View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Croatian Digital Thesis Repository

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Miko Martinić

POISSONOV PROCES I SUBORDINATORI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Bojan Basrak

Zagreb, rujan 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojim roditeljima; majci Katarini i ocu Pavi.

Sadržaj

Uvod

Glavni dio ovog rada su subordinatori. Oni su jedan od važnijih primjera Lévyjevih procesa, koji čine bogatu klasu slučajnih procesa s nezavisnim, jednako distribuiranim prirastima. U radu prikazujemo neke važnije primjere subordinatora, kao što su Poissonovi procesi. Zbog ponašanja puteva, subordinatori se dosta primjenjuju u aktuarstvu i financijama, zbog čega u radu obrađujemo i primjer primjene subordinatora u aktuarstvu.

Kako su subordinatori podklasa Lévyjevih procesa, kojima je teorija jako općenita, u radu nam je cilj definirati i prikazati subordinatore pomoću Poissonove točkovne mjere, čime želimo dobiti malo manje općenitiji i što više intuitivniji prikaz subordinatora.

U prvom poglavlju definiramo osnovne pojmove koji će biti potrebni u nastavku rada kao što je Poissonovov proces, matematički pojam bez kojeg definiranje i primjena ovog dijela teorije slučajnih procesa ne bi bilo moguće. Uvodimo i Laplaceov funkcional, neophodan za teoriju Lévyjevih procesa.

U drugom poglavlju uvodimo osnovnu teoriju Lévyjevih procesa i uvodimo Poissonovu točkovnu mjeru, koja se u Lévy-Itôvoj dekompoziciji pokazuje kao vrlo važan alat za prikazivanje Lévyjevog procesa. Lévy-Itô dekompozicija je vrlo važan dio teorije Lévyjevih procesa jer Lévyjeve procese prikazuje kao sumu nezavisnih Lévyjevih procesa s različitom strukturom puteva. Preko navedene dekompozicije i uz dodatne uvjete na Lévyjeve procese definiramo i opisujemo osnovne pojmove vezane uz subordinatore, među kojima definiramo i sliku subordinatora.

U trećem poglavlju definiramo i opisujemo neka značajnija svojstva subordinatora, kao što su regenerativno svojstvo slike, koje proizlazi iz Markovljevog svojstva subordinatora, te asimptotsko ponašanje vremena puteva subordinatora, koji preko Dynkin-Lampertijevog teorema pokazuje asimptotsko ponašanje puteva subordinatora.

U posljednom poglavlju dajemo primjer primjene subordinatora u teoriji rizika. Teorija rizika, teorija koja se koristi u aktuarskoj teoriji i primjenjenoj vjerojatnosti, koristi matematičke modele za opisati ranjivost osiguratelja od propasti. Na kraju opisujemo složeni Poissonov model, poznatiji kao Crámer-Lundbergov model u aktuarskom kontekstu, na kojem se može vidjeti direktna primjena teorije subordinatora.

Koristim priliku kako bih se zahvalio mentoru, prof. dr. sc. Bojanu Basraku, na razumijevanju i brojnim korisnim savjetima u izradi diplomskog rada.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju definiramo osnovne pojmove koji su nam potrebni u ovom rada. Najprije proučavamo osnovne pojmove uz Poissonove procese, koji su važniji primjeri subordinatora, a kasnije definiramo pojmove vezane uz široku klasu Lévyjevih procesa. Na kraju uvodimo neke osnovne pojmove i svojstva teorije slučajnih procesa.

Definicija 1.0.1. *Proces* $N = (N(t) : t \geq 0)$ *s vrijednostima u skupu* $0, 1, 2, \ldots$ *je Poissonov proces ako vrijedi:*

(i) $N(0) = 0$.

(ii) N ima nezavisne priraste, tj. za svake $t_i, i = 1, \ldots, n$ *i* $n \geq 1$ *takve da je* $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *prirasti* $N(\langle t_i - 1, t_i]) := N(t_i) - N(t_i - 1)$ *su nezavisni.*

(iii) Postoji neopadajuća funkcija $\mu : [0, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ *neprekidna zdesna takva da je* $\mu(0) = 0$, *a za* $0 \leq s < t \leq +\infty$ *prirast* $N(\langle s, t]) = N(t) - N(s)$ *ima Poissonovu distribuciju* $P(\mu(\langle s, t]))$. *Funkciju* μ *nazivamo funkcija intenziteta procesa N.*

Definicija 1.0.2. *Poissonov process se naziva homogeni Poissonov proces ukoliko je funkcija intenziteta* μ *linearna funkcija, odnosno za proizvoljni* $\lambda > 0$ *vrijedi:*

$$\mu(t) = \lambda t, \quad t \geq 0.$$

Parametar λ *se naziva intenzitet homogenog Poissonovog procesa.*

Nastavljamo sa pojmovima i primjerima beskonačno djeljive distribucije i Laplaceove transformacije koji su jako važni alati u gradnji teorije Lévyjevih procesa.

Definicija 1.0.3. *Kažemo da je vjerojatnosna distribucija F beskonačno djeljiva ako se može prikazati kao vjerojatnosna distribucija sume proizvoljnog broja nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Točnije, ako za svaki pozitivni cijeli broj n, postoji n* *nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ čija suma $S_n = X_{n1} + \ldots + X_{nn}$ ima distribuciju F.*

Neki od primjera beskonačno djeljivih distribucija su Cauchyeva distribucija, normalna distribucija, Gamma distribucija i Poissonova distribucija. U sljedećem primjeru prikazati ćemo Poissonovu distribuciju kao beskonačno djeljivu distribuciju.

Primjer 1.0.4. *Suma dvije nezavisne slučajne varijable s Poissonovom distribucijom s parametrima λ i μ je slučajna varijabla s Poissonovom distribucijom s parametrom $\lambda + \mu$. Distribucija slučajne varijable s Poissonovom distribucijom s parametrom λ odgovara distribuciji od n nezavisnih slučajnih varijabli s Poissonovom distribucijom s parametrom $\frac{\lambda}{n}$.*

Laplaceova transformacija je integralna transformacija široke primjene koja predstavlja preslikavanje funkcija u skup drugih funkcija. Ona ima važna svojstva zbog kojih predstavlja moćan alat za opisivanje i analizu problema s kojima se u matematici susrećemo.

Definicija 1.0.5. *Neka je dana funkcija $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ Ako za funkciju f konvergira integral*

$$f^*(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

tada preslikavanje $f^*(s)$ nazivamo Laplaceova transformacija.

Napomena 1.0.6. *Ako je $f(t)$ funkcija gustoće nenegativne slučajne varijable X, Laplaceova transformacija od $f(t)$ je jednaka očekivanju slučajne varijable e^{-sT}, odnosno*

$$\mathbb{E}[e^{-sX}] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx := \mathcal{L}(f)(s).$$

Također vrijedi da veličine

$$\mu_n = \int_0^{\infty} t^n f(t)dt$$

su momenti funkcije f. U slučaju apsolutne konvergencije prvih n momenata funkcije f, ponavljanjem diferenciranja ispod integrala dobijemo da je $(-1)^n(\mathcal{L}f)^{(n)}(0) = \mu_n$. To je od posebnog značaja u teoriji vjerojatnosti, gdje su momenti slučajne varijable X (slučajne varijable s funkcijom gustoće f) dani s očekivanom vrijednošću $\mu_n = \mathbb{E}[X^n]$. Tada vrijedi da je:

$$\mu_n = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathbb{E}[e^{-sX}].$$

U sljedećem primjeru, gdje ćemo prikati odnos veličine dviju različitih nezavisnih varijabli preko vjerojatnosti, gdje je jedna od njih eksponencijalno distribuirana, dajemo intuitivno objašnjenje o nekim svojstvima Laplaceove transformacije.

Primjer 1.0.7. *Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable. Nadalje, neka je Y $Exp(s)$ i funkcija gustoće od X je $f(x)$. Tada vrijedi*

$$f^*(s) = P(X > Y).$$

jer po raspisivanjem vjerojatnosti dobijemo

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \int_0^\infty \int_x^\infty f(x) s e^{-sy} dy dx \\ &= \int_0^\infty f(x) e^{-sy}|_{y=x}^{y=\infty} dx \\ &= f^* t(s). \end{aligned}$$

Termini koji se u matematičkom svijetu nekada znaju isprepletati kao jedno te isto, dok su to ustvari različiti pojmovi su pojmovi varijacije i varijance. Razliku ćemo prikazati pomoću primjera, nakon definiranih pojmova.

Definicija 1.0.8. ***Varijanca*** *je udaljenost između srednje vrijednosti skupa podataka i bilo kojeg elementa tog skupa.* ***Varijacija*** *je razlika između očekivane vrijednosti i dobivene vrijednosti.*

Primjer 1.0.9. *Promatrajmo skup vrijednosti*
{10, 10.5 , 10.23 , 10.21 , 11.23, 11, 10.11}
Srednja vrijednost je 10.46, a varijanca 0.222, što znači da je zbroj odstupanja svake vrijednosti u ovom skupu od srednje vrijednosti 0.22.

Promatrajmo sada za varijaciju. Želimo proizvesti neki proizvod (dosljedno sa primjerom za varijancu)čija je veličina 10 (nekih mjernih jedinica, ali tijekom proizvodnje može se porizvesti nešto manji ili nešto veći proizvod. Takvo odstupanjem nazivamo varijacijom.

1.1 Neki pojmovi teorije slučajnih procesa

U ovom poglavlju ćemo definirati najvažnije pojmove i svojstva na kojem se diplomski rad bazira.

Definicija 1.1.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor, te neka je za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ X_n slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F})$. Familija $X = (X_n : n \geq 0)$ naziva se slučajni proces.*

Definicija 1.1.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ prostor elementarnih događaja.*

1. *Familija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ σ-podalgebri od $\mathcal{F}$ takvih da je $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ za svaki $n \geq 0$ zove se filtracija.*

2. *Kažemo da je slučajni proces* $X = (X_n : n \geq 0)$ *adaptiran s obzirom na filtraciju* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ *ako je za svaki* $n \geq 0$ *slučajna varijabla* X_n $\mathcal{F}_n$*−izmjeriva.*

Sada dolazimo do definicije martingala.

Definicija 1.1.3. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor,* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ *filtracija,* $X = (X_n : n \geq 0)$ *slučajni proces. Pretpostavimo da je X adaptiran s obzirom na* $\mathcal{F}$*, te da je* $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ *za sve* $n \geq 0$*. Tada se X naziva martingal (točnije* $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$*-martingal), ako vrijedi:*

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \text{ g.s., za sve } n \geq 0.$$

Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ za koji vrijedi da je $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$ za sve $n \geq 0$ se zove kvadratno integrabilni slučajni proces.

Poglavlje 2

Subordinatori

2.1 Lévy procesi

Definicija 2.1.1. *Kažemo da je proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ koji je definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Lévyjev proces ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. *Putevi od X su neprekidni zdesna s lijevim limesom P-gotovo sigurno.*
2. $P(X_0 = 0) = 1$.
3. *Za $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ ima jednaku distribuciju kao X_{t-s}.*
4. *Za $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ je nezavisan od $\{X_u, u \leq s\}$.*

Iz same definicije je teško zaključiti koliko je bogata klasa Lévyjevih procesa. Nakon uvođenja pojma beskonačno djeljive distribucije, pokazuje se da navedeni pojam ima blisku povezanost sa Lévyjevim procesima, te će upravo ta povezanost dati dobar dojam koliko je raznolika klasa Lévyjevih procesa.

Teorem 2.1.2. ***(Lévy-Hinčinova formula)***
Vjerojatnosna mjera μ realne slučajne varijable je beskonačno djeljiva s karakterističnim funkcionalom Ψ, tj. vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} \mu(dx) = e^{-\Psi(\theta)} \text{ za } \theta \in \mathbb{R},$$

ako i samo ako postoji trojka (a, σ, Π), gdje je $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ i Π mjera koncentrirana na $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ koja zadovoljava $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \Pi(dx) < \infty$, tako da vrijedi

$$\Psi(\theta) = ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta \mathbf{1}_{(|x|<1))}) \Pi(dx),$$

za svaki $\theta \in \mathbb{R}$.

Definicija 2.1.3. *Mjeru* Π *nazivamo Lévyjeva (karakteristična) mjera beskonačno djeljive razdiobe* μ.

Iz definicije Lévyjevog procesa se može vidjeti da je za sve $t \geq 0$, X_t slučajna varijabla koja pripada klasi beskonačno djeljivih distribucija. To slijedi iz činjenice da za sve $n \geq 1$ vrijedi:

$$X_t = X_{\frac{t}{n}} + (X_{\frac{2t}{n}} - X_{\frac{t}{n}}) + \ldots + (X_t - X_{\frac{(n-1)t}{n}}). \tag{2.1}$$

Koristimo se činjenicom da X_t ima stacionarne nezavisne priraste. Pretpostavimo da definiramo za sve $\theta \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$:

$$\Psi_t(\theta) = -\log \mathbb{E}(e^{i\theta X_t}).$$

Koristeći (2.1) dvaput, imamo da za svaka dva pozitivna broja m, n tada vrijedi

$$m\Psi_1(\theta) = \Psi_m(\theta) = n\Psi_{m/n}(\theta),$$

pa zbog toga za sve $t > 0$ vrijedi

$$\Psi_t(\theta) = t\Psi(\theta).$$

Ovo nas dovodi do zaključka da svaki Lévyjev proces ima svojstvo da za sve $t \geq 0$ vrijedi:

$$\mathbb{E}(e^{i\theta X_t}) = e^{-t\Psi(\theta)},$$

pritom funkciju $\Psi(\theta) := \Psi_1(\theta)$ zovemo karakteristični funkcional slučajne varijable X_1, koja ima beskonačno djeljivu distribuciju.

Definicija 2.1.4. *U nastavku ćemo se pozivati na* $\Psi(\theta)$ *kao karakteristični funkcional Lévyjevog procesa.*

Pokazano je da svaki Lévyjev proces može biti pridružen beskonačno djeljivoj distribuciji. Nejasno je, ako imamo zadanu beskonačno djeljivu distribuciju, da li možemo iz nje konstruirati Lévyjev proces X, takav da X_1 ima tu distribuciju. Odgovor na to daje sljedeći teorem:

Teorem 2.1.5. ***(Lévy-Hinčinova formula za Lévyjeve procese)***
Pretpostavimo da su $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ *i* Π *mjera koncentrirana na* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *koja zadovoljava* $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty$. *Iz ove trojke definiramo za svaki* $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\Psi(\theta) = ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}}(1 - e^{i\theta x} + i\theta \mathbf{1}_{(|x|<1))}\Pi(dx).$$

Tada postoji vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *na kojem je definiran Lévyjev proces sa karakterističnim funkcionalom* Ψ.

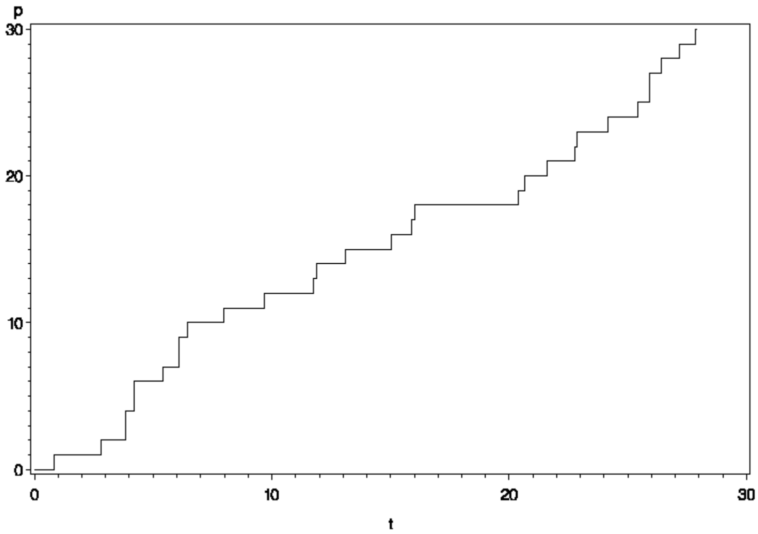
Primjer 2.1.6. *Osnovni Lévyjevi procesi su Brownovo gibanje i Poissonov proces.*

2.2 Poissonova točkovna mjera

Definicija 2.2.1. *Složeni Poissonov proces je proces* $(Z(t) : t \geq 0)$ *definiran relacijom:*

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \epsilon_i, t \geq 0,$$

gdje je $(N(t) : t \geq 0)$ *Poissonov proces,* $\{\epsilon_i, i \geq 1\}$ *familija nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa distribucijom F nezavisna od Poissonovog procesa N.*



Neka je $(X(t) : t \geq 0)$ složeni Poissonov proces sa pomakom oblika

$$X(t) = dt + \sum_{i=1}^{N(t)} \epsilon_i, t \geq 0,$$

gdje je $d \in \mathbb{R}$. Neka su $\{T_i : i \geq 0\}$ vremena dolaska Poissonovog procesa $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ sa koeficijentom $\lambda > 0$.

Za $A \in \mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}(\mathcal{R} \backslash \{0\})$, definiramo tzv. Poissonovu slučajnu mjeru skupa A

$$N(A) = \#\{i \geq 0 : (T_i, \epsilon_i) \in A\} = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{((T_i, \epsilon_i) \in A)}.$$

Jako važan element u razumijevanju strukture puteva Lévyjevih procesa je Poissonova slučajna mjera. U nastavku definiramo Poissonovu slučajnu mjeru, te prikazujemo neka svojstva navedene Poissonove slučajne mjere jer će se u daljnem tekstu pokazati da je upravo ta mjera jako važna u prikazu općenitih Lévyjevih procesa, pa i specijalno subordinatora.

Definicija 2.2.2. ***(Poissonova slučajna mjera)*** *Odsada ćemo smatrati da je* $(S, \mathcal{S}, \eta)$ *proizvoljan izmjeriv prostor sa* $\sigma-$ *konačnom mjerom. Neka je preslikavanje* $N : \mathcal{S} \to \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$ *takvo da je familija* $\{N(A) : A \in \mathcal{S}\}$ *slučajnih varijabli definirana na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*. Tada N nazivamo Poissonova slučajna mjera na* $(S, \mathcal{S}, \eta)$ *ako vrijedi*

(i) *za međusobno disjunktne* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$*, varijable* $N(A_1), \ldots, N(A_n)$ *su nezavisne,*

(ii) *za svaki* $A \in \mathcal{S}$*,* $N(A)$ *ima Poissonovu distribuciju s parametrom* $\eta(A)$ *(dozvoljeno je* $0 \leq \eta(A) \leq \infty$*),*

(iii) *N je mjera* $\mathbb{P}$*-gotovo sigurno.*

Teorem 2.2.3. *Postoji Poissonova slučajna mjera N kao u definiciji* 2.2.2.

Iz konstrukcije Poissonove slučajne mjere, vrijedi sljedeći korolar koji će nam biti važan u daljnem tekstu.

Korolar 2.2.4. *Neka je N Poissonova slučajna mjera na* $(S, \mathcal{S}, \eta)$*. Tada je za svaki* $A \in \mathcal{S}$*,* $N(\cdot \cap A)$ *Poissonova slučajna mjera na* $(S \cap A, \mathcal{S} \cap A, \eta(\cdot \cap A))$*. Nadalje, ako su* $A, B \in \mathcal{S}$ *i* $A \cap B = \emptyset$*, tada su* $N(\cdot \cap A)$ *i* $N(\cdot \cap B)$ *nezavisne.*

U sljedećem teoremu donosimo važna svojstva vezana uz Poissonovu slučajnu mjeru.

Teorem 2.2.5. *Neka je N Poissonova slučajna mjera na* $(S, \mathcal{S}, \eta)$*. Neka je* $f : S \to \mathbb{R}$ *izmjeriva funkcija.*

(i) *Tada je*

$$X = \int f(x)N(dx)$$

gotovo sigurno apsolutno konvergentna ako i samo ako

$$\int_S (1 \wedge |f(x)|)\eta(dx) < \infty \tag{2.2}$$

(ii) *Kada vrijedi* (2.2)*, tada (*$\mathbb{E}$ *je očekivanje s obzirom na* $\mathbb{P}$*)*

$$\mathbb{E}\left(e^{i\beta X}\right) = \exp\{-\int_S (1 - e^{i\beta f(x)})\eta(dx)\} \tag{2.3}$$

za sve $\beta \in \mathbb{R}$*.*

(iii) Nadalje, vrijedi

$$\mathbb{E}(X) = \int_S f(x)\eta(dx) \text{ kada } \int_S |f(x)|\eta(dx) < \infty \tag{2.4}$$

i

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_S f(x)^2\eta(dx) + \left(\int_S f(x)\eta(dx)\right)^2, \text{ kada } \int_S f(x)^2\eta(dx) < \infty. \tag{2.5}$$

Za dokaz vidi Kyprianou [1], str. 42.

Sada ćemo prikazati složeni Poissonov proces pomoću Poissonove slučajne mjere.

Lema 2.2.6. *Neka je N Poissonova slučajna mjera na* $([0,\infty)\times\mathbb{R}, \mathcal{B}([0,\infty))\times\mathcal{B}(\mathcal{R}), dt\times \Pi(dx))$ *gdje je* Π *mjera koncentrirana na* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *i* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *takva da je* $0 < \Pi(B) < \infty$. *Tada je*

$$X_t = \int_{[0,t]}\int_B xN(ds\times dx), t \geq 0 \tag{2.6}$$

složeni Poissonov proces sa ulaznim intezitetom $\Pi(B)$ *i distribucijom skokova* $\Pi(B)^{-1}\Pi(dx)|_B$.

2.3 Lévy-Itôva dekompozicija

S obzirom na Lévy-Hinčinovu formulu, svaki karakteristični funkcional Ψ koji pripada beskonačno djeljivoj distribuciji može biti zapisan u obliku:

$$\begin{aligned}\Psi(\theta) &= \{ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\} \\ &+ \{\Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1))\int_{|x|\geq 1}(1-e^{i\theta x})\frac{\Pi(dx)}{\Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1))}\} \\ &+ \{\int_{0<|x|<1}(1-e^{i\theta x}+i\theta x)\Pi(dx)\}\end{aligned} \tag{2.7}$$

za sve $\theta \in \mathbb{R}$, gdje su $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ i Π mjera koncentrirana na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ koja zadovoljava $\int_{\mathbb{R}}(1\wedge x^2)\Pi(dx) < \infty$. Označimo po redu zagrade na desnoj strani izraza (2.7) sa Ψ^1, Ψ^2 i Ψ^3. Bit Lévy-Itôve dekompozicije je pokazati da su ova tri karakteristična funkcionala ustvari karakteristični funkcionali tri različita tipa Lévyjevih procesa.

Teorem 2.3.1. ***(Lévy-Itôva dekompozicija)*** *Neka su zadani* $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ *i* Π *mjera koncentrirana na* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *koja zadovoljava* $\int_{\mathbb{R}}(1\wedge x^2)\Pi(dx) < \infty$, *tada postoji vjerojatnosni prostor na kojem postoje tri nezavisna Lévyjeva procesa,* $X^{(1)}, X^{(2)}$ *i* $X^{(3)}$ *gdje je* $X^{(1)}$ *linearno*

Brownovo gibanje s pomakom oblika ($X_t^{(1)} = \sigma B_t - at, t \geq 0$) *s karakterističnim funkcionalom* Ψ^1, $X^{(2)}$ *je složeni Poissonov proces oblika* ($X_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{N(t)} \epsilon_i, t \geq 0$) *s karakterističnim funkcionalom* Ψ^2 *i* $X^{(3)}$ *je kvadratno integrabilni martingal s gotovo sigurno prebrojivim brojem skokova na svakom konačnom vremenskom intervalu s karakterističnim funkcionalom koji je zadan sa* Ψ^3. *Ako stavimo da je* $X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$, *vidimo da zaključak Lévy-Hinčinove formule za Lévyjeve procese vrijedi, te da postoji vjerojatnosni prostor na kojem je definiran Lévyjev proces s karakterističnim funkcionalom:*

$$\Psi(\theta) = ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta \boldsymbol{1}_{(|x|<1)})\Pi(dx)$$

za sve $\theta \in \mathbb{R}$.

Da bismo dokazali teorem, trebamo ranije prikazati rezultate koji su vrlo važni u dokazu teorema.

Lema 2.3.2. *Pretpostavimo da su* N *i* B *kao i u lemi* 2.2.6 *s dodatnom pretpostavkom da je* $\int_B |x|\Pi(dx) < \infty$.

(i) Složeni Poissonov proces s pomakom,

$$M_t := \int_{[0,t]} \int_B xN(ds \times dx) - t \int_B x\Pi(dx), t \geq 0,$$

je $\mathbb{P}-$*martingal s obzirom na filtraciju*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(N(A) : A \in \mathcal{B}[0,t] \times \mathcal{B}(\mathbb{R})), t > 0. \tag{2.8}$$

(ii) Nadalje ako vrijedi $\int_B x^2\Pi(dx) < \infty$, *tada je navedeni složeni Poissonov proces kvadratno integrabilni martingal.*

Za dokaz gornjeg teorema vidjeti u Kyprianou [1], str. 46.

Sljedeći teorem dokazujemo jer će nam on biti jako važan u opisivanju i prikazivanju procesa $X^{(3)}$ iz Lévy-Itôve dekompozicije.

Teorem 2.3.3. *Pretpostavimo da je* N *definiran kao iz leme 2.2.6 i da vrijedi* $\int_{(-1,1)} x^2\Pi(dx) < \infty$. *Za svaki* $\epsilon \in (0,1)$ *definiramo martingal*

$$M_t^\epsilon = \int_{[0,t]} \int_{B_\epsilon} xN(ds \times dx) - t \int_{B_\epsilon} x\Pi(dx), t \geq 0 \quad \text{gdje je } B_\epsilon := (-1,-\epsilon) \cup (\epsilon, 1)$$

i neka je $\mathcal{F}_t^*$ *jednaka upotpunjenju skupova* $\cap_{s>t}\mathcal{F}_\int$ *sa skupovima vjerojatnosti* $\mathbb{P}$ *nula, gdje je* $\mathcal{F}_t$ *zadana kao* (2.8). *Tada postoji martingal* $M = \{M_t : T \geq 0\}$ *sa sljedećim svojstvima,* *(i)* *za sve* $T > 0$, *postoji deterministički podskup* $\{\epsilon_n^T : n = 1, 2, \ldots\}$ *tako da kada* $\epsilon_n^T \downarrow 0$, *vrijedi*

$$\mathbb{P}(\lim_{n\uparrow\infty} \sup_{0\le s\le T} (M_s^{\epsilon_n^T} - M_s)^2 = 0) = 1,$$

(ii) *M je adaptiran na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t * : t \geq 0\}$,

(iii) *M ima desno neprekidne puteve s lijevim limesom gotovo sigurno,*

(iv) *M ima najviše prebrojiv broj prekida na* $[0, T]$ *gotovo sigurno i*

(v) *M ima stacionarne i nezavisne priraste.*

Ukratko, postoji Lévyjev proces, koji je također martingal s prebrojivim brojem skokova za koje, za svaki fiksni $T > 0$, *niz martingala* $\{M_t^\epsilon : t \leq T\}$ *konvergira uniformno na* $[0, T]$ *sa vjerojatnošću 1 duž podniza u* ϵ *koji može ovisiti o* T.

Za dokaz vidjeti Kyprianou [1], str.47.

Sada možemo dokazati Lévy-Itô dekompoziciju.

Dokaz. Neka je $X^{(1)}$ linearno Brownovo gibanje $X^{(1)} = (X_t^{(1)} = \sigma B_t - at, t \geq 0)$ definirano na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega^\#, \mathcal{F}^\#, \mathbb{P}^\#)$.

Za dani Π iz teorema 2.3.1, znamo po teoremu 2.2.3 da postoji vjerojatnosni prostor $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbb{P}^*)$ na kojem možemo konstruirati Poissonovu slučajnu mjeru N na $([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathcal{B}([0, \infty)) \times \mathcal{B}(\mathcal{R}), dt \times \Pi(dx))$. Sada definiramo

$$X_t^{(2)} = \int_{[0,t]} \int_{|x|\geq 1} xN(ds \times dx), t \geq 0$$

te vidimo iz (2.2.6) da vrijedi da ako je $\Pi(\mathbb{R}\ (-1, 1)) < \infty$ da je $X_t^{(2)}$ složeni Poissonov proces s mjerom $\Pi(\mathbb{R}\backslash(-1, 1))$ i distribucijom skokova $\Pi(\mathbb{R}\backslash(-1, 1))^{-1}\Pi(dx)|_{\mathbb{R}\ (-1,1)}$. (Možemo pretpostaviti da je $\Pi(\mathbb{R}\backslash(-1, 1)) > 0$, jer inače bismo uzeli da je proces $X^{(2)}$ identičan 0.)

Sljedeće konstruiramo Lévyjev proces koji ima samo male skokove. Za sve $1 > \epsilon > 0$ definiramo sličan složeni Poissonov proces s pomakom

$$X_t^{(3,\epsilon)} = \int_{[0,t]} \int_{\epsilon\leq|x|\leq 1} xN(ds \times dx) - t \int_{\epsilon\leq|x|\leq 1} x\Pi(dx), t \geq 0. \tag{2.9}$$

Slično kao i za slučaj $X^{(2)}$, možemo pretpostaviti da je $\Pi(\{x : |x| < 1\}) > 0$, inače bismo mogli staviti da je proces $X^{(3)}$ identičan nuli. Koristeći teorem 2.2.5 (ii) možemo izračunati njegov karakteristični funkcional,

$$\Psi^{(3,\epsilon)}(\theta) = \int_{\epsilon\leq|x|\leq 1} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x)\Pi(dx).$$

S obzirom na teorem 2.3.3 postoji Lévyjev proces, koji je također kvadratno integrabilni martingal, definiran na $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbb{P}^*)$, gdje $X^{(3,\epsilon)}$ kovergira uniformno na $[0, T]$ duž odgovarajućeg determinističkog podskupa u ϵ. Primijetimo da koristimo pretpostavku da je $\int_{(-1,1)} x^2\Pi(dx) < \infty$. Vrijedi da je karakteristični funkcional navedenog Lévyjevog procesa jednak

$$\Psi^3(\theta) = \int_{|x|<1} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x)\Pi(dx).$$

Iz korolara 2.2.4 znamo da za sve $t > 0$, N ima nezavisne zbrojeve nad domenama $[0, t] \times \{\mathbb{R}\backslash(-1, 1)\}$ i $[0, t] \times (-1, 1)$. Tada vrijedi da su $X^{(2)}$ i $X^{(3)}$ nezavisni na $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbb{P}^*)$. Nadalje, navedena dva procesa su nezavisna s obzirom na $X^{(1)}$ koji je definiran na drugom vjerojatnosnom prostoru. Da zaključimo dokaz, definiramo proces

$$X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)}, t \geq 0.$$

Ovaj proces je definiran na produktnom vjerojatnosnom prostoru

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\Omega^\#, \mathcal{F}^\#, \mathbb{P}^\#) \times (\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbb{P}^*),$$

i vrijedi da ima stacionarne nezavisne priraste, puteve koji su neprekidni zdesna i imaju lijevi limes i sa karakterističnim funkcionalom

$$\begin{aligned}\Psi(\theta) &= \Psi^{(1)}(\theta) + \Psi^{(2)}(\theta) + \Psi^{(3)}(\theta)\\ &= ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}}(1 - e^{i\theta x} + i\theta x\mathbf{1}_{(|x|<1))}\Pi(dx)\end{aligned}$$

kao što se i zahtijevalo.

□

Kao što je navedeno, cilj Lévy-Itôve dekompozicije je pokazati da se Lévjev proces može prikazati kao tri nezavisna Lévyjeva procesa s različitim strukturama puteva. Ono što se pokazalo u dokazu je činjenica da se veliki dio Lévyjevih procesa može prikazati pomoću Poissonove slučajne mjere, tj. pomoću složenog Poissonovog procesa s linearnim pomakom. Pomoću takvog prikaza ne možemo prikazati sve Lévyjeve procese, jer složeni Poissonov proces ima puteve ograničene varijacije, dok $X^{(1)}$ ima puteve neograničene varijacije. U nastavku ćemo se zadržati na Lévyjevim procesima sa konačnom varijacijom.

S obzirom na definiciju od $X^{(3)}$ prirodno je pitati se pod kojim uvjetima

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{[0,t]} \int_{\epsilon\leq|x|\leq 1} xN(ds \times dx)$$

postoji gotovo sigurno bez potrebe za dodatne uvjete na limes. Odgovor je dan sa teoremom 2.2.5 (i). Vrijedi da je

$$\int_{[0,t]} \int_{0\leq|x|\leq 1} xN(ds \times dx) < \infty$$

ako i samo ako $\int_{0\leq|x|\leq 1}|x|\Pi(dx) < \infty$. U tom slučaju možemo prikazati $X^{(3)}$ direktno kao

$$X_t^{(3)} = \int_{[0,t]}\int_{0\leq|x|\leq 1} xN(ds\times dx) - t\int_{0\leq|x|\leq 1} x\Pi(dx), \quad t \geq 0.$$

Kako vrijedi da je prvi član procesa $X_t^{(3)}$ konačan ako i samo ako vrijedi $\int_{0<|x|<1}|x|\Pi(dx) < \infty$, i kako po svojstvima integriranja vrijedi da je drugi član $X_t^{(3)}$ konačan ako i samo ako vrijedi $\int_{0<|x|<1}|x|\Pi(dx) < \infty$, sve zajedno daje da će $X^{(3)}$ biti konačne varijacije ako i samo $\int_{0<|x|<1}|x|\Pi(dx) < \infty$. Navedena tvrdnja kombinirana s glavnim integralnim uvjetom $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty$ Lévy-Itô dekompozicije dovodi do sljedeće leme.

Lema 2.3.4. *Lévyjev proces sa Lévy-Hinčinovim funkcionalom koji odgovara trojci* (a, σ, Π) *ima puteve konačne varijacije ako i samo ako vrijedi:*

$$\sigma = 0 \ i \ \int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty \tag{2.10}$$

Zbog konačnosti integrala u (2.10), karakteristični funkcional svakog procesa konačne varijacije može biti zapisan kao:

$$\Psi(\theta) = -id\theta + \int_{\mathbb{R}}(1 - e^{i\theta x})\Pi(dx) \tag{2.11}$$

gdje je konstanta $d \in \mathbb{R}$ izražena preko konstante a i mjere Π kao

$$d = \left(a + \int_{|x|<1} x\Pi(dx)\right). \tag{2.12}$$

Konstantu d najčešće nazivamo pomakom.

Sada možemo zapisati ovakav Lévy proces kao:

$$X_t = dt + \int_{[0,t]}\int_{\mathbb{R}} xN(ds\times dx), t \geq 0. \tag{2.13}$$

Lema 2.3.5. *Lévyjev proces je složeni Poissonov proces s pomakom ako i samo je* $\sigma = 0$ *i* $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$.

2.4 Uvod u subordinatore

Promatrajmo Lévyjev proces za kojeg vrijedi da je $\Pi(-\infty, 0) = 0$. Prema dokazu Lévy-Itove dekompozicije vrijedi da promatrani Lévyjev proces nema negativne skokove. Pretpostavimo da vrijedi $\int_{(0,\infty)}(1 \wedge x)\Pi(dx) < \infty, \quad \sigma = 0$ te da u prikazu karakterističnog funkcionala (2.12) vrijedi da je $d \geq 0$, tada iz prikaza (2.13) se može vidjeti da promatrani Lévyjev proces ima neopadajuće priraste te po spomenutoj lemi da putevi imaju konačnu varijaciju. Ovaj specijalan primjer Lévyjevog procesa nazivamo **subordinator**.

Sljedećom lemom sažimamo napisano, te time uspostavljamo vezu između Lévyjevih procesa i subordinatora.

Lema 2.4.1. *Lévyjev proces je subordinator ako i samo vrijedi* $\Pi(-\infty, 0) = 0, \quad \sigma = 0$, $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty$ *i* $d = \left(a + \int_{|x|<1|} x\Pi(dx)\right) \geq 0$.

Definicija 2.4.2. *Karakteristični funkcional Lévyjevog procesa koji je subordinator nazivamo Laplaceovim funkcionalom.*

U uobičajenoj notaciji, subordinator se označava kao $\sigma = (\sigma_t, t \geq 0)$.

Sljedeći teorem koji daje nužne i dovoljne uvjete da funkcija bude Laplaceov funkcional subordinatora je spoj Lévy-Hinčinove formule i Lévy-Hinčinove formule za Lévyjeve procese sa nekim preinakama.

Teorem 2.4.3. ***(de Finetti, Lévy, Hinčin)***
(i) *Ako je* Ψ *Laplaceov funkcional subordinatora, tada postoji jedinstveni par* (k, d) *nenegativnih realnih brojeva i jedinstvena mjera* Π *na* $(-\infty, 0)$ *koja zadovoljava* $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty$*, tako da za svaki* $\lambda \geq 0$ *vrijedi:*

$$\Psi(\lambda) = k + d\lambda + \int_{(0,\infty)} \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \Pi(dx). \tag{2.14}$$

(ii) *Obratno, svaka funkcija* Ψ *koja se može zapisati u obliku* (2.14) *je Laplaceov funkcional nekog subordinatora.*

Konstantu k nekad nazivamo stopa ubijanja (eng. killing rate).

Iz Lévy-Itôve dekompozicije i leme 2.3.5 vrijedi sljedeći rezultat:

Teorem 2.4.4. ***(Teorem o reprezentaciji subordinatora)***
Svaki subordinator $(\sigma = \sigma_t : t \geq 0)$ *je oblika* $\sigma_t = Ct + X_t$ *gdje je* X_t *definiran kao* (2.6).

2.5 Mjera obnavljanja

S obzirom da je subordinator tranzijentni Markovljev proces, karakterizira ga potencijalna mjera $U(dx)$ koju kod subordinatora nazivamo mjerom obnavljanja, te je definirana kao:

$$\int_{[0,\infty\rangle} f(x)U(dx) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty f(\sigma_t)dt\right).$$

Funkcija distribucije mjere obnavljanja je zadana kao

$$U(x) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty 1_{(\{\sigma_t < x\}} dt\right) \quad x \geq 0.$$

te je nazivamo funkcijom obnavljanja.

Ako uvedemo neprekidni inverz strogo rastućeg procesa σ kao

$$L_x = \sup\{t \geq 0 : \sigma_t \leq x\} = \inf\{t > 0 : \sigma_t > x\}, \quad x \geq 0,$$

tada možemo zapisati funkciju obnavljanja kao

$$U(x) = \mathbb{E}(L_x).$$

Zbog toga što je Laplaceova transformacija mjere obnavljanja dana kao:

$$LU(\lambda) = \int_{[0,\infty\rangle} e^{-\lambda x} U(dx) = \frac{1}{\Psi(\lambda)}, \quad \lambda > 0,$$

vrijedi da mjera obnavljanja karakterizira distribuciju subordinatora.

Kada imamo dvije nenegativne funkcije, koristimo notaciju $f \asymp g$ da označimo da postoje dvije pozitivne konstante c i c', takve da je $cg \leq g \leq c' f$. Označimo tzv. integrirani rep kao

$$I(t) = \int_0^t \overline{\Pi}(x) dx.$$

gdje je $\overline{\Pi}(x) = k + \Pi((x, \infty))$

Propozicija 2.5.1. *Vrijedi*

$$U(x) \asymp \frac{1}{\Psi(x)} \; i \; \frac{\Psi(x)}{x} \asymp I(\frac{1}{x}) + d.$$

Teorem 2.5.2. ***(Teorem obnavljanja)*** *Neka je* $\mathbb{E}(\sigma_1) = \mu \in (0, \infty]$. *Tada za svaki* $h > 0$

$$\lim_{x \to \infty} (U(x+h) - U(x)) = \frac{h}{\mu}.$$

Za dokaz ovih tvrdnji vidjeti Bertoin [2],str 11.
Sljedeća propozicija je analogon teoremu obnavljanja u blizini 0+ kada je koeficijent pomaka pozitivan.

Propozicija 2.5.3. *Pretpostavimo da je* $d > 0$. *Tada je mjera obnavljanja apsolutno neprekidna i ima neprekidnu strogo pozitivnu gustoću* $u : [0, \infty) \to (0, \infty)$ *zadanu sa*

$$u(x) = d^{-1} \mathbb{P}(\exists t \geq 0 : \sigma_t = x).$$

Vrijedi da je $u(0) = 1/d$.

2.6 Slika subordinatora

Slika subordinatora σ je slučajni zatvoren podskup od $[0, \infty\rangle$ definiran kao:

$$\mathcal{R} = \overline{\{\sigma_t : 0 \leq t \leq \zeta\}}$$

gdje je ζ vrijeme eksplozije subordinarota σ, koji se definira kao

$$\zeta = \lim_{n \to \infty} \sigma_n.$$

U slučaju da je $\zeta < \infty$, subordinator napravi beskonačno mnogo skokova u konačnom vremenu.

Vrijedi da je $\mathcal{R}$ savršen (bez izoliranih točaka) i da je $0 \in \mathcal{R}$. Zbog svojstva da su putevi subordinatora neprekidni zdesna sa lijevim limesom, sliku subordinatora možemo zapisati i kao:

$$\mathcal{R} = \{\sigma_t : 0 \leq t \leq \zeta\} \cup \{\sigma_{s-} : s \in \mathcal{J}\}$$

gdje je $\mathcal{J} = \{0 \leq s \leq \zeta : \triangle_s > 0\}$ označava skup vremena skokova od σ. Možemo primjetiti da je $\{\sigma_{s-} : s \in \mathcal{J}\}$ točno skup točaka u $\mathcal{R}$ koje su izolirane zdesna. Alternativno, kanonska dekompozicija otvorenog skupa $\mathcal{R}^c = [0, \infty\rangle - \mathcal{R}$ je

$$\mathcal{R}^c = \bigcup_{s \in \mathcal{J}} (\sigma_{s-}, \sigma_s).$$

Sada ćemo prikazati osnovna svojstva slike koje će biti korisna u nastavku. Prvo, interesantan problem koji se često pojavljuje u vezi slučajnih skupova je procjena njihove veličine. Najjednostavniji primjer na području slike subordinatora odnosi se na njenu Lebesgueovu mjeru.

Propozicija 2.6.1. *(Karakterizacija slike subordinatora) Vrijedi da je*

$$m(\mathcal{R} \cap [0, t]) = m(\{\sigma_s : s \geq 0\} \cap [0, t]) = d\mathrm{L}_t \ \ g.s. \ za \ sve \ t \geq 0,$$

gdje je d koeficijent pomaka, a m Lebesgueova mjera na $[0, \infty\rangle$. Vrijedi da je $\mathcal{R}$ skup Lebesgueove mjere nula g.s. ako i samo ako je $d = 0$ i tada kažemo da je skup $\mathcal{R}$ lagan (eng. light). Inače kažemo da je skup $\mathcal{R}$ težak (eng. heavy).

Propozicija 2.6.2. *Vrijedi sljedeće:*
(i) Ako je koeficijent pomaka $d = 0$, tada je $\mathbb{P}(x \in \mathcal{R}) = 0$ za svaki $x > 0$.
(ii) Ako je $d > 0$, tada je funkcija $u(x) = d^{-1}\mathbb{P}(x \in \mathcal{R})$ verzija vjerojatnosti obnavljanja $\frac{dU(x)}{dx}$ koja je neprekidna i strogo pozitivna na $[0, \infty\rangle$.

Sljedeće što promatramo su lijevi i desni krajevi od $\mathcal{R}$ s gledišta fiksne točke $t \geq 0$:

$$g_t = \sup\{s < t : s \in \mathcal{R}\} \text{ i } D_t = \inf\{s > t : s \in \mathcal{R}\}.$$

Procese $(D_t : t \geq 0)$ nekad nazivamo procesima prvog prolaska, a $(g_t, t \geq 0)$ procesima zadnjeg prolaska. Ove procese možemo prikazati u terminima od σ i njegovog inverza L kao

$$g_t = \sigma(L_t-) \;\; i \; D_t = \sigma(L_t) \;\; \text{za sve } t \geq 0, \text{g.s.}$$

Poglavlje 3

Svojstva subordinatora

Cilj ovog poglavlja je naglasiti povezanost između regenerativnog skupa i slike subordinatora.

3.1 Regenerativno svojstvo

U prethodnom poglavlju subordinator smo definirali kao specijalan slučaj Lévyjevog procesa na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathbb{P})$ s potpunom i neprekidnom zdesna filtracijom $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$, tj. da je subordinator rastući $(\mathcal{F}_t)$ izmjeriv proces s nezavisnim i homogenim prirastima.

Nezavisnost i homogenost prirasta implicira Markovljevo svojstvo, tj. vrijedi da je za svaki $t \geq 0$ uvjetno na $\{t < \zeta\}$, proces $\sigma' = (\sigma'_s = \sigma_{s+t} - \sigma_t, s \geq 0)$ nezavisan s obzirom na $(\mathcal{F}_t)$ i ima istu distribuciju kao i σ.

Prisjetimo se da je

$$\mathcal{R} = \overline{\{\sigma_t : 0 \leq t \leq \zeta\}}.$$

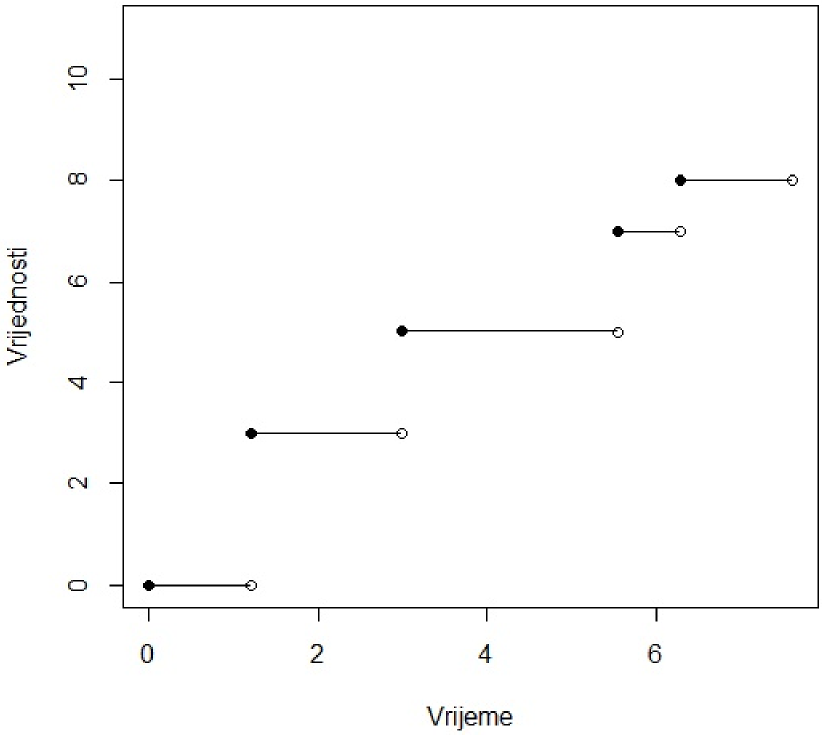
Markovljevo svojstvo subordinatora ima značajnu važnost na njegovu sliku. Vrijedi da je za svaki $s \geq 0$, $L_s = \inf\{t \geq 0 : \sigma_t > s\}$ $(\mathcal{F}_t)$-vrijeme zaustavljanja. Označimo sa $\mathcal{M}$ posebnu filtraciju $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_s = \mathcal{F}_{L_s})_{s \geq 0}$. Pri tom filtraciju $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_s)_{s \geq 0}$ možemo prikazati kao:

$$\mathcal{M}_s = \mathcal{F}_{L_s} = \{A : A \in \mathcal{F}_t \text{ za } t \leq L_s\}$$

Kako je L neprekidan $(\mathcal{M}_s)$-izmjeriv proces koji raste upravo na skupu $\mathcal{R}$, vrijedi da je L $(\mathcal{M}_s)$-rastući proces. Fiksirajmo $s \geq 0$. Primjenom Markovljevog svojstva na L_s vrijedi da na događaju $\{L_s < \infty\}$, pomaknuti subordinator $\sigma' = (\sigma_{L_{s+t}} - \sigma_{L_s}, t \geq 0)$ s obzirom na $\mathcal{M}_s$ ima istu distribuciju kao i σ. Prisjetimo se da je:

$$\sigma(L_s) = D_s = \inf\{t > s : t \in \mathcal{R}\}$$

vrijeme prvog ulaska u $\mathcal{R}$ nakon s.



Vidimo da je na događaju $\{D_s < \infty\}$, pomaknuta slika subordinatora

$$\mathcal{R} \circ \theta_{D_s} = \{v \geq 0 : v + D_s \in \mathcal{R}\} = \overline{\{\sigma'_t : t \geq 0\}}$$

nezavisna s obzirom na $\mathcal{M}_s$ i jednako distribuiran kao $\mathcal{R}$. Ovo se označava kao regenerativno svojstvo slike.

Regenerativno svojstvo slike subordinatora motivira definiciju općenitog regenerativnog skupa.

Definicija 3.1.1. ***(Regenerativni skup)***
Neka je zadan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathbb{P})$ *s potpunom filtracijom* $(\mathcal{M}_t)_{t\geq 0}$. *Neka je* S *progresivno izmjerivi zatvoren podskup od* $[0, \infty\rangle$ *koji sadržava 0 i nema izoliranih točaka. Kažemo da je* S *savršeno regenerirajući skup ako za sve* $s \geq 0$, *uvjetno na* $D_s = \inf\{t > s : t \in S\} < \infty$, *desni dio skupa* $S \circ \theta_{D_s}$ *od* S *gledano iz točke* D_s, *je nezavisan od* $\mathcal{M}_{D_s}$ *i ima istu distribuciju kao i* S.

Vrijedi da je slika subordinatora regenerativni skup.

Definicija 3.1.2. *Inverz L subordinatora σ se naziva* ***lokalno vrijeme*** *na* R

Pozivajući se na propoziciju 2.6.1, sliku smo okarakterizirali pomoću koeficijenta pomaka na laganu ($d = 0$), i na tešku (inače). U slučaju kada je slika teška, lokalno vrijeme možemo prikazati kao

$$L_t = d^{-1} m\left([0,t] \cap \mathcal{R}\right), \quad t \geq 0.$$

gdje je m oznaka za Lebesgueovu mjeru.
U slučaju lagane slike, lokalno vrijeme se prikazuje pomoću determinističke mjere m_H (Haussdorfova mjera) kao

$$L_t = m_H\left([0,t] \cap \mathcal{R}\right), \quad t \geq 0.$$

Uvodimo još **dodatno svojstvo** lokalnog vremena. Ako je S $(\mathcal{M}_s)$-vrijeme zaustavljanja čije vrijednosti u $\mathcal{R}$-u nisu izolirane zdesna, tada na $\{S < \infty\}$, lokalno vrijeme $R' = R \circ \theta_S$ je dano kao:

$$L'_t = L_{S+t} - L_S \text{ za sve } t \geq 0 \text{ g.s.}$$

Teorem 3.1.3. ***(Hoffman-Jørgensen)***
Neka je $\mathcal{S}$ regenerativni skup.

(i) Postoji subordinator σ takav da je $\mathcal{S} = \mathcal{R} = \overline{\{\sigma_t : 0 \leq t \leq \zeta\}}$ g.s., i inverz L od σ je $(\mathcal{M}_t)$-adaptiran proces.

(ii) Ako je $\tilde{\sigma}$ drugi subordinator sa slikom $\mathcal{S}$, tada postoji realan broj $c > 0$ takav da je $\tilde{\sigma} = \sigma_{ct}$ za sve $t \geq 0$, g.s.

3.2 Asimptotsko ponašanje vremena puteva subordinatora

Cilj ovog potpoglavlja je prikazati asimptotsko ponašanje puteva subordinatora. Da bismo to na što lakši način prikazali, najprije pokazujemo asimptotsko ponašanje složenog Poissonovog procesa.

Neka je $N = \{N_t : t \geq 0\}$ obnavljajući proces i neka su $\{T_i : i \geq 0\}$ trenuci obnavljanja počevši sa $T_0 = 0$. Tada se ostatak vremena od N u vremenu $x > 0$ definira kao $T_{N_x+1} - x$ i trenutno vrijeme života od N sa $x - T_{N_x}$. Prisjetimo se da je vrijeme zaustavljanja (vrijeme prvog prolaska) definirano kao

$$\tau_x^+ = \inf\{t > 0 : X_t > x\}.$$

Tada prebačaj (eng. overshoot) i podbačaj (eng. undershoot) prvog prolaska na razini x je dano sa $X_{\tau_x^+} - x$ i $x - X_{\tau_x^+-}$. Ostatak vremena života i trenutno vrijeme života te prebačaj i podbačaj su povezani na sljedeći način

$$X_{\tau_x^+} - x = T_{N_x+1} - x \quad \text{i} \quad x - X_{\tau_x^+} = x - T_{N_x}. \tag{3.1}$$

Lema 3.2.1. *Neka je N proces obnavljanja sa distribucijom pomaka F. Tada vrijedi sljedeće:*

(i) Za $u > 0$ i za $y \in (0, x]$ vrijedi da je

$$\mathbb{P}(T_{N_x+1} - x \in du, x - T_{N_x} \in dy) = V(x - dy)F(du + y)$$

gdje je V mjera obnavljanja konstruirana iz F.

(ii) Pretpostavimo da razdioba F ima očekivanje $\mu < \infty$ i da nije rešetkasta (eng. non-lattice), tada za $u > 0$ i $y > 0$,

$$\lim_{x \downarrow \infty}(T_{N_x+1} - x > u, x - T_{N_x} > y) = \frac{1}{\mu}\int_{u+y}^{\infty} \overline{F}(z)dz,$$

gdje je $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$.

Za dokaz vidjeti Kyprianou [1], str.116.

Napomena 3.2.2. *Za distribuciju F slučajne varijable kažemo da je rešetkasta ako se svaka moguća vrijednost može prikazati u obliku $a + bn$, gdje su $a, b \neq 0$ i n je cijeli broj, tj. ako X F, tada $\mathbb{P}(X \in a + b\mathbb{Z}) = 1$ za neke $a, b \neq 0$.*

U svjetlu (3.1) vidimo da lema 3.2.1 daje egzaktnu i asimptotsku distribuciju prebačaja i podbačaja na prvom prolasku složenog Poissonovog procesa s distribucijom skokova F (s konačnim očekivanjem i ne-rešetkaste pozadine u slučaju asimptotskog ponašanja). Nakon što smo prikazali rezultate za složeni Poissonov proces, prelazimo na cilj ovog poglavlja; proučiti egzaktnu i asimptotsku distribuciju prebačaja i podbačaja subordinatora u vremenu prvog prolaska. Premda smo u već ranijim poglavljima opisali da se subordinator može prikazati i pomoću zbroja linearne funkcije i složenog Poissonovog procesa, vrijedi da postoji razlika slike subordinatora uspoređujući sa slikom složenog Poissonovog procesa koja stvara dodatni problem u opisivanju egzaktne i asimptotske distribucije. Sljedeći teorem je poopćenje leme 3.2.1 (i) za subordinatore.

Teorem 3.2.3. *Pretpostavimo da je X subordinator. Tada za $u > 0$ i za $y \in [0, x]$,*

$$\mathbb{P}(X_{\tau_x^+} - x \in du, x - X_{\tau_x^+} \in dy) = U(x - dy)\Pi(y + du).$$

Za dokaz vidjeti Kyprianou [1], str.116.

Definiramo sljedeće pojmove koji su neophodni za promatranje asimptotskog ponašanja puteva subordinatora.

Definicija 3.2.4. *Za funkciju $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ kažemo da regularno varira prema 0 s indeksom $\rho \in \mathbb{R}$ ako za sve $\lambda > 0$ vrijedi*

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^{\rho}.$$

Ako oba limesa postoje kada x teži prema beskonačno tada kažemo da f regularno varira u beskonačno s indeksom ρ. Slučaj kada je $\rho = 0$ se odnosi na slabu varijaciju.

Primjer 3.2.5. *Svaka funkcija koja je strogo pozitivna i ima konačni limes u beskonačnosti je slabo varirajuća u beskonačnosti. Osim tih trivijalnih primjera, u klasu slabo varirajućih možemo pridodati funkcije $L(x) = \log x$, $L(x) = \log_k x$ i $L(x) = \exp(\log x)/\log\log x$ za koje vrijedi da težu u beskonačnost kada x ide u beskonačnost. Funkcija*

$$L(x) = \exp(\log x)^{\frac{1}{3}} \cos[(\log x)^{\frac{1}{3}}]$$

je primjer oscilirajuće funkcije koja regularno varira prema beskonačnosti. Tj. vrijedi da je $\liminf_{x\uparrow\infty} L(x) = 0$ i $\limsup_{x\uparrow\infty} L(x) = \infty$.

Slijedi iskaz najvažnijeg teorema u ovom poglavlju, gdje se pokazuje preko kojeg zakona se prikazuje asimptotsko ponašanje puteva subordinatora.

Teorem 3.2.6 (**Dynkin-Lampretijev teorem**). *Neka je X neki subordinator s Laplaceovim funkcionalom Φ koji regularno varira u 0 (odnosno u beskonačnost) s nekim indeksom $\alpha \in (0,1)$. Tada, u smislu slabe konvergencije kada x ide u beskonačnost (odnosno u 0), vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_{\tau_x^+} - x}{x} \in du, \frac{x - X_{\tau_x^+ -}}{x} \in dy\right) \to \frac{\alpha \sin \pi\alpha}{\pi}(1-y)^{\alpha-1}(y+u)^{-\alpha-1} dy du \tag{3.2}$$

za sve $u > 0$ i $y \in [0,1)$.

Za dokaz vidjeti Kyprianou [1], str. 132.

Prikazati ćemo jednu podklasu subordinatora s regenerativnim svojstvom koji zadovoljavaju uvjete prethodnog teorema.

Definicija 3.2.7. *Za regenerativni skup $\mathcal{R}$ kažemo da je sebi sličan (eng. self-similiar) ako za svaki $k > 0$ vrijedi da ima istu distribuciju kao i $k\mathcal{R}$.*

Promatramo li $\mathcal{R}$ kao sliku subordinatora σ, navedena definicija je ekvivalentna uvjetu da je Laplaceov funkcional od σ proporcionalan Laplaceovom funkcionalu od $k\sigma$, tj. vrijedi da je $\Psi(\lambda) = c_k \Psi(k\lambda)$ za sve $\lambda > 0$, gdje je c_k neka konstanta koja ovisi samo o k. Uz pretpostavku normiranosti $\Psi(1) = 1$, navedeno vrijedi ako i samo se Laplaceov funkcional može prikazati kao $\Psi(\lambda) = \lambda^\alpha$, za neki $\alpha \in [0, 1]$. Pogledamo li Dynkin-Lampretijev teorem, vidimo da ova podklasa subordinatora zadovaljava uvjete teorema.

Primjer 3.2.8. *Ako promatramo sliku subordinatora kao $\mathcal{R} = \{t : B_t = 0\}$, gdje je B jednodimenzionalno Brownovo gibanje s početkom u 0. Tada vrijedi da je $\Psi(\lambda) = \sqrt{\lambda}$. Tada vrijedi da Ψ regularno varira s indeksom $\alpha = 1/2$.*

Primjer 3.2.9. *Vrijedi da se marginalni zakoni od* (3.2) *mogu zapisati kao*

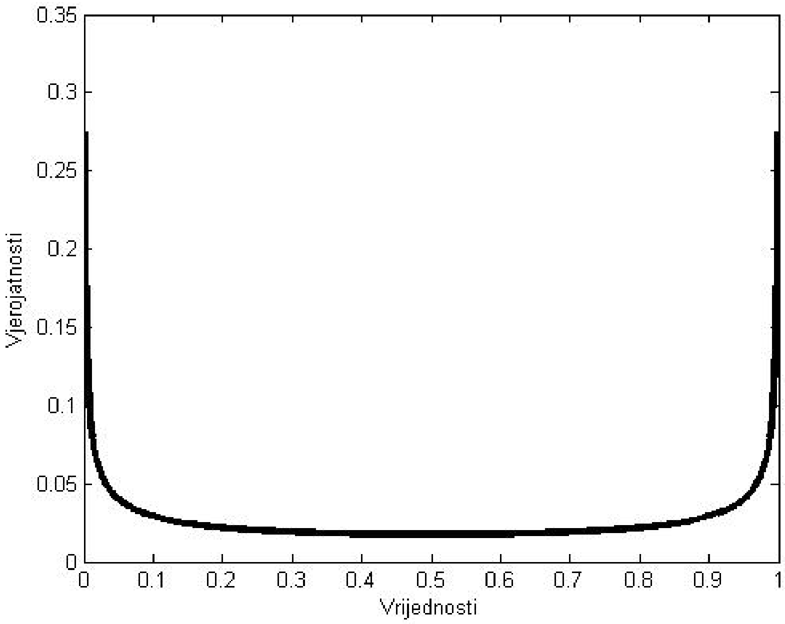
$$\mathbb{P}\left(\frac{X_{\tau_x^+} - x}{x} \in du\right) \to \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} u^{-\alpha}(1+u)^{-1} du,$$

i

$$\mathbb{P}\left(\frac{x - X_{\tau_x^+ -}}{x} \in dy\right) \to \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} y^{-\alpha}(1-y)^{\alpha-1} dy,$$

u smislu slabe konvergencije kada $x \uparrow \infty$ ili $x \downarrow 0$. Navedeni slučaj je poznat kao generalizirani arkus sinusov zakon; arkus sinusov zakon je specijalan slučaj kada je $\alpha = 1/2$.

Na sljedećoj slici vidimo gustoće razdiobe za generalizirani arkus sinusov zakon.



Poglavlje 4

Primjena

U sljedećem poglavlju ćemo obratiti pozornost na dio teorije rizika koji se povezuju sa našom temom; subordinatorima, točnije sa složenim Poissonovim procesom koji se dosta koristi u teoriji rizika.

4.1 Procesi rizika

Tzv. proces rizika (eng. risk reserve process) $\{R_t\}_{t\geq 0}$ je model vremenskog razvoja portfelja osiguravajuće kuće. Početnu vrijednost portfelja označavamo kao $u = R_0$. Vjerojatnost $\psi(u)$ propasti je vjerojatnost da vrijednost portfelja padne ispod nule,

$$\psi(u) = \mathbb{P}(\inf_{t\geq 0} R_t < 0) = \mathbb{P}(\inf_{t\geq 0} R_t < 0 | R_0 = u).$$

Vjerojatnost ukupnog gubitka do vremena T je:

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}(\inf_{0\leq t\leq T} R_t < 0).$$

Zbog matematičkih razloga, prikladnije je raditi sa procesima viška (eng. claim surplus process), $\{S_t\}_{t\geq 0}$ koji se definira kao $S_t = u - R_t$. Stavljamo da je:

$$\tau(u) = \inf\{t \geq 0 : R_t < 0\} = \inf\{t \geq 0 : S_t < 0\},$$

vrijeme štete, a

$$M = \sup_{t\geq 0} S_t, \quad M_T = \sup_{0\leq t\leq T} S_t,$$

maksimum sa beskonačnim i konačnim ograničenjem. Tada se vjerojatnost propasti može zapisati kao:

$$\psi(u) = \mathbb{P}(\tau(u) < \infty) = \mathbb{P}(M > u),$$

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}(\tau(u) < T) = \mathbb{P}(M_T > u).$$

Dosad nismo uveli niti jednu pretpostavku o procesima rizika, pa ćemo ih sada definirati:

(i) Postoji konačan broj šteta (eng. claims) u konačnom intervalu, tj. broj N_t dohotka (eng. arrivals) u intervalu $[0, t]$ je konačan. Označavamo vremena šteta sa $T_1, T_2, T_3. \ldots$, gdje vrijedi da je T_1 vrijeme prve štete. Vrijeme dohotka u n-toj šteti se označava sa $\sigma_n = T_1 + \ldots + T_n$, i $n_T = \min\{n \geq 0 : \sigma_{n+1} > t\} = \max\{n \geq 0 : \sigma_n \leq t\}$.

(ii) Veličinu n-te šteti označavamo sa ϵ_n.

(iii) Premije pristižu brzinom p po jedinici vremena.

Sve zajedno dobijemo da je:

$$R_t = u + pt - \sum_{k=1}^{N_t} \epsilon_k, \quad S_t = \sum_{k=1}^{N_t} \epsilon_k - pt.$$

Vrijedi ocjena (za modele koje ćemo promatrati u ovom poglavlju):

$$\frac{1}{t} \sum_{k=1}^{N_t} \epsilon_k \to \rho, \quad t \to \infty, \quad g.s. \tag{4.1}$$

Interpretacija od ρ je prosječna količina šteta po jedinici vremena. Nadalje, jako važna veličina je *safety loading* η definirana kao relativni broj koji opisuje koliko je brzina dotoka premije veća od dotoka potraživanja.

$$\eta = \frac{p - \rho}{\rho}.$$

Propozicija 4.1.1. *Pretpostavimo da vrijedi* (4.1). *Ako je $\eta \leq 0$ tada je $M = \infty$ g.s., i vrijedi da je $\psi(u) = 1$ za sve u. Ako je $\eta > 0$, tada $M < \infty$ g.s. i vrijedi da je $\psi(u) < 1$ za sve dovoljno velike u-ove.*

Najistaknutiji proces rizika je složeni Poissonov (tzv. Cramér-Lundbergov model) proces gdje je $\{N_t\}$ Poissonove proces i nezavisne od šteta $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$. Razlog je djelomično matematički jer je model jednostavniji za analizirati, ali model daje i prirodan prikaz: veliki portfelj osiguranika, svi s vremenski nepromjenjivom malom vjerojatnošću nastanka osiguranog slučaja, potiču razvoj Poissonovog modela u proučavanja ovog ponašanja. U sljedećem potpoglavlju ćemo obradit navedeni model.

4.2 Složeni Poissonov model

Ovaj model je poznatiji je u aktuarstvu pod imenom Crámer-Lundbergov model, koji je dobio ime po matematičarima koji su iznijeli taj model. Za složeni Poissonov model pretpostavljamo sljedeće:

1. $\{N_t\}_{t\geq 0}$ je Poissonov proces s intenzitetom β.
2. Veličina šteta $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ su nezavisne jednako distribuirane varijable sa distribucijom B, i nezavisne od $\{N_t\}$.
3. Stopa dohotka premije je konstantna i označavamo je s p.

Tada vrijedi:

$$R_t = u + pt - \sum_{k=1}^{N_t} \epsilon_k, \quad S_t = \sum_{k=1}^{N_t} \epsilon_k - pt.$$

U ovom slučaju vrijedi da je $\rho = \beta\mathbb{E}\epsilon$ (u prosjeku, β šteta dolazi po jedinici vremena, a prosjek same štete je $\mathbb{E}\epsilon$). U ovim slučajevima prikazujemo za općenitu distribuciju B. Sljedeći primjer nam prikazuje za specijalan slučaj.

Primjer 4.2.1. *Ako je B eksponencijalna s intezitetom δ, tada je $\psi(u) = \rho e^{-(\delta-\beta)u}$.*

Uz navedene oznake, označavamo još dodatno i $\xi(u) = S_{\tau(u)} - u$ kao prebačaj.
Radi zornijeg prikaza možemo prikazati vremena šteta kao:

$$\eta(u) = \eta + \sum_{k=1}^{M(u)} \eta_k,$$

gdje je $\eta = \eta(0)$ dužina prvog stepenastog segmenta, $\eta_1, \eta_2, \ldots$ duljine stepenastih segmenata $2, 3, \ldots$ i $M(u) + 1$ indeks stepenastog segmenta s obzirom na $\eta(u)$.

Ovaj model u aktuarstvu opisuje ponašanja portfelja osiguravajuće kuće kroz neko vrijeme na sljedeći način: pretpostavlja se da osiguravajuća kuća počinje s inicijalim kapitalom te tada prima premije neprekidno s konačnom stopom p. Glavna pretpostavka modela, označena kao uvjet pozitivnog profita (net profit condition), je da po jedinici vremena prosjek dotoka novca (premija) je veći nego prosjek istjecanja (zahtjeva). To ukazuje da postoji pozitivna vjerojatnost da će osiguravajuća kuća zauvijek ostati solventna. Zbog toga je vjerojatnost propasti (vjerojatnost da će rezerve osiguravajuće kuće postat negativne u nekom konačnom vremenu) bila središte istraživanja od početka teorije rizika. Pod uvjetom pozitivnog profita, Crámer je prikazao da za male zahtjeve vjerojatnost propasti opada eksponencijalno prema nuli, kako inicijalni kapital raste.

U realnosti, prosječan broj šteta je interval koji neće biti stalno jednak. Vrijedi da intenzitet štete $\beta(t)$ može biti periodičan. Također, broj pojedinačnih ugovora u portfelju može varirati sa vremenom. Neka je $a(t)$ veličina portfelja u vremenu t. Tada je proces broja šteta $\{N_t\}$ nehomogeni Poissonov proces sa stopom $a(t)\beta(t)$. Neka je

$$\Upsilon(t) = \int_0^t a(s)\beta(s)ds,$$

i neka je $\Upsilon^{-1}(t)$ inverzna funkcija. Tada je $\tilde{N}_t = N_{\Upsilon^{-1}(t)}$. Vrijedi da brzina premije varira s vremenom t, tako da je $p_t = pa(t)\beta(t)$ za neku konstantu p. Ova tvrdnja je prirodna u teoriji rizika. Na primjer, možemo pretpostaviti da tvrtka dobiva više novih klijenata po vremenu s većim intezitetom. Ovaj događaj može utjecati na model jer kupci mogu odustati od svojih starih osiguravajućih ugovora i potpisati novi ugovor sa drugom osiguravajućom kućom nakon pojave štete, jer nisu bili zadovoljni upravljanjem šteta kod njihove stare osiguravajuće kuće.

Dohodak od premija u intervalu $(0, t]$ je $p\Upsilon(t)$. Neka je $\tilde{S}_t = S_{\Upsilon^{-1}(t)}$. Tada je

$$\tilde{C}_t = u + pt - \sum_{i=1}^{\tilde{N}_t} \epsilon_i$$

Crámer-Lundbergov proces. Treba uočiti da se ovdje ne radi o realnom vremenu, nego o operativnom.

Događaj propasti se skoro nikada ne događa u praksi. Ako osiguravajuća kuća opazi da njihove zalihe opadaju, ona može odmah povećati premiju. S druge strane, osiguravajuća kuća je građena na različitim portfeljima. Propast u jednom portfelju ne znači bankrot. Iz toga proizlazi da je propast samo tehnički termin. Vjerojatnost propasti se koristi za davanje odluka, naprimjer računanje premije ili računanje (eng. reinsurance retention levels). Za aktuarce je važno biti sposoban dati dobru odluku u odgovarajuće vrijeme.

Prihodi su također tehnički termin u praksi. Ako posao ide dobro, tada dioničari osiguravajuće kuće mogu odlučiti tražiti veći udio. Prema tome, možemo pretpostaviti da brzina premije ovisi o zalihama.

Bibliografija

[1] Kyprianou, A. E. (2006). *Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications*. Springer Science & Business Media.

[2] Bertoin, J. (1999). Subordinators: examples and applications. *In Lectures on probability theory and statistics (pp. 1-91)*. Springer Berlin Heidelberg.

[3] Asmussen, S., & Albrecher, H. (2010). *Ruin probabilities* (Vol. 14). World scientific.

Sažetak

Cilj diplomskog rada je opisati pojam subordinatora te prikazati osnovne primjere i primjenu subordinatora. Kako bismo mogli opisati teoriju subordinatora, morali smo opširno definirati dio teorije Lévyjevih procesa i Poissonovu točkovnu mjeru. Poissonovu točkovnu mjeru uvodimo kako bi prikazali subordinator kao proces koji odgovara intuitivno složenom Poissonovom procesu s linearnim pomakom. U radu smo opisali svojstva slike subordinatora te prikazali asimptotsko ponašanje puteva pomoću Dynkin-Lampertijevog teorema. Na kraju, kao primjer primjene subordinatora, definiramo teoriju rizika te dajemo primjer direktne primjene subordinatora u osiguranju opisujući složeni Poissonov model (poznatiji kao Crámer-Lundbergov model u aktuarskom kontekstu).

Summary

The main goal of this thesis is to define and present basics examples and application of subordinators. In order to describe the theory of subordinators, theory of Lévy processes and Poisson random measures are discussed first. We introduce Poisson random measure in order to present subordinator as a process that correspond essentially to compound Poisson proces with linear drift. We describe characteristics of the range of subordinator and show asymptotic behaviour of it's paths using Dynkin-Lamperti theorem. In the last chapter, to present applications, we define ruin probability and usage of subordinator in insurance by describing compound Poisson model (known as Crámer-Lundberg model in actuarial contest).

Životopis

Zovem se Miko Martinić. Rođen sam u Supetru 15.07.1991. Osnovnu školu pohađao sam u Pučišćima, a Opću gimnaziju u Supetru na otoku Braču. Maturirao sam 2010. godine i iste sam upisao Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu na kojem sam stekao titulu univ. bacc. math. 2013. godine sam upisao Diplomski studij Matematička statistika.