razmjera.

□

Prethodni zadatak je primjer zadatka koji je jednostavnije riješiti geometrijskom metodom nego vektorskom. Kod rješavanja zadatka vektorskom metodom, prvo smo se pozvali na teorem o simetrali unutarnjeg kuta trokuta kako bismo odredili prikaze vektora odsječaka na stranicama trokuta dobivenih pomoću simetrala kutova. Zatim smo na dva načina odredili prikaz vektora čija je početna točka u vrhu trokuta, a završna u sjecištu simetrala unutarnjih kutova. Time smo dobili sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. Rješavanjem sustava dobili smo skalare pomoću kojih možemo lako odrediti sve vektore potrebne da dobijemo traženu tvrdnju.
U geometrijskoj metodi, treba nacrtati jedan pomoćni pravac kako bismo dobili slične trokute. Pozivanjem na teorem o simetrali unutarnjeg kuta trokuta dobivamo duljine određenih dužina. Time dobivamo sve potrebno da dobijemo traženu tvrdnju.

Bibliografija

[1] Branimir Dakić i Neven Elezović, *Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazije, 2. dio*, 4. izdanje, Zagreb, Element, 2008.

[2] Nevenka Antončić, Eva Špalj i Vladimir Volenec, *Matematika 3, II. dio udžbenika : za 3. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, 3. izdanje, Zagreb, Školska knjiga, 2008.

[3] Anđelko Marić, *Vektori: zbirka riješenih zadataka*, 2. prošireno izdanje, Zagreb, Element, 2002.

[4] Željko Bošnjak, Boris Čulina i Gordana Paić, *Matematički izazovi 8 : udžbenik iz matematike za osmi razred, drugo polugodište*, Zagreb, Alfa, 2018.

[5] Renata Svedrec, ilustracije Ivan Prlić, *Tajni zadatak 008 : udžbenik s zbirkom zadataka za osmi razred osnovne škole*, Zagreb, Školska knjiga, 2007.

[6] Mirko Polonijo i Branimir Dakić, *Matematika 8 : udžbenik za osmi razred osnovne škole*, Zagreb, Školska knjiga, 2000.

[7] Tamara Nemeth, Goran Stajčić, ilustracije Zrinka Ostović, *Matematika 8, udžbenik i zbirka zadataka za osmi razred osnovne škole, 2. polugodište*, 1. izdanje, Zagreb, Profil, 2007.

[8] Državno povjerenstvo za natjecanja iz matematike, Zadaci za Županijsko natjecanje 1995. godine za učenike osnovnih škola 8. razreda Republike Hrvatske, *http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-OS.htm*, (kolovoz 2018.).

Sažetak

U ovom radu smo usporedili uvođenje pojma vektora u raznim udžbenicima, te smo naveli razlike u definicijama i iskazima tvrdnji vezanih uz vektore koje nalazimo u tim udžbenicima. Definicije i svojstva navedena na početku korištena su u nastavku rada. Zatim smo na konkretnim primjerima pokazali kakve se sve vrste geometrijskih problema mogu riješiti pomoću vektora. Na kraju smo riješili nekoliko zadataka geometrijskom, vektorskom i analitičkom metodom.

Summary

In this paper, we compared the introduction of vectors in various textbooks, and we have noted differences in definitions and statements related to vectors in these textbooks. The definitions and properties listed at the beginning were used in the following. Then we have shown in concrete examples what kind of geometric problems can be solved using vectors. Finally, we have solved several tasks with geometric, vector and analytical method.

Životopis

Rođen sam 17. travnja 1992. u Virovitici. Godine 1999. krenuo sam u 1. razred Osnovne škole Josipa Kozarca u Slatini. Osmi razred završio sam 2007. i te iste godine upisao sam opću gimnaziju u Srednjoj školi Marka Marulića u Slatini. Nakon polaganja državne mature, 2011. upisao sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom Fakultetu u Zagrebu. Nakon toga, 2014. godine stječem akademski naziv sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike. Iste godine upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički isto u Zagrebu.