

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Marko Marić

**RIEMANNOV TEOREM**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Goran Muić

Zagreb, rujan, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Mojoj obitelji i djevojci na potpori*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Uvod u kompleksnu analizu</b>	<b>3</b>
1.1 Kompleksne funkcije . . . . .	3
1.2 Osnovna svojstva analitičkih funkcija . . . . .	6
<b>2 Riemannov teorem</b>	<b>9</b>
2.1 Elementarne domene . . . . .	9
2.2 Riemannov teorem o preslikavanju . . . . .	13
<b>Bibliografija</b>	<b>23</b>

# Uvod

Kompleksna analiza je nastavak na realnu analizu. U ovom radu obradit ćemo slabiju verziju teorema Riemannove funkcije koji tvrdi da svaka elementarna domena, koja nije  $\mathbb{C}$ , odgovara ekvivalentnom jediničnom krugu. Mi u ovom radu ćemo definirati pojam konformnog preslikavanja između dvaju otvorenih skupova podskupova od  $\mathbb{C}$ .

U prvom dijelu rada napravili smo uvod u kompleksnu analizu, počevši od definicije kompleksnog broja, te svih osnovnih pojmova i operacija koja su vezana uz kompleksni broj. Također, u prvom dijelu definirali smo pojam kompleksne funkcije kompleksne varijable, te svojstva te funkcije.

U nastavku prvog dijela definirali smo pojam analitičke funkcije, te smo definirali njena osnovna svojstva. U tom dijelu također smo iskazali par značajnih rezultata za kompleksnu analizu koja ćemo naknadno koristiti u dokazu našeg teorema. Od značajnih teorema koje smo iskazali valja spomenuti Cauchy - Riemannov teorem koji uspostavlja vezu između kompleksnih i realnih funkcija. Također smo iskazali Teorem o implicitnoj funkciji pomoću kojeg smo pokazali da preslikavanje je konformno ako su ispunjeni uvjeti da je  $\varphi$  bijektivno i analitičko preslikavanje.

U drugom dijelu rada definirali smo pojam domene. Tu smo iskazali osnovni teorem integralnog računa koji uspostavlja usku vezu između primitivne funkcije i integrala funkcije realne varijable. U tom drugom dijelu, zapravo područje našega interesa su elementarne domene ( Za domenu  $D$  sadržanu u  $\mathbb{C}$  kažemo da je elementarna domena ako svaka analitička funkcija definirana na  $D$  ima primitivnu funkciju na  $D$ ). U ovom dijelu rada, također smo iskazali nekoliko vrlo važnih teorema, kao što je Cauchyjeva integralna formula, Otvoreni funkcijski teorem, te Riemannov teorem o zamjeni varijabli i s time smo napravili dobru pripremu za dokazivanje našeg teorema.

U zadnjem dijelu rada smo iskazali, te dokazali Riemannov teorem o preslikavanju. Konceptiju dokaza proveli smo u sedam koraka. U prvom glavnom dijelu pokazujemo da možemo preslikati danu elementarnu domenu  $D \neq \mathbb{C}$  konformno na elementarnu domenu  $D^* \subset E$  koja sadrži 0. U drugom glavnom dijelu dokaza, smatramo da je  $M$  skup svih injektivnih analitičkih funkcija  $\varphi$  preslikavanja  $D^*$  u  $E$ , s fiksiranom 0. Ako postoji preslikavanje  $\varphi \in M$  sa maksimalnim  $|\psi'(0)|$ , tada se može pokazati da je  $\varphi$  surjektivna, tj.

konformna kao preslikavanje  $D^* \rightarrow E$ . Konačno, u trećem dijelu dokaza, rješavamo ovaj problem ekstrema.

Na kraju ovog uvodnog dijela iskazat ćemo Riemannov teorem o preslikavanju.

**Teorem 0.0.1.** (*Riemannov teorem o preslikavanju*) *Bilo koja elementarna domena  $D \subset \mathbb{C}$ ,  $D \neq \mathbb{C}$ , je konformno ekvivalentna jediničnom krugu  $E$ .*

# Poglavlje 1

## Uvod u kompleksnu analizu

### 1.1 Kompleksne funkcije

U kompleksnoj analizi radimo s poljem kompleksnih brojeva  $\mathbb{C}$ . Svaki kompleksan broj možemo zapisati u obliku

$$z = x + iy, x, y \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

gdje je  $i$  imaginarna jedinica,  $i^2 = -1$ . Imamo  $x = \operatorname{Re}(z)$  i  $y = \operatorname{Im}(z)$ . Polje kompleksnih brojeva  $\mathbb{C}$  definirano je kao skup  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  svih uređenih parova realnih brojeva sa zbrajanjem

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad (1.2)$$

i množenjem

$$(x, y) * (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y). \quad (1.3)$$

Mi ćemo identificirati  $\mathbb{C}$  s  $\mathbb{R}^2$  na uobičajeni način

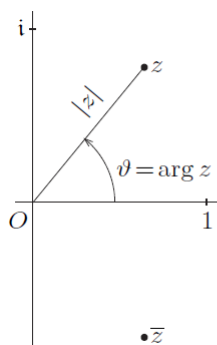
$$z = x + iy \in \mathbb{C} \quad (1.4)$$

identificiramo s točkom  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Definicija skupa  $\mathbb{C}$  kao skupa  $\mathbb{C}$  svih uređenih parova realnih brojeva omogućuje nam geometrijsko poimanje kompleksnih brojeva i podskupova od  $\mathbb{C}$ . Kompleksan broj  $z$  predstavljen je točkom  $(x, y)$  Gaussove ravnine čije su pravokutne koordinate  $x$  i  $y$ . Udaljenost

točke  $z \in \mathbb{C}$  od ishodišta  $0$  označava se sa  $|z|$  i zove apsolutna vrijednost ili modul kompleksnog broja  $z$  definiranog s

$$|z| = \sqrt{(x^2 + y^2)}, \quad (1.5)$$



Slika 1.1: Modul kompleksnog broja

a ako je  $z \neq 0$  onda definiramo i argument kompleksnog broja kao realan broj  $\arg z \in (-\pi, \pi]$  kao kut pozitivnog dijela osi  $x$  do zrake iz ishodišta koja prolazi kroz  $z$  s time da uzamemo negativnu vrijednost ako je  $z$  ispod osi  $x$ , tj.  $\text{Im}(z) < 0$ .

Udaljenost točaka  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  dana je s

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)}. \quad (1.6)$$

Otvoreni krug s centrom u  $z_0 \in \mathbb{C}$  radijusa  $r > 0$  je skup

$$K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}. \quad (1.7)$$

Dakle, radi se o skupu svih kompleksnih brojeva  $z$  koji su udaljeni od  $z_0$  za manje od  $r$ .

**Definicija 1.1.1.** Skup  $S \subset \mathbb{C}$  je ograničen, ako je on sadržan u nekom krugu, tj. ako postoje  $z_0 \in \mathbb{C}$  i  $r > 0$  takvi da je  $S \subseteq K(z_0, r)$ .

Nasuprot tome, zatvoren krug s centrom u  $z_0 \in \mathbb{C}$  radijusa  $r > 0$  je skup

$$K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\}. \quad (1.8)$$

U kompleksnoj analizi najvažniji skupovi u  $\mathbb{C}$  su otvoreni skupovi koje definiramo na slijedeći način. Otvoren skup  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  je skup koji je ili prazan ili za svaku točku  $z_0 \in \Omega$



postoji  $r > 0$  tako da je  $K(z_0, r)$  sadržan u  $\Omega$ . Zatvoren skup je komplement otvorenog skupa u  $\mathbb{C}$ .

**Definicija 1.1.2.** Skup  $S \subseteq \mathbb{C}$  je okolina točke  $z_0$  ako postoji  $r > 0$  takvo da je  $K(z_0, r) \subseteq S$ .

Skup  $K \subseteq \mathbb{C}$  je kompaktan ako je zatvoren i ograničen. Zatvoren krug primjer je kompaktnog skupa.

Funkciju iz polja kompleksnih brojeva  $\mathbb{C}$  u  $\mathbb{C}$  zovemo kompleksna funkcija kompleksne varijable. Domena (područje definicije) i kodomena (područje vrijednosti) takve funkcije su sadržane u polju  $\mathbb{C}$ . Budući da su podskupovi od  $\mathbb{C}$  u stvari podskupovi ravnine  $\mathbb{R}^2$ , svaka funkcija  $f$  iz  $\mathbb{C}$  u  $\mathbb{C}$  može se opisati s dvije realne funkcije dviju realnih varijabli. Formula

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), (x, y) \in S \quad (1.9)$$

pri čemu su  $u = \operatorname{Re} \circ f$  i  $v = \operatorname{Im} \circ f$ , od velike je važnosti jer ona povezuje kompleksnu funkciju  $f$  s dvije realne funkcije  $u$  i  $v$ .

**Definicija 1.1.3.** Neka je  $S \subseteq \mathbb{C}$  i  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ . Funkcija  $f$  je neprekidna u točki  $z_0 \in S$ , ako za svako  $\epsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  takvo da

$$z \in S \text{ i } |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon. \quad (1.10)$$

Funkcija  $f$  je neprekidna na skupu  $T \subseteq S$ , ako je ona neprekidna u svakoj točki skupa  $T$

**Definicija 1.1.4.** Put u  $\mathbb{C}$  nazivamo svako neprekidno preslikavanje

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, [a, b] \subseteq \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

**Definicija 1.1.5.** Put je gladak ako su  $\alpha, \beta$  klase  $C^1$  na  $[a, b]$ . Tada je  $\alpha'(t) = \alpha'(t) + i\beta'(t)$ . Za put  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  kažemo da je po dijelovima gladak put, ako postoji particija

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b \quad (1.12)$$

segmenta  $[a, b]$  takva da su restrikcije

$$\alpha_j \stackrel{\text{def}}{=} \alpha|_{[t_{j-1}, t_j]}, j = 1, \dots, k. \quad (1.13)$$

Sada ćemo definirati i pojam duljine luka glatke krivulje te pojam povezanosti lukom koji će nam biti potreban kod definicije domene u skupu kompleksnih brojeva.

**Definicija 1.1.6.** Duljinu luka glatke krivulje  $\alpha$ , koja ide sa  $[a, b]$  u  $\mathbb{C}$ , definiramo kao

$$l(\alpha) := \int_a^b |\alpha'(t)| dt. \quad (1.14)$$

**Definicija 1.1.7.** Duljina luka po dijelovima glatke krivulje  $\alpha$ , koja ide sa  $[a, b]$  u  $\mathbb{C}$ , definira se kao

$$l(\alpha) := \sum_{v=0}^{n-1} l(\alpha_v). \quad (1.15)$$

**Definicija 1.1.8.** Za  $D$  podskup od  $\mathbb{C}$  kažemo da je povezan lukom ako za svake dvije točke  $z$  i  $w$  iz  $D$  postoji po dijelovima glatka krivulja  $\alpha$  sa  $[a, b]$  u  $\mathbb{C}$  koja povezuje  $z$  i  $w$ , cijela leži u  $D$ , te je  $\alpha(a) = z$  i  $\alpha(b) = w$ .

Uočimo da svaki skup koji je povezan lukom ujedno i povezan pa je svaka lokalno konstantna funkcija na njemu i konstanta.

## 1.2 Osnovna svojstva analitičkih funkcija

Prvo ćemo izreći definiciju derivabilnosti za funkciju  $f$  u točki  $z_0$ .

**Definicija 1.2.1.** Za funkciju  $f$  sa  $D$  u  $\mathbb{C}$ , pri čemu je  $D$  sadržan u  $\mathbb{C}$ , kažemo da je derivabilna u točki  $z_0$  iz  $D$  ako u  $\mathbb{C}$  postoji

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (1.16)$$

Ukoliko ovaj limes postoji, označavamo ga sa  $f'(z_0)$  i zovemo derivacija funkcije  $f$  u točki  $z_0$ . Za funkciju kažemo da je derivabilna ako je derivabilna u svim točkama svoje domene.

Ako je  $f$  diferencijabilna u  $z_0$  ona je i neprekidna u  $z_0$ .  $f$  se zove diferencijabilna (na  $\Omega$ ) ako je ona diferencijabilna u svakoj točki  $z_0 \in \Omega$ .

**Definicija 1.2.2.** Ako je funkcija  $f$  neprekidna na  $\Omega$ ,  $f$  se zove analitička funkcija na  $\Omega$ . U upotrebi su i nazivi: holomorfnja funkcija i regularna funkcija.

Za otvoren skup  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  skup svih holomorfnih funkcija na  $\Omega$  označavat ćemo  $H(\Omega)$ . Sada ćemo iskazati jedan važan teorem poznat kao Cauchy - Riemannov teorem

**Teorem 1.2.3. (Cauchy - Riemannov teorem)** Kompleksna funkcija  $f = u + iv$  koja ide sa  $D$  u  $\mathbb{C}$  derivabilna je u točki  $z_0 = (x_0, y_0)$  iz  $D$  ako i samo ako su funkcije  $u$  i  $v$ , kao realne funkcije dviju realnih varijabli, diferencijabilne u točki  $(x_0, y_0)$  i zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete:

- $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$
- $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$ .

Tada vrijedi

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0). \quad (1.17)$$

**Definicija 1.2.4.** *Neprazan otvoren skup  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  zove se područje, ako za bilo koje dvije točke  $a$  i  $b$  iz  $\Omega$  postoji konačno mnogo točaka  $a = z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = b$  takvih da  $[z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_{n-1}, z_n]$  leže u  $\Omega$ .*

**Propozicija 1.2.5.** *Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  područje i  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  analitička funkcija na  $\Omega$  sa svojstvom da je  $f'(z) = 0$  za svako  $z \in \Omega$ . Tada je  $f$  konstanta.*

**Teorem 1.2.6.** *Neka je  $D$  otvoren podskup od  $\mathbb{C}$  i neka je  $f$  funkcija sa  $D$  u  $\mathbb{C}$ . Tada je  $f$  lokalno konstantna u  $D$  ako i samo ako je  $f$  derivabilna u svakoj točki iz  $D$  i vrijedi da je  $f'(z) = 0$ , za sve  $z$  iz  $D$ .*

Sada ćemo definirati teorem o implicitnoj funkciji.

**Teorem 1.2.7. (Teorem o implicitnoj funkciji)** *Neka je dana analitička funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D \subseteq \mathbb{C}$  otvoren, s kontinuiranom derivacijom.*

**Dio 1.** *Pretpostavimo da je  $a \in D$ , imamo  $f'(a) \neq 0$ . Tada postoji otvoreni skup  $D_0$ ,  $D_0 \subseteq D$ ,  $a \in D_0$ , tako da ograničenje  $f|_{D_0}$  je injektivno.*

**Dio 2.** *Pretpostavimo da je  $f$  injektivna i  $f'(z) \neq 0$  za sve  $z \in D$ . Tada prostor  $f(D)$  je otvoren. Inverzna funkcija*

$$f^{-1} : f(D) \rightarrow \mathbb{C} \quad (1.18)$$

*analitička, a njegova derivacija*

$$f^{-1}(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}. \quad (1.19)$$

**Teorem 1.2.8.** *Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  otvoren skup i  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je  $a \in \Omega$  i da je funkcija  $f$  analitička na skupu  $\Omega \setminus \{a\}$ . Tada je  $f \in H(\Omega)$ .*

Krivulja u otvorenom skupu  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  je neprekidno preslikavanje  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Omega$  pri čemu je  $-\infty < a < b < +\infty$ . Skup  $\alpha^* = \alpha(t); a \leq t \leq b$  zove se trag krivulje  $\alpha$ . Krivulja  $\alpha$  je zatvorena ako je  $\alpha(a) = \alpha(b)$ .

Otvoren skup  $\Omega$  je povezan ako za svake dvije točke  $z, w \in \Omega$  postoji neprekidno preslikavanje  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Omega$  (koje nazivamo put) tako da  $\alpha(a) = z$  i  $\alpha(b) = w$ . Otvoren skup  $\Omega$  naziva se područje ako je povezan. Ukoliko  $\Omega$  nije povezan, može se napisati na jedinstven način kao prebrojiva unija disjunktnih područja (koje nazivamo komponente povezanosti od  $\Omega$ ).

**Teorem 1.2.9. (Teorem jedinstvenosti)** Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  područje,  $f \in H(\Omega)$  i  $f \not\equiv 0$ . Tada skup svih nultočaka

$$N(f) = f^{-1}(0) = \{z \in \Omega; f(z) = 0\} \quad (1.20)$$

nema gomilišta u skupu  $\Omega$ . Dakle, ako su  $f, g \in H(\Omega)$  takve da skup  $\{z \in \Omega; f(z) = g(z)\}$  ima gomilište u  $\Omega$  onda je  $f \equiv g$ .

Kompleksne funkcije integriramo po putevima, odnosno po krivuljama.

**Definicija 1.2.10.** Neka je  $\alpha = \xi + i\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  po dijelovima gladak put  $\alpha[a, b] \subseteq \mathbb{C}$  je njegova slika, i neka je  $f : \alpha[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  neprekidna funkcija. Integral funkcije  $f$  duž puta  $\alpha$  definiramo kao kompleksan broj

$$\int_{\alpha} f dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)dt. \quad (1.21)$$

Nadalje, definiramo duljinu puta  $\alpha$  sa

$$l(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|dt. \quad (1.22)$$

**Teorem 1.2.11. (Cauchyjev teorem za derivaciju)** Neka je  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  neprekidna funkcija na otvorenom skupu  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . Tada je  $\int_{\alpha} f dz = 0$  za sve po dijelovima glatke zatvorene puteve  $\alpha$  u  $\Omega$  ako i samo ako postoji derivabilna funkcija  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  za koju je  $F' = f$  na  $\Omega$ .

Za neprekidnu funkciju  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  kažemo da ima primitivnu funkciju na  $\Omega$ , ako postoji funkcija  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  takva da je  $F'(z) = f(z)$  za sve  $z \in \Omega$ . Funkcija  $f$  ima na  $\Omega$  lokalno primitivnu funkciju ako oko svake točke  $z \in \Omega$  postoji okolina na kojoj  $f$  ima primitivnu funkciju.

Područje  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  zove se Cauchyjevo ako u njemu vrijedi Cauchyjev teorem, odnosno, ako za svaku petlju  $\alpha$  u  $\Omega$  i za svaku  $f \in H(\Omega)$  vrijedi

$$\int_{\alpha} f dz = 0. \quad (1.23)$$

# Poglavlje 2

## Riemannov teorem

### 2.1 Elementarne domene

**Definicija 2.1.1.** *Otvoren i neprazan skup  $D$  sadržan u  $\mathbb{C}$  koji je povezan lukom zvat ćemo domena.*

**Napomena 2.1.2.** *Priključeni podskupovi od  $\mathbb{R}$  dobro je poznato da su točno intervali. Koncept domeni je tako generalizacija pojma otvorenih intervala. Međutim, za domene u  $\mathbb{C}$  postoji mnogo bogatiji izbor vrsta.*

Neka

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ i } \beta : [b, c] \rightarrow \mathbb{C}, a \leq b \leq c, \quad (2.1)$$

budu dvije po dijelovima glatke krivulje koje imaju svojstvo  $\alpha(b) = \beta(b)$ .  
Zatim formula

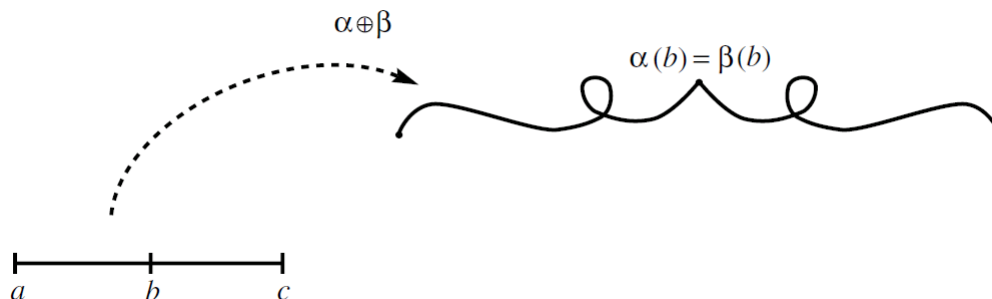
$$\alpha \oplus \beta : [a, c] \rightarrow \mathbb{C}, \quad (2.2)$$

također definira po dijelovima glatku krivulju. Krivulja  $\alpha \oplus \beta$  naziva se kompozicija od  $\alpha$  i  $\beta$ .

**Napomena 2.1.3.** *Pretpostavit ćemo, osim ako suprotno izrijekom nije navedeno, da sve su krivulje po dijelovima glatke.*

**Teorem 2.1.4.** *Neka je  $D$  domena u  $\mathbb{C}$  i neka je  $f$  neprekidna funkcija sa  $D$  u  $\mathbb{C}$ . Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

- *$f$  ima primitivnu funkciju.*



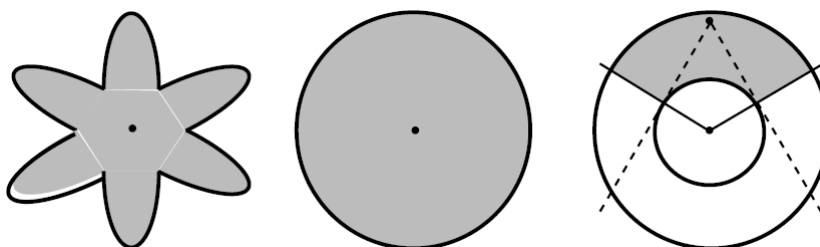
Slika 2.1: Kompozicija od  $\alpha$  i  $\beta$

- Integral od  $f$  po svakoj zatvorenoj krivulji u  $D$  iščezava.
- Integral od  $f$  po bilo kojoj krivulji u  $D$  ovisi samo o početnoj i krajnjoj točki te krivulje.

Osnovni teorem integralnog računa uspostavlja usku vezu između primitivne funkcije i integrala funkcije realne varijable. Ako je funkcija  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna i ako je  $F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  primitivna funkcija funkcije  $f$ , onda je

$$\int_c^d f(s) ds = F(d) - F(c), [c, d] \subseteq \langle a, b \rangle. \quad (2.3)$$

Iz slijedeće slike imat ćemo primjere tri zvjezdaste domene te ćemo definirati pojam zvjezdaste domene.



Slika 2.2: Tri zvjezdaste domene

**Definicija 2.1.5.** Za otvoren skup  $D$  sadržan u  $\mathbb{C}$  kažemo da je zvjezdasta domena ukoliko ima svojstvo da postoji točka  $z_*$  iz  $D$  takva da je za svaku točku  $z$  iz  $D$  pravac koji povezuje  $z_*$  i  $z$  sadržan u  $D$ . Odnosno, skup

$$\{z_* + t(z - z_*) : t \in [0, 1]\} \tag{2.4}$$

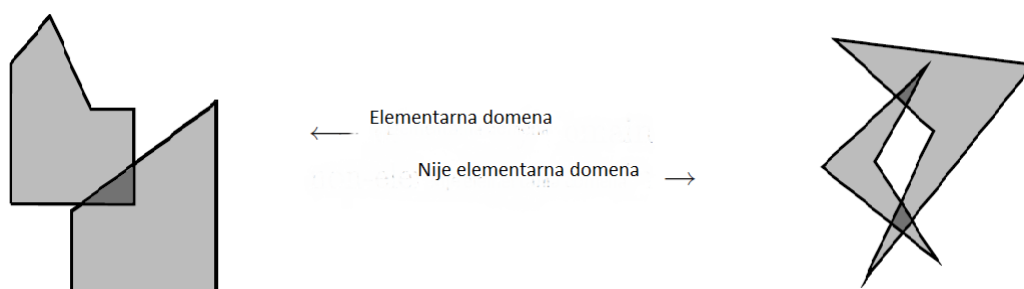
je sadržan u  $D$ . Točka  $z_*$  nije jednoznačno određena i zovemo je centar.

Budući da svake dvije točke zvjezdastog skupa možemo povezati kroz centar, onda je on povezan lukom, pa je time i domena.

Sada ćemo definirati pojam elementarne domene.

**Definicija 2.1.6.** Za domenu  $D$  sadržanu u  $\mathbb{C}$  kažemo da je elementarna domena ako svaka analitička funkcija definirana na  $D$  ima primitivnu funkciju na  $D$ .

Evo na slici možemo vidjeti primjer elementarne domene i domene koja nije elementarna.



Slika 2.3: Primjer elementarne domene i domene koja nije elementarna

**Teorem 2.1.7.** Neka je  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  analitička funkcija na elementarnoj domeni, neka  $f'$  je također analitička, i  $f(z) \notin 0$  za sve  $z \in D$ . Tada postoji analitička funkcija  $h : D \rightarrow \mathbb{C}$  s svojstvom

$$f(z) = \exp(h(z)). \tag{2.5}$$

Tada se  $h$  zove analitička grana logaritma  $f$ .

**Korolar 2.1.8.** Pod pretpostavkama prethodnog teorema, za svaki  $n \in \mathbb{N}$  postoji analitička funkcija  $H : D \rightarrow \mathbb{C}$  takva da  $H' = f$ .

Sada ćemo iskazati teorem Cauchyjeve integralne formule.

**Teorem 2.1.9.** *Neka je  $f$  sa  $D$  u  $\mathbb{C}$  analitička funkcija, pri čemu je  $D$  otvoren skup u  $\mathbb{C}$ . Pretpostavimo da je zatvorena kugla  $\overline{K}(z_0, r)$  oko  $z_0$  radijusa  $r$  sadržana u  $D$ . Tada je funkcija  $f$  derivabilna i svaka njena sljedeća derivacija je analitička funkcija. Za  $n$  iz  $\mathbb{N}_0$  i za svaki  $z$  takav da je  $|z - z_0| < r$  vrijedi*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad (2.6)$$

pri čemu je

$$\alpha(t) = z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (2.7)$$

**Teorem 2.1.10. (Liouvilleov teorem)** *Svaka omeđena cijela funkcija je konstanta. Ekvivalentno: Nekonstantna cijela funkcija ne može biti ograničena.*

**Teorem 2.1.11. (Otvoreni funkcijski teorem)** *Ako je  $f$  nekonstantna analitička funkcija na domeni  $D \subset \mathbb{C}$ , tada njena slika  $f(D)$  je otvorena i jednostavno povezana, tj također domena.*

**Lema 2.1.12. (Schwarzova lema)** *Neka je  $E := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$  jedinični krug. Neka je  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  analitička funkcija s  $|f(z)| \leq 1$  za sve  $z \in E$ , i sa nulom kao fiksnom točkom,  $f(0) = 0$ . Tada za sve  $z \in E$  vrijedi*

$$|f(z)| \leq |z| \text{ i } |f'(0)| \leq 1. \quad (2.8)$$

*Osim toga, ako postoji točka  $a \in E$ ,  $a \neq 0$ , takva da je  $|f(a)| = |a|$ , ili  $|f'(0)| = 1$ , tada za odgovarajući  $\vartheta \in \mathbb{R}$ ,  $f(z) = ze^{i\vartheta}$  za sve  $z \in E$ , odnosno  $f$  okoline oko nule.*

**Propozicija 2.1.13.** *Neka je  $a \in E$  fiksna točka. Tada je preslikavanje  $\varphi : E \rightarrow E$ ,*

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{az - 1} \quad (2.9)$$

*je bijektivno preslikavanje jediničnog kruga u sebe koja zadovoljava*

- $\varphi_a(a) = 0$ ,
- $\varphi_a(0) = a$
- $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$

*Pogotovo,  $\varphi_a$  je u oba smjera je analitička.*

Sada ćemo definirati pojam singulariteta, kakav je to izolirani singularitet te dati definiciju uklonjivog izoliranog singulariteta.



**Definicija 2.1.14.** Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  otvoren skup, a  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  funkcija. Kažemo da je točka  $z_0 \in \text{Int}\Omega = \Omega \setminus \partial\Omega$  singularitet funkcije  $f$ , ili da funkcija  $f$  ima u točki  $z_0$  singularitet, ako u točki  $z_0$  funkcija  $f$  nije holomorfna ili uopće nije definirana u toj točki.

**Definicija 2.1.15.** Za singularitet  $z_0$  kažemo da je izoliran singularitet funkcije  $f$ , ako je  $f$  holomorfna funkcija na nekom probušenom krugu  $K^*(z_0, r)$  oko točke  $z_0$ .

Postoje tri vrste singulariteta: Uklonjivi, polovi i bitni singulariteti.

**Definicija 2.1.16.** Za izoliran singularitet  $z_0$  funkcije  $f$  kažemo da je uklonjiv, ako u točki  $z_0$  možemo funkciju  $f$  predefinirati ili, ako u  $z_0$  nije bila definirana, dodefinirati, tako da postane holomorfna na nekom (pravom, neprobušenom) krugu  $K(z_0, r)$  oko točke  $z_0$ . Drugim riječima, singularitet je uklonjiv, ako ga možemo ukloniti.

**Teorem 2.1.17. (Riemannovi teorem o zamjeni)** Neka je funkcija  $f$  holomorfna na probušenom krugu  $K^*(z_0, r)$ . Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

1.  $z_0$  je uklonjiv singularitet funkcije  $f$ .
2. Postoji limes  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ .
3.  $f$  je omeđena na nekoj okolini točke  $z_0$ .
4.  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$
5. U Laurentovom razvoju funkcije  $f$  oko točke  $z_0$  nema negativnih potencija, tj. svi koeficijenti uz negativne potencije jednaki su nuli.

**Teorem 2.1.18. (Hurwitzov teorem)** Neka je  $f_0, f_1, f_2, \dots : D \rightarrow \mathbb{C}$  niz funkcija koji konvergira lokalno uniformno ka (analitičkoj funkciji)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Pretpostavimo da svaka funkcija ne poništava na  $D$ . Zatim granična funkcija  $f$  je ili jednaka nuli, ili nema nulu u  $D$ .

## 2.2 Riemannov teorem o preslikavanju

Teorem Riemannove funkcije tvrdi da svaka elementarna domena, koja nije  $\mathbb{C}$ , odgovara ekvivalentnom jediničnom krugu  $E$ . Tu je općenitiji oblik teorema Riemannove funkcije, koji se najčešće naziva Uniformizacijski teorem (P. Koebe, H. Poincaré, 1907). Ovaj rezultat potvrđuje sljedeće: Bilo koja jednostavno povezana Riemannova površina odgovara ekvivalentno upravo jednoj od sljedeće tri Riemannove površine:

- Riemannova sfera  $\widehat{\mathbb{C}} = P^1(\mathbb{C})$ ,
- ravnini  $\mathbb{C}$
- uređaj kruga  $E$ .

Mi ćemo pokazati slabiju verziju ovog teorema, ”**Riemannov teorem o preslikavanju**”. Definirat ćemo pojam konformnog preslikavanja između dvaju otvorenih skupova  $D, D' \subset \mathbb{C}$ .

**Definicija 2.2.1.** Preslikavanje  $\varphi : D \rightarrow D'$  između dvaju otvorenih skupova  $D, D'$  u kompleksnoj ravnini zove se konformno, ako i samo ako su slijedeći uvjeti ispunjeni:

- $\varphi$  je bijektivna,
- $\varphi$  je analitička
- $\varphi^{-1}$  je analitička.

**Napomena 2.2.2.** Iz prethodne definicije, treći uvjet slijedi iz prvog i drugog uvjeta.

*Dokaz.* Umjesto trećeg uvjeta, možemo zatražiti da derivacija od  $\varphi$  nema nulu. Zanimljivo, ovaj treći uvjet je automatski zadovoljen iz otvorenog funkcijskog teorema 2.1.11 znamo da je  $\varphi(D)$  otvoren. Preslikavanje  $\varphi^{-1}$  je stoga kontinuirano. (Inverzna slika otvorenog skupa  $U \subset D$  od  $\varphi^{-1}$  je točno njegova slika od  $\varphi$  i time je otvoren.)

Iz teorema o implicitnoj funkciji 1.2.7,  $\varphi^{-1}$  je analitička u komplementarnom skupu svih  $w = \varphi(z) \in D'$  s  $\varphi'(z) = 0$ . Skup tih iznimnih mjesta je slika od  $\varphi$  diskretnog skupa u  $D$ , pa stoga diskretna i u  $D'$ . Sada tvrdnja slijedi iz Riemannovog teorema o zamjeni 2.1.17.  $\square$

**Napomena 2.2.3.** Neka  $D \subseteq \mathbb{C}$  elementarna domena i  $\varphi : D \rightarrow D^*$  globalno konformno preslikavanje  $D$  na domenu  $D^*$ . Pretpostavljamo da je njezina derivacija analitička. Tada  $D^*$  je također elementarna domena.

Dvije domene  $D$  i  $D'$  zovu se podudarno ekvivalentne, ako i samo ako postoji konformno preslikavanje  $\varphi : D \rightarrow D'$ . Konformna ekvivalencija je zasigurno relacija ekvivalencije na skupu svih domena u  $\mathbb{C}$ .

**Napomena 2.2.4.** Bilo koja domena koja je konformno ekvivalentna elementarnoj domeni je sama elementarna.

**Napomena 2.2.5.** Dvije elementarne domene  $\mathbb{C}$  i  $E = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$  nisu konformno ekvivalentne.

*Dokaz.* Liouville-ov teorem 2.1.10 tvrdi da svaka analitička funkcija  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow E$  je konstantna, jer je  $E$  ograničena.  $\square$

Međutim,  $\mathbb{C}$  i  $E$  su topoloski ekvivalenti (homeomorfni), eksplicitna topološka preslikavanja između njih

- $\mathbb{C} \rightarrow E, z \rightarrow \frac{z}{1+|z|}$ ,
- $E \rightarrow \mathbb{C}, w \rightarrow \frac{w}{1-|w|}$ .

Ovaj primjer pokazuje da nužan uvjet topološke ekvivalencije nije dovoljan za konformnu ekvivalenciju. Glavni problem teorije konformnog preslikavanja dano je slijedećim pitanjima:

- Kada dvije domene  $D, D' \subset \mathbb{C}$  pripadaju istoj klasi ekvivalencije?
- Koliko različitih preslikavanja ostvaruje konformnu ekvivalenciju za dvije domene u istoj klasi?

Drugo pitanje je ekvivalentno za određivanje skupine konformnih automorfizama (samo preslikavanje) iz fiksne domene  $D$  iz danog razreda. To je lako da

$$\text{Aut}(D) := \{\phi : D \rightarrow D; \phi \text{ je konformna}\} \quad (2.10)$$

je grupa s obzirom na kompoziciju preslikavanja.

Zašto je to dovoljno za proučavanje  $\text{Aut}(D)$ ? Zbog dva konformna preslikavanja  $\varphi, \psi : D \rightarrow D'$  preslikavanje  $\theta = \psi^{-1}\varphi : D \rightarrow D$  se nalazi u  $\text{Aut}(D)$ . Nas prvo pitanje vodi u potrazi za potpuni popis "standardnih domena", kao da je

- bilo koja domena konformno je ekvivalentna standardnoj domeni, i
- bilo koje dvije različite standardne domene nisu konformno ekvivalentne.

Mi ćemo se ograničiti ovdje za elementarne domene. (Opći slučaj je složeniji.) Standardne elementarne domene su kompleksna ravnina i jedinični krug ( $\mathbb{C}$  i  $E$ ).

**Teorem 2.2.6. (Riemannov teorem o preslikavanju)**

*Bilo koja elementarna domena  $D \subset \mathbb{C}$ ,  $D \neq \mathbb{C}$ , je konformno ekvivalentna jediničnom krugu  $E$ .*

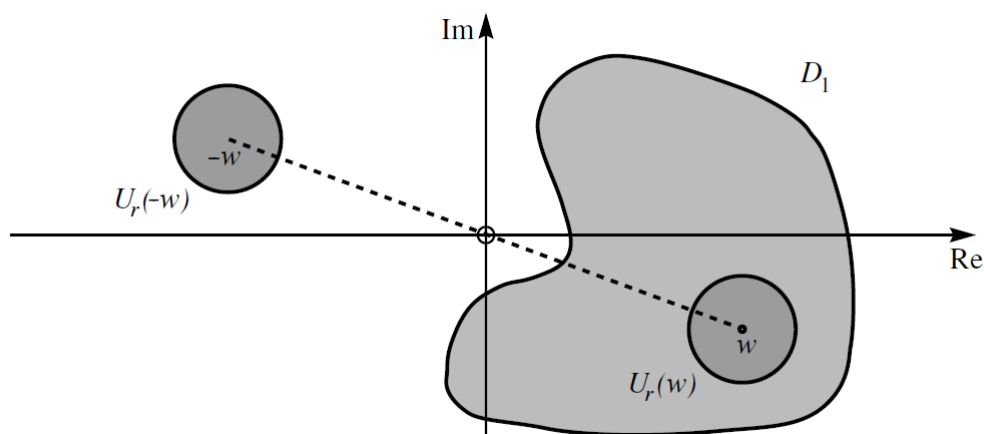
Dokaz će obuhvatiti sedam koraka. Prije nego što počnemo dokaz, evo pregleda glavnih dijelova.

U prvom glavnom dijelu ( koraci 1 i 2 ), možemo preslikati danu elementarnu domenu  $D \neq \mathbb{C}$  konformno na elementarnu domenu  $D^* \subset E$  koja sadrži 0.

U drugom glavnom dijelu ( korak 3 ), smatramo da je  $M$  skup svih injektivnih analitičkih funkcija  $\varphi$  preslikavanja  $D^*$  u  $E$ , s fiksiranom 0. Ako postoji preslikavanje  $\varphi \in M$  sa maksimalnim  $|\varphi'(0)|$ , tada se može pokazati da je  $\varphi$  surjektivna, tj. konformna kao preslikavanje  $D^* \rightarrow E$ .

Konačno, u trećem dijelu glavnog koraka ( 4 do 7 ), riješavamo ovaj problem ekstrema.

**Dokaz. (Dokaz Riemannovog teorema o preslikavanju)**



Slika 2.4: Prva slika

**1. korak** Za svaku osnovnu domenu  $D \subset \mathbb{C}, D \neq \mathbb{C}$ , postoji konformno ekvivalentna domena  $D_1 \subset \mathbb{C}$  koji sadrži cijeli krug u svom komplementu  $\mathbb{C} \setminus D_1$ . Pretpostavljamo postoji točka  $b \in \mathbb{C}, b \notin D$ . Funkcija  $f(z) = z - b$  je zatim analitička u domeni  $D$ , i nema nulu. Posjeduje time analitički drugi korijen  $g$

$$g : D \rightarrow \mathbb{C}, g^2(z) = z - b. \quad (2.11)$$

Očigledno,  $g$  je injektivno,

$$g(z_1) = g(z_2) \Rightarrow g^2(z_1) = g^2(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2 \quad (2.12)$$

stoga definira konformno preslikavanje na domenu  $D_1 = g(D)$ . Argument za injektivnu pokazuje više, odnosno  $g(z_1) = -g(z_2)$  i podrazumijeva  $z_1 = z_2$ . Drugim riječima : Ako ne-nul točka  $w$  leži u  $D_1$ , tada  $-w$  ne leži u  $D_1$ .

Budući da je  $D_1$  otvoren i neprazan, postoji potpuni krug koji se nalazi u  $D_1$  i ne sadrži 0. Zatim krug, koji je dobiven refleksijom na ishodište, je sadržan u komplementu od  $D_1$  kao što je prikazano u Slici 2.4.

Taj prvi korak može se ilustrirati na primjeru razreza ravnine  $\mathbb{C}_-$ . Biramo  $b = 0$ , i neka  $g$  bude osnovica korijena. Zatim  $g$  preslikava konformno  $\mathbb{C}_-$  na desnu poluravninu.

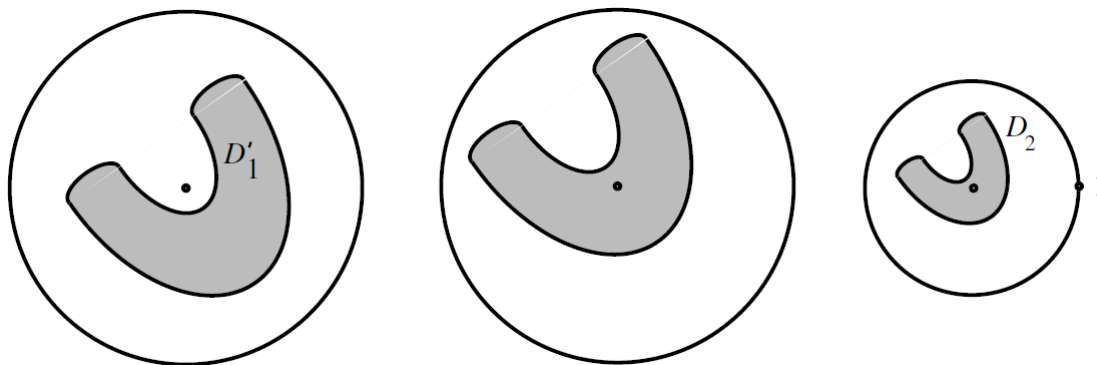
**2. korak** Za svaku elementarnu domenu  $D \subset \mathbb{C}$ ,  $D \neq \mathbb{C}$ , postoji konformna ekvivalentna domena  $D_2$  tako da  $0 \in D_2 \subset E$ . Taj prvi korak možemo pretpostaviti da je puni krug  $U_r(a)$  sadržan u komplementu od  $D$ . (Možemo zamijeniti  $D$  za  $D_1$ ). Preslikavanje

$$z \rightarrow \frac{1}{z-a} \tag{2.13}$$

je funkcija onda  $D$  konformno na ograničenu domenu  $D'_1$ , zbog

$$z \in D \Rightarrow |z-a| > r \Rightarrow \frac{1}{|z-a|} < \frac{1}{r}. \tag{2.14}$$

Nakon što je prikladna za prevođenje  $z \rightarrow z+a$  dobivamo odgovarajuću ekvivalentnu domenu koja sadrži 0, koji nakon odgovarajuće kontrakcije je sadržan u jediničnom krugu  $E$ .



Slika 2.5: Skica drugog koraka dokaza

Mi smo sada u poziciji da počnemo s glavnim dijelom dokaza. Radi boljeg razumijevanja, umetnuli smo pomoćni rezultat.

**3. korak**

**Lema 2.2.7.** *Neka je  $D$  ekementarna domena,  $0 \in D \subset E$ . Ako je  $D$  strogo sadržana u  $E$ , onda postoji injektivna analitička funkcija  $\psi : D \rightarrow E$  sa sljedećim svojstvima:*

- $\psi(0) = 0, a$
- $|\psi'(0)| > 1.$

Odgovarajući tvrdnja je lažna za  $D = E$  prema Schwarzovoj lemi 2.1.12.

*Dokaz.* Neka odaberemo točku  $a \in E, a \notin D$ . Po propoziciji 2.1.13, preslikavanje

$$\psi(z) = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} \quad (2.15)$$

preslikava jedinični krug konformno na sebe. Funkcija  $h$  nema nule u elementarnoj domeni  $D$ , a time i prema korolaru 2.1.8 postoji analitički korijen

$$H : D \rightarrow \mathbb{C} \text{ s } H(z)^2 = h(z). \quad (2.16)$$

Zatim  $H$  dalje preslikava  $D$  injektivno na podskup jediničnog kruga  $E$ . U daljnjoj primjeni propozicije 2.1.13 pokazuje se da i funkciju

$$\psi(z) = \frac{H(z) - H(0)}{H(0)H(z) - 1} \quad (2.17)$$

preslikava  $D$  injektivno u  $E$ . Očito,  $\psi(0) = 0$ . Moramo izračunati derivaciju. Jednostavan izračun vodi

$$\psi'(0) = \frac{H'(0)}{|H(0)|^2 - 1}. \quad (2.18)$$

Imamo

$$H^2(z) = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} \Rightarrow 2H(0) * H'(0) = |a|^2 - 1. \quad (2.19)$$

Nadalje,

$$|H(0)|^2 = |a| \Rightarrow |H(0)| = \sqrt{|a|}. \quad (2.20)$$

Konačno,

$$|\psi'(0)| = \frac{H'(0)}{|H(0)|^2 - 1} = \frac{|a|^2 - 1}{2\sqrt{|a|}} * \frac{1}{|a| - 1} = \frac{|a| + 1}{2 * \sqrt{|a|}} = 1 + \frac{(\sqrt{|a|} - 1)^2}{2 * \sqrt{|a|}} > 1. \quad (2.21)$$

□

Direktna posljedica leme je:

Neka je  $D$  elementarna domena,  $0 \in D \subset E$ . Pretpostavljamo da postoji među svim injektivnim, analitičkim preslikavanjima  $\varphi : D \rightarrow E$  s  $\varphi(0) = 0$  jedna s maksimalnom vrijednosti  $|\varphi'(0)|$ . Takva  $\varphi$  je surjekcija. Pogotovo,  $D$  i  $E$  su konformno ekvivalenti.

*Dokaz.* To je zato što za bilo koju ne-surjektivno preslikavanje  $\varphi : D \rightarrow E$  s  $\varphi(0) = 0$ , primjenjujući upravo dokazanu lemu na  $\varphi(D)$ , možemo naći injektivnu, analitičku

$$\psi : \varphi(D) \rightarrow E, \psi(0) = 0, \quad (2.22)$$

s  $|\psi'(0)| > 1$ . Onda  $|(\psi \circ \varphi)'(0)| > |\varphi'(0)|$ . Stoga maksimalnost podrazumijeva surjektivnost.  $\square$

Time smo smanjili Riemannov teorem o preslikavanju na problem vrijednosti ekstrema.

Neka je  $D$  omeđena domena, koja sadrži 0. Postoji li među svim injektivnim analitičkim  $\varphi : D \rightarrow E$ ,  $\varphi(0) = 0$ , preslikavanje s maksimalnom vrijednosti  $|\varphi'(0)|$ ? U preostalim koracima ćemo pokazati da odgovor na ovaj problem vrijednosti ekstrema je uvijek pozitivan. Nema potrebe da se pretpostavi da  $D$  je elementarna domena.

**4. korak** Neka je  $D$  omeđena domena,  $0 \in D$ . Označimo sa  $M$  ne-prazan skup svih injektivnih analitičkih funkcija  $\varphi : D \rightarrow E$ ,  $\varphi(0) = 0$ , i neka je

$$M := \sup\{|\varphi'(0)|; \varphi \in M\}, \text{ gdje je } M = \infty \quad (2.23)$$

također dopušteno.

Mi odabiremo niz  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  funkcija iz  $M$ , takvo da

$$|\varphi'_n(0)| \rightarrow M \text{ za } n \rightarrow \infty. \quad (2.24)$$

( $M$  može biti  $\infty$ . Onda za bilo koje  $C > 0$  vrijedi  $|\varphi'_n(0)| > C$  za gotovo sve  $n$ )

Glavni problem. Mi ćemo pokazati:

- Niz  $(\varphi_n)$  ima lokalno uniformno konvergentan podniz.
- Limes  $\varphi$  ovog podniza također injektivan.
- $\varphi(D) \subset E$ .

Tada limes  $\varphi$  je granica injektivne analitičke funkcije s svojstvom  $|\varphi'(0)| = M$ . Pogotovo,  $0 < M < \infty$ . U tom trenutku mi ćemo biti gotovi s dokazom.

**5. korak** Niz  $(\varphi_n)$  posjeduje lokalno uniformno konvergentan podniz. To je posljedica Montelovog teorema, koji će biti iskazan naknadno. Prvo dajemo dva preliminarna rezultata.

**Lema 2.2.8.** Neka je fiksni  $D \subset \mathbb{C}$  otvoren,  $K \subset D$  kompaktan i  $C > 0$ . Za svaki  $\epsilon > 0$  postoji  $\delta = \delta(D, C, K) > 0$  sa slijedećim svojstvom:

Ako  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  analitička funkcija, koja je omeđena na  $D$  sa  $C$ , odnosno  $|f(z)| \leq C$  za sve  $z \in D$ , tada za sve  $a, z \in K$ :

$$|f(z) - f(a)| < \epsilon, \text{ ako je } |z - a| < \delta \quad (2.25)$$

Primjedba. U slučaju  $K = \{a\}$ , lema se može preformulirati u standardnoj terminologiji kao:

Skup  $F$  svih analitičkih funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  s  $|f(z)| \leq C$  za sve  $z \in D$  je ekvinkontinuirana u  $a$ .

Budući da  $a$  varira u lemi u kompaktnom skupu, možemo govoriti o lokalnoj uniformnoj ekvinkontinuiranosti.

*Dokaz.* Prvo pretpostavimo da je  $K$  kompaktni krug, tj. postoje  $z_0$  i  $r > 0$  takvi da je

$$K := \overline{U_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\} \subset D. \quad (2.26)$$

Mi osim toga pretpostavljamo da zatvoreni krug dvostrukog radijusa  $\overline{U_{2r}(z_0)}$  i dalje se nalazi u  $D$ . Cauchyeva integralna formula 2.1.9 daje tada za bilo koji  $z, a \in K$ :

$$|f(z) - f(a)| = \left| \frac{1}{2\pi * i} \int_{|\zeta - z_0| = 2r} \left( \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \right) d\zeta \right| = \quad (2.27)$$

$$= \frac{|z - a|}{2\pi} \left| \int_{|\zeta - z_0| = 2r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - a)} d\zeta \right| \leq \frac{|z - a|}{2\pi} * 4\pi r * \frac{C}{r^2} = \frac{2C}{r} |z - a| \quad (2.28)$$

Za dano  $\epsilon > 0$  odabiremo  $\delta > 0$  s  $\delta < \min\{r, \frac{r}{2C}\epsilon\}$ , tako da imamo  $|f(z) - f(a)| < \epsilon$  za sve  $a, z \in K$  s  $|z - a| < \delta$ .

Neka sada  $K \subset D$  proizvoljan kompaktan skup. Tada postoji broj  $r > 0$  sa svojstvom: Za bilo koji  $a$  u  $K$ , zatvoreni krug  $U_r(a)$  radijusa  $r$  sa središtem u  $a$  je potpuno sadržana u  $D$ .  $\square$

Gore navedeni broj  $r$  ponekad se naziva Lebesgue broj za kompaktan skup  $K \subset D$ . Postojanje tog broja je standardna primjena kod pojma kompaktnosti. Za bilo koji  $a \in K$ , postoji  $r(a) > 0$ , takav da krug dvostrukog polumjera  $2r(a)$  se nalazi u  $D$ . Primjenu kompaktnosti nalazimo u konačno mnogo  $a_1, \dots, a_n \in K$  s  $K \subset U_{r(a_1)}(a_1) \cup \dots \cup U_{r(a_n)}(a_n)$ . Najmanji od brojeva  $r_{a_1}, \dots, r_{a_n}$  je tada Lebesgue broj.



Od postojanja Lebesgueovog broja lako slijedi da  $K$  može biti pokriven s konačno mnogo krugova  $U_{r(a)}, a \in K$  s  $U_{2r}(a) \subset D$ . Lema je sada svedena na prethodni poseban slučaj:

**Lema 2.2.9.** *Neka je*

$$f_1, f_2, f_3, \dots : D \rightarrow \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C} \text{ otvoren,} \quad (2.29)$$

*niz analitičkih funkcija koji je omeđen (tj.  $|f_n(z)| \leq C$  za sve  $z \in D$  i  $n \in \mathbb{N}$ ). Ako niz  $(f_n)$  konvergira po točkama u gust podskup  $S \subset D$ , onda konvergira lokalno uniformno u  $D$ .*

*Dokaz.* Pokazali smo da je  $(f_n)$  lokalno uniforman Cauchyev niz, odnosno za svaki kompaktan skup  $K \subset D$  i svaki  $\epsilon > 0$  postoji prirodni broj  $n > 0$ , tako da je za sve  $m, n \neq N$  i svi  $z \in K$

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \epsilon. \quad (2.30)$$

To je dovoljno da se ograniči na zatvorene krugove  $K$ . U ovom slučaju  $K$  je zatvaranje njezine unutrašnjosti, a  $K \cap S$  je gust u  $K$ .

To je jednostavno za prikaz, a dobro je poznato u realnoj analizi, da bilo koji lokalno uniformni Cauchyev niz je lokalno uniformno konvergentan.

Neka je  $\epsilon > 0$  proizvoljan. Mi tada biramo broj  $\delta$  kao u lemi 2.2.8 Kompaktnost od  $K$  podrazumijeva postojanje konačno mnogo točaka  $a_1, \dots, a_l \in S \cap K$  s

$$K \subset \bigcup_{(j=1)^l} U_\delta(a_j). \quad (2.31)$$

(Za to netko odabere dovoljno mali Lebesgue broj  $r > 0$ , a pokriva  $K$  sa krugovima  $U_{r/2}(a), a \in K$ . Jasno,  $K$  je tada pokriven krugovima  $U_{3r/4}(a), a \in S \cap K$ .) Sada, neka je  $z$  proizvoljna točka u  $K$ . Tada postoji točka  $a_j$  sa svojstvom  $|z - a_j| < \delta$ . Nejednakost trokuta daje

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq |f_m(z) - f_m(a_j)| + |f_m(a_j) - f_n(a_j)| + |f_n(z) - f_n(a_j)|. \quad (2.32)$$

Prvi i treći uvjeti iz leme 2.2.8 je manji od  $\epsilon$ , srednji uvjet je također pod kontrolom  $\epsilon$  za dovoljno velik  $m, n$ , točnije za sve  $m, n \geq N$  s odgovarajućim  $N$  koja radi za sve konačno mnogo točaka  $a_j$ .  $\square$

**Teorem 2.2.10. (Montelov teorem)** *Neka je*

$$f_1, f_2, f_3, \dots : D \rightarrow \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C} \text{ otvoren,} \quad (2.33)$$

*omeđen niz analitičkih funkcija, odnosno postoji konstanta  $C > 0$  s uvjetom svojstvom  $|f_n(z)| \leq C$  za sve  $z \in D$  i sve  $n \in \mathbb{N}$ . Tada postoji podniz  $f_{v_1}, f_{v_2}, f_{v_3}, \dots$ , koji konvergira lokalno uniformno.*

**6. korak**  $\phi$  je injektivna. Podsjetimo kako smo konstruirali  $\varphi$  kao lokalno uniformnu granicu funkcija u familiji  $M$  svih injektivnih analitičkih funkcija sa  $D \rightarrow E$  s  $0$  kao fiksnom točkom. Ova granica rješava naš problem ekstrema, ako ono također pripada istoj obitelji. Moramo dokazati injekciju od  $\varphi$ . To slijedi iz Hurwitzovog teorema 2.1.18:

Neka je  $f_1, f_2, f_3, \dots$  niz injektivnih analitičkih funkcija na domeni  $D \subset \mathbb{C}$ , koji konvergira lokalno uniformno. Limes je tada ili konstantna ili injekcija.

Dakle, moramo isključiti slučaj konstantnog limesa. No, za sve funkcije neprazne klase  $M$ , derivacija u nuli ne nestane, pa ekstremni uvjeti  $\varphi'(0)$  ne nestanu.

**7. korak** (završni korak)  $\varphi(D) \subset E$ . Mi samo znamo, u ovom trenutku, da slika od  $\varphi$  sadrži zatvarač od  $E$ . Ali princip maksimalnog modula,  $\varphi$  će biti konstantna, ako je točka od  $\partial E$  u njegovoj slici, To zaključuje dokaz Riemannovog teorema o preslikavanju 2.2.6.

□

# **Bibliografija**

# Sažetak

U ovom radu dokazujemo Riemannov teorem koji dokazuje da svaka elementarna domena različita od skupa kompleksnih brojeva je konformno ekvivalenta jediničnom krugu.

# Summary

In this thesis, we prove Riemann's theorem proving that each elementary domain is different from the set of complex numbers is conformally equivalent unit disk.

# Životopis

Rođen sam 13. prosinca 1986. godine u Slavonskom Brodu. Osnovnu i srednju školu pohađao sam u Zagrebu, a 2005. godine upisao sam se na Prirodoslovno matematički fakultet - Matematički odjel. Student sam diplomskog studija Matematička statistika.