SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Frane Tomić

MODELIRANJE DINAMIKE ZALIHA

Diplomski rad

Voditelj rada:

dr. sc. Kristina Šorić, prof. v.š.

U Zagrebu, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ________________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je ocijenilo rad ocjenom _______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj obitelji, koja mi je uvijek bila podrška...

SADRŽAJ

Uvod

U vrlo neizvjesnim razdobljima, tržišta metala nude odlične prilike za investiranje jer se imovina kojom se trguje smatra intrinzičnim čuvarom vrijednosti te stoga predstavlja dobru alternativu konvencionalnim klasama financijske imovine (dionice, obveznice itd.) Varijabilnost u potražnji za metalima je često povezana s geopolitičkim događajima te u sebi može sadržavati visoku inflaciju i deprecijaciju valute. Zbog toga razumijevanje tržišta robe predstavlja jedan od bitnijih interesa i za zakonodavstvo i za financijsku zajednicu. Zbog nekih specifičnih značajki tržišta robe (eng. *commodity market*) modeliranje toga tržišta je teže nego kod bilo koje druge konvencionalne imovine. U ovom diplomskom radu ćemo detaljnije obraditi članak autora *Luce Pieronia* i *Mattea Ricciarellia* pod nazivom: *"Modelling dynamic storage function in commodity markets: Theory and evidence"* odnosno prevedeno na hrvatski : *"Modeliranje funkcije dinamičkog skladištenja na tržištima roba: Teorija i dokazi"* (vidi [53]).

Cilj rada je napraviti model koji će objasniti odluke ekonomskih agenata o držanju zaliha na temelju Tobinovog koeficijenta q. Model radimo u ovisnosti o spot cijeni i prinosu od držanja.

U prvom poglavlju se bavimo teorijskim modelom te izvodimo zatvoren oblik rješenja koje ćemo testirati. U drugom poglavlju opisujemo Hamiltonijan te ga postavljamo za naš problem, a u trećem poglavlju navodimo potrebne ekonometrijske alate. U četvrtom poglavlju raspravljamo o tehnikama procjene, dok u petom poglavlju ističemo ekonometrijske rezultate. U šestom poglavlju zaključujemo rad uz neke komentare.

Poglavlje 1

Teorija

U ovom ćemo poglavlju predstaviti model koji istražuje ponašanje cijena robe na koje utječu proizvodnja i odluke o skladištenju. U većini istraživanja, držanje zaliha se smatra prijenosom dijela proizvodnje između različitih vremenskih trenutaka kako bi se izbjegao manjak u budućnosti (vidi [10] i [11]). U ovom članku ćemo se fokusirati na dinamiku koja karakterizira tržišta metala. Pod pretpostavkom konkurentnog tržišta, možemo dobiti jednadžbe za spot cijenu i graničnu vrijednost skladištenja.

Definicija 1.0.1
Roba (eng. *commodity)* je osnovno dobro koje je razmjenjivo s ostalim dobrima istog tipa. Roba je najčešće korištena kao input u proizvodnji drugih dobara i usluga. Kvaliteta određene robe može neznatno varirati, ali je u suštini uniformna među proizvođačima. Kada se robom trguje na burzi, ona mora zadovoljavati mijnimalni standard, poznat pod nazivom *basis grade.* Također pod robom smatramo svako dobro razmijenjeno tijekom trgovine, uključujući dobra kojima se trguje na burzi (vidi [44]).

Definicija 1.0.2
Prinos od držanja (eng. *convenience yield*) je korist ili premija povezana s držanjem fizičkog dobra ili proizvoda na kojem je temeljen ugovor ili izvedenica (eng. *underlying asset*), radije nego držanje ugovora ili izvedenice. Često se zbog raznih tržišnih nepravilnosti kao što je invertirano tržište (vidi Definiciju 1.1.2.), držanje fizičkog dobra može pokazati isplativije nego držanje ugovora ili izvedenice zbog oskudnosti tog dobra i visoke potražnje (vidi [44]).

Definicija 1.0.3
Spot cijena (eng. *spot price)* je trenutna cijena nekog financijskog instrumenta ili robe po kojoj se taj instrument/roba može kupiti ili prodati u određeno vrijeme i na određenom mjestu (vidi [44]).

Granična vrijednost skladištenja uključuje prinos od držanja zaliha kao ekonomsku korist koja proizlazi iz izbora oko držanja zaliha (vidi [27]). Po Ecksteinu i Eichenbaumu (vidi [13]) i Pindycku (vidi [33]), granični prinos od držanja zaliha se može procijeniti pretpostavljajući da su troškovi marketinga kvadratna funkcija. Procjene za spot cijenu i granični prinos od držanja su uključene u izračun granične vrijednosti skladištenja koja pak ulazi u brojnik Tobinovog q.

Definicija 1.0.4
Tobinov q ili q omjer predstavlja omjer između tržišne vrijednosti neke tvrtke i zamjenske vrijednosti[1] njezine imovine (vidi [44]).
U našem modelu, ta funkcija predstavlja pokretač izbora oko držanja zaliha. Valja primijetiti da je ravnoteža postignuta pod pretpostavkom reprezentativnih subjekata (vidi [43]).

---

[1] Zamjenska vrijednost je trošak koji bi poduzeće moralo platiti kada bi htjelo zamjeniti svoju imovinu. Zamjenska vrijednost ovisi o promjenama tržišnih cijena.

1.1 Formulacija modela: potrebne definicije

Ekonomski mehanizam, koji se koristi za objašnjavanje odluka oko držanja zaliha, baziran je na klasičnom modelu skladištenja i čini se da ignorira neka ključna svojstva ponašanja cijena robe kao što je ovisnost cijena na razine zaliha i njihov odnos s prinosom od držanja. Sva ta sporna pitanja negativno utječu na empirijske rezultate u predviđanju spot cijene (vidi [27]).

Definicija 1.1.1
Izvedenica (eng. *derivative*) je financijski instrument čija vrijednost ovisi o cijeni nekog dobra na koji se ona odnosi (eng. *underlying asset*). Ta dobra mogu biti dionice, obveznice, robe, valute, tržišni indeksi, kamatne stope itd. (vidi [44]).

Definicija 1.1.2
U kontekstu opcija i futuresa[2], invertirano tržište (eng. *inverted marked*) obilježava situaciju u kojoj su cijene trenutnih ugovora veće od cijena dugoročnih ugovora (vidi [44]).

Fokusirat ćemo se na okvir koji je predložio Pindyck (vidi [33]). Ekonomski mehanizam na kojem se temelji naš model se može opisati na sljedeći način: jednom kada je spot cijena određena interakcijom između ponude i potražnje, i proizvođači i industrijski potrošači drže zalihe da bi stabilizirali utjecaje stohastičkih fluktuacija na razinu zaliha i planove proizvodnje. U tom okruženju, teorija skladištenja predstavlja način da se vrednuju ekonomske koristi kroz povezanost između prinosa od držanja i zaliha. Prinosom od držanja nastojimo aproksimirati ekonomske koristi od držanja zaliha i takva definicija ne ovisi o konačnim svrhama držanja zaliha, pošto može uključivati i špekulativne motive i motive iz opreznosti.

---

[2] Futuresi su financijski ugovori koji obavezuju kupca na kupnju (ili prodavatelja na prodaju) neke imovine kao naprimjer neke fizičke robe ili financijskog instrumenta po određenoj cijeni, na određeni datum.

U stvari, ekonomski subjekti mogu držati zalihe ne samo da bi špekulirali na više cijene robe, nego i da bi se osigurali od manjkova koji bi mogli zaustaviti proizvodni proces (vidi [32] i [27]).

Definicija 1.1.3

Špekulant (eng. *speculator)* je osoba koja nastoji iz kratkoročnih fluktuacija cijena izvući ekonomsku korist. Špekulant se može kladiti na pad cijene određenog instrumenta te on tada zauzima kratku poziciju (eng. *short*) ili na rast cijene određenog instrumenta te on tada zauzima dugu poziciju (eng. *long*) (vidi [44]).

Definicija 1.1.4

Špekulativno skladištenje(eng. *speculative storage*) proizlazi iz potrebe da se iskoriste kratkoročne fluktuacije cijena na tržištu. Pošto tržište roba karakterizira velika volatilnost cijena, javljaju se velik broj špekulanata koji se na tržištu natječe s kupcima pri kupnji proizvoda te s proizvođačima prilikom njihove kasnije prodaje. Špekulant kupuje robu od proizvođača jer očekuje nestašicu robe u budućnosti te ju stoga namjerava prodati po većoj cijeni (vidi [45]).

U ovom kontekstu, opisujemo model u kojem se obrasci kretanja spot cijena, koji određuju promjene na tržištu, istražuju i u kojem se može doći do kriterija koji upravlja odlukama o držanju zaliha. S obzirom na Pindyckov model izvodimo procijenjene jednadžbe iz neprekidnog vremenskog okvira i modeliramo tržište gotovog novca na općenitiji način. Označujući neto potražnju kao razliku između proizvodnje i potrošnje, tržište metala je karakterizirano s odnosom između spot cijena i neto potražnje. Posebno, označujemo neto potražnju kao razliku između funkcije egzogene ponude i stohastičke potražnje. Ovakva strategija modeliranja je koherentna s jednom od najčudnijih značajki tržišta metala u kojoj ekonomska neizvjesnost jako utječe na potražnu, a ne na ponudnu stranu tržišta (vidi [16]). U formulama imamo dane jednadžbe:

$$D = f^D(P, k_D, \varepsilon_D) \quad (1)$$

$$Q = f^Q(P, k_Q) \tag{2}$$

gdje je P spot cijena metala, k_Q i $k_D$su vektori varijabli koje utječu na ponudu i potražnju dok je ε_D slučajan šok koji utječe na potražnu stranu. Uvjet čišćenja tržišta na tržištu novca je povezan s promjenama zaliha. Ako F_{S_t}označava razinu zaliha u trenutku *t*, onda je promjena u zalihama (dF_S) jednaka razlici između ponude i potražnje u trenutku *t*. Jednadžbu zapisujemo kao:

$$dF_{S_t} = Q_t\big(P_t, k_Q\big) - D_t(P_t, k_D, \varepsilon_D). \tag{3}$$

Na konkurentnom tržištu, kao što je tržište bakra, standardne ideje komparativne statike su primjenjive na način da $\frac{\partial Q}{\partial P} > 0\ i\ \frac{\partial D}{\partial P} < 0$ određuju velike promjene u zalihama (dF_S). Pomoću inverzne neto potražnje između spot cijene metala i promjena u zalihama, možemo istaknuti funkciju cijena koja je pozitivno povezana s promjenama u zalihama. Stoga je jednadžba cijene pri kojoj se tržište čisti dana s:

$$P_t = f^P(dF_{S_t}; k_D, k_Q, \varepsilon_D) \tag{4}$$

u kojoj je $\frac{\partial P}{\partial dF_S} > 0$. S druge strane, na izbore oko držanja zaliha utječe granična vrijednost skladištenja čija je glavna komponenta granični prihod od držanja (vidi [32] i [33]). U ovom članku, zatvoreni oblik rješenja, koji kvantificira graničnu vrijednost skladištenja, direktno proizlazi iz međuvremenske(u različitim vremenskim trenucima) optimizacije . Analogno sa spot tržištem, zapisujemo funkciju potražnje za skladištenjem kao:

$$F_{S_t} = f^{Fs}(\phi_t, k_{F_S}) \tag{5}$$

gdje je ϕ_t granični prinos od držanja, a k_{F_S} je skup varijabli koje utječu na potražnju za skladištenjem. Slijedeći modernu teoriju skladištenja, granični prinos od držanja je malen kada je čitava količina zaliha velika, ali može jako narasti kada zalihe postanu malene. Stoga inverznu funkciju potražnje na tržištu skladištenja zapisujemo na sljedeći način:

$$\phi_t = \vartheta^{\phi}(F_{S_t}, k_{F_S}) \tag{6}$$

Teorijska predviđanja navode kako je $\frac{\partial \phi}{\partial F_S} < 0$ i $\frac{\partial \phi^2}{\partial F_S^2} > 0$. Prva veza sugerira da je korist od držanja zaliha najveća za vrijeme perioda relativne nestašice ili velike

potražnje, dok se obrnuto, graničan prinos od držanja progresivno smanjuje kada razina zaliha teži u beskonačnost (vidi [14]).
Vektor varijabli koje djeluju na potražnju (k_{F_S}) može uključivati volatilnosti cijena. Očekujemo pozitivan utjecaj volatilnosti cijena na granični prinos od držanja pošto je poznato da volatilnost povećava cjenovnu neizvjesnost i potom potražnju za skladištenjem.
Teorijski, granični prinos od držanja također ovisi o spot cijeni robe. Po Casussusu i Collin-Dufresneu (vidi [8]), očekujemo da spot cijena ima pozitivan utjecaj na granični prinos od držanja. U ostatku rada, koristit ćemo ove argumente da odredimo kvadratnu funkciju za troškove marketinga iz kojih se može odrediti granični prinos od držanja zaliha.
Jednom kada se opći mehanizam modela odredi, u jednom od idućih poglavlja, bavit ćemo se međuvremenskim problemom optimizacije (u različitim vremenskim trenucima). Iz okruženja koje ćemo predstaviti, dobit ćemo par jednadžbi za spot cijenu i graničnu vrijednost skladištenja. Granična vrijednost skladištenja se može povezati s jednadžbom mjerenja za granični prinos od držanja koji će biti relevantan za računanje Tobinovog q.

1.2 Modeliranje proizvodnje i odluka o držanju zaliha na svjetskim tržištima metala

Cilj ovog potpoglavlja je naglasiti najvažnije rezultate našeg teorijskog modela. Teorijska baza ja dana s modelom skladištenja od Wrighta i Williamsa (vidi [43]) koji je generaliziran kako bi prikazao proces u neprekidnom vremenu. Ovaj pristup je primjereniji metalima čija se proizvodnja, potrošnja i ostale relevantne tržišne varijable mogu neprestano promatrati i na koje općenito ne utječu sezonski faktori. Kontrolne varijable u našem problemu su predstavljene s proizvedenom količinom (Q) i količinom koja je uskladištena na cijelom tržištu (F_S). Stoga, cilj ekonomskog subjekta je izabrati optimalne planove za proizvodnju i držanje zaliha kako bi maksimizirao (za vrijeme životnog vijeka) trenutnu profitnu funkciju (Π). S matematičkog gledišta, maksimizacijska strategija (tokom cijelog poslovanja tvrtke) može biti formulirana na sljedeći način:

$$\Pi\left(Q_t, F_{S_t}\right) = \int_0^T e^{-r(t)}[P(t)D(t) - TC(t)]dt \tag{7}$$

gdje je D funkcija potražnje, *r* predstavlja kamatnu stopu, a TC funkciju ukupnih troškova koja uključuje F_S kao argument. Funkcija ukupnih troškova (TC) je suma tri različita troškovna faktora: troškova proizvodnje (C), marketinških troškova (Φ) i troškova skladištenja (SC). Značajke različitih komponenta funkcije ukupnih troškova su veoma blizu funkcionalnim formama koje je predložio Pindyck (2001). Posebno, prva i druga komponenta su kvadratne forme (proizvodne količine i količine koje su uskladištene), dok se pretpostavlja da su troškovi skladištenja linearni (uskladištena količina F_S). Nadalje, optimizacijski program je ograničen sa zakonom kretanja aktivnosti skladištenja. Možemo iz jednadžbe (3) razraditi zakon kretanja razine uskladištene robe u neprekidnom vremenu:

$$\dot{F_S}(t) = \rho(F_S, Q, t)dt \tag{8}$$

gdje je ρ stopa skladištenja.

Definicija 1.2.1

Stopa skladištenja (eng. *storage rate*) predstavlja brzinu kojom se skladišta pune ili prazne. Definiramo ju kao derivaciju ukupnih zaliha po vremenu. $\rho = \frac{dF_{S_t}}{dt}$

Pokazat ćemo da je ρ ključni parametar u našem modelu koji proizlazi iz endogene optimizacijske faze.

Poglavlje 2

Hamiltonijan

Hamiltonijan je jednadžba odnosno matematički postupak kojim se rješavaju neprekidni optimizacijski problemi u teoriji optimizacije. Postupak je nastao kao dio minimizacijskog i maksimizacijskog principa od sovjetskog matematičara Lava Semjonoviča Pontrjagina. Razlikujemo probleme s obzirom na horizont, koji može biti konačan ili beskonačan te s obzirom na to da li uvodimo diskontni faktor (vidi [54]).

2.1 Problem s konačnim horizontom

Teorija optimizacije je korisna za rješavanje neprekidnih optimizacijskih problema oblika:

$$max \int_0^T F(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)dt \qquad \text{(P)}$$

s obzirom na ograničenja:

$$\dot{x}_i = Q_i(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad (1)$$

$$x_i(0) = x_{i0}, \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad (2)$$

$$x_i(T) \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{u}(t) \in \Upsilon, \qquad \Upsilon \in \mathbb{R}^m. \qquad (4)$$

gdje je:

$\boldsymbol{x}(t)$ n-vektor varijabli stanja($x_i(t)$). Varijable stanja opisuju stanje sustava u svakom trenutku. Zapisujemo $dx_i/dt = \dot{x}_i$.

$\boldsymbol{u}(t)$ m-vektor kontrolnih varijabli. To su varijable izbora u optimizacijskom problemu.

$F(\cdot)$ je dvaput neprekidno diferencijabilna funkcija cilja. Možemo pretpostaviti da je funkcija aditivna u vremenu.

$Q_i(\cdot)$ je dvaput neprekidno diferencijabilna funkcija tranzicije za svaku varijablu stanja.

Imamo ograničenja:

$i.$ Jednadžbom (1) definiramo jednadžbe tranzicije za svaku varijablu stanja. One opisuju ponašanje varijabli stanja kroz vrijeme.

$ii.$ Jednadžba (2) daje početne uvjete za svaku varijablu stanja. x_{i0} su konstante.

$iii.$ Jednadžba (3) daje terminalne uvjete za svaku varijablu stanja.

$iv.$ Jednadžba (4) definira isplativi skup za kontrolne varijable.

U sljedećem dijelu diskutiramo o Pontryaginovom maksimizirajućem principu. Taj nam princip govori da možemo riješiti optimizacijski problem P koristeći Hamiltonijansku funkciju H kroz jedan period. Navodimo teorem:

Teorem 2.1.1

Da bi $\boldsymbol{x}^*(t)$ *i* $\boldsymbol{u}^*(t)$ *bili optimalni za problem P, nužno je da postoji konstanta* λ_0 *i neprekidne funkcije* $\Lambda(t) = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$*, gdje za sve* $0 \leq t \leq T$ *imamo* $\lambda_0 \neq 0$ *i* $\Lambda(t) \neq 0$ *tako da za svaki* $0 \leq t \leq T$

$$H(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}(t), \Lambda(t), t) \leq H(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \Lambda(t), t),$$

gdje je Hamiltonijanska funkcija H definirana s

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \Lambda, t) = \lambda_0 F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t).$$

Osim u točkama prekida od $\boldsymbol{u}_t^*$,

$$\frac{\partial H(\cdot)}{\partial x_i} = -\dot{\lambda}_i(t), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Nadalje ako je $\lambda_0 = 0$ *ili* $\lambda_0 = 1$ *onda je sljedeći uvjet transverzalnosti zadovoljen:*

$$\lambda_i(T) \geq 0, \quad \lambda_i(T) x_i^*(T) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

2.2 Hamiltonijan sadašnje vrijednosti

Prema prethodnom teoremu, problem P se može riješiti postavljajući sljedeći Hamiltonijan sadašnje vrijednosti:

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \Lambda, t) = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t).$$

Gore navedene $\lambda_i(t)$ nazivamo kovarijablama stanja. One su analogne Lagranegovim multiplikatorima. Nužni uvjeti za maksimum su:

$$\frac{\partial H(\cdot)}{\partial u_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, m;$$

$$\frac{\partial H(\cdot)}{\partial x_i} = -\dot{\lambda}_i(t), \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$\lambda_i(T) \geq 0, \quad \lambda_i(T) x_i^*(T) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dovoljni uvjeti za maksimum su da je Hamiltonijanska funkcija konkavna u varijablama $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{u}$. Konačno, u nekim slučajevima, optimizacijski problem može također uključivati i druga ograničenja:

$$max \int_0^T F(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) dt \tag{P1}$$

s obzirom na ograničenje:

$$\dot{x}_i = Q_i(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \quad i = 1, \ldots, n;$$
$$G_j(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, q;$$
$$x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, \ldots, n;$$
$$x_i(T) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n;$$
$$\boldsymbol{u}(t) \in \Upsilon, \quad \Upsilon \in \mathbb{R}^m.$$

U tom slučaju možemo riješiti problem $(P1)$ koristeći Lagrangeovu metodu:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \Lambda, \Phi, t) = H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \Lambda, t) + \sum_{j=1}^{q} \phi_j G_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t),$$
$$= F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \sum_{j=1}^{q} \phi_j G_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t),$$

gdje je $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_q)$. U ovom slučaju, nužni uvjeti za maksimum su:

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial u_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, m;$$
$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial x_i} = -\dot{\lambda}_i(t), \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$\lambda_i(T) \geq 0, \quad \lambda_i(T)x_i^*(T) = 0, \quad i = 1, \ldots, n;$$
$$\phi_j(t) \geq 0, \quad \phi_j(t)Q(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) = 0, \quad j = 1, \ldots, q.$$

Dovoljni uvjeti za maksimum su da je Hamiltonijanska funkcija konkavna u varijablama $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{u}$.

2.3 Problem s beskonačnim horizontom

Sada promatramo proširenje problema na beskonačni vremenski horizont. Zbog jednostavnosti ćemo se fokusirati na stacionarne probleme. Pretpostavka stacionarnosti implicira da su glavne funkcije problema invarijantne u vremenu:

$$F(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) = F\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big);$$
$$G_i(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) = G_i\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big);$$
$$Q_j(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) = Q_j\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big).$$

Općenito, da bi dobili unutarnje rješenje[3] za naš optimizacijski problem, funkcija cilja treba biti ograničena. Jedan od načina za postizanje ograničenosti je pretpostavka diskontiranja. No postojanje diskontnog faktora nije ni nužni ni dovoljni uvjet za osiguravanje ograničenosti. Stoga definiramo:
$F\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big) = e^{-\rho t} f\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big)$.
Naš problem postaje:

[3] Unutarnje rješenje je izbor ekonomskog agenta, koji se može karakterizirati kao optimum koji se nalazi na tangenti dvije krivulje.

$$max \int_0^\infty e^{-\rho t} f\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big) dt \qquad (P2)$$

s obzirom na:

$$\dot{x}_i = Q_i\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big), \quad i = 1, \ldots, n; \qquad (1)$$

$$G_j\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, q; \qquad (2)$$

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, \ldots, n; \qquad (3)$$

Hamiltonijan sadašnje vrijednosti je:

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \Lambda) = e^{-\rho t} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}).$$

Lagrangeova funkcija glasi:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \Lambda, \Phi) = e^{-\rho t} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \sum_{j=1}^{q} \phi_j G_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}).$$

Uvjeti prvog reda su :

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial u_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, m;$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial x_i} = -\dot{\lambda}_i(t), \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$\lim_{T\to\infty} \lambda_i(T) \geq 0, \quad \lim_{T\to\infty} \lambda_i(T) x_i^*(T) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

$$\phi_j(t) \geq 0, \quad \phi_j(t) Q\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big) = 0, \quad j = 1, \ldots, q.$$

Dovoljni uvjeti za maksimum su da je Hamiltonijanska funkcija konkavna u varijablama $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{u}$.

2.4 Hamiltonijan vrijednosti u trenutku

Svaki diskontirani problem optimizacije može biti riješen koristeći Hamiltonijan sadašnje vrijednosti i Hamiltonijan vrijednosti u trenutku. Hamitonijan vrijednosti u trenutku je nešto jednostavniji za uporabu.

Dobivamo Hamiltonijan vrijednosti u trenutku kako slijedi:

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \Psi) = e^{\rho t} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \Lambda),$$

gdje je $\psi_i = e^{\rho t}\lambda_i$. Hamiltonijan vrijednosti u trenutku je stoga

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \Psi) = \mathrm{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i Q_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}).$$

Transformacija iz sadašnje vrijednosti u vrijednost u trenutku utječe na uvjete prvog reda. Da bismo to vidjeli, trebamo prepraviti naš problem $(P2)$ koristeći Hamiltonijan vrijednosti u trenutku. Problem je

$$max \int_0^\infty e^{-\rho t} f\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big) dt \qquad (P2)$$

s obzirom na uvjete:

$$\dot{x}_i = Q_i\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big), \quad i = 1, \ldots, n; \qquad (1)$$

$$G_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, q; \qquad (2)$$

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, \ldots, n; \qquad (3)$$

Hamiltonijan vrijednosti u trenutku je

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \Psi) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i Q_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}).$$

Lagrangeova funkcija glasi

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\Psi,\Phi) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \sum_{i=1}^{n}\psi_i Q_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \sum_{j=1}^{q}\phi_j G_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}).$$

Uvjeti prvog reda su:

$$\frac{\partial \mathbf{L}(\cdot)}{\partial u_k} = 0, \quad k = 1,\dots,m;$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}(\cdot)}{\partial x_i} = -\left[\dot{\psi}_i(t) - \rho\psi_i(t)\right], \quad i = 1,\dots,n;$$

$$\lim_{T\to\infty} e^{-\rho T}\psi_i(T) \geq 0, \quad \lim_{T\to\infty} e^{-\rho T}\psi_i(T)x_i^*(T) = 0\,, \quad i = 1,\dots,n;$$

$$\phi_j(t) \geq 0, \quad \phi_j Q\big(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\big) = 0, \quad j = 1,\dots,q.$$

Dovoljni uvjeti za maksimum su da je Hamiltonijanska funkcija konkavna u $\boldsymbol{x}$ i u $\boldsymbol{u}$.

2.5 Postavljanje Hamiltonijana za model

Kako bismo riješili optimizacijski problem, koristimo Hamiltonijansku tehniku.

Posebno, imamo:

$$H = e^{-r(t)}\left\{\left[P(t)\big(Q(t)+\rho(.,t)\big) - \left(\big(c_0+\eta(t)\big)Q(t) + \frac{1}{2}c_1 Q(t)^2 + c_2 Ctd(t)Q(t)\right) + \phi[F_S(t),.] + kF_S(t)\right] + \lambda(t)[\rho(.,t)]\right\}$$

Uvjeti prvog reda, s obzirom na kontrolne varijable, daju sljedeće jednadžbe:

$$\frac{\partial H}{\partial Q(t)} = 0 \Rightarrow P(t) = c_0 + c_1 Q(t) + c_2 Ctd(t) + \eta(t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial F_S(t)} = 0 \Rightarrow \lambda(t) = P(t) - [\phi(t) - k] \tag{9}$$

Valjalo bi istaknuti dvije primjedbe koje se tiču gore navedenih uvjeta. Prvo, drugi uvjet dopušta izravno mjerenje granične vrijednosti skladištenja ($\lambda(t)$) tj. skrivenu vrijednost (eng. *shadow value*) pohranjene jedinice. Granična korist držanja zaliha mora biti jednaka graničnom oportunitetnom trošku prodaje robe na spot tržištu P(t) i vrijednosti neto graničnog prinosa od držanja $[\phi(t) - k]$. Formalno, izračuni graničnog prinosa od držanja su bili napravljeni usporedbom spot i budućih cijena. Drugo, uvjet prvog reda s obzirom na proizvodnju daje jednadžbu cijene i može se dalje izmijeniti vodeći računa o varijablama koje utječu na potražnju (vidi jednadžbu (2)). Pošto modeliramo svjetsko tržište metala, po Gilbertu (vidi [15]), uzimamo u obzir tečaj kao jednu od najvažnijih varijabli koja utječe na pomicanje potražnje. Supstitucijom možemo dobiti:

$$P(t) = \delta_0 + \delta_1 dF_S(t) + \delta_2 EXC(t) + \delta_3 Ctd(t) + \xi(t) \tag{10}$$

gdje se za $\xi(t)$ pretpostavlja da je serijski nekoreliran, normalno distribuiran šok za jednadžbu cijena. Da završimo teorijsko predviđanje za ovu jednadžbu, uzimamo da je veza između svjetske cijene bakra i indeksa realnog tečaja negativna $(\partial P/\partial EXC < 0)$. Poznato je da zemlja izvoznica resursa može iskusiti aprecijaciju tečaja kada cijena resursa raste, a deprecijaciju kada pada (vidi npr. [12, str. 146]). Cijena sirove nafte uključena je kao indirektna (eng. *proxy*) varijabla za iskazivanje graničnog troška. Stoga se očekuje značajan i pozitivan utjecaj na spot cijenu $(\partial P/\partial Ctd > 0)$. Nedavno objavljeni članci pokazuju da prinos od držanja predstavlja jedan od najvažnijih čimbenika za odluke oko držanja zaliha. Ova varijabla stanja ulazi u definiciju granične vrijednosti skladištenja koja proizlazi iz optimizacijske faze našeg modela. U ovom trenutku, trebamo jednadžbu mjerenja da bismo predvidjeli granični prinos od držanja i zatim odluke o držanju zaliha na tržištima metala. Uz danu kvadratnu funkcionalnu formu za troškove marketinga, možemo dobiti odgovarajuću jednadžbu za granični prinos od držanja. U stvari, s obzirom na danu definiciju za granični prinos od držanja:

$$\phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial F_S} \tag{11}$$

jednadžba za granični prinos od držanja se može zapisati na slijedeći način:

$$\phi(t) = a_0 + a_1 P(t) + a_2 F_S(t) + a_3 \sigma(t) + e(t) \tag{12}$$

gdje je σ volatilnost spot cijene, a $e(t)$ je izraz za slučajni šok s uobičajenim stohastičkim svojstvima. Volatilnost cijena povećava potražnju za skladištenjem da bi se izbjegle fluktuacije u proizvodnji i potrošnji na tržištima metala te stoga također utječe na graničnu vrijednost zaliha (vidi [3]). Teorijski uvidi u Poglavlju 1 pružaju podršku za pozitivni utjecaj volatilnosti cijena σ na granični prinos od držanja $(\partial\phi/\partial\sigma > 0)$ i spot cijene na granični prinos od držanja $(\partial\phi/\partial P > 0)$.

Da bismo pronašli kriterij koji se može iskoristiti za predviđanje agregiranog držanja zaliha, uspoređujemo graničnu skladišnu vrijednost sa zamjenskim troškom uskladištene jedinice. U našem modelu prvo je dano s graničnom vrijednošću skladištenja $\lambda(t)$, dok se druga slaže s cijenom koja treba biti plaćena na tržištu novca. Slijedeći taj pristup, analogno s teorijom investiranja, možemo dobiti pravilo držanja zaliha koje je veoma blizu Tobinovom q (vidi [39]):

$$q(t) = \frac{\lambda(t)}{P(t)}. \tag{13}$$

Što se tiče učinaka poslovnog ciklusa, Fama i French (vidi [14]) su otkrili da na dinamiku zaliha i cijena uglavnom utječu uvjeti poslovnog ciklusa. U stvari, čak i ako modeliramo stohastičku potražnju na metalnim tržištima novca, činjenica da se šokovi ne prilagođavaju brzo oko vrhunaca poslovnih ciklusa, određuje pad u razini zaliha. Koristeći jednadžbu (13),dobije se optimalna razina zaliha, u svakom vremenu t, procjenjivanjem predznaka neto graničnog prinosa od držanja. Pod pretpostavkom pozitivnog poslovnog ciklusa, *forward*[4] cijene su ispod spot cijena, tako da se dobije pozitivan prinos od držanja kao rezultat. Procijenit će se smanjenje zaliha ekonomskih subjekata i očekivat će se vrijednost q<1. Isto tako, u skladu s teorijom skladištenja, ako se dogodi negativan poslovni ciklus u gospodarstvu, očekujemo q>1 pošto je poznato da zalihe mogu biti iskorištene da se smanji tržišna neizvjesnost.

---

[4] Forward cijena je fiksirana cijena dobra u nekom budućem vremenu definirana u sadašnjosti

2.6 Tehnički dio Hamiltonijana

Dana je formula za dobit:

$$\pi(Q_t, F_{St}) = \int_0^T e^{-r(t)}\,[P(t)D(t) - TC(t)]dt$$

gdje je:

$[0, T]$ - konačan vremenski period

$r(t)$ - diskontna stopa

$e^{-r(t)}$ - diskontni faktor

$P(t)$ - spot cijena

$D(t)$ - tržišna potražnja (dobije se iz uvjeta čišćenja tržišta)

$TC(t)$ - funkcija ukupnih troškova

Pretpostavili smo da se funkcija ukupnih troškova sastoji od tri komponente:

- troškova proizvodnje: $C\big(Q(t)\big) = \big(c_0 + \eta(t)\big)Q(t) + \frac{1}{2}c_1 Q(t)^2 + c_2 Ctd(t)Q(t)$

- marketinških troškova: $\Phi\big(P(t), F_{St}(t), \sigma(t)\big) = c_0 + [-a_0 - a_1 P(t) - a_3\sigma(t)]F_S(t) - \frac{a_2}{2}F_S(t)^2$

- troškova skladištenja: $SC\big(F_S(t)\big) = kF_S(t)$

$\eta(t)$ - predstavlja šok koji utječe na granični trošak i sadržava nepredvidljive promjene u jediničnoj varijabilnoj cijeni

$Ctd(t)$ - cijena inputa – tj. cijena sirove nafte

$\sigma(t)$ - volatilnost spot cijene ($P(t)$)

k - granični trošak skladištenja

Želimo maksimizirati profit te stoga imamo sljedeći problem maksimizacije:

$$\max_{Q_t, F_{St}} \pi(Q_t, F_{St}) = \int_0^T e^{-r(t)}[P(t)D(t) - TC(t)]dt$$

s obzirom na uvjet:

$$\dot{F}_{St} = \rho(F_S, Q, t)dt$$

Zapisujemo Hamiltonijan:

$$H = e^{-r(t)} \cdot \{[P(t) \cdot D(t) - TC(t)] + \lambda(t) \cdot \rho(\cdot, t)\} \tag{14}$$

$$dF_{St} = Q_t\big(P_t, k_Q\big) - D_t(P_t, k_D, \varepsilon_D) \tag{15}$$

Jednadžbe (14) i (15) daju:

$$\begin{aligned} e^{-r(t)} \cdot \Big\{ & P(t) \cdot \big(Q(t) + \rho(\cdot, t)\big) \\ & - \Big[\big(c_0 + \eta(t)\big)Q(t) + \frac{1}{2}c_1 Q(t)^2 + c_2 Ctd(t)Q(t) + c_0 \\ & + \big(-a_0 - a_1 P(t) - a_3 \sigma(t)\big) \cdot F_{St} - \frac{a_2}{2} F_S(t)^2 + kF_S(t)\Big] + \lambda(t) \\ & \cdot [\rho(\cdot, t)]\Big\} \end{aligned}$$

Slijedi računanje uvjeta prvog reda (FOC):

$$\frac{\partial H}{\partial Q(t)} = e^{-r(t)} \cdot \big\{P(t) - \big[\big(c_0 + \eta(t)\big) + c_1 Q(t) + c_2 Ctd(t)\big]\big\} = 0$$

$$\Longrightarrow P(t) = c_0 + c_1 Q(t) + c_2 Ctd(t) + \eta(t) \tag{16}$$

$$\frac{\partial H}{\partial F_S(t)} = e^{-r(t)} \cdot \left\{P(t) \cdot \frac{\partial \rho(\cdot, t)}{\partial F_S(t)} - \frac{\partial \Phi\big(P(t), F_S(t), \sigma(t)\big)}{\partial F_S(t)} - k + \lambda\right\} = 0 \tag{17}$$

Koristeći definiciju graničnog prinosa od držanja

$$\phi(t) = -\frac{\partial \Phi(\cdot)}{\partial F_S(t)} \tag{18}$$

dobije se:

$$\lambda = P(t) - [\phi(t) - k]$$

Poglavlje 3

Ekonometrijski alati

Definicija 3.0.1

Vremenski niz je skup opservacija x_t, gdje je svaka opservacija zabilježena u specifičnom trenutku t. Kod *diskretnog vremenskog niza,* skup trenutaka je diskretni skup kao npr. kada se gledaju opservacije razmaknute za fiksni vremenski interval. Kod *neprekidnog vremenskog niza* su opservacije zabilježene neprekidno kroz neki vremenski interval npr. $T_0 = [0,1]$ (vidi [52]).

3.1 GMM

Generalizirana metoda momenata (GMM) je generička metoda za procjenu parametara u statističkim modelima. Najčešće se koristi u poluparametarskim modelima, gdje je parametar kojeg želimo procijeniti konačnodimenzionalan, a cijeli oblik funkcije distribucije ne mora biti poznat te se stoga procjena maksimalnom vjerodostojnošću (MLE) ne može koristiti. Primjena metode zahtjeva određene uvjete momenata. Uvjeti momenata su funkcije parametara modela i podataka tako da se njihova očekivanja ne razlikuju od stvarne vrijednosti parametara. Generalizirana metoda momenata minimizira određenu normu uzoraka prosjeka uvjeta momenata. Procjenitelji generalizirane metode momenata su konzistentni, asimptotski normalni i efikasni u klasi svih procjenitelja koji ne koriste druge informacije osim onih sadržanih u uvjetima momenata (vidi [18]).

Svojstva

Konzistentnost

Konzistentnost je statističko svojstvo procjenitelja koje govori, da će uz dovoljan broj opservacija, procjenitelj biti proizvoljno blizu stvarnoj vrijednosti parametra:

$$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta_0, \quad T \to \infty$$

Nužni i dovoljni uvjeti da bi procjenitelj generaliziranom metodom momenata bio konzistentan su:

$i.)\ \widehat{W}_T \xrightarrow{p} W, \quad gdje\ je\ W\ pozitivno\ semidefinitna\ matrica,$

$ii.)\ W\mathbb{E}[g(Y_t,\theta)] = 0 \quad samo\ za\ \theta = \theta_{0,}$

$iii.)\ Skup\ mogućih\ parametara\ \Theta \subset \mathbb{R}^k\ je\ kompaktan,$

$iv.)\ g(Y,\theta)\ je\ neprekidna\ za\ svaki\ \theta\ s\ vjerojatnošću\ jedan$

$v.)\ \mathbb{E}[sup_{\theta\in\Theta}\|g(Y,\theta)\|] < \infty.$

Drugi uvjet (uvjet **Globalne identifikacije** je poprilično teško dokazati. Postoje jednostavniji nužni, ali ne i dovoljni uvjeti koji se mogu iskoristiti za problem neidentifikacije:

- **Uvjet veličine dimenzije.** Dimenzija funkcije momenata $m(\theta)$ treba biti barem veličine dimenzije vektora parametra θ.
- **Lokalna identifikacija.** Ako je $g(Y,\theta)$ neprekidno diferencijabilna u okolini θ_0, tada matrica $W\mathbb{E}[\nabla_\theta g(Y_t,\theta_0)]$ mora biti punog ranga.

Asimptotska normalnost

Asimptotska normalnost je korisno svojstvo jer nam dozvoljava da konstruiramo intervale pouzdanosti za procjenitelj i da provodimo različite testove. Prije asimptotske distribucije GMM procjenitelja, moramo definirati dvije pomoćne matrice:

$$G = \mathbb{E}[\nabla_\theta g(Y_t,\theta_0)], \quad \Omega = \mathbb{E}[g(Y_t,\theta_0)g(Y_t,\theta_o)']$$

Uvjeti:

$i.)$ $\hat{\theta}$ *je konzistentan,*

$ii.)$ *Skup mogućih parametara* $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ *je kompaktan,*

$iii.)$ $g(Y,\theta)$ *je neprekidno diferencijabilna u nekoj okolini* N *od* θ_0 *s vjerojatnošću jedan,*

$iv.)$ $\mathbb{E}[\|g(Y_t,\theta)\|^2] < \infty$,

$v.)$ $\mathbb{E}[sup_{\theta\in N}\|\nabla_\theta g(Y_t,\theta)\|] < \infty$,

$vi.)$ *matrica* $G'WG$ *je nesingularna.*

Efikasnost

Do sada nije bilo riječi o izboru matrice W, osim da mora biti pozitivno semidefinitna. U stvari bilo koja takva matrica će dati konzistentan i asimptotski normalan GMM procjenitelj. Jedina razlika će biti u asimptotskoj varijanci od tog procjenitelja. Može se pokazati da će uzimanje

$$W \propto \Omega^{-1}$$

rezultirati izborom najefikasnijeg procjenitelja u klasi svih asimptotski normalnih procjenitelja. U ovom slučaju efikasnost znači da će takav procjenitelj imati najmanju moguću varijancu.

U ovom se slučaju formula za asimptotsku distribuciju GMM procjenitelja pojednostavljuje na

$$\sqrt{T}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}[0,(G'\Omega^{-1}G)^{-1}]$$ [5]

Dokaz da je takav izbor težinske matrice uistinu optimalan se često malo modificira kada se određuje efikasnost drugih procjenitelja. (Kao pravilo palca (eng. *rule of thumb*)možemo uzeti da je težinska matrica optimalna kadgod se "sendvič formula" za varijancu da pojednostaviti na neki jednostavniji izraz.)

Dokaz:

Promatrat ćemo razliku između asimptotske varijance s proizvoljnom W i asimptotske varijance s $W = \Omega^{-1}$. Ako možemo faktorizirati razliku u simetrični produkt oblika CC' za neku matricu C, tada će to garantirati da je ta razlika nenegativnodefinitna i stoga će $W = \Omega^{-1}$ biti optimalna po definiciji.

$$V(W) - V(\Omega^{-1}) = (G'WG)^{-1}G'W\Omega WG(G'WG)^{-1} - (G'\Omega^{-1}G)^{-1}$$

$$= (G'WG)^{-1}(G'W\Omega WG - G'WG(G'\Omega^{-1}G)^{-1}G'WG)(G'WG)^{-1}$$

$$= (G'WG)^{-1}G'W\Omega^{1/2}\left(I - \Omega^{-1/2}G(G'\Omega^{-1}G)^{-1}G'\Omega^{-1/2}\right)\Omega^{1/2}WG(G'WG)^{-1}$$

$$= A(I-B)A'$$

Matrice A i B smo uveli da pojednostavimo notaciju, a I je jedinična matrica. Može se pokazati da je matrica B simetrična i idempotentna ($B^2 = B$). Tada je matrica *I-B* također simetrična i idempotentna: $I - B = (I-B)(I-B)'$. Stoga možemo faktorizirati dobiveni izraz kao:

$$= A(I-B)(I-B)'A' = \big(A(I-B)\big)\big(A(I-B)\big)' \geq 0$$

Q.E.D.

[5] G je matrica koju smo definirali kao $G = \mathbb{E}[\nabla_\theta g(Y_t, \theta_0)]$

3.2 Model simultanih jednadžbi

3SLS

3SLS metoda se sastoji od 2SLS metode i SUR metode (vidi [46]).

2SLS

2SLS metoda je metoda procjene za model simultanih jednadžbi. To je tehnika gdje se endogeni regresori s desne strane svake jednadžbe instrumentalizirani s regresorima X od ostalih jednadžbi. Metoda se zove *2SLS (two-stages least squares)* jer se procjena provodi u dva koraka:

- *1. korak:* Regresirati Y_{-i} po X i dobiti predviđene vrijednosti $\hat{Y}_{-i}$;
- *2. korak:* Procijeniti y_i, β_i s *metodom najmanjih kvadrata* tj. regresirati y_i po $\hat{Y}_{-i}$ i po X_i.

Ako je i-ta jednadžba u modelu zapisana kao

$$y_i = (Y_{-i} \quad X_i)\begin{pmatrix}\gamma_i \\ \beta_i\end{pmatrix} + u_i \equiv Z_i\delta_i + u_i,$$

gdje je Z_i $T\times(n_i + k_i)$ matrica i endogenih i egzogenih regresora u i-toj jednadžbi, a δ_i je $(n_i + k_i)$-dimenzionalni vektor regresijskih koeficijenata, tada će 2SLS procjenitelj od δ_i biti dan s

$$\hat{\delta}_i = \left(\hat{Z}_i'\hat{Z}_i\right)^{-1}\hat{Z}_i'y_i = (Z_i'PZ_i)^{-1}Z_i'Py_i,$$

gdje je $P = X(X'X)^{-1}X'$ projekcijska matrica u linearnom prostoru razapetom s egzogenim regresorima X (vidi [46]).

SUR model

SUR model ili model naizgled nepovezanih regresija (eng. *seemingly unrelated regressions*) je generalizacija modela linearne regresije koji se sastoji od nekoliko regresijskih jednadžbi od kojih svaka ima svoju ovisnu varijablu i potencijalno različite skupove egzogenih varijabli. Svaka jednadžba predstavlja linearnu regresiju te se može procijeniti zasebno. Pretpostavka je da su greške u jednadžbama međusobno korelirane (vidi [47], [48], [49] i [50]).

Pretpostavimo da imamo m jednadžbi regresije

$$y_{ir} = x_{ir}^{\mathrm{T}}\beta_i + \varepsilon_{ir}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Broj jednadžbe je označen s i, a $r = 1, \dots, R$ predstavlja opservacijski indeks te x_{ir}^{T}predstavlja transponirani x_{ir} vektor-stupac. Pretpostavljamo da je broj opservacija R velik te u analizi uzimamo da R teži u beskonačnost dok broj jednadžbi m ostaje fiksan. Svaka jednadžba i ima jednu zavisnu varijablu y_{ir} i k_i-dimenzionalni vektor regresora x_{ir}. Možemo staviti opservacije s obzirom na i-tu jednadžbu u R-dimenzionalne vektore i matrice. Zapisujemo model u sljedećoj formi:

$$y_i = X_i\beta_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

gdje su y_i i ε_i $R{\times}1$ vektori, X_i je $R{\times}k_i$ matrica, a β_i je $k_i{\times}1$ vektor. Ako tih m jednadžbi zapišemo jednu iznad druge, dobivamo sustav u matričnoj formi:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix} = X\beta + \varepsilon. \tag{19}$$

Pretpostavka modela je da su greške nezavisne u vremenu, ali da mogu biti korelirane između jednadžbi u istom vremenskom intervalu. Stoga pretpostavljamo da je $\mathbb{E}[\varepsilon_{ir}\varepsilon_{is}|X] = 0$ kada je $r \neq s$, a $\mathbb{E}\left[\varepsilon_{ir}\varepsilon_{jr}|X\right] = \sigma_{ij}$. Ako označimo s $\Sigma = \left[\left[\sigma_{ij}\right]\right]$ $m{\times}m$ matricu skedastičnosti svake opservacije, kovarijacijska matrica grešaka će biti jednaka

$\Omega \equiv \mathbb{E}[\varepsilon\varepsilon^T|X] = \Sigma \otimes I_R,$

gdje je I_R R-dimenzionalna matrica identiteta, a $\otimes$ označava Kroneckerov produkt. SUR model se najčešće procjenjuje koristeći FGLS metodu (eng. *feasible generalized least squares*). Metoda se provodi u dva koraka. U prvom koraku provodimo običnu metodu najmanjih kvadrata na jednadžbi (19). Reziduali od provedene regresije se koriste da se procijene elementi matrice Σ:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{R} \hat{\varepsilon}_i^T \hat{\varepsilon}_j.$$

U drugom koraku koristimo regresiju generaliziranih najmanjih kvadrata za jednadžbu (19) koristeći matricu varijanci $\widehat{\Omega} = \hat{\Sigma} \otimes I_R$:

$$\hat{\beta} = \left(X^{\mathrm{T}}\left(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I_R\right)X\right)^{-1} X^{\mathrm{T}}\left(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I_R\right)y.$$

Za male uzorke je procjenitelj nepristran ako se pretpostavi da greske ε_{ir} imaju simetričnu distribuciju. U velikim uzorcima je konzistentan i asimptotski normalan s distribucijom:

$$\sqrt{R}\left(\hat{\beta} - \beta\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \left(\frac{1}{R} X^{\mathrm{T}}(\Sigma^{-1} \otimes I_R)X\right)^{-1}\right).$$

3.3 KPSS test

Kwiatkowski – Phillips – Schmidt – Shin (KPSS) test se koristi u ekonometriji za testiranje nul hipoteze koja tvrdi da je promatrani vremenski niz stacionaran oko determinističkog trenda. Vremenski niz je izražen kao suma determinističkog trenda, slučajne šetnje i stacionarne greške, a KPSS test je test Lagrangeovog multiplikatora hipoteze da slučajna šetnja ima varijancu nula. KPSS testovi su namijenjeni da nadopune testove jediničnog korijena. Testiranjem i hipoteze o jediničnom korijenu i hipoteze o stacionarnosti, može se razlikovati niz za koji se čini da je stacionaran, niz za koji se čini da ima jedinični korijen te niz za koji podaci nisu dovoljni da bi bili sigurni je li stacionaran ili integriran (vidi [51]).

Poglavlje 4

Ekonometrijski ishodi i izračun

U ovom se poglavlju bavimo s ekonometrijskim ishodima koji su bitni za procjenu modela te također predstavljamo rekurzivan algoritam s kojim ćemo dobiti računalnu procjenu Tobinovog q (krucijalnog omjera u odlukama o držanju zaliha). Unatoč tomu što se mogu izvesti posebne procjene za jednadžbe (10) i (12) da se procjeni relevantnost teorije skladištenja, treba se uzeti u obzir da endogenost u običnim procjenama s metodom najmanjih kvadrata, može proizvesti nekonzistentne procjene parametara.
Stoga, da bismo se riješili ovih potencijalnih smetnji, simultano procjenjujemo jednadžbu spot cijene i funkciju prinosa od držanja. Koristimo trofaznu proceduru najmanjih
kvadrata (3SLS), koja je asimptotski efikasnija od procjena jedne jednadžbe, s ciljem da obratimo pozornost na endogenost, te ju računamo koristeći procjenitelj instrumentalnih varijabli (IV). S ciljem postizanja optimalnosti IV procjenitelja,

vektor instrumenata uključenih u 3SLS proceduru je izabran na način da zadovoljava uvjet ortogonalnosti (vidi [17]). Vrijedi istaknuti da, u modelima vremenskih nizova za robna tržišta, prisutnost autokorelacije (i heteroskedastičnosti) može voditi pristranim procjenama parametara modela (vidi [7]). GMM (generalizirana metoda momenata) procjena je predložena da obuhvati postojanje nestandardnih reziduala u sistemu, imajući na umu da se 3SLS i GMM procedure podudaraju kad kovarijacijska matrica poremećaja nije ponderirana s heteroskedastičnošću i autokorelacijom. S obzirom na momente populacije, skup ortogonalnih uvjeta za GMM procjenu se može zapisati na sljedeći način:

$$E[g(y_t, \psi)] = 0 \qquad (20)$$

gdje je y_t vektor promatranih varijabli u vremenu t, a ψ je vektor nepoznatih parametara koje procjenjujemo. Uzorački momenti od $g(\cdot)$ su dani s:

$$g_T(\psi) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} g(y_t, \psi). \qquad (21)$$

GMM procjenitelj određuje procjenu koja odgovara uzoračkim momentima $g_t(\psi)$ i populacijskim momentima danim s jednadžbom (21). Da bi se riješio taj problem, Hansen (1982) predlaže definiranje funkcije udaljenosti:

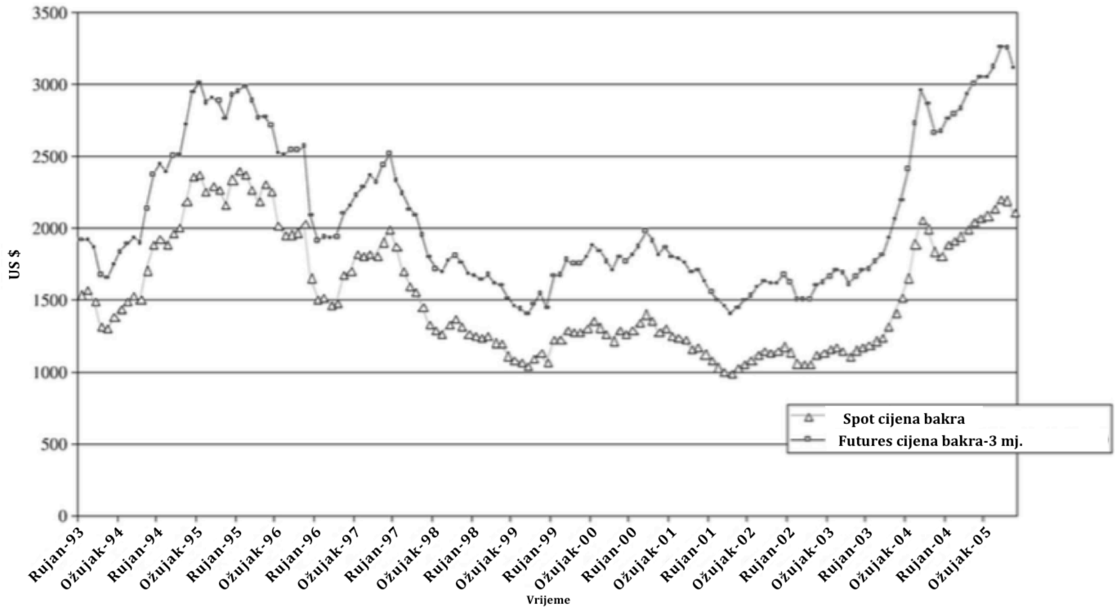
$$J_T(\psi) = [g_T(\psi)]W_T[g_T(\psi)] \qquad (22)$$

gdje je W_T simetrična i pozitivno-definitna težinska matrica. GMM procjenitelj je vrijednost $\hat{\psi}$ koja minimizira funkciju $J_T(\psi)$. Iz ovog rezultata dobivamo konzistentan procjenitelj kovarijacijske matrice od $\hat{\psi}$:

$$Var(\hat{\psi}) = \frac{1}{T}(G_T)W_T(G_T) \qquad (23)$$

gdje je $G_T = \partial g_T(\hat{\psi})/\partial\psi$. Optimalan GMM procjenitelj je dobiven izborom težinske matrice W_T koristeći uvjetnu heteroskedastičnost (vidi [17]). Nadalje, ovaj model nema prirodan izbor broja autokorelacijskih uvjeta. Empirijski koristimo Andrewsov (vidi [2]) izbor procedure selekcije pojasne širine (eng. *bandwith*) da identificiramo stohastički izraz.

Po preporuci Hansena i Singletona (vidi [18]), izvodimo GMM procjenu u dva koraka. Prvo, izabiremo suboptimalnu težinsku matricu s kojom provodimo minimizacijski program te dobivamo konzistentan procjenitelj za $\hat{\psi}$. U empirijskom dijelu, kompletna usporedivost modela procijenjenih s 3SLS i GMM procedurama je zadržana koristeći isti skup instrumenata. Nadalje, identificirajuće restrikcije mogu konzistentno biti testirane s pomoću $J_T(\hat{\psi}) = [g_T(\hat{\psi})]' W_T [g_T(\hat{\psi})]$ statistike. Koristeći teoretski model koji smo razvili, možemo izvesti optimalan uzorak zaliha za metale koji evoluira po pravilu Tobinovog q. Za svaki vremenski period, možemo izračunati optimalno pravilo skladištenja pomoću zakona kretanja zaliha tako da je $\rho(t) = q(t)$.



Slika 4.1 Spot i futures cijene

Zbog empirijske jednostavnosti, u obzir uzimamo diskretnu verziju (diskretno vrijeme) jednadžbe (F_S) u kojoj je razina zaliha u trenutku t-1 iskorištena kao početna vrijednost i optimalna stopa akumulacije zaliha koja je iskorištena da se dobije razina zaliha u trenutku t. Zbog toga što varijable iz $q(t)$ nisu određene u trenutku t-1, zamjenjujemo očekivane vrijednosti endogenih varijabli $P(t)$ i $\phi(t)$ prema jednadžbama (10) i (12). Stoga možemo izračunati sljedeći rekurzivni algoritam:

$$\hat{F}_S(t) = F_S(t-1)\hat{q}(t) \tag{24}$$

gdje je $\hat{q}(t) = \hat{q}\left(F_{S_{t-1}}, Q_{t-1}\right)\Delta t$.

Fokusirajući se na svjetsko tržište bakra, ispod raspravljamo o našim podacima, o svojstvima niza i procjeni modela prezentiranog u Poglavlju 1.

Poglavlje 5

Podaci i procijenjeni rezultati

Model je procijenjen koristeći mjesečne podatke za svjetsko tržište bakra u vremenskom intervalu od srpnja 1993. do srpnja 2005. Stoga će promjene varijabli od interesa biti aproksimirane na mjesečnoj bazi.
Na slici 4.1, prikazujemo LME (London Metal Exchange) spot cijene bakra i cijene futuresa bakra s tromjesečnim dospijećem. Nominalne mjesečne spot i futures cijene tj. (P) i (Pf) su dobivene kao prosjeci tjednih cijena zabilježenih svakog mjeseca i deflacionirane s američkim indeksom potrošačkih cijena (Consumer Price Index – CPI). Da bismo dobili procijenjen niz za ϕ, kamatna stopa (r) koja je korištena je tromjesečna američka Treasury bill stopa. Nadalje, indeks dolara od realnog tečaja (exc) je konstruiran kao nominalni široki dolarski indeks podijeljen s američkom razinom cijena, dok su cijene za sirovu naftu dobivene iz londonskog indeksa brenta sirove nafte (London Brent Crude Oil Index) (Ctd), a deflacionirane su s američkim indeksom proizvodnih cijena (Producer Price Index – ppi).

Tablica1

Preliminarne regresije za jednadžbe prinosa od držanja

Parametri	Procjena jdbe. (13)	Generalizirana procjena jdbe. (13)	Osnovni model zaliha
a_0	−38.02	−2.854	268.48
	[0.258]	[0.942]	[0.000]
a_1	0.127	0.1197	
	[0.000]	[0.000]	
a_2	−0.0001	−0.0002	−0.0005
	[0.000]	[0.004]	[0.000]
a_3	−0.042	−0.035	
	[0.716]	[0.758]	
a_4		0.11-09	0.25-09
		[0.092]	[0.001]

Napomena: procijenjeni model stupca 2 je ϕ=a0+a1P(t)+a2Fs(t)+a3σ(t)+e(t). Model pokazan u stupcu 3 je ϕ=a0+a1P(t)+a2Fs(t)+a3σ(t)+a4Fs(t)^2+e(t), a model u zadnjem stupcu je ϕ=a0+a1P(t)+a2Fs(t)+a3σ(t)+a4Fs(t)^2+e(t). U uglatim zagradama su zabilježene p-vrijednosti.

Tablica 5.1 Preliminarne regresije za jednadžbe za prinos od držanja

Svojstva vremenskog niza su proučena pomoću testova jediničnog korijena. Dickey-Fuller test korigiran za GLS procjenitelj je iskorišten za varijable u jednadžbama (10) i (12) tako što je uključena prisutnost/odsutnost determinističkih komponenti. Zbog robusnosti, također provodimo KPSS test (Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin test) u kojem se nulta hipoteza o stacionarnosti testira nasuprot alternativnoj hipotezi o nestacionarnosti. Rezultati su prikazani u Dodatku 5.4 i naglašavaju sveukupno odbacivanje hipoteze o prisutnosti jediničnog korijena koje opravdava korištenje klasičnih metoda procjene za naš model.

S empirijskim testiranjem utjecaja zaliha na tržište bakra, preliminarno potvrđujemo ulogu teorije skladištenja: ono nagovještava da zalihe uvelike utječu na spot cijene na tržištima metala. Prvo, procjenjujemo specifikaciju jednadžbe (12). Rezultati su prikazani u prvom stupcu Tablice 5.1 i dobiveni su pomoću OLS procjenitelja. Značajna i linearno negativna veza između prinosa od držanja i zaliha je zabilježena za poljoprivrednu robu (vidi [5]) i na tržištima za bakar, drvo i lož-ulje (vidi [34]). Drugo, da bi testirali prisutnost nelinearnosti u vezi, uključujemo kvadratni izraz u razinu zaliha ($2\ F_S$) u jednadžbi (12) (vidi [27, str. 12]). U proširenoj specifikaciji (vidi drugi stupac Tablice 5.1), ističemo da je kvadratni izraz u zalihama ne utječe na granični prinos od držanja. Međutim, ovaj rezultat ne implicira *a priori* odbacivanje teorije skladištenja. U stvari, protučinjenični test je

baziran na ograničenoj specifikaciji u kojoj je granični prinos od držanja zaliha regresiran pomoću polinomijalne strukture drugog reda[6] po varijabli zaliha (nezavisna varijabla). Naznačili smo robusnost veze između zaliha i graničnog prinosa od držanja, a rezultati modela, prikazani u stupcu 3, pokazuju pozitivan i značajan koeficijent za kvadratni izraz u zalihama (F_S^2). Iz ovog dokaza, možemo naglasiti da promjena u zalihama bakra ne utječe samo na uzorke kretanja spot cijene bakra, nego također i na granični prinos od držanja na nelinearan način.
Zbog simultanosti između kupnje i prodaje na spot tržištu i odluka o držanju zaliha, spot cijena u jednadžbi (10) stvara probleme endogenosti i potencijalnu nekonzistentnost OLS procjenitelja. Zbog tog razloga, jednadžbe (10) i (12) su procijenjene u multivarijantnom afinom okviru u kojem koristimo procjenitelj instrumentalnih varijabli preko 3SLS i GMM procedura.
U prvom stupcu Tablice 5.2, pokazali smo parametre jednadžbe cijena i graničnog prinosa od držanja procijenjenih s 3SLS procedurom. Instrumenti su naznačeni na dnu Tablice 5.2 i te su empirijski pogodni. Procijenjeni parametri su koherentni i s ekonomskog i sa statističkog stajališta. Pozitivna promjena u zalihama smanjuje trenutnu dostupnost bakra za spot transakcije i stoga ima pozitivna utjecaj na spot cijenu. Stoga, kako su istaknuli Chambers i Bailey (vidi [7]) i Deaton i Laroque (vidi [10] i [11]), čini se da zalihe igraju značajnu ulogu u utjecaju na uzorak spot cijena na robnim tržištima. Nadalje, značajan i negativan koeficijent uz tečaj sugerira da se oni koji investiraju u bakar prilagođavaju monetarnim šokovima s značajnim efektima na tržišne transakcije (vidi [15]). Kao što je i očekivano, procijenjeni parametar sirove nafte ima pozitivan utjecaj na spot cijenu. Važnost ovog inputa u proizvodnji bakra rezultira povećanjem u graničnim troškovima čiji su efekti uključeni u spot cijenu.

[6] Vrsta nelinearne regresije tipa $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \varepsilon$

Tablica 2
Rezultati procjene jednadžbi (11) i (13)

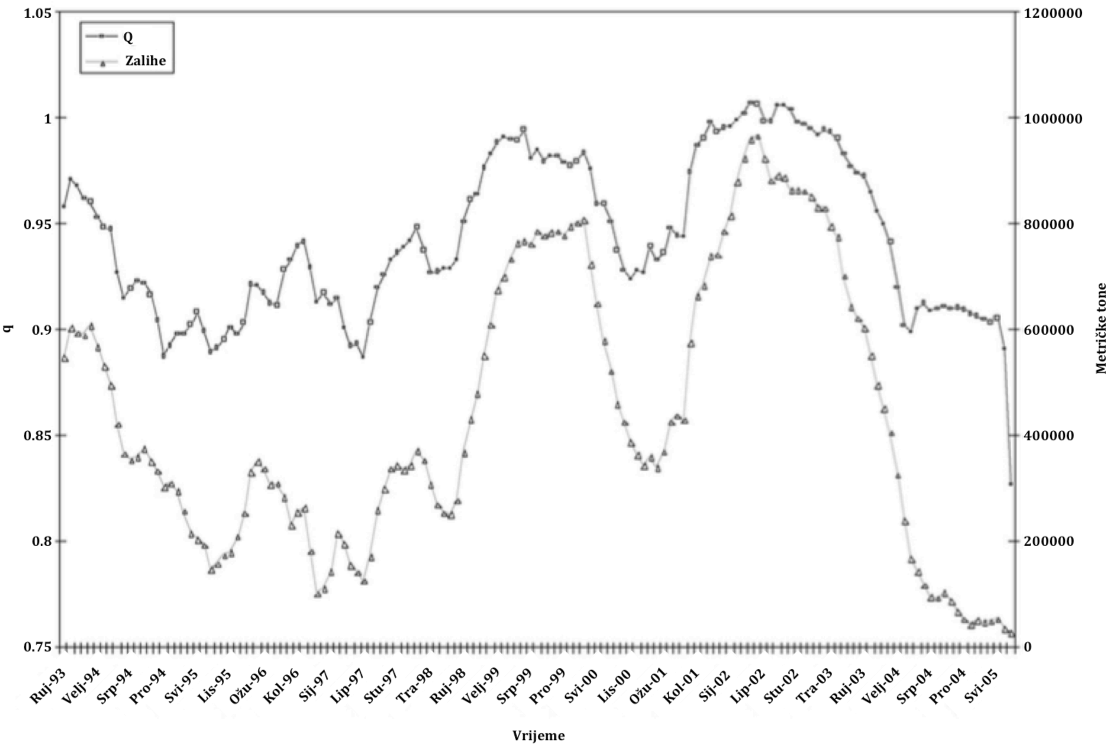
Parametri	3SLS	3SLS	GMM
δ_0	5436.31	5432.45	5313.62
	[21.393]	[21.452]	[12.106]
δ_1	0.0021	0.0021	0.0021
	[2.608]	[2.563]	[1.862]
δ_2	−42.813	−42.789	−41.172
	[−16.551]	[−16.61]	[−10.87]
δ_3	8.5274	8.607	7.513
	[2.250]	[2.282]	[1.648]
a_1	0.075	0.065	0.066
	[7.006]	[25.32]	[12.76]
a_2	−0.706-04	−0.657-04	−0.693-04
	[−7.320]	[−8.219]	[−6.626]
a_3	−0.2334		
	[0.909]		
Jednadžba cijene	R^2=0.819	R^2=0.821	R^2=0.817
Jednadžba prinosa od držanja	R^2=0.772	R^2=0.788	R^2=0.787
J-test			16.7388 [0.160]

Napomena: t-Studentove statistike su zabilježene u zagradama ispod procjena. P-vrijednost od J-testa je zabilježena u uglatim zagradama. Instrumenti korišteni u procjenama su: konstanta, trend, pbrent, pgas, exc, σ(-1), dFs(-1), Fs(-1), P(-1).

Tablica 5.2 Rezultati procjene jednadžbi (11) i (13)

Preliminarni statistički testovi za strukturalnu stabilnost graničnog prinosa od držanja u jednadžbi (12) ne pokazuju specifične šokove, dok su procijenjeni koeficijenti konzistentni s teoretskom podlogom. Spot cijene pozitivno utječu na granični prinos od držanja: kad spot cijena raste, pogodnost držanja uskladištene jedinice bi trebala također narasti. Držanje zaliha je negativno povezano s graničnim prinosom od držanja čija vrijednost bi trebala konvergirati k nuli kako uskladištene količine idu u beskonačnost. Obratno, koeficijent volatilnosti spot cijene nije statistički značajan. Stoga se provodi škrta specifikacija jednadžbe graničnog prinosa od držanja tako da se izuzme volatilnost cijena bakra (vidi stupac 2 u Tablici 5.2). Procijenjeni rezultati potvrđuju teoretske sugestije i procijenjeni koeficijenti su blizu onima navedenim u stupcu 1. Ishodi dijagnostičkih procedura su konzistentni s nedostatkom heteroskedastičnosti i autokorelacije u obje jednadžbe. Procijenjena jednadžba cijene naglašava da je hipoteza homoskedastičnosti, koja je testirana s LM statistikom, odbačena za cjenovnu jednadžbu 4.2527 [0.039]. Međutim, kao što je već navedeno prije, problemi serijske korelacije utječu na obrazac cijena. Da bi generalizirali test serijske korelacije, koristimo multivarijantni okvir baziran na Fisherovoj distribuciji za

konačne nizove, po Harveyu (vidi [19]). Empirijska vrijednost ove testne procedure (F(4.269)) jednaka je 58.96 (p-vrijednost=0.00) i pokazuje prisutnost značajne dosljednosti na svjetskom tržištu bakra.
Kako bi se riješila pitanja oko heteroskedastičnosti i autokorelacije, procjenjujemo model s bakrom pomoću GMM procedure. Zbog usporedivosti između procjena, uvjeti ortogonalnosti su zadovoljeni držeći skup instrumenata koji se koriste u 3SLS procjenama nepromijenjenim. U prvoj fazi GMM procjene, najznačajniji instrumenti za dvije jednadžbe leže i na cijenama s pomakom i na zalihama. Nadalje, procjene za jednadžbu spot cijene mogu biti značajno poboljšane koristeći vremenski trend kao instrument. Činjenica da vremenski trend predstavlja vrijedan instrument u jednadžbi spot cijene može biti racionalizirana trajnošću spot cijene bakra. U stupcu 3, rezultati su ekonomski konzistentni s obzirom na prošla otkrića, unatoč tome što veličina nekih koeficijenata može biti blago drugačija.
Kao što je već spomenuto, za svaku specifičnu kombinaciju (Q, F_S), računamo optimalnu stopu skladištenja koristeći predviđanja dobivena iz GMM procjena za jednadžbe spot cijene i graničnog prinosa od držanja. Na Slici 5.3, pokazujemo optimalnu stopu skladištenja i agregatne zalihe. Vrijednosti za optimalnu stopu skladištenja (q) su općenito manje od jedan s opadajućim trendom akumulacije zaliha isključujući mjesece poslije 9/11 (teroristički napad).



Slika 5.3 Procijenjeno pravilo skladištenja (q) i zalihe

Ustvari, ponašanje ekonomskih subjekata (špekulanata) iznova mijenja optimalnu putanju zaliha s pozitivnim efektima supstitucije između imovine pošto je premija rizika financijske imovine dovela do toga da ona bude unosnija od tržišta metala (vidi [38]). Što se tiče ostale robe, dogodio se rastući ciklus akumulacije zaliha s tržišta bakra nakon usporavanje svjetskog gospodarstva potaknutog terorističkim činom 9/11. Volatilnost cijena je bila povećana sa svjetskim šokom te je to natjeralo subjekte da akumuliraju zalihe zbog rastućeg prinosa od držanja.
Konačno, pomoću algoritma opisanog u Poglavlju 4, prilagođene (eng. *fitted*) vrijednosti zaliha, $\widehat{F_S}$, su uspoređene s uzorkom Tobinovog q. Može se ocijeniti da izračunate vrijednosti Tobinovog q precizno prate ponašanje subjekata koji drže zalihe na svjetskom tržištu bakra.

Dodatak: testovi jediničnog korijena

Test	P_t	f_t	Fs_t	dFs_t	EXC_t	Ctd_t	σ_t
DF(GLS)	−1.941**	−1.742*	−1.762*	−4.613***	−1.632*	−1.692*	−2.312**
KPSS	0.334	0.304	0.218	0.147	0.325	0.342*	0.307

Napomena: kritične vrijednosti Dickey-Fuller testa (H0=nestacionarnost), ispravljene za GLS procjenu, su izvedene od strane Elliotta, Rothenberga i Stocka te uređeno u tablicu od strane MacKinnona (1996). Vrijednosti na razini 1%, 5% i 10% su 2.58, 1.94 i 1.61. Asimptotske kritične vrijednosti od Kwiatowski-Phillips-Schmidt-Shin testa (H0=stacionarnost)na razini 1%, 5% i 10% su 0.79, 0.46 i 0.34. Označavamo signifikantnost testa s brojem zvjezdica: *(10%), **(5%) i ***(1%).

Dodatak 5.4 Testovi jediničnog korijena

Poglavlje 6

Zaključak

U ovom članku, izvodimo model za robna tržišta metala iz okoline u različitim vremenskim trenucima. Optimizacijski problem se provodi pomoću tehnike dinamičkog programiranja u kojoj, za svaki vremenski period, tržišni subjekti mogu kontrolirati razinu proizvodnje i količinu metalne robe koja će se uskladištiti. U usporedbi s trenutnim stanjem, doprinos ovog članka je dvostruk. Prvo, zatvorena forma rješenja granične vrijednosti za skladištenje izravno proizlazi iz modela te možemo empirijski izračunati Tobinovu q funkciju koristeći jednadžbu mjerenja za graničan prinos od držanja. Drugo, iz naših analitičkih izračuna, možemo istražiti agregirano ponašanje u vezi strategije držanja zaliha pojedine robe. Interpretacija Tobinovog q je jednostavna te se ponaša kao referentna vrijednost u investicijskoj

teoriji tj. akumulira zalihe kad su granične koristi od držanja zaliha veće od graničnih troškova skladištenja.
Koristili smo svjetske podatke o bakru da testiramo teoretski model. Procjene jednadžbi spot cijene i graničnog prinosa od držanja su dobivene s 3SLS i GMM procedurama. Smatramo da su procijenjeni parametri statistički robusni za različite specifikacije i koherentni s teoretskim predviđanjima. Međutim, novost u ovom članku leži u tome što je pokazao da se optimalno pravilo u neprekidnom vremenu za Tobinovo q može dobiti u izrazima relativnih cijena, tako da procijenjena vrijednost Tobinovog q manja od jedan implicira opadajuću instantnu korekciju zaliha. Dokaz toga je bio testiran u periodu od 1993. do 2005. kad su šokovi na strani potražnje na svjetskom tržištu bakra bili usko povezani s poslovnim ciklusom i kad su pozitivni granični prinosi od držanja smanjili razine zaliha. Tek nakon 9/11, kao rezultat visoke tržišne nesigurnosti, financijska tržišta su zabilježila pad graničnog prinosa od držanja, tjerajući ekonomske subjekte da drže više zaliha zbog motiva iz predostrožnosti. Konačno, s obzirom na robusnost rezultata i dobre performanse empirijskog okvira, moguće je bilo koje proširenje našeg modela na druga robna tržišta i na veću frekvenciju podataka.

Bibliografija

[1] Agostini, C., *Estimating market power in the US copper industry*. Review of Industrial Organization 28 (2006), 17–39.

[2] Andrews, D.W.K., *Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation*. Econometrica 59 (1991), 817–858.

[3] Bessembinder, H., Coughenour, J., Seguin, P., Smoller, M., *Mean reversion in equilibrium asset prices: evidence from the futures term structure,* Journal of Finance 50 (1995), 361–375.

[4] Black, F., *The pricing of commodity contracts*. Journal of Financial Economics 3 (1976), 167–179.

[5] Brennan, M.J., *The supply of storage*. American Economic Review 48 (1958), 50–72.

[6] Brennan, M.J., Schwartz, E., *Evaluating natural resource investments*, Journal of Business 20 (1985), 135–157.

[7] Chambers, M.J., Bailey, R.E., *A theory of commodity price fluctuations*, Journal of Political Economy 104 (1996), 924–957.

[8] Casassus, J., Collin-Dufresne, P., *Stochastic convenience yield implied from commodity futures and interest rates*, Journal of Finance 60 (2005), 2283–2331.

[9] Clewlow, L., Strickland, C., *Energy Derivatives: Pricing and Risk Management*. Lacima Publications, London, 2000.

[10] Deaton, A., Laroque, G., *On the behaviour of commodity prices*, Review of Economic Studies 59 (1992), 1–23.

[11] Deaton, A., Laroque, G., *Competitive storage and commodity price dynamics*, Journal of Political Economy 104 (1996), 896–923.

[12] De Grauwe, P., *International Money: Postwar-Trends and Theories*, Oxford University Press, Oxford, 1996.

[13] Eckstein, Z., Eichenbaum, M.S., *Inventories and Quantity-Constrained Equilibria in Regulated Markets: The US Petroleum Industry, 1947–1972*, u Sargent T, *Energy Foresight and Startegy*. Resources for the Future, Washington D.C., 1985.

[14] Fama, E., French, K., *Business cycles and the behaviour of metals prices*, Journal of Finance 43 (1988), 1075–1093.

[15] Gilbert, C.L., *The impact of exchange rates and developing country debt on commodity price*, Economic Journal 99 (1989), 773–784.

[16] Gilbert, C.L., *Modelling market fundamentals: a model of aluminium market*, Journal of Applied Econometrics 10 (1995), 385–410.

[17] Hansen, L., *Large sample properties of generalized method of moments estimators*, Econometrica 50 (1982), 1029–1054.

[18] Hansen, L., Singleton, K.J., *Generalized instrumental variables estimation of nonlinear rational expectations models*, Econometrica 50 (1982), 1269–1286.

[19] Harvey, A., *The Econometric Analysis of Time Series, drugo izdanje*, MIT Press, Cambridge, (1990).

[20] Hayashi, F., *Tobin's marginal q and average q: a neoclassical interpretation*. Econometrica 50 (1982), 213–224.

[21] Kaldor, N., *Speculation and economic stability*, Review of Economic Studies 7 (1939), 1–27.

[22] Kwiatkowski, D., Phillips, P.C.B., Schmidt, P., Shin, Y., *Testing the null hypothesis*

of stationarity against the alternative of a unit root: how sure we are that economic time series have a unit root?, Journal of Econometrics 1–3 (1992), 159–178.

[23] MacKinnon, J.G., *Numerical distribution functions for unit root and cointegration tests*, Journal of Applied Econometrics 11 (6) (1996), 601–618.

[24] Miltersen, K.R., Schwartz, E.S., *Pricing of option on commodity futures with stochastic term structures of convenience yields and interest rates*, Journal of Financial and Quantitative Analysis 33 (1998), 33–59.

[25] Miranda, M.J., Helmberger, P.G., *The effects of price band buffer stocks programs*, American Economic Review 78 (1988), 46–58.

[26] Miranda, M.J., Rui, X., *An Empirical Reassessment of the Commodity Storage Model*, Working Paper: Ohio State University, 1999.

[27] Ng, S., Ruge-Murcia, F.J., *Explaining the Persistence of Commodity Price, Department of Economics,* Boston College, Boston, 1997.

[28] Nielsen, M.J., Schwartz, E.S., *Theory of storage and the pricing of commodity claims*, Review of Derivatives Research 7 (2004), 5–24.

[29] Pesaran, M.H., *Global and partial non-nested hypotheses and asymptotic local power*, Econometric Theory; 12 (1987), 69–97.

[30] Pesaran, M.H., *An econometric model of exploration and extraction of oil in the UK continental shelf*, Economic Journal 100 (1990), 367–390.

[31] Pieroni, L., Ricciarelli, M., *Testing rational expectations in primary commodity markets*, Applied Economics 37 (2005), 1705–1718.

[32] Pindyck, R.S., *Inventories and short run dynamics of commodity prices*, RAND Journal of Economics 25 (1994), 141–159.

[33] Pindyck, R.S., *The dynamics of commodity spot and futures markets: a primer*,

The Energy Journal 22 (2001), 1–29.

[34] Pindyck, R.S., *Volatility and commodity price dynamics*, Journal of Futures Market 24 (2004), 1029–1047.

[35] Pirrong, S.C., *Price Dynamics and Derivatives Prices for Continuously produced, storable commodities*. Working Paper: University of Washington, 1998.

[36] Shinkman, J.A., Schectman, J., *A simple competitive model with production and storage*, Review of Economic Studies 50 (1983), 427–441.

[37] Schwartz, E.S., Smith, J.E., *Short-term variation and long-term dynamics in commodity prices*, Management Science 46 (2000), 893–911.

[38] Thurman, W.N., *Speculative carryover: an empirical examination of the U.S. refined copper market*, RAND Journal of Economics 19 (1988), 420–437.

[39] Tobin, J., *A general equilibrium approach to money*, Journal of Money, Credit and Banking 1 (1969), 15–29.

[40] Williams, J.B., *Speculation and the carryover*, Quarterly Journal of Economics 50 (1936), 436–455.

[41] Working, H., *Theory of the inverse carrying charge in futures markets*, Journal of Farm Economics 30 (1948), 1–28.

[42] Wright, B.D., Williams, J.C., *The economic role of commodity storage*, Economic Journal 92 (1982), 596–614.

[43] Wright, B.D., Williams, J.C., *Storage and Commodity Markets*, Cambridge University Press, New York, 1991.

[44] *Convenience yield et al.*, dostupno na: http://www.investopedia.com/terms/b/backwardation.asp?layout=infini&v=3A (prosinac 2015.).

[45] Mitraille, S., Thille, H., *Speculative storage in imperfectly competitive markets*, International Journal of Industrial Organization 35 (2014), 44–59.

[46] Greene, W.H., *Econometric analysis (5th ed.)*, Prentice Hall, New York, 2002.

[47] Davidson, R., MacKinnon, J.G., *Estimation and inference in econometrics*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[48] Hayashi, F., *Econometrics*, Princeton University Press, 2000.

[49] Zellner, A., *An efficient method of estimating seemingly unrelated regression equations and tests for aggregation bias*, Journal of the American Statistical Association 57, (1962) 348–368.

[50] Srivastava, V.K., Giles, D.E.A., *Seemingly unrelated regression equations models: estimation and inference*. New York, Marcel Dekker, 1987.

[51] Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P., Shin, Y., *Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root*, Journal of Econometrics 54 (1–3), (1992) 159–178.

[52] Brockwell, P.J., Davis, R.A., *Introduction to Time Series and Forecasting(2nd edition),* Springer, 2001.

[53] Pieroni, L., Ricciarelli, M., *Modelling dynamic storage function in commodity markets: Theory and evidence*, Economic Modelling 25 (2008), 1080–1092.

[54] Kamien, M.I., Schwartz, N.L., *Dynamic Optimization:The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*,North Holland, New York, 1981.

Sažetak

Ovaj rad je detaljnija obrada članka autora *Luce Pieronia* i *Mattea Ricciarellia* pod nazivom: *"Modelling dynamic storage function in commodity markets: Theory and evidence"* odnosno prevedeno na hrvatski : *"Modeliranje funkcije dinamičkog skladištenja na tržištima roba: Teorija i dokazi".* U radu, slijedeći tzv. modernu teoriju skladištenja, modeliramo cijene robe u međuvremenskom okviru u kojem racionalni subjekt može prenositi robu kao zalihe iz trenutnog u buduće razdoblje zbog špekulativnih potreba i opreza. U prvom poglavlju opisujemo ekonomsku teoriju i motivaciju koja se nalazi iz svjetskog tržišta metala, konkretnije bakra. U drugom poglavlju uvodimo pojam Hamiltonijana te definiramo optimizacijski problem i ograničenja zajedno s postupkom optimizacije funkcije cilja. U trećem poglavlju navodimo potrebne alate za ekonometrijsku analizu dok u četvrtom poglavlju primjenjujemo navedene alate na podacima. U petom poglavlju komentiramo podatke i dobivene rezultate. U šestom poglavlju dajemo zaključak te komentiramo ponašanje ekonomskih agenata s obzirom na Tobinovo q.

Summary

This paper is more detailed version of the article by authors *Luca Pieroni* and *Matteo Ricciarelli: "Modelling dynamic storage function in commodity markets: Theory and evidence"* . In this paper, by following so called modern theory of storage, we model commodity prices in an intertemporal framework, in which, a rational subject can carry commodity as stocks from present to the future period for speculative purposes and caution. In first chapter, we describe economic theory and motivation behind world metal market, particularly copper market. In second chapter, we introduce the Hamiltonian and define optimization problem with it's constraint together with optimization procedure. In third chapter, we mention necessary tools for econometric analysis while in fourth chapter, we apply those tools on our data. In fifth chapter, we comment on data and results. The conclusion is given the in sixth chapter, together with a comment on behaviour of economic agents with the respect to the Tobin's q.

Životopis

Rođen sam 15. Kolovoza 1991. u Homburgu u Saveznoj državi Njemačkoj. Pohađao sam osnovnu školu Pavleka Miškine u Zagrebu. Nakon osnovne škole sam upisao V. gimnaziju u Zagrebu. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja natjecao sam se iz raznih predmeta, sa zapaženim rezultatima iz fizike koji su mi omogućili izravan upis na Prirodoslovno matematički fakultet koji upisujem 2010. godine. Zbog mojeg velikog zanimanja za ekonomiju, 2011. godine paralelno upisujem redovni Preddiplomski studij Ekonomiju na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu. Na Prirodoslovno matematičkom fakultetu na prvoj godini dobivam stipendiju Republike Hrvatske kao i na prvoj i drugoj godini na Ekonomskom fakultetu. Sudjelujem u radu studentske udruge eStudent te na studentskom natjecanju Case Study Competition osvajam treću nagradu u suradnji s kolegom s fakulteta. Na Ekonomskom fakultetu primam od prve godine nagradu časopisa Lider za najbolje studente. Nakon završenog Preddiplomskog studija Matematike, upisujem Diplomski studij Poslovne i financijske matematike. Na trećoj godini studija ekonomije dobivam stipendiju Grada Zagreba za najbolje studente. U ljeto 2015. obavljam studentsku praksu u tvrtki *PricewaterhouseCoopers* u Zagrebu na poziciji konzultanta. U listopadu 2015. odlazim u Beč na studentsku razmjenu u sklopu programa Erasmus+.