

Universität Rostock
Fakultät für Informatik und Elektrotechnik
Institut für Nachrichtentechnik
Richard-Wagner-Straße 31
D 18119 Warnemünde

Skript

Einführung in die Hochfrequenztechnik

Prof. Dr.-Ing. habil. Tobias Weber

20. November 2018

Universität Rostock *

*DOI: https://doi.org/10.18453/rosdok_id00002329

Vorwort

Die Hochfrequenztechnik befasst sich mit dem Nutzen elektromagnetischer Felder hoher Frequenzen in technischen Systemen. Bei hohen Frequenzen gibt es Wechselwirkungen zwischen elektrischen und magnetischen Feldern, die eine Wellenausbreitung ermöglichen. Insbesondere lassen sich integrale Größen wie Spannungen und Ströme im Allgemeinen nicht mehr sinnvoll definieren. Folglich ist der Systementwurf mit den auf konzentrierten Bauelementen basierenden Konzepten der Elektronik nicht mehr möglich. Man muss vielmehr wieder direkt von den Maxwell'schen Gleichungen ausgehen. Eine Abstraktion ist aber auch hier möglich. Sie basiert auf komplexen Wellenamplituden und hat sich in den letzten Jahrzehnten als sehr ergiebig erwiesen. Diese wellenbasierte Sichtweise charakterisiert die Hochfrequenztechnik als eigenständige Disziplin innerhalb der Elektrotechnik.

Die Hochfrequenztechnik ist eines der traditionellen Fachgebiete der Elektrotechnik. Ihre Entwicklung lässt sich bis zur Veröffentlichung der Maxwell'schen Gleichungen zurückverfolgen. Seitdem wurde ein umfangreiches Fachwissen zusammengetragen. Zahlreiche Veröffentlichungen zeugen davon. Im Literaturverzeichnis findet man eine kleine Auswahl bewährter Lehrbücher der Hochfrequenztechnik [Bae98; Col01; Gus13; Poz12; RWD94]. Hier steht zumeist der Entwurf hochfrequenztechnischer Komponenten im Vordergrund. Ein Blick auf das heutige Berufsbild offenbart jedoch, dass das Anwenden der Hochfrequenztechnik, das heißt das Zusammenfügen hochfrequenztechnischer Komponenten zu komplexen Systemen und die zumeist digitale Verarbeitung von Signalen aus einer hochfrequenztechnischen Umgebung in einem eingebetteten System im Vordergrund der beruflichen Praxis stehen. Beispiele derartiger Anwendungen sind

- die Hochfrequenzmesstechnik [Sch99; Wit14],
- Funkkommunikationssysteme [Gol05; Mol11; TV05],
- die Radartechnik [Lev88; Ric14] und
- Funknavigationssysteme [Ler95; SDM14].

Aufgrund der Komplexität und der hohen geforderten Performanz derartiger Systeme ist das Beherrschen theoretisch fundierter Modellierungstechniken und die

Kenntnis des Verhaltens typischer hochfrequenztechnischer Komponenten unerlässlich. Ziel des vorliegenden Buchs ist es, dieses Wissen in kompakter Form darzustellen, ohne aber auf mathematische Exaktheit zu verzichten. Dies wird durch eine Konzentration auf zentrale, allgemein anwendbare Theorien und Modelle der Hochfrequenztechnik und eine konsequente Abstraktion erreicht.

Die Maxwell'schen Gleichungen bilden ein System linearer und verschiebungs-invarianter Differentialgleichungen. Es ist daher nicht verwunderlich, dass es enge Querbeziehungen zur typischerweise im Rahmen der Signal- und Systemtheorie und der Nachrichtentechnik behandelten Theorie der linearen zeitinvarianten Systeme gibt [FB08; OL10]. An den entsprechenden Stellen im vorliegenden Buch wurden diesbezügliche Anmerkungen eingefügt. Diese sollen dem mit der Signal- und Systemtheorie vertrauten Leser eine vertiefte Durchdringung der Thematik ermöglichen, sind aber keine Voraussetzung für das weitere Studium des Buchs.

Das Buch ist in zwei Teile gegliedert. Der erste Teil beschäftigt sich mit der feldtheoretischen Modellierung [Bal12; Bla07; Har01; Leh10; PM13; Str41]. Die feldtheoretische Modellierung ist auch heute noch unverzichtbar, da sie nicht nur die Grundlage abstrakterer Modelle bildet, sondern insbesondere auch zur Analyse von Antennen unumgänglich ist [Bal05; Kar11; KM03; ST13]. Antennen bilden einen zentralen Bestandteil der meisten hochfrequenztechnischen Systeme. Gerade die Fähigkeit der von Antennen abgestrahlten elektromagnetischen Wellen sich im freien Raum ausbreiten zu können, macht die Hochfrequenztechnik für technische Anwendungen interessant. Ein Vereinfachen der Darstellung und Fokussieren auf die physikalischen Grundprinzipien gelingt bei der feldtheoretischen Modellierung durch ausschließliches Betrachten einfacher Materialien, das Vernachlässigen von Verlusten und die Konzentration auf die für technische Anwendungen primär interessanten ausbreitungsfähigen Wellen.

Der zweite Teil des Buchs beschäftigt sich mit der abstrakteren auf komplexen Wellenamplituden basierenden Modellierung [Hof97; Mic81]. Durch eine derartige Abstraktion werden auch komplexe Systeme beherrschbar, ohne dass Modellierungsgenauigkeit verloren geht. Die moderne Hochfrequenzschaltungstechnik basiert auf der Modellierung mittels komplexer Wellenamplituden und mit dem Vektornetzwerkanalysator existiert auch eine entsprechende Messtechnik [Hie11]. Neben dem idealen Verhalten hochfrequenztechnischer Komponenten [Gon97; MYJ80] wird auch das in vielen Fällen performanzbegrenzende und praktische Systemarchitekturen motivierende Rauschen diskutiert [SRS06].

Im Anhang findet man neben den Lösungen der Aufgaben ergänzende Ausführungen zu nichtlinearen Systemen und der Fourier-Analyse. Nichtlineares Verhalten tritt häufig unerwünschter Weise in realen Systemen auf, kann aber auch gezielt genutzt werden [TSG16]. Die Fourier-Analyse ist Grundlage vieler Verfahren der Hochfrequenzmesstechnik wie der Spektralanalyse [KK12; SM05].

Inhaltsverzeichnis

I. Feldtheoretische Modellierung	1
1. Feldtheoretische Grundlagen	3
1.1. Maxwellsche Gleichungen	3
1.1.1. Feldgrößen und ihre komplexen Amplituden	3
1.1.2. Durchflutungsgesetz	5
1.1.2.1. Integrale Form	5
1.1.2.2. Differentielle Form, Satz von Stokes	6
1.1.3. Induktionsgesetz	9
1.1.3.1. Integrale Form	9
1.1.3.2. Differentielle Form	9
1.1.4. Quellen des elektrischen Feldes	10
1.1.4.1. Integrale Form	10
1.1.4.2. Differentielle Form, Satz von Gauß	10
1.1.5. Quellen des magnetischen Feldes	13
1.1.5.1. Integrale Form	13
1.1.5.2. Differentielle Form	13
1.1.6. Ladungserhaltung	14
1.1.7. Materialgleichungen	15
1.2. Bedingungen an Grenzflächen	16
1.2.1. Elektrisches Feld an einer Grenzfläche	16
1.2.2. Magnetisches Feld an einer Grenzfläche	18
1.2.3. Grenzfläche zweier Dielektrika	19
1.2.4. Oberfläche eines idealen elektrischen Leiters	20
1.2.5. Oberfläche eines idealen magnetischen Leiters	20
1.2.6. Dualität von elektrischem und magnetischem Feld	21
1.3. Poynting-Vektor	22
2. Elektromagnetische Wellen	25
2.1. Helmholtz-Gleichungen	25
2.2. Zylindrische Wellenleiter	26
2.2.1. Helmholtz-Gleichungen für zylindrische Wellenleiter	26

2.2.2.	Transversalkomponenten und Longitudinalkomponenten	28
2.2.3.	Transversalelektromagnetische Wellen	29
2.2.4.	Transversalelektrische Wellen	31
2.2.5.	Transversalmagnetische Wellen	32
2.2.6.	Phasenkonstante und Wellenlänge	33
2.2.7.	Phasengeschwindigkeit	34
2.2.8.	Gruppengeschwindigkeit	36
2.3.	Ebene homogene Welle im freien Raum	38
3.	Wellenleiter	43
3.1.	Hohlleiter	43
3.1.1.	Aufbau von Hohlleitern	43
3.1.2.	Transversalelektrische Wellen in Hohlleitern	44
3.1.3.	Transversalmagnetische Wellen in Hohlleitern	46
3.2.	Zweileitersysteme	48
3.2.1.	Aufbau von Zweileitersystemen	48
3.2.2.	Transversalelektromagnetische Wellen auf Zweileitersystemen	48
3.2.2.1.	Feldstärken	48
3.2.2.2.	Spannung	50
3.2.2.3.	Strom	50
3.2.2.4.	Wellenwiderstand	51
3.2.2.5.	Ersatzschaltbild	52
3.2.2.6.	Leistung	53
3.2.3.	Beispiele von Zweileitersystemen	54
3.2.3.1.	Bandleitung	54
3.2.3.2.	Koaxialleitung	58
3.2.3.3.	Planare Wellenleiter	59
3.3.	Transversalelektromagnetische Wellen auf Mehrleitersystemen	60
3.3.1.	Allgemeine Mehrleitersysteme	60
3.3.2.	Symmetrische Dreileitersysteme	65
4.	Antennentheorie	71
4.1.	Vektorpotential	71
4.2.	Kugelkoordinaten	72
4.2.1.	Koordinatentransformation	72
4.2.2.	Integrationselemente	74
4.2.3.	Vektoranalysis für krummlinige orthogonale Koordinaten	75
4.2.3.1.	Gradient	75
4.2.3.2.	Divergenz	76
4.2.3.3.	Rotation	77

4.2.3.4. Laplace-Operator	78
4.3. Berechnen des magnetischen Vektorpotentials	79
4.4. Fernfeldnäherung	82
4.5. Reziprozitätstheorem	88
4.6. Eindeutigkeitstheorem	88
4.7. Spiegelungsprinzipien	90
4.7.1. Spiegelung am idealen elektrischen Leiter	90
4.7.2. Spiegelung am idealen magnetischen Leiter	90
4.8. Äquivalenztheoreme	91
4.8.1. Huygenssches Prinzip	91
4.8.2. Formulierung mit feldfreiem Innenraum	92
4.8.3. Formulierung mit idealen Leitern	93
4.9. Momentenmethode	96
4.9.1. Lösungsansatz der Momentenmethode	96
4.9.2. Analyse einer Dipolantenne	98
5. Antennenbauformen	105
5.1. Kenngrößen von Antennen	105
5.1.1. Richtfaktor und Gewinn	105
5.1.2. Richtcharakteristik	106
5.2. Lineare Antennen	109
5.2.1. Allgemeine Betrachtungen zu linearen Antennen	109
5.2.2. Dipolantennen mit sinusförmiger Strombelegung	112
5.3. Aperturantennen	116
5.3.1. Allgemeine Betrachtungen zu Aperturantennen	116
5.3.2. Aperturantennen mit konstanter Strombelegung	119
5.4. Gruppenantennen	122
5.4.1. Allgemeine Betrachtungen zu Gruppenantennen	122
5.4.2. Lineare Gruppenantennen	123
5.4.2.1. Allgemeine Betrachtungen	123
5.4.2.2. Strombelegung konstanten Phasendekrements	125
6. Ausbreitung elektromagnetischer Wellen	131
6.1. Freiraumausbreitung	131
6.1.1. Wirkfläche	131
6.1.2. Empfangsleistung	131
6.1.3. Zusammenhang zwischen Gewinn und Wirkfläche	132
6.1.4. Polarimetrische Analyse der Freiraumausbreitung	134
6.2. Reflexion und Transmission an Grenzflächen	136
6.2.1. Schräger Einfall einer ebenen homogenen Welle	136

6.2.2.	Fresnelsche Formeln	138
6.2.2.1.	Senkrechte Polarisierung	138
6.2.2.2.	Parallele Polarisierung	142
6.2.3.	Reflexion am idealen elektrischen Leiter	145
6.2.4.	Reflexion am idealen magnetischen Leiter	145
6.3.	Streuung	146
6.3.1.	Streuquerschnitt	146
6.3.2.	Polarimetrische Streumatrix	148
6.4.	Mehrwegeausbreitung	151
II.	Wellenbasierte Modellierung	155
7.	Leitungstheorie	157
7.1.	Komplexe Wellenamplitude	157
7.2.	Reflexionsfaktor	158
7.3.	Resultierende komplexe Wellenamplitude	159
7.4.	Spannung und Strom	162
7.5.	Impedanz	164
7.6.	Leistung	166
7.7.	Messen des Reflexionsfaktors mit einer Messleitung	167
7.8.	Leitungen als Blindelemente	169
7.8.1.	Kurzgeschlossene Leitung	169
7.8.2.	Leerlaufende Leitung	170
7.9.	Autotransformation	170
7.10.	Dualtransformation	171
7.11.	Symmetrische Dreileitersysteme	172
7.12.	Rein massegekoppelte symmetrische Dreileitersysteme	176
8.	Kreisdiagramme	179
8.1.	Inversionsdiagramm	179
8.1.1.	Herleitung des Inversionsdiagramms	179
8.1.2.	Transformation mit konzentrierten Bauelementen	182
8.1.2.1.	Serienschaltung im Inversionsdiagramm	182
8.1.2.2.	Parallelschaltung im Inversionsdiagramm	183
8.1.2.3.	Transformation mit mehreren Blindelementen	184
8.2.	Leitungsdiagramm	186
8.2.1.	Herleitung des Leitungsdiagramms	186
8.2.1.1.	Negativer reeller Reflexionsfaktor	186
8.2.1.2.	Komplexer Reflexionsfaktor	188

8.3. Smith-Diagramm	190
8.3.1. Herleitung des Smith-Diagramms	190
8.3.2. Transformation mit konzentrierten Bauelementen	191
8.3.2.1. Serienschaltung im Smith-Diagramm	191
8.3.2.2. Parallelschaltung im Smith-Diagramm	194
8.3.3. Leitungstransformation im Smith-Diagramm	195
9. Mehrere	197
9.1. Streumatrix	197
9.2. Signalflussgraph	199
9.3. Eigenschaften von Mehreren	201
9.3.1. Eigenreflexionsfreiheit	201
9.3.2. Passivität und Verlustfreiheit	201
9.3.3. Reziprozität	201
9.4. Impedanzmatrix und Admittanzmatrix	203
9.5. Transmissionsmatrix	205
9.6. Modale Streumatrix	208
9.7. Mehrere mit Quellen	211
9.7.1. Wellenquellen	211
9.7.2. Spannungsquellen	212
9.7.3. Stromquellen	213
9.8. Analyse komplexer Netzwerke mit Quellen	214
10. Komponenten hochfrequenztechnischer Systeme	219
10.1. Eintore	219
10.1.1. Quellenfreies Eintor	219
10.1.2. Eintorquelle	219
10.2. Zweitore	220
10.2.1. Symmetrisch aufgebaute Zweitore	220
10.2.2. Serienimpedanz	222
10.2.3. Paralleladmittanz	222
10.2.4. Dämpfungsglied	224
10.2.5. Leitungsstück	225
10.3. Dreitore	227
10.3.1. Zirkulator	227
10.3.2. Verzweigung	229
10.3.3. Allseitig angepasster Teiler	230
10.4. Viertore	232
10.4.1. Symmetrisch aufgebaute Viertore	232
10.4.2. Richtkoppler	235

10.4.3. Parallelleitungskoppler	236
11. Vektorielle Netzwerkanalyse	243
11.1. Reflektometer	243
11.1.1. Aufbau eines Reflektometers	243
11.1.2. Reflektometerfehlerkorrektur	246
11.2. Vektornetzwerkanalysator	248
11.2.1. Aufbau eines Vektornetzwerkanalysators	248
11.2.2. Vektornetzwerkanalysatorfehlerkorrektur	251
11.2.3. Verwenden teilweise unbekannter Kalibrierstandards	254
11.2.4. Vereinfachter Vektornetzwerkanalysator	255
12. Hochfrequenzverstärker	261
12.1. Aufbau von Hochfrequenzverstärkern	261
12.2. Leistungsabgabe von Eintorquellen	262
12.3. Stabilität von Zweitoren	266
12.3.1. Stabilitätskreise	266
12.3.2. Unbedingte Stabilität	269
12.4. Gewinn von Zweitoren	272
12.4.1. Klemmenleistungsgewinn	272
12.4.2. Einfügungsgewinn	274
12.4.3. Übertragungsgewinn	274
12.4.4. Verfügbarer Leistungsgewinn	275
12.4.5. Vergleich der Gewinndefinitionen	276
12.4.6. Maximaler verfügbarer Leistungsgewinn	276
12.4.7. Maximaler stabiler Leistungsgewinn	279
12.4.8. Unilateraler Übertragungsgewinn	279
13. Rauschen	283
13.1. Rauschende Eintore	283
13.1.1. Modellierung rauschender Eintore	283
13.1.2. Thermisches Rauschen von Widerständen	284
13.1.3. Thermisch rauschende Eintore homogener Temperatur	284
13.2. Rauschende Mehr Tore	286
13.2.1. Modellierung rauschender Mehr Tore	286
13.2.2. Analyse komplexer rauschender Netzwerke	287
13.2.3. Thermisch rauschende Mehr Tore homogener Temperatur	288
13.3. Rauschende Zweitore	293
13.3.1. Effektive Rauschtemperatur und Rauschzahl	293
13.3.2. Thermisch rauschende Zweitore homogener Temperatur	297

13.3.3. Kaskade rauschender Zweitore	297
13.3.4. Messen der Rauschzahl mit der Y-Faktor-Methode	298
13.3.5. Rauschanpassung	302
13.3.6. Messen der Rauschparameter	307
III. Anhänge	309
A. Nichtlineare Systeme	311
A.1. Potenzreihenansatz	311
A.2. Eintonanregung	312
A.2.1. Analyse der Eintonanregung	312
A.2.2. Kompressionspunkt	314
A.2.3. Harmonischenabstand	315
A.3. Zweintonanregung	317
A.3.1. Analyse der Zweintonanregung	317
A.3.2. Intermodulationsabstand	318
A.4. Dynamikbereich	320
A.5. Kaskade nichtlinearer Systeme	322
A.6. Mischer	325
A.6.1. Idealer Mischer	325
A.6.2. Additiver Mischer	326
A.6.3. Multiplikativer Mischer	326
A.6.4. Quadraturmodulator	327
A.6.5. Quadraturdemodulator	328
B. Fourier-Analyse	329
B.1. Zeitbereichsanalyse	329
B.1.1. Anwendungsbeispiel der Zeitbereichsanalyse	329
B.1.2. Kausalität	333
B.1.3. Bandbegrenzung	334
B.1.4. Tiefpassmodus	336
B.1.5. Bandpassmodus	338
B.1.6. Abtastung	340
B.1.7. Überabtastung im Zeitbereich	346
B.2. Spektralanalyse	347
B.2.1. Spektralanalyse deterministischer Signale	347
B.2.2. Spektralanalyse stochastischer Signale	351
B.3. Fourier-Korrespondenzen	354

C. Lösungen der Aufgaben	355
Literatur	415

Teil I.

Feldtheoretische Modellierung

Kapitel 1.

Feldtheoretische Grundlagen

1.1. Maxwell'sche Gleichungen

1.1.1. Feldgrößen und ihre komplexen Amplituden

In der Hochfrequenztechnik interessieren wir uns für rein harmonische, das heißt sinusförmige Zeitverläufe der Frequenz f der betrachteten Feldgrößen. Gegebenenfalls auftretende nichtharmonische Vorgänge kann man mittels der Fourier-Transformation als Überlagerung harmonischer Vorgänge darstellen. Die folgenden Betrachtungen können somit allgemeiner als Modellierung im Frequenzbereich aufgefasst werden [FB08].¹ Harmonische (vektorielle) Feldgrößen können durch ihre (vektoriellen) komplexen Amplituden beschrieben werden. Mit der Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi f \quad (1.1)$$

kann man die Feldgrößen wie folgt darstellen:

elektrische Feldstärke:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}\left(\underline{\vec{E}}(x, y, z) e^{j\omega t}\right) \quad (1.2)$$

\vec{E} : vektorieller Momentanwert der elektrischen Feldstärke

$\underline{\vec{E}}$: vektorielle komplexe Amplitude der elektrischen Feldstärke

elektrische Flussdichte:

$$\vec{D}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}\left(\underline{\vec{D}}(x, y, z) e^{j\omega t}\right) \quad (1.3)$$

\vec{D} : vektorieller Momentanwert der elektrischen Flussdichte

$\underline{\vec{D}}$: vektorielle komplexe Amplitude der elektrischen Flussdichte

¹ Die (vektoriellen) komplexen Amplituden kann man weiterhin als die zu den betrachteten Bandpasssignalen äquivalenten Tiefpasssignale ansehen, siehe (A.39).

magnetische Feldstärke:

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}(\underline{\vec{H}}(x, y, z) e^{j\omega t}) \quad (1.4)$$

\vec{H} : vektorieller Momentanwert der magnetischen Feldstärke

$\underline{\vec{H}}$: vektorielle komplexe Amplitude der magnetischen Feldstärke

magnetische Flussdichte:

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}(\underline{\vec{B}}(x, y, z) e^{j\omega t}) \quad (1.5)$$

\vec{B} : vektorieller Momentanwert der magnetischen Flussdichte

$\underline{\vec{B}}$: vektorielle komplexe Amplitude der magnetischen Flussdichte

elektrische Stromdichte:

$$\vec{J}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}(\underline{\vec{J}}(x, y, z) e^{j\omega t}) \quad (1.6)$$

\vec{J} : vektorieller Momentanwert der elektrischen Stromdichte

$\underline{\vec{J}}$: vektorielle komplexe Amplitude der elektrischen Stromdichte

elektrische Ladungsdichte:

$$\rho_e(x, y, z, t) = \operatorname{Re}(\underline{\rho}_e(x, y, z) e^{j\omega t}) \quad (1.7)$$

ρ_e : Momentanwert der elektrischen Ladungsdichte

$\underline{\rho}_e$: komplexe Amplitude der elektrischen Ladungsdichte

magnetische Stromdichte:

$$\vec{M}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}(\underline{\vec{M}}(x, y, z) e^{j\omega t}) \quad (1.8)$$

\vec{M} : vektorieller Momentanwert der magnetischen Stromdichte

$\underline{\vec{M}}$: vektorielle komplexe Amplitude der magnetischen Stromdichte

magnetische Ladungsdichte:

$$\rho_m(x, y, z, t) = \operatorname{Re}(\underline{\rho}_m(x, y, z) e^{j\omega t}) \quad (1.9)$$

ρ_m : Momentanwert der magnetischen Ladungsdichte

$\underline{\rho}_m$: komplexe Amplitude der magnetischen Ladungsdichte

Vektoren werden durch einen Pfeil gekennzeichnet und komplexe Größen werden unterstrichen. Auf eine explizite Angabe der Argumente x , y , z und t zum Ausdrücken der Ortsabhängigkeit und der Zeitabhängigkeit wird im Folgenden zumeist verzichtet.

Magnetische Ladungen und die daraus resultierende magnetische Ladungsdichte ρ_m und magnetische Stromdichte \vec{M} treten in der Realität nie auf. Ihre Einführung führt aber neben einer totalen Symmetrie der Maxwellschen Gleichungen insbesondere zu erheblichen Vereinfachungen bei vielen Feldberechnungen, bei denen man das ursprüngliche physikalische Problem ohne magnetische Ladungsdichte ρ_m und magnetische Stromdichte \vec{M} durch ein äquivalentes Problem ersetzt, in dem diese Größen vorkommen können, siehe Abschnitt 4.8.

Materialien, in denen weder elektrische Ladungen noch magnetische Ladungen vorhanden sind und in denen folglich die Ladungsdichten und die Stromdichten verschwinden, bezeichnet man als Dielektrika.

1.1.2. Durchflutungsgesetz, erste Maxwellsche Gleichung

1.1.2.1. Integrale Form

Das Umlaufintegral über die magnetische Feldstärke \vec{H} ist gleich dem gesamten umschlossenen elektrischen Strom:

$$\oint_{\partial A} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle = \underbrace{\iint_A \langle \vec{J}, d\vec{A} \rangle}_{\text{elektrischer Leitungsstrom}} + \underbrace{\iint_A \langle \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{A} \rangle}_{\text{elektrischer Verschiebungsstrom}}. \quad (1.10)$$

elektrischer Strom

Der Umlaufsinn $d\vec{s}$ des Integrals und die Flächennormale $d\vec{A}$ bilden dabei eine Rechtsschraube, siehe Abbildung 1.1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet das Skalarprodukt zweier Vektoren.² In der Hochfrequenztechnik werden häufig elektromagnetische Felder im Dielektrikum mit verschwindender elektrischer Stromdichte \vec{J} betrachtet.

Mit (1.3) folgt, dass die Ableitung im Zeitbereich einer Multiplikation mit $j\omega$ im Frequenzbereich entspricht:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{Re}(\underline{\vec{D}} e^{j\omega t}) \right) = \text{Re} \left(\underline{\vec{D}} \frac{\partial}{\partial t} (e^{j\omega t}) \right) = \text{Re}(j\omega \underline{\vec{D}} e^{j\omega t}). \quad (1.11)$$

² Mit den Vektoren $\underline{\vec{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\underline{\vec{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt $\langle \underline{\vec{a}}, \underline{\vec{b}} \rangle = a_1 b_1^* + a_2 b_2^* + a_3 b_3^*$.

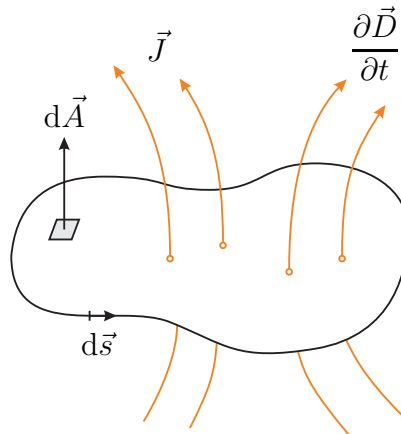


Abbildung 1.1.: Zum Durchflutungsgesetz

Mit (1.3), (1.4) und (1.6) erhält man das Durchflutungsgesetz für die vektoriellen komplexen Amplituden:

$$\oint_{\partial A} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle = \iint_A \langle \vec{J}, d\vec{A} \rangle + j\omega \iint_A \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle. \quad (1.12)$$

1.1.2.2. Differentielle Form, Satz von Stokes

Die Komponenten der Rotation eines Vektorfeldes \vec{H} definiert man zu

$$\left[\text{rot}(\vec{H}) \right]_{xyz} = \lim_{dA_{xyz} \rightarrow 0} \frac{\oint \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle}{dA_{xyz}}. \quad (1.13)$$

Hierbei steht xyz für eine der drei Koordinaten x , y oder z . $[\cdot]_{xyz}$ bezeichnet die x -, y - oder z -Komponente des Vektors. Der Umlaufsinn $d\vec{s}$ des Integrals und die Flächennormale dA_{xyz} bilden eine Rechtsschraube.

Speziell zum Berechnen der z -Komponente der Rotation in kartesischen Koordinaten betrachtet man das in Abbildung 1.2 gezeigte, in der x - y -Ebene liegende, infinitesimale Flächenelement dA_z mit der Flächennormalen in positiver z -Richtung.

Das Umlaufintegral der Feldstärke \vec{H} entlang des Randes ∂dA_z des Flächen-

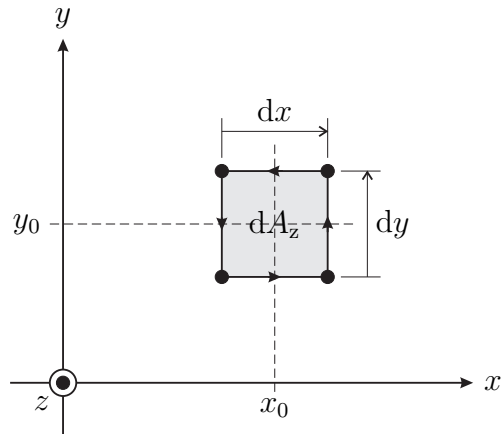


Abbildung 1.2.: Infinitesimales Flächenelement $dA_z = dx dy$

elements dA_z ergibt

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial dA_z} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle &= \int_{\text{rechts unten}}^{\text{rechts oben}} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle + \int_{\text{rechts unten}}^{\text{rechts oben}} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle \\
 &+ \int_{\text{links oben}}^{\text{links unten}} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle + \int_{\text{rechts oben}}^{\text{links unten}} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle \\
 &= H_x \left(x_0, y_0 - \frac{dy}{2}, z_0, t \right) \cdot dx + H_y \left(x_0 + \frac{dx}{2}, y_0, z_0, t \right) \cdot dy \\
 &\quad - H_x \left(x_0, y_0 + \frac{dy}{2}, z_0, t \right) \cdot dx - H_y \left(x_0 - \frac{dx}{2}, y_0, z_0, t \right) \cdot dy \\
 &= \left(\frac{H_y \left(x_0 + \frac{dx}{2}, y_0, z_0, t \right) - H_y \left(x_0 - \frac{dx}{2}, y_0, z_0, t \right)}{dx} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{H_x \left(x_0, y_0 + \frac{dy}{2}, z_0, t \right) - H_x \left(x_0, y_0 - \frac{dy}{2}, z_0, t \right)}{dy} \right) dx dy.
 \end{aligned}$$

Führt man die Grenzübergänge $dx \rightarrow 0$ und $dy \rightarrow 0$ durch, so erhält man

$$\oint_{\partial dA_z} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) dx dy = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) dA_z.$$

Schließlich erhält man die z -Komponente

$$[\text{rot}(\vec{H})]_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

der Rotation in kartesischen Koordinaten.

Man kann gleichartige Überlegungen für infinitesimale Flächenelemente, die in der y - z -Ebene oder in der z - x -Ebene liegen, anstellen. Man erhält die entsprechenden Gleichungen auch, indem man die Komponenten und Koordinaten zyklisch vertauscht. Es folgt

$$\text{rot}(\vec{H}) = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \quad (1.14)$$

für die Rotation in kartesischen Koordinaten, wobei \vec{u}_x , \vec{u}_y und \vec{u}_z die Einheitsvektoren in x -, y - und z -Richtung sind.

Eine beliebige, nicht infinitesimale Fläche A kann man in unendlich viele infinitesimale, in x -, y - oder z -Richtung orientierte Flächenelemente zerlegen. Die Linienintegrale entlang der inneren Begrenzungen kürzen sich dabei gegenseitig weg, so dass die Summe der Umlaufintegrale der infinitesimalen Flächenelemente das Umlaufintegral der gesamten Fläche A ergibt. Die Summe der Oberflächenintegrale über die infinitesimalen Flächenelemente ergibt das Oberflächenintegral über die gesamte Fläche A . Damit folgt aus der Definition der Rotation (1.13) der für beliebige Vektorfelder \vec{H} gültige Satz von Stokes

$$\oint_{\partial A} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle = \iint_A \langle \text{rot}(\vec{H}), d\vec{A} \rangle. \quad (1.15)$$

Anwenden des Satzes von Stokes auf das Durchflutungsgesetz (1.10) ergibt

$$\oint_{\partial A} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle = \iint_A \langle \text{rot}(\vec{H}), d\vec{A} \rangle = \iint_A \langle \vec{J}, d\vec{A} \rangle + \iint_A \left\langle \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{A} \right\rangle.$$

Man erhält schließlich das Durchflutungsgesetz in differentieller Form:

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1.16)$$

Für die vektoriellen komplexen Amplituden erhält man mit (1.3), (1.4), (1.6) und (1.11) die im Folgenden vorwiegend verwendete Darstellung des Durchflutungsgesetzes

$$\text{rot}(\underline{\vec{H}}) = \underline{\vec{J}} + j\omega \underline{\vec{D}} \quad (1.17)$$

und mit (1.14) die folgenden Komponentengleichungen:

$$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} = \underline{J}_x + j\omega \underline{D}_x, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = \underline{J}_y + j\omega \underline{D}_y, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} = \underline{J}_z + j\omega \underline{D}_z. \quad (1.20)$$

1.1.3. Induktionsgesetz, zweite Maxwell'sche Gleichung

1.1.3.1. Integrale Form

Das negative Umlaufintegral über die elektrische Feldstärke \vec{E} ist gleich dem gesamten umschlossenen magnetischen Strom:

$$-\oint_{\partial A} \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = \underbrace{\iint_A \langle \vec{M}, d\vec{A} \rangle}_{\text{magnetischer Leitungsstrom}} + \underbrace{\iint_A \langle \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{A} \rangle}_{\text{magnetischer Verschiebungsstrom}}. \quad (1.21)$$

magnetischer Strom

Der Umlaufsinn $d\vec{s}$ des Integrals und die Flächennormale $d\vec{A}$ bilden auch hier wieder eine Rechtsschraube, siehe Abbildung 1.3. In realen Szenarien gibt es keine magnetischen Ladungen ρ_m und dann verschwindet die magnetische Stromdichte \vec{M} .

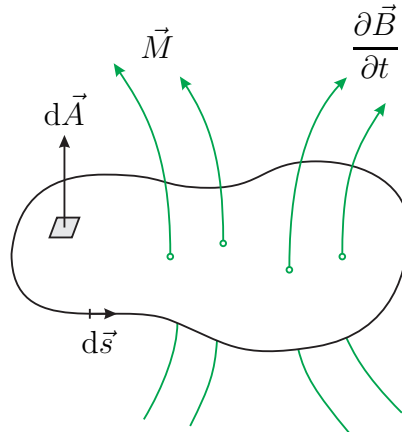


Abbildung 1.3.: Zum Induktionsgesetz

Mit (1.2), (1.5), (1.8) und (1.11) erhält man das Induktionsgesetz für die vektoriellen komplexen Amplituden:

$$-\oint_{\partial A} \langle \underline{\vec{E}}, d\vec{s} \rangle = \iint_A \langle \underline{\vec{M}}, d\vec{A} \rangle + j\omega \iint_A \langle \underline{\vec{B}}, d\vec{A} \rangle. \quad (1.22)$$

1.1.3.2. Differentielle Form

Dual zu Abschnitt 1.1.2.2 erhält man durch Anwenden des Satzes von Stokes (1.15) auf das Induktionsgesetz (1.21)

$$-\text{rot}(\vec{E}) = \vec{M} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.23)$$

Für die vektoriellen komplexen Amplituden erhält man mit (1.2), (1.5), (1.8) und (1.11) die im Folgenden vorwiegend verwendete Darstellung des Induktionsgesetzes

$$-\operatorname{rot}(\vec{E}) = \vec{M} + j\omega\vec{B} \quad (1.24)$$

und mit (1.14) die folgenden Komponentengleichungen:

$$-\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} = M_x + j\omega B_x, \quad (1.25)$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} = M_y + j\omega B_y, \quad (1.26)$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} = M_z + j\omega B_z. \quad (1.27)$$

1.1.4. Quellen des elektrischen Feldes, dritte Maxwellsche Gleichung

1.1.4.1. Integrale Form

Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Hülle ist gleich der eingeschlossenen elektrischen Ladung:

$$\boxed{\oiint_{\partial V} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle = \underbrace{\iiint_V \rho_e dV}_{\text{elektrische Ladung}}}. \quad (1.28)$$

Die Flächennormale $d\vec{A}$ zeigt dabei nach außen. In der Hochfrequenztechnik werden häufig elektromagnetische Felder in Dielektrika mit verschwindender elektrischer Ladungsdichte ρ_e betrachtet. Die elektrische Flussdichte \vec{D} ist dann quellenfrei.

Für die komplexen Amplituden erhält man mit (1.3) und (1.7) die Gleichung

$$\oiint_{\partial V} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle = \iiint_V \rho_e dV. \quad (1.29)$$

1.1.4.2. Differentielle Form, Satz von Gauß

Die Divergenz eines Vektorfeldes \vec{D} definiert man zu

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\oiint \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle}{dV}. \quad (1.30)$$

Die Flächennormale $d\vec{A}$ zeigt dabei wieder nach außen.

Speziell zum Berechnen der Divergenz in kartesischen Koordinaten betrachtet man das in Abbildung 1.4 gezeigte infinitesimale Volumenelement dV .

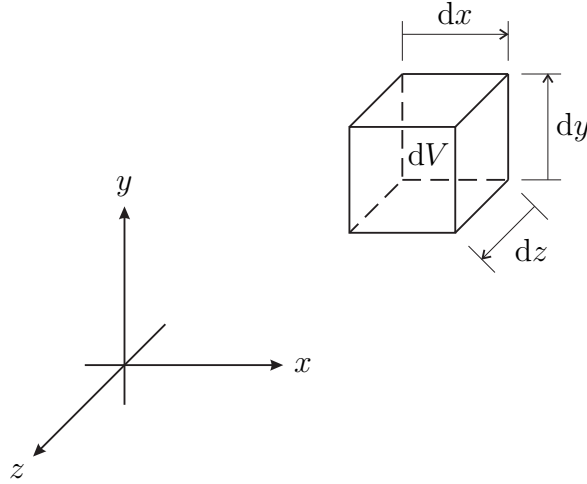


Abbildung 1.4.: Infinitesimales Volumenelement $dV = dx dy dz$

Der Fluss durch die Hülle ∂dV des Volumenelements dV ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 \oiint_{\partial dV} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle &= \iint_{\text{rechte Seite}} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle + \iint_{\text{linke Seite}} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle + \iint_{\text{Deckel}} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle \\
 &+ \iint_{\text{Boden}} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle + \iint_{\text{Vorderseite}} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle + \iint_{\text{Rückseite}} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle \\
 &= D_x \left(x_0 + \frac{dx}{2}, y_0, z_0, t \right) \cdot dy \cdot dz - D_x \left(x_0 - \frac{dx}{2}, y_0, z_0, t \right) \cdot dy \cdot dz \\
 &+ D_y \left(x_0, y_0 + \frac{dy}{2}, z_0, t \right) \cdot dx \cdot dz - D_y \left(x_0, y_0 - \frac{dy}{2}, z_0, t \right) \cdot dx \cdot dz \\
 &+ D_z \left(x_0, y_0, z_0 + \frac{dz}{2}, t \right) \cdot dx \cdot dy - D_z \left(x_0, y_0, z_0 - \frac{dz}{2}, t \right) \cdot dx \cdot dy \\
 &= \left(\frac{D_x \left(x_0 + \frac{dx}{2}, y_0, z_0, t \right) - D_x \left(x_0 - \frac{dx}{2}, y_0, z_0, t \right)}{dx} \right. \\
 &+ \frac{D_y \left(x_0, y_0 + \frac{dy}{2}, z_0, t \right) - D_y \left(x_0, y_0 - \frac{dy}{2}, z_0, t \right)}{dy} \\
 &+ \left. \frac{D_z \left(x_0, y_0, z_0 + \frac{dz}{2}, t \right) - D_z \left(x_0, y_0, z_0 - \frac{dz}{2}, t \right)}{dz} \right) dx dy dz.
 \end{aligned}$$

Führt man die Grenzübergänge $dx \rightarrow 0$, $dy \rightarrow 0$ und $dz \rightarrow 0$ durch, so erhält man

$$\oiint_{\partial dV} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dV.$$

Schließlich erhält man die Divergenz in kartesischen Koordinaten:

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}. \quad (1.31)$$

Ein beliebiges, nicht infinitesimales Volumen V kann man in unendlich viele infinitesimale Volumenelemente zerlegen. Die Oberflächenintegrale entlang der inneren Begrenzungen kürzen sich dabei gegenseitig weg, so dass die Summe der Oberflächenintegrale der infinitesimalen Volumenelemente das Oberflächenintegral des gesamten Volumens V ergibt. Die Summe der Volumenintegrale über die infinitesimalen Volumenelemente ergibt das Volumenintegral über das gesamte Volumen V . Damit folgt aus der Definition der Divergenz (1.30) der für beliebige Vektorfelder \vec{D} gültige Satz von Gauß

$$\oiint_{\partial V} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{D}) dV. \quad (1.32)$$

Anwenden des Satzes von Gauß auf (1.28) ergibt

$$\oiint_{\partial V} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{D}) dV = \iiint_V \rho_e dV.$$

Man erhält schließlich

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \rho_e. \quad (1.33)$$

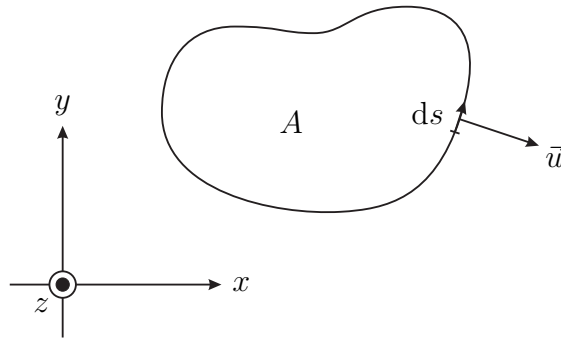
Für die komplexen Amplituden erhält man mit (1.3) und (1.7) die im Folgenden vorwiegend verwendete Darstellung

$$\operatorname{div}(\underline{D}) = \underline{\rho}_e. \quad (1.34)$$

Aufgabe 1.1 *Es wird eine in der x - y -Ebene liegende Fläche A betrachtet, siehe Abbildung 1.5. Zeigen Sie, dass mit dem nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor \vec{u} auf dem Rand ∂A der Fläche A für beliebige Vektorfelder \vec{D} folgender, als Gaußscher Satz in der Ebene bekannter Zusammenhang*

$$\iint_A \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} \right) dA = \oint_{\partial A} \langle \vec{D}, \vec{u} \rangle ds \quad (1.35)$$

gilt! Betrachten Sie hierzu zunächst ein infinitesimales rechteckförmiges Flächenelement $dA_z = dx dy$.

Abbildung 1.5.: Fläche A mit Normaleneinheitsvektor \vec{u} auf dem Rand ∂A

1.1.5. Quellen des magnetischen Feldes, vierte Maxwell'sche Gleichung

1.1.5.1. Integrale Form

Der magnetische Fluss durch eine geschlossene Hülle ist gleich der eingeschlossenen magnetischen Ladung:

$$\boxed{\oint_{\partial V} \langle \vec{B}, d\vec{A} \rangle = \underbrace{\iiint_V \rho_m dV}_{\text{magnetische Ladung}}}. \quad (1.36)$$

Die Flächennormale $d\vec{A}$ zeigt auch hier wieder nach außen. In realen Szenarien gibt es keine magnetischen Ladungen und dann verschwindet die magnetische Ladungsdichte ρ_m , das heißt die magnetische Flussdichte \vec{B} ist quellenfrei.

Für die komplexen Amplituden erhält man mit (1.5) und (1.9) die Gleichung

$$\oint_{\partial V} \langle \vec{B}, d\vec{A} \rangle = \iiint_V \rho_m dV. \quad (1.37)$$

1.1.5.2. Differentielle Form

Dual zu Abschnitt 1.1.4.2 erhält man durch Anwenden des Satzes von Stokes (1.15) auf (1.36)

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = \rho_m. \quad (1.38)$$

Für die komplexen Amplituden erhält man mit (1.5) und (1.9) die im Folgenden vorwiegend verwendete Darstellung

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = \rho_m. \quad (1.39)$$

1.1.6. Ladungserhaltung

Anwenden der Divergenz auf das Durchflutungsgesetz (1.16) ergibt mit (1.44) und (1.33) die Kontinuitätsgleichung

$$0 = \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{H})) = \operatorname{div}\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = \operatorname{div}(\vec{J}) + \frac{\partial \rho_e}{\partial t}. \quad (1.40)$$

Die Summe aus elektrischer Leitungsstromdichte \vec{J} und elektrischer Verschiebungsstromdichte $\partial \vec{D}/\partial t$ ist quellenfrei und eine abfließende elektrische Stromdichte \vec{J} äußert sich in einer abnehmenden elektrischen Ladungsdichte ρ_e . Für die komplexen Amplituden erhält man mit (1.6), (1.7) und (1.11) die Kontinuitätsgleichung

$$0 = \operatorname{div}(\vec{J}) + j\omega \rho_e. \quad (1.41)$$

Mit dem Satz von Gauß (1.32) folgt für den aus einem Volumen V herausfließenden elektrischen Leitungsstrom

$$\underbrace{\oint_V \langle \vec{J}, d\vec{A} \rangle}_{\text{elektrischer Leitungsstrom}} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{J}) dV = - \iiint_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV = - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\iiint_V \rho_e dV}_{\text{elektrische Ladung}},$$

das heißt der aus dem Volumen V herausfließende elektrische Leitungsstrom entspricht der Abnahme der elektrischen Ladung in dem Volumen V .

Völlig dual folgt aus dem Induktionsgesetz (1.23) mit (1.44) und (1.38) die Kontinuitätsgleichung

$$0 = \operatorname{div}(-\operatorname{rot}(\vec{E})) = \operatorname{div}\left(\vec{M} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \operatorname{div}(\vec{M}) + \frac{\partial \rho_m}{\partial t}. \quad (1.42)$$

Die Summe aus magnetischer Leitungsstromdichte \vec{M} und magnetischer Verschiebungsstromdichte $\partial \vec{B}/\partial t$ ist quellenfrei und eine abfließende magnetische Stromdichte \vec{M} äußert sich in einer abnehmenden magnetischen Ladungsdichte ρ_m . Für die komplexen Amplituden erhält man mit (1.8), (1.9) und (1.11) die Kontinuitätsgleichung

$$0 = \operatorname{div}(\vec{M}) + j\omega \rho_m. \quad (1.43)$$

Diese Ladungserhaltungssätze sind letztendlich aus den Maxwellschen Gleichungen ableitbar und stellen keine weiteren unabhängigen Naturgesetze dar. Historisch gesehen hat die Forderung nach der Ladungserhaltung das Einführen einer elektrischen Verschiebungsstromdichte $\partial \vec{D}/\partial t$ in den Maxwellschen Gleichungen motiviert.

Aufgabe 1.2 Zeigen Sie unter Verwenden kartesischer Koordinaten, dass für jedes Vektorfeld \vec{H}

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{H})) = 0 \quad (1.44)$$

gilt!

1.1.7. Materialgleichungen

Die Materialgleichungen stellen einen Zusammenhang zwischen den Feldstärken und den Flussdichten her. Weiterhin sind die elektrische Stromdichte und die elektrische Feldstärke miteinander verknüpft. Im Rahmen dieses Buchs werden nur einfache Materialien betrachtet, die sich durch folgende Eigenschaften auszeichnen:

- Die Materialien sind linear.
- Die Materialien sind zeitinvariant.
- Die Materialien sind isotrop, das heißt die Eigenschaften sind richtungsunabhängig.
- Frequenzabhängigkeiten der Materialeigenschaften und die damit verbundene zeitverzögerte Reaktion werden nicht explizit diskutiert.

Für das elektrische Feld gilt

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \quad (1.45)$$

Mit (1.2) und (1.3) folgt

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \quad (1.46)$$

Die Permittivität

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad (1.47)$$

ist das Produkt der absoluten Permittivität

$$\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ A s V}^{-1} \text{ m}^{-1} \quad (1.48)$$

und der relativen Permittivität ε_r .

Für das magnetische Feld gilt

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (1.49)$$

Mit (1.4) und (1.5) folgt

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (1.50)$$

Die Permeabilität

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (1.51)$$

ist das Produkt der absoluten Permeabilität

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}^{-1} \quad (1.52)$$

und der relativen Permeabilität μ_r .

Mit der elektrischen Leitfähigkeit κ gilt weiterhin

$$\vec{J} = \kappa \vec{E}. \quad (1.53)$$

Mit (1.2) und (1.6) folgt

$$\vec{J} = \kappa \underline{\vec{E}}. \quad (1.54)$$

Einsetzen der Materialgleichungen in das Durchflutungsgesetz (1.17) ergibt

$$\text{rot}(\underline{\vec{H}}) = (\kappa + j\omega\varepsilon) \underline{\vec{E}} = j\omega \underbrace{\left(\varepsilon - j\frac{\kappa}{\omega}\right)}_{\underline{\varepsilon}} \underline{\vec{E}}. \quad (1.55)$$

Mit der so definierten komplexen Permittivität $\underline{\varepsilon}$ lassen sich Verluste in leitfähigen Materialien auf einfache Art und Weise berücksichtigen. Dual kann man eine komplexe Permeabilität $\underline{\mu}$ definieren. Für das Induktionsgesetz (1.24) folgt

$$-\text{rot}(\underline{\vec{E}}) = \underline{\vec{M}} + j\omega\underline{\mu}\underline{\vec{H}} = j\omega\underline{\mu} \underline{\vec{H}}. \quad (1.56)$$

1.2. Bedingungen an Grenzflächen

1.2.1. Elektrisches Feld an einer Grenzfläche

Es wird das elektrische Feld an der lokal näherungsweise ebenen Grenzfläche zweier Materialien unterschiedlicher Permittivitäten betrachtet. Der Normalenvektor auf der Grenzfläche und die Einfallrichtung spannen die Einfallsebene auf. Das Koordinatensystem wird vereinfachend so gewählt, dass sich die Grenzfläche bei $z = 0$ befindet und die Einfallsebene der x - z -Ebene entspricht, siehe Abbildung 1.6. Der Normaleneinheitsvektor auf der Grenzfläche in Richtung des ersten Mediums ist dann der Einheitsvektor \vec{u}_z in z -Richtung. Bei Anwenden der Maxwell'schen Gleichungen auf das elektrische Feld an der Grenzfläche sind die magnetische Flächenstromdichte \vec{M}_F in der Grenzfläche, die elektrische Flächenladungsdichte ρ_{eF} in der Grenzfläche und die sprunghaften Änderungen der elektrischen Feldstärke $\underline{\vec{E}}$ und der elektrischen Flussdichte $\underline{\vec{D}}$ an der Grenzfläche relevant. Die Ableitung der Sprungfunktion ist der Dirac-Impuls $\delta(\cdot)$.

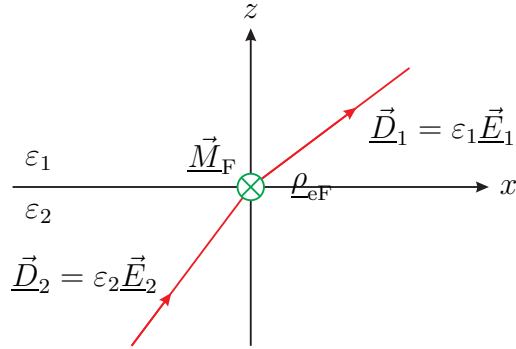


Abbildung 1.6.: Elektrisches Feld an einer Grenzfläche

Für die linke Seite der Gleichung (1.34) erhält man mit (1.31)

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = (\underline{D}_{1z} - \underline{D}_{2z}) \delta(z) = \langle \vec{D}_1 - \vec{D}_2, \vec{u}_z \rangle \delta(z),$$

da man alle Ableitungen außer denen in z -Richtung vernachlässigen kann. Für die rechte Seite der Gleichung (1.34) erhält man

$$\rho_e = \rho_{eF} \delta(z).$$

Es folgt

$$\langle \vec{D}_1 - \vec{D}_2, \vec{u}_z \rangle = \rho_{eF}. \quad (1.57)$$

Die Differenz der Normalkomponenten der elektrischen Flussdichten an einer Grenzfläche entspricht der elektrischen Flächenladungsdichte ρ_{eF} in der Grenzfläche.

Für die linke Seite des Induktionsgesetzes (1.24) erhält man mit (1.14)

$$\begin{aligned} -\operatorname{rot}(\vec{E}) &= (\underline{E}_{1y} - \underline{E}_{2y}) \delta(z) \vec{u}_x - (\underline{E}_{1x} - \underline{E}_{2x}) \delta(z) \vec{u}_y \\ &= ((\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{u}_z) \delta(z), \end{aligned}$$

da man alle Ableitungen außer denen in z -Richtung vernachlässigen kann. \times bezeichnet hierbei das Vektorprodukt zweier Vektoren.³ Für die rechte Seite des Induktionsgesetzes (1.24) erhält man

$$\vec{M} = \vec{M}_F \delta(z),$$

³ Mit den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt $\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{u}_x + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{u}_y + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{u}_z$.

da man die auch an der Grenzfläche endlich große magnetische Flussdichte \vec{B} vernachlässigen kann. Es folgt

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{u}_z = \vec{M}_F. \quad (1.58)$$

Die Differenz der Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärken an einer Grenzfläche ist proportional zur magnetischen Flächenstromdichte \vec{M}_F in der Grenzfläche.

1.2.2. Magnetisches Feld an einer Grenzfläche

Es wird das magnetische Feld an der lokal näherungsweise ebenen Grenzfläche zweier Materialien unterschiedlicher Permeabilitäten betrachtet. Das Koordinatensystem wird vereinfachend wieder so gewählt, dass sich die Grenzfläche bei $z = 0$ befindet und die Einfallsebene der x - z -Ebene entspricht, siehe Abbildung 1.7. Bei Anwenden der Maxwell'schen Gleichungen auf das magnetische Feld an der Grenzfläche sind die elektrische Flächenstromdichte \vec{J}_F in der Grenzfläche, die magnetische Flächenladungsdichte ρ_{mF} in der Grenzfläche und die sprunghaften Änderungen der magnetischen Feldstärke \vec{H} und der magnetischen Flussdichte \vec{B} an der Grenzfläche relevant.

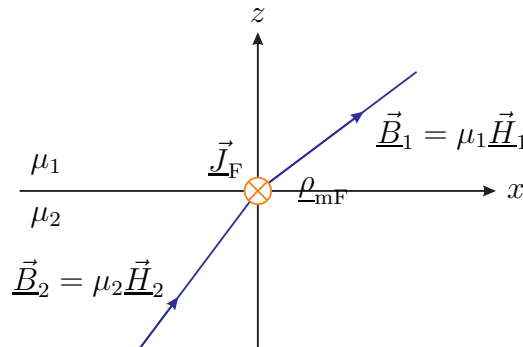


Abbildung 1.7.: Magnetisches Feld an einer Grenzfläche

Für die linke Seite der Gleichung (1.39) erhält man mit (1.31)

$$\text{div}(\vec{B}) = (B_{1z} - B_{2z}) \delta(z) = \langle \vec{B}_1 - \vec{B}_2, \vec{u}_z \rangle \delta(z),$$

da man alle Ableitungen außer denen in z -Richtung vernachlässigen kann. Für die rechte Seite der Gleichung (1.39) erhält man

$$\rho_m = \rho_{mF} \delta(z).$$

Es folgt

$$\langle \vec{B}_1 - \vec{B}_2, \vec{u}_z \rangle = \rho_{\text{mF}}. \quad (1.59)$$

Die Differenz der Normalkomponenten der magnetischen Flussdichten an einer Grenzfläche entspricht der magnetischen Flächenladungsdichte ρ_{mF} in der Grenzfläche.

Für die linke Seite des Durchflutungsgesetzes (1.17) erhält man mit (1.14)

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{H}) &= - (\underline{H}_{1y} - \underline{H}_{2y}) \delta(z) \vec{u}_x + (\underline{H}_{1x} - \underline{H}_{2x}) \delta(z) \vec{u}_y \\ &= - \left((\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{u}_z \right) \delta(z), \end{aligned}$$

da man alle Ableitungen außer denen in z -Richtung vernachlässigen kann. Für die rechte Seite des Durchflutungsgesetzes (1.17) erhält man

$$\vec{J} = \vec{J}_F \delta(z),$$

da man die auch an der Grenzfläche endlich große elektrische Flussdichte \vec{D} vernachlässigen kann. Es folgt

$$- \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) \times \vec{u}_z = \vec{J}_F. \quad (1.60)$$

Die negative Differenz der Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärken an einer Grenzfläche ist proportional zur elektrischen Flächenstromdichte \vec{J}_F in der Grenzfläche.

Aufgabe 1.3 Die betrachteten elektromagnetischen Felder seien im jeweiligen Medium Lösungen der Maxwellschen Gleichungen. Zeigen Sie, dass dann die Grenzflächenbedingungen (1.57) und (1.59) der Normalkomponenten der Flussdichten erfüllt sind, falls die Grenzflächenbedingungen (1.58) und (1.60) der Tangentialkomponenten der Feldstärken erfüllt sind!

1.2.3. Grenzfläche zweier Dielektrika

An der Grenzfläche zweier Dielektrika sind die Flächenladungsdichten und die Flächenstromdichten Null. Wenn man das Koordinatensystem vereinfachend wieder so wählt, dass die Grenzfläche der x - y -Ebene entspricht, folgen aus (1.57), (1.58), (1.59) und (1.60) an der Grenzfläche $z = 0$:

$$\langle \vec{D}_1 - \vec{D}_2, \vec{u}_z \rangle = 0, \quad (1.61)$$

$$\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \times \vec{u}_z = \vec{0}, \quad (1.62)$$

$$\langle \vec{B}_1 - \vec{B}_2, \vec{u}_z \rangle = 0. \quad (1.63)$$

$$\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) \times \vec{u}_z = \vec{0}, \quad (1.64)$$

Die Normalkomponenten der Flussdichten und die Tangentialkomponenten der Feldstärken sind an der Grenzfläche zweier Dielektrika stetig.

1.2.4. Oberfläche eines idealen elektrischen Leiters

In einem idealen elektrischen Leiter muss das elektrische Feld verschwinden. Wegen des Induktionsgesetzes (1.24) und der verschwindenden magnetischen Stromdichte \vec{M} kann dann in einem idealen elektrischen Leiter auch kein zeitveränderliches magnetisches Feld existieren. Ideale elektrische Leiter sind feldfrei. An der Oberfläche eines idealen elektrischen Leiters können eine elektrische Flächenstromdichte \vec{J}_F und eine elektrische Flächenladungsdichte ρ_{eF} vorhanden sein. Die magnetische Flächenstromdichte \vec{M}_F und die magnetische Flächenladungsdichte ρ_{mF} sind jedoch an der Oberfläche eines idealen elektrischen Leiters stets Null. Folglich müssen die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke \vec{E} und die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte \vec{B} an der Oberfläche eines idealen elektrischen Leiters Null sein, siehe (1.58) und (1.59). Wenn das Koordinatensystem so gewählt wird, dass der Bereich $z < 0$ mit dem idealen elektrischen Leiter gefüllt ist, müssen an der Oberfläche $z = 0$

$$\vec{E} \times \vec{u}_z = \vec{0} \quad (1.65)$$

und

$$\langle \vec{B}, \vec{u}_z \rangle = 0 \quad (1.66)$$

gelten.

Mit (1.57) ergibt sich an der Oberfläche $z = 0$ des idealen elektrischen Leiters die elektrische Flächenladungsdichte

$$\rho_{eF} = \langle \vec{D}, \vec{u}_z \rangle. \quad (1.67)$$

Der negative magnetische Feldstärkevektor \vec{H} , der Normaleneinheitsvektor \vec{u}_z und die elektrische Flächenstromdichte \vec{J}_F an der Oberfläche $z = 0$ des idealen elektrischen Leiters bilden wegen (1.60) ein Rechtssystem:

$$\vec{J}_F = -\vec{H} \times \vec{u}_z. \quad (1.68)$$

1.2.5. Oberfläche eines idealen magnetischen Leiters

Aus Dualitätsgründen wird auch ein idealer magnetischer Leiter eingeführt. In einem idealen magnetischen Leiter muss das magnetische Feld verschwinden. Wegen

des Durchflutungsgesetzes (1.17) und der verschwindenden elektrischen Stromdichte \vec{J} kann dann in einem idealen magnetischen Leiter auch kein zeitveränderliches elektrisches Feld existieren. Ideale magnetische Leiter sind feldfrei. An der Oberfläche eines idealen magnetischen Leiters können eine magnetische Flächenstromdichte \vec{M}_F und eine magnetische Flächenladungsdichte ρ_{mF} vorhanden sein. Die elektrische Flächenstromdichte \vec{J}_F und die elektrische Flächenladungsdichte ρ_{eF} sind jedoch an der Oberfläche eines idealen magnetischen Leiters stets Null. Folglich müssen die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke \vec{H} und die Normalkomponente der elektrischen Flussdichte \vec{D} an der Oberfläche eines idealen magnetischen Leiters Null sein, siehe (1.60) und (1.57). Wenn das Koordinatensystem so gewählt wird, dass der Bereich $z < 0$ mit dem idealen magnetischen Leiter gefüllt ist, müssen an der Oberfläche $z = 0$

$$\vec{H} \times \vec{u}_z = \vec{0} \quad (1.69)$$

und

$$\langle \vec{D}, \vec{u}_z \rangle = 0 \quad (1.70)$$

gelten.

Mit (1.59) ergibt sich an der Oberfläche $z = 0$ des idealen magnetischen Leiters die magnetische Flächenladungsdichte

$$\rho_{mF} = \langle \vec{B}, \vec{u}_z \rangle. \quad (1.71)$$

Der elektrische Feldstärkevektor \vec{E} , der Normaleneinheitsvektor \vec{u}_z und die magnetische Flächenstromdichte \vec{M}_F an der Oberfläche $z = 0$ des idealen magnetischen Leiters bilden wegen (1.58) ein Rechtssystem:

$$\vec{M}_F = \vec{E} \times \vec{u}_z. \quad (1.72)$$

1.2.6. Dualität von elektrischem und magnetischem Feld

Aufgrund der Dualität der Maxwell'schen Gleichungen erhält man aus einem die Maxwell'schen Gleichungen erfüllendem elektromagnetischen Feld bei Durchführen der Ersetzungen in Tabelle 1.1 wieder ein mögliches elektromagnetisches Feld. Speziell die Maxwell'schen Gleichungen und die Materialgleichungen gehen durch die Ersetzungen in sich selbst über.

Tabelle 1.1.: Dualität von elektrischem und magnetischem Feld

ersetze	\vec{H}	durch	$-\vec{E}$
ersetze	\vec{E}	durch	\vec{H}
ersetze	\vec{B}	durch	$-\vec{D}$
ersetze	\vec{D}	durch	\vec{B}
ersetze	\vec{M}	durch	$-\vec{J}$
ersetze	\vec{J}	durch	\vec{M}
ersetze	ρ_m	durch	$-\rho_e$
ersetze	ρ_e	durch	ρ_m
ersetze	ε	durch	μ
ersetze	μ	durch	ε

1.3. Poynting-Vektor

Charakteristisch und für viele technische Anwendungen essentiell ist die Fähigkeit elektromagnetischer Felder Energie zu transportieren. Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist das Gewinnen von Aussagen über den Energiefluss in elektromagnetischen Feldern.

Die folgenden Betrachtungen gehen von

- der Verlustleistungsdichte

$$\boxed{p_V = \langle \vec{E}, \vec{J} \rangle}, \quad (1.73)$$

- der elektrischen Energiedichte

$$\boxed{w_e = \frac{1}{2} \langle \vec{E}, \vec{D} \rangle} \quad (1.74)$$

und

- der magnetischen Energiedichte

$$\boxed{w_m = \frac{1}{2} \langle \vec{H}, \vec{B} \rangle} \quad (1.75)$$

aus. Die aus einem Volumen V austretende Strahlungsleistung P entspricht der Abnahme der im Volumen V gespeicherten elektrischen und magnetischen Energie weniger der Verlustleistung im Volumen V . Mit (1.45), (1.49) und (1.53) erhält

man

$$\begin{aligned}
 P &= -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (w_e + w_m) dV - \iiint_V p_V dV \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon \langle \vec{E}, \vec{E} \rangle + \frac{1}{2} \mu \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle \right) dV - \iiint_V \kappa \langle \vec{E}, \vec{E} \rangle dV \quad (1.76) \\
 &= -\iiint_V \left(\varepsilon \langle \vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rangle + \mu \langle \vec{H}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \rangle \right) dV - \iiint_V \kappa \langle \vec{E}, \vec{E} \rangle dV.
 \end{aligned}$$

Multiplizieren der elektrischen Feldstärke \vec{E} mit dem Durchflutungsgesetz (1.16) ergibt mit (1.45) und (1.53)

$$\langle \vec{E}, \text{rot}(\vec{H}) \rangle = \langle \vec{E}, \vec{J} \rangle + \langle \vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rangle = \kappa \langle \vec{E}, \vec{E} \rangle + \varepsilon \langle \vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rangle.$$

Multiplizieren der magnetischen Feldstärke \vec{H} mit dem Induktionsgesetz (1.23) ergibt mit (1.49)

$$-\langle \vec{H}, \text{rot}(\vec{E}) \rangle = \langle \vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rangle = \mu \langle \vec{H}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \rangle.$$

Mit (1.81) folgt für die Strahlungsleistung

$$P = -\iiint_V \left(\langle \vec{E}, \text{rot}(\vec{H}) \rangle - \langle \vec{H}, \text{rot}(\vec{E}) \rangle \right) dV = \iiint_V \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) dV.$$

Man definiert den Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (1.77)$$

Mit dem Satz von Gauß (1.32) folgt die Strahlungsleistung

$$P = \iiint_V \text{div}(\vec{S}) dV = \oint_{\partial V} \langle \vec{S}, d\vec{A} \rangle. \quad (1.78)$$

Der Poynting-Vektor \vec{S} beschreibt die Strahlungsleistungsdichte.

In der Hochfrequenztechnik interessieren wir uns insbesondere für den zeitlichen Mittelwert des Poynting-Vektors \vec{S} bei harmonischer Zeitabhängigkeit der Feldstärken. Bei harmonisch zeitabhängigen Feldstärken berechnet sich der Poynting-

Vektor mit (1.2) und (1.4) zu⁴

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \operatorname{Re}(\vec{E} e^{j\omega t}) \times \operatorname{Re}(\vec{H} e^{j\omega t}) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{E} e^{j\omega t} + \vec{E}^* e^{-j\omega t}) \times \frac{1}{2} (\vec{H} e^{j\omega t} + \vec{H}^* e^{-j\omega t}) \\ &= \frac{1}{4} (\vec{E} \times \vec{H}) e^{j2\omega t} + \frac{1}{4} (\vec{E} \times \vec{H}^*) + \frac{1}{4} (\vec{E}^* \times \vec{H}) + \frac{1}{4} (\vec{E}^* \times \vec{H}^*) e^{-j2\omega t}.\end{aligned}$$

Der Mittelwert

$$\frac{1}{4} (\vec{E} \times \vec{H}^*) + \frac{1}{4} (\vec{E}^* \times \vec{H}) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*\right)$$

entspricht dem Realteil des komplexen Poynting-Vektors

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*. \quad (1.79)$$

Die im Mittel aus einem Volumen V austretende Strahlungsleistung ist

$$P = \iint_{\partial V} \langle \operatorname{Re}(\vec{S}), d\vec{A} \rangle. \quad (1.80)$$

Aufgabe 1.4 Zeigen Sie unter Verwenden kartesischer Koordinaten, dass für beliebige Vektorfelder \vec{E} und \vec{H}

$$\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \langle \vec{H}, \operatorname{rot}(\vec{E}) \rangle - \langle \vec{E}, \operatorname{rot}(\vec{H}) \rangle \quad (1.81)$$

gilt!

⁴ Der Realteil einer komplexen Größe \underline{x} berechnet sich zu $\operatorname{Re}(\underline{x}) = \frac{1}{2} (\underline{x} + \underline{x}^*)$.

Kapitel 2.

Elektromagnetische Wellen

2.1. Helmholtz-Gleichungen

Im Folgenden wird das elektromagnetische Feld in einem homogenem Dielektrikum betrachtet. Es werden vereinfachend kartesische Koordinaten verwendet. Wendet man auf das Durchflutungsgesetz (1.17) nochmals die Rotation an, so erhält man mit (1.46) bei verschwindender elektrischer Stromdichte \vec{J}

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{H})) = j\omega\varepsilon \operatorname{rot}(\vec{E}).$$

Mit dem Gradienten

$$\operatorname{grad}(\phi) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{u}_z \quad (2.1)$$

eines Skalarfeldes ϕ in kartesischen Koordinaten, dem Laplace-Operator

$$\Delta\vec{H} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{H})) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{H})) \quad (2.2)$$

und der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes \vec{H} im ladungsfreien Raum $\rho_m = 0$, siehe (1.39) und (1.50), erhält man

$$-\Delta\vec{H} = j\omega\varepsilon \operatorname{rot}(\vec{E}).$$

Einsetzen des Induktionsgesetzes (1.24) ergibt mit (1.50) und

$$\beta_0 = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (2.3)$$

bei verschwindender magnetischer Stromdichte \vec{M} die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta\vec{H} + \beta_0^2\vec{H} = \vec{0} \quad (2.4)$$

für die magnetische Feldstärke \vec{H} . Dual erhält man ausgehend vom Induktionsgesetz (1.24) durch Einsetzen des Durchflutungsgesetzes (1.17) die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta\vec{E} + \beta_0^2\vec{E} = \vec{0} \quad (2.5)$$

für die elektrische Feldstärke \vec{E} . Ziel wird es sein, spezielle Randbedingungen erfüllende, als elektromagnetische Wellen bezeichnete, Lösungen der Helmholtz-Gleichungen zu finden. Zunächst werden jedoch charakteristische Eigenschaften möglicher Lösungen der Helmholtz-Gleichungen studiert.

Aufgabe 2.1 Aus dem Durchflutungsgesetz (1.17) erhält man mit (1.46) bei verschwindender elektrischer Stromdichte \vec{J} die elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = -j \frac{1}{\omega \epsilon} \operatorname{rot}(\vec{H}).$$

Zeigen Sie, dass die so berechnete elektrische Feldstärke \vec{E} die Helmholtz-Gleichung (2.5) erfüllt, falls die magnetische Feldstärke \vec{H} die Helmholtz-Gleichung (2.4) erfüllt!

Aufgabe 2.2 Zeigen Sie ausgehend von der Definition des Laplace-Operators (2.2), dass für den Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} \quad (2.6)$$

gilt!

2.2. Zylindrische Wellenleiter

2.2.1. Helmholtz-Gleichungen für zylindrische Wellenleiter

Zylindrische Wellenleiter, wie der in Abbildung 2.1 gezeigte, zeichnen sich durch ihren konstanten Querschnitt aus. Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die Längsachse des zylindrischen Wellenleiters der z -Achse entspricht. Das Dielektrikum sei homogen und von idealen elektrischen Leitern berandet.

Es werden Lösungen der Helmholtz-Gleichungen mit einer harmonischen z -Abhängigkeit gesucht. Für eine sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitende elektromagnetische Welle wählt man daher den Ansatz

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}(\vec{H}(x, y, z) e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\vec{H}_0(x, y) e^{\mp j\beta z} e^{j\omega t}) \quad (2.7)$$

für die magnetische Feldstärke \vec{H} . Das obere (untere) Vorzeichen gilt hier und im Folgenden stets bei Ausbreitung in positiver (negativer) z -Richtung. β ist die Phasenkonstante. Dual verwendet man den Ansatz

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}(\vec{E}(x, y, z) e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\vec{E}_0(x, y) e^{\mp j\beta z} e^{j\omega t}) \quad (2.8)$$

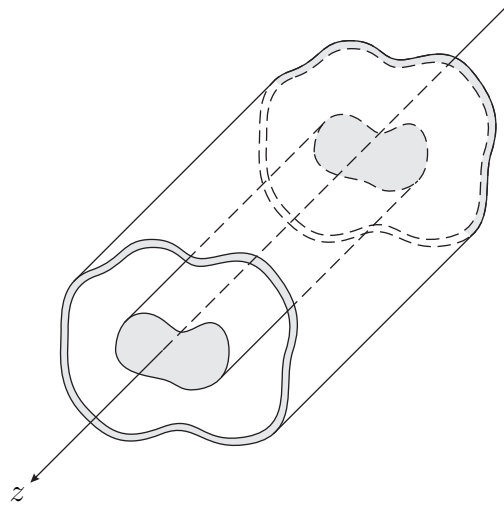


Abbildung 2.1.: Kurzes Stück eines zylindrischen Wellenleiters bestehend aus zwei Leitern, deren Querschnitt grau dargestellt ist

für die elektrische Feldstärke \vec{E} .

Eine genauere Betrachtung des Anwendens des Laplace-Operators (2.6) auf die magnetische Feldstärke \vec{H} einer sich auf einem zylindrischen Wellenleiter ausbreitenden elektromagnetischen Welle ergibt

$$\Delta \vec{H} = \Delta (\vec{H}_0 e^{\mp j\beta z}) = \left(\frac{\partial^2 \vec{H}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}_0}{\partial y^2} - \beta^2 \vec{H}_0 \right) e^{\mp j\beta z}.$$

Man definiert den zweidimensionalen Laplace-Operator

$$\Delta_{xy} \vec{H}_0 = \frac{\partial^2 \vec{H}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}_0}{\partial y^2}. \quad (2.9)$$

Dies in die Helmholtz-Gleichung (2.4) eingesetzt ergibt nach Wegkürzen von $e^{\mp j\beta z}$ die zweidimensionale Helmholtz-Gleichung

$$\Delta_{xy} \vec{H}_0 + \underbrace{(\beta_0^2 - \beta^2)}_{\beta_c^2} \vec{H}_0 = \vec{0} \quad (2.10)$$

für die magnetische Feldstärke \vec{H}_0 bei $z = 0$. Dual erhält man aus (2.5) die zweidimensionale Helmholtz-Gleichung

$$\Delta_{xy} \vec{E}_0 + \underbrace{(\beta_0^2 - \beta^2)}_{\beta_c^2} \vec{E}_0 = \vec{0} \quad (2.11)$$

für die elektrische Feldstärke \vec{E}_0 bei $z = 0$.

Man findet zunächst elektromagnetische Felder \vec{H}_0 und \vec{E}_0 in der Querschnittsebene $z = 0$ des zylindrischen Wellenleiters und zugehörige kritische Phasenkonstanten β_c mit

$$\beta_c^2 = \beta_0^2 - \beta^2 \quad (2.12)$$

als frequenzunabhängige Lösungen der zweidimensionalen Helmholtz-Gleichungen. Die kritische Phasenkonstante β_c hängt nur von der Geometrie des zylindrischen Wellenleiters, nicht aber von der Kreisfrequenz ω ab. Mathematisch gesehen handelt es sich bei den zweidimensionalen Helmholtz-Gleichungen mit ihren durch die Geometrie des zylindrischen Wellenleiters gegebenen Randbedingungen um Eigenwertprobleme [Bla07]. Es gibt unendlich viele diskrete, aus Eigenwerten $-\beta_c^2$ und zugehörigen Eigenfunktionen \vec{H}_0 oder \vec{E}_0 bestehende Lösungen. Diese die Feldstruktur beschreibenden Lösungen des Eigenwertproblems werden als Moden bezeichnet. Zu jedem Mode gibt es unendlich viele elektromagnetische Wellen, die sich in Amplitude, Phase und Ausbreitungsrichtung unterscheiden.

Falls sich die Längsachse des zylindrischen Wellenleiters in eine beliebige, durch den Einheitsvektor \vec{u} beschriebene, Raumrichtung erstreckt, erhält man für die sich in diese Raumrichtung ausbreitende elektromagnetische Welle mit dem Phasenvektor

$$\vec{\beta} = \beta\vec{u} = \beta_x\vec{u}_x + \beta_y\vec{u}_y + \beta_z\vec{u}_z \quad (2.13)$$

und dem Ortsvektor

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

des Beobachtungsortes die Ansätze

$$\vec{H} = \text{Re}\left(\vec{H}_0 e^{-j\langle\vec{\beta},\vec{r}\rangle} e^{j\omega t}\right) = \text{Re}\left(\vec{H}_0 e^{-j\beta_x x} e^{-j\beta_y y} e^{-j\beta_z z} e^{j\omega t}\right) \quad (2.14)$$

und

$$\vec{E} = \text{Re}\left(\vec{E}_0 e^{-j\langle\vec{\beta},\vec{r}\rangle} e^{j\omega t}\right) = \text{Re}\left(\vec{E}_0 e^{-j\beta_x x} e^{-j\beta_y y} e^{-j\beta_z z} e^{j\omega t}\right). \quad (2.15)$$

\vec{H}_0 und \vec{E}_0 dürfen hier nur von den zum Phasenvektor $\vec{\beta}$ senkrechten Transversalkoordinaten abhängen.

2.2.2. Transversalkomponenten und Longitudinalkomponenten

Für eine sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitende elektromagnetische Welle kann man die Transversalkomponenten \underline{H}_x , \underline{H}_y , \underline{E}_x und \underline{E}_y der Feldstärken aus den Longitudinalkomponenten \underline{H}_z und \underline{E}_z der Feldstärken berechnen.

Für sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitende elektromagnetische Wellen gemäß (2.7) lauten die ersten beiden Komponentengleichungen (1.18) und

(1.19) des Durchflutungsgesetzes im Dielektrikum $\underline{J}_x = \underline{J}_y = 0$ unter Verwenden von (1.46):

$$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \pm j\beta \underline{H}_y = j\omega\varepsilon \underline{E}_x, \quad (2.16)$$

$$\mp j\beta \underline{H}_x - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon \underline{E}_y. \quad (2.17)$$

Dual erhält durch Einsetzen von (2.8) in die ersten beiden Komponentengleichungen (1.25) und (1.26) des Induktionsgesetzes im Dielektrikum $\underline{M}_x = \underline{M}_y = 0$ unter Verwenden von (1.50):

$$-\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \mp j\beta \underline{E}_y = j\omega\mu \underline{H}_x, \quad (2.18)$$

$$\pm j\beta \underline{E}_x + \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} = j\omega\mu \underline{H}_y. \quad (2.19)$$

Auflösen nach den Transversalkomponenten ergibt mit (2.3) und (2.12):

$$\underline{E}_x \beta_c^2 = \mp j\beta \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} - j\omega\mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}, \quad (2.20)$$

$$\underline{E}_y \beta_c^2 = \mp j\beta \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}, \quad (2.21)$$

$$\underline{H}_x \beta_c^2 = \mp j\beta \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} + j\omega\varepsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}, \quad (2.22)$$

$$\underline{H}_y \beta_c^2 = \mp j\beta \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} - j\omega\varepsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}. \quad (2.23)$$

2.2.3. Transversalelektromagnetische Wellen

Transversalelektromagnetische Wellen (TEM-Wellen), die auch als Lecher-Wellen (L-Wellen) bezeichnet werden, sind elektromagnetische Wellen, deren Feldstärken keine Longitudinalkomponenten \underline{H}_z und \underline{E}_z haben. Für die kritische Phasenkonstante transversalelektromagnetischer Wellen muss $\beta_c = 0$ gelten, siehe (2.20), (2.21), (2.22) und (2.23), wenn das elektromagnetische Feld nicht vollständig verschwinden soll. Aus (2.12) und (2.3) folgt die Phasenkonstante

$$\beta = \beta_0 = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (2.24)$$

Weiterhin folgt aus (2.16) und (2.17) oder (2.18) und (2.19) für die Transversalkomponenten einer sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitenden transversalelektromagnetischen Welle

$$\frac{\underline{E}_x}{\underline{H}_y} = -\frac{\underline{E}_y}{\underline{H}_x} = \pm \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \pm \frac{\omega\mu}{\beta}.$$

Man erhält den Feldwellenwiderstand

$$Z_F = \frac{\beta}{\omega \varepsilon} = \frac{\omega \mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (2.25)$$

transversalelektromagnetischer Wellen. Der Feldwellenwiderstand des Vakuums ergibt sich mit (1.48) und (1.52) zu

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \Omega = 377 \Omega. \quad (2.26)$$

Der elektrische Feldstärkevektor \vec{E} und der magnetische Feldstärkevektor \vec{H} einer transversalelektromagnetischen Welle sind in Phase und stehen zu jedem Zeitpunkt senkrecht aufeinander:

$$\vec{E} = \pm Z_F \vec{H} \times \vec{u}_z, \quad (2.27)$$

$$\vec{H} = \mp \frac{\vec{E} \times \vec{u}_z}{Z_F}. \quad (2.28)$$

Mit (1.79) folgt der komplexe Poynting-Vektor

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{2} (\underline{E}_x \underline{H}_y^* - \underline{E}_y \underline{H}_x^*) \vec{u}_z \\ &= \pm \frac{1}{2Z_F} (|\underline{E}_x|^2 + |\underline{E}_y|^2) \vec{u}_z = \pm \frac{1}{2Z_F} \|\vec{E}\|^2 \vec{u}_z \\ &= \pm \frac{1}{2} Z_F (|\underline{H}_y|^2 + |\underline{H}_x|^2) \vec{u}_z = \pm \frac{1}{2} Z_F \|\vec{H}\|^2 \vec{u}_z \end{aligned} \quad (2.29)$$

einer sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitenden transversalelektromagnetischen Welle. $\|\cdot\|$ bezeichnet die Norm des Vektors.¹ Der komplexe Poynting-Vektor \vec{S} einer transversalelektromagnetischen Welle ist rein reell, das heißt die transversalelektromagnetische Welle transportiert nur Wirkleistung.

Aufgabe 2.3 Zeigen Sie, dass bei transversalelektromagnetischen Wellen die elektrische Energiedichte w_e und die magnetische Energiedichte w_m zu jedem Zeitpunkt gleich sind! Die Energiedichten selbst können dabei sehr wohl zeitabhängig oder ortsabhängig sein. Wie groß ist die Energiegeschwindigkeit

$$v_e = \frac{\|\vec{S}\|}{w_e + w_m} \quad (2.30)$$

transversalelektromagnetischer Wellen?

¹ Die Norm des Vektors \vec{a} ist $\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$.

2.2.4. Transversalelektrische Wellen

Transversalelektrische Wellen (TE-Wellen), die auch als H-Wellen bezeichnet werden, sind elektromagnetische Wellen, deren elektrische Feldstärke \vec{E} keine Longitudinalkomponente E_z hat. Die magnetische Feldstärke \vec{H} hat jedoch eine Longitudinalkomponente H_z . Für die kritische Phasenkonstante transversalelektrischer Wellen muss $\beta_c \neq 0$ gelten, siehe (2.20), (2.21), (2.22) und (2.23), wenn die Longitudinalkomponente H_z der magnetischen Feldstärke \vec{H} nicht über die gesamte Querschnittsfläche konstant sein soll, was im Widerspruch zu den Randbedingungen stünde.

Im Folgenden wird gezeigt, dass β_c^2 reell und nichtnegativ ist.² Sei A die mit dem Dielektrikum gefüllte Querschnittsebene des zylindrischen Wellenleiters. Der Rand ∂A der Querschnittsebene A entspricht den Leiteroberflächen. \vec{u} sei der Normaleneinheitsvektor auf der Leiteroberfläche. Mit der zweidimensionalen Helmholtz-Gleichung (2.10), (2.9) und dem Gaußschen Satz in der Ebene (1.35) erhält man unter Berücksichtigen der Produktregel der Ableitung

$$\begin{aligned}
 \beta_c^2 \iint_A |\underline{H}_{0z}|^2 dA &= \iint_A \underline{H}_{0z}^* \beta_c^2 \underline{H}_{0z} dA = - \iint_A \underline{H}_{0z}^* \Delta_{xy} \underline{H}_{0z} dA \\
 &= - \iint_A \underline{H}_{0z}^* \left(\frac{\partial^2 \underline{H}_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{H}_{0z}}{\partial y^2} \right) dA \\
 &= - \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\underline{H}_{0z}^* \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\underline{H}_{0z}^* \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial y} \right) \right) dA \\
 &\quad + \iint_A \left(\frac{\partial \underline{H}_{0z}^*}{\partial x} \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{H}_{0z}^*}{\partial y} \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial y} \right) dA \\
 &= - \oint_{\partial A} \left\langle \underline{H}_{0z}^* \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial x} + \underline{H}_{0z}^* \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial y}, \vec{u} \right\rangle ds \\
 &\quad + \iint_A \left(\left| \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial y} \right|^2 \right) dA.
 \end{aligned}$$

Die Ableitung der tangentialen z -Komponente H_{0z} der magnetischen Feldstärke \vec{H} an der Oberfläche des idealen elektrischen Leiters nach der Normalenrichtung ergibt Null, siehe (2.20), (2.21) und (1.65). Damit folgt

$$\oint_{\partial A} \left\langle \underline{H}_{0z}^* \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial x} + \underline{H}_{0z}^* \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial y}, \vec{u} \right\rangle ds = \oint_{\partial A} \underline{H}_{0z}^* \underbrace{\left\langle \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial y}, \vec{u} \right\rangle}_{= 0 \text{ auf dem Rand } \partial A} ds = 0.$$

² Die Eigenwerte des Laplace-Operators sind reell und nichtnegativ, da der Laplace-Operator auf der Menge der die Randbedingungen erfüllenden Funktion selbstadjungiert ist.

Man erhält schließlich

$$\beta_c^2 = \frac{\iint_A \left(\left| \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial y} \right|^2 \right) dA}{\underbrace{\iint_A |\underline{H}_{0z}|^2 dA}_{\text{reell}}} \geq 0.$$

Zum Berechnen des Feldwellenwiderstands Z_{FTE} bildet man das Verhältnis aus (2.20) und (2.23) oder aus (2.21) und (2.22) und setzt $\underline{E}_z = 0$ ein. Mit (2.12), (2.3) und (2.25) erhält man den Feldwellenwiderstand

$$Z_{\text{FTE}} = \pm \frac{\underline{E}_x}{\underline{H}_y} = \mp \frac{\underline{E}_y}{\underline{H}_x} = \frac{\omega \mu}{\beta} = \frac{\omega \mu}{\beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} = \frac{Z_{\text{F}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} \quad (2.31)$$

transversalelektrischer Wellen, siehe auch (2.42). Zusammenfassend schreibt man

$$\vec{E} = \pm Z_{\text{FTE}} \vec{H} \times \vec{u}_z. \quad (2.32)$$

2.2.5. Transversalmagnetische Wellen

Transversalmagnetische Wellen (TM-Wellen), die auch als E-Wellen bezeichnet werden, sind elektromagnetische Wellen, deren magnetische Feldstärke \vec{H} keine Longitudinalkomponente \underline{H}_z hat. Die elektrische Feldstärke \vec{E} hat jedoch eine Longitudinalkomponente \underline{E}_z . Für die kritische Phasenkonstante transversalmagnetischer Wellen muss $\beta_c \neq 0$ gelten, siehe (2.20), (2.21), (2.22) und (2.23), wenn die Longitudinalkomponente \underline{E}_z der elektrischen Feldstärke \vec{E} nicht über die gesamte Querschnittsfläche konstant sein soll, was im Widerspruch zu den Randbedingungen stünde.

Die tangentielle z -Komponente \underline{E}_{0z} der elektrischen Feldstärke \vec{E} an der Oberfläche des idealen elektrischen Leiters ist Null, vergleiche (1.65). Damit folgt

$$\oint_{\partial A} \left\langle \underline{E}_{0z}^* \frac{\partial \underline{E}_{0z}}{\partial x} + \underline{E}_{0z} \frac{\partial \underline{E}_{0z}^*}{\partial y}, \vec{u} \right\rangle ds = \oint_{\partial A} \underbrace{\underline{E}_{0z}^*}_{=0 \text{ auf dem Rand } \partial A} \left\langle \frac{\partial \underline{E}_{0z}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E}_{0z}}{\partial y}, \vec{u} \right\rangle ds = 0.$$

Mit einer im Übrigen formal zur Rechnung in Abschnitt 2.2.4 gleichartigen Rechnung ausgehend von der zweidimensionalen Helmholtz-Gleichung (2.11) kann man zeigen, dass β_c^2 auch hier reell und nichtnegativ ist.

Zum Berechnen des Feldwellenwiderstands Z_{FTM} bildet man das Verhältnis aus (2.20) und (2.23) oder aus (2.21) und (2.22) und setzt $\underline{H}_z = 0$ ein. Mit (2.12),

(2.3) und (2.25) erhält man den Feldwellenwiderstand

$$Z_{\text{FTM}} = \pm \frac{E_x}{H_y} = \mp \frac{E_y}{H_x} = \frac{\beta}{\omega \varepsilon} = \frac{\beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}}{\omega \varepsilon} = Z_{\text{F}} \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2} \quad (2.33)$$

transversalmagnetischer Wellen, siehe auch (2.42). Zusammenfassend schreibt man

$$\vec{H} = \mp \frac{\vec{E} \times \vec{u}_z}{Z_{\text{FTM}}}. \quad (2.34)$$

2.2.6. Phasenkonstante und Wellenlänge

Aus (2.12) ergibt sich mit (2.3) die Phasenkonstante

$$\beta = \sqrt{\beta_0^2 - \beta_c^2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - \beta_c^2}. \quad (2.35)$$

Die elektromagnetische Welle ist nur dann ausbreitungsfähig, das heißt die Phasenkonstante β ist nur dann reell, wenn die Kreisfrequenz ω größer als die kritische Kreisfrequenz

$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{\beta_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad (2.36)$$

ist. Anderenfalls entstünde ein aperiodisch abklingendes elektromagnetisches Feld. Für diesen Fall und verallgemeinernd für den Fall verlustbehafteter Dielektrika mit komplexen Permittivitäten $\underline{\varepsilon}$ und komplexen Permeabilitäten $\underline{\mu}$ ergibt sich eine komplexe Wellenzahl

$$\underline{k} = \beta - j\alpha = \sqrt{\omega^2 \underline{\varepsilon} \underline{\mu} - \beta_c^2}. \quad (2.37)$$

Der negative Imaginärteil α der Wellenzahl \underline{k} wird als Dämpfungskonstante bezeichnet. Im Folgenden werden jedoch nur die für technische Anwendungen besonders interessanten ausbreitungsfähigen und ungedämpften elektromagnetischen Wellen mit rein reeller Wellenzahl $\underline{k} = \beta$ weiter betrachtet.

Aus der Phasenkonstante β berechnet man die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta_0^2 - \beta_c^2}}, \quad (2.38)$$

siehe (2.7), (2.8) und Abbildung 2.2. Es gibt elektromagnetische Wellen, deren kritische Phasenkonstante β_c Null ist, siehe Abschnitt 2.2.3. Die Wellenlänge λ

einer derartigen elektromagnetischen Welle entspricht der sogenannten Freiraumwellenlänge

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\beta_0}. \quad (2.39)$$

Hiermit folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}}. \quad (2.40)$$

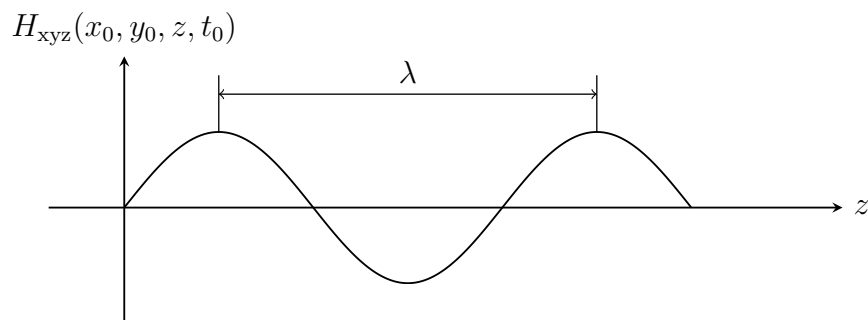


Abbildung 2.2.: Elektromagnetische Welle mit der Wellenlänge λ

Man definiert weiterhin die kritische Wellenlänge

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\beta_c}. \quad (2.41)$$

Unter Verwenden von (2.3) folgt für den Term im Nenner von (2.40)

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}. \quad (2.42)$$

2.2.7. Phasengeschwindigkeit

Die Phasengeschwindigkeit ergibt sich mit der Strecke Δz , welche die Phasenfront in der Zeit Δt zurücklegt, zu

$$v_p = \frac{\Delta z}{\Delta t},$$

siehe Abbildung 2.3. An der Phasenfront einer sich in positive z -Richtung ausbreitenden elektromagnetischen Welle gilt

$$e^{-j\beta z + j\omega t} = e^{-j\beta(z + \Delta z) + j\omega(t + \Delta t)},$$

siehe (2.7) und (2.8). Es folgt die Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (2.43)$$

und mit (2.35) und (2.3) schließlich

$$v_p = \frac{\omega}{\beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu} \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}}.$$

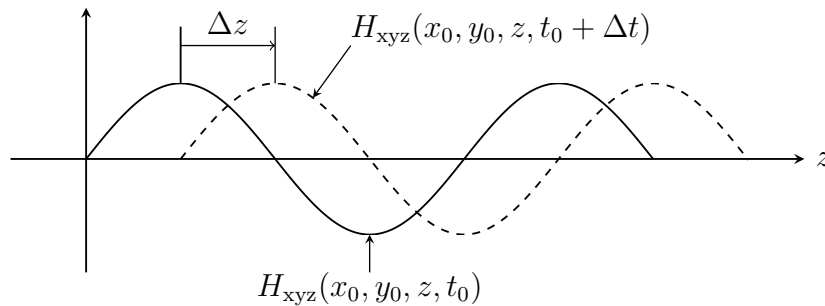


Abbildung 2.3.: Sich in positive z -Richtung ausbreitende elektromagnetische Welle

Die Phasengeschwindigkeit v_p einer sich in einem Dielektrikum mit frequenzunabhängigen Materialeigenschaften ausbreitenden elektromagnetischen Welle ist nur dann frequenzunabhängig, wenn die kritische Phasenkonstante β_c Null ist. Für derartige elektromagnetische Wellen entspricht die Phasengeschwindigkeit v_p der Lichtgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (2.44)$$

Mit (1.48) und (1.52) ergibt sich die Vakuumlichtgeschwindigkeit zu

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}. \quad (2.45)$$

Für die Phasengeschwindigkeit folgt

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}}, \quad (2.46)$$

siehe auch (2.42). Beim Annähern an die kritische Kreisfrequenz ω_c wird die Phasengeschwindigkeit v_p unendlich groß, siehe Abbildung 2.5.

2.2.8. Gruppengeschwindigkeit

Es wird die Nachrichtenübertragung über ein Wellenleiterstück der Länge Δz mit einer sich in positive z -Richtung ausbreitenden elektromagnetischen Welle betrachtet, siehe Abbildung 2.4. Die Phasenkonstante β sei zunächst beliebig frequenzabhängig. Aus nachrichtentechnischer Sicht ist insbesondere die aus der Impulsantwort einfach ablesbare Laufzeit Δt der Nachrichten interessant [OL10]. Die gesuchte Impulsantwort lässt sich prinzipiell aus der Übertragungsfunktion $e^{-j\beta(\omega)\Delta z}$ durch inverse Fourier-Transformation berechnen. Man wird jedoch typischerweise aufgrund der komplizierten Frequenzabhängigkeit der Phasenkonstante $\beta(\omega)$ keine analytische Lösung für die Impulsantwort finden.

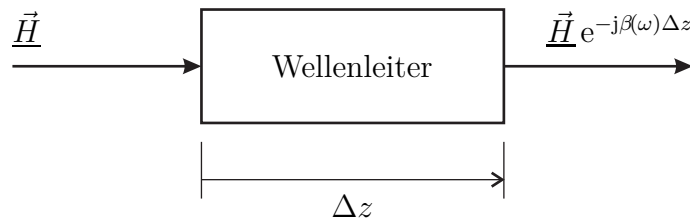


Abbildung 2.4.: Lineares zeitinvariantes System

Für schmalbandige Nachrichtensignale der mittleren Kreisfrequenz ω_0 kann man zum Vereinfachen des Problems die lineare Taylor-Approximation

$$\beta(\omega) \approx \beta(\omega_0) + \frac{\partial \beta}{\partial \omega} (\omega - \omega_0)$$

verwenden. Damit folgt für die Übertragungsfunktion

$$e^{-j\beta(\omega)\Delta z} \approx e^{-j\beta(\omega_0)\Delta z - j\frac{\partial \beta}{\partial \omega}(\omega - \omega_0)\Delta z} = \underbrace{e^{-j\beta(\omega_0)\Delta z + j\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\omega_0\Delta z}}_{\text{Phasenverschiebung}} e^{-j\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\omega\Delta z}.$$

Durch inverse Fourier-Transformation erhält man hieraus bis auf eine nicht weiter interessierende Phasenverschiebung die Impulsantwort

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-j\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\omega\Delta z}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\omega\Delta z} e^{j\omega t} d\omega = \delta\left(t - \underbrace{\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\Delta z}_{\Delta t}\right).$$

$\delta(\cdot)$ ist der Dirac-Impuls. Es folgt die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \omega}} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta}. \quad (2.47)$$

Mit (2.35), (2.3) und (2.44) folgt für elektromagnetische Wellen bei frequenzunabhängigen Materialeigenschaften

$$v_g = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial \omega} (\sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - \beta_c^2})} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}, \quad (2.48)$$

siehe auch (2.42). Beim Annähern an die kritische Kreisfrequenz ω_c wird die Gruppengeschwindigkeit v_g Null, siehe Abbildung 2.5.

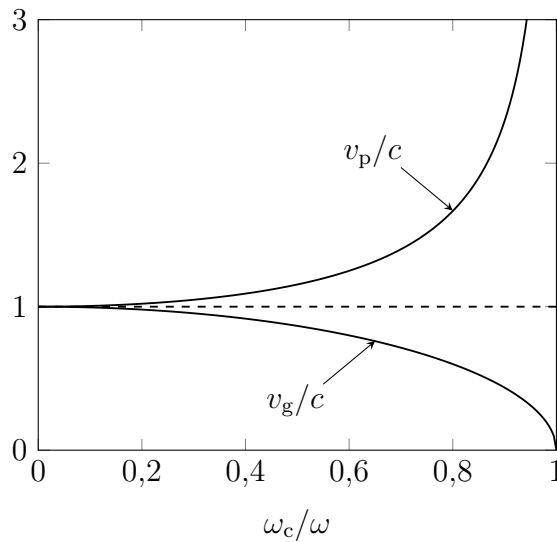


Abbildung 2.5.: Phasengeschwindigkeit v_p und Gruppengeschwindigkeit v_g

Die Gruppengeschwindigkeit v_g ist frequenzunabhängig, falls die Phasenkonstante β proportional zur Kreisfrequenz ω ist, siehe Abbildung 2.6. Dies ist bei einer sich in einem Dielektrikum mit frequenzunabhängigen Materialeigenschaften ausbreitenden elektromagnetischen Welle der Fall, wenn die kritische Phasenkonstante β_c Null ist. Dann sind Phasengeschwindigkeit v_p und Gruppengeschwindigkeit v_g gleich der Lichtgeschwindigkeit c . Man bezeichnet die elektromagnetische Welle als dispersionsfrei. Dispersionen resultieren aus einer nichtlinearen Frequenzabhängigkeit der Phasenkonstante β . Dispersionen sind meistens unerwünscht, da die frequenzabhängige Gruppengeschwindigkeit v_g zu Verzerrungen bei der Signalübertragung führt. Man unterscheidet im Allgemeinen

Wellenleiterdispersionen, die aus der charakteristischen nichtlinearen Frequenzabhängigkeit (2.35) der Phasenkonstante β bei elektromagnetischen Wellen mit einer kritischen Phasenkonstante β_c größer Null resultieren und

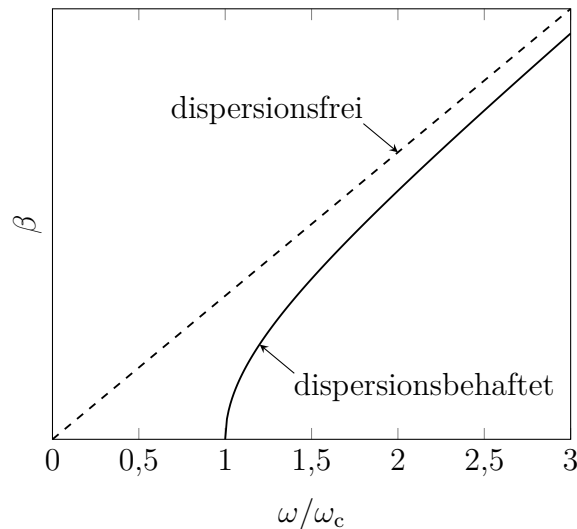


Abbildung 2.6.: Dispersionsdiagramm

Materialdispersionen, die aus einer nichtlinearen Frequenzabhängigkeit der Phasenkonstante β infolge frequenzabhängiger Materialeigenschaften resultieren.

Aufgabe 2.4 Zeigen Sie, dass sich die Gruppengeschwindigkeit gemäß

$$v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p} \frac{\partial v_p}{\partial \omega}}$$

aus der Phasengeschwindigkeit v_p berechnen lässt!

2.3. Ebene homogene Welle im freien Raum

Die ebene homogene Welle stellt die einfachste Lösung der Helmholtz-Gleichungen dar. Eine ebene Welle ist dadurch charakterisiert, dass die Phasenfronten, das heißt die Orte gleicher Phasen, Ebenen im Raum sind. Von einer ebenen homogenen Welle fordert man zusätzlich, dass diese Ebenen konstanter Phase auch Orte konstanter Amplitude sind. Der freie Raum entspricht einem zylindrischen Wellenleiter mit unendlichem Querschnitt. Bei einer ebenen homogenen, sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitenden, elektromagnetischen Welle gelten folglich

$$\vec{H}(x, y, z) = \vec{H}_0 e^{\mp j\beta z} \quad (2.49)$$

und

$$\vec{E}(x, y, z) = \underline{E}_0 e^{\mp j\beta z}, \quad (2.50)$$

vergleiche (2.7) und (2.8).

Da die Feldstärken einer sich in z -Richtung ausbreitenden ebenen homogenen Welle nicht von den Transversalkoordinaten x und y abhängen, folgt aus der z -Komponente (1.20) des Durchflutungsgesetzes im Dielektrikum $\underline{J}_z = 0$ unter Verwenden von (1.46)

$$\underline{E}_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left(\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} \right) = 0.$$

Dual folgt aus der z -Komponente (1.27) des Induktionsgesetzes im Dielektrikum $\underline{M}_z = 0$ unter Verwenden von (1.50)

$$\underline{H}_z = \frac{1}{j\omega\mu} \left(-\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \right) = 0.$$

Die ebene homogene Welle ist also eine transversalelektromagnetische Welle. Man kann beispielsweise die konstanten, von den Transversalkoordinaten x und y unabhängigen Transversalkomponenten \underline{E}_{0x} und \underline{E}_{0y} der elektrischen Feldstärke \vec{E}_0 für $z = 0$ oder alternativ die Transversalkomponenten \underline{H}_{0x} und \underline{H}_{0y} der magnetischen Feldstärke \vec{H}_0 für $z = 0$ beliebig vorgeben. Wie man leicht durch Einsetzen überprüft, erfüllt dieser Ansatz unter Berücksichtigen von $\beta_c = 0$ die zweidimensionalen Helmholtz-Gleichungen (2.10) und (2.11). Wie bei allen transversalelektromagnetischen Wellen sind die elektrische Feldstärke \vec{E} und die magnetische Feldstärke \vec{H} über den Feldwellenwiderstand Z_F miteinander verknüpft, siehe (2.27) und (2.28). Des Weiteren gelten natürlich alle allgemeinen Eigenschaften transversalelektromagnetischer Wellen auch hier, siehe Abschnitt 2.2.3.

Die folgende Betrachtung der zeitabhängigen räumlichen Ausrichtung des elektrischen Feldstärkevektors \vec{E} einer sich in positive z -Richtung ausbreitenden ebenen homogenen Welle führt zum Begriff der Polarisation. Willkürlich wird die Ebene $z = 0$ betrachtet. Für den Momentanwert der elektrischen Feldstärke gilt mit (1.2)

$$E_{0x} = \operatorname{Re}(\underline{E}_{0x} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\underline{E}_{0x}) \cos(\omega t) - \operatorname{Im}(\underline{E}_{0x}) \sin(\omega t)$$

und

$$E_{0y} = \operatorname{Re}(\underline{E}_{0y} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\underline{E}_{0y}) \cos(\omega t) - \operatorname{Im}(\underline{E}_{0y}) \sin(\omega t).$$

Die Spitze des elektrischen Feldstärkevektors \vec{E}_0 durchläuft mit fortschreitender Zeit eine Ellipse in der x - y -Ebene, siehe Abbildung 2.7.

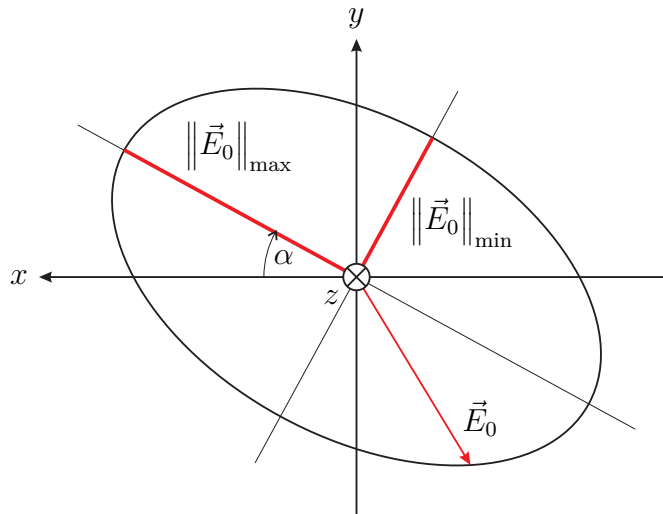


Abbildung 2.7.: Polarisationsellipse

Den Drehsinn definiert man bezüglich der Blickrichtung in Ausbreitungsrichtung der ebenen homogenen Welle. Diese Blickrichtung ist willkürlich aber in der Hochfrequenztechnik üblich. In der Optik wählt man die Blickrichtung beispielsweise genau umgekehrt, so dass sich der Drehsinn umkehrt. Anhand der in Abbildung 2.8 eingeführten Größen unterscheidet man folgende Polarisationszustände:

- $0 < \alpha_x - \alpha_y < \pi$: E_{0x} eilt E_{0y} vor, rechtsdrehend polarisiert
- $0 < \alpha_y - \alpha_x < \pi$: E_{0y} eilt E_{0x} vor, linksdrehend polarisiert
- $\alpha_x - \alpha_y = 0$ oder $\alpha_x - \alpha_y = \pi$: E_{0x} und E_{0y} gleichphasig oder gegenphasig, linear polarisiert
- $\alpha_x - \alpha_y = \pi/2$ und $|\underline{E}_{0x}| = |\underline{E}_{0y}|$: rechtsdrehend zirkular polarisiert
- $\alpha_y - \alpha_x = \pi/2$ und $|\underline{E}_{0x}| = |\underline{E}_{0y}|$: linksdrehend zirkular polarisiert

Bei linearer Polarisation entartet die Polarisationsellipse zu einer Linie und bei zirkularer Polarisation ist die Polarisationsellipse ein Kreis. Jede ebene homogene Welle kann man eindeutig als Überlagerung zweier orthogonaler Basiswellen darstellen. Als derartige Polarisationsbasen kommen beispielsweise linear horizontal und linear vertikal oder zirkular rechtsdrehend und zirkular linksdrehend polarisierte ebene homogene Wellen in Frage. Dies wird in Richtfunkssystemen und Satellitenkommunikationssystemen ausgenutzt, um unter Verwenden der beiden orthogonal polarisierten Basiswellen unabhängige Informationen zu übertragen.

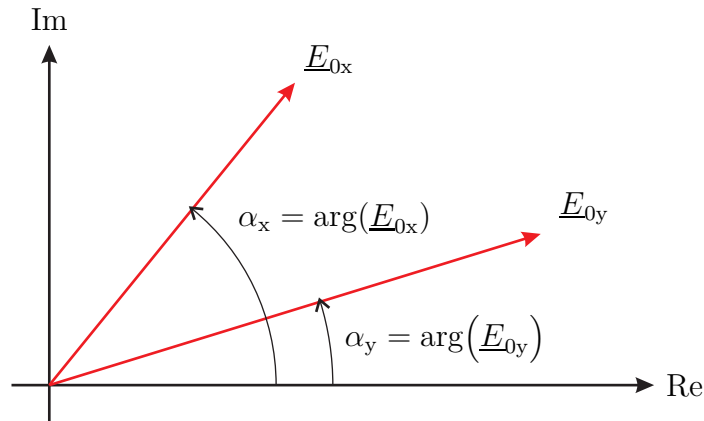


Abbildung 2.8.: Ermitteln des Drehsinns

Aufgabe 2.5 Eine ebene homogene Welle breite sich in positive z -Richtung aus. Die Transversalkomponenten E_x und E_y der elektrischen Feldstärke \vec{E} haben bei $z = 0$ die komplexen Amplituden

$$\underline{E}_{0x} = (1 + j0,5) \text{ V m}^{-1}$$

beziehungsweise

$$\underline{E}_{0y} = (1 - j0,5) \text{ V m}^{-1}.$$

Zeichnen Sie die Polarisationsellipse!

Kapitel 3.

Wellenleiter

3.1. Hohlleiter

3.1.1. Aufbau von Hohlleitern

Hohlleiter sind mit einem homogenen Dielektrikum, wie zum Beispiel Luft, gefüllte rohrförmige Wellenleiter konstanten Querschnitts aus näherungsweise ideal elektrisch leitendem Material. Es handelt sich um Einleitersysteme.

Im Folgenden werden nur die mathematisch einfach zu handhabenden Rechteckhohlleiter betrachtet. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da auch bei Hohlleitern anderen Querschnitts wie Rundhohlleitern keine fundamental andersartigen Effekte auftreten. Abbildung 3.1 zeigt das verwendete Koordinatensystem. Die Längsachse des Hohlleiters, in deren Richtung sich die elektromagnetische Welle ausbreitet, entspricht der z -Richtung. Die Breite des Hohlleiters wird mit a , die Höhe mit b bezeichnet. Das Koordinatensystem wird in der Regel so gewählt, dass $a > b$ gilt.

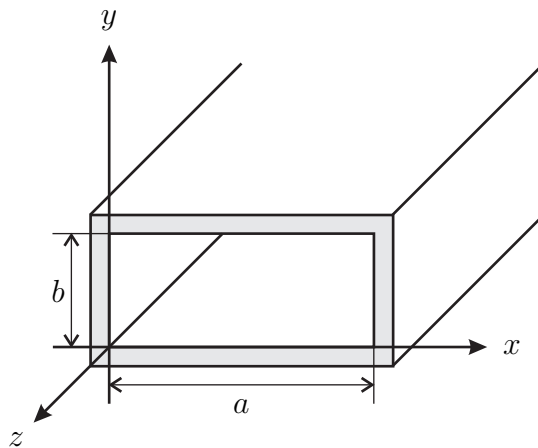


Abbildung 3.1.: Rechteckhohlleiter

3.1.2. Transversalelektrische Wellen in Hohlleitern

Zunächst werden transversalelektrische Wellen, das heißt elektromagnetische Wellen, deren elektrische Feldstärke \vec{E} keine Longitudinalkomponente E_z hat, untersucht. Es wird eine die z -Komponente der zweidimensionalen Helmholtz-Gleichung (2.10) und die Randbedingungen

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \quad \text{für } x = 0 \text{ und } x = a$$

und

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \quad \text{für } y = 0 \text{ und } y = b,$$

siehe (2.20), (2.21) und (1.65), erfüllende Longitudinalkomponente H_z der magnetischen Feldstärke \vec{H} gesucht.

Es wird der Ansatz

$$H_z = \underbrace{H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}_{H_{0z}} e^{\mp j\beta z} \quad (3.1)$$

für die Longitudinalkomponente der magnetischen Feldstärke \vec{H} verwendet, der die Randbedingungen erfüllt, falls m und n ganzzahlig sind. Die zu den ganzzahligen Parametern m und n gehörenden transversalelektrischen Wellen bezeichnet man als $TE_{m,n}$ -Wellen. m oder n muss von Null verschieden sein. Einsetzen der Longitudinalkomponente H_{0z} der magnetischen Feldstärke \vec{H}_0 bei $z = 0$ in die z -Komponente der zweidimensionalen Helmholtz-Gleichung (2.10) ergibt mit (2.9)

$$\begin{aligned} 0 = & -H_0 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ & - H_0 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ & + \beta_c^2 H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \end{aligned}$$

Die kritische Phasenkonstante ergibt sich zu

$$\beta_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (3.2)$$

Die Transversalkomponenten der Feldstärken einer sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitenden transversalelektrischen Welle berechnet man mit (2.20),

(2.21), (2.22) und (2.23) aus den Longitudinalkomponenten \underline{H}_z und $\underline{E}_z = 0$ der Feldstärken:

$$\underline{E}_x = -j \frac{\omega \mu}{\beta_c^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} = j \frac{\omega \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z}, \quad (3.3)$$

$$\underline{E}_y = j \frac{\omega \mu}{\beta_c^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = -j \frac{\omega \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z}, \quad (3.4)$$

$$\underline{H}_x = \mp j \frac{\beta}{\beta_c^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = \pm j \frac{\beta \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z}, \quad (3.5)$$

$$\underline{H}_y = \mp j \frac{\beta}{\beta_c^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} = \pm j \frac{\beta \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z}. \quad (3.6)$$

Im Allgemeinen ist nur das elektrische Feld transversalelektrischer Wellen übersichtlich darstellbar, da es hier ausreicht, die elektrische Feldstärke in einer beliebigen Querschnittsebene zweidimensional darzustellen, siehe Abbildung 3.2.

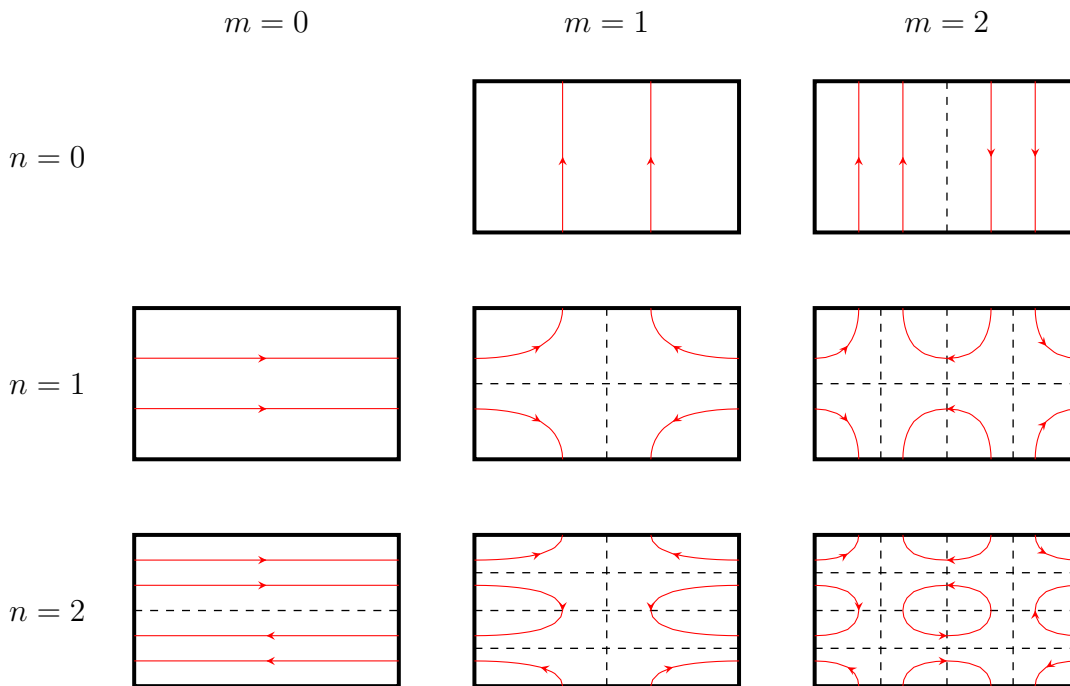


Abbildung 3.2.: Elektrische Felder transversalelektrischer Wellen

Aufgabe 3.1 Berechnen Sie die kritischen Kreisfrequenzen $\omega_{c,m,n}$ der $\text{TE}_{m,n}$ -Wellen eines luftgefüllten Hohlleiters der Breite $a = 50 \text{ mm}$ und der Höhe $b = 30 \text{ mm}$ für $m, n \leq 2$! Berechnen Sie weiterhin für eine sich auf diesem Hohlleiter

ausbreitende transversalelektrische Welle der Kreisfrequenz $\omega = 2 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$ die Phasengeschwindigkeit v_p , die Gruppengeschwindigkeit v_g und die Wellenlänge λ !

Aufgabe 3.2 Berechnen Sie auf den Hohlleiterwänden jeweils die elektrische Flächenladungsdichte ρ_{eF} aus der elektrischen Feldstärke \vec{E} und die elektrische Flächenstromdichte \vec{J}_F aus der magnetischen Feldstärke \vec{H} , wenn sich im Hohlleiter eine $\text{TE}_{m,n}$ -Welle ausbreitet! Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (1.41)!

3.1.3. Transversalmagnetische Wellen in Hohlleitern

Nun werden transversalmagnetische Wellen, das heißt elektromagnetische Wellen, deren magnetische Feldstärke \vec{H} keine Longitudinalkomponente H_z hat, untersucht. Hier wählt man den Ansatz

$$\underline{E}_z = \underbrace{\underline{E}_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}_{\underline{E}_{0z}} e^{\mp j\beta z} \quad (3.7)$$

für die Longitudinalkomponente der elektrischen Feldstärke \vec{E} . Der Ansatz erfüllt die Randbedingungen

$$\underline{E}_z = 0 \quad \text{für } x = 0 \text{ und } x = a$$

und

$$\underline{E}_z = 0 \quad \text{für } y = 0 \text{ und } y = b,$$

vergleiche (1.65), falls m und n ganzzahlig sind. Die zu den ganzzahligen Parametern m und n gehörenden transversalmagnetischen Wellen bezeichnet man als $\text{TM}_{m,n}$ -Wellen. Im Gegensatz zu transversalelektrischen Wellen, bei denen nur m oder n von Null verschieden sein muss, müssen bei transversalmagnetischen Wellen m und n von Null verschieden sein. Einsetzen der Longitudinalkomponente \underline{E}_{0z} der elektrischen Feldstärke \vec{E}_0 bei $z = 0$ in die z -Komponente der zweidimensionalen Helmholtz-Gleichung (2.11) ergibt mit (2.9)

$$\begin{aligned} 0 = & -\underline{E}_0 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ & -\underline{E}_0 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ & + \beta_c^2 \underline{E}_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \end{aligned}$$

Die kritische Phasenkonstante ergibt sich wie bei den transversalelektrischen Wellen, siehe (3.2), zu

$$\beta_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (3.8)$$

Die Transversalkomponenten der Feldstärken einer sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitenden transversalmagnetischen Welle berechnet man mit (2.20), (2.21), (2.22) und (2.23) aus den Longitudinalkomponenten \underline{E}_z und $\underline{H}_z = 0$ der Feldstärken:

$$\underline{E}_x = \mp j \frac{\beta}{\beta_c^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} = \mp j \frac{\beta \underline{E}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z}, \quad (3.9)$$

$$\underline{E}_y = \mp j \frac{\beta}{\beta_c^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} = \mp j \frac{\beta \underline{E}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z}, \quad (3.10)$$

$$\underline{H}_x = j \frac{\omega \varepsilon}{\beta_c^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} = j \frac{\omega \varepsilon \underline{E}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z}, \quad (3.11)$$

$$\underline{H}_y = -j \frac{\omega \varepsilon}{\beta_c^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} = -j \frac{\omega \varepsilon \underline{E}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z}. \quad (3.12)$$

Im Allgemeinen ist nur das magnetische Feld transversalmagnetischer Wellen übersichtlich darstellbar, da es hier ausreicht, die magnetische Feldstärke in einer beliebigen Querschnittsebene zweidimensional darzustellen, siehe Abbildung 3.3.

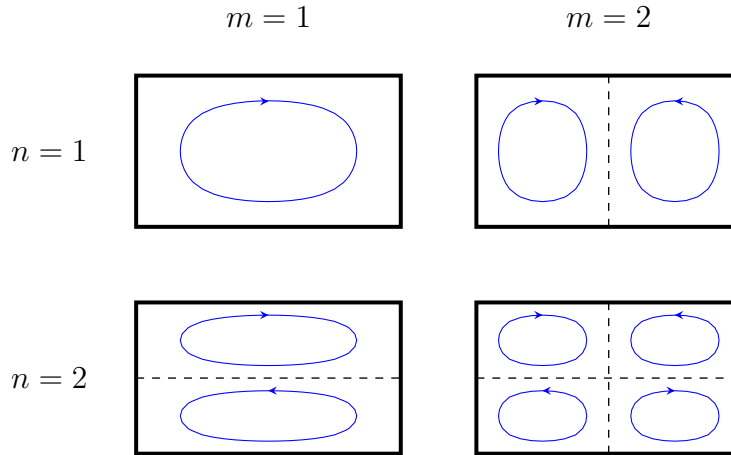


Abbildung 3.3.: Magnetische Felder transversalmagnetischer Wellen

3.2. Zweileitersysteme

3.2.1. Aufbau von Zweileitersystemen

Im Folgenden werden Zweileitersysteme mit konstantem Querschnitt und homogenem Dielektrikum betrachtet. Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die der Ausbreitungsrichtung entsprechende Längsachse des Zweileitersystems der z -Achse entspricht, siehe Abbildung 3.4. Im Folgenden werden zunächst transversalelektromagnetische Wellen näher untersucht. Bei höheren Kreisfrequenzen sind aber möglicherweise auch andere Wellentypen ausbreitungsfähig.

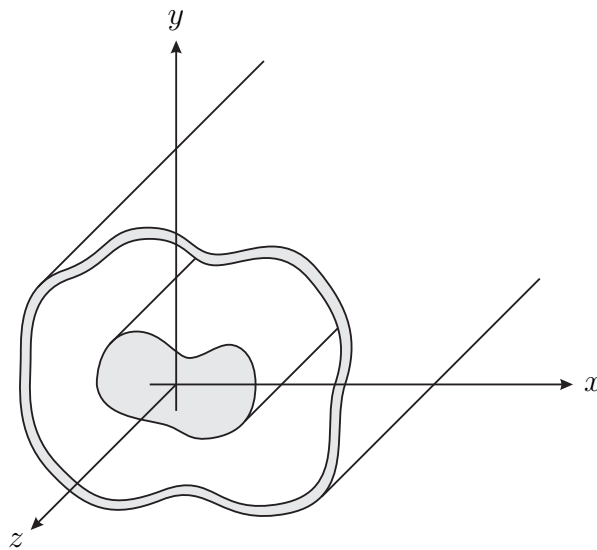


Abbildung 3.4.: Koaxiales Zweileitersystem

3.2.2. Transversalelektromagnetische Wellen auf Zweileitersystemen

3.2.2.1. Feldstärken

Es wird der Ansatz

$$\vec{E} = \underbrace{-U_0 \text{grad}(\phi)}_{\vec{E}_0} e^{\mp j\beta z} \quad (3.13)$$

für die elektrische Feldstärke einer sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitenden transversalelektromagnetischen Welle verwendet. ϕ ist das auf die Spannung zwischen den Leitern normierte elektrostatische Potential. Da die Tangen-

tialkomponenten des elektrostatischen Feldes an den Leiteroberflächen Null sind, erfüllt der Ansatz die (1.65) entsprechenden Randbedingungen.

Das elektrostatische Feld ist wirbelfrei, siehe (3.14). Im ladungsfreien Dielektrikum $\rho_e = 0$ ist das elektrostatische Feld zudem gemäß (1.33) und (1.46) auch quellenfrei, das heißt es ist Lösung der Laplace-Gleichung

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\phi)) = \Delta\phi = 0.$$

Einsetzen der elektrischen Feldstärke \vec{E}_0 bei $z = 0$ in die zweidimensionale Helmholtz-Gleichung (2.11) ergibt mit (2.2)

$$\begin{aligned} \vec{0} &= -\underline{U}_0 \Delta_{xy}(\operatorname{grad}(\phi)) - \underline{U}_0 \beta_c^2 \operatorname{grad}(\phi) \\ &= -\underline{U}_0 \Delta(\operatorname{grad}(\phi)) - \underline{U}_0 \beta_c^2 \operatorname{grad}(\phi) \\ &= -\underline{U}_0 \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\phi))) + \underline{U}_0 \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(\phi))) - \underline{U}_0 \beta_c^2 \operatorname{grad}(\phi) \\ &= -\underline{U}_0 \beta_c^2 \operatorname{grad}(\phi). \end{aligned}$$

Der Ansatz ist folglich eine Lösung der zweidimensionalen Helmholtz-Gleichung, falls für die kritische Phasenkonstante $\beta_c = 0$ gilt. Die so gefundene elektrische Feldstärke \vec{E} hat keine Longitudinalkomponente \vec{E}_z . Mit Hilfe der z -Komponente (1.27) des Induktionsgesetzes, (1.50) und (2.1) findet man, dass auch die Longitudinalkomponente

$$\underline{H}_z = -j\underline{U}_0 \frac{1}{\omega\mu} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) e^{\mp j\beta z} = 0$$

der magnetischen Feldstärke \vec{H} verschwindet. Es handelt sich folglich um eine transversalelektromagnetische Welle. Es gelten die allgemeinen Eigenschaften transversalelektromagnetischer Wellen, siehe Abschnitt 2.2.3.

In einem Hohlleiter, das heißt einen Einleitersystem, kann keine derartige transversalelektromagnetische Welle existieren. Das elektrostatische Potential ϕ muss auf der gesamten leitenden Berandung des Einleitersystems konstant sein und somit ist das elektrostatische Potential ϕ auf einem Einleitersystem insgesamt konstant. Die elektrische Feldstärke \vec{E} ist dann Null.

Aufgabe 3.3 Zeigen Sie unter Verwenden kartesischer Koordinaten, dass für alle Skalarfelder ϕ

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(\phi)) = \vec{0} \tag{3.14}$$

gilt!

Aufgabe 3.4 Zeigen Sie, dass für den skalaren Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten

$$\Delta\phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\phi)) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \tag{3.15}$$

gilt!

3.2.2.2. Spannung

Für eine in der Querschnittsebene im Dielektrikum mit verschwindender magnetischer Stromdichte \vec{M} liegende Fläche A folgt mit $\underline{H}_z = 0$ aus dem Induktionsgesetz (1.22) und (1.50)

$$-\oint_{\partial A} \langle \vec{E}, d\vec{r} \rangle = j\omega\mu \iint_A \langle \vec{H}, d\vec{A} \rangle = j\omega\mu \iint_A \underline{H}_z dA = 0.$$

Die elektrische Feldstärke \vec{E} ist bei transversalelektromagnetischen Wellen in der Querschnittsebene wirbelfrei. Man kann daher in einer Querschnittsebene eine Spannung \underline{U} zwischen den beiden Leitern definieren, die vom Integrationsweg unabhängig ist. In einer Querschnittsebene gilt unter Verwenden von (3.13) mit einem beliebigen Integrationsweg zwischen den Leitern

$$\underline{U} = \int_r \langle \vec{E}, d\vec{r} \rangle = e^{\mp j\beta z} \underbrace{\int_r \langle \vec{E}_0, d\vec{r} \rangle}_{\underline{U}_0}, \quad (3.16)$$

siehe Abbildung 3.5. Für eine sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitende transversalelektromagnetische Welle gilt daher

$$\underline{U} = \underline{U}_0 e^{\mp j\beta z}. \quad (3.17)$$

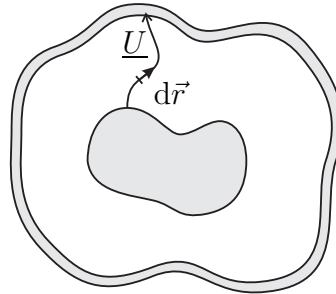


Abbildung 3.5.: Zur Definition der Spannung \underline{U}

3.2.2.3. Strom

Für eine in der Querschnittsebene im Dielektrikum mit verschwindender elektrischer Stromdichte \vec{J} liegende, das heißt keinen Leiter beinhaltende, Fläche A folgt mit $\underline{E}_z = 0$ aus dem Durchflutungsgesetz (1.12) unter Verwenden von (1.46)

$$\oint_{\partial A} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle = j\omega\varepsilon \iint_A \langle \vec{E}, d\vec{A} \rangle = j\omega\varepsilon \iint_A \underline{E}_z dA = 0.$$

Die magnetische Feldstärke \vec{H} ist bei transversalelektromagnetischen Wellen in der Querschnittsebene innerhalb des Dielektrikums wirbelfrei. Man kann daher in einer Querschnittsebene einen Strom \underline{I} durch einen der Leiter definieren, der vom Integrationsweg unabhängig ist. In der Querschnittsebene gilt mit einem beliebigen Integrationsweg um einen der Leiter herum

$$\underline{I} = \oint_s \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle = e^{\mp j\beta z} \underbrace{\oint_s \langle \vec{H}_0, d\vec{s} \rangle}_{I_0}. \quad (3.18)$$

$d\vec{r}$, $d\vec{s}$ und die positive z -Richtung sollen hierbei ein Rechtssystem bilden, siehe Abbildung 3.5 und Abbildung 3.6. Für eine sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitende transversalelektromagnetische Welle gilt

$$\underline{I} = I_0 e^{\mp j\beta z}. \quad (3.19)$$

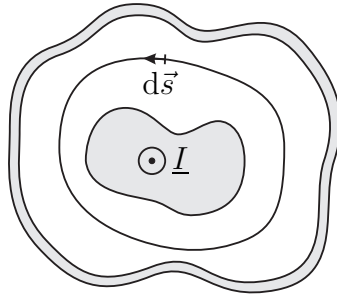


Abbildung 3.6.: Zur Definition des Stroms \underline{I}

3.2.2.4. Wellenwiderstand

Das Verhältnis aus Spannung \underline{U} und Strom \underline{I} ist eine vom Ort z unabhängige, als Wellenwiderstand Z_L bezeichnete und für das Zweileitersystem charakteristische Konstante. Für eine sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitende transversalelektromagnetische Welle gilt

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_0}{I_0} = \pm Z_L, \quad (3.20)$$

siehe (3.17) und (3.19). Wegen der aus der Proportionalität der Feldstärken einer transversalelektromagnetischen Welle, siehe (2.27) und (2.28), folgenden Gleichphasigkeit (Gegenphasigkeit) von Spannung \underline{U} und Strom \underline{I} ist der Wellenwiderstand Z_L reell und positiv.

3.2.2.5. Ersatzschaltbild

Für die Ableitung der Spannung \underline{U} einer sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitenden transversalelektromagnetischen Welle nach z gilt mit (3.17), (3.20) und (2.24)

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial z} = \mp j\beta \underline{U} = -j\beta Z_L \underline{I} = -j\omega \underbrace{\sqrt{\varepsilon\mu} Z_L}_{L'} \underline{I}. \quad (3.21)$$

Der Induktivitätsbelag

$$L' = \sqrt{\varepsilon\mu} Z_L \quad (3.22)$$

hat die Einheit H m^{-1} .

Für die Ableitung des Stroms \underline{I} einer sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitenden transversalelektromagnetischen Welle nach z gilt mit (3.19), (3.20) und (2.24)

$$\frac{\partial \underline{I}}{\partial z} = \mp j\beta \underline{I} = -j\beta \frac{1}{Z_L} \underline{U} = -j\omega \underbrace{\sqrt{\varepsilon\mu} \frac{1}{Z_L}}_{C'} \underline{U}. \quad (3.23)$$

Der Kapazitätsbelag

$$C' = \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{1}{Z_L} \quad (3.24)$$

hat die Einheit F m^{-1} .

Der Wellenwiderstand (3.20) ergibt sich zu

$$Z_L = \frac{L'}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{C'} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}. \quad (3.25)$$

Mit (2.45), (2.46) und (2.48) folgt unter Berücksichtigen von $\beta_c = 0$ für die Phasengeschwindigkeit und die Gruppengeschwindigkeit

$$v_p = v_g = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}. \quad (3.26)$$

Die Gleichungen (3.21) und (3.23) bilden ein als Leitungsgleichungen bezeichnetes Differentialgleichungssystem, mit dem man Spannung \underline{U} und Strom \underline{I} bestimmen kann. Nochmaliges Ableiten von (3.21) nach z und Einsetzen von (3.23) ergibt mit (2.24)

$$\frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial z^2} = -j\omega L' \frac{\partial \underline{I}}{\partial z} = -\omega^2 L' C' \underline{U} = -\beta^2 \underline{U}. \quad (3.27)$$

Dual erhält man

$$\frac{\partial^2 \underline{I}}{\partial z^2} = -\beta^2 \underline{I}. \quad (3.28)$$

Man hätte diese Differentialgleichungen auch direkt aus dem Ersatzschaltbild in Abbildung 3.7 ablesen können. Der hier verfolgte feldtheoretische Ansatz liefert jedoch zusätzlich die Erkenntnis, dass Induktivitätsbelag L' und Kapazitätsbelag C' bei Zweileitersystemen mit homogenem Dielektrikum wegen

$$L' C' = \varepsilon \mu \quad (3.29)$$

abhängige Größen sind.

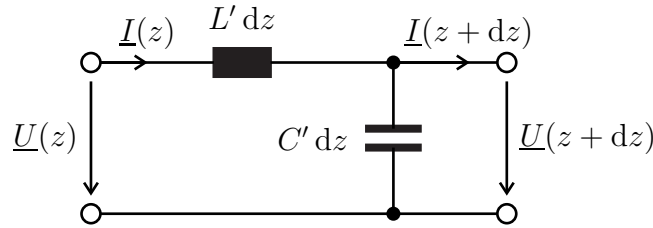


Abbildung 3.7.: Ersatzschaltbild eines kurzen Stücks der Länge dz eines Zweileitersystems

3.2.2.6. Leistung

Die transportierte Leistung P lässt sich gemäß (1.80) mit Hilfe des komplexen Poynting-Vektors \vec{S} durch Integration über eine Querschnittsfläche berechnen. Für das Flächenelement gilt

$$d\vec{A} = d\vec{r} \times d\vec{s},$$

wobei wie in Abbildung 3.8 gezeigt der Integrationsweg $d\vec{r}$ entlang der elektrischen Feldlinien verlaufe und der Integrationsweg $d\vec{s}$ entlang der magnetischen Feldlinien verlaufe. Mit (1.79), (1.80), (3.16) und (3.18) folgt¹

$$\begin{aligned} P &= \iint_A \langle \text{Re} \left(\frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \right), d\vec{r} \times d\vec{s} \rangle \\ &= \text{Re} \left(\iint_A \frac{1}{2} \left(\langle \vec{E}, d\vec{r} \rangle \langle \vec{H}^*, d\vec{s} \rangle - \langle \vec{H}^*, d\vec{r} \rangle \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle \right) \right) \\ &= \text{Re} \left(\frac{1}{2} \int_r \langle \vec{E}, d\vec{r} \rangle \int_s \langle \vec{H}^*, d\vec{s} \rangle \right) \\ &= \text{Re} \left(\frac{1}{2} U I^* \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

¹ Es wird die Lagrange-Identität $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ verwendet.

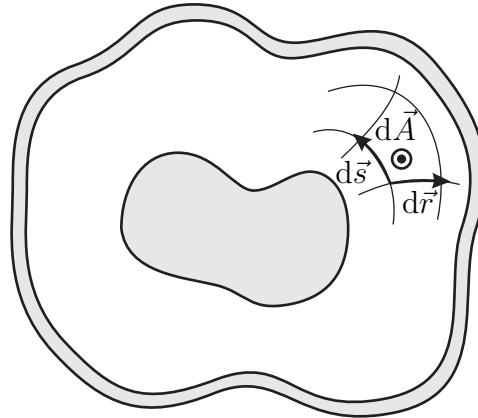


Abbildung 3.8.: Infinitesimales Flächenelement $d\vec{A} = d\vec{r} \times d\vec{s}$ in der Querschnittsebene

3.2.3. Beispiele von Zweileitersystemen

3.2.3.1. Bandleitung

Die Breite a der Leiter der in Abbildung 3.9 gezeigten Bandleitung sei viel größer als der Abstand b , so dass Streufelder vernachlässigbar sind.

Das normierte Potential des elektrostatischen Feldes des Plattenkondensators ist

$$\phi = \frac{y}{b}.$$

Mit (3.13) und (2.1) folgt die elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = -\underline{U}_0 \frac{1}{b} e^{\mp j\beta z} \vec{u}_y \quad (3.31)$$

und mit (2.28) erhält man schließlich die magnetische Feldstärke

$$\vec{H} = \pm \underline{U}_0 \frac{1}{Z_F b} e^{\mp j\beta z} \vec{u}_x \quad (3.32)$$

einer sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitenden transversalelektromagnetischen Welle auf der Bandleitung.

Die Kapazität eines Plattenkondensators der Länge l ist

$$C = \frac{\varepsilon a l}{b}.$$

Damit folgen der Kapazitätsbelag

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{\varepsilon a}{b}, \quad (3.33)$$

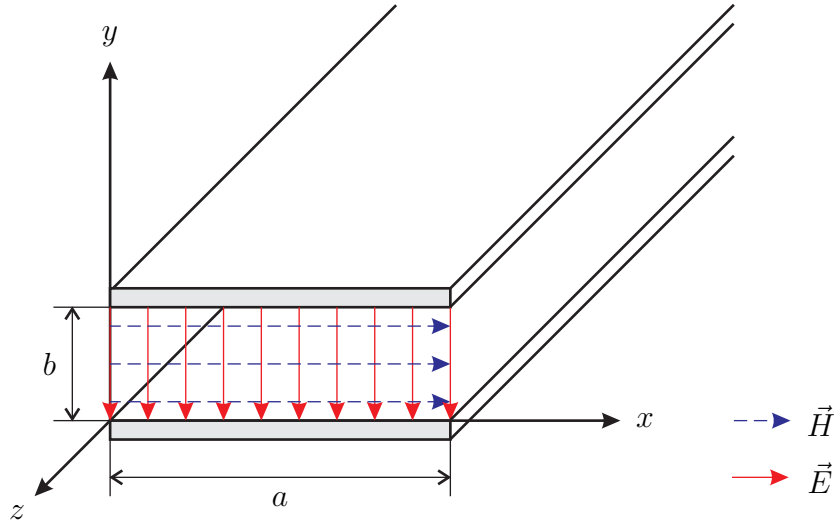


Abbildung 3.9.: Bandleitung mit einer sich in positive z -Richtung ausbreitenden transversalelektromagnetischen Welle

unter Verwenden von (3.29) der Induktivitätsbelag

$$L' = \frac{\mu b}{a} \quad (3.34)$$

und mit (3.25) und (2.25) der Wellenwiderstand

$$Z_L = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{b}{a} = Z_F \frac{b}{a}. \quad (3.35)$$

Für transversalelektrische Wellen wählt man den für ganzzahlige n die Randbedingungen erfüllenden Ansatz

$$\underline{H}_z = \underbrace{\underline{H}_0 \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}_{\underline{H}_{0z}} e^{\mp j\beta z} \quad (3.36)$$

für die Longitudinalkomponente der magnetischen Feldstärke \vec{H} , siehe (2.20) und (1.65). Die zu den ganzzahligen Parametern $n > 0$ gehörenden transversalelektrischen Wellen bezeichnet man als TE_n -Wellen, siehe Abbildung 3.10. Einsetzen der Longitudinalkomponente \underline{H}_{0z} der magnetischen Feldstärke \vec{H}_0 bei $z = 0$ in die z -Komponente der zweidimensionalen Helmholtz-Gleichung (2.10) ergibt mit (2.9)

$$0 = -\underline{H}_0 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \beta_c^2 \underline{H}_0 \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Die kritische Phasenkonstante ergibt sich zu

$$\beta_c = \frac{n\pi}{b}. \quad (3.37)$$

Die Transversalkomponenten der Feldstärken einer sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitenden transversalelektrischen Welle berechnet man mit (2.20), (2.21), (2.22) und (2.23) aus den Longitudinalkomponenten \underline{H}_z und $\underline{E}_z = 0$ der Feldstärken:

$$\underline{E}_x = j \frac{\omega \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z}, \quad (3.38)$$

$$\underline{E}_y = 0, \quad (3.39)$$

$$\underline{H}_x = 0, \quad (3.40)$$

$$\underline{H}_y = \pm j \frac{\beta \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z}. \quad (3.41)$$

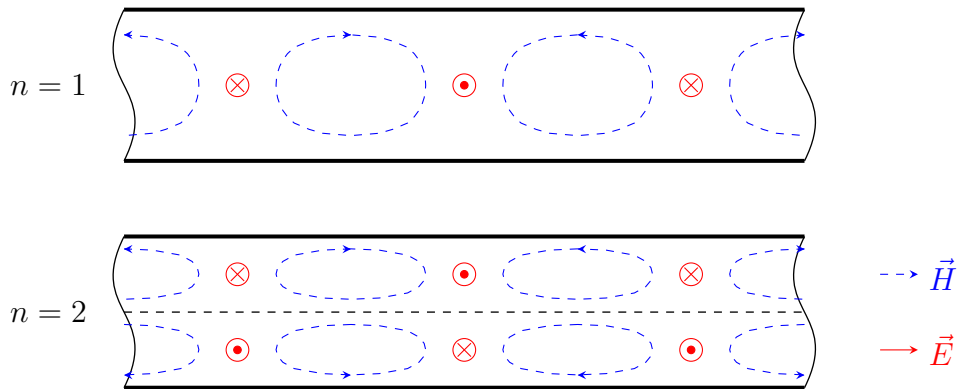


Abbildung 3.10.: Transversalelektrische Wellen auf einer Bandleitung. Dargestellt ist ein Längsschnitt durch die Bandleitung in der y - z -Ebene

Für transversalmagnetische Wellen wählt man den für ganzzahlige n die (1.65) entsprechenden Randbedingungen erfüllenden Ansatz

$$\underline{E}_z = \underbrace{\underline{E}_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}_{\underline{E}_{0z}} e^{\mp j\beta z} \quad (3.42)$$

für die Longitudinalkomponente der elektrischen Feldstärke \underline{E} . Die zu den ganzzahligen Parametern $n > 0$ gehörenden transversalmagnetischen Wellen bezeichnet man als TM_n -Wellen, siehe Abbildung 3.11. Einsetzen der Longitudinalkomponente \underline{E}_{0z} der elektrischen Feldstärke \underline{E}_0 bei $z = 0$ in die z -Komponente der

zweidimensionalen Helmholtz-Gleichung (2.11) ergibt mit (2.9)

$$0 = -\underline{E}_0 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \beta_c^2 \underline{E}_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Die kritische Phasenkonstante ergibt sich wie bei transversalelektrischen Wellen, siehe (3.37), zu

$$\beta_c = \frac{n\pi}{b}. \tag{3.43}$$

Die Transversalkomponenten der Feldstärken einer sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitenden transversalmagnetischen Welle berechnet man mit (2.20), (2.21), (2.22) und (2.23) aus den Longitudinalkomponenten \underline{E}_z und $\underline{H}_z = 0$ der Feldstärken:

$$\underline{E}_x = 0, \tag{3.44}$$

$$\underline{E}_y = \mp j \frac{\beta \underline{E}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta_c z}, \tag{3.45}$$

$$\underline{H}_x = j \frac{\omega \varepsilon \underline{E}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta_c z}, \tag{3.46}$$

$$\underline{H}_y = 0. \tag{3.47}$$

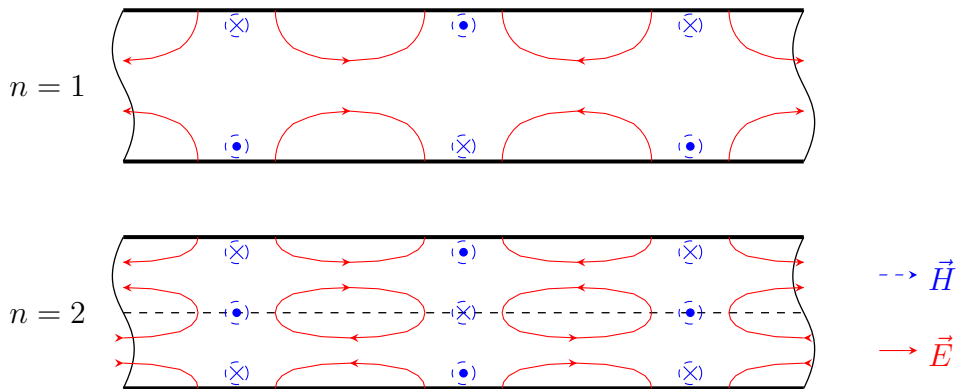


Abbildung 3.11.: Transversalmagnetische Wellen auf einer Bandleitung. Dargestellt ist ein Längsschnitt durch die Bandleitung in der y - z -Ebene

Aufgabe 3.5 Es wird die Überlagerung zweier sich in unterschiedliche Richtungen ausbreitender ebener homogener Wellen gleicher Amplitude betrachtet, siehe

Abbildung 3.12. Zeigen Sie, dass sich die transversalelektrischen Wellen auf einer Bandleitung als Überlagerung zweier derartiger horizontal polarisierter Wellen darstellen lassen! Zeigen Sie, dass sich die transversalmagnetischen Wellen auf einer Bandleitung als Überlagerung zweier derartiger vertikal polarisierter Wellen darstellen lassen!

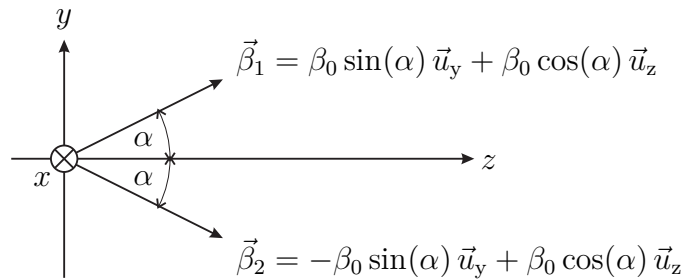


Abbildung 3.12.: Ausbreitungsrichtungen der beiden zu überlagernden Wellen

3.2.3.2. Koaxialleitung

Bei der in Abbildung 3.13 gezeigten Koaxialleitung handelt es sich um einen kreiszylindrischen aus Innenleiter, Dielektrikum und Außenleiter bestehenden Wellenleiter.

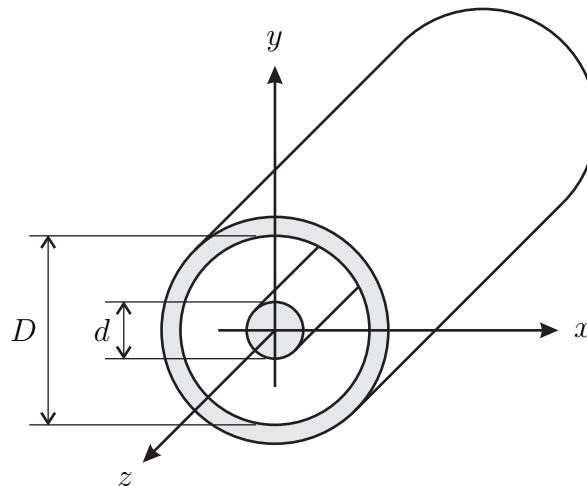


Abbildung 3.13.: Koaxialleitung

Die Kapazität eines Zylinderkondensators der Länge l ist

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}.$$

Damit folgen der Kapazitätsbelag

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}, \quad (3.48)$$

unter Verwenden von (3.29) der Induktivitätsbelag

$$L' = \frac{\mu \ln\left(\frac{D}{d}\right)}{2\pi} \quad (3.49)$$

und mit (3.25) und (2.25) der Wellenwiderstand

$$Z_L = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{D}{d}\right) = \frac{1}{2\pi} Z_F \ln\left(\frac{D}{d}\right). \quad (3.50)$$

In der Hochfrequenztechnik verwendet man üblicherweise Koaxialleitungen mit einem einheitlichen Wellenwiderstand von $Z_L = 50 \Omega$.

3.2.3.3. Planare Wellenleiter

Die in Abbildung 3.14 gezeigten planaren Wellenleiter können aufwandsgünstig gefertigt werden. Die technischen Herausforderungen bestehen neben den häufig ungünstigen Eigenschaften der verwendeten Dielektrika insbesondere darin, dass viele dieser Wellenleiter inhomogene Dielektrika haben. Von den in Abbildung 3.14 gezeigten Beispielen planarer Wellenleiter hat nur die Streifenleitung ein homogenes Dielektrikum. Die Streifenleitung ist allerdings nur in Mehrlagentechnik zu fertigen. Bei den übrigen einfacher zu fertigenden planaren Wellenleitern besteht das felderfüllte Dielektrikum aus dem Substrat und aus Luft. Die sich auf einem derartigen planaren Wellenleiter mit inhomogenem Dielektrikum ausbreitenden elektromagnetischen Wellen sind keine transversalelektromagnetischen Wellen. Häufig handelt es sich jedoch in hinreichend guter Näherung um transversalelektromagnetischen Wellen. Man spricht dann von quasi-transversalelektromagnetischen Wellen.

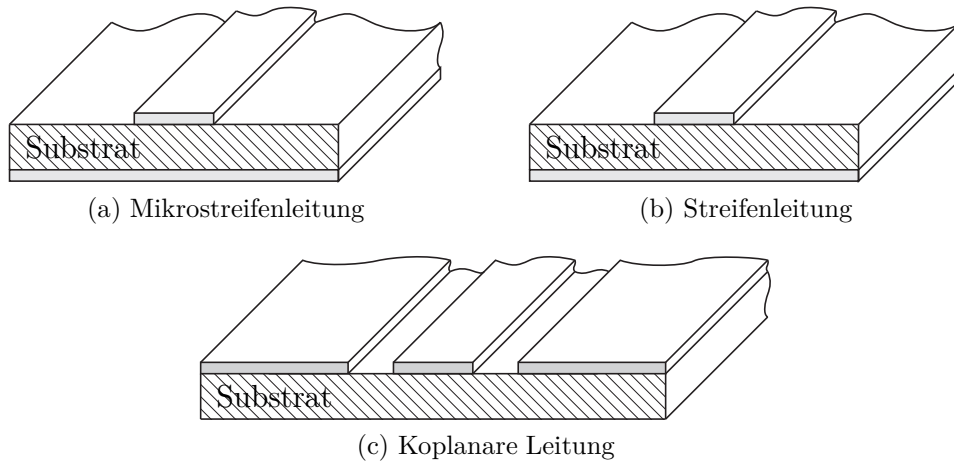


Abbildung 3.14.: Planare Wellenleiter

3.3. Transversalelektromagnetische Wellen auf Mehrleitersystemen

3.3.1. Allgemeine Mehrleitersysteme

Es werden Mehrleitersysteme mit konstantem Querschnitt und homogenem Dielektrikum betrachtet, siehe Abbildung 3.15. Einer der Leiter wird als Bezugsleiter ausgewählt und im Folgenden als Masse bezeichnet. Es verbleiben $N \geq 1$ weitere Leiter, wobei der Spezialfall $N = 1$ den in Abschnitt 3.2 besprochenen Zweileitersystemen entspricht. Das Koordinatensystem wird wieder so gewählt, dass die der Ausbreitungsrichtung entsprechende Längsachse des Mehrleitersystems der z -Achse entspricht.

Im Folgenden werden nur transversalelektromagnetische Wellen näher untersucht. Eine die Helmholtz-Gleichung (2.5) und die Randbedingungen erfüllende elektrische Feldstärke \vec{E} einer sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitenden transversalelektromagnetischen Welle findet man wieder ausgehend von einem normierten elektrostatischen Potential ϕ . Der Nachweis erfolgt genau so wie in Abschnitt 3.2.2.1. Der wesentliche Unterschied zu Zweileitersystemen besteht darin, dass das normierte elektrostatische Potential ϕ und damit die Struktur des elektrostatischen Feldes auf Mehrleitersystemen nicht eindeutig ist. Abhängig von der Ladungsverteilung auf den Leitern ergeben sich elektrostatische Felder unterschiedlicher Struktur. Es bestehen N Freiheitsgrade und man kann folglich jedes elektrostatische Potential $-\underline{U}_0\phi$ auf dem Mehrleitersystem als Linearkombination von N linear unabhängigen, aber ansonsten beliebigen, normierten elektrostati-

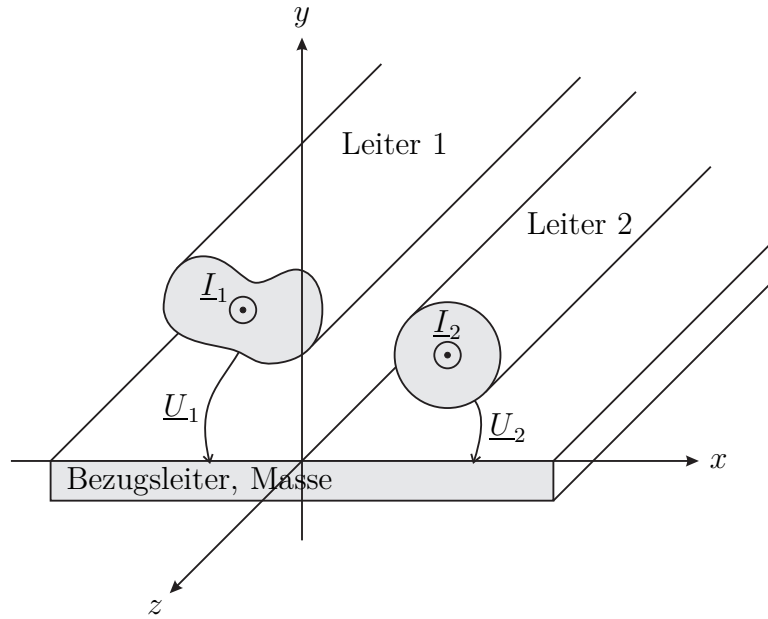


Abbildung 3.15.: Dreileitersystem

schen Potentialen $\phi^{(n)}$, $n = 1 \dots N$, darstellen. Für die elektrische Feldstärke einer sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitenden transversalelektromagnetischen Welle folgt in Verallgemeinerung von (3.13)

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^N \underbrace{-U_0^{(n)} \text{grad}(\phi^{(n)})}_{\vec{E}^{(n)}} e^{\mp j\beta z}. \quad (3.51)$$

Auf dem Mehrleitersystem sind also N verschiedene transversalelektromagnetische Moden gleichzeitig ausbreitungsfähig. Phasenkonstante β , Phasengeschwindigkeit v_p und Gruppengeschwindigkeit v_g aller transversalelektromagnetischen Moden auf Mehrleitersystemen mit homogenem Dielektrikum sind gleich.

Analog zur Vorgehensweise bei Zweileitersystemen in den Abschnitten 3.2.2.2 und 3.2.2.3 kann man bei Mehrleitersystemen die Spannung

$$\underline{U}_n = \underline{U}_{0n} e^{\mp j\beta z} \quad (3.52)$$

zwischen Leiter n und Masse und den Strom

$$\underline{I}_n = \underline{I}_{0n} e^{\mp j\beta z} \quad (3.53)$$

durch Leiter n definieren. Man definiert den Spannungsvektor

$$\underline{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \underline{U}_N \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

und den Stromvektor

$$\underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \vdots \\ \underline{I}_N \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Mit einer geeignet gewählten reellen Wellenwiderstandsmatrix

$$\mathbf{Z}_L = \begin{pmatrix} Z_{L1,1} & \cdots & Z_{L1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{LN,1} & \cdots & Z_{LN,N} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

gilt aufgrund der Linearität für eine sich in positive (negative) z -Richtung ausbreitende transversalelektromagnetische Welle

$$\underline{\mathbf{U}} = \pm \mathbf{Z}_L \cdot \underline{\mathbf{I}}, \quad (3.57)$$

vergleiche Abschnitt 3.2.2.4. Aufgrund der Reziprozität des Mehrleitersystems ist die Wellenwiderstandsmatrix \mathbf{Z}_L symmetrisch.² Ableiten der Spannungen $\underline{\mathbf{U}}$ nach z ergibt mit (2.24)

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{U}}}{\partial z} = \mp j\beta \underline{\mathbf{U}} = -j\beta \mathbf{Z}_L \cdot \underline{\mathbf{I}} = -j\omega \underbrace{\sqrt{\varepsilon\mu} \mathbf{Z}_L}_{\mathbf{L}'} \cdot \underline{\mathbf{I}}. \quad (3.58)$$

Die Induktivitätsbelagsmatrix

$$\mathbf{L}' = \begin{pmatrix} L'_{1,1} & \cdots & L'_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ L'_{N,1} & \cdots & L'_{N,N} \end{pmatrix} = \sqrt{\varepsilon\mu} \mathbf{Z}_L \quad (3.59)$$

ist wie die Wellenwiderstandsmatrix \mathbf{Z}_L reell und symmetrisch.

Die inverse Wellenwiderstandsmatrix \mathbf{Z}_L^{-1} ist reell und symmetrisch, da die Inverse einer reellen symmetrischen Matrix wieder eine reelle symmetrische Matrix ist. Es gilt

$$\underline{\mathbf{I}} = \pm \mathbf{Z}_L^{-1} \cdot \underline{\mathbf{U}}. \quad (3.60)$$

² Das Mehrleitersystem kann man als Mehrtor auffassen und die Impedanzmatrix $\underline{\mathbf{Z}}$ eines reziproken Mehrtors ist wie auch dessen Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ symmetrisch, siehe Aufgabe 9.2.

Ableiten der Ströme $\underline{\mathbf{I}}$ nach z ergibt mit (2.24)

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{I}}}{\partial z} = \mp j\beta \underline{\mathbf{U}} = -j\beta \mathbf{Z}_L^{-1} \cdot \underline{\mathbf{U}} = -j\omega \underbrace{\sqrt{\varepsilon\mu} \mathbf{Z}_L^{-1}}_{\mathbf{C}'} \cdot \underline{\mathbf{U}}. \quad (3.61)$$

Die Influenzbelagskoeffizientenmatrix

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} c'_{1,1} & \cdots & c'_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ c'_{N,1} & \cdots & c'_{N,N} \end{pmatrix} = \sqrt{\varepsilon\mu} \mathbf{Z}_L^{-1} \quad (3.62)$$

ist wie die Wellenwiderstandsmatrix \mathbf{Z}_L reell und symmetrisch. Sie enthält die Influenzbelagskoeffizienten $c'_{n,m} = c'_{m,n}$.

Für ein kurzes Stück eines Dreileitersystems erhält man das in Abbildung 3.16 gezeigte Ersatzschaltbild mit den folgenden Kapazitätsbelägen:

$$C'_{1,0} = c'_{1,1} + c'_{1,2}, \quad (3.63)$$

$$C'_{2,0} = c'_{2,2} + c'_{1,2}, \quad (3.64)$$

$$C'_{1,2} = -c'_{1,2}. \quad (3.65)$$

Mit der Einheitsmatrix \mathbf{E} gilt weiterhin

$$\mathbf{L}' \cdot \mathbf{C}' = \varepsilon\mu \mathbf{E}, \quad (3.66)$$

was eine Verallgemeinerung der Zusammenhänge (3.29) beim Zweileitersystem darstellt. Induktivitätsbelagsmatrix \mathbf{L}' und Influenzbelagskoeffizientenmatrix \mathbf{C}' sind bei Mehrleitersystemen mit homogenem Dielektrikum abhängige Größen. Speziell für Dreileitersysteme gilt

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} c'_{1,1} & c'_{1,2} \\ c'_{1,2} & c'_{2,2} \end{pmatrix} = \varepsilon\mu \mathbf{L}'^{-1} = \frac{\varepsilon\mu}{L'_{1,1}L'_{2,2} - L'^2_{1,2}} \begin{pmatrix} L'_{2,2} & -L'_{1,2} \\ -L'_{1,2} & L'_{1,1} \end{pmatrix}. \quad (3.67)$$

Nochmaliges Ableiten von (3.58) nach z und Einsetzen von (3.61) ergibt mit (2.24)

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{U}}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mathbf{L}' \cdot \mathbf{C}' \cdot \underline{\mathbf{U}} = -\omega^2 \varepsilon\mu \underline{\mathbf{U}} = -\beta^2 \underline{\mathbf{U}}. \quad (3.68)$$

Dual erhält man

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{I}}}{\partial z^2} = -\beta^2 \underline{\mathbf{I}}. \quad (3.69)$$

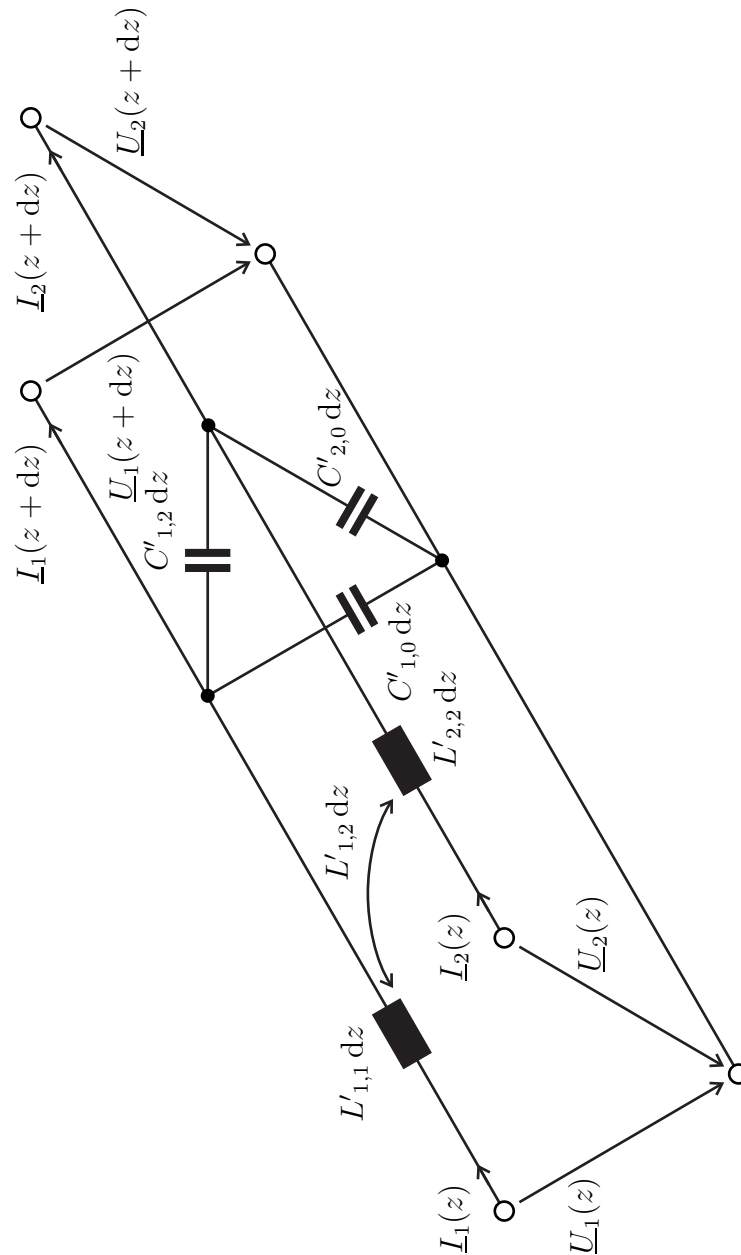


Abbildung 3.16.: Ersatzschaltbild eines kurzen Stücks der Länge dz eines Dreileitersystems

3.3.2. Symmetrische Dreileitersysteme

Symmetrisch zur Masse aufgebaute Dreileitersysteme zum Verbinden elektronischer Komponenten sind von besonderer technischer Bedeutung. Einerseits kann man die Einkopplung von Störsignalen durch Verwenden differentieller Signale reduzieren. Andererseits ist es häufig vorteilhaft, elektronische Schaltungen symmetrisch zur Masse aufzubauen. Man erhält dann zwangsläufig massesymmetrische differentielle Eingänge und Ausgänge. Abbildung 3.17 zeigt zwei Beispiele symmetrisch aufgebauter Dreileitersysteme.

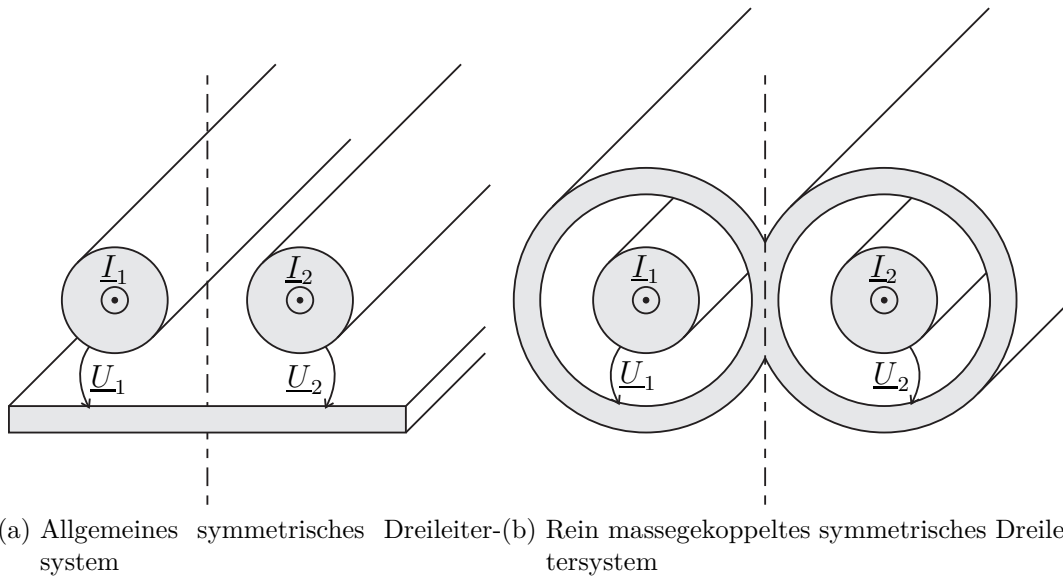


Abbildung 3.17.: Symmetrische Dreileitersysteme

Der symmetrische Aufbau bewirkt insbesondere, dass die Induktivitätsbeläge

$$L' = L'_{1,1} = L'_{2,2}$$

und die Influenzbelagskoeffizienten

$$c' = c'_{1,1} = c'_{2,2}$$

für beide Leiter gleich sind. Mit (3.59) folgt

$$Z_{L1,1} = Z_{L2,2}.$$

Der Grad der Kopplung wird durch den Kopplungsfaktor

$$k = \frac{Z_{L1,2}}{Z_{L1,1}} = \frac{L'_{1,2}}{L'} = -\frac{c'_{1,2}}{c'} \quad (3.70)$$

beschrieben. Für die Umformungen wurden (3.59) und (3.67) verwendet. Insbesondere sind die induktiven und die kapazitiven Kopplungen gleich.

Ein eleganter Ansatz besteht darin, Eigenvektoren der Wellenwiderstandsmatrix \mathbf{Z} als Moden zu verwenden [GL13]. Speziell bei symmetrischen Dreileitersystemen sind die Eigenvektoren alleine durch die Struktur der Matrizen gegeben. Es gelten

$$\pm \underbrace{\begin{pmatrix} Z_{L1,1} & Z_{L1,2} \\ Z_{L1,2} & Z_{L1,1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{Z}_L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{I}^{(-)} \\ -\underline{I}^{(-)} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{I}}^{(-)}} = \pm (Z_{L1,1} - Z_{L1,2}) \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{I}^{(-)} \\ -\underline{I}^{(-)} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{I}}^{(-)}} = \pm \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{U}^{(-)} \\ -\underline{U}^{(-)} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{U}}^{(-)}}$$

und

$$\pm \underbrace{\begin{pmatrix} Z_{L1,1} & Z_{L1,2} \\ Z_{L1,2} & Z_{L1,1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{Z}_L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{I}^{(+)} \\ \underline{I}^{(+)} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{I}}^{(+)}} = \pm (Z_{L1,1} + Z_{L1,2}) \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{I}^{(+)} \\ \underline{I}^{(+)} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{I}}^{(+)}} = \pm \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{U}^{(+)} \\ \underline{U}^{(+)} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{U}}^{(+)}}$$

Das heißt die Gegentaktwelle und die Gleichentaktwelle sind solche Eigenvektoren entsprechenden Moden. Die Stromvektoren $\underline{\mathbf{I}}^{(-)}$ und $\underline{\mathbf{I}}^{(+)}$ sind die Eigenvektoren der Wellenwiderstandsmatrix \mathbf{Z}_L . Der Wellenwiderstand

$$\begin{aligned} Z_L^{(-)} &= \pm \frac{\underline{U}^{(-)}}{\underline{I}^{(-)}} = Z_{L1,1} - Z_{L1,2} \\ &= \frac{L' - L'_{1,2}}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c' - c'_{1,2}} \\ &= \sqrt{\frac{L' - L'_{1,2}}{c' - c'_{1,2}}} = \sqrt{\frac{L'(1-k)}{c'(1+k)}} \end{aligned}$$

der Gegentaktwelle und der Wellenwiderstand

$$\begin{aligned} Z_L^{(+)} &= \pm \frac{\underline{U}^{(+)}}{\underline{I}^{(+)}} = Z_{L1,1} + Z_{L1,2} \\ &= \frac{L' + L'_{1,2}}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c' + c'_{1,2}} \\ &= \sqrt{\frac{L' + L'_{1,2}}{c' + c'_{1,2}}} = \sqrt{\frac{L'(1+k)}{c'(1-k)}} \end{aligned}$$

der Gleichentaktwelle sind die zugehörigen Eigenwerte. Für die Umformungen wurden (3.59), (3.67) und (3.70) verwendet. Weiterhin sind die Spannungsvektoren $\underline{\mathbf{U}}^{(-)}$ und $\underline{\mathbf{U}}^{(+)}$ die Eigenvektoren der inversen Wellenwiderstandsmatrix \mathbf{Z}_L^{-1} .

Man definiert den Wellenwiderstand

$$Z_L = \sqrt{Z_L^{(-)} Z_L^{(+)}} = \sqrt[4]{\frac{L'(1-k)}{c'(1+k)} \cdot \frac{L'(1+k)}{c'(1-k)}} = \sqrt{\frac{L'}{c'}}. \quad (3.71)$$

Damit folgt für den Wellenwiderstand der Gegentaktwelle

$$Z_L^{(-)} = Z_L \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \quad (3.72)$$

und für den Wellenwiderstand der Gleichtaktwelle

$$Z_L^{(+)} = Z_L \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}. \quad (3.73)$$

Jede sich auf einem symmetrischen Dreileitersystem ausbreitende transversalelektromagnetische Welle kann man in eine Gegentaktwelle und eine Gleichtaktwelle zerlegen, siehe Abbildung 3.18.

Die Spannungen

$$\underline{U}_1 = \underline{U}^{(-)} + \underline{U}^{(+)} \quad (3.74)$$

und

$$\underline{U}_2 = -\underline{U}^{(-)} + \underline{U}^{(+)} \quad (3.75)$$

der Leiter ergeben sich durch Überlagern der Gegentaktspannung $\underline{U}^{(-)}$ und der Gleichtaktspannung $\underline{U}^{(+)}$. Es folgen

$$\underline{U}^{(-)} = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{2} \quad (3.76)$$

und

$$\underline{U}^{(+)} = \frac{\underline{U}_1 + \underline{U}_2}{2}. \quad (3.77)$$

Die Ströme

$$\underline{I}_1 = \underline{I}^{(-)} + \underline{I}^{(+)} \quad (3.78)$$

und

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}^{(-)} + \underline{I}^{(+)} \quad (3.79)$$

der Leiter ergeben sich durch Überlagern des Gegentaktstroms $\underline{I}^{(-)}$ und des Gleichtaktstroms $\underline{I}^{(+)}$. Es folgen

$$\underline{I}^{(-)} = \frac{\underline{I}_1 - \underline{I}_2}{2} \quad (3.80)$$

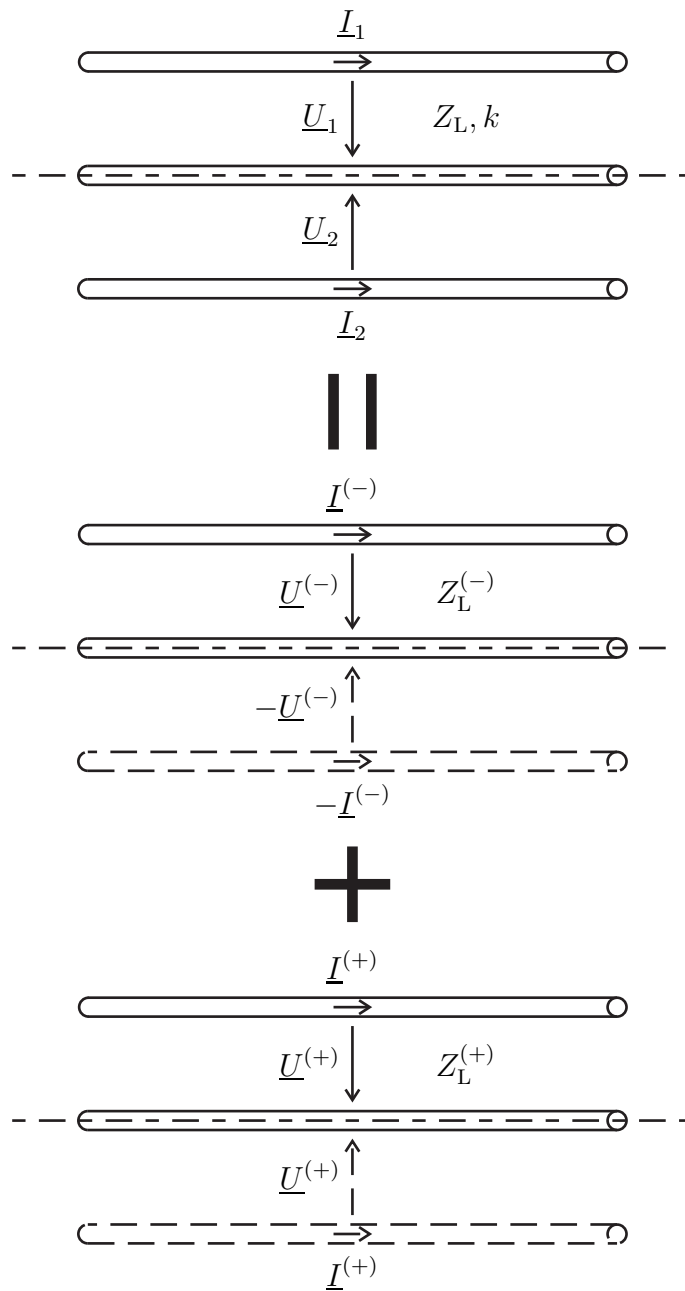


Abbildung 3.18.: Zerlegung eines symmetrischen Dreileitersystems in ein Gegentaktsystem und ein Gleichtaktsystem. Die gestrichelt gezeichneten Hälften brauchen aus Symmetriegründen nicht weiter betrachtet zu werden

und

$$\underline{I}^{(+)} = \frac{\underline{I}_1 + \underline{I}_2}{2}. \quad (3.81)$$

Für die transportierte Leistung erhält man aufgrund der Orthogonalität von Gegentaktmode und Gleichtaktmode

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{U}_1 \underline{I}_1^*) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{U}_2 \underline{I}_2^*) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\left(\underline{U}^{(-)} + \underline{U}^{(+)}\right) \left(\underline{I}^{(-)} + \underline{I}^{(+)}\right)^*\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\left(-\underline{U}^{(-)} + \underline{U}^{(+)}\right) \left(-\underline{I}^{(-)} + \underline{I}^{(+)}\right)^*\right) \\ &= \underbrace{\operatorname{Re}\left(\underline{U}^{(-)} \underline{I}^{(-)*}\right)}_{\text{Gegentaktwelle}} + \underbrace{\operatorname{Re}\left(\underline{U}^{(+)} \underline{I}^{(+)*}\right)}_{\text{Gleichtaktwelle}}, \end{aligned} \quad (3.82)$$

vergleiche (3.30). Man beachte den Wegfall des Faktors 1/2 beim Berechnen der transportierten Leistung aus den Gegentaktgrößen und den Gleichtaktgrößen der daraus resultiert, dass Spannungen und Ströme der Gegentaktwelle und der Gleichtaktwelle jeweils nur die Spannung beziehungsweise den Strom eines einzigen Leiters berücksichtigen.

Eine Sonderstellung nehmen die rein massegekoppelten symmetrischen Dreileitersysteme mit

$$L'_{1,2} = 0$$

und

$$c'_{1,2} = 0$$

ein, siehe Abbildung 3.17b. Mit (3.70) folgt für den Kopplungsfaktor

$$k = 0 \quad (3.83)$$

und folglich sind der Wellenwiderstand (3.72) der Gegentaktwelle und der Wellenwiderstand (3.73) Gleichtaktwelle gleich:

$$Z_L^{(-)} = Z_L^{(+)} = Z_L. \quad (3.84)$$

Aufgabe 3.6 *Es wird ein aus drei gleichartigen Leitern in gleicher relativer Anordnung bestehendes Dreileitersystem betrachtet, siehe Abbildung 3.19. Wie groß ist der Kopplungsfaktor k ?*

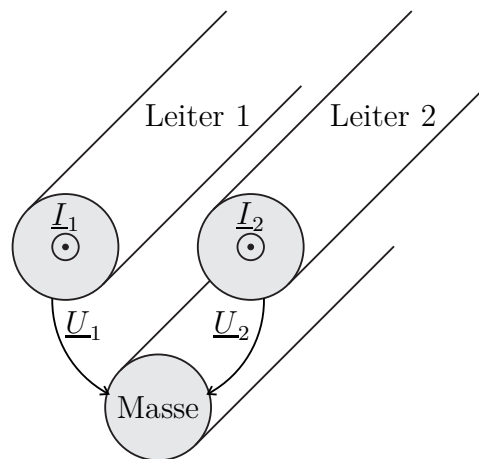


Abbildung 3.19.: Aus drei gleichartigen Leitern in gleicher relativer Anordnung bestehendes Dreileitersystem

Kapitel 4.

Antennentheorie

4.1. Vektorpotential

Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, das von der elektrischen Stromdichte \vec{J} einer Antenne in ein homogenes Dielektrikum abgestrahlte elektromagnetische Feld zu berechnen. Die magnetische Stromdichte \vec{M} sei hier Null.

Man definiert das magnetische Vektorpotential \vec{A} als Lösung der inhomogenen Helmholtz-Gleichung

$$\Delta \vec{A} + \beta^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}, \quad (4.1)$$

wobei

$$\beta = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \quad (4.2)$$

die Phasenkonstante ist. Die elektrische Stromdichte \vec{J} ist die Quelle des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} . Bei Verwenden kartesischer Koordinaten zerfällt die vektorielle inhomogene Helmholtz-Gleichung (4.1) des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} in drei skalare inhomogene Helmholtz-Gleichungen

$$\Delta A_x + \beta^2 A_x = -\mu J_x, \quad (4.3)$$

$$\Delta A_y + \beta^2 A_y = -\mu J_y, \quad (4.4)$$

$$\Delta A_z + \beta^2 A_z = -\mu J_z, \quad (4.5)$$

siehe (2.6) und (3.15), das heißt die Komponenten der elektrischen Stromdichte \vec{J} sind die Quellen der entsprechenden Komponenten des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} . Im Folgenden wird gezeigt, dass man mittels

$$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A}) \quad (4.6)$$

aus dem magnetischen Vektorpotential \vec{A} ein die Maxwell'schen Gleichungen erfüllendes elektromagnetisches Feld erhält.

Wegen (1.44) ist die aus dem magnetischen Vektorpotential \vec{A} mit (4.6) berechnete magnetische Flussdichte \vec{B} wie im Fall verschwindender magnetischer Ladungsdichte ρ_m von (1.39) gefordert stets quellenfrei.

Mit dem Durchflutungsgesetz (1.17), (1.50) und (4.6) erhält man die elektrische Flussdichte

$$\vec{D} = \frac{1}{j\omega\mu} \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{A})) - \frac{1}{j\omega} \vec{J}.$$

Mit (1.44) und (1.41) erhält man wie von (1.34) gefordert

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \frac{1}{j\omega\mu} \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{A}))) - \frac{1}{j\omega} \operatorname{div}(\vec{J}) = \rho_e.$$

Schließlich setzt man die aus der elektrischen Flussdichte \vec{D} unter Verwenden von (1.46), (2.2), (4.1) und (4.2) berechnete elektrische Feldstärke

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{j\omega\varepsilon\mu} \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{A})) - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \vec{J} \\ &= \frac{1}{j\omega\varepsilon\mu} \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{A})) - \frac{1}{j\omega\varepsilon\mu} \Delta\vec{A} - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \vec{J} \\ &= \frac{1}{j\omega\varepsilon\mu} \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{A})) - j\omega\vec{A} \end{aligned} \quad (4.7)$$

noch in das Induktionsgesetz (1.24) ein. Unter Verwenden von (3.14) und (4.6) erhält man wie bei verschwindender magnetischer Stromdichte \vec{M} vom Induktionsgesetz (1.24) gefordert

$$-\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{j\omega\varepsilon\mu} \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{A}))) + j\omega \operatorname{rot}(\vec{A}) = j\omega\vec{B}.$$

Im allgemeinen Fall, dass sowohl eine nichtverschwindende elektrische Stromdichte \vec{J} als auch eine nichtverschwindende magnetische Stromdichte \vec{M} vorhanden ist, kann man das elektromagnetische Feld aufgrund der Linearität der Maxwell'schen Gleichungen als Überlagerung des nur von der elektrischen Stromdichte \vec{J} abgestrahlten elektromagnetischen Feldes und des nur von der magnetischen Stromdichte \vec{M} abgestrahlten elektromagnetischen Feldes berechnen. Das Berechnen des von der magnetischen Stromdichte \vec{M} abgestrahlten elektromagnetischen Feldes erfolgt unter Ausnutzen der Dualitätsbeziehungen aus Tabelle 1.1 mit Hilfe eines elektrischen Vektorpotentials.

4.2. Kugelkoordinaten

4.2.1. Koordinatentransformation

Bei der Analyse von Antennenproblemen interessiert häufig nur das als Fernfeld bezeichnete elektromagnetische Feld in großer Entfernung von der Sendeantenne.

Von hier aus betrachtet erscheint die Antenne wie eine weit entfernte Punktquelle. Das Berechnen des Fernfeldes vereinfacht sich daher signifikant, wenn man Kugelkoordinaten Radius r , Poldistanzwinkel ϑ und Azimutwinkel φ als ein an das Problem angepasstes Koordinatensystem verwendet, siehe Abbildung 4.1. Die kartesischen Koordinaten x , y und z ergeben sich als Funktionen von Radius r , Poldistanzwinkel ϑ und Azimutwinkel φ wie folgt:

$$x = r \sin(\vartheta) \cos(\varphi), \quad (4.8)$$

$$y = r \sin(\vartheta) \sin(\varphi), \quad (4.9)$$

$$z = r \cos(\vartheta). \quad (4.10)$$

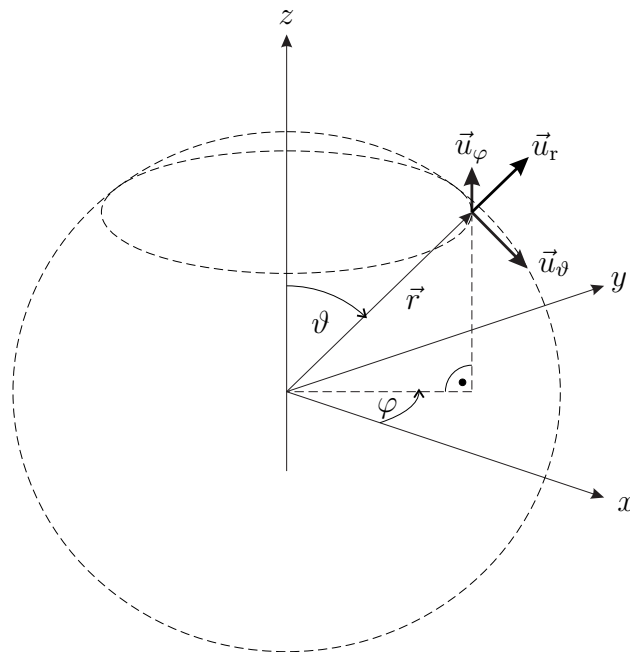


Abbildung 4.1.: Kugelkoordinaten

Die Koordinatenlinien sind die Orte, an denen alle Koordinaten bis auf eine einzige ausgewählte Koordinate konstante Werte annehmen. Da die Koordinatenlinien im Gegensatz zu kartesischen Koordinaten hier im Allgemeinen keine Geraden sind, spricht man von krummlinigen Koordinaten. Man erhält die Tan-

gentialvektoren der Koordinatenlinien:

$$\vec{t}_r = \frac{\partial x}{\partial r} \vec{u}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{u}_y + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{u}_z = \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \vec{u}_x + \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \vec{u}_y + \cos(\vartheta) \vec{u}_z,$$

$$\vec{t}_\vartheta = \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \vec{u}_x + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \vec{u}_y + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \vec{u}_z = r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \vec{u}_x + r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \vec{u}_y - r \sin(\vartheta) \vec{u}_z,$$

$$\vec{t}_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \vec{u}_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \vec{u}_y + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \vec{u}_z = -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \vec{u}_x + r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \vec{u}_y.$$

Man definiert die metrischen Größen:

$$g_r = \|\vec{t}_r\| = 1, \quad (4.11)$$

$$g_\vartheta = \|\vec{t}_\vartheta\| = r, \quad (4.12)$$

$$g_\varphi = \|\vec{t}_\varphi\| = r \sin(\vartheta). \quad (4.13)$$

Durch Normieren der Tangentialvektoren erhält man die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenlinien:

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{t}_r}{g_r} = \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \vec{u}_x + \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \vec{u}_y + \cos(\vartheta) \vec{u}_z, \quad (4.14)$$

$$\vec{u}_\vartheta = \frac{\vec{t}_\vartheta}{g_\vartheta} = \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \vec{u}_x + \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \vec{u}_y - \sin(\vartheta) \vec{u}_z, \quad (4.15)$$

$$\vec{u}_\varphi = \frac{\vec{t}_\varphi}{g_\varphi} = -\sin(\vartheta) \sin(\varphi) \vec{u}_x + \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \vec{u}_y. \quad (4.16)$$

4.2.2. Integrationselemente

Im Folgenden werden zunächst die allgemeinen Beziehungen hergeleitet und dann in einem letzten Schritt die metrischen Größen g_r , g_ϑ und g_φ für Kugelkoordinaten gemäß (4.11), (4.12) und (4.13) eingesetzt. Für ein Linienelement erhält man

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= \vec{t}_r dr + \vec{t}_\vartheta d\vartheta + \vec{t}_\varphi d\varphi \\ &= \vec{u}_r g_r dr + \vec{u}_\vartheta g_\vartheta d\vartheta + \vec{u}_\varphi g_\varphi d\varphi \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$= \underbrace{\vec{u}_r dr}_{ds_r} + \underbrace{\vec{u}_\vartheta r d\vartheta}_{ds_\vartheta} + \underbrace{\vec{u}_\varphi r \sin(\vartheta) d\varphi}_{ds_\varphi}. \quad (4.18)$$

Kugelkoordinaten sind orthogonale Koordinaten, das heißt die Einheitsvektoren sind orthonormal:

$$\langle \vec{u}_p, \vec{u}_q \rangle = \begin{cases} 1 & p = q \\ 0 & p \neq q \end{cases}.$$

Da die Kugelkoordinaten orthogonal sind, gilt

$$\begin{aligned} \|\underline{d\vec{s}}\|^2 &= \langle \underline{d\vec{s}}, \underline{d\vec{s}} \rangle \\ &= \langle \vec{u}_r g_r dr + \vec{u}_\vartheta g_\vartheta d\vartheta + \vec{u}_\varphi g_\varphi d\varphi, \vec{u}_r g_r dr + \vec{u}_\vartheta g_\vartheta d\vartheta + \vec{u}_\varphi g_\varphi d\varphi \rangle \\ &= g_r^2 dr^2 + g_\vartheta^2 d\vartheta^2 + g_\varphi^2 d\varphi^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$= dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) d\varphi^2. \quad (4.20)$$

Da die Einheitsvektoren \vec{u}_ϑ , \vec{u}_φ und $\vec{u}_r = \vec{u}_\vartheta \times \vec{u}_\varphi$ orthogonal sind und ein Rechtssystem bilden, gilt für das Flächenelement

$$\begin{aligned} d\vec{A}_r &= (\vec{t}_\vartheta d\vartheta) \times (\vec{t}_\varphi d\varphi) = (\vec{u}_\vartheta g_\vartheta d\vartheta) \times (\vec{u}_\varphi g_\varphi d\varphi) \\ &= g_\vartheta g_\varphi d\vartheta d\varphi \vec{u}_r \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$= r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi \vec{u}_r. \quad (4.22)$$

Analog erhält man die übrigen Flächenelemente

$$d\vec{A}_\vartheta = g_r g_\varphi dr d\varphi \vec{u}_\vartheta = r \sin(\vartheta) dr d\varphi \vec{u}_\vartheta \quad (4.23)$$

und

$$d\vec{A}_\varphi = g_r g_\vartheta dr d\vartheta \vec{u}_\varphi = r dr d\vartheta \vec{u}_\varphi. \quad (4.24)$$

Mit dem Spatprodukt erhält man schließlich das Volumenelement

$$\begin{aligned} dV &= \langle \vec{t}_r dr, (\vec{t}_\vartheta d\vartheta) \times (\vec{t}_\varphi d\varphi) \rangle = \langle \vec{u}_r g_r dr, (\vec{u}_\vartheta g_\vartheta d\vartheta) \times (\vec{u}_\varphi g_\varphi d\varphi) \rangle \\ &= g_r g_\vartheta g_\varphi dr d\vartheta d\varphi \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$= r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi. \quad (4.26)$$

4.2.3. Vektoranalysis für krummlinige orthogonale Koordinaten

4.2.3.1. Gradient

Die Komponenten des Gradienten ergeben sich aus der Änderung des Skalarfeldes $\underline{\phi}$ in die entsprechenden Richtungen. Für die r -Komponente gilt beispielsweise

$$\left[\text{grad}(\underline{\phi}) \right]_r = \lim_{dr \rightarrow 0} \frac{\underline{\phi}\left(r + \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi\right) - \underline{\phi}\left(r - \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi\right)}{\underbrace{g_r dr}_{ds_r}} = \frac{1}{g_r} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial r}.$$

Zusammengefasst erhält man

$$\text{grad}(\underline{\phi}) = \frac{1}{g_r} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{g_\vartheta} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \vartheta} \vec{u}_\vartheta + \frac{1}{g_\varphi} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \quad (4.27)$$

$$= \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \vartheta} \vec{u}_\vartheta + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi, \quad (4.28)$$

wobei in der letzten Zeile die metrischen Größen g_r , g_ϑ und g_φ für Kugelkoordinaten gemäß (4.11), (4.12) und (4.13) eingesetzt wurden.

4.2.3.2. Divergenz

Eine Rechnung analog zu Abschnitt 1.1.4.2 ergibt für ein infinitesimales Volumenelement dV

$$\begin{aligned}
 \oiint_{\partial dV} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle = & \underline{D}_r \left(r + \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot g_\vartheta \left(r + \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot g_\varphi \left(r + \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
 & - \underline{D}_r \left(r - \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot g_\vartheta \left(r - \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot g_\varphi \left(r - \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
 & + \underline{D}_\vartheta \left(r, \vartheta + \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot g_r \left(r, \vartheta + \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot g_\varphi \left(r, \vartheta + \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot dr \cdot d\varphi \\
 & - \underline{D}_\vartheta \left(r, \vartheta - \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot g_r \left(r, \vartheta - \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot g_\varphi \left(r, \vartheta - \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot dr \cdot d\varphi \\
 & + \underline{D}_\varphi \left(r, \vartheta, \varphi + \frac{d\varphi}{2} \right) \cdot g_r \left(r, \vartheta, \varphi + \frac{d\varphi}{2} \right) \cdot g_\vartheta \left(r, \vartheta, \varphi + \frac{d\varphi}{2} \right) \cdot dr \cdot d\vartheta \\
 & - \underline{D}_\varphi \left(r, \vartheta, \varphi - \frac{d\varphi}{2} \right) \cdot g_r \left(r, \vartheta, \varphi - \frac{d\varphi}{2} \right) \cdot g_\vartheta \left(r, \vartheta, \varphi - \frac{d\varphi}{2} \right) \cdot dr \cdot d\vartheta.
 \end{aligned}$$

Dies in die Definition der Divergenz (1.30) eingesetzt ergibt mit dem Volumenelement dV gemäß (4.25)

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\vec{D}) = & \lim_{dr d\vartheta d\varphi \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\partial dV} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle}{\underbrace{g_r g_\vartheta g_\varphi dr d\vartheta d\varphi}_{dV}} \\
 = & \frac{1}{g_r g_\vartheta g_\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} (\underline{D}_r g_\vartheta g_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\underline{D}_\vartheta g_r g_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\underline{D}_\varphi g_r g_\vartheta) \right) \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \underline{D}_r) + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin(\vartheta) \underline{D}_\vartheta) + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial \underline{D}_\varphi}{\partial \varphi}, \quad (4.30)$$

wobei in der letzten Zeile die metrischen Größen g_r , g_ϑ und g_φ für Kugelkoordinaten gemäß (4.11), (4.12) und (4.13) eingesetzt wurden.

4.2.3.3. Rotation

Eine Rechnung analog zu Abschnitt 1.1.2.2 ergibt für ein infinitesimales Flächenelement dA_φ

$$\begin{aligned} \oint_{\partial dA_\varphi} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle &= \underline{H}_r \left(r, \vartheta - \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot g_r \left(r, \vartheta - \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot dr \\ &\quad + \underline{H}_\vartheta \left(r + \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot g_\vartheta \left(r + \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot d\vartheta \\ &\quad - \underline{H}_r \left(r, \vartheta + \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot g_r \left(r, \vartheta + \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot dr \\ &\quad - \underline{H}_\vartheta \left(r - \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot g_\vartheta \left(r - \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot d\vartheta. \end{aligned}$$

Dies in die Definition der Rotation (1.13) eingesetzt ergibt mit dem Flächenelement dA_φ gemäß (4.24) für die φ -Komponente der Rotation

$$\left[\text{rot}(\vec{H}) \right]_\varphi = \lim_{dr d\vartheta \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial dA_\varphi} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle}{\underbrace{g_r g_\vartheta dr d\vartheta}_{dA_\varphi}} = \frac{1}{g_r g_\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial r} (\underline{H}_\vartheta g_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\underline{H}_r g_r) \right).$$

Die übrigen Komponenten erhält man auf analoge Art und Weise, so dass man zusammengefasst das Endergebnis

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{H}) &= \frac{1}{g_\vartheta g_\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\underline{H}_\varphi g_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\underline{H}_\vartheta g_\vartheta) \right) \vec{u}_r \\ &\quad + \frac{1}{g_r g_\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (\underline{H}_r g_r) - \frac{\partial}{\partial r} (\underline{H}_\varphi g_\varphi) \right) \vec{u}_\vartheta \\ &\quad + \frac{1}{g_r g_\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial r} (\underline{H}_\vartheta g_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\underline{H}_r g_r) \right) \vec{u}_\varphi \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin(\vartheta) \underline{H}_\varphi) - \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial \underline{H}_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r \\ &\quad + \left(\frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{H}_\varphi) \right) \vec{u}_\vartheta \\ &\quad + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{H}_\vartheta) - \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \vartheta} \right) \vec{u}_\varphi \end{aligned} \quad (4.32)$$

erhält, wobei in der letzten Gleichung die metrischen Größen g_r , g_ϑ und g_φ für Kugelkoordinaten gemäß (4.11), (4.12) und (4.13) eingesetzt wurden.

4.2.3.4. Laplace-Operator

Anwenden des skalaren Laplace-Operators (3.15) auf ein Skalarfeld $\underline{\phi}$ ergibt

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\phi} &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\underline{\phi})) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{g_r} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{g_\vartheta} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \vartheta} \vec{u}_\vartheta + \frac{1}{g_\varphi} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi\right) \\ &= \frac{1}{g_r g_\vartheta g_\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{g_\vartheta g_\varphi}{g_r} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{g_r g_\varphi}{g_\vartheta} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{g_r g_\vartheta}{g_\varphi} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \varphi} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 \underline{\phi}}{\partial \varphi^2}. \quad (4.34)$$

In der letzten Zeile wurden die metrischen Größen g_r , g_ϑ und g_φ für Kugelkoordinaten gemäß (4.11), (4.12) und (4.13) eingesetzt.

Aufgabe 4.1 Ein weiteres häufig verwendetes Koordinatensystem sind die Zylinderkoordinaten Radius r , Azimutwinkel φ und Höhe z , siehe Abbildung 4.2. Die kartesischen Koordinaten x , y und z ergeben sich als Funktionen von Radius r , Azimutwinkel φ und Höhe z wie folgt:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi), \\ y &= r \sin(\varphi), \\ z &= z. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Tangentialvektoren, die metrischen Größen, die Integrationselemente und die Differentialoperatoren für Zylinderkoordinaten!

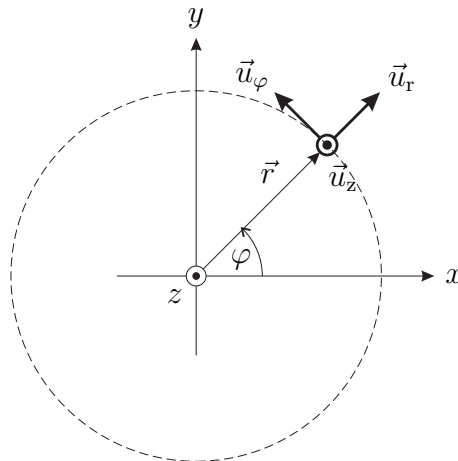


Abbildung 4.2.: Zylinderkoordinaten

4.3. Berechnen des magnetischen Vektorpotentials

Die folgenden Betrachtungen gelten nur für homogene Dielektrika. Zunächst betrachten wir einen in z -Richtung orientierten idealen elektrischen Dipol (Hertzschen Dipol) im Ursprung, siehe Abbildung 4.3. Der ideale elektrische Dipol besteht aus zwei im Gegentakt oszillierenden elektrischen Ladungen \underline{Q} und $-\underline{Q}$ in einem infinitesimalen Abstand l . Zwischen diesen Ladungen fließt ein elektrischer Linienstrom

$$\underline{I}_0 = j\omega\underline{Q}l,$$

siehe Abschnitt 1.1.6. Trotz des infinitesimalen Abstands l soll das elektrische Dipolmoment

$$\underline{Q}l = \frac{\underline{I}_0 l}{j\omega} \quad (4.35)$$

einen endlichen Wert annehmen.

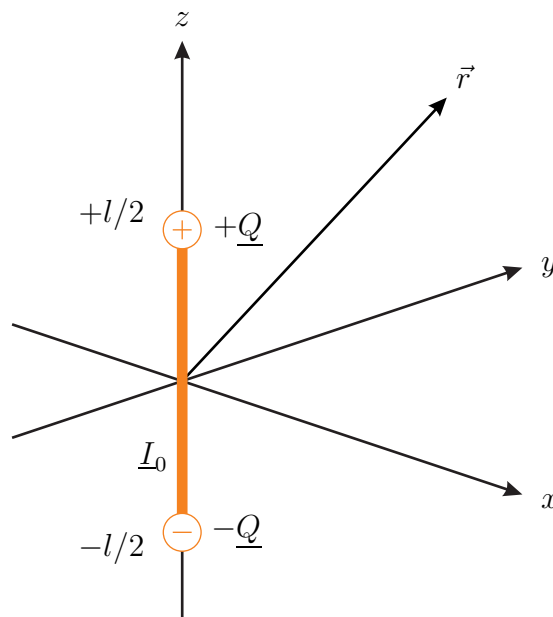


Abbildung 4.3.: Idealer elektrischer Dipol

Die elektrische Stromdichte $\vec{J}(\vec{r})$ mit der z -Komponente

$$\underline{J}_z(\vec{r}) = \underline{I}_0 l \delta(\vec{r})$$

erzeugt die z -Komponente \underline{A}_z des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} . Außerhalb des Ursprungs, das heißt für $r > 0$ ist die z -Komponente $\underline{J}_z(\vec{r})$ der elektrischen

Stromdichte $\vec{J}(\vec{r})$ Null und aus der inhomogenen Helmholtz-Gleichung (4.5) folgt die homogene Helmholtz-Gleichung

$$\Delta \underline{A}_z + \beta^2 \underline{A}_z = 0.$$

Die hier gesuchte Lösung der homogenen Helmholtz-Gleichung muss kugelsymmetrisch sein, das heißt die z -Komponente \underline{A}_z des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} darf nur vom Radius r und nicht von Poldistanzwinkel ϑ und Azimutwinkel φ abhängen. Mit dem skalaren Laplace-Operator (4.34) in Kugelkoordinaten folgt die homogene Helmholtz-Gleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial r} \right) + \beta^2 \underline{A}_z = 0$$

für ein kugelsymmetrisches Szenario. Man findet die hier interessierende retardierte Lösung

$$\underline{A}_z \sim \frac{1}{r} e^{-j\beta r}$$

sowie die wegen Verletzens des Kausalitätsprinzips physikalisch unsinnige avancierte Lösung

$$\underline{A}_z \sim \frac{1}{r} e^{+j\beta r}.$$

Zum Bestimmen des Proportionalitätsfaktors betrachten wir die z -Komponente \underline{A}_z des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} in unmittelbarer Nähe des idealen elektrischen Dipols, das heißt für sehr kleine $r \ll 1/\beta$. Dann ist die Phasenkonstante β vernachlässigbar klein und die z -Komponente

$$\underline{A}_z \sim \frac{1}{r}$$

des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} muss der Poisson-Gleichung

$$\Delta \underline{A}_z = \text{div}(\text{grad}(\underline{A}_z)) = -\mu \underline{I}_0 l \delta(\vec{r})$$

genügen, siehe (4.5) und (3.15). Für eine kleine Kugel um den Ursprung folgt mit dem Satz von Gauss (1.32) und dem Gradienten in Kugelkoordinaten (4.28)

$$\begin{aligned} \mu \underline{I}_0 l &= \iiint_{\text{Kugel}} \mu \underline{I}_0 l \delta(\vec{r}) \, dV = - \iiint_{\text{Kugel}} \text{div}(\text{grad}(\underline{A}_z)) \, dV \\ &\sim - \iiint_{\text{Kugel}} \text{div} \left(\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \, dV = - \oiint_{\text{Kugeloberfläche}} \left\langle \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right), d\vec{A}_r \right\rangle \\ &= \oiint_{\text{Kugeloberfläche}} \frac{1}{r^2} \, dA_r = 4\pi. \end{aligned}$$

4.3. Berechnen des magnetischen Vektorpotentials

Der Proportionalitätsfaktor muss also $\frac{\mu I_0 l}{4\pi}$ sein und man erhält die z -Komponente

$$\underline{A}_z(\vec{r}) = \mu I_0 l \underbrace{\frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r}}_{\underline{\psi}(\vec{r})} \quad (4.36)$$

des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} eines idealen elektrischen Dipols im Ursprung. Die im Folgenden immer wieder verwendete, einer Kugelwelle entsprechende Elementarlösung

$$\underline{\psi}(\vec{r}) = \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} = \frac{e^{-j\beta \|\vec{r}\|}}{4\pi \|\vec{r}\|} \quad (4.37)$$

ist als Greensche Funktion des freien Raumes bekannt.

Aufgrund der Verschiebungsinvarianz der Helmholtz-Gleichung (4.5) ergibt sich die von einem an den Ort \vec{r}' verschobenen idealen elektrischen Dipol

$$\underline{J}_z(\vec{r}) = I_0 l \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

erzeugte z -Komponente des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} zu

$$\underline{A}_z(\vec{r}) = \mu I_0 l \underline{\psi}(\vec{r} - \vec{r}').$$

Mit Hilfe der Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses $\delta(\cdot)$ kann man eine beliebige elektrische Stromdichte $\underline{J}_z(\vec{r})$ in z -Richtung als gewichtete Überlagerung von verschobenen idealen elektrischen Dipolen darstellen:

$$\underline{J}_z(\vec{r}) = \iiint_{V'} \underline{J}_z(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV'.$$

Aufgrund der Linearität und Verschiebungsinvarianz der Helmholtz-Gleichung (4.5) ergibt sich die z -Komponente des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} zu

$$\underline{A}_z(\vec{r}) = \iiint_{V'} \mu \underline{J}_z(\vec{r}') \underline{\psi}(\vec{r} - \vec{r}') dV'. \quad (4.38)$$

Formal handelt es sich bei diesem Integral um ein Faltungsintegral [FB08]. Die z -Komponente $\underline{A}_z(\vec{r})$ des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} erhält man durch Falten der mit μ skalierten z -Komponente $\underline{J}_z(\vec{r}')$ der elektrischen Stromdichte $\vec{J}(\vec{r}')$ mit der Greenschen Funktion $\underline{\psi}(\vec{r} - \vec{r}')$.

Gleichartige Betrachtungen gelten auch für die übrigen Komponenten des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} . Bei Verwenden kartesischer Koordinaten erhält man zusammengefasst das magnetische Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \iiint_{V'} \mu \vec{J}(\vec{r}') \underline{\psi}(\vec{r} - \vec{r}') dV'. \quad (4.39)$$

Mit den hier eingeführten Hilfsmitteln ist es beispielsweise möglich, bei gegebener Strombelegung $\underline{\vec{J}}(\vec{r}')$ in einer Antenne das abgestrahlte elektromagnetische Feld zu berechnen. Hierzu wird man zunächst das magnetische Vektorpotential $\underline{\vec{A}}(\vec{r})$ und daraus die Feldstärken berechnen.

4.4. Fernfeldnäherung

Beim Einsatz in Funkkommunikationssystemen interessiert man sich primär für das Fernfeld der Sendeantenne, das heißt für das elektromagnetische Feld in einer relativ zu den Antennenabmessungen und zu $1/\beta$ großen Entfernung von der Sendeantenne.

Allgemein gilt nach dem Kosinussatz

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\xi)},$$

siehe Abbildung 4.4. Im Fernfeld ist r' relativ klein, das heißt es gilt $r' \ll r$, und man kann die lineare Taylor-Approximation

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| \approx r - r' \cos(\xi)$$

verwenden. Eingesetzt in die Greensche Funktion (4.37) erhält man mit dem in die betrachtete Ausbreitungsrichtung zeigenden Phasenvektor $\vec{\beta}$ gemäß (2.13) die Fernfeldnäherung der Greenschen Funktion

$$\underline{\psi}(\vec{r} - \vec{r}') \approx \frac{e^{-j\beta(r-r' \cos(\xi))}}{4\pi r} = \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} e^{j\beta r' \cos(\xi)} = \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} e^{j\langle \vec{\beta}, \vec{r}' \rangle}. \quad (4.40)$$

Durch Einsetzen der Fernfeldnäherung der Greenschen Funktion in (4.39) erhält man die Fernfeldnäherung des magnetischen Vektorpotentials in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \underline{\vec{A}}(\vec{r}) &\approx \underbrace{\frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi r}}_{\text{Abstandsfaktor}} \underbrace{\iiint_{V'} \underline{\vec{J}}(\vec{r}') e^{j\beta r' \cos(\xi)} dV'}_{\text{vektorieller Richtungsfaktor } \vec{F}} \\ &= \underbrace{\frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi r}}_{\text{Abstandsfaktor}} \underbrace{\iiint_{V'} \underline{\vec{J}}(\vec{r}') e^{j\langle \vec{\beta}, \vec{r}' \rangle} dV'}_{\text{vektorieller Richtungsfaktor } \vec{F}}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

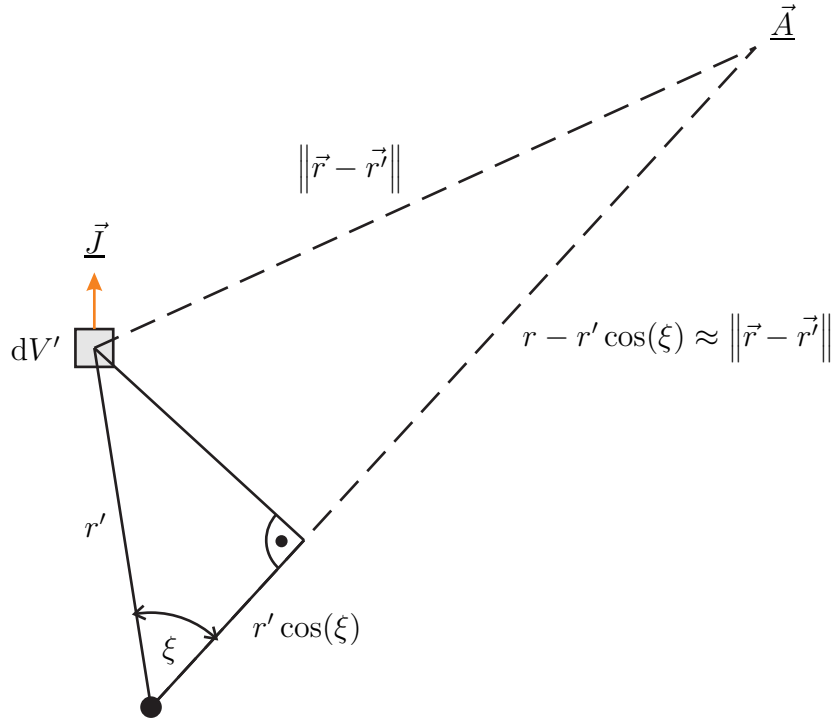


Abbildung 4.4.: Zur Fernfeldnäherung

Der Faktor $e^{j\langle\vec{\beta},\vec{r}'\rangle}$ resultiert aus den bei der Überlagerung der magnetischen Vektorpotentiale $\vec{A}(\vec{r})$ der elektrischen Stromdichten $\vec{J}(\vec{r}')$ in den Volumenelementen dV' zu berücksichtigenden geometriebedingten Phasenverschiebungen. Die Richtungsabhängigkeit des magnetischen Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r})$ wird im Fernfeld durch den vektoriellen Richtungsfaktor

$$\vec{F} = \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{j\beta r' \cos(\xi)} dV' = \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{j\langle\vec{\beta},\vec{r}'\rangle} dV' \quad (4.42)$$

beschrieben. Die Entfernungsabhängigkeit des magnetischen Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r})$ ist im Fernfeld durch den Abstandsfaktor $\frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi r}$ gegeben, das heißt der Betrag des magnetischen Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r})$ nimmt im Fernfeld mit $1/r$ ab. Die Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (4.43)$$

Bei vielen Antennen gelingt es zumindest näherungsweise, einen Nullpunkt des Koordinatensystems so zu definieren, dass die Argumente der Komponenten des vektoriellen Richtungsfaktors $\vec{F}(\vartheta, \varphi)$ für den interessierenden Winkelbereich

ϑ und φ konstant sind. Die im Fernfeld beobachtete elektromagnetische Welle scheint dann eine von diesem als Phasenzentrum bezeichneten Nullpunkt ausgehende Kugelwelle zu sein.

Durch Berechnen der Rotation (4.32) des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} in Kugelkoordinaten erhält man gemäß (4.6) unter Verwenden (1.50) die magnetische Feldstärke

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{\mu} \operatorname{rot}(\vec{A}) = \frac{1}{\mu r} \left(\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin(\vartheta) \underline{A}_\varphi) - \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial \underline{A}_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r \\ &+ \frac{1}{\mu r} \left(\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{A}_\varphi) \right) \vec{u}_\vartheta + \frac{1}{\mu r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \underline{A}_\vartheta) - \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \vartheta} \right) \vec{u}_\varphi. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Im Fernfeld dominieren die nur mit $1/r$ abnehmenden Terme und man kann alle stärker abnehmenden Terme vernachlässigen. Man erhält die Fernfeldnäherung

$$\begin{aligned} \vec{H} &\approx -\frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{A}_\varphi) \vec{u}_\vartheta + \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{A}_\vartheta) \vec{u}_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-j\beta r}}{4\pi} \right) (-\underline{F}_\varphi \vec{u}_\vartheta + \underline{F}_\vartheta \vec{u}_\varphi) \\ &= \frac{j\beta e^{-j\beta r}}{4\pi r} (\underline{F}_\varphi \vec{u}_\vartheta - \underline{F}_\vartheta \vec{u}_\varphi) \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$= j \frac{\beta}{\mu} \underline{A}_\varphi \vec{u}_\vartheta - j \frac{\beta}{\mu} \underline{A}_\vartheta \vec{u}_\varphi = j \frac{\beta}{\mu} \vec{A} \times \vec{u}_r \quad (4.46)$$

für die magnetische Feldstärke. \underline{F}_ϑ und \underline{F}_φ sind die ϑ -Komponente beziehungsweise die φ -Komponente des vektoriellen Richtungsfaktors \vec{F} .

Mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes (1.17) und (1.46) kann man nun aus der magnetischen Feldstärke \vec{H} die elektrische Feldstärke \vec{E} berechnen. Mit der Rotation in Kugelkoordinaten (4.32) ergibt sich unter Verwenden von (4.2) die Fernfeldnäherung der elektrischen Feldstärke, wenn man wieder alle stärker als mit $1/r$ abnehmende Terme vernachlässigt, zu

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{1}{j\omega\epsilon r} \left(\left(\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin(\vartheta) \underline{H}_\varphi) - \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial \underline{H}_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r \right. \\ &+ \left. \left(\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{H}_\varphi) \right) \vec{u}_\vartheta + \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \underline{H}_\vartheta) - \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \vartheta} \right) \vec{u}_\varphi \right) \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{j\omega\epsilon r} \left(-\frac{\partial}{\partial r} (r \underline{H}_\varphi) \vec{u}_\vartheta + \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{H}_\vartheta) \vec{u}_\varphi \right) \approx \frac{\beta}{\omega\epsilon r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-j\beta r}}{4\pi} \right) (\underline{F}_\vartheta \vec{u}_\vartheta + \underline{F}_\varphi \vec{u}_\varphi) \\ &= -j \frac{\beta^2 e^{-j\beta r}}{\omega\epsilon 4\pi r} (\underline{F}_\vartheta \vec{u}_\vartheta + \underline{F}_\varphi \vec{u}_\varphi) \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$= -j\omega (\underline{A}_\vartheta \vec{u}_\vartheta + \underline{A}_\varphi \vec{u}_\varphi) = j\omega (\vec{A} \times \vec{u}_r) \times \vec{u}_r. \quad (4.49)$$

Mit dem Feldwellenwiderstand

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (4.50)$$

und (4.2) folgt aus (4.46) und (4.49) für das Fernfeld

$$\underline{\vec{E}} = Z_F \underline{\vec{H}} \times \vec{u}_r. \quad (4.51)$$

Die von einer Antenne abgestrahlte elektromagnetische Welle ist im Fernfeld eine transversalelektromagnetische Welle. Magnetischer Feldstärkevektor \vec{H} und elektrischer Feldstärkevektor \vec{E} sind in Phase und stehen zu jedem Zeitpunkt senkrecht aufeinander. Die Feldstärken nehmen mit $1/r$ ab und es gibt eine Richtungsabhängigkeit der Feldstärken. Der in (1.79) eingeführte komplexe Poynting-Vektor

$$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2} (Z_F \underline{\vec{H}} \times \vec{u}_r) \times \underline{\vec{H}}^* = \frac{1}{2} Z_F \|\underline{\vec{H}}\|^2 \vec{u}_r = \frac{1}{2Z_F} \|\underline{\vec{E}}\|^2 \vec{u}_r \quad (4.52)$$

zeigt im Fernfeld von der Antenne radial nach außen weg und nimmt mit $1/r^2$ ab, was auch aus der Energieerhaltung folgt. Da der komplexe Poynting-Vektor $\underline{\vec{S}}$ im Fernfeld rein reell ist, transportiert die abgestrahlte elektromagnetische Welle im Fernfeld nur Wirkleistung, deren Betrag durch die Strahlungsleistungsdichte

$$S = \|\text{Re}(\underline{\vec{S}})\| = \frac{1}{2} Z_F \|\underline{\vec{H}}\|^2 = \frac{1}{2Z_F} \|\underline{\vec{E}}\|^2 \quad (4.53)$$

gegeben ist. Ausgehend von (1.80) kann man die abgestrahlte Leistung P durch Integration der Strahlungsleistungsdichte S über eine Kugeloberfläche mit dem Flächenelement dA_r gemäß (4.22) berechnen:

$$P = \iint_{\text{Kugeloberfläche}} S dA_r = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} S r^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta. \quad (4.54)$$

Als Beispiel wird der ideale elektrische Dipol betrachtet. Das magnetische Vektorpotential $\underline{\vec{A}}$ des idealen elektrischen Dipols wurde bereits in (4.36) berechnet. Umgerechnet in Kugelkoordinaten erhält man

$$\underline{\vec{A}} = \langle \underline{\vec{A}}, \vec{u}_r \rangle \vec{u}_r + \langle \underline{\vec{A}}, \vec{u}_\vartheta \rangle \vec{u}_\vartheta + \langle \underline{\vec{A}}, \vec{u}_\varphi \rangle \vec{u}_\varphi = \frac{\mu I_0 l e^{-j\beta r}}{4\pi r} (\cos(\vartheta) \vec{u}_r - \sin(\vartheta) \vec{u}_\vartheta),$$

siehe (4.14), (4.15) und (4.16). Hieraus ergibt sich mit (4.44) die magnetische Feldstärke

$$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{\mu r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \underline{\vec{A}}_\vartheta) - \frac{\partial \underline{\vec{A}}_r}{\partial \vartheta} \right) \vec{u}_\varphi = j\beta I_0 l \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left(1 + \frac{1}{j\beta r} \right) \sin(\vartheta) \vec{u}_\varphi \quad (4.55)$$

$$\approx j\beta I_0 l \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin(\vartheta) \vec{u}_\varphi \quad (4.56)$$

des idealen elektrischen Dipols und mit (4.47), (4.2) und (4.50) die elektrische Feldstärke

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{j\omega\epsilon r} \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial\vartheta} (\sin(\vartheta) \underline{H}_\varphi) \vec{u}_r - \frac{1}{j\omega\epsilon r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{H}_\varphi) \vec{u}_\vartheta \\ &= j\beta Z_F \underline{L}_0 l \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left(\left(\frac{2}{j\beta r} + \frac{2}{(j\beta r)^2} \right) \cos(\vartheta) \vec{u}_r \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right) \sin(\vartheta) \vec{u}_\vartheta \right) \quad (4.57)\end{aligned}$$

$$\approx j\beta Z_F \underline{L}_0 l \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin(\vartheta) \vec{u}_\vartheta \quad (4.58)$$

des idealen elektrischen Dipols. Die jeweils in den letzten Zeilen angegebenen Näherungen gelten im Fernfeld, wo es sich erwartungsgemäß um eine transversalelektromagnetische Welle handelt. Das gesamte elektromagnetische Feld ist, wie aufgrund der Antennengeometrie erwartet, rotationssymmetrisch bezüglich der z -Achse. Man erkennt, dass die magnetischen Feldlinien kreisförmig um die z -Achse, das heißt entlang von Breitenkreisen auf Kugeln um die Antenne verlaufen. Die elektrischen Feldlinien verlaufen im Fernfeld entlang der Meridiankreise auf Kugeln um die Antenne, siehe Abbildung 4.5. Die Richtungsabhängigkeit der Feldstärken im Fernfeld wird durch den Faktor $\sin(\vartheta)$ beschrieben. Die transversalelektromagnetische Welle im Fernfeld ist linear vertikal polarisiert. Der komplexe Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{2} Z_F \left(\frac{\beta |\underline{L}_0| l \sin(\vartheta)}{4\pi r} \right)^2 \vec{u}_r \quad (4.59)$$

des idealen elektrischen Dipols gemäß (4.52) ist im Fernfeld wie erwartet reell und zeigt von der Antenne radial nach außen weg. Die vom idealen elektrischen Dipol abgestrahlte Strahlungsleistungsdichte (4.53) im Fernfeld ist

$$S = \frac{1}{2} Z_F \left(\frac{\beta |\underline{L}_0| l \sin(\vartheta)}{4\pi r} \right)^2. \quad (4.60)$$

Die Strahlungsleistungsdichte S nimmt erwartungsgemäß mit $1/r^2$ ab.

Aufgabe 4.2 Zeigen Sie, dass das Phasenzentrum einer Antenne mit einer zum Ursprung symmetrischen elektrischen Stromdichte

$$\vec{J}(\vec{r}') = \vec{J}^*(-\vec{r}')$$

im Ursprung liegt!

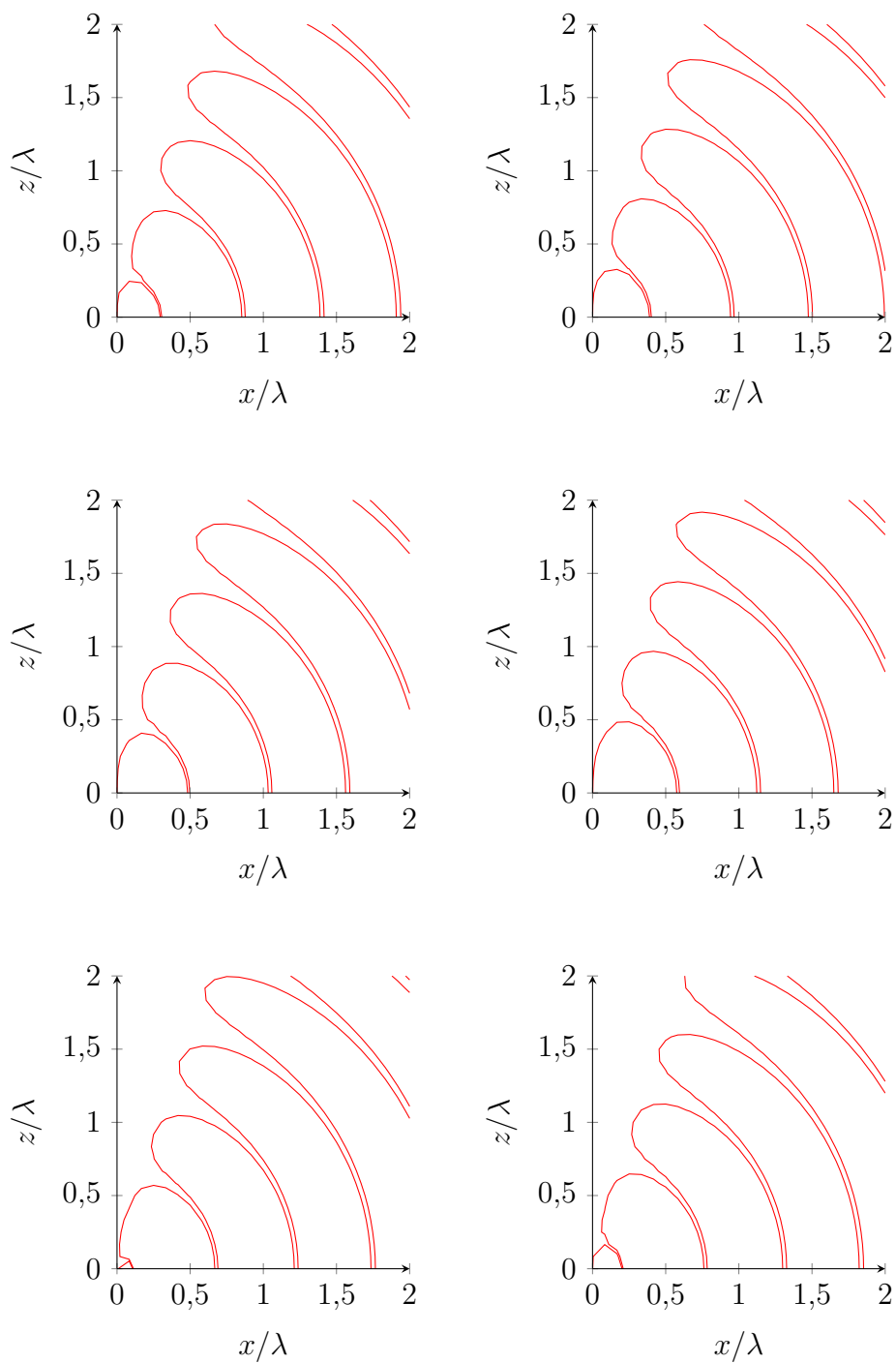


Abbildung 4.5.: Elektrisches Feld eines idealen elektrischen Dipols [KD90]. Momentaufnahmen im Abstand einer zwölftel Periodendauer

4.5. Reziprozitätstheorem

Die Feldstärken \vec{E} und \vec{H} beschreiben das durch eine erste Konfiguration an Quellen außerhalb des Gebiets V verursachte elektromagnetische Feld und die Feldstärken \vec{E}' und \vec{H}' beschreiben das durch eine zweite Konfiguration an Quellen außerhalb des Gebiets V verursachte elektromagnetische Feld. Es wird eine geschlossene Hülle ∂V um das quellenfreie, mit einem reziproken, das heißt einem linearen und isotropen Material ausgefüllte Gebiet V betrachtet. Mit dem Satz von Gauss (1.32) und (1.81) erhält man

$$\begin{aligned} & \oiint_{\partial V} \langle \vec{E} \times \vec{H}' - \vec{E}' \times \vec{H}, d\vec{A} \rangle \\ &= \iiint_V \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}' - \vec{E}' \times \vec{H}) dV \\ &= \iiint_V (\langle \vec{H}', \operatorname{rot}(\vec{E}) \rangle - \langle \vec{E}, \operatorname{rot}(\vec{H}') \rangle - \langle \vec{H}, \operatorname{rot}(\vec{E}') \rangle + \langle \vec{E}', \operatorname{rot}(\vec{H}) \rangle) dV. \end{aligned}$$

Mit dem Durchflutungsgesetz (1.17), dem Induktionsgesetz (1.24), (1.46), (1.50) und (1.54) folgt im quellenfreien Gebiet V mit $\vec{J} = \vec{0}$ und $\vec{M} = \vec{0}$ weiter

$$\begin{aligned} & \oiint_{\partial V} \langle \vec{E} \times \vec{H}' - \vec{E}' \times \vec{H}, d\vec{A} \rangle \\ &= \iiint_V (\langle \vec{H}', -j\omega\mu\vec{H} \rangle - \langle \vec{E}, \kappa\vec{E}' + j\omega\varepsilon\vec{E}' \rangle - \langle \vec{H}, -j\omega\mu\vec{H}' \rangle + \langle \vec{E}', \kappa\vec{E} + j\omega\varepsilon\vec{E} \rangle) dV \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es folgt das Reziprozitätstheorem

$$\oiint_{\partial V} \langle \vec{E} \times \vec{H}', d\vec{A} \rangle = \oiint_{\partial V} \langle \vec{E}' \times \vec{H}, d\vec{A} \rangle. \quad (4.61)$$

4.6. Eindeutigkeitstheorem

Es wird ein quellenfreies Gebiet V betrachtet. Die elektrische Feldstärke \vec{E} und die magnetische Feldstärke \vec{H} beschreiben ein durch Quellen außerhalb des Gebiets V erzeugtes elektromagnetisches Feld im Gebiet V . Die elektrische Feldstärke \vec{E}' und die magnetische Feldstärke \vec{H}' beschreiben ein weiteres in dem Gebiet V mögliches, im Allgemeinen durch andere Quellen außerhalb des Gebiets V erzeugtes elektromagnetisches Feld, siehe Abbildung 4.6. Aufgrund der Linearität

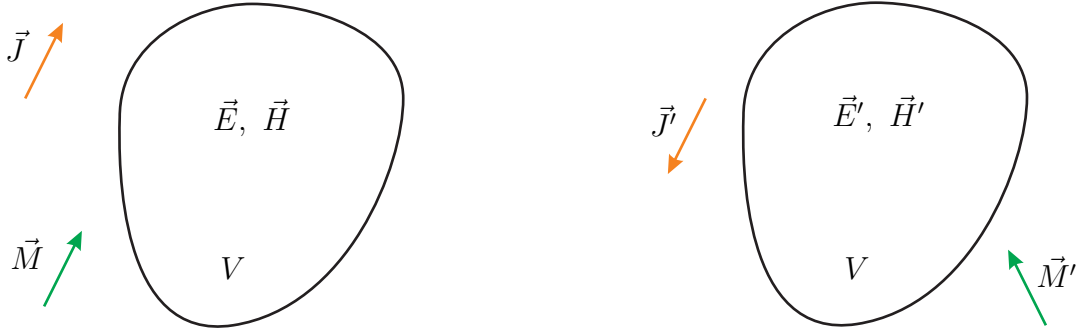


Abbildung 4.6.: Eindeigkeitstheorem

der Maxwell'schen Gleichungen ist dann auch das Differenzfeld $\vec{E} - \vec{E}'$ und $\vec{H} - \vec{H}'$ ein in dem quellenfreien Gebiet V mögliches elektromagnetisches Feld.

Gleichsetzen der aus dem Poynting-Vektor (1.77) mit (1.78) berechneten Strahlungsleistung P und der mit (1.76) berechneten Strahlungsleistung P ergibt

$$\begin{aligned}
 & \oint_{\partial V} \langle ((\vec{E} - \vec{E}') \times (\vec{H} - \vec{H}')), d\vec{A} \rangle \\
 &= - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon \langle \vec{E} - \vec{E}', \vec{E} - \vec{E}' \rangle + \frac{1}{2} \mu \langle \vec{H} - \vec{H}', \vec{H} - \vec{H}' \rangle \right) dV \\
 &\quad - \iiint_V \kappa \langle \vec{E} - \vec{E}', \vec{E} - \vec{E}' \rangle dV \\
 &= - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon \|\vec{E} - \vec{E}'\|^2 + \frac{1}{2} \mu \|\vec{H} - \vec{H}'\|^2 \right) dV - \iiint_V \kappa \|\vec{E} - \vec{E}'\|^2 dV.
 \end{aligned}$$

Falls die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärken \vec{E} und \vec{E}' oder die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärken \vec{H} und \vec{H}' auf der Hülle ∂V übereinstimmen, so ist die durch die Hülle ∂V transportierte Leistung P gemäß der ersten Zeile der Gleichung Null. Die letzte Zeile der Gleichung muss dann ebenfalls zu allen Zeiten Null sein. Dies ist nur möglich, falls $\vec{E} = \vec{E}'$ und $\vec{H} = \vec{H}'$ gelten, das heißt wenn die Feldstärken in jedem Punkt im Gebiet V gleich sind. Das von Quellen außerhalb eines Gebiets V erzeugte elektromagnetische Feld innerhalb eines quellenfreien Gebiets V ist folglich durch die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke oder die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke auf der Hülle ∂V des Gebiets eindeutig bestimmt. Dies ist die Aussage des Eindeigkeitstheorems. Das Eindeigkeitstheorem gilt auch, wenn sich im Gebiet V zusätzlich in beiden Szenarien gleiche Quellen befinden, da die im obigen Beweis zu bildende Differenz der Quellen dann Null ist.

4.7. Spiegelungsprinzipien

4.7.1. Spiegelung am idealen elektrischen Leiter

In der Oberfläche einer unendlich ausgedehnten ideal elektrisch leitenden Ebene werden sich elektrische Flächenstromdichten \vec{J}_F derart einstellen, dass die Grenzflächenbedingungen erfüllt sind. Insbesondere müssen gemäß (1.65) die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke \vec{E} verschwinden. Wie man zum Beispiel durch Überlagern der elektromagnetischen Felder idealer elektrischer Dipole leicht feststellt, sind die Grenzflächenbedingungen am Ort des idealen elektrischen Leiters auch dann erfüllt, wenn statt der elektrischen Flächenstromdichten \vec{J}_F gespiegelte Quellen gemäß Abbildung 4.7 vorhanden sind. Die elektromagnetischen Felder im rechten Halbraum sind in beiden Fällen wegen des Eindeutigkeitstheorems identisch, da die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärken am Ort der Oberfläche des idealen elektrischen Leiters in beiden Fällen gleich Null sind und die Quellen im rechten Halbraum gleich sind.

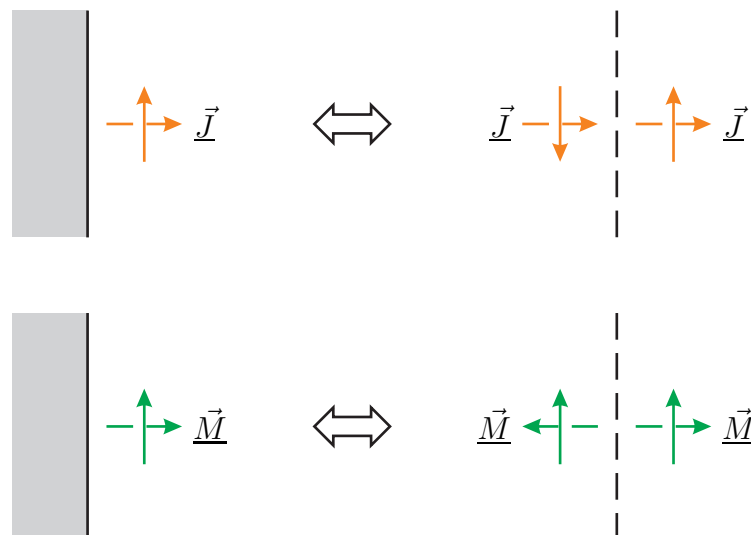


Abbildung 4.7.: Spiegelung elektrischer Stromdichten \vec{J} und magnetischer Stromdichten \vec{M} an einem unendlich ausgedehnten ebenen idealen elektrischen Leiter

4.7.2. Spiegelung am idealen magnetischen Leiter

Dual zum Fall der unendlich ausgedehnten ideal elektrisch leitenden Ebene kann man auch die Grenzflächenbedingungen an der unendlich ausgedehnten ideal ma-

gnetisch leitenden Ebene durch gespiegelte Quellen berücksichtigen, siehe Abbildung 4.8.

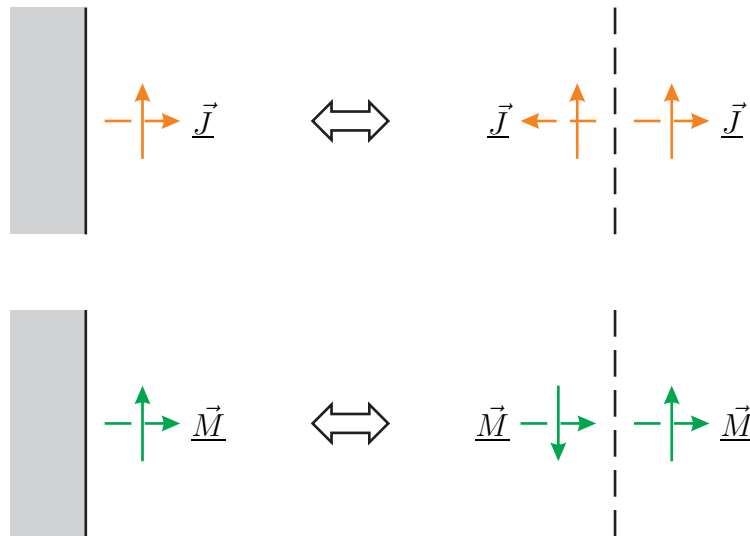


Abbildung 4.8.: Spiegelung elektrischer Stromdichten \vec{J} und magnetischer Stromdichten \vec{M} an einem unendlich ausgedehnten ebenen idealen magnetischen Leiter

4.8. Äquivalenztheoreme

4.8.1. Huygenssches Prinzip

Anschaulich kann nach dem Huygensschen Prinzip jeder Punkt einer Wellenfront als Ausgangspunkt einer sekundären Kugelwelle betrachtet werden und man kann die Wellenfront wieder als Einhüllende dieser sekundären Wellenfronten rekonstruieren. Das Huygenssche Prinzip ist bei vielen Berechnungen zur Wellenausbreitung hilfreich. Beispielsweise kann ein auf einer beliebigen Hülle um die eigentliche Antenne vorhandenes elektromagnetisches Feld wieder als Ausgangspunkt der elektromagnetischen Welle betrachtet werden, das heißt die Hülle wirkt als virtuelle Antenne. Im Folgenden sollen die Ideen des Huygensschen Prinzips mathematisch präzise formuliert werden.

4.8.2. Formulierung mit feldfreiem Innenraum

Eine Hülle teilt den Raum in ein Gebiet V_1 mit den ein elektromagnetisches Feld erzeugenden Quellen \vec{J} und \vec{M} und ein quellenfreies Gebiet V_2 , siehe Abbildung 4.9. \vec{E} und \vec{H} sind die Feldstärken des von den Quellen \vec{J} und \vec{M} erzeugten, den gesamten aus den Gebieten V_1 und V_2 bestehenden Raum erfüllenden elektromagnetischen Feldes.

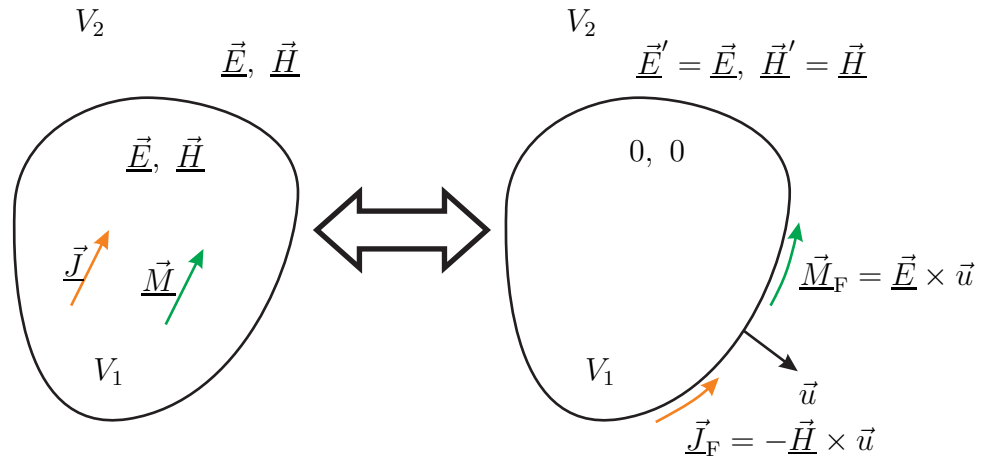


Abbildung 4.9.: Formulierung des Äquivalenztheorems mit feldfreiem Innenraum

Das elektromagnetische Feld

$$\vec{E}' = \begin{cases} 0 & \text{in } V_1 \\ \vec{E} & \text{in } V_2 \end{cases}$$

und

$$\vec{H}' = \begin{cases} 0 & \text{in } V_1 \\ \vec{H} & \text{in } V_2 \end{cases}.$$

erfüllt zusammen mit den virtuellen Quellen

$$\vec{J}_F = -\vec{H} \times \vec{u} \quad (4.62)$$

und

$$\vec{M}_F = \vec{E} \times \vec{u} \quad (4.63)$$

auf der Hülle des nun quellenfreien und feldfreien Gebiets V_1 die (1.58) und (1.60) entsprechenden Grenzflächenbedingungen auf der Hülle des Gebiets V_1 , ist also bei Abwesenheit der Quellen \vec{J} und \vec{M} eine Lösung der Maxwell'schen Gleichungen.

Aufgrund des Eindeutigkeitstheorems entspricht dieses durch die Flächenstromdichten \vec{J}_F und \vec{M}_F bei Abwesenheit der Quellen \vec{J} und \vec{M} erzeugte elektromagnetische Feld im Gebiet V_2 dem von den Quellen \vec{J} und \vec{M} bei Abwesenheit der Flächenstromdichten \vec{J}_F und \vec{M}_F erzeugten elektromagnetischen Feld im Gebiet V_2 .

4.8.3. Formulierung mit idealen Leitern

In einem nächsten Schritt kann man das nun feldfreie Gebiet V_1 mit einem idealen elektrischen Leiter oder einem idealen magnetischen Leiter ausfüllen, siehe Abbildung 4.10.

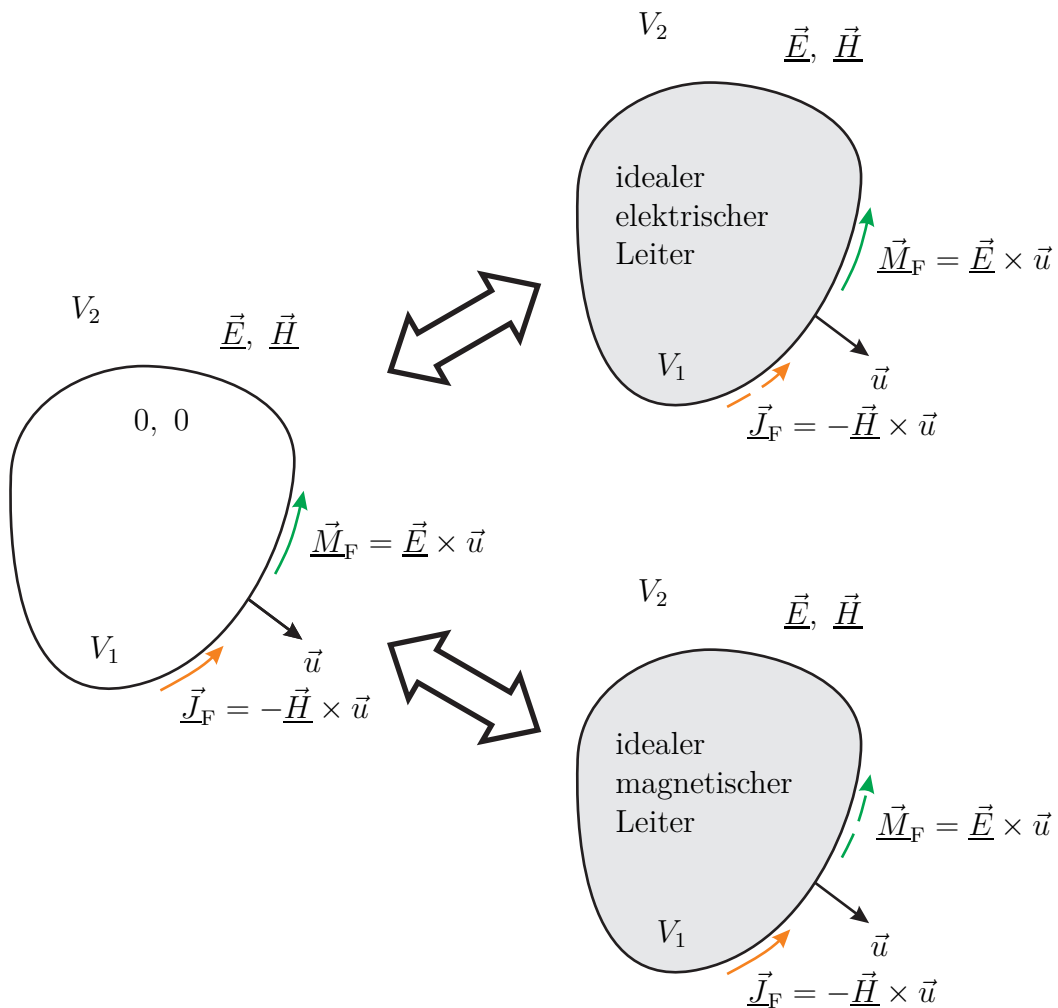


Abbildung 4.10.: Formulierung des Äquivalenztheorems mit idealen Leitern

Das von den Flächenstromdichten \vec{J}_F und \vec{M}_F erzeugte elektromagnetische Feld im Gebiet V_2 ändert sich durch das Einbringen eines idealen Leiters im feldfreien Gebiet V_1 nicht. Falls das feldfreie Gebiet V_1 mit einem idealen elektrischen Leiter ausgefüllt ist, so ist die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke \vec{E} auf der Leiteroberfläche durch die magnetische Flächenstromdichte \vec{M}_F und die (1.58) entsprechende Grenzflächenbedingung eindeutig gegeben. Aufgrund des Eindeutigkeitstheorems ist dann auch das elektromagnetische Feld im Gebiet V_2 eindeutig bestimmt. Die elektrische Flächenstromdichte \vec{J}_F folgt direkt aus der (1.68) entsprechenden Grenzflächenbedingung und braucht nicht bekannt zu sein. Dual dazu ist das elektromagnetische Feld im Gebiet V_2 eindeutig durch die elektrische Flächenstromdichte \vec{J}_F und die Grenzflächenbedingungen des idealen magnetischen Leiters bestimmt.

Das Berechnen des von den Flächenstromdichten \vec{J}_F oder \vec{M}_F erzeugten elektromagnetischen Feldes ist jedoch im Allgemeinen kompliziert, da die Grenzflächenbedingungen an den Leiteroberflächen berücksichtigt werden müssen. Nur wenn die Grenzfläche eine unendlich ausgedehnte Ebene ist, sind die Berechnungen relativ einfach, da man die Spiegelungsprinzipien gemäß Abschnitt 4.7 anwenden kann, siehe Abbildung 4.11. Die elektrische Flächenstromdichte \vec{J}_F auf dem idealen elektrischen Leiter wird durch die gespiegelte elektrische Flächenstromdichte kompensiert. Das von der magnetischen Flächenstromdichte \vec{M}_F auf dem idealen elektrischen Leiter erzeugte elektromagnetische Feld im Gebiet V_2 ist nach dem Spiegelungsprinzip gleich dem von der doppelten magnetischen Flächenstromdichte $2\vec{M}_F$ alleine bei Nichtvorhandensein des idealen elektrischen Leiters erzeugten elektromagnetischen Feld im Gebiet V_2 . Bei Anwenden des Spiegelungsprinzips erhält man im Gebiet V_1 ein nichtverschwindendes gespiegeltes elektromagnetisches Feld, das jedoch nicht weiter von Interesse ist. Duales gilt für ideale magnetische Leiter. Zusammenfassend ist bei unendlich ausgedehnten ebenen Grenzflächen das von den Quellen \vec{J} und \vec{M} erzeugte elektromagnetische Feld im Gebiet V_2 gleich

- dem von der elektrischen Flächenstromdichte $\vec{J}_F = -\vec{H} \times \vec{u}$ und der magnetischen Flächenstromdichte $\vec{M}_F = \vec{E} \times \vec{u}$ gemeinsam erzeugten elektromagnetischen Feld im Gebiet V_2 ,
- dem von der doppelten elektrischen Flächenstromdichte $2\vec{J}_F$ alleine erzeugten elektromagnetischen Feld im Gebiet V_2 und
- dem von der doppelten magnetischen Flächenstromdichte $2\vec{M}_F$ alleine erzeugten elektromagnetischen Feld im Gebiet V_2 .

Das heißt die elektrische Flächenstromdichte $\vec{J}_F = -\vec{H} \times \vec{u}$ und die magnetische Flächenstromdichte $\vec{M}_F = \vec{E} \times \vec{u}$ auf einer ebenen Grenzfläche erzeugen im Gebiet V_2 jeweils das gleiche elektromagnetische Feld.

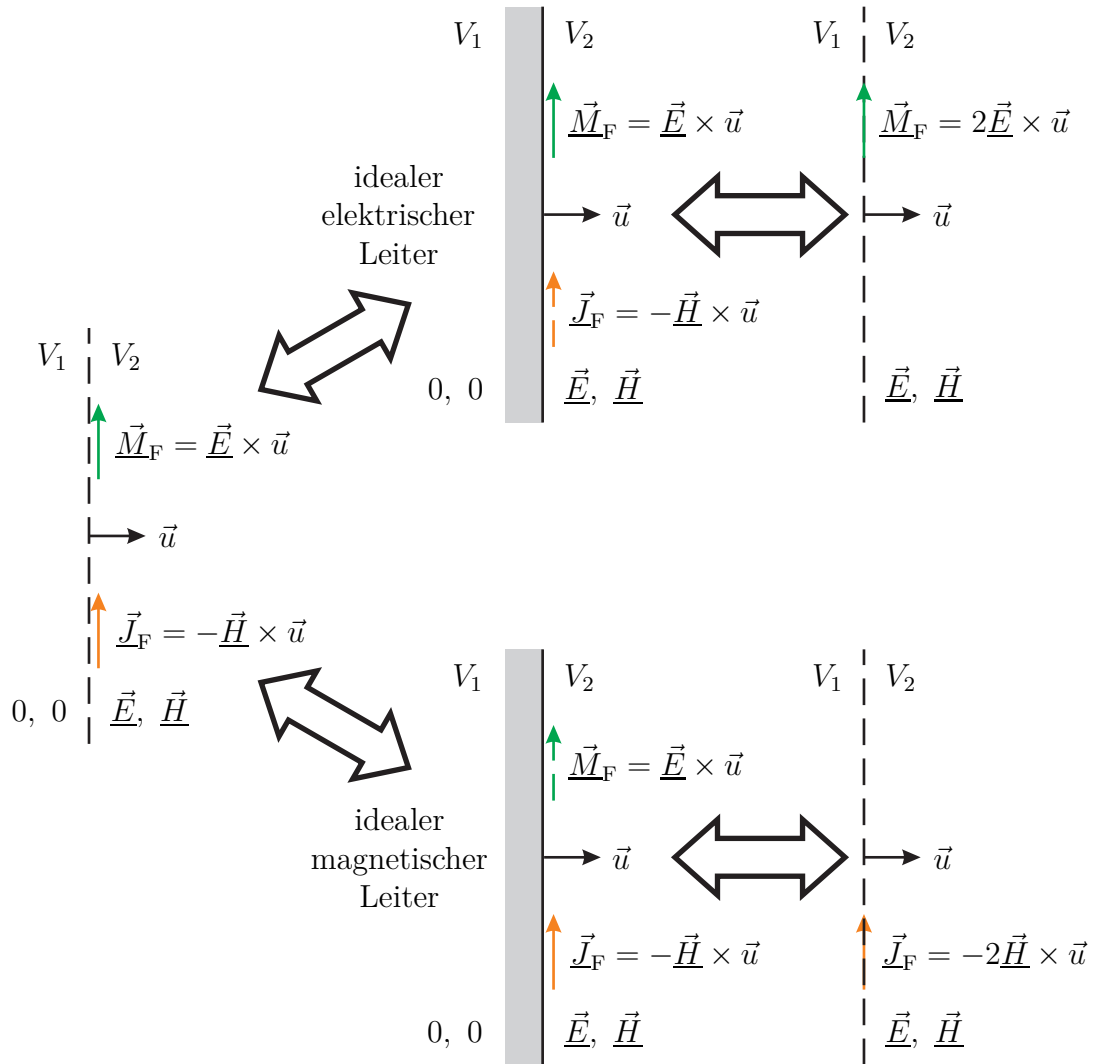


Abbildung 4.11.: Formulierung des Äquivalenztheorems mit idealen Leitern und ebenen Grenzflächen

Das von einer ideal elektrisch leitenden und damit im Inneren feldfreien Antenne abgestrahlte elektromagnetische Feld entspricht dem von der elektrischen Flächenstromdichte $\underline{\vec{J}}_F$ und der magnetischen Flächenstromdichte $\underline{\vec{M}}_F$ auf der Antenne bei Nichtvorhandensein der ideal elektrisch leitenden Strukturen abgestrahlten elektromagnetischen Feld. Dieser als Huygens-Äquivalent der Antenne bezeichnete Ansatz rechtfertigt rückwirkend die Annahme, dass die Antenne ihr elektromagnetisches Feld in ein homogenes Dielektrikum abstrahlt, obwohl das Innere der Antenne in der Realität nicht mit dem umgebenden Dielektrikum gefüllt ist.

In der Antennenmesstechnik ist es aufgrund der begrenzten räumlichen Abmessungen von Antennenmessplätzen insbesondere bei niedrigeren Kreisfrequenzen ω oft nicht möglich, das eigentlich interessierende Fernfeld direkt messtechnisch zu untersuchen. Stattdessen misst man die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke $\underline{\vec{E}}$ oder der magnetischen Feldstärke $\underline{\vec{H}}$ im Nahfeld auf einer Hülle um die Antenne. Gemäß dem Huygensschen Prinzip ist es möglich, daraus mit einer sogenannten Nahfeld-Fernfeld-Transformation das Fernfeld zu berechnen.

4.9. Momentenmethode

4.9.1. Lösungsansatz der Momentenmethode

In der Praxis ist die Strombelegung auf einer Antenne nicht a priori bekannt, sondern ergibt sich aus dem Wechselspiel zwischen Strombelegung und abgestrahltem elektromagnetischem Feld. Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, unter Berücksichtigung dieser Wechselwirkungen die Strombelegung auf der Antenne zu bestimmen. Es wird der Fall betrachtet, dass die Quelle des elektromagnetischen Feldes ausschließlich die elektrische Flächenstromdichte $\underline{\vec{J}}_F(\vec{r}')$ ist. Eine Erweiterung auf den Fall, dass auch eine magnetische Flächenstromdichte $\underline{\vec{M}}_F(\vec{r}')$ vorhanden ist, ist aufgrund der Dualität der Gleichungen leicht möglich.

Für das durch die elektrische Flächenstromdichte $\underline{\vec{J}}_F(\vec{r}')$ erzeugte magnetische Vektorpotential gilt

$$\underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \iint_{A'} \mu \underline{\vec{J}}_F(\vec{r}') \underline{\psi}(\vec{r} - \vec{r}') dA',$$

siehe (4.39). Hier wurde davon ausgegangen, dass die elektrische Flächenstromdichte $\underline{\vec{J}}_F(\vec{r}')$ in den homogenen Raum abstrahlt.

Aus (4.7) folgt mit (4.2) und (4.50) für die elektrische Feldstärke

$$\underline{\vec{E}} = -j \frac{Z_F}{\mu} \left(\frac{1}{\beta} \text{grad}(\text{div}(\underline{\vec{A}})) + \beta \omega \underline{\vec{A}} \right). \quad (4.64)$$

Einsetzen des Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r})$ ergibt

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= -jZ_F \left(\text{grad} \left(\text{div} \left(\iint_{A'} \frac{\vec{J}_F(\vec{r}')}{\beta} \underline{\psi}(\vec{r} - \vec{r}') dA' \right) \right) + \iint_{A'} \beta \vec{J}_F(\vec{r}') \underline{\psi}(\vec{r} - \vec{r}') dA' \right) \\ &= \mathcal{L}(\vec{J}_F(\vec{r}')), \end{aligned}$$

das heißt die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ ergibt sich durch Anwenden eines linearen Operators $\mathcal{L}(\cdot)$ auf die durch die elektrische Flächenstromdichte $\vec{J}_F(\vec{r}')$ gegebene Strombelegung.

Die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ in der ideal elektrisch leitenden Antenne ist bekannt. Sie ist außer an den Orten, an denen sich speisende Stromquellen befinden, Null. Obige Gleichung ist also eine Integro-Differentialgleichung zum Bestimmen der elektrischen Flächenstromdichte $\vec{J}_F(\vec{r}')$.

Die Momentenmethode ist ein numerisches Verfahren zum Bestimmen der Lösungen von Integro-Differentialgleichungen [Gib14; Har93]. Sie basiert darauf, dass man die zu bestimmende Funktion, hier die elektrische Flächenstromdichte $\vec{J}_F(\vec{r}')$, durch eine endliche Summe gewichteter Basisfunktionen approximiert. Mit den N Basisfunktionen $\vec{f}_n(\vec{r}')$, $n = 1 \dots N$, und den N komplexen Gewichten \underline{J}_{Fn} , $n = 1 \dots N$, gilt näherungsweise

$$\vec{J}_F(\vec{r}') = \sum_{n=1}^N \vec{f}_n(\vec{r}') \underline{J}_{Fn}. \quad (4.65)$$

Anwenden des linearen Operators ergibt

$$\vec{E}(\vec{r}) = \mathcal{L} \left(\sum_{n=1}^N \vec{f}_n(\vec{r}') \underline{J}_{Fn} \right) = \sum_{n=1}^N \mathcal{L}(\vec{f}_n(\vec{r}')) \underline{J}_{Fn}.$$

Für einzelne Komponenten der elektrischen Feldstärke gilt

$$\underline{E}_{xyz}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N \mathcal{L}_{xyz}(\vec{f}_n(\vec{r}')) \underline{J}_{Fn},$$

wobei xyz für eine der drei Koordinaten x , y oder z steht. Für eine so am Ort \vec{r}_m berechnete elektrische Feldstärkekomponente gilt

$$\underline{E}_m = \underline{E}_{xyz}(\vec{r}_m) = \sum_{n=1}^N \underline{Z}_{m,n} \underline{J}_{Fn}.$$

Die hier auftretenden Gewichtungsfaktoren

$$\underline{Z}_{m,n} = \mathcal{L}_{xyz}(\vec{f}_n(\vec{r}')), \quad n = 1 \dots N, \quad (4.66)$$

haben die Einheit einer Impedanz und können selbst bei komplizierten Antennen-geometrien numerisch leicht durch Anwenden des linearen Operators $\mathcal{L}_{xyz}(\cdot)$ auf die Basisfunktionen $\vec{f}_n(\vec{r}')$ berechnet werden. Man erhält das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \underline{E}_1 \\ \vdots \\ \underline{E}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{1,1} & \cdots & \underline{Z}_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{Z}_{M,1} & \cdots & \underline{Z}_{M,N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{J}_{F1} \\ \vdots \\ \underline{J}_{FN} \end{pmatrix}, \quad (4.67)$$

für die N komplexen Gewichte \underline{J}_{Fn} , $n = 1 \dots N$, das im Fall $M = N$ eine eindeutige Lösung hat.

Das von der Antenne am Ort \vec{r} erzeugte magnetische Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ kann man aus der nun bekannten elektrischen Flächenstromdichte $\vec{J}_F(\vec{r}')$ mit den bereits vorgestellten Verfahren berechnen. Aus dem so erhaltenen magnetischen Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ kann man die Feldstärken berechnen.

In der Praxis findet man viele Variationen des hier vorgestellten Grundprinzips der Momentenmethode [Dav11; Jin15]. Ein wichtiges Ziel ist hierbei das Maximieren der Genauigkeit des Ergebnisses bei möglichst kleinem Rechenaufwand. Insbesondere die Art und die Anzahl N der Basisfunktionen ist geschickt zu wählen.

4.9.2. Analyse einer Dipolantenne

Die in Abschnitt 4.9.1 eingeführten Grundprinzipien werden nun auf eine Dipolantenne angewendet. Die Dipolantenne besteht aus einer speisenden Stromquelle und zwei gleich langen, kreiszylinderförmigen, ideal elektrisch leitenden Drahtstücken, siehe Abbildung 4.12. Die Länge der Dipolantenne sei l und der Radius sei ρ .

Aus Symmetriegründen kann man davon ausgehen, dass die elektrische Flächenstromdichte \vec{J}_F auf dem Antennenumfang konstant ist und nur eine z -Komponente hat. Es gilt also

$$\vec{J}_F(z') = \underline{J}_F(z') \vec{u}_z.$$

Da der elektrische Strom nur eine z -Komponente hat, hat auch das magnetische Vektorpotential \vec{A} nur eine z -Komponente \underline{A}_z . Die z -Komponente des magnetischen Vektorpotentials für Punkte auf der z -Achse ergibt sich mit dem Abstand $\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$ eines Punktes auf der kreiszylinderförmigen Antennenoberfläche

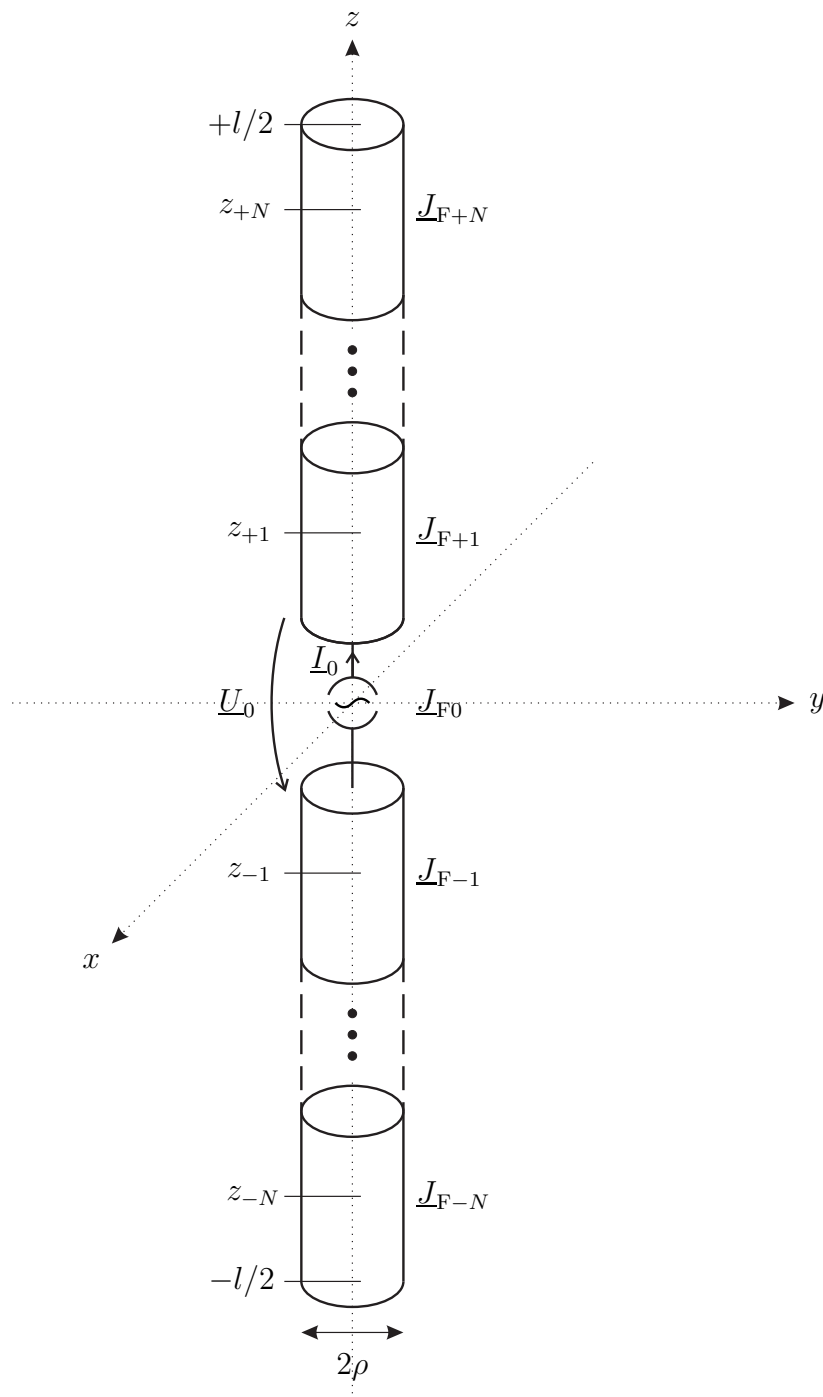


Abbildung 4.12.: Anwenden der Momentenmethode auf eine Dipolantenne

bei z' und einem Punkt auf der z -Achse bei z zu

$$\underline{A}_z(z) = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \underbrace{\mu 2\pi\rho J_F(z')}_{\underline{I}(z')} \underbrace{\frac{e^{-j\beta\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}}{4\pi\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}}_{\underline{\psi}(z-z')} dz',$$

siehe (4.39) und (4.37). Es wird nur die z -Komponente der elektrischen Feldstärke $\underline{\vec{E}}$ auf der z -Achse benötigt, die sich mit (4.64), (1.31) und (2.1) zu

$$\underline{E}_z(z) = -j \frac{Z_F}{\mu} \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \underline{A}_z(z)}{\partial z^2} + \beta \underline{A}_z(z) \right)$$

berechnet. Einsetzen des magnetischen Vektorpotentials $\underline{A}_z(z)$ und vertauschen der Reihenfolge von Integration und Differentiation ergibt z -Komponente

$$\underline{E}_z(z) = -j Z_F \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \underline{\psi}(z-z')}{\partial z^2} + \beta \underline{\psi}(z-z') \right) 2\pi\rho \underline{J}_F(z') dz'$$

der elektrischen Feldstärke $\underline{E}_z(z)$ am Ort z .

Die Dipolantenne wird in $2N+1$ als Elementardipole bezeichnete Segmente der Länge

$$\Delta z = \frac{l}{2N+1}$$

unterteilt. Der Mittelpunkt des n -ten Elementardipols liegt bei

$$z_n = n\Delta z = \frac{nl}{2N+1}.$$

Die elektrische Flächenstromdichte wird durch eine gewichtete Summe von Basisfunktionen approximiert:

$$\underline{J}_F(z') = \sum_{n=-N}^{+N} f_n(z') \underline{J}_{Fn}.$$

Man kann beispielsweise jeweils auf einem Elementardipol konstante und sonst verschwindende Basisfunktionen

$$f_n(z') = \begin{cases} 1 & z_n - \frac{\Delta z}{2} \leq z' \leq z_n + \frac{\Delta z}{2}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad n = -N \dots + N,$$

verwenden. Einsetzen der approximierten elektrischen Flächenstromdichte $\underline{J}_F(z')$ in die Gleichung zum Berechnen der z -Komponente $\underline{E}_z(z)$ der elektrischen Feldstärke $\underline{E}_z(z)$ ergibt für den Abtastpunkt $z = z_m$

$$\underline{E}_m = \underline{E}_z(z_m) = \sum_{n=-N}^{+N} \underline{Z}_{m,n} \underline{J}_{Fn}.$$

Die Impedanzen

$$\underline{Z}_{m,n} = -jZ_F \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \underline{\psi}(z-z')}{\partial z'^2} + \beta \underline{\psi}(z-z') \right) 2\pi\rho f_n(z') dz', \quad (4.68)$$

$$m, n = -N \dots +N,$$

sind im Allgemeinen nur numerisch und nicht analytisch berechenbar.

Die Dipolantenne wurde in eine große Anzahl $2N + 1$ an Elementardipolen der Länge Δz zerlegt. Die die Strombelegung beschreibenden Gewichte \underline{J}_{Fn} , $n = -N \dots +N$, sind unter Berücksichtigen der Verkopplungen zwischen den Elementardipolen so zu bestimmen, dass insbesondere die z -Komponenten \underline{E}_m , $m = -N \dots -1, +1 \dots +N$, der elektrischen Feldstärken $\underline{E}_z(z_m)$ in den Elementardipolen mit Ausnahme des mittleren 0-ten Elementardipols mit der speisenden Stromquelle Null sind. Im mittleren 0-ten Elementardipol mit der speisenden Stromquelle muss für die z -Komponente der elektrischen Feldstärke

$$\underline{E}_z(0) = -\frac{U_0}{\Delta z}$$

gelten. Man kann nun das eindeutig lösbare lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \underline{E}_{-N} \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{U_0}{\Delta z} \\ 0 \\ \vdots \\ \underline{E}_{+N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{U_0}{\Delta z} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{-N,-N} & \cdots & \underline{Z}_{-N,+N} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{Z}_{+N,-N} & \cdots & \underline{Z}_{+N,+N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{J}_{F-N} \\ \vdots \\ \underline{J}_{F+N} \end{pmatrix}$$

gemäß (4.67) für die $2N + 1$ komplexen Gewichte \underline{J}_{Fn} , $n = -N \dots +N$, aufstellen.

Abbildung 4.13 zeigt die mit Hilfe der Momentenmethode ermittelte Strombelegung einer schlanken Dipolantenne der Länge $2l = 3\lambda/2$. Der Durchmesser der Dipolantenne ist $2\rho = 0,005\lambda$. Es wurden $2N + 1 = 201$ Segmente und stückweise sinusförmige Basisfunktionen nach Aufgabe 4.4 verwendet. Zum Vergleich ist durchgezogen eine sinusförmige Strombelegung eingezeichnet.

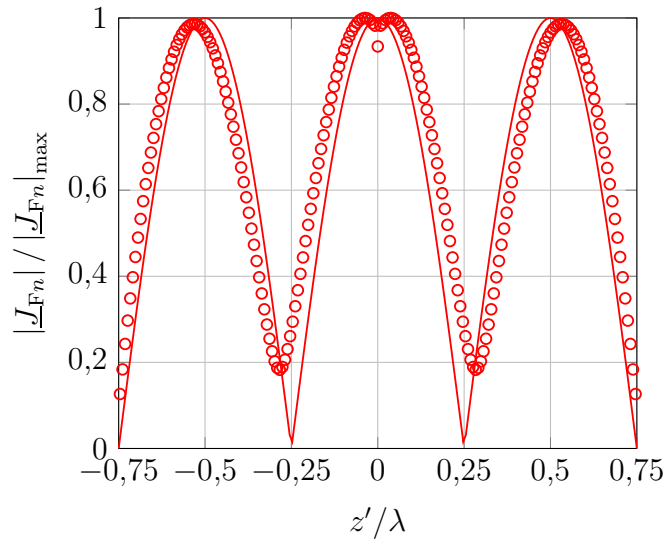


Abbildung 4.13.: Mit der Momentenmethode ermittelte Strombelegung einer Dipolantenne. Durchgezogen sinusförmiger Verlauf

Aufgabe 4.3 Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung der Greenschen Funktion

$$\underline{\psi}(z) = \frac{e^{-j\beta\sqrt{\rho^2+z^2}}}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

nach $z!$ Zeigen Sie, dass im Falle stückweise konstanter Basisfunktionen

$$f_n(z') = \begin{cases} 1 & z_n - \frac{\Delta z}{2} \leq z' \leq z_n + \frac{\Delta z}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit der Abkürzung

$$r_m = \sqrt{\rho^2 + (z_m - z')^2}$$

für die in (4.68) eingeführten Impedanzen

$$\underline{Z}_{m,n} = -jZ_F \int_{z_n - \frac{\Delta z}{2}}^{z_n + \frac{\Delta z}{2}} \frac{e^{-j\beta R_m}}{2\beta R_m^5} \left((1 + j\beta R_m) (2R_m^2 - 3\rho^2) + \beta^2 \rho^2 R_m^2 \right) \rho dz',$$

gilt!

Aufgabe 4.4 Zeigen Sie zunächst, dass für beliebige Basisfunktionen $f_n(z')$

$$\begin{aligned} & \int_{z_k}^{z_l} \left(\frac{\partial^2 \underline{\psi}(z-z')}{\partial z^2} + \beta^2 \underline{\psi}(z-z') \right) f_n(z') dz' \\ &= - \left[\frac{\partial \underline{\psi}(z-z')}{\partial z} f_n(z') + \underline{\psi}(z-z') \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \right]_{z'=z_k}^{z_l} \\ & \quad + \int_{z_k}^{z_l} \left(\frac{\partial^2 f_n(z')}{\partial z'^2} + \beta^2 f_n(z') \right) \underline{\psi}(z-z') dz' \end{aligned}$$

gilt! Nutzen Sie hierzu aus, dass für die Ableitungen der Greenschen Funktion

$$\frac{\partial \underline{\psi}(z-z')}{\partial z} = - \frac{\partial \underline{\psi}(z-z')}{\partial z'}$$

und

$$\frac{\partial^2 \underline{\psi}(z-z')}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \underline{\psi}(z-z')}{\partial z'^2}$$

gilt.

Speziell für stückweise sinusförmige Basisfunktionen

$$f_n(z') = \begin{cases} \frac{\sin(\beta(z' - z_{n-1}))}{\sin(\beta\Delta z)} & z_{n-1} \leq z' \leq z_n \\ \frac{\sin(\beta(z_{n+1} - z'))}{\sin(\beta\Delta z)} & z_n \leq z' \leq z_{n+1} \end{cases},$$

siehe Abbildung 4.14, kann man die in (4.68) eingeführten Impedanzen $\underline{Z}_{m,n}$ analytisch berechnen. Zeigen Sie, dass sich die Impedanzen mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} R_{m,n-1} &= \sqrt{\rho^2 + (z_m - z_{n-1})^2}, \\ R_{m,n} &= \sqrt{\rho^2 + (z_m - z_n)^2}, \\ R_{m,n+1} &= \sqrt{\rho^2 + (z_m - z_{n+1})^2} \end{aligned}$$

zu

$$\underline{Z}_{m,n} = -j \frac{1}{2} Z_F \rho \left(\frac{e^{-j\beta R_{m,n-1}}}{R_{m,n-1} \sin(\beta\Delta z)} - \frac{e^{-j\beta R_{m,n}} \sin(2\beta\Delta z)}{R_{m,n} \sin^2(\beta\Delta z)} + \frac{e^{-j\beta R_{m,n+1}}}{R_{m,n+1} \sin(\beta\Delta z)} \right)$$

ergeben!

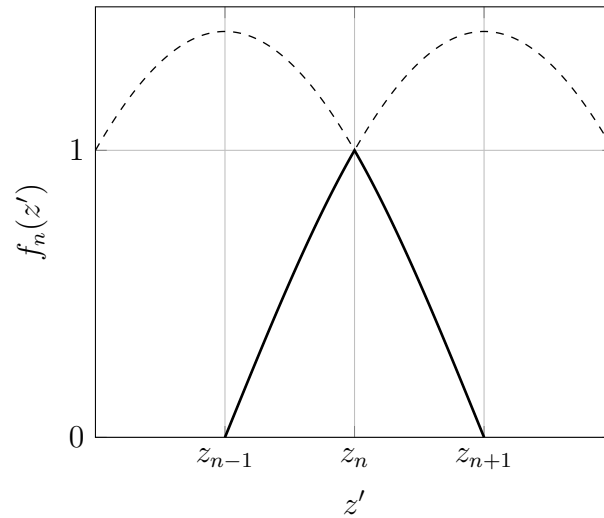


Abbildung 4.14.: Stückweise sinusförmige Basisfunktion $f_n(z')$ für $\Delta z = \lambda/8$

Aufgabe 4.5 Implementieren Sie die Momentenmethode zum Berechnen der Strombelegung einer Dipolantenne in Matlab! Verwenden Sie die stückweise sinusförmigen Basisfunktionen aus Aufgabe 4.4.

Kapitel 5.

Antennenbauformen

5.1. Kenngrößen von Antennen

5.1.1. Richtfaktor und Gewinn

Im Folgenden wird nur das Fernfeld betrachtet. Reale Antennen haben immer eine mehr oder weniger ausgeprägte Richtwirkung, das heißt die von einer Sendeantenne erzeugte Strahlungsleistungsdichte S ist außer von der Entfernung r des Beobachtungspunktes von der Sendeantenne auch noch von der Richtung, unter welcher der Beobachtungspunkt von der Sendeantenne aus gesehen erscheint, abhängig. In Funkkommunikationssystemen wird man die Sendeantenne bevorzugt so ausrichten, dass die Hauptstrahlrichtung in Richtung des Empfängers zeigt. Man interessiert sich also für die von der Sendeantenne in der Hauptstrahlrichtung erzeugte maximale Strahlungsleistungsdichte S_{\max} . Um die Richtwirkung der Sendeantenne beurteilen zu können, vergleicht man diese maximale Strahlungsleistungsdichte S_{\max} mit der von einer fiktiven omnidirektionalen Sendeantenne bei gleicher abgestrahlter Leistung P in der gleichen Entfernung r erzeugten Strahlungsleistungsdichte

$$S_0 = \frac{P}{4\pi r^2}, \quad (5.1)$$

siehe (4.54). Man definiert den Richtfaktor

$$D = \frac{S_{\max}}{S_0} = \frac{S_{\max}}{P} 4\pi r^2. \quad (5.2)$$

Der Richtfaktor D ist für das Fernfeld definiert und ist dort entfernungsunabhängig, da die Strahlungsleistungsdichte S mit $1/r^2$ abnimmt.

Wenn man die von der Sendeantenne in Hauptstrahlrichtung erzeugte maximale Strahlungsleistungsdichte S_{\max} ins Verhältnis zu der von einer fiktiven omnidirektionalen Sendeantenne erzeugten Strahlungsleistungsdichte bei gleicher zugeführter Sendeleistung setzt, so erhält man den Gewinn G . Mit dem Wirkungsgrad η der Sendeantenne gilt

$$G = \eta D. \quad (5.3)$$

Bei den hier primär betrachteten verlustfreien Sendeantennen ist der Richtfaktor D gleich dem Gewinn G .

Als Beispiel wird der ideale elektrische Dipol betrachtet. Mit (4.54) berechnet man aus der Strahlungsleistungsdichte S des idealen elektrischen Dipols gemäß (4.60) die abgestrahlte Leistung¹

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} Z_F \left(\frac{\beta |\underline{I}_0| l}{4\pi} \right)^2 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^3(\vartheta) \, d\varphi \, d\vartheta = \frac{1}{2} Z_F \left(\frac{\beta |\underline{I}_0| l}{4\pi} \right)^2 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3(\vartheta) \, d\vartheta \\ &= \frac{4}{3} Z_F \pi \left(\frac{\beta |\underline{I}_0| l}{4\pi} \right)^2. \end{aligned}$$

Die Hauptstrahlrichtung des idealen elektrischen Dipols ist $\vartheta = \pi/2$. Die in dieser Hauptstrahlrichtung erzeugte maximale Strahlungsleistungsdichte ist

$$S_{\max} = \frac{1}{2} Z_F \left(\frac{\beta |\underline{I}_0| l}{4\pi r} \right)^2,$$

siehe (4.60). Schließlich erhält man mit (5.2) den Richtfaktor

$$D = \frac{S_{\max}}{P} 4\pi r^2 = \frac{3}{2} = 1,5 \quad (5.4)$$

des idealen elektrischen Dipols.

5.1.2. Richtcharakteristik

Der Richtfaktor D liefert nur eine integrale Beschreibung der Richtwirkung einer Antenne. Zum detaillierten Beschreiben der Richtungsabhängigkeit der von einer Sendeantenne im Fernfeld erzeugten Feldstärken und Strahlungsleistungsdichte S verwendet man die als Richtcharakteristik bezeichnete auf die maximale Feldstärke normierte Feldstärke bei einer bestimmten großen Entfernung r im Fernfeld:

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{\|\vec{E}(\vartheta, \varphi)\|}{\|\vec{E}\|_{\max}} = \frac{\|\vec{H}(\vartheta, \varphi)\|}{\|\vec{H}\|_{\max}} = \frac{\sqrt{|\underline{E}_{\vartheta}(\vartheta, \varphi)|^2 + |\underline{E}_{\varphi}(\vartheta, \varphi)|^2}}{\sqrt{|\underline{E}_{\vartheta}|^2 + |\underline{E}_{\varphi}|^2}_{\max}}, \quad (5.5)$$

Die Umformungen folgen aus (4.45) und (4.48). Mit (4.53) folgt weiterhin

$$C(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_{\max}}}. \quad (5.6)$$

¹ Es gilt $\int \sin^3(x) \, dx = -\cos(x) + \frac{1}{3} \cos^3(x)$.

Zur graphischen Darstellung der Richtcharakteristik $C(\vartheta, \varphi)$ verwendet man überwiegend die folgenden beiden zweidimensionalen Richtdiagrammtypen:

Horizontaldiagramm: Für $\vartheta = \pi/2$ trägt man in Polarkoordinaten $C(\pi/2, \varphi)$ auf.

Vertikaldiagramm: Für $\varphi = 0$ trägt man in Polarkoordinaten $C(\vartheta, 0)$ auf.

Als Beispiel wird der ideale elektrische Dipol betrachtet. Die vom idealen elektrischen Dipol im Fernfeld erzeugte elektrische Feldstärke ist

$$\|\vec{E}(\vartheta, \varphi)\| = \frac{\beta Z_F |\underline{I}_0| l}{4\pi r} |\sin(\vartheta)|,$$

siehe (4.58). Der Maximalwert der elektrischen Feldstärke in der Hauptstrahlrichtung $\vartheta = \pi/2$ ist

$$\|\vec{E}\|_{\max} = \frac{\beta Z_F |\underline{I}_0| l}{4\pi r}.$$

Mit (5.5) erhält man die Richtcharakteristik

$$C(\vartheta, \varphi) = |\sin(\vartheta)| \quad (5.7)$$

des idealen elektrischen Dipols. Diese Richtcharakteristik $C(\vartheta, \varphi)$ hängt nicht vom Azimutwinkel φ ab, das heißt sie ist wie erwartet rotationssymmetrisch bezüglich der z -Achse. Abbildung 5.1 zeigt das dreidimensionale Richtdiagramm des idealen elektrischen Dipols. Das in Abbildung 5.2 dargestellte Vertikaldiagramm ergibt sich als vertikaler Schnitt durch das dreidimensionale Richtdiagramm.

Die in einer beliebigen Richtung erzeugte Strahlungsleistungsdichte ergibt sich mit (5.6) und (5.2) zu

$$S(\vartheta, \varphi) = DS_0 C^2(\vartheta, \varphi). \quad (5.8)$$

Den Richtfaktor D der Antenne kann man nun aus der Richtcharakteristik $C(\vartheta, \varphi)$ berechnen. Die abgestrahlte Leistung ergibt sich mit (4.54) zu

$$P = DS_0 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} C^2(\vartheta, \varphi) r^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta.$$

Daraus folgt mit (5.1) der Richtfaktor

$$D = \frac{P}{S_0 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} C^2(\vartheta, \varphi) r^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta} = \frac{4\pi}{\int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} C^2(\vartheta, \varphi) \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta}. \quad (5.9)$$

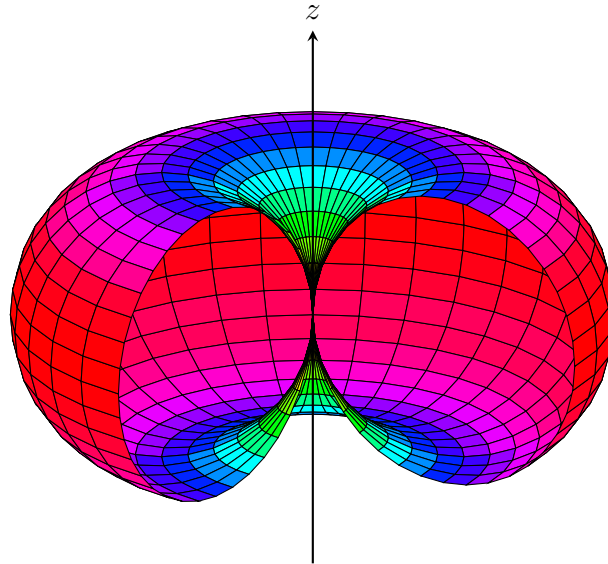


Abbildung 5.1.: Dreidimensionales Richtdiagramm des idealen elektrischen Dipols

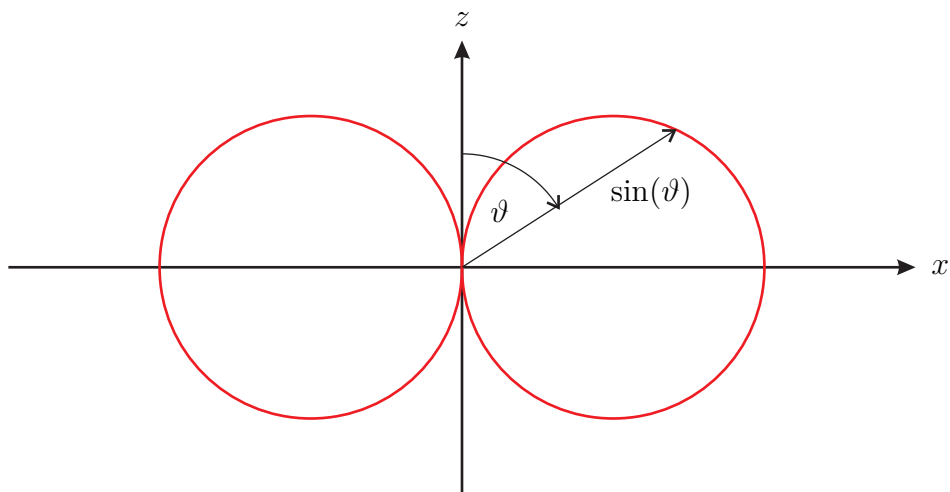


Abbildung 5.2.: Vertikaldiagramm des idealen elektrischen Dipols

Manchmal interessiert man sich nicht nur für die Beträge der von einer Sendeanenne erzeugten Feldstärken, sondern auch für die durch die zeitabhängige räumliche Ausrichtung des elektrischen Feldstärkevektors \vec{E} beschriebene Polarisation und die Nullphase. Diese Informationen sind in der vektoriellen komplexen Richtcharakteristik

$$\underline{\mathbf{C}}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \underline{C}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \\ \underline{C}_\varphi(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

mit den sich aus den entsprechenden Komponenten des elektrischen Feldstärkevektors ergebenden Komponenten

$$\underline{C}_{\vartheta\varphi}(\vartheta, \varphi) = \frac{\underline{E}_{\vartheta\varphi}(\vartheta, \varphi) e^{j\beta r}}{\|\vec{E}\|_{\max}} = \frac{-j\underline{E}_{\vartheta\varphi}(\vartheta, \varphi)}{\sqrt{|\underline{E}_\vartheta|^2 + |\underline{E}_\varphi|^2}_{\max}} \quad (5.11)$$

enthalten, siehe auch (4.48). $\vartheta\varphi$ steht hierbei für eine der zwei Koordinaten ϑ oder φ . Die Definition ist nur in Kombination mit der Festlegung einer Referenzphase eindeutig. Man legt sie beispielsweise durch die Phase des Speisestroms \underline{I}_0 fest. Wegen der Normierung auf den maximal auftretenden Feldstärkebetrag und der Kompensation der entfernungsbedingten Phasendrehung durch die Multiplikation mit $e^{j\beta r}$ ist auch die vektorielle Richtcharakteristik $\underline{\mathbf{C}}(\vartheta, \varphi)$ entfernungsunabhängig. Die Richtcharakteristik (5.5) berechnet sich aus der vektoriellen komplexen Richtcharakteristik zu

$$C(\vartheta, \varphi) = \|\underline{\mathbf{C}}(\vartheta, \varphi)\|. \quad (5.12)$$

5.2. Lineare Antennen

5.2.1. Allgemeine Betrachtungen zu linearen Antennen

Lineare Antennen bestehen aus einem geraden, sehr dünnen, idealen elektrischen Leiter. Das Koordinatensystem wird vereinfachend so gewählt, dass die Längsachse des Leiters der z -Achse entspricht. Abbildung 5.3 zeigt eine schlanke Dipolantenne mit Radius $\rho \ll \lambda$ und der Länge l als Beispiel einer linearen Antenne.

Der Strom $\underline{I}(z')$ fließt ausschließlich in z -Richtung, so dass der hier aufgrund der Antennensymmetrie nur vom Poldistanzwinkel ϑ abhängende vektorielle Richtungsfaktor \vec{F} gemäß (4.42) in kartesischen Koordinaten nur eine z -Komponente

$$\underline{F}_z(\vartheta) = \int_l \underline{I}(z') e^{j\beta z' \cos(\vartheta)} dz' \quad (5.13)$$

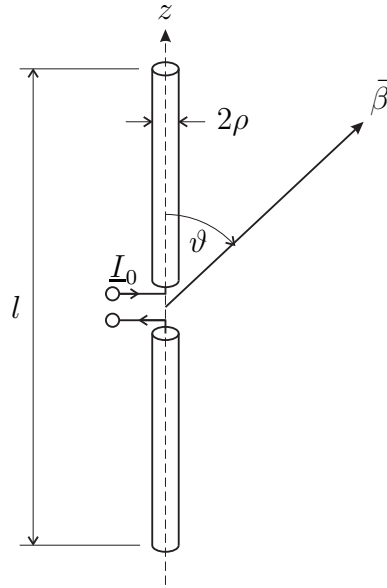


Abbildung 5.3.: Schlanke Dipolantenne

hat. In Kugelkoordinaten verschwindet die φ -Komponente $\underline{E}_\varphi(\vartheta) = 0$ und die ϑ -Komponente ist

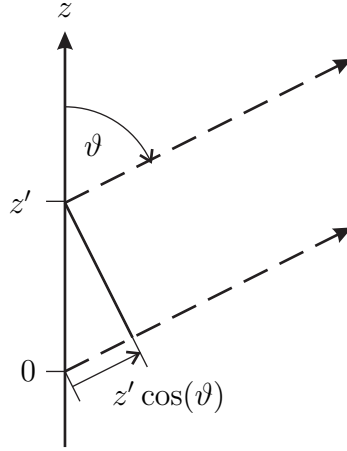
$$\underline{E}_\vartheta(\vartheta) = \underbrace{-\sin(\vartheta)}_{\underline{E}_E(\vartheta)} \underbrace{\int_l \underline{I}(z') e^{j\beta z' \cos(\vartheta)} dz'}_{\underline{E}_G(\vartheta)}, \quad (5.14)$$

siehe (4.15). Die ebenfalls von Null verschiedene r -Komponente $\underline{E}_r(\vartheta)$ interessiert hier nicht weiter. Der Richtungsfaktor $\underline{E}_\vartheta(\vartheta)$ einer aus gleichartigen und gleich ausgerichteten Elementarantennen, hier idealen elektrischen Dipolen, zusammengesetzten Antenne entspricht stets dem Produkt aus Elementrichtungsfaktor $\underline{E}_E(\vartheta)$ und Gruppenrichtungsfaktor $\underline{E}_G(\vartheta)$. Diesen allgemeingültigen Zusammenhang bezeichnet man als multiplikatives Gesetz. Der Gruppenrichtungsfaktor

$$\underline{E}_G(\vartheta) = \int_l \underline{I}(z') e^{j\beta z' \cos(\vartheta)} dz' \quad (5.15)$$

beschreibt das Zusammenwirken der infinitesimalen, die Strombelegung $\underline{I}(z')$ approximierenden, idealen elektrischen Dipole. Der im Integral auftretende Faktor $e^{j\beta z' \cos(\vartheta)}$ berücksichtigt die sich aus den geometriebedingten Pfadlängenverkürzungen $z' \cos(\vartheta)$ ergebenden Phasenverschiebungen, siehe Abbildung 5.4.

Die Richtcharakteristik (5.5) ergibt sich entsprechend dem multiplikativen Ge-

Abbildung 5.4.: Geometriebedingte Pfadlängenverkürzung $z' \cos(\vartheta)$

setz zu

$$C(\vartheta) = \frac{|\underline{E}_\vartheta(\vartheta)|}{|\underline{E}_\vartheta|_{\max}} = \frac{|\underline{E}_E(\vartheta) \underline{E}_G(\vartheta)|}{|\underline{E}_E \underline{E}_G|_{\max}} \sim \underbrace{|\sin(\vartheta)|}_{C_E(\vartheta)} \underbrace{\frac{|\underline{E}_G(\vartheta)|}{|\underline{E}_G|_{\max}}}_{C_G(\vartheta)}. \quad (5.16)$$

Die Richtcharakteristik $C(\vartheta)$ ist proportional zum Produkt aus Elementrichtcharakteristik $C_E(\vartheta)$ und Gruppenrichtcharakteristik $C_G(\vartheta)$. Es gilt Gleichheit, falls die Hauptstrahlrichtungen der Elementrichtcharakteristik $C_E(\vartheta)$ und der Gruppenrichtcharakteristik $C_G(\vartheta)$ zusammenfallen. Den Richtfaktor kann man wegen der Rotationssymmetrie um die z -Achse gemäß

$$D = \frac{2}{\int_0^\pi C^2(\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta} \quad (5.17)$$

aus der Richtcharakteristik $C(\vartheta)$ berechnen, siehe (5.9).

Wenn man den Gruppenrichtungsfaktor $\underline{E}_G(\vartheta)$ nicht als Funktion des Poldistanzwinkels ϑ sondern als Funktion der z -Komponente

$$\beta_z = \beta \cos(\vartheta) \quad (5.18)$$

des in die betrachtete Ausbreitungsrichtung zeigenden Phasenvektors $\vec{\beta}$ gemäß (2.13) betrachtet, erkennt man, dass der Gruppenrichtungsfaktor

$$\underline{E}_G(\beta_z) = \int_l \underline{I}(z') e^{j\beta_z z'} dz' \quad (5.19)$$

die Fourier-Transformierte der Strombelegung $\underline{I}(z')$ ist [FB08]. Man spricht von der Strombelegung $\underline{I}(z')$ im Ortsbereich und dem Gruppenrichtungsfaktor $\underline{F}_G(\beta_z)$ im Wellenzahlbereich. Die quadrierte Gruppenrichtcharakteristik ist proportional zum Betragsquadrat des Gruppenrichtungsfaktors

$$C_G^2(\beta_z) \sim |\underline{F}_G(\beta_z)|^2$$

und das Betragsquadrat des Gruppenrichtungsfaktors ergibt sich nach den Ergebnissen der Signaltheorie als Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion der Strombelegung $\underline{I}(z')$:

$$\begin{aligned} |\underline{F}_G(\beta_z)|^2 &= \underline{F}_G^*(\beta_z) \underline{F}_G(\beta_z) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{I}^*(z'') e^{-j\beta_z z''} dz'' \int_{-\infty}^{\infty} \underline{I}(z') e^{j\beta_z z'} dz' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{I}^*(z'') \underline{I}(z') e^{j\beta_z(z'-z'')} dz'' dz' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\underline{I}^*(z'') \underline{I}(z'' + z')}_{\text{Autokorrelationsfunktion}} dz'' e^{j\beta_z z'} dz' . \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Fourier-Transformation}} \end{aligned}$$

Diese in Abbildung 5.5 dargestellten Zusammenhänge erweisen sich als außerordentlich nützlich, da sie es ermöglichen, aus der Signal- und Systemtheorie bekannte Verfahren auch zur Antennenanalyse und zur Antennensynthese einzusetzen.

5.2.2. Dipolantennen mit sinusförmiger Strombelegung

Mit numerischen Untersuchungen wie zum Beispiel mit der Momentenmethode und auch mit approximativen feldtheoretischen Betrachtungen findet man, dass die Strombelegung auf einer in der Mitte mit dem Strom I_0 gespeisten schlanken Dipolantenne mit Radius $\rho \ll \lambda$ in guter Näherung sinusförmig ist:

$$\underline{I}(z') = \begin{cases} I_0 \frac{\sin\left(\beta\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right)}{\sin\left(\beta\frac{l}{2}\right)} & -l/2 \leq z' \leq l/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (5.20)$$

Mit der nun bekannten Strombelegung $\underline{I}(z')$ ist die weitere Analyse der Dipolantenne einfach. Der Gruppenrichtungsfaktor ergibt sich gemäß (5.19) als Fourier-

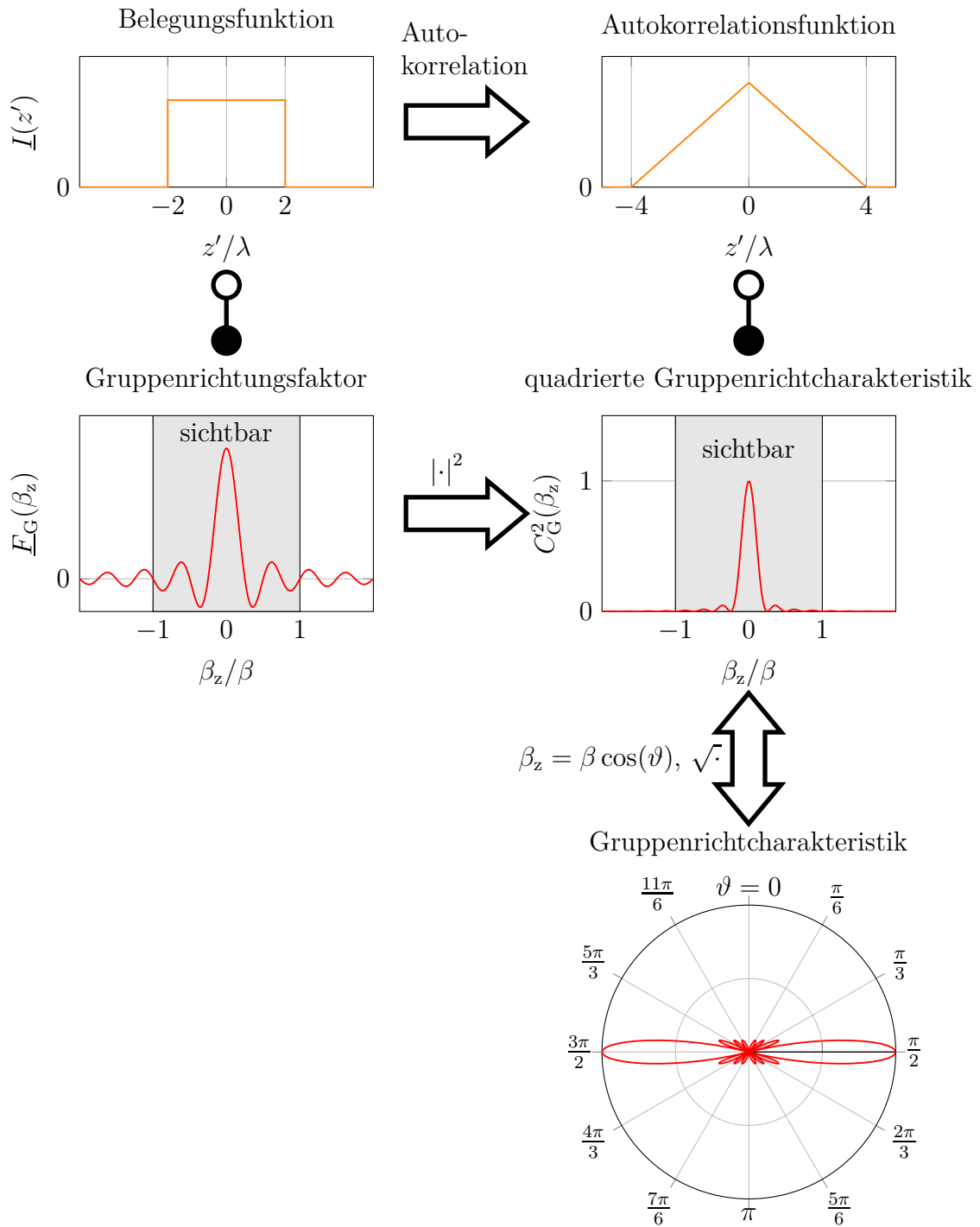


Abbildung 5.5.: Ortsbereich und Wellenzahlbereich

Transformierte der Strombelegung $\underline{I}(z')$:²

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_G(\beta_z) &= \int_{-l/2}^{l/2} \underline{I}_0 \frac{\sin\left(\beta\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right)}{\sin\left(\beta\frac{l}{2}\right)} e^{j\beta_z z'} dz' \\
 &= \int_0^{l/2} 2\underline{I}_0 \frac{\sin\left(\beta\left(\frac{l}{2} - z'\right)\right)}{\sin\left(\beta\frac{l}{2}\right)} \cos(\beta_z z') dz' \\
 &= \frac{\underline{I}_0}{\sin\left(\beta\frac{l}{2}\right)} \int_0^{l/2} \left(\sin\left(\beta\frac{l}{2} - (\beta_z + \beta) z'\right) + \sin\left(\beta\frac{l}{2} + (\beta_z - \beta) z'\right) \right) dz' \\
 &= \frac{\underline{I}_0}{\sin\left(\beta\frac{l}{2}\right)} \left[\frac{\cos\left(\beta\frac{l}{2} - (\beta_z + \beta) z'\right)}{\beta_z + \beta} - \frac{\cos\left(\beta\frac{l}{2} + (\beta_z - \beta) z'\right)}{\beta_z - \beta} \right]_{z'=0}^{l/2} \\
 &= \frac{\underline{I}_0}{\sin\left(\beta\frac{l}{2}\right)} \left(\frac{\cos\left(\beta_z\frac{l}{2}\right) - \cos\left(\beta\frac{l}{2}\right)}{\beta_z + \beta} - \frac{\cos\left(\beta_z\frac{l}{2}\right) - \cos\left(\beta\frac{l}{2}\right)}{\beta_z - \beta} \right) \\
 &= \frac{2\beta\underline{I}_0}{\sin\left(\beta\frac{l}{2}\right)} \frac{\cos\left(\beta\frac{l}{2}\right) - \cos\left(\beta_z\frac{l}{2}\right)}{\beta_z^2 - \beta^2}.
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Die Richtcharakteristik $C(\beta_z)$ entspricht gemäß (5.16) dem normierten Betrag des mit dem Elementrichtungsfaktor $\underline{E}_E(\beta_z)$ multiplizierten Gruppenrichtungsfaktors $\underline{E}_G(\beta_z)$. Die in Abbildung 5.6 gezeigten Richtcharakteristiken $C(\vartheta)$ sind als Funktionen des Poldistanzwinkels ϑ dargestellt, siehe (5.18). Für große Längen $l > \lambda$ der Antenne bilden sich zusätzlich zu den Hauptkeulen auch noch Nebenkeulen aus. Die Anzahl der Nebenkeulen nimmt mit wachsender Länge l der Antenne zu. Die zugehörigen Richtfaktoren D wurden mit (5.17) numerisch berechnet.

Aufgabe 5.1 Berechnen Sie den Richtfaktor D einer schlanken Dipolantenne der Länge $l = \lambda/2$ mit sinusförmiger Strombelegung $\underline{I}(z')$!

Aufgabe 5.2 Berechnen Sie die Richtcharakteristik $C(\vartheta)$ einer schlanken Dipolantenne der Länge l mit konstanter Strombelegung

$$\underline{I}(z') = \begin{cases} \underline{I}_0 & -l/2 \leq z' \leq l/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Richtcharakteristik $C(\vartheta)$ für $l = \lambda/2$ und $l = 4\lambda$! Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Richtcharakteristik eines idealen elektrischen Dipols und einer Dipolantenne der Länge $l = \lambda/2$ mit sinusförmiger Strombelegung!

² Es wird das Additionstheorem $\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$ verwendet.

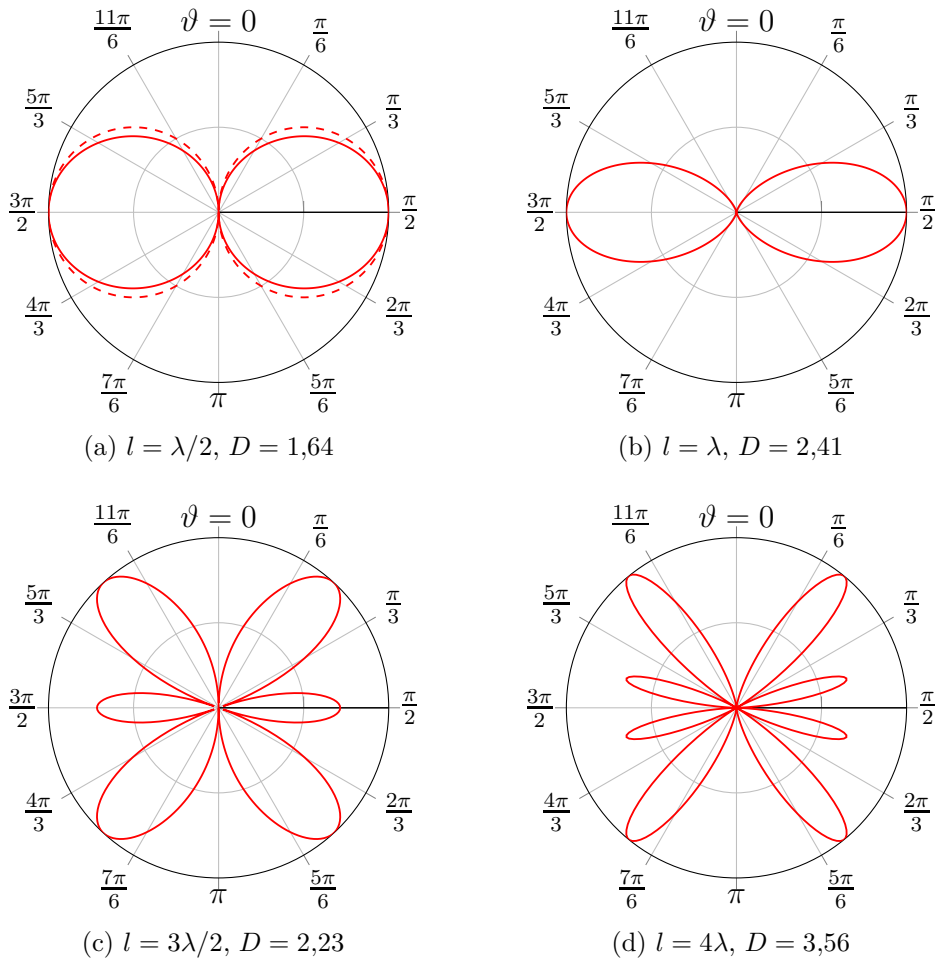


Abbildung 5.6.: Richtcharakteristiken $C(\vartheta)$ von Dipolantennen mit sinusförmiger Strombelegung $\underline{I}(z')$. In Abbildung 5.6a gestrichelt zum Vergleich idealer elektrischer Dipol

5.3. Aperturantennen

5.3.1. Allgemeine Betrachtungen zu Aperturantennen

Nach dem Huygensschen Prinzip kann man das abgestrahlte elektromagnetische Feld ausgehend von ersatzweise angenommenen Flächenstromdichten in der Apertur berechnen. Im Folgenden soll allgemein das Zustandekommen der Richtcharakteristik bei einer als bekannt vorausgesetzten zweidimensionalen Strombelegung in der Apertur betrachtet werden. Es werden folgende vereinfachende Einschränkungen gemacht:

- Die Apertur sei eben und liege in der y - z -Ebene. Letzteres lässt sich durch geeignete Wahl des Koordinatensystems erreichen.
- Es gebe nur eine elektrische Flächenstromdichte \vec{J}_F , das heißt die magnetische Flächenstromdichte \vec{M}_F sei Null. Sollte es auch eine magnetische Flächenstromdichte \vec{M}_F geben, so kann man separat in dualer Vorgehensweise das von ihr abgestrahlte elektromagnetische Feld berechnen. Anschließend überlagert man die von elektrischer Flächenstromdichte \vec{J}_F und magnetischer Flächenstromdichte \vec{M}_F abgestrahlten elektromagnetischen Felder vektoriell.
- Die elektrische Flächenstromdichte \vec{J}_F habe nur eine z -Komponente. Sollte es auch eine y -Komponente geben, so kann man separat in dualer Vorgehensweise das von dieser y -Komponente abgestrahlte elektromagnetische Feld berechnen. Anschließend überlagert man die von den verschiedenen Komponenten der Flächenstromdichte \vec{J}_F abgestrahlten elektromagnetischen Felder vektoriell.

Abbildung 5.7 zeigt das beschriebene Szenario.

Mit dem in die betrachtete Ausbreitungsrichtung zeigenden Phasenvektor $\vec{\beta}$ gemäß (2.13) und dem Ortsvektor \vec{r}' des Flächenelements dA' folgt

$$\langle \vec{\beta}, \vec{r}' \rangle = \beta y' \sin(\varphi) \sin(\vartheta) + \beta z' \cos(\vartheta),$$

siehe Abbildung 5.7. Damit berechnet man den Gruppenrichtungsfaktor

$$\underline{F}_G(\vartheta, \varphi) = \iint_{A'} \underline{J}_{Fz}(y', z') e^{j\beta(y' \sin(\varphi) \sin(\vartheta) + z' \cos(\vartheta))} dy' dz', \quad (5.22)$$

vergleiche (4.42) und (5.15).

Der Richtungsfaktor ergibt sich gemäß dem multiplikativen Gesetz zu

$$\underline{F}_\vartheta(\vartheta, \varphi) = \underline{F}_E(\vartheta, \varphi) \underline{F}_G(\vartheta, \varphi) = -\sin(\vartheta) \underline{F}_G(\vartheta, \varphi), \quad (5.23)$$

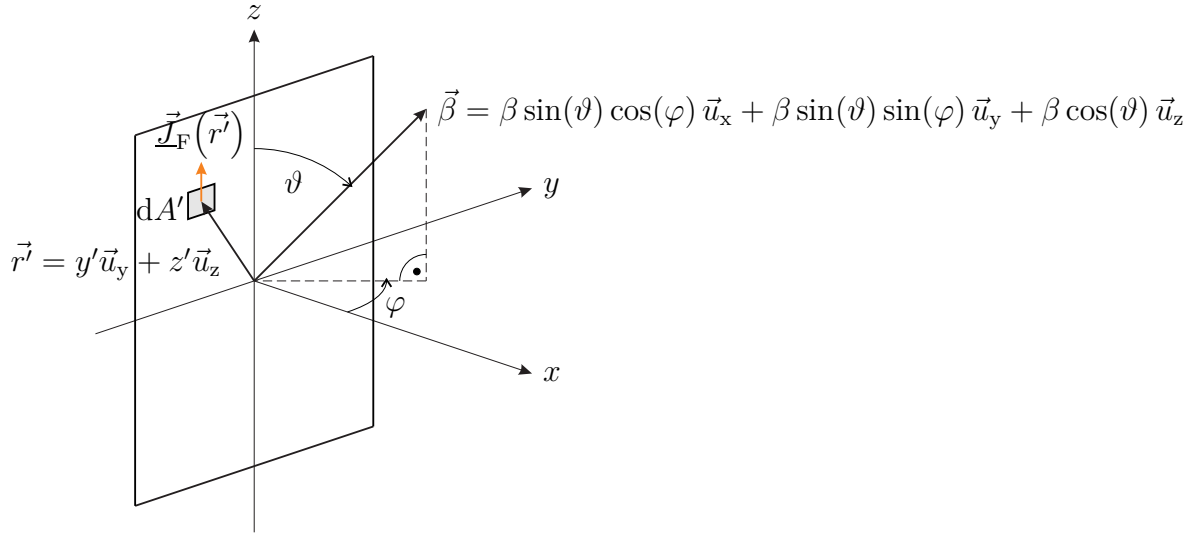


Abbildung 5.7.: Aperturantenne

vergleiche (5.14). Die Richtcharakteristik (5.5) ergibt sich entsprechend dem multiplikativen Gesetz zu

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{|\underline{E}_\vartheta(\vartheta, \varphi)|}{|\underline{E}_\vartheta|_{\max}} = \frac{|\underline{E}_E(\vartheta, \varphi) \underline{E}_G(\vartheta, \varphi)|}{|\underline{E}_E \underline{E}_G|_{\max}} \sim \underbrace{|\sin(\vartheta)|}_{C_E(\vartheta, \varphi)} \underbrace{\frac{|\underline{E}_G(\vartheta, \varphi)|}{|\underline{E}_G|_{\max}}}_{C_G(\vartheta, \varphi)}. \quad (5.24)$$

Die Richtcharakteristik $C(\vartheta, \varphi)$ ist proportional zum Produkt aus Elementrichtcharakteristik $C_E(\vartheta, \varphi)$ und Gruppenrichtcharakteristik $C_G(\vartheta, \varphi)$. Es gilt Gleichheit, falls die Hauptstrahlrichtungen der Elementrichtcharakteristik $C_E(\vartheta, \varphi)$ und der Gruppenrichtcharakteristik $C_G(\vartheta, \varphi)$ zusammenfallen.

Mit der y -Komponente

$$\beta_y = \beta \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \quad (5.25)$$

und der z -Komponente

$$\beta_z = \beta \cos(\vartheta) \quad (5.26)$$

des Phasenvektors $\vec{\beta}$ aus Abbildung 5.7 folgt für den Gruppenrichtungsfaktor

$$\underline{E}_G(\beta_y, \beta_z) = \iint_{A'} \underline{J}_{Fz}(y', z') e^{j(\beta_y y' + \beta_z z')} dy' dz', \quad (5.27)$$

das heißt der Gruppenrichtungsfaktor $\underline{E}_G(\beta_y, \beta_z)$ ist die zweidimensionale Fourier-Transformierte der Strombelegung $\underline{J}_{Fz}(y', z')$.

Die Orte konstanten Poldistanzwinkels ϑ entsprechen Orten konstanten β_z in der β_y - β_z -Ebene, siehe Abbildung 5.8. Weiterhin gilt

$$\left(\frac{\beta_y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\beta_z}{\beta}\right)^2 \sin^2(\varphi) = \sin^2(\varphi),$$

das heißt die Orte konstanten Azimutwinkels φ entsprechen Ellipsen in der β_y - β_z -Ebene, siehe Abbildung 5.8.

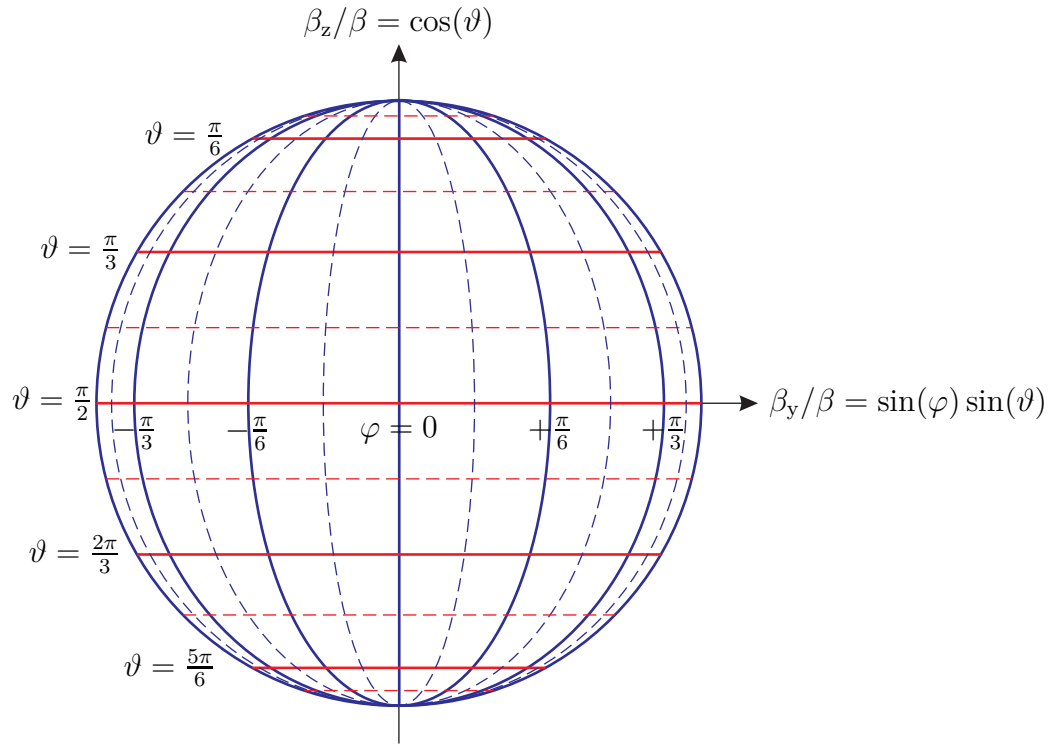


Abbildung 5.8.: Abbildung der ϑ - φ -Ebene auf die β_y - β_z -Ebene

Häufig ist die Hauptstrahlrichtung senkrecht zur Apertur. Für einen kleinen Bereich um diese Hauptstrahlrichtung $\vartheta = \pi/2$ und $\varphi = 0$ beziehungsweise $\beta_y = 0$ und $\beta_z = 0$ erhält man die folgenden linearen Taylor-Approximationen:

$$\sin(\vartheta) \approx 1, \quad (5.28)$$

$$\cos(\vartheta) \approx \frac{\pi}{2} - \vartheta, \quad (5.29)$$

$$\sin(\varphi) \approx \varphi, \quad (5.30)$$

$$\beta_y \approx \beta \varphi, \quad (5.31)$$

$$\beta_z \approx \beta \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right). \quad (5.32)$$

5.3.2. Aperturantennen mit konstanter Strombelegung

Es wird die in Abbildung 5.9 gezeigte rechteckförmige Apertur mit konstanter Strombelegung

$$\underline{J}_{Fz}(y', z') = \begin{cases} \underline{J}_{F0} & -\frac{a}{2} < y' < \frac{a}{2} \text{ und } -\frac{b}{2} < z' < \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.33)$$

betrachtet.

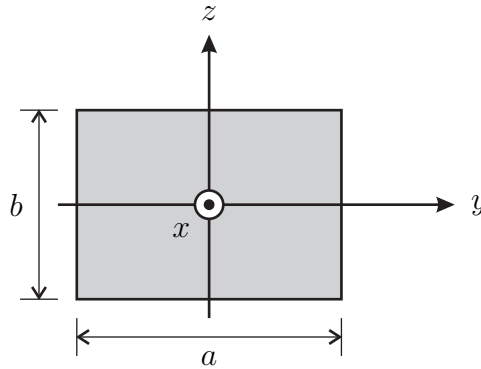


Abbildung 5.9.: Rechteckförmige Apertur

Der Gruppenrichtungsfaktor ergibt sich gemäß (5.27) als zweidimensionale Fourier-Transformation der Strombelegung $\underline{J}_{Fz}(y', z')$:

$$\begin{aligned} \underline{E}_G(\beta_y, \beta_z) &= \int_{z'=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{y'=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \underline{J}_{F0} e^{j(\beta_y y' + \beta_z z')} dy' dz' \\ &= \underline{J}_{F0} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos(\beta_y y') dy' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos(\beta_z z') dz' \\ &= \underline{J}_{F0} ab \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\beta_y\right)}{\frac{a}{2}\beta_y} \frac{\sin\left(\frac{b}{2}\beta_z\right)}{\frac{b}{2}\beta_z} = \underline{J}_{F0} ab \operatorname{si}\left(\frac{a}{2}\beta_y\right) \operatorname{si}\left(\frac{b}{2}\beta_z\right). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Die Fourier-Transformierte $\operatorname{si}(\cdot)$ des Rechteckimpulses wird als Spaltfunktion bezeichnet. Abbildung 5.10 zeigt die sich aus dem Gruppenrichtungsfaktor mit (5.24) ergebende Gruppenrichtcharakteristik³

$$C_G(\beta_y, \beta_z) = \left| \operatorname{si}\left(\frac{a}{2}\beta_y\right) \right| \left| \operatorname{si}\left(\frac{b}{2}\beta_z\right) \right|. \quad (5.35)$$

³Es gilt $\operatorname{si}(0) = 1$.

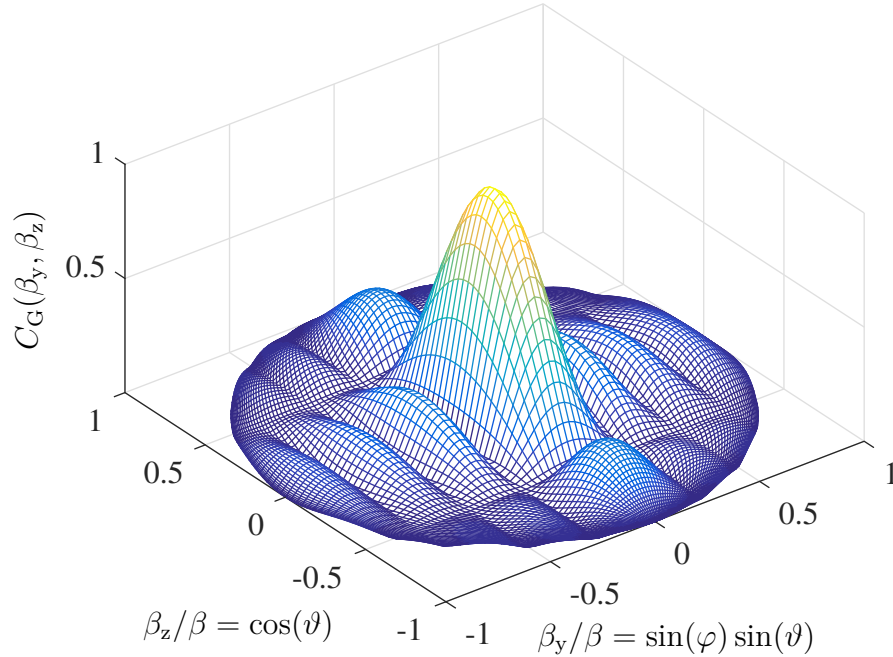


Abbildung 5.10.: Gruppenrichtcharakteristik $C_G(\beta_y, \beta_z)$ einer rechteckförmigen Aperturantenne mit konstanter Strombelegung. Breite $a = 4\lambda$ und Höhe $b = 2\lambda$

Die Hauptstrahlrichtung der rechteckförmigen Aperturantenne mit konstanter Strombelegung ist $\beta_y = 0$ und $\beta_z = 0$, das heißt senkrecht zur Apertur. Den Richtfaktor D kann man mit (5.9) berechnen. Das dabei zu berechnende Integral ist allerdings nur für den Sonderfall in Relation zur Wellenlänge λ großer Abmessungen $a \gg \lambda$ und $b \gg \lambda$ näherungsweise analytisch berechenbar. Dann ist die Strahlungsleistung in einer schmalen Hauptkeule um die Hauptstrahlrichtung konzentriert. Im Bereich signifikanter Werte der Richtcharakteristik (5.24) gilt dann wegen (5.28) näherungsweise

$$C^2(\beta_y, \beta_z) \approx C_G^2(\beta_y, \beta_z).$$

Für den Richtfaktor (5.9) folgt mit (5.31) und (5.32)

$$D \approx \frac{4\pi}{\int_{\vartheta=-\infty}^{\infty} \int_{\varphi=-\infty}^{\infty} C_G^2(\vartheta, \varphi) d\varphi d\vartheta} \approx \frac{4\pi\beta^2}{\int_{\beta_z=-\infty}^{\infty} \int_{\beta_y=-\infty}^{\infty} C_G^2(\beta_y, \beta_z) d\beta_y d\beta_z}. \quad (5.36)$$

Einsetzen der Gruppenrichtcharakteristik ergibt mit (4.43) der Richtfaktor⁴

$$D = \frac{4\pi\beta^2}{\int_{\beta_z=-\infty}^{\infty} \int_{\beta_y=-\infty}^{\infty} \text{si}^2\left(\frac{a}{2}\beta_y\right) \text{si}^2\left(\frac{b}{2}\beta_z\right) d\beta_y d\beta_z} = ab \frac{4\pi}{\lambda^2}. \quad (5.37)$$

Aufgabe 5.3 Es wird die in der Abbildung 5.11 gezeigte Hornantenne betrachtet. In dem Hohlleiter breitet sich eine $\text{TE}_{1,0}$ -Welle aus. Zeigen Sie, dass man das von der Hornantenne abgestrahlte elektromagnetische Feld näherungsweise als das von der magnetischen Flächenstromdichte

$$\underline{M}_{\text{Fy}} = \begin{cases} 2\underline{E}_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) & -\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2} \text{ und } -\frac{b}{2} \leq z \leq \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in der Apertur $x = 0$ abgestrahlte elektromagnetische Feld berechnen kann! Berechnen Sie die Gruppenrichtcharakteristik $C_G(\beta_y, \beta_z)$ der Hornantenne! Berechnen Sie für grosse Hornantennen $a \gg \lambda$ und $b \gg \lambda$ mit starker Richtwirkung den Richtfaktor D als Funktion von Breite a , Höhe b und Wellenlänge λ näherungsweise aus der Gruppenrichtcharakteristik $C_G(\beta_y, \beta_z)$!

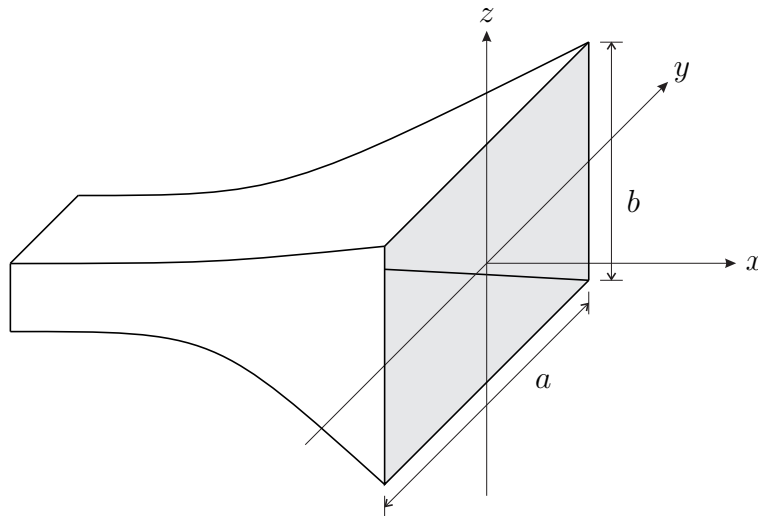


Abbildung 5.11.: Hornantenne

⁴ Es wird das bestimmte Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{si}^2(ax) dx = \frac{\pi}{|a|}$ verwendet.

5.4. Gruppenantennen

5.4.1. Allgemeine Betrachtungen zu Gruppenantennen

Gruppenantennen bestehen aus N Antennenelementen. Die Speiseströme \underline{I}_n , $n = 0 \dots N - 1$, der Antennenelemente haben im Allgemeinen unterschiedliche Amplituden und Nullphasen. Die von den Antennenelementen abgestrahlten elektromagnetischen Felder überlagern sich vektoriell.

Im Folgenden sollen die Grundprinzipien der Gruppenantennen unter vereinfachenden, aber in praktischen Realisierungen häufig zumindest näherungsweise erfüllten Voraussetzungen erläutert werden:

- Die Gruppenantenne besteht aus identischen gleich orientierten Antennenelementen.
- Die Antennenelemente beeinflussen sich gegenseitig nicht. Diese Näherung ist nur bei hinreichend großen Antennenelementabständen zulässig.

Mit

- der von einem einzigen Antennenelement im Ursprung bei Speisung mit dem Strom \underline{I}_E in einer Entfernung r im Fernfeld erzeugten elektrischen Feldstärke $\underline{\vec{E}}_E$,
- der Position \vec{r}'_n des n -ten Antennenelements und
- dem in die durch Poldistanzwinkel ϑ und Azimutwinkel φ beschriebene betrachtete Ausbreitungsrichtung zeigenden Phasenvektor $\vec{\beta}$ gemäß (2.13)

folgt für die von der Gruppenantenne erzeugte elektrische Feldstärke im Fernfeld

$$\underline{\vec{E}} = \underbrace{\frac{\underline{\vec{E}}_E}{\underline{I}_E}}_{\underline{\vec{E}}_E} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \underline{I}_n e^{j\langle \vec{\beta}, \vec{r}'_n \rangle}}_{\underline{E}_G}, \quad (5.38)$$

vergleiche (5.15). Der in der Summe auftretende Faktor $e^{j\langle \vec{\beta}, \vec{r}'_n \rangle}$ berücksichtigt die sich aus den geometriebedingten Pfadlängenverkürzungen ergebenden Phasenverschiebungen. Das Zusammenwirken der Antennenelemente wird durch den Gruppenrichtungsfaktor

$$\underline{E}_G(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{I}_n e^{j\langle \vec{\beta}, \vec{r}'_n \rangle} \quad (5.39)$$

beschrieben. Er ist von der Art der Antennenelemente unabhängig. Die Richtcharakteristik (5.5) ergibt sich entsprechend dem multiplikativen Gesetz zu

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{\|\vec{E}_E(\vartheta, \varphi) \underline{E}_G(\vartheta, \varphi)\|}{\|\vec{E}_E \underline{E}_G\|_{\max}} \sim \underbrace{\frac{\|\vec{E}_E(\vartheta, \varphi)\|}{\|\vec{E}_E\|_{\max}}}_{C_E(\vartheta, \varphi)} \underbrace{\frac{|F_G(\vartheta, \varphi)|}{|F_G|_{\max}}}_{C_G(\vartheta, \varphi)}. \quad (5.40)$$

Die Richtcharakteristik $C(\vartheta, \varphi)$ ist proportional zum Produkt aus Elementrichtcharakteristik $C_E(\vartheta, \varphi)$ und Gruppenrichtcharakteristik

$$C_G(\vartheta, \varphi) = \frac{|F_G(\vartheta, \varphi)|}{|F_G|_{\max}}. \quad (5.41)$$

Es gilt Gleichheit, falls die Hauptstrahlrichtungen der Elementrichtcharakteristik $C_E(\vartheta, \varphi)$ und der Gruppenrichtcharakteristik $C_G(\vartheta, \varphi)$ zusammenfallen.

Der Entwurfsraum der Gruppenantennen bietet viele zur Optimierung der Gruppenrichtcharakteristik $C_G(\vartheta, \varphi)$ nutzbare Freiheitsgrade wie

- die räumliche Anordnung und Ausrichtung der Antennenelemente,
- die Ausrichtung der Gruppenantenne im Raum relativ zur gewünschten Hauptstrahlrichtung,
- die relativen Beträge der Speiseströme \underline{I}_n , $n = 0 \dots N - 1$, und
- die Nullphasen der Speiseströme \underline{I}_n , $n = 0 \dots N - 1$.

Die Möglichkeit die Richtcharakteristik $C(\vartheta, \varphi)$ einer Gruppenantenne auf elektronischem Wege insbesondere durch phasenverschobenes Ansteuern der Antennenelemente zu beeinflussen, wird in vielen Anwendungen in der Radartechnik (Phased Array Radar) und in der Funkkommunikationstechnik (MIMO-Systeme) genutzt.

5.4.2. Lineare Gruppenantennen

5.4.2.1. Allgemeine Betrachtungen zu linearen Gruppenantennen

Im Folgenden sollen exemplarisch lineare Gruppenantennen betrachtet werden. Die identischen gleich ausgerichteten Antennenelemente seien im gleichen gegenseitigen Abstand d auf der z -Achse angeordnet, siehe Abbildung 5.12. Die Position des n -ten Antennenelements sei

$$\vec{r}'_n = z_n \vec{u}_z = nd \vec{u}_z. \quad (5.42)$$

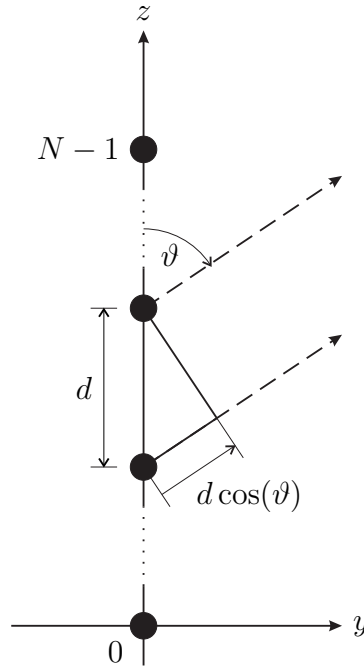


Abbildung 5.12.: Lineare Gruppenantenne

Die Anordnung ist rotationssymmetrisch bezüglich der z -Achse.

Mit dem in die betrachtete Ausbreitungsrichtung zeigenden Phasenvektor $\vec{\beta}$ gemäß (2.13) folgt

$$\langle \vec{\beta}, \vec{r}'_n \rangle = \beta n d \cos(\vartheta),$$

siehe Abbildung 5.12. Durch Einsetzen in (5.39) erhält man den wegen der Antennensymmetrie nur vom Poldistanzwinkel ϑ abhängenden Gruppenrichtungsfaktor

$$\underline{F}_G(\vartheta) = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{I}_n e^{j\beta n d \cos(\vartheta)}. \quad (5.43)$$

Mit der Substitution

$$\beta_d = \beta d \cos(\vartheta) \quad (5.44)$$

erkennt man, dass sich der Gruppenrichtungsfaktor

$$\underline{F}_G(\beta_d) = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{I}_n e^{j\beta_d n} \quad (5.45)$$

als Fourier-Reihe mit den Koeffizienten \underline{I}_n , $n = 0 \dots N - 1$, ergibt. Zur Analyse und Synthese von Gruppenantennen sind daher Methoden der digitalen Signalverarbeitung anwendbar [JD93; KK12; OS10; Tre02]. Insbesondere entspricht das

Problem des Entwurfs einer Strombelegung \underline{I}_n , $n = 0 \dots N - 1$, zum bestmöglichen Approximieren eines gewünschten Gruppenrichtungsfaktors $\underline{F}_G(\beta_d)$ und damit einer gewünschten Gruppenrichtcharakteristik $C_G(\vartheta, \varphi)$ mathematisch dem Problem des Entwurfs der Koeffizienten eines digitalen Filters.

Die Koeffizienten \underline{I}_n , $n = 0 \dots N - 1$, kann man auch als Abtastwerte einer kontinuierlichen Strombelegung ansehen. Der Gruppenrichtungsfaktor $\underline{F}_G(\beta_d)$ ist infolge des Abtastens der Strombelegung im Ortsbereich eine periodische Funktion mit der Periode 2π . Im gesamten Winkelbereich gilt $-1 \leq \cos(\vartheta) \leq 1$. Zum Vermeiden sichtbarer periodischer Wiederholungen des Gruppenrichtungsfaktors $\underline{F}_G(\beta_d)$ muss daher entsprechend dem Abasttheorem für den Antennenelementabstand

$$2\pi \geq \beta d 2,$$

das heißt

$$d \leq \frac{\lambda}{2} \quad (5.46)$$

gelten, siehe Abbildung 5.13. Die endliche Ausdehnung der Gruppenantenne im Ortsbereich kann man als Ergebnis einer Multiplikation einer unendlich ausgedehnten Strombelegung mit einer Fensterfunktion auffassen, vergleiche Anhang B.1. Im Wellenzahlbereich ist der Gruppenrichtungsfaktor der unendlich ausgedehnten Strombelegung dann mit der Fourier-Transformierten der Fensterfunktion zu falten, um den Gruppenrichtungsfaktor $\underline{F}_G(\beta_d)$ der endlich ausgedehnten Gruppenantenne zu erhalten. Dies führt im Allgemeinen zu einer Verbreiterung der Maxima und zu zusätzlichen Nebenmaxima der Gruppenrichtcharakteristik $C_G(\vartheta, \varphi)$.

5.4.2.2. Lineare Gruppenantennen mit Strombelegung konstanten Phasendekrements

Strombelegung konstanten Phasendekrements Im Folgenden seien die Amplituden der Speiseströme \underline{I}_n , $n = 0 \dots N - 1$, alle gleich:

$$|\underline{I}_n| = |\underline{I}_0|.$$

Weiterhin seien auch die relativen Phasenverschiebungen der Speiseströme benachbarter Antennenelemente gleich. Der n -te Speisestrom ergibt sich dann mit dem Phasendekrement ψ zu

$$\underline{I}_n = \underline{I}_0 e^{-jn\psi}. \quad (5.47)$$

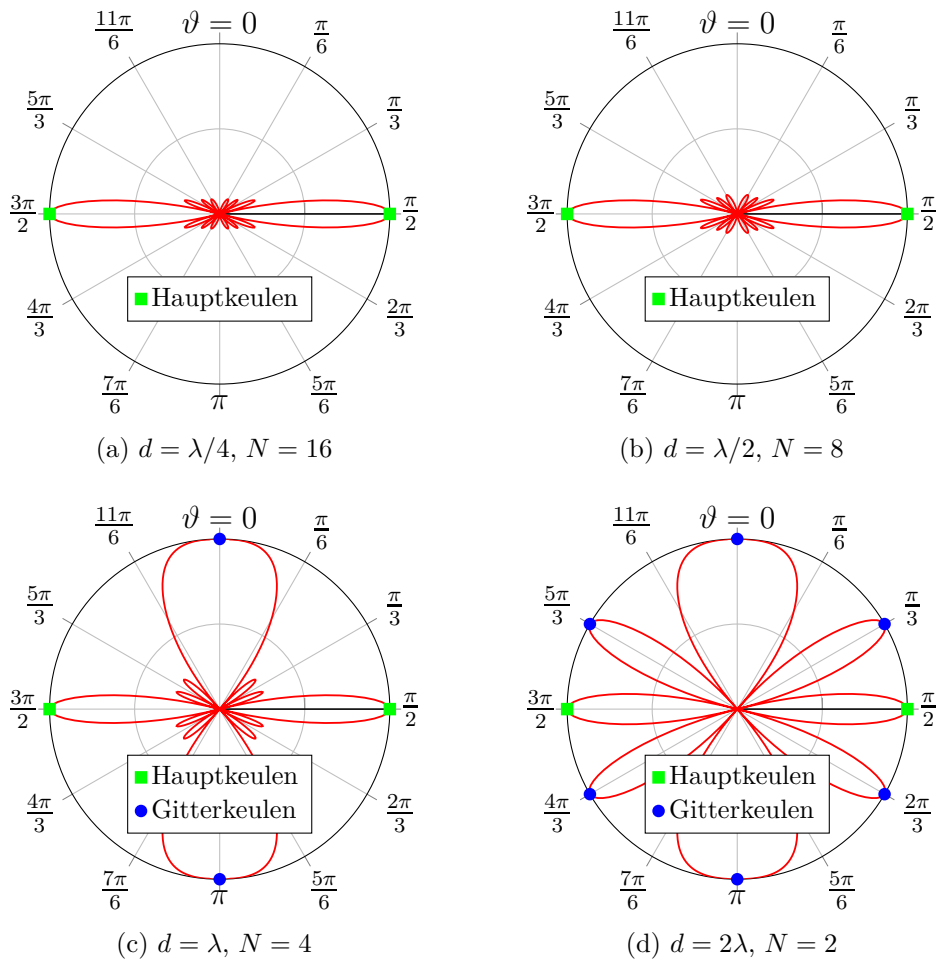


Abbildung 5.13.: Einfluss des Antennenelementabstands d auf die Gruppenrichtcharakteristik $C_G(\vartheta)$ einer linearen Gruppenantenne mit konstanter Strombelegung $I_n = I_0, n = 0 \dots N - 1$. Die Größe der gesamten Apertur ist konstant $Nd = 4\lambda$. Bei kleinem Antennenelementabstand d konvergiert die Gruppenrichtcharakteristik $C_G(\vartheta)$ gegen die sich bei einer kontinuierlichen Strombelegung ergebenden Richtcharakteristik, vergleiche Abbildung C.6b. Man beachte, dass die Richtcharakteristik in Abbildung C.6b zusätzlich mit der Elementrichtcharakteristik $C_E(\vartheta) = |\sin(\vartheta)|$ gewichtet ist, was jedoch nur im Bereich der Nebenseiten (Side Lobes) sichtbar ist. Unterabtasten führt zu als Gitterkeulen (Grating Lobes) bezeichneten periodischen Wiederholungen der Hauptkeulen (Main Lobes)

Gruppenrichtungsfaktor Man erhält den Gruppenrichtungsfaktor⁵

$$\begin{aligned} \underline{E}_G(\beta_d) &= \underline{L}_0 \frac{1 - e^{-jN\psi} e^{jN\beta_d}}{1 - e^{-j\psi} e^{j\beta_d}} = \underline{L}_0 e^{j\frac{N-1}{2}(\beta_d - \psi)} \frac{e^{-j\frac{N}{2}(\beta_d - \psi)} - e^{j\frac{N}{2}(\beta_d - \psi)}}{e^{-j\frac{1}{2}(\beta_d - \psi)} - e^{j\frac{1}{2}(\beta_d - \psi)}} \\ &= N \underline{L}_0 e^{j\frac{N-1}{2}(\beta_d - \psi)} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{N}{2}(\beta_d - \psi)\right)}{N \sin\left(\frac{1}{2}(\beta_d - \psi)\right)}}_{\text{di}_N(\beta_d - \psi)}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Die hier auftretende Funktion $\text{di}_N(\cdot)$ wird als Dirichlet-Kern bezeichnet.

Hauptstrahlrichtung In der Hauptstrahlrichtung

$$\beta_{d,\max} = \psi \quad (5.49)$$

des Gruppenrichtungsfaktors $\underline{E}_G(\beta_d)$ werden die geometriebedingten Phasenverschiebungen durch das Phasendekrement ψ kompensiert, siehe (5.48). Mit (5.44) findet man den zugehörigen Azimutwinkel

$$\vartheta_{\max} = \arccos\left(\frac{\psi}{\beta d}\right). \quad (5.50)$$

Der Maximalwert des Betrags des Gruppenrichtungsfaktors $\underline{E}_G(\beta_d)$ ergibt sich aus (5.48) mit der de l'Hospital'schen Regel zu⁶

$$|\underline{E}_G|_{\max} = N |\underline{L}_0|. \quad (5.51)$$

Bei größeren Abständen $d > \lambda/2$ der Antennenelemente kann es weitere als Gitterkeulen bezeichnete sichtbare periodische Wiederholungen der Hauptkeule geben. Die Hauptstrahlrichtung der Gruppenantenne weicht bei nicht omnidirektionalen Antennenelementen mehr oder weniger stark von der hier berechneten Hauptstrahlrichtung des Gruppenrichtungsfaktors $\underline{E}_G(\beta_d)$ ab.

Nullstellen Nullstellen des Gruppenrichtungsfaktors $\underline{E}_G(\beta_d)$ gemäß (5.48) ergeben sich, sofern keine Gitterkeulen auftreten, für

$$\sin\left(\frac{N}{2}(\beta_{d,0} - \psi)\right) = 0,$$

⁵ Es wird die Summenformel $\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}$ der endlichen geometrischen Reihe verwendet.

⁶ Es gilt $\text{di}_N(0) = 1$.

das heißt

$$\beta_{d,0} = \frac{2m\pi}{N} + \psi, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.52)$$

Mit (5.44) findet man die zugehörigen Azimutwinkel

$$\vartheta_0 = \arccos\left(\frac{\frac{2m\pi}{N} + \psi}{\beta d}\right), \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.53)$$

Richtfaktor Es sei vorausgesetzt, dass die Hauptstrahlrichtungen der Elementrichtcharakteristik $C_E(\beta_d)$ und der Gruppenrichtcharakteristik $C_G(\beta_d)$ zusammenfallen. In der Hauptstrahlrichtung überlagern sich die elektromagnetischen Felder der Antennenelemente konstruktiv, das heißt die von der Gruppenantenne abgestrahlten Feldstärken in Hauptstrahlrichtung sind N -mal so groß wie die von einem einzigen Antennenelement abgestrahlten Feldstärken. Die Strahlungsleistungsdichte S ist folglich um den Faktor N^2 erhöht. Wenn man noch berücksichtigt, dass die von der Gruppenantenne insgesamt abgestrahlte Leistung P das N -fache der von einem einzigen Antennenelement abgestrahlten Leistung ist, ergibt sich der Richtfaktor der Gruppenantenne zu

$$D = D_E N, \quad (5.54)$$

wobei D_E der Richtfaktor des Antennenelements ist.

Gruppenrichtcharakteristik Die Gruppenrichtcharakteristik erhält man gemäß (5.41) durch Normieren des Betrags des Gruppenrichtungsfaktors (5.48) auf seinen Maximalbetrag $|L_0| N$:

$$C_G(\beta_d) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn(\beta_d - \psi)} \right| = |\text{di}_N(\beta_d - \psi)|. \quad (5.55)$$

In Abbildung 5.14 sind die Gruppenrichtcharakteristiken $C_G(\vartheta)$ einiger exemplarischer linearer Gruppenantennen als Funktionen des Poldistanzwinkels ϑ dargestellt, siehe (5.44). Zum Ermitteln der Richtcharakteristiken $C(\vartheta)$ der Gruppenantennen wäre noch eine Wichtung mit der Elementrichtcharakteristik $C_E(\vartheta)$ erforderlich.

Aufgabe 5.4 Es wird eine lineare Gruppenantenne aus N omnidirektionalen Antennenelementen mit einer Strombelegung konstanten Phasendekrements ψ betrachtet. Berechnen Sie mit (5.9) den Richtfaktor D aus der Richtcharakteristik

$$C(\vartheta) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn(\beta d \cos(\vartheta) - \psi)} \right|$$

Wie erklären Sie sich die Abweichung zu dem in (5.54) angegebenen Wert $D = N$?

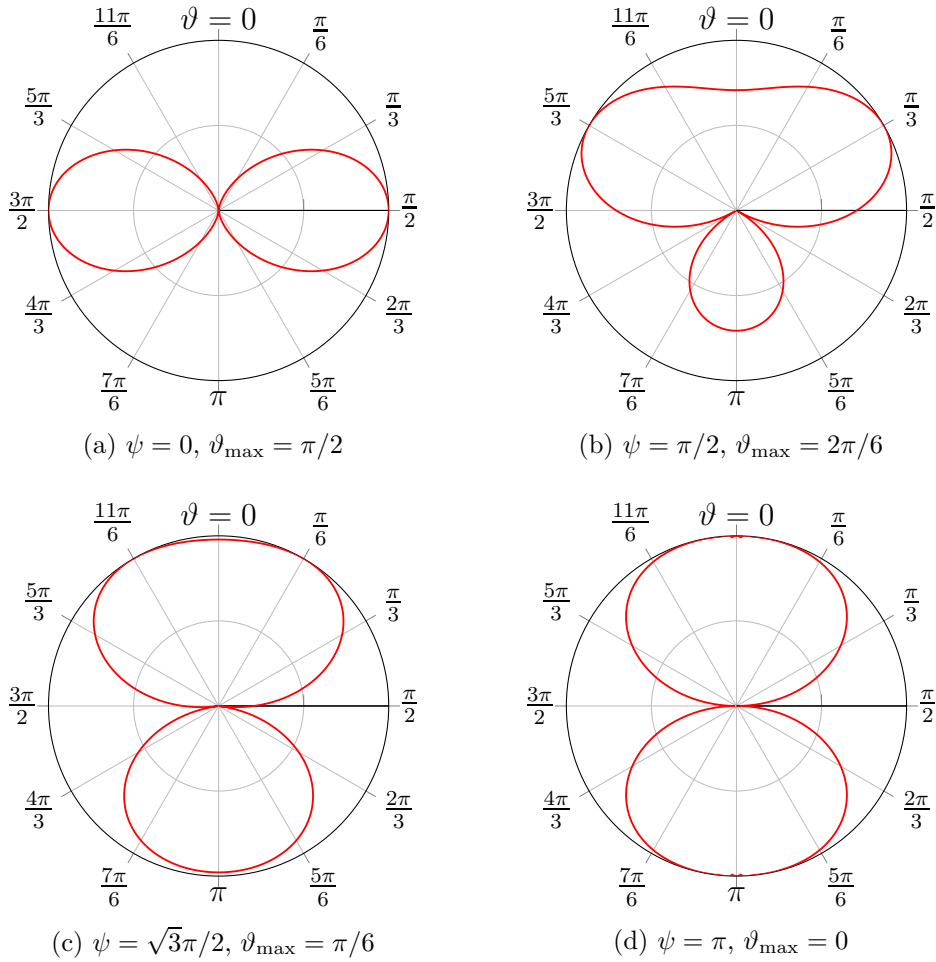


Abbildung 5.14.: Schwenken der Hauptstrahlrichtung der Gruppenrichtcharakteristik $C_G(\vartheta)$ einer linearen Gruppenantenne mit zwei Antennenelementen durch Einstellen des Phasendekrements ψ . Antennenelementabstand $d = \lambda/2$

Kapitel 6.

Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

6.1. Freiraumausbreitung

6.1.1. Wirkfläche

Eine als Empfangsantenne betriebene Antenne sei einer einfallenden ebenen homogenen Welle ausgesetzt. Die Antenne gibt dann an den Empfänger eine Empfangsleistung P_R ab, die proportional zur Strahlungsleistungsdichte S der einfallenden ebenen homogenen Welle ist. Bei sowohl bezüglich der Raumrichtung optimaler Ausrichtung als auch bezüglich der Polarisierung optimaler Anpassung der Antenne und bei Leistungsanpassung gibt die Antenne die Empfangsleistung

$$P_R = SA_R \quad (6.1)$$

an den Empfänger ab. Der Proportionalitätsfaktor A_R hat die Einheit einer Fläche und wird als Wirkfläche der Antenne bezeichnet. Die Wirkfläche A_R entspricht im Allgemeinen nicht der geometrischen Querschnittsfläche der Antenne. Nur bei großen Aperturantennen entspricht die Wirkfläche A_R näherungsweise der geometrischen Querschnittsfläche der Antenne.

6.1.2. Empfangsleistung

Es wird die in Abbildung 6.1 gezeigte Funkübertragungsstrecke betrachtet. Der Abstand r zwischen Sender und Empfänger sei groß im Vergleich zur Wellenlänge λ und zu den Antennenabmessungen, das heißt der Empfänger befindet sich im Fernfeld des Senders.

Sowohl der Sender als auch der Empfänger seien leistungsangepasst. Die vom Sender an die Sendeantenne abgegebene Sendeleistung ist P_T . Mit dem Gewinn G_T der Sendeantenne ist die vom Sender am Ort des Empfängers erzeugte Strahlungsleistungsdichte bei optimaler Ausrichtung der Sendeantenne

$$S = \frac{P_T}{4\pi r^2} G_T, \quad (6.2)$$

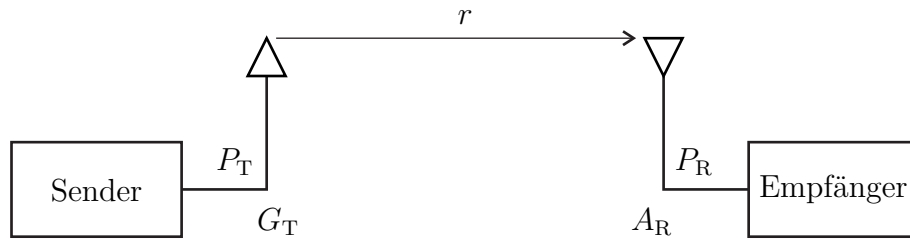


Abbildung 6.1.: Funkübertragungsstrecke

siehe (5.2) und (5.3). Die Empfangsleistung ergibt sich mit der Wirkfläche A_R der Empfangsantenne bei optimaler Ausrichtung der Empfangsantenne und bei Polarisationsanpassung zu

$$P_R = S A_R = \frac{P_T}{4\pi r^2} G_T A_R, \quad (6.3)$$

siehe (6.1). Die Empfangsleistung P_R nimmt mit $1/r^2$ ab, das heißt der Dämpfungsexponent ist zwei. Das Verhältnis

$$\frac{P_R}{P_T} = \frac{1}{4\pi r^2} G_T A_R \quad (6.4)$$

aus Empfangsleistung und Sendeleistung wird als Übertragungsfaktor bezeichnet. Der Übertragungsfaktor entspricht aufgrund der hier angenommenen Leistungsanpassungen dem in Abschnitt 12.4.6 eingeführtem maximalen verfügbaren Leistungsgewinn G_{MAG} der als Zweiter betrachteten Funkübertragungsstrecke.

6.1.3. Zusammenhang zwischen Gewinn und Wirkfläche

Der Funkkanal ist reziprok, weil die Antennen und die Szenarien, in denen sich die elektromagnetischen Wellen ausbreiten, praktisch ausschließlich aus linearen und isotropen Materialien bestehen. Jede Sendeantenne ist auch als Empfangsantenne nutzbar und umgekehrt. Insbesondere hängt der Übertragungsfaktor (6.4) einer Funkübertragungsstrecke nicht davon ab, welche der beiden Antennen als Sendeantenne und welche als Empfangsantenne genutzt wird. Es sind folglich zwei Übertragungsrichtungen zu vergleichen:

1. Antenne 1 mit dem Gewinn G_1 wird als Sendeantenne und Antenne 2 mit der Wirkfläche A_2 wird als Empfangsantenne genutzt. Der Übertragungsfaktor ergibt sich zu

$$\frac{P_R}{P_T} = \frac{1}{4\pi r^2} G_1 A_2.$$

2. Antenne 2 mit dem Gewinn G_2 wird als Sendeantenne und Antenne 1 mit der Wirkfläche A_1 wird als Empfangsantenne genutzt. Der Übertragungsfaktor ergibt sich zu

$$\frac{P_R}{P_T} = \frac{1}{4\pi r^2} G_2 A_1.$$

Aus der Gleichheit der beiden Ausdrücke folgt

$$\frac{A_1}{G_1} = \frac{A_2}{G_2}.$$

Das Verhältnis aus Gewinn G und Wirkfläche A ist für alle Antennen gleich.

Die Wirkfläche einer großen rechteckförmigen verlustfreien Aperturantenne mit konstanter Strombelegung entspricht der geometrischen Querschnittsfläche

$$A = ab.$$

Einsetzen des in (5.37) berechneten Richtfaktors D , der wegen der hier angenommenen Verlustfreiheit $\eta = 1$ dem Gewinn G entspricht, ergibt die für alle Antennen gültige Beziehung

$$\frac{A}{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \quad (6.5)$$

zwischen Gewinn und Wirkfläche. Üblicherweise wird in Datenblättern nur der Gewinn G einer Antenne angegeben. Die Wirkfläche A lässt sich dann einfach berechnen.

Man kann nun die Wirkfläche A_R als Funktion des Gewinns G_R in (6.3) einsetzen und erhält die Friis-Übertragungsgleichung [Fri46]

$$P_R = P_T \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 G_T G_R. \quad (6.6)$$

Die Empfangsleistung nimmt mit wachsender Kreisfrequenz ω , das heißt sinkender Wellenlänge λ quadratisch ab. Dies gilt jedoch nur, falls man Antennen konstanten Gewinns verwendet und nicht die Möglichkeit ausnutzt, bei höheren Kreisfrequenzen ω und damit kleineren Wellenlängen λ in einem gegebenen Bauvolumen Antennen größeren Gewinns zu realisieren.

Aufgabe 6.1 *Im Fernfeld einer Sendeantenne im Abstand $r = 1000$ m befindet sich eine Empfangsantenne. Die Sendeleistung sei $P_T = 100$ W. Es werde angenommen, dass die Sendeantenne omnidirektional ist. Die Empfangsantenne sei auf die Sendeantenne optimal ausgerichtet, polarisationsangepasst und an den Empfängereingang leistungsangepasst. Die Wirkfläche der Empfangsantenne sei $A_R = 1$ m². Der Gewinn der Empfangsantenne sei $G_R = 10$. Bestimmen Sie die Wellenlänge λ , die Strahlungsleistungsdichte S am Ort der Empfangsantenne und die Empfangsleistung P_R !*

6.1.4. Polarimetrische Analyse der Freiraumausbreitung

Nun werden beliebig ausgerichtete Antennen beliebiger Polarisations-eigenschaften betrachtet. Die senderseitigen und empfängerseitigen lokalen Koordinatensysteme seien im Raum parallel ausgerichtet, siehe Abbildung 6.2.

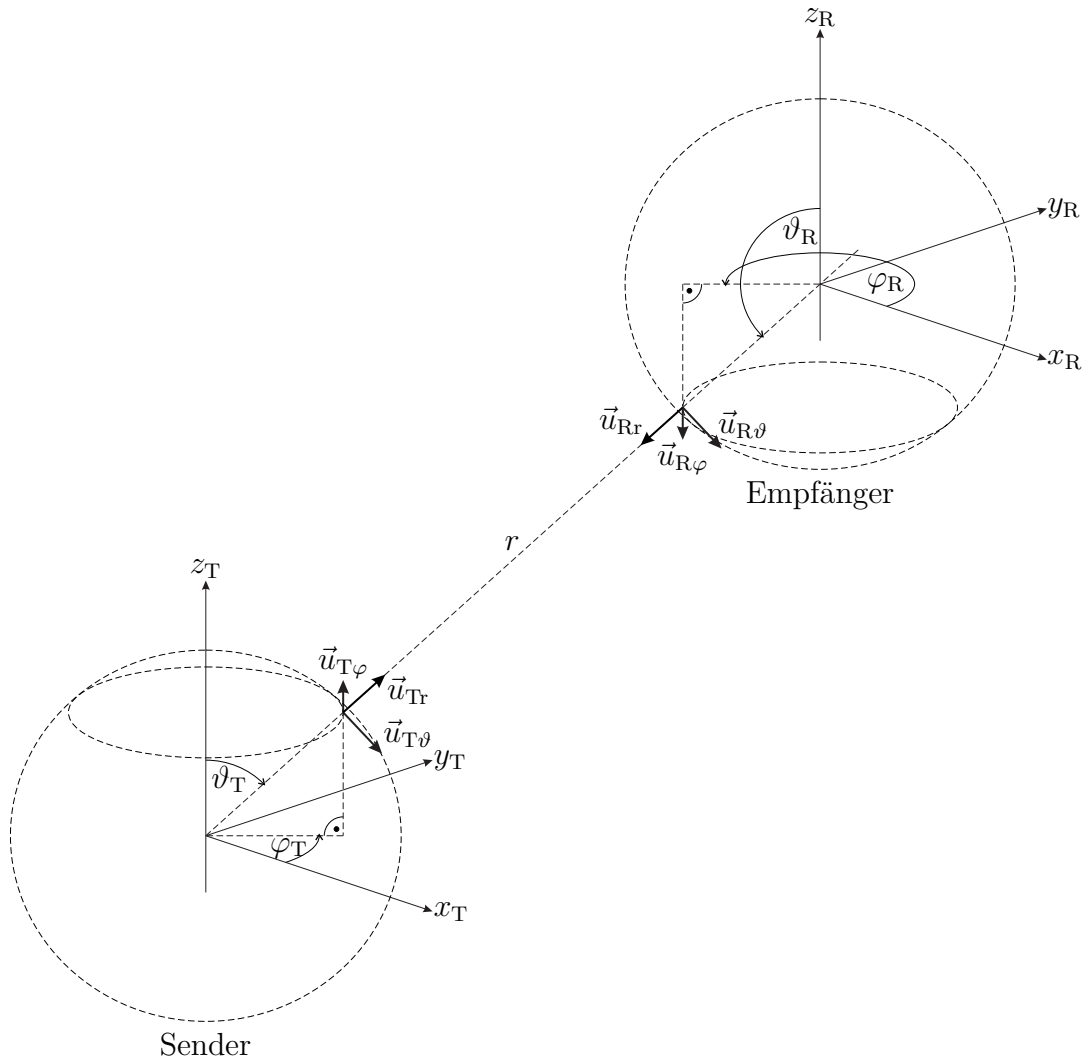


Abbildung 6.2.: Senderseitiges und empfängerseitiges lokales Koordinatensystem

Beim Berechnen der Empfangsleistung sind die vektoriellen komplexen Richtcharakteristiken der Sendeantenne $\underline{C}_T(\vartheta_T, \varphi_T)$ in Ausfallsrichtung ϑ_T, φ_T und der Empfangsantenne $\underline{C}_R(\vartheta_R, \varphi_R)$ in Einfallrichtung ϑ_R, φ_R zu berücksichtigen. Gemäß der Definition (5.11) der vektoriellen komplexen Richtcharakteristik der Sendeantenne ergibt sich die ϑ - oder φ -Komponente der elektrischen Feldstärke

am im Fernfeld befindlichen Ort der Empfangsantenne zu

$$\underline{E}_{\vartheta\varphi} = \|\underline{\vec{E}}\|_{\max} \underline{C}_{T\vartheta\varphi}(\vartheta_T, \varphi_T) e^{-j\beta r}.$$

Der Beitrag der einzelnen Polarisationskomponenten zur Strahlungsleistungsdichte am Empfangsort ergibt sich mit (4.52) und (6.2) zu

$$\begin{aligned} S_{\vartheta\varphi} &= \frac{1}{2} \frac{1}{Z_F} |\underline{E}_{\vartheta\varphi}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{Z_F} \underbrace{\|\underline{\vec{E}}\|_{\max}^2}_{S_{\max}} |\underline{C}_{T\vartheta\varphi}(\vartheta_T, \varphi_T) e^{-j\beta r}|^2 \\ &= \frac{P_T G_T}{4\pi r^2} |\underline{C}_{T\vartheta\varphi}(\vartheta_T, \varphi_T) e^{-j\beta r}|^2. \end{aligned}$$

Die aus dem Empfang einer einzigen Polarisationskomponente resultierende Empfangsleistung ergibt sich mit (6.1) und (6.5) unter Berücksichtigen der Richtwirkung und der Polarisationsigenschaften der Empfangsantenne gemäß (5.11) zu

$$\begin{aligned} P_{R\vartheta\varphi} &= S_{\vartheta\varphi} |\underline{C}_{R\vartheta\varphi}(\vartheta_R, \varphi_R)|^2 \underbrace{G_R \frac{\lambda^2}{4\pi}}_{A_R} \\ &= P_T \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 G_T G_R |\underline{C}_{R\vartheta\varphi}(\vartheta_R, \varphi_R) e^{-j\beta r} \underline{C}_{T\vartheta\varphi}(\vartheta_T, \varphi_T)|^2. \end{aligned}$$

Überlagern der Empfangssignale der beiden Polarisationskomponenten ergibt die gesamte Empfangsleistung

$$\begin{aligned} P_R &= P_{R\vartheta} + P_{R\varphi} \\ &= P_T \left(\frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 G_T G_R \\ &\quad \left| \underline{C}_{T\vartheta}(\vartheta_T, \varphi_T) \frac{e^{-j\beta r}}{r} \underline{C}_{R\vartheta}(\vartheta_R, \varphi_R) - \underline{C}_{T\varphi}(\vartheta_T, \varphi_T) \frac{e^{-j\beta r}}{r} \underline{C}_{R\varphi}(\vartheta_R, \varphi_R) \right|^2 \quad (6.7) \\ &= P_T \left(\frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 G_T G_R \left| \underline{C}_R^T(\vartheta_R, \varphi_R) \cdot \underbrace{\frac{e^{-j\beta r}}{r} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{C}_T(\vartheta_T, \varphi_T) \right|^2. \end{aligned}$$

Man beachte, dass die senderseitigen und empfängerseitigen Einheitsvektoren in φ -Richtung entgegengesetzt gerichtet sind, siehe Abbildung 6.2. Die Transfermatrix $\underline{\mathbf{T}}$ beschreibt die Amplitudenabnahmen und die Phasendrehungen der Polarisationskomponenten auf dem Ausbreitungspfad. Da der Polarisationszustand

einer elektromagnetischen Welle bei Freiraumausbreitung unverändert bleibt und die Koordinatensysteme parallel ausgerichtet sind, sind die Nichtdiagonalelemente der Transfermatrix $\underline{\mathbf{T}}$ hier Null.

Für das Skalarprodukt in (6.7) gilt gemäß der Schwarzschen Ungleichung

$$\left| \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{T}}(\vartheta_{\mathbf{R}}, \varphi_{\mathbf{R}}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{T}}(\vartheta_{\mathbf{T}}, \varphi_{\mathbf{T}}) \right| \leq \|\underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{R}}(\vartheta_{\mathbf{R}}, \varphi_{\mathbf{R}})\| \|\underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{T}}(\vartheta_{\mathbf{T}}, \varphi_{\mathbf{T}})\|. \quad (6.8)$$

Gleichheit gilt bei Polarisationsanpassung

$$\underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{R}}(\vartheta_{\mathbf{R}}, \varphi_{\mathbf{R}}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{T}}(\vartheta_{\mathbf{T}}, \varphi_{\mathbf{T}})^*. \quad (6.9)$$

Wenn die Antennen weiterhin optimal ausgerichtet sind

$$\|\underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{R}}(\vartheta_{\mathbf{R}}, \varphi_{\mathbf{R}})\| = \|\underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{T}}(\vartheta_{\mathbf{T}}, \varphi_{\mathbf{T}})\| = 1,$$

gilt für das Skalarprodukt in (6.7)

$$\left| \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{T}}(\vartheta_{\mathbf{R}}, \varphi_{\mathbf{R}}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{T}}(\vartheta_{\mathbf{T}}, \varphi_{\mathbf{T}}) \right| = \|\underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{R}}(\vartheta_{\mathbf{R}}, \varphi_{\mathbf{R}})\| \|\underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{T}}(\vartheta_{\mathbf{T}}, \varphi_{\mathbf{T}})\| = 1 \quad (6.10)$$

und die polarimetrische Berechnungsformel (6.7) geht in die konventionelle skalare Berechnungsformel (6.6) über.

6.2. Reflexion und Transmission an Grenzflächen

6.2.1. Schräger Einfall einer ebenen homogenen Welle

Zunächst wird eine einzige, schräg auf eine ebene Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika einfallende, ebene homogene Welle betrachtet. Das Koordinatensystem wird vereinfachend so gewählt, dass sich die Grenzfläche bei $z = 0$ befindet und die Einfallsebene der x - z -Ebene entspricht, siehe Abbildung 6.3. Die Einfallsrichtung wird durch den Poldistanzwinkel ϑ beschrieben.

Der in die Ausbreitungsrichtung zeigende Phasenvektor gemäß (2.13) hat die x -Komponente

$$\beta_x = \beta \sin(\vartheta) = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \sin(\vartheta) \quad (6.11)$$

und die z -Komponente

$$\beta_z = \beta \cos(\vartheta) = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \cos(\vartheta).$$

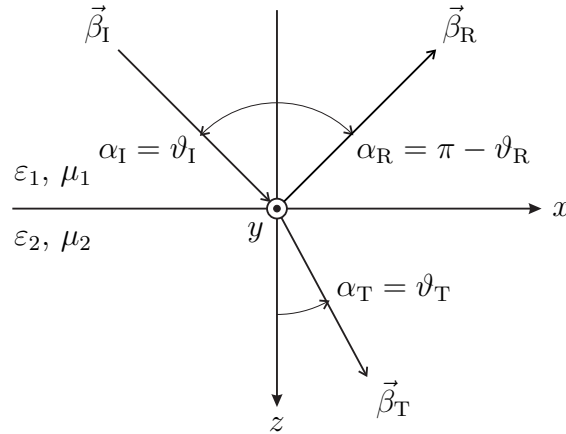


Abbildung 6.3.: Einfallende, reflektierte und transmittierte elektromagnetische Welle

Es wurde jeweils die Phasenkonstante β gemäß (2.24) eingesetzt.

Mit (2.14) und (2.15) folgt für die Feldstärken

$$\underline{\vec{H}} = \underline{\vec{H}}_0 e^{-j\langle\vec{\beta},\vec{r}\rangle} = \underline{\vec{H}}_0 e^{-j\beta_x x} e^{-j\beta_z z} \quad (6.12)$$

und

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{-j\langle\vec{\beta},\vec{r}\rangle} = \underline{\vec{E}}_0 e^{-j\beta_x x} e^{-j\beta_z z} . \quad (6.13)$$

Das Erfüllen der Grenzflächenbedingungen erfordert neben der einfallenden ebenen homogenen Welle im Allgemeinen auch die Existenz einer reflektierten und einer transmittierten ebenen homogenen Welle.

Die Grenzflächenbedingungen können nur dann gleichzeitig in allen Punkten $z = 0$ der Grenzfläche erfüllt sein, wenn die x -Komponenten der Phasenvektoren, das heißt die Komponenten in Richtung der Grenzfläche, für alle drei ebenen homogenen Wellen gleich sind. Beim Betrachten von elektromagnetischen Wellen an Grenzflächen ist es weiterhin üblich, die Einfallswinkel und die Ausfallswinkel bezüglich der Grenzflächennormalen zu messen, siehe Abbildung 6.3. Mit (6.11) folgt

$$\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} \sin(\alpha_I) = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1} \sin(\alpha_R) = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2} \sin(\alpha_T) .$$

Das heißt der Einfallswinkel α_I ist gleich dem Ausfallswinkel α_R der reflektierten ebenen homogenen Welle und für den Ausfallswinkel der transmittierten ebenen homogenen Welle gilt das Snelliussche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin(\alpha_I)}{\sin(\alpha_T)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}} . \quad (6.14)$$

Es folgt

$$\sin(\alpha_T) = \sin(\alpha_I) \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}}.$$

Für

$$\sin(\alpha_I) \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}} > 1,$$

das heißt

$$\alpha_I > \alpha_G = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}\right), \quad (6.15)$$

hat diese Gleichung keine Lösung. Es tritt Totalreflexion auf. Den Winkel α_G bezeichnet man als Grenzwinkel der Totalreflexion.

Jede beliebig polarisierte ebene homogene Welle lässt sich in eine linear senkrecht zur Einfallsebene und eine linear parallel zur Einfallsebene polarisierte ebene homogene Welle zerlegen. Im Folgenden werden die beiden beschriebenen linearen Polarisationszustände getrennt betrachtet, siehe Abbildung 6.4 und Abbildung 6.5.

6.2.2. Fresnelsche Formeln

6.2.2.1. Senkrechte Polarisation

Die Fresnelschen Formeln dienen dem Berechnen der Reflexionsfaktoren und der Transmissionsfaktoren. Im Folgenden sei der Fall der Totalreflexion ausgeschlossen. Die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärken entsprechen im hier betrachteten Fall der zur Einfallsebene senkrechten Polarisation den y -Komponenten, die auch die einzigen vorhandenen Komponenten der elektrischen Feldstärken sind. Die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärken entsprechen den x -Komponenten. Die magnetischen Feldstärken kann man mit den Feldwellenwiderständen aus den elektrischen Feldstärken berechnen, siehe (2.28). Durch Projektion erhält man die x -Komponenten der magnetischen Feldstärken:

$$\begin{aligned} \underline{H}_{I0x} &= -\underline{E}_{I0y} \frac{\cos(\alpha_I)}{Z_{F1}}, \\ \underline{H}_{R0x} &= \underline{E}_{R0y} \frac{\cos(\alpha_I)}{Z_{F1}}, \\ \underline{H}_{T0x} &= -\underline{E}_{T0y} \frac{\cos(\alpha_T)}{Z_{F2}}. \end{aligned}$$

Das Verhältnis der Tangentialkomponenten, das heißt der zur z -Richtung senkrechten Komponenten, von zueinander gehörenden elektrischen Feldstärken und

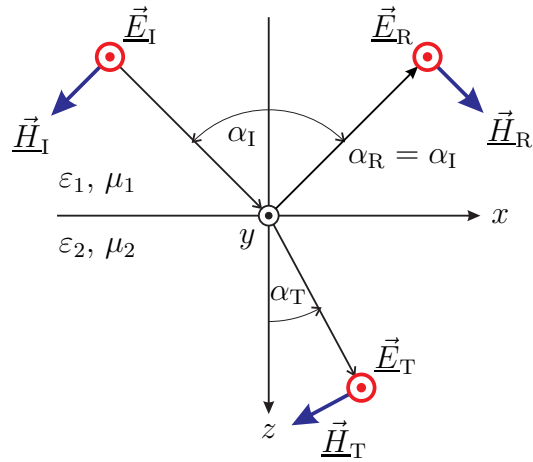


Abbildung 6.4.: Elektrische Feldstärken senkrecht zur Einfallsebene

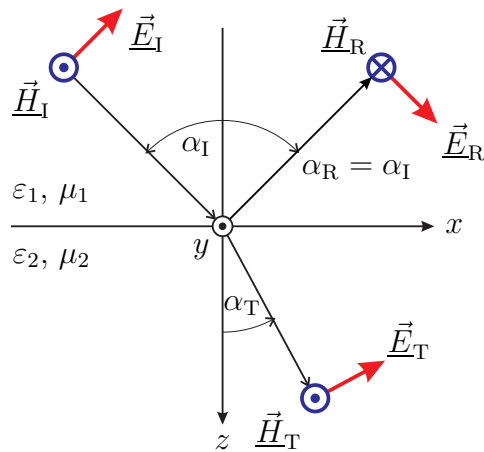


Abbildung 6.5.: Elektrische Feldstärken parallel zur Einfallsebene

magnetischen Feldstärken wird durch die Feldwellenwiderstände in z -Richtung

$$Z_{F1z} = \frac{Z_{F1}}{\cos(\alpha_I)} = -\frac{\underline{E}_{I0y}}{\underline{H}_{I0x}} = \frac{\underline{E}_{R0y}}{\underline{H}_{R0x}} \quad (6.16)$$

und

$$Z_{F2z} = \frac{Z_{F2}}{\cos(\alpha_T)} = -\frac{\underline{E}_{T0y}}{\underline{H}_{T0x}} \quad (6.17)$$

beschrieben.

Der Reflexionsfaktor für senkrechte Polarisation wird als

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\underline{E}_{R0y}}{\underline{E}_{I0y}} = -\frac{\underline{H}_{R0x}}{\underline{H}_{I0x}}$$

definiert. An der Grenzfläche müssen die resultierenden Tangentialkomponenten der Feldstärken gemäß (1.62) und (1.64) stetig sein. Daraus folgt, dass auch die Wellenimpedanzen

$$\underline{Z}_1 = -\frac{\underline{E}_{I0y} + \underline{E}_{R0y}}{\underline{H}_{I0x} + \underline{H}_{R0x}} = -\frac{\underline{E}_{I0y}(1 + \Gamma_{\perp})}{\underline{H}_{I0x}(1 - \Gamma_{\perp})} = Z_{F1z} \frac{1 + \Gamma_{\perp}}{1 - \Gamma_{\perp}}$$

und

$$\underline{Z}_2 = -\frac{\underline{E}_{T0y}}{\underline{H}_{T0x}} = Z_{F2z}.$$

an der Grenzfläche stetig sein müssen. Gleichsetzen der Wellenimpedanzen ergibt

$$Z_{F2z} = Z_{F1z} \frac{1 + \Gamma_{\perp}}{1 - \Gamma_{\perp}}$$

und schließlich erhält man den Reflexionsfaktor

$$\Gamma_{\perp} = \frac{Z_{F2z} - Z_{F1z}}{Z_{F2z} + Z_{F1z}} \quad (6.18)$$

$$= \frac{Z_{F2} \cos(\alpha_I) - Z_{F1} \cos(\alpha_T)}{Z_{F2} \cos(\alpha_I) + Z_{F1} \cos(\alpha_T)} \quad (6.19)$$

für senkrechte Polarisation. Der in die Gleichung einzusetzende Ausfallswinkel α_T der transmittierten ebenen homogenen Welle ergibt sich aus dem Snelliusschen Brechungsgesetz (6.14). Abbildung 6.6 zeigt den Reflexionsfaktor Γ_{\perp} für senkrechte Polarisation als Funktion des Einfallswinkels α_I für einige exemplarische Grenzflächen. Für $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 1/2$ tritt ab einem Einfallswinkel von $\alpha_G = \pi/4$ Totalreflexion auf, siehe (6.15).

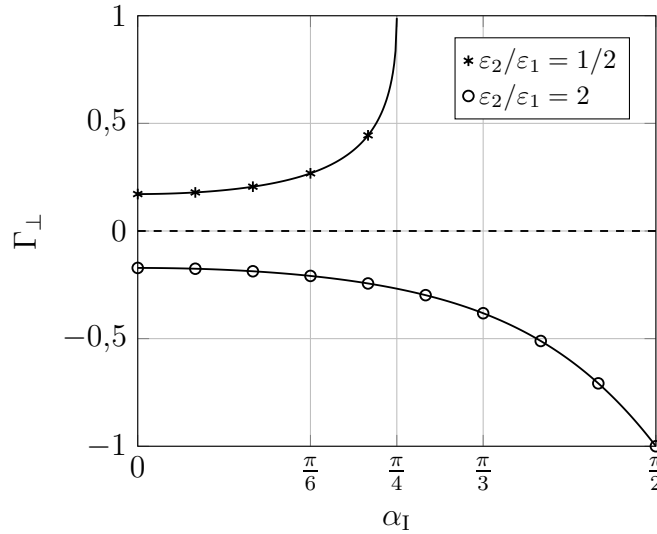


Abbildung 6.6.: Reflexionsfaktor Γ_{\perp} für senkrechte Polarisation. $\mu_1 = \mu_2$

Mit (1.62) folgt aus (6.19) der Transmissionsfaktor

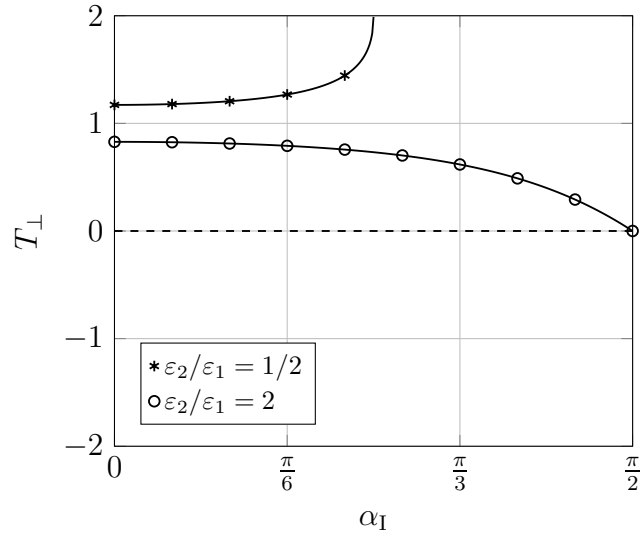
$$T_{\perp} = \frac{E_{T0y}}{E_{I0y}} = \frac{E_{I0y} + E_{R0y}}{E_{I0y}} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \Gamma_{\perp} = \frac{2Z_{F2z}}{Z_{F2z} + Z_{F1z}} \\ &= \frac{2Z_{F2} \cos(\alpha_I)}{Z_{F2} \cos(\alpha_I) + Z_{F1} \cos(\alpha_T)} \end{aligned} \quad (6.21)$$

für senkrechte Polarisation. Abbildung 6.7 zeigt den Transmissionsfaktor T_{\perp} für senkrechte Polarisation als Funktion des Einfallswinkels α_I für einige exemplarische Grenzflächen.

Man beachte, dass Reflexionsfaktoren und Transmissionsfaktoren stets bezüglich der elektrischen Feldstärken definiert sind. Der Transmissionsfaktor T_{\perp} für senkrechte Polarisation kann daher auch einen Betrag größer als eins annehmen, ohne dass dies im Widerspruch zur Energieerhaltung stünde. Es ist die durch die Grenzfläche transportierte Energie zu betrachten, das heißt es sind die Normalkomponenten der komplexen Poynting-Vektoren zu vergleichen.

Aufgabe 6.2 *Eine ebene homogene Welle falle schräg auf eine ebene Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika ein, so dass eine transmittierte und eine reflektierte ebene homogene Welle entstehen. Die einfallende ebene homogene Welle sei senkrecht polarisiert. Zeigen Sie, dass die Normalkomponenten der komplexen Poynting-Vektoren auf beiden Seiten der Grenzfläche gleich sind!*


 Abbildung 6.7.: Transmissionsfaktor T_{\perp} für senkrechte Polarisation. $\mu_1 = \mu_2$

6.2.2.2. Parallele Polarisation

Die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärken entsprechen im hier betrachteten Fall der zur Einfallsebene parallelen Polarisation den y -Komponenten, die auch die einzigen vorhandenen Komponenten der magnetischen Feldstärken sind. Die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärken entsprechen den x -Komponenten. Die elektrischen Feldstärken kann man mit den Feldwellenwiderständen aus den magnetischen Feldstärken berechnen, siehe (2.27). Durch Projektion erhält man die x -Komponenten der elektrischen Feldstärken:

$$\begin{aligned}\underline{E}_{I0x} &= \underline{H}_{I0y} Z_{F1} \cos(\alpha_I), \\ \underline{E}_{R0x} &= -\underline{H}_{R0y} Z_{F1} \cos(\alpha_I), \\ \underline{E}_{T0x} &= \underline{H}_{T0y} Z_{F2} \cos(\alpha_T).\end{aligned}$$

Das Verhältnis der Tangentialkomponenten, das heißt der zur z -Richtung senkrechten Komponenten, von zueinander gehörenden elektrischen Feldstärken und magnetischen Feldstärken wird durch die Feldwellenwiderstände in z -Richtung

$$Z_{F1z} = Z_{F1} \cos(\alpha_I) = \frac{\underline{E}_{I0x}}{\underline{H}_{I0y}} = -\frac{\underline{E}_{R0x}}{\underline{H}_{R0y}} \quad (6.22)$$

und

$$Z_{F2z} = Z_{F2} \cos(\alpha_T) = \frac{\underline{E}_{T0x}}{\underline{H}_{T0y}} \quad (6.23)$$

beschrieben. Man beachte, dass sich die Feldwellenwiderstände in z -Richtung für den Fall senkrechter und paralleler Polarisation unterscheiden, vergleiche (6.16) und (6.17).

Der Reflexionsfaktor für parallele Polarisation wird als

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\underline{E}_{R0x}}{\underline{E}_{I0x}} = -\frac{\underline{H}_{R0y}}{\underline{H}_{I0y}}$$

definiert. An der Grenzfläche müssen die Tangentialkomponenten der Feldstärken gemäß (1.62) und (1.64) stetig sein. Daraus folgt, dass auch die Wellenimpedanzen

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{E}_{I0x} + \underline{E}_{R0x}}{\underline{H}_{I0y} + \underline{H}_{R0y}} = \frac{\underline{E}_{I0x} (1 + \Gamma_{\parallel})}{\underline{H}_{I0y} (1 - \Gamma_{\parallel})} = Z_{F1z} \frac{1 + \Gamma_{\parallel}}{1 - \Gamma_{\parallel}}$$

und

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{E}_{T0x}}{\underline{H}_{T0y}} = Z_{F2z}.$$

an der Grenzfläche stetig sein müssen. Durch Gleichsetzen der Wellenimpedanzen \underline{Z}_1 und \underline{Z}_2 erhält man den Reflexionsfaktor

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{Z_{F2z} - Z_{F1z}}{Z_{F2z} + Z_{F1z}} \quad (6.24)$$

$$= \frac{Z_{F2} \cos(\alpha_T) - Z_{F1} \cos(\alpha_I)}{Z_{F2} \cos(\alpha_T) + Z_{F1} \cos(\alpha_I)} \quad (6.25)$$

für parallele Polarisation. Man beachte, dass sich als Funktionen der Feldwellenwiderstände in z -Richtung formal gleiche Ergebnisse für beide Polarisationszustände ergeben, vergleiche (6.18) und (6.24). Abbildung 6.8 zeigt den Reflexionsfaktor Γ_{\parallel} für parallele Polarisation als Funktion des Einfallswinkels α_I für einige exemplarische Grenzflächen. Den Einfallswinkel α_I , bei dem der Reflexionsfaktor Null wird, bezeichnet man als Brewster-Winkel α_B .

Mit (1.64) folgt aus (6.25) der Transmissionsfaktor

$$\begin{aligned} T_{\parallel} &= \frac{\underline{E}_{T0y}}{\underline{E}_{I0y}} = \frac{Z_{F2} \underline{H}_{T0y}}{Z_{F1} \underline{H}_{I0y}} = \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} \left(\frac{\underline{H}_{I0y} + \underline{H}_{R0y}}{\underline{H}_{I0y}} \right) = \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} (1 - \Gamma_{\parallel}) \\ &= \frac{2Z_{F2} \cos(\alpha_I)}{Z_{F2} \cos(\alpha_T) + Z_{F1} \cos(\alpha_I)} \end{aligned} \quad (6.26)$$

für parallele Polarisation. Abbildung 6.9 zeigt den Transmissionsfaktor T_{\parallel} für parallele Polarisation als Funktion des Einfallswinkels α_I für einige exemplarische Grenzflächen.

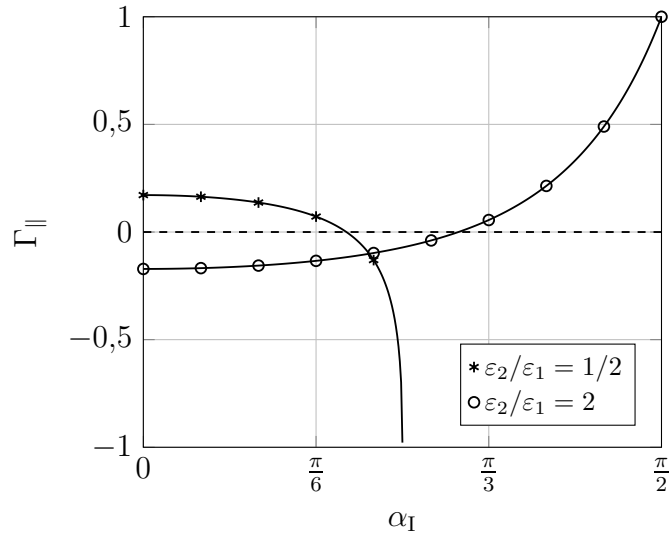


Abbildung 6.8.: Reflexionsfaktor $\Gamma_{||}$ für parallele Polarisation. $\mu_1 = \mu_2$

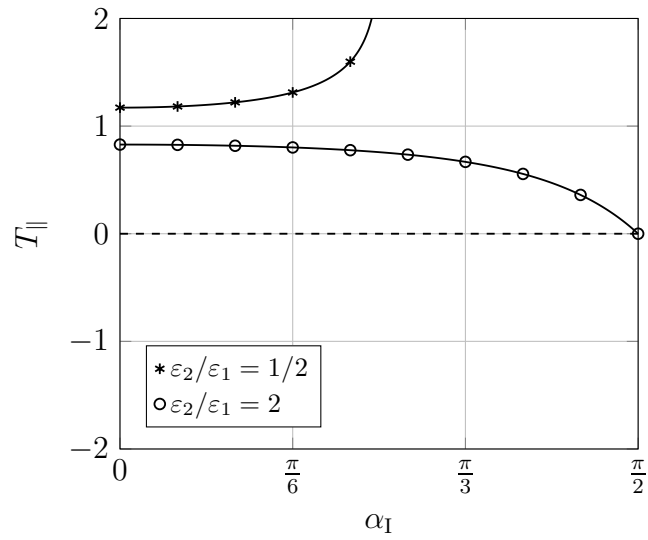


Abbildung 6.9.: Transmissionsfaktor $T_{||}$ für parallele Polarisation. $\mu_1 = \mu_2$

Aufgabe 6.3 Berechnen Sie den Brewster-Winkel α_B abhängig von den Eigenschaften der Dielektrika! Unterscheiden Sie hierbei die Fälle senkrechter und paralleler Polarisation. Betrachten Sie auch die Spezialfälle $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ bei senkrechter Polarisation und $\mu_1 = \mu_2$ bei paralleler Polarisation.

6.2.3. Reflexion am idealen elektrischen Leiter

Da im idealen elektrischen Leiter kein elektromagnetisches Feld existieren kann, existiert neben der einfallenden nur die reflektierte ebene homogene Welle. Der Transmissionsfaktor ist unabhängig von der Polarisation der einfallenden ebenen homogenen Welle

$$T = 0. \quad (6.27)$$

An der Grenzfläche muss die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke verschwinden, das heißt an der Grenzfläche müssen sich die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärken der einfallenden und der reflektierten ebenen homogenen Welle gegenseitig aufheben. Der Reflexionsfaktor an der Oberfläche eines idealen elektrischen Leiters ergibt sich somit unabhängig von der Polarisation der einfallenden ebenen homogenen Welle zu

$$\Gamma = -1. \quad (6.28)$$

6.2.4. Reflexion am idealen magnetischen Leiter

Da im idealen magnetischen Leiter ebenfalls kein elektromagnetisches Feld existieren kann, existiert auch hier neben der einfallenden nur die reflektierte ebene homogene Welle. Der Transmissionsfaktor ist unabhängig von der Polarisation der einfallenden ebenen homogenen Welle

$$T = 0. \quad (6.29)$$

An der Grenzfläche muss die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke verschwinden, das heißt an der Grenzfläche müssen sich die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärken der einfallenden und der reflektierten ebenen homogenen Welle gegenseitig aufheben. Der bezüglich der elektrischen Feldstärken definierte Reflexionsfaktor an der Oberfläche eines idealen magnetischen Leiters ergibt sich somit unabhängig von der Polarisation der einfallenden ebenen homogenen Welle zu

$$\Gamma = 1. \quad (6.30)$$

6.3. Streuung

6.3.1. Streuquerschnitt

Wenn eine elektromagnetische Welle auf einen als Streuer bezeichneten Körper trifft, so wird die elektromagnetische Welle an diesem gestreut, siehe Abbildung 6.10. Der Streuer selbst strahlt wieder eine elektromagnetische Welle ab. Im Gegensatz zur Reflexion an unendlich ausgedehnten ebenen Grenzflächen breitet sich die gestreute elektromagnetische Welle in alle Richtungen aus. Der Streuer befinde sich im Fernfeld des Senders und der Empfänger befinde sich im Fernfeld des Streuers. Die Antennen seien bezüglich der Raumrichtung optimal auf den Streuer ausgerichtet und bezüglich der Polarisation optimal angepasst.

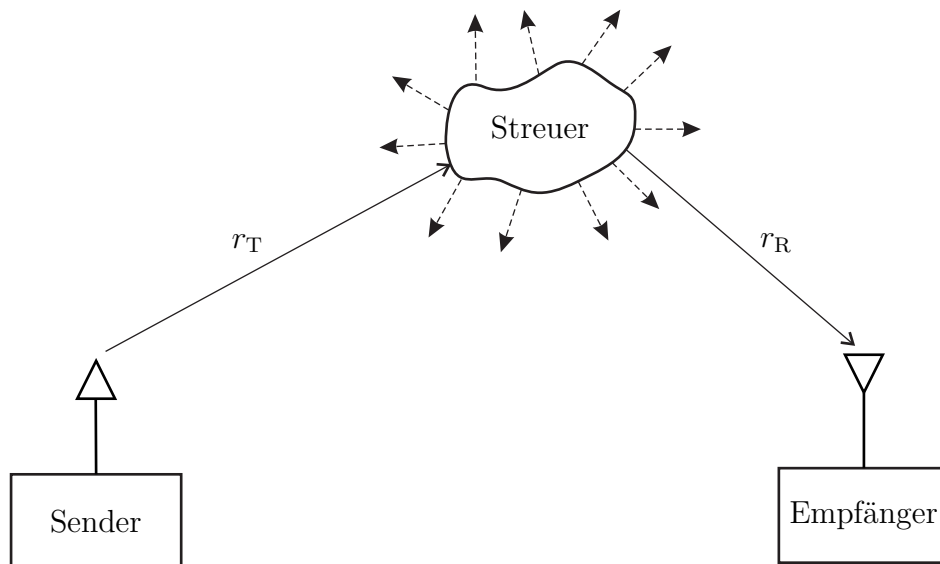


Abbildung 6.10.: Streuung

Mit der Sendeleistung P_T ist die auf den Streuer einfallende Strahlungsleistungsdichte

$$S_I = \frac{P_T}{4\pi r_T^2} G_T,$$

siehe (6.2). Für den Empfänger erscheint der Streuer wie eine omnidirektionale Sendeantenne am Ort des Streuers mit der zur einfallenden Strahlungsleistungsdichte proportionalen Sendeleistung

$$P_S = S_I \sigma = \frac{P_T}{4\pi r_T^2} \sigma G_T. \quad (6.31)$$

Der Proportionalitätsfaktor σ hat die Einheit einer Fläche und wird als Streuquerschnitt bezeichnet. Die so berechnete äquivalente Sendeleistung P_S einer omnidirektionalen Sendeantenne in (6.6) eingesetzt ergibt die Empfangsleistung

$$\begin{aligned} P_R &= P_S \left(\frac{\lambda}{4\pi r_R} \right)^2 G_R \\ &= \frac{P_T \lambda^2}{(4\pi)^3 r_T^2 r_R^2} \sigma G_T G_R. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Der Streuquerschnitt σ hängt neben den Eigenschaften des Streuers von der Raumrichtung, aus der die elektromagnetische Welle einfällt, der Polarisation der einfallenden elektromagnetischen Welle und der betrachteten Ausfallsrichtung der gestreuten elektromagnetischen Welle ab. Im betrachteten Fernfeld ist der Streuquerschnitt σ jedoch von den Entfernungen r_T und r_R unabhängig. Mit der Strahlungsleistungsdichte S im Fernfeld gemäß (4.53), den Feldstärken \underline{E}_I und \underline{H}_I der einfallenden elektromagnetischen Welle und den Feldstärken \underline{E}_S und \underline{H}_S der gestreuten elektromagnetischen Welle erhält man die zu (6.31) äquivalente Definition

$$\sigma = 4\pi r_R^2 \frac{S_S}{S_I} = \lim_{r_R \rightarrow \infty} 4\pi r_R^2 \frac{\|\underline{E}_S\|^2}{\|\underline{E}_I\|^2} = \lim_{r_R \rightarrow \infty} 4\pi r_R^2 \frac{\|\underline{H}_S\|^2}{\|\underline{H}_I\|^2} \quad (6.33)$$

des Streuquerschnitts.

Streuereffekte beeinflussen maßgeblich die Wellenausbreitung in terrestrischen Mobilfunksystemen, in denen in der Regel keine direkte Sichtverbindung zwischen Sender und Empfänger besteht. In der Radartechnik wird der oben eingeführte Streuquerschnitt σ , bei dem sich Sender und Empfänger im Allgemeinen an unterschiedlichen Orten befinden, auch als bistatischer Streuquerschnitt bezeichnet. Von besonderer Bedeutung ist in der Radartechnik jedoch der Spezialfall, dass sich Sender und Empfänger am selben Ort befinden und die selbe Antenne verwenden, siehe Abbildung 6.11. In diesem Fall spricht man vom monostatistischen Streuquerschnitt. Im hier betrachteten Fall von Polarisationsanpassung und optimaler Ausrichtung der Antenne folgt aus (6.32) die Empfangsleistung

$$P_R = \frac{P_T \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} \sigma G^2. \quad (6.34)$$

Diese Gleichung ist auch unter dem Namen Radargleichung bekannt.

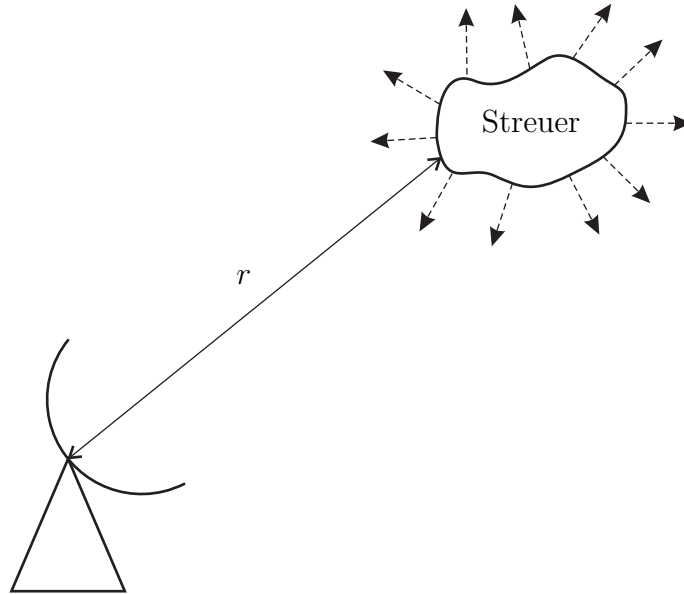


Abbildung 6.11.: Radar

6.3.2. Polarimetrische Streumatrix

Im Allgemeinen sind die Antennen weder bezüglich der Raumrichtung optimal auf den Streuer ausgerichtet noch bezüglich der Polarisation optimal angepasst. Zur Analyse dieses allgemeinen Szenarios müssen die Polarisationskomponenten der einfallenden elektromagnetischen Welle und der gestreuten elektromagnetischen Welle zunächst getrennt betrachtet werden und auch die Phasenlagen müssen berücksichtigt werden. Die senderseitigen, streuerseitigen und empfängerseitigen Koordinatensysteme seien auch hier wieder im Raum parallel ausgerichtet, siehe Abbildung 6.12.

Die Komponenten der elektrischen Feldstärke der einfallenden elektromagnetischen Welle am Ort des Streuers ergeben sich gemäß (5.11) zu

$$\underline{E}_{I\vartheta} = \left\| \vec{E} \right\|_{\max} \underline{C}_{T\vartheta}(\vartheta_T, \varphi_T) e^{-j\beta r_T}$$

und

$$\underline{E}_{I\varphi} = - \left\| \vec{E} \right\|_{\max} \underline{C}_{T\varphi}(\vartheta_T, \varphi_T) e^{-j\beta r_T}.$$

Man beachte die entgegengesetzt gerichteten Basisvektoren in φ -Richtung der lokalen Koordinatensysteme von Sender und Streuer. In Anlehnung an (6.33) definiert man zum vollständigen Charakterisieren der Streueigenschaften die kom-

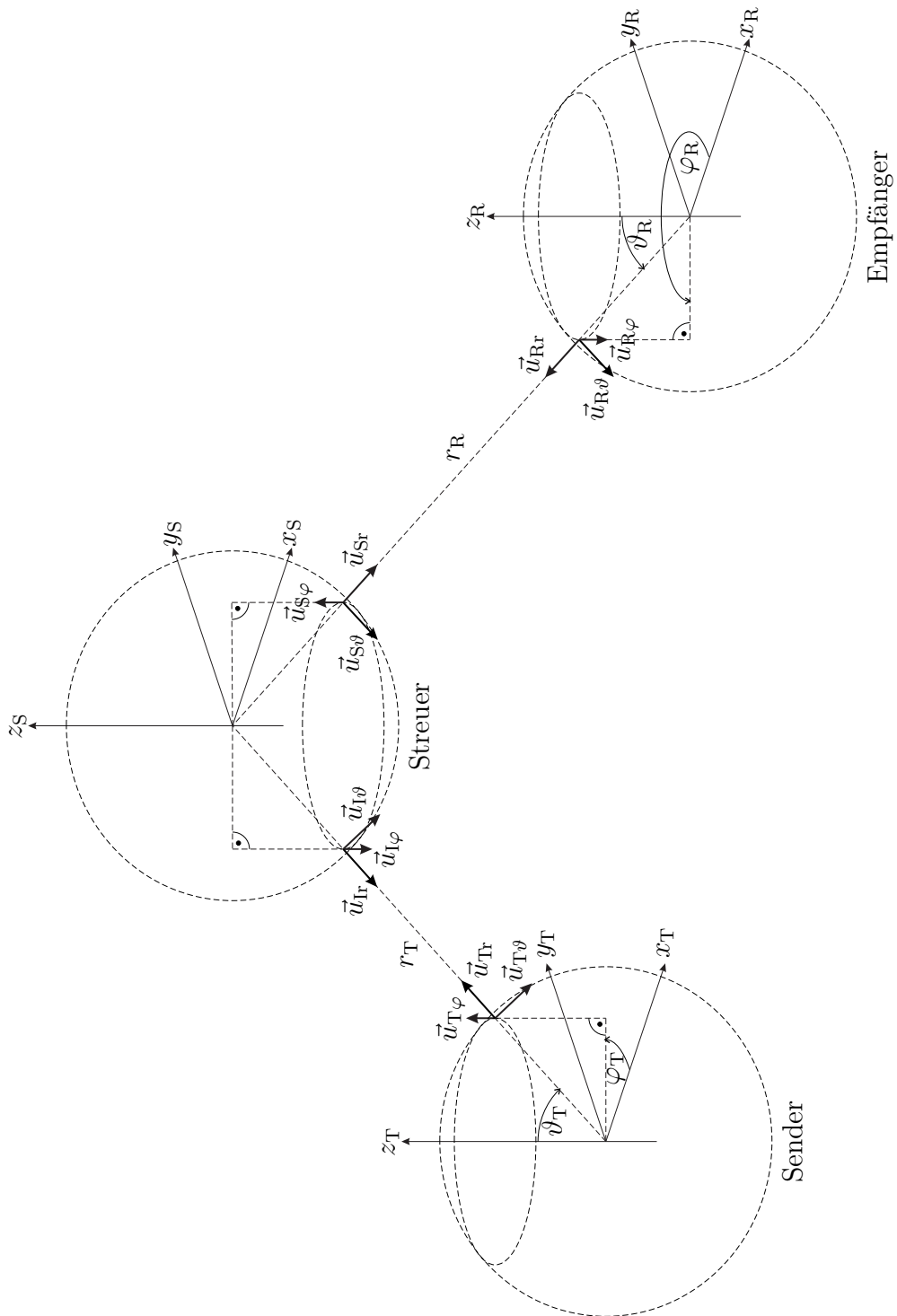


Abbildung 6.12.: Koordinatensysteme zum Beschreiben eines Streuers

plexen polarimetrischen Streuparameter

$$\underline{S}_{p,q} = \lim_{r_R \rightarrow \infty} r_R \frac{\underline{E}_{Sp}}{\underline{E}_{Iq}} e^{j\beta r_R}, \quad (6.35)$$

wobei p und q jeweils für ϑ oder φ stehen. Da die Feldstärken der gestreuten elektromagnetischen Welle im Fernfeld proportional zu $e^{-j\beta r_R} / r_R$ sind, vergleiche (4.48), ergibt sich ein definierter Grenzwert. Damit ergeben sich die Beiträge zu den Komponenten der elektrischen Feldstärke der gestreuten elektromagnetischen Welle am Ort des Empfängers in dessen lokalem Koordinatensystem zu

$$\underline{E}_{S\vartheta} = \underline{S}_{\vartheta,q} \underline{E}_{Iq} \frac{e^{-j\beta r_R}}{r_R}$$

und

$$\underline{E}_{S\varphi} = -\underline{S}_{\varphi,q} \underline{E}_{Iq} \frac{e^{-j\beta r_R}}{r_R}.$$

Man beachte auch hier wieder die entgegengesetzt gerichteten Basisvektoren in φ -Richtung der lokalen Koordinatensysteme von Streuer und Empfänger. Der Beitrag der einfallenden Polarisationskomponente q zur Strahlungsleistungsdichte der Polarisationskomponente p der gestreuten elektromagnetischen Welle am Empfangsort ergibt sich mit (4.52) und (6.2) zu

$$\begin{aligned} S_{Sp,q} &= \frac{1}{2} \frac{1}{Z_F} |\underline{E}_{Sp}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{Z_F} |\underline{E}_{Iq}|^2 \left| \underline{S}_{p,q} \frac{e^{-j\beta r_R}}{r_R} \right|^2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{Z_F} \|\vec{E}\|_{\max}^2}_{S_{\max}} \left| \underline{S}_{p,q} \underline{C}_{Tq}(\vartheta_T, \varphi_T) e^{-j\beta r_T} \frac{e^{-j\beta r_R}}{r_R} \right|^2 \\ &= \frac{P_T G_T}{4\pi} \left| \underline{S}_{p,q} \underline{C}_{Tq}(\vartheta_T, \varphi_T) \frac{e^{-j\beta r_T}}{r_T} \frac{e^{-j\beta r_R}}{r_R} \right|^2. \end{aligned}$$

Der Beitrag der einfallenden Polarisationskomponente q zur aus dem Empfang einer einzigen Polarisationskomponente p resultierenden Empfangsleistung ergibt sich mit (6.1) und (6.5) unter Berücksichtigen der Richtwirkung der Empfangsantenne gemäß (5.11) zu

$$\begin{aligned} P_{Rp,q} &= S_{Sp,q} \left| \underline{C}_{Rp}(\vartheta_R, \varphi_R) \right|^2 \underbrace{\frac{\lambda^2}{4\pi} G_R}_{A_R} \\ &= P_T \left(\frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 G_T G_R \left| \underline{S}_{p,q} \underline{C}_{Rp}(\vartheta_R, \varphi_R) \underline{C}_{Tq}(\vartheta_T, \varphi_T) \frac{e^{-j\beta r_T}}{r_T} \frac{e^{-j\beta r_R}}{r_R} \right|^2. \end{aligned}$$

Zum Darstellen der gesamten Empfangsleistung definiert man die komplexe polarimetrische Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \underline{S}_{\vartheta, \vartheta} & \underline{S}_{\vartheta, \varphi} \\ \underline{S}_{\varphi, \vartheta} & \underline{S}_{\varphi, \varphi} \end{pmatrix}. \quad (6.36)$$

Mit den in Abbildung 6.12 eingeführten parallel ausgerichteten lokalen Koordinatensystemen ergibt sich die gesamte Empfangsleistung unter Berücksichtigen der jeweils entgegengesetzt gerichteten Basisvektoren in φ -Richtung zu

$$P_R = P_T \left(\frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 G_T G_R \left| \underline{\mathbf{C}}_R^T(\vartheta_R, \varphi_R) \cdot \frac{e^{-j\beta r_R}}{r_R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \frac{e^{-j\beta r_T}}{r_T} \cdot \underline{\mathbf{C}}_T(\vartheta_T, \varphi_T) \right|^2. \quad (6.37)$$

Die Amplitudenabnahmen, Phasendrehungen und Kopplungen der Polarisationskomponenten auf dem Ausbreitungspfad können auch hier wieder mit einer Transfermatrix $\underline{\mathbf{T}}$ beschrieben werden.

Für den Spezialfall des monostatischen Radars ist die polarimetrische Streumatrix wegen der Reziprozität gemäß (9.9) symmetrisch

$$\underline{S}_{\vartheta, \varphi} = \underline{S}_{\varphi, \vartheta}.$$

Für die Empfangsleistung eines monostatischen Radarsystems folgt

$$\begin{aligned} P_R &= P_T \left(\frac{\lambda}{4\pi r^2} \right)^2 G^2 \left| \underline{\mathbf{C}}^T(\vartheta, \varphi) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{C}}(\vartheta, \varphi) \right|^2 \\ &= P_T \left(\frac{\lambda}{4\pi r^2} \right)^2 G^2 \left| \underline{C}_{\vartheta}^2(\vartheta, \varphi) \underline{S}_{\vartheta, \vartheta} - 2\underline{C}_{\vartheta}(\vartheta, \varphi) \underline{C}_{\varphi}(\vartheta, \varphi) \underline{S}_{\vartheta, \varphi} + \underline{C}_{\varphi}^2(\vartheta, \varphi) \underline{S}_{\varphi, \varphi} \right|^2, \end{aligned} \quad (6.38)$$

vergleiche (6.34).

6.4. Mehrwegeausbreitung

Insbesondere in terrestrischen Funkkommunikationssystemen befinden sich typischerweise viele Hindernisse in der Funkstrecke zwischen Sender und Empfänger. Die elektromagnetischen Wellen breiten sich dann auf P Pfaden mit Reflexionen,

Streuungen und Beugungen an Hindernissen vom Sender zum Empfänger aus, was man als Mehrwegeausbreitung bezeichnet. Jeder einzelne Ausbreitungspfad kann durch die Parameter

Ausfallsrichtung: $\vartheta_{\text{T}}^{(p)}, \varphi_{\text{T}}^{(p)}$ am Sender,

Transfermatrix: $\underline{\mathbf{T}}^{(p)}$ und

Einfallsrichtung: $\vartheta_{\text{R}}^{(p)}, \varphi_{\text{R}}^{(p)}$ am Empfänger

charakterisiert werden.

Das Empfangssignal ergibt sich durch lineares Überlagern der Empfangssignale aller P Pfade. Damit folgt für die Empfangsleistung

$$P_{\text{R}} = P_{\text{T}} \left(\frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 G_{\text{T}} G_{\text{R}} \left| \sum_{p=1}^P \underline{\mathbf{C}}_{\text{R}}^{\text{T}}(\vartheta_{\text{R}}^{(p)}, \varphi_{\text{R}}^{(p)}) \cdot \underline{\mathbf{T}}^{(p)} \cdot \underline{\mathbf{C}}_{\text{T}}(\vartheta_{\text{T}}^{(p)}, \varphi_{\text{T}}^{(p)}) \right|^2, \quad (6.39)$$

vergleiche (6.37). Man beachte, dass diese Gleichung nur für ein schmalbandiges Signal der Wellenlänge λ gilt. Die entfernungsbedingten relativen Phasenverschiebungen auf den Ausbreitungspfaden sind jedoch aufgrund der typischerweise großen Pfadlängenunterschiede stark frequenzabhängig. Damit ist auch die Amplitude des Empfangssignals nach Überlagerung der Pfade stark frequenzabhängig. Je nach relativer Phasenlage können sich Empfangssignalanteile verschiedener Pfade eher destruktiv auslöschen oder auch konstruktiv verstärken. Das Studium der Eigenschaften derartiger frequenzselektiver Mehrwegefunkkanäle ist ein wichtiges Thema in der Mobilkommunikation [GW98; Pae12]. Umfangreiche Programmpakete zur Analyse der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in unterschiedlichsten Szenarien und zum Berechnen der zu erwartenden Empfangsleistung gemäß (6.39) sind verfügbar.

Aufgabe 6.4 *In dem betrachteten Szenario befinden sich ein Sender und ein Empfänger über einer ideal elektrisch leitenden Ebene, siehe Abbildung 6.13. Die Funkwellen können sich dann über einen direkten Pfad und über einen an der ideal elektrisch leitenden Ebene reflektierten Pfad vom Sender zum Empfänger ausbreiten. Die Höhe des Senders über der ideal elektrisch leitenden Ebene sei h_{T} und die Höhe des Empfängers über der ideal elektrisch leitenden Ebene sei h_{R} . Der horizontale Abstand von Sender und Empfänger sei r . Sie können vereinfachend annehmen, dass der horizontale Abstand viel größer als die Höhen ist:*

$$r \gg h_{\text{T}}, h_{\text{R}}.$$

Es werden der Fall vertikaler und horizontaler linearer Polarisation unterschieden. Wenn man weiterhin omnidirektionale Antennen

$$G_T = G_R = 1$$

annimmt, entspricht dies den vektoriellen komplexen Richtcharakteristiken

$$\underline{C}_T = \underline{C}_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$\underline{C}_T = \underline{C}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie jeweils die Empfangsleistung P_R als Funktion der Sendeleistung P_T , der Wellenlänge λ , des horizontalen Abstands r und der Höhen h_T und h_R der Antennen!

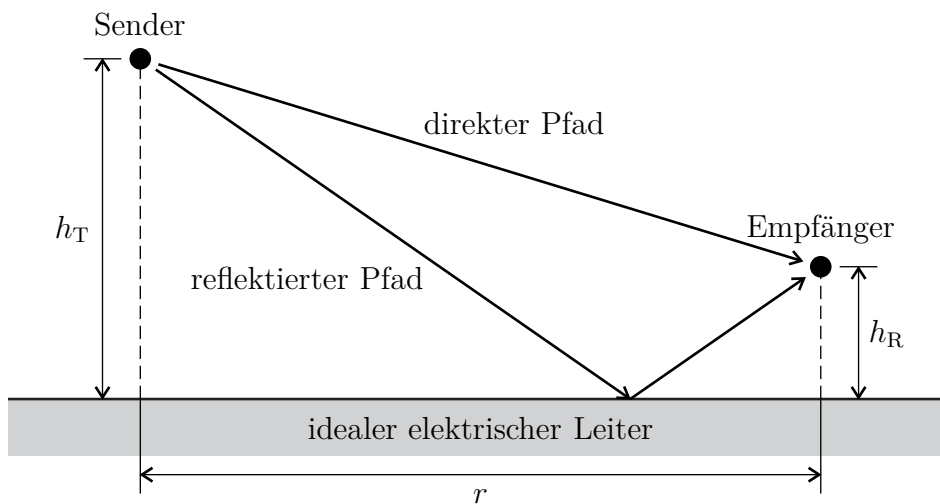


Abbildung 6.13.: Zweiwegeausbreitung

Teil II.

Wellenbasierte Modellierung

Kapitel 7.

Leitungstheorie

7.1. Komplexe Wellenamplitude

Bisher wurden Wellen je nach Typ durch die elektrische Feldstärke \vec{E} , die magnetische Feldstärke \vec{H} , die Spannung \underline{U} oder den Strom \underline{I} auf dem Wellenleiter beschrieben. Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, Wellenphänomene unabhängig vom Typ des Wellenleiters zu untersuchen. Hierzu wird zunächst der auch in vielen technischen Anwendungen relevante Fall betrachtet, dass sich auf dem Wellenleiter nur ein einziger Mode ausbreiten kann. Dies ist beispielsweise der transversalelektromagnetische Mode auf Zweileitersystemen und der $TE_{1,0}$ -Mode auf Rechteckhohlleitern bei Kreisfrequenzen ω unterhalb der kritischen Kreisfrequenz ω_c des jeweils nächsthöheren Modes. Es gibt dann im Allgemeinen neben einer sich in positive z -Richtung ausbreitenden Welle, die im Folgenden als hinlaufende Welle bezeichnet wird, eine sich in negative z -Richtung ausbreitende rücklaufende Welle. Die rücklaufende Welle kann beispielsweise durch Reflexion der hinlaufenden Welle an einem fehlangepassten Abschluss am Wellenleiterende entstehen.

Falls sich auf dem Wellenleiter nur ein einziger Mode ausbreiten kann, haben die elektromagnetischen Felder aller denkbaren hinlaufenden Wellen die gleiche Struktur. Die (vektorielle) komplexe Amplitude einer hinlaufenden Welle beschreibenden physikalischen Größe kann man in der Form

$$\underline{A}_H(x, y, z) = \underline{a}_0 \tilde{\underline{A}}_H(x, y, z)$$

darstellen. Hierbei sind

- \underline{a}_0 die komplexe Wellenamplitude der hinlaufenden Welle bei $z = 0$, welche die Amplitude und die Nullphase beschreibt, und
- $\tilde{\underline{A}}_H(x, y, z)$ die (vektorielle) komplexe Amplitude der hinlaufenden Bezugswelle, welche die prinzipielle Feldstruktur beschreibt.

Mit der bekannten Ortsabhängigkeit (2.7) und (2.8) von elektromagnetischen Feldern auf zylindrischen Wellenleitern gilt für die sich in positive z -Richtung ausbreitende hinlaufende Welle

$$\underline{A}_H(x, y, z) = \underbrace{\underline{a}_0 e^{-j\beta z}}_{\underline{a}(z)} \tilde{A}_0(x, y). \quad (7.1)$$

Die ortsabhängige komplexe Wellenamplitude der hinlaufenden Welle ergibt sich zu

$$\underline{a}(z) = \underline{a}_0 e^{-j\beta z}. \quad (7.2)$$

Die Bezugswelle wird so gewählt, dass der Betrag der von ihr transportierten Leistung $1/2$ ist. Der Betrag der von der hinlaufenden Welle transportierten Leistung ergibt sich dann zu

$$|P_a| = \frac{1}{2} |\underline{a}(z)|^2 = \frac{1}{2} |\underline{a}_0|^2. \quad (7.3)$$

Die komplexe Wellenamplitude \underline{a}_0 hat die Einheit \sqrt{W} .

Die durch $\tilde{A}_0(x, y)$ beschriebene Feldstruktur der Bezugswelle in der Querschnittsebene $z = 0$ ist unabhängig von der Ausbreitungsrichtung der Welle. Für eine sich in negative z -Richtung ausbreitende rücklaufende Welle gilt folglich

$$\underline{A}_R(x, y, z) = \underbrace{\underline{b}_0 e^{+j\beta z}}_{\underline{b}(z)} \tilde{A}_0(x, y). \quad (7.4)$$

Die ortsabhängige komplexe Wellenamplitude der rücklaufenden Welle ergibt sich zu

$$\underline{b}(z) = \underline{b}_0 e^{+j\beta z}. \quad (7.5)$$

Der Betrag der von der rücklaufenden Welle transportierten Leistung ergibt sich zu

$$|P_b| = \frac{1}{2} |\underline{b}(z)|^2 = \frac{1}{2} |\underline{b}_0|^2. \quad (7.6)$$

7.2. Reflexionsfaktor

Der Reflexionsfaktor

$$\underline{\Gamma}(z) = \frac{\underline{b}(z)}{\underline{a}(z)} \quad (7.7)$$

ist als Verhältnis der komplexen Wellenamplitude $\underline{a}(z)$ der hinlaufenden Welle und der komplexen Wellenamplitude $\underline{b}(z)$ der rücklaufenden Welle definiert. Bei $z = 0$ ist der Reflexionsfaktor

$$\underline{\Gamma}_0 = \frac{\underline{b}_0}{\underline{a}_0}. \quad (7.8)$$

Mit (7.2) und (7.5) folgt

$$\underline{\Gamma}(z) = \frac{\underline{b}_0 e^{+j\beta z}}{\underline{a}_0 e^{-j\beta z}} = \underline{\Gamma}_0 e^{+j2\beta z} \quad (7.9)$$

für den ortsabhängigen Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}(z)$. Der Wellenleiter transformiert den Reflexionsfaktor. Der Betrag des Reflexionsfaktors

$$|\underline{\Gamma}(z)| = |\underline{\Gamma}_0|$$

ist bei den hier betrachteten verlustfreien Wellenleitern ortsunabhängig. Falls die rücklaufende Welle durch Reflexion der hinlaufenden Welle an einem nicht verstärkendem Abschluss entsteht, ist der Betrag $|P_b|$ der Leistung der rücklaufenden Welle nie größer als der Betrag $|P_a|$ der Leistung der hinlaufenden Welle. Dann gilt

$$\frac{1}{2} |\underline{b}(z)|^2 \leq \frac{1}{2} |\underline{a}(z)|^2$$

und folglich

$$|\underline{\Gamma}(z)| \leq 1. \quad (7.10)$$

Bei perfekter Anpassung gilt $|\underline{\Gamma}(z)| = 0$ und $|\underline{\Gamma}(z)| = 1$ entspricht einer Totalreflexion.

7.3. Resultierende komplexe Wellenamplitude

Die Zeiger $\underline{a}(z)$ und $\underline{b}(z)$ in der komplexen Ebene drehen sich gemäß (7.2) und (7.5) mit wachsendem z gegen den beziehungsweise im Uhrzeigersinn, siehe Abbildung 7.1. Die aus der Überlagerung resultierende komplexe Wellenamplitude ist

$$\underline{c}(z) = \underline{a}(z) + \underline{b}(z) = \underline{a}(z) (1 + \underline{\Gamma}(z)) = \underline{a}_0 e^{-j\beta z} (1 + \underline{\Gamma}_0 e^{j2\beta z}). \quad (7.11)$$

Der ortsabhängige Betrag der resultierenden komplexen Wellenamplitude $\underline{c}(z)$ ergibt sich zu

$$|\underline{c}(z)| = |\underline{a}_0| |1 + \underline{\Gamma}_0 e^{j2\beta z}|.$$

Es gibt Orte z minimalen und maximalen Betrags $|\underline{c}(z)|$ der resultierenden komplexen Wellenamplitude, die sich abwechselnd im Abstand von

$$\Delta z = \frac{\pi}{2\beta} = \frac{\lambda}{4}$$

befinden, siehe auch (2.38). Man spricht von einer stehenden Welle, siehe Abbildung 7.2. Die absolute Lage der Minima und Maxima hängt vom Argument des Reflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_0$ ab. Die Minimalwerte sind

$$|\underline{c}|_{\min} = |\underline{a}_0| (1 - |\underline{\Gamma}(z)|) \quad (7.12)$$

und die Maximalwerte sind

$$|\underline{c}|_{\max} = |\underline{a}_0| (1 + |\underline{\Gamma}(z)|). \quad (7.13)$$

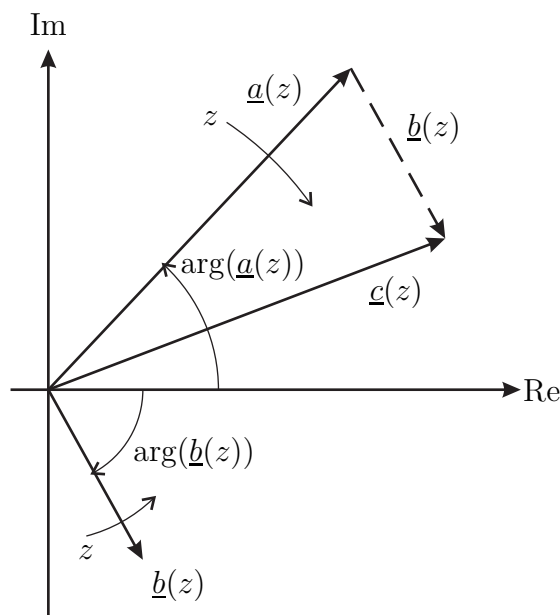


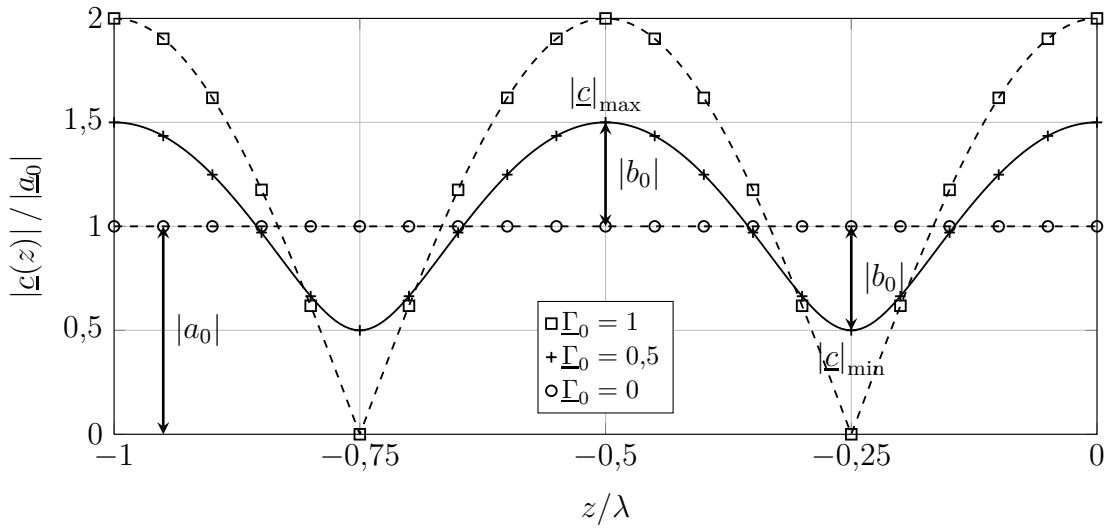
Abbildung 7.1.: Resultierende komplexe Wellenamplitude $\underline{c}(z)$

Der Anpassungsfaktor

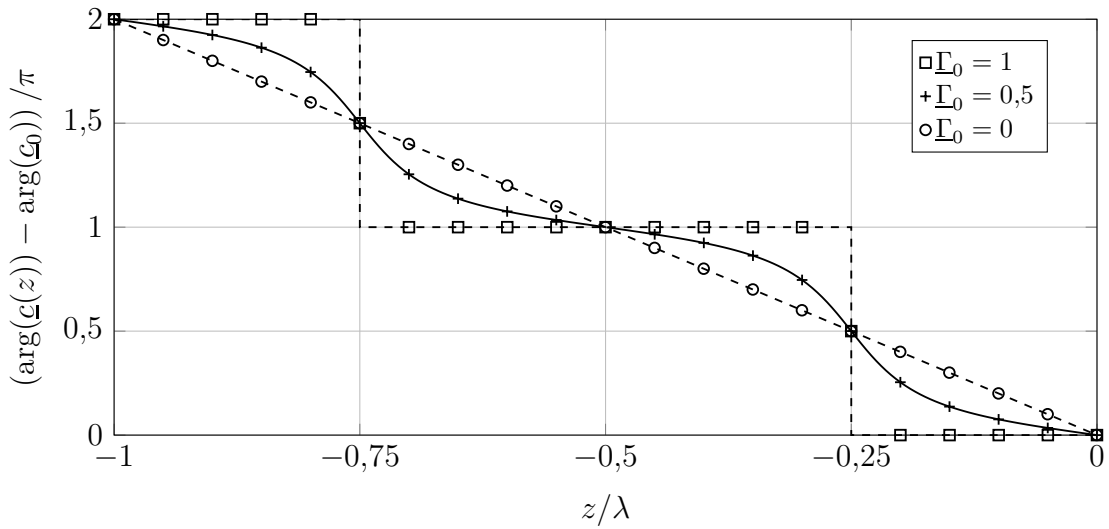
$$m = \frac{|\underline{c}|_{\min}}{|\underline{c}|_{\max}} = \frac{1 - |\underline{\Gamma}(z)|}{1 + |\underline{\Gamma}(z)|} \quad (7.14)$$

ist als Verhältnis von Minimalwert $|\underline{c}|_{\min}$ und Maximalwert $|\underline{c}|_{\max}$ des Betrags $|\underline{c}(z)|$ der resultierenden komplexen Wellenamplitude $\underline{c}(z)$ definiert. Für den Anpassungsfaktor gilt

$$0 \leq m \leq 1.$$



(a) Betragsverlauf



(b) Phasenverlauf

Abbildung 7.2.: Stehende Welle

$m = 1$ entspricht der perfekten Anpassung und $m = 0$ einer Totalreflexion. Den Kehrwert $1/m$ des Anpassungsfaktors m bezeichnet man als Stehwellenverhältnis (Standing Wave Ratio, SWR). Aus dem Anpassungsfaktor m kann man den Betrag

$$|\underline{\Gamma}(z)| = \frac{1 - m}{1 + m} \quad (7.15)$$

des Reflexionsfaktors $\underline{\Gamma}(z)$ berechnen.

Aufgabe 7.1 Durch Überlagern einer hinlaufenden und einer rücklaufenden Welle entsteht eine stehende Welle mit der resultierenden komplexen Wellenamplitude $\underline{c}(z)$. Der Reflexionsfaktor bei $z = 0$ sei $\underline{\Gamma}_0$. Berechnen Sie den auf sein Maximum $|\underline{c}|_{\max}$ normierten Betrag $|\underline{c}(z)|$ der resultierenden komplexen Wellenamplitude

$$|\underline{c}'(z)| = \frac{|\underline{c}(z)|}{|\underline{c}|_{\max}}$$

abhängig von Anpassungsfaktor m , Reflexionsfaktorargument $\arg(\underline{\Gamma}_0)$ und Phasenkonstante β !

7.4. Spannung und Strom

Für eine transversalelektromagnetische Welle auf einem Zweileitersystem, das im Folgenden auch kurz als Leitung bezeichnet wird, lässt sich auf einfache allgemeingültige Art und Weise eine Beziehung zwischen der komplexen Wellenamplitude und der Spannung und dem Strom herstellen. Spannung $\underline{U}_H(z)$ und Strom $\underline{I}_H(z)$ einer sich in positive z -Richtung ausbreitenden hinlaufenden Welle sind über den Wellenwiderstand

$$Z_L = \frac{\underline{U}_H(z)}{\underline{I}_H(z)}$$

miteinander verknüpft, siehe (3.20). Der Betrag der von einer hinlaufenden Welle transportierten Leistung (7.3) berechnet sich mit dem Wellenwiderstand Z_L zu

$$|P_a| = \frac{1}{2} |\underline{a}(z)|^2 = \left| \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{U}_H(z) \underline{I}_H^*(z)) \right| = \frac{|\underline{U}_H(z)|^2}{2Z_L} = \frac{1}{2} Z_L |\underline{I}_H(z)|^2,$$

siehe (3.30). Wenn man weiterhin wie allgemein üblich das Argument der komplexen Wellenamplitude $\underline{a}(z)$ der hinlaufenden Welle gleich dem Argument der Spannung $\underline{U}_H(z)$ der hinlaufenden Welle wählt, so folgt für die komplexe Wellenamplitude der hinlaufenden Welle

$$\underline{a}(z) = \frac{\underline{U}_H(z)}{\sqrt{Z_L}} = \sqrt{Z_L} \underline{I}_H(z). \quad (7.16)$$

Spannung $\underline{U}_R(z)$ und Strom $\underline{I}_R(z)$ einer sich in negative z -Richtung ausbreitenden rücklaufenden Welle sind ebenfalls über den Wellenwiderstand

$$Z_L = -\frac{\underline{U}_R(z)}{\underline{I}_R(z)}$$

miteinander verknüpft, siehe (3.20). Für die komplexe Wellenamplitude einer sich in negative z -Richtung ausbreitenden rücklaufenden Welle gilt folglich

$$\underline{b}(z) = \frac{\underline{U}_R(z)}{\sqrt{Z_L}} = -\sqrt{Z_L}\underline{I}_R(z). \quad (7.17)$$

Man beachte das Minuszeichen im letzten Term.

Die hinlaufende und die rücklaufende Welle überlagern sich. Man erhält die aus der Überlagerung resultierende Spannung

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_H(z) + \underline{U}_R(z) = \sqrt{Z_L} \underbrace{(\underline{a}(z) + \underline{b}(z))}_{\underline{u}(z)} \quad (7.18)$$

und den aus der Überlagerung resultierenden Strom

$$\underline{I}(z) = \underline{I}_H(z) + \underline{I}_R(z) = \frac{1}{\sqrt{Z_L}} (\underline{a}(z) - \underline{b}(z)). \quad (7.19)$$

Aufgelöst nach den komplexen Wellenamplituden erhält man

$$\underline{a}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{U}(z)}{\sqrt{Z_L}} + \sqrt{Z_L}\underline{I}(z) \right) \quad (7.20)$$

und

$$\underline{b}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{U}(z)}{\sqrt{Z_L}} - \sqrt{Z_L}\underline{I}(z) \right). \quad (7.21)$$

Transversalelektromagnetische Wellen, das heißt Signale auf einem Zweileitersystem, kann man konventionell durch die resultierende Spannung $\underline{U}(z)$ und den resultierenden Strom $\underline{I}(z)$ oder äquivalent durch die komplexen Wellenamplituden $\underline{a}(z)$ und $\underline{b}(z)$ beschreiben. Letztere nicht auf transversalelektromagnetische Wellen auf Zweileitersystemen beschränkte Variante ist wegen der einfacheren Ortsabhängigkeiten (7.2) und (7.5) die in der Hochfrequenztechnik zu bevorzugende.

7.5. Impedanz

Die Impedanz

$$\underline{Z}(z) = \frac{\underline{U}(z)}{\underline{I}(z)} \quad (7.22)$$

ist als Verhältnis aus der resultierenden Spannung $\underline{U}(z)$ und dem resultierendem Strom $\underline{I}(z)$ definiert. Einsetzen von (7.18) und (7.19) ergibt mit (7.7) und (7.9)

$$\frac{\underline{Z}(z)}{Z_L} = \frac{\underline{a}(z) + \underline{b}(z)}{\underline{a}(z) - \underline{b}(z)} = \frac{1 + \underline{\Gamma}(z)}{1 - \underline{\Gamma}(z)} = \frac{1 + \underline{\Gamma}_0 e^{+j2\beta z}}{1 - \underline{\Gamma}_0 e^{+j2\beta z}}. \quad (7.23)$$

Auflösen nach dem Reflexionsfaktor ergibt

$$\underline{\Gamma}(z) = \frac{\frac{\underline{Z}(z)}{Z_L} - 1}{\frac{\underline{Z}(z)}{Z_L} + 1} = \frac{\underline{Z}(z) - Z_L}{\underline{Z}(z) + Z_L}. \quad (7.24)$$

Diese Gleichung entspricht formal nicht nur zufällig den Gleichungen (6.18) und (6.24) zum Berechnen der Reflexionsfaktoren für auf eine ebene Grenzfläche einfallende ebene homogene Wellen.

Bei Kenntnis der normierten Impedanz

$$\frac{Z_0}{Z_L} = \frac{1 + \underline{\Gamma}_0}{1 - \underline{\Gamma}_0}$$

bei $z = 0$ lässt sich der Reflexionsfaktor

$$\underline{\Gamma}_0 = \frac{\frac{Z_0}{Z_L} - 1}{\frac{Z_0}{Z_L} + 1}$$

aus (7.23) eliminieren:

$$\begin{aligned} \frac{\underline{Z}(z)}{Z_L} &= \frac{\left(\frac{Z_0}{Z_L} + 1\right) + \left(\frac{Z_0}{Z_L} - 1\right) e^{j2\beta z}}{\left(\frac{Z_0}{Z_L} + 1\right) - \left(\frac{Z_0}{Z_L} - 1\right) e^{j2\beta z}} \\ &= \frac{\frac{Z_0}{Z_L} (e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) + (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z})}{\frac{Z_0}{Z_L} (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) + (e^{-j\beta z} + e^{j\beta z})} \\ &= \frac{\frac{Z_0}{Z_L} \cos(\beta z) - j \sin(\beta z)}{-j \frac{Z_0}{Z_L} \sin(\beta z) + \cos(\beta z)} = \frac{\frac{Z_0}{Z_L} - j \tan(\beta z)}{1 - j \frac{Z_0}{Z_L} \tan(\beta z)}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Die normierte Impedanz \underline{Z}_0/Z_L bei $z = 0$ wird durch die Leitung in die normierte Impedanz $\underline{Z}(z)/Z_L$ am Ort z transformiert. Eine Leitung der Länge l transformiert die normierte Abschlussimpedanz \underline{Z}_2/Z_L in die normierte Eingangsimpedanz

$$\frac{\underline{Z}_1}{Z_L} = \frac{\underline{Z}(z = -l)}{Z_L} = \frac{\frac{\underline{Z}_2}{Z_L} + j \tan(\beta l)}{1 + j \frac{\underline{Z}_2}{Z_L} \tan(\beta l)}, \quad (7.26)$$

siehe Abbildung 7.3.

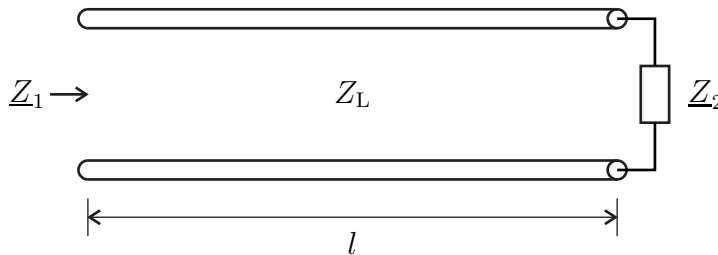


Abbildung 7.3.: Transformation der Abschlussimpedanz \underline{Z}_2 in die Eingangsimpedanz \underline{Z}_1

Falls der Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_0$ bei $z = 0$ reell und negativ ist, gilt

$$\underline{\Gamma}_0 = -|\underline{\Gamma}_0| = \frac{m-1}{m+1},$$

siehe (7.15). Dies in (7.23) eingesetzt ergibt die normierte Impedanz

$$\frac{\underline{Z}(z)}{Z_L} = \frac{m - j \tan(\beta z)}{1 - jm \tan(\beta z)} \quad (7.27)$$

am Ort z , vergleiche auch (7.25).

Das Zweileitersystem mit dem Abschluss am Wellenleiterende kann konventionell durch die Impedanz $\underline{Z}(z)$ oder äquivalent durch den Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}(z)$ beschrieben werden. Letztere nicht auf transversalelektromagnetische Wellen auf Zweileitersystemen beschränkte Variante ist wegen der wesentlich einfacheren Transformationsgleichung, vergleiche (7.9) und (7.25), die in der Hochfrequenztechnik zu bevorzugende.

Aufgabe 7.2 Es wird der im Abbildung 7.4 gezeigte Hohlleiter betrachtet. Der Hohlleiter ist im Bereich $z < 0$ leer und im Bereich $z > 0$ vollständig mit einem verlustfreien Dielektrikum mit der relativen Permittivität $\varepsilon_r = 4$ und der relativen Permeabilität μ_r ausgefüllt. Im Hohlleiter breite sich eine transversalelektrische

Welle in positive z -Richtung aus. Die Kreisfrequenz ω sei doppelt so groß wie die kritische Kreisfrequenz ω_c des sich ausbreitenden Wellentyps im leeren Hohlleiter. Wie muss die relative Permeabilität μ_r des Dielektrikums gewählt werden, damit die Stoßstelle von gefülltem und leerem Hohlleiterbereich reflexionsfrei ist? Betrachten Sie hierzu die Grenzflächenbedingungen der Tangentialkomponenten der Feldstärken bei $z = 0$.

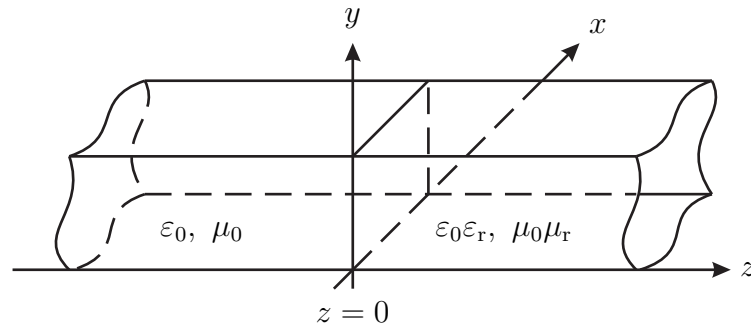


Abbildung 7.4.: Teilweise gefüllter Hohlleiter

Aufgabe 7.3 Berechnen Sie für den Fall reeller Impedanzen $\underline{Z} = R$ den Anpassungsfaktor m als Funktion des Widerstands R !

7.6. Leistung

Für den Energietransport in Richtung der Längsachse des Wellenleiters, die der z -Richtung entspricht, ist nur die z -Komponente des komplexen Poynting-Vektors \vec{S} gemäß (1.79) relevant, die man aus den Transversalkomponenten der Feldstärken der hinlaufenden und der rücklaufenden Welle wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \underline{S}_z &= \frac{1}{2} (\underline{E}_x \underline{H}_y^* - \underline{E}_y \underline{H}_x^*) \\ &= \frac{1}{2} ((\underline{E}_{Hx} + \underline{E}_{Rx}) (\underline{H}_{Hy}^* + \underline{H}_{Ry}^*) - (\underline{E}_{Hy} + \underline{E}_{Ry}) (\underline{H}_{Hx}^* + \underline{H}_{Rx}^*)) \\ &= \frac{1}{2} (\underline{E}_{Hx} \underline{H}_{Hy}^* + \underline{E}_{Hx} \underline{H}_{Ry}^* + \underline{E}_{Rx} \underline{H}_{Hy}^* + \underline{E}_{Rx} \underline{H}_{Ry}^* \\ &\quad - \underline{E}_{Hy} \underline{H}_{Hx}^* - \underline{E}_{Hy} \underline{H}_{Rx}^* - \underline{E}_{Ry} \underline{H}_{Hx}^* - \underline{E}_{Ry} \underline{H}_{Rx}^*). \end{aligned}$$

Mit dem Feldwellenwiderstand Z_F folgt weiterhin¹

$$\begin{aligned} \underline{S}_z &= \frac{Z_F}{2} \left(\underline{H}_{Hy} \underline{H}_{Hy}^* + \underline{H}_{Hy} \underline{H}_{Ry}^* - \underline{H}_{Ry} \underline{H}_{Hy}^* - \underline{H}_{Ry} \underline{H}_{Ry}^* \right. \\ &\quad \left. + \underline{H}_{Hx} \underline{H}_{Hx}^* + \underline{H}_{Hx} \underline{H}_{Rx}^* - \underline{H}_{Rx} \underline{H}_{Hx}^* - \underline{H}_{Rx} \underline{H}_{Rx}^* \right) \\ &= \frac{Z_F}{2} \left(|\underline{H}_{Hx}|^2 + |\underline{H}_{Hy}|^2 - |\underline{H}_{Rx}|^2 - |\underline{H}_{Ry}|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2j \operatorname{Im}(\underline{H}_{Hx} \underline{H}_{Rx}^*) + 2j \operatorname{Im}(\underline{H}_{Hy} \underline{H}_{Ry}^*) \right), \end{aligned}$$

siehe (2.27), (2.28), (2.32) und (2.34). Die transportierte Leistung ergibt sich aus dem Realteil

$$\operatorname{Re}(\underline{S}_z) = \frac{Z_F}{2} \left(|\underline{H}_{Hx}|^2 + |\underline{H}_{Hy}|^2 \right) - \frac{Z_F}{2} \left(|\underline{H}_{Rx}|^2 + |\underline{H}_{Ry}|^2 \right)$$

der z -Komponente \underline{S}_z des komplexen Poynting-Vektors $\vec{\underline{S}}$. Die in positive z -Richtung transportierte Leistung ist folglich der Betrag $|P_a|$ der von der hinlaufenden Welle transportierte Leistung weniger dem Betrag $|P_b|$ der von der rücklaufenden Welle transportierten Leistung. Mit (7.3) und (7.6) erhält man die transportierte Leistung

$$P = \frac{1}{2} |a(z)|^2 - \frac{1}{2} |b(z)|^2. \quad (7.28)$$

7.7. Messen des Reflexionsfaktors mit einer Messleitung

Eine Messleitung besteht aus einem Wellenleiter und einer verschiebbaren Sonde mit Detektor. Die Sonde ragt in das Feld des Wellenleiters und am Detektor ergibt sich eine zum Betrag $|\underline{c}(z)|$ der resultierenden komplexen Wellenamplitude $\underline{c}(z)$ proportionale Gleichspannung.

Mit der Messleitung können die Orte z der scharfen Minima sehr genau bestimmt werden. Weiterhin können die minimalen und maximalen Beträge $|\underline{c}(z)|$ der resultierenden komplexen Wellenamplitude $\underline{c}(z)$, bis auf einen unbekanntem gemeinsamen Proportionalitätsfaktor, genau gemessen werden. In Abbildung 7.5 sind typische Verläufe dargestellt.

Zunächst erfolgt eine Referenzmessung bei Abschluss des Wellenleiters mit einem Kurzschluss. Der Abstand zweier Minima entspricht $\lambda/2$, es kann also die

¹ Der Imaginärteil einer komplexen Größe berechnet sich zu $\operatorname{Im}(\underline{x}) = \frac{1}{2j} (\underline{x} - \underline{x}^*)$.

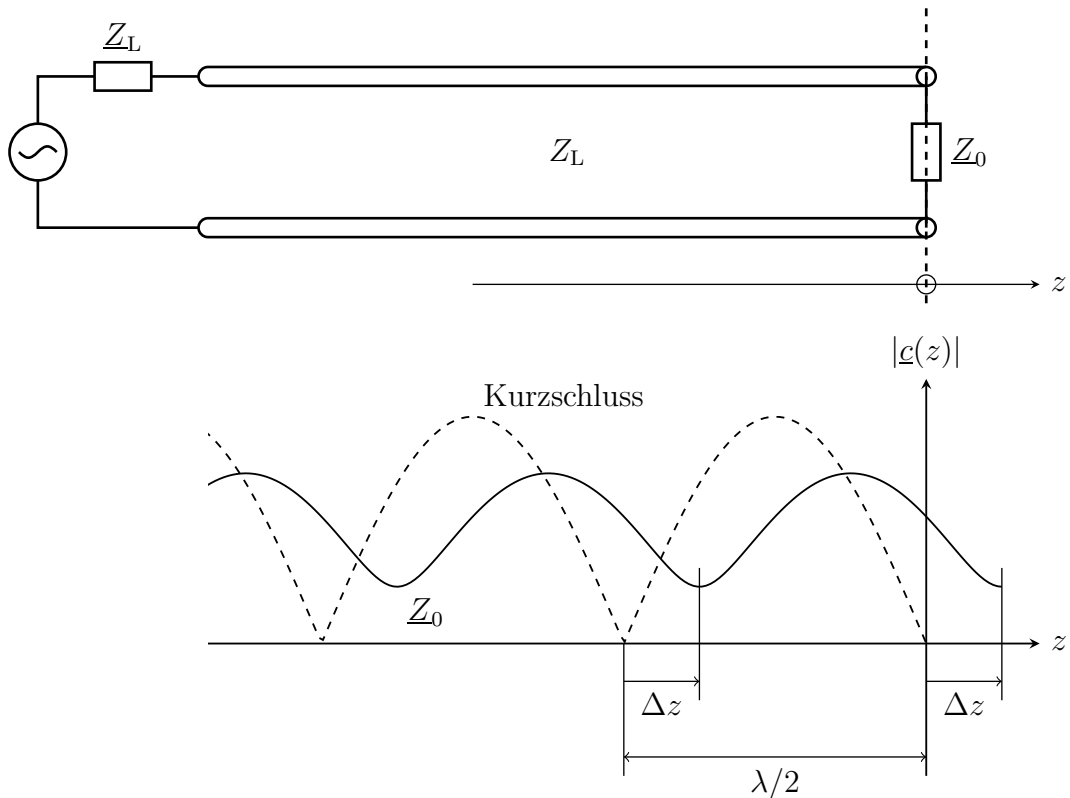


Abbildung 7.5.: Messleitung

Wellenlänge λ bestimmt werden. Weiterhin wird der Ort eines Minimums bestimmt. Dort liegt stets der gleiche Reflexionsfaktor wie am Wellenleiterende vor, da der Abstand vom Wellenleiterende ein ganzzahliges Vielfaches von $\lambda/2$ ist, siehe (7.9) und (2.38).

Im nächsten Schritt werden bei Abschluss des Wellenleiters mit dem zu bestimmenden Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_0$ der Abstand Δz des Minimums in Richtung des Messobjekts vom zuvor bestimmten Ort des Minimums bei Abschluss mit einem Kurzschluss und durch Amplitudenmessung der Anpassungsfaktor m gemäß (7.14) gemessen. Für den Betrag des Reflexionsfaktors folgt mit (7.15)

$$|\underline{\Gamma}_0| = \frac{|\mathcal{E}|_{\max} - |\mathcal{E}|_{\min}}{|\mathcal{E}|_{\max} + |\mathcal{E}|_{\min}}. \quad (7.29)$$

Beim Fortsetzen der Amplitudenverläufe über das Wellenleiterende hinaus befände sich im Abstand Δz hinter dem Ende des Wellenleiters das nächste Minimum, das heißt hier wäre das Argument des Reflexionsfaktors π . Den Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_0$ am Ende des Wellenleiters erhält man durch Transformation des

negativen reellen Reflexionsfaktors $-\lvert\Gamma_0\rvert$ im Abstand Δz hinter dem Ende des Wellenleiters mit einer Leitung der Länge Δz . Für das Argument des Reflexionsfaktors folgt

$$\arg(\Gamma_0) = \pi - 2\beta\Delta z = \pi - 4\pi\frac{\Delta z}{\lambda}, \quad (7.30)$$

siehe (7.9) und (2.38).

7.8. Leitungen als Blindelemente

7.8.1. Kurzgeschlossene Leitung

Die Eingangsimpedanz der kurzgeschlossenen Leitung aus Abbildung 7.6 ergibt sich mit (7.26) zu

$$\underline{Z}_1 = jZ_L \tan(\beta l), \quad (7.31)$$

siehe Abbildung 7.7.

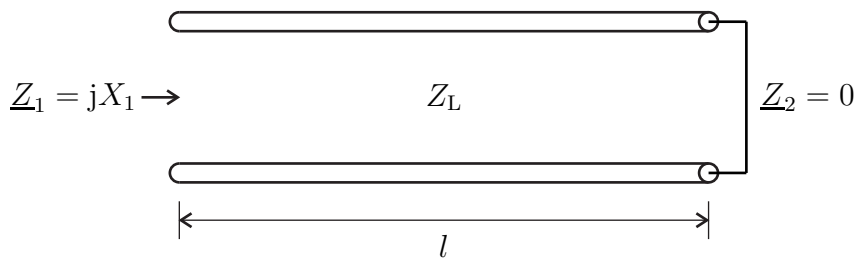


Abbildung 7.6.: Kurzgeschlossene Leitung

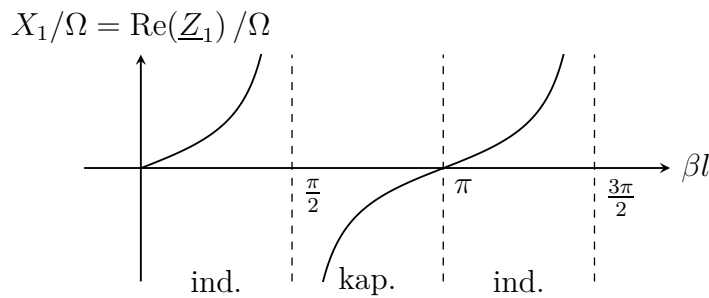


Abbildung 7.7.: Blindwiderstand der kurzgeschlossenen Leitung

7.8.2. Leerlaufende Leitung

Die Eingangsimpedanz der leerlaufenden Leitung aus Abbildung 7.8 ergibt sich mit (7.26) zu

$$\underline{Z}_1 = Z_L \frac{1}{j \tan(\beta l)} = -j Z_L \cot(\beta l), \quad (7.32)$$

siehe Abbildung 7.9.

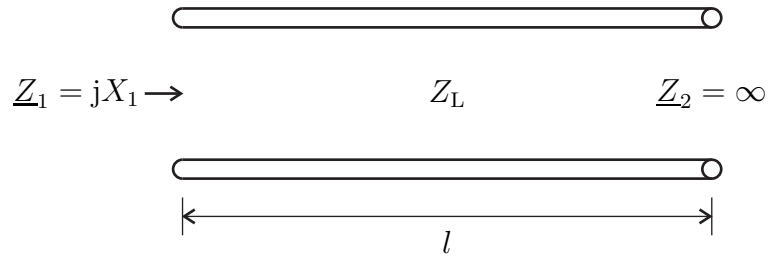


Abbildung 7.8.: Leerlaufende Leitung

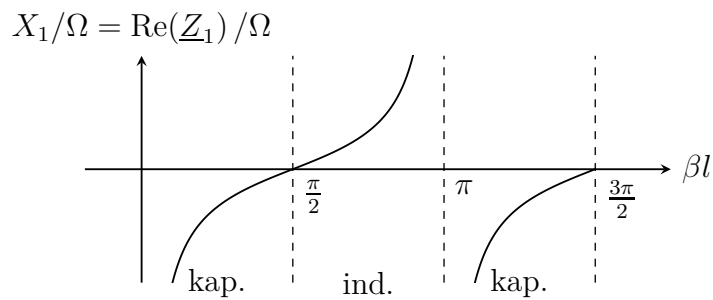


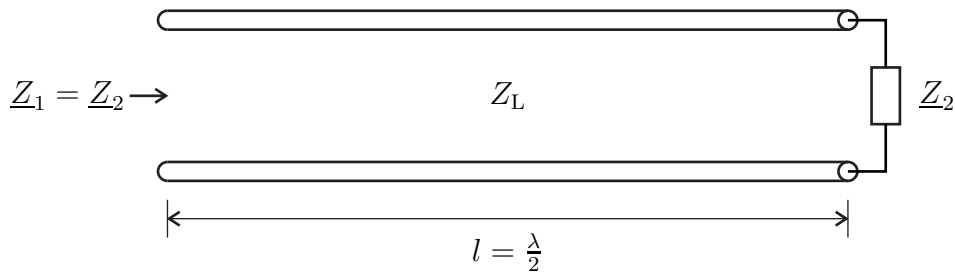
Abbildung 7.9.: Blindwiderstand der leerlaufenden Leitung

7.9. Autotransformation

Eine Leitung der Länge $l = \lambda/2$ transformiert die Abschlussimpedanz \underline{Z}_2 in die Eingangsimpedanz

$$\underline{Z}_1 = Z_L \frac{\underline{Z}_2 + j Z_L \tan(\pi)}{Z_L + j \underline{Z}_2 \tan(\pi)} = \underline{Z}_2, \quad (7.33)$$

siehe (7.26), (2.38) und Abbildung 7.10. Die Abschlussimpedanz \underline{Z}_2 wird in sich selbst transformiert. Man bezeichnet dies als Autotransformation.

Abbildung 7.10.: $\lambda/2$ -Transformator

Aufgabe 7.4 Es wird der in [Abbildung 7.11](#) gezeigte, aus einem an beiden Enden kurzgeschlossenen Hohlleiter der Breite a , der Höhe b und der Länge l bestehende Hohlraumresonator betrachtet. Bei welchen Kreisfrequenzen treten Resonanzen auf, das heißt bei welchen Kreisfrequenzen kann in dem Hohlraumresonator ein nichtverschwindendes elektromagnetisches Feld existieren?

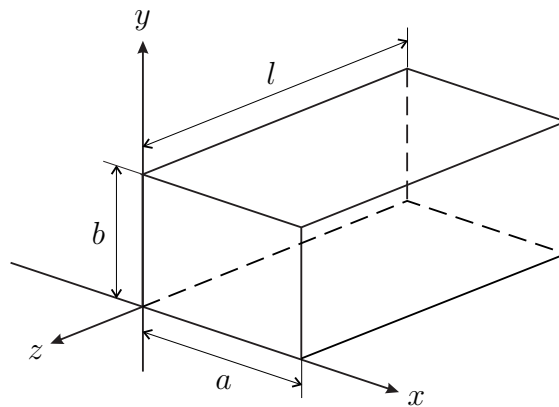


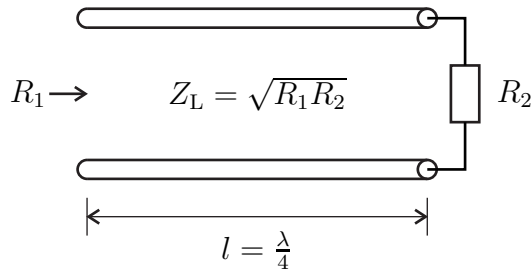
Abbildung 7.11.: Hohlraumresonator

7.10. Dualtransformation

Eine Leitung der Länge $l = \lambda/4$ transformiert die Abschlussimpedanz \underline{Z}_2 in die Eingangsimpedanz

$$\underline{Z}_1 = Z_L \frac{\underline{Z}_2 + jZ_L \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}{Z_L + j\underline{Z}_2 \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{Z_L^2}{\underline{Z}_2} \quad (7.34)$$

siehe [\(7.26\)](#), [\(2.38\)](#) und [Abbildung 7.12](#). Man bezeichnet diese Transformation als Dualtransformation. Insbesondere kann man jede reelle Abschlussimpedanz \underline{Z}_2 in


 Abbildung 7.12.: $\lambda/4$ -Transformator

jede beliebige andere reelle Eingangsimpedanz Z_1 transformieren, man muss nur den Wellenwiderstand Z_L der Leitung passend wählen.

7.11. Symmetrische Dreileitersysteme

Auf einem symmetrischen Dreileitersystem können sich zwei orthogonale transversalelektromagnetische Wellenmoden, der Gegentaktmode und der Gleichtaktmode ausbreiten. Man definiert komplexe Wellenamplituden $\underline{a}^{(-)}(z)$ und $\underline{b}^{(-)}(z)$ der hinlaufenden und der rücklaufenden Gegentaktwelle sowie komplexe Wellenamplituden $\underline{a}^{(+)}(z)$ und $\underline{b}^{(+)}(z)$ der hinlaufenden und der rücklaufenden Gleichtaktwelle analog zu Abschnitt 7.1. Die Bezugswellen sind wieder so normiert, dass der Betrag der transportierten Leistungen $1/2$ ist. Für die hinlaufenden Wellen erhält man unter Ausnutzen der Orthogonalität der Moden den Betrag der transportierten Leistung

$$\begin{aligned} |P_a| &= \left| \operatorname{Re} \left(\underline{U}_H^{(-)}(z) \underline{I}_H^{(-)*}(z) \right) + \operatorname{Re} \left(\underline{U}_H^{(+)}(z) \underline{I}_H^{(+)*}(z) \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \underline{a}^{(-)}(z) \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \underline{a}^{(+)}(z) \right|^2, \end{aligned}$$

siehe (3.82). Analog erhält man für die rücklaufenden Wellen den Betrag der transportierten Leistung

$$\begin{aligned} |P_b| &= \left| \operatorname{Re} \left(\underline{U}_R^{(-)}(z) \underline{I}_R^{(-)*}(z) \right) + \operatorname{Re} \left(\underline{U}_R^{(+)}(z) \underline{I}_R^{(+)*}(z) \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \underline{b}^{(-)}(z) \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \underline{b}^{(+)}(z) \right|^2. \end{aligned}$$

Analog zu (7.28) erhält man die transportierte Leistung

$$\begin{aligned} P &= |P_a| - |P_b| \\ &= \frac{1}{2} \left| \underline{a}^{(-)}(z) \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \underline{a}^{(+)}(z) \right|^2 - \frac{1}{2} \left| \underline{b}^{(-)}(z) \right|^2 - \frac{1}{2} \left| \underline{b}^{(+)}(z) \right|^2. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Unter Verwenden der Wellenwiderstände (3.72) und (3.73) von Gegentaktmode und Gleichtaktmode lassen sich die komplexen Wellenamplituden aus den zugehörigen Spannungen und Strömen analog zu (7.16) und (7.17) wie folgt berechnen:

$$\underline{a}^{(-)}(z) = \sqrt{\frac{2}{Z_L^{(-)}}} \underline{U}_H^{(-)}(z) = \sqrt{2Z_L^{(-)}} \underline{I}_H^{(-)}(z), \quad (7.36)$$

$$\underline{b}^{(-)}(z) = \sqrt{\frac{2}{Z_L^{(-)}}} \underline{U}_R^{(-)}(z) = -\sqrt{2Z_L^{(-)}} \underline{I}_R^{(-)}(z), \quad (7.37)$$

$$\underline{a}^{(+)}(z) = \sqrt{\frac{2}{Z_L^{(+)}}} \underline{U}_H^{(+)}(z) = \sqrt{2Z_L^{(+)}}} \underline{I}_H^{(+)}(z), \quad (7.38)$$

$$\underline{b}^{(+)}(z) = \sqrt{\frac{2}{Z_L^{(+)}}} \underline{U}_R^{(+)}(z) = -\sqrt{2Z_L^{(+)}}} \underline{I}_R^{(+)}(z). \quad (7.39)$$

Die Spannungen und Ströme der hinlaufenden und der rücklaufenden Wellen überlagern sich. Man erhält analog zu (7.18) und (7.19) die aus der Überlagerung resultierende Gegentaktspannung

$$\underline{U}^{(-)}(z) = \underline{U}_H^{(-)}(z) + \underline{U}_R^{(-)}(z) = \sqrt{\frac{Z_L^{(-)}}{2}} \left(\underline{a}^{(-)}(z) + \underline{b}^{(-)}(z) \right), \quad (7.40)$$

die aus der Überlagerung resultierende Gleichtaktspannung

$$\underline{U}^{(+)}(z) = \underline{U}_H^{(+)}(z) + \underline{U}_R^{(+)}(z) = \sqrt{\frac{Z_L^{(+)}}{2}} \left(\underline{a}^{(+)}(z) + \underline{b}^{(+)}(z) \right), \quad (7.41)$$

den aus der Überlagerung resultierenden Gegentaktstrom

$$\underline{I}^{(-)}(z) = \underline{I}_H^{(-)}(z) + \underline{I}_R^{(-)}(z) = \sqrt{\frac{1}{2Z_L^{(-)}}} \left(\underline{a}^{(-)}(z) - \underline{b}^{(-)}(z) \right), \quad (7.42)$$

und den aus der Überlagerung resultierenden Gleichtaktstrom

$$\underline{I}^{(+)}(z) = \underline{I}_H^{(+)}(z) + \underline{I}_R^{(+)}(z) = \sqrt{\frac{1}{2Z_L^{(+)}}} \left(\underline{a}^{(+)}(z) - \underline{b}^{(+)}(z) \right). \quad (7.43)$$

Die komplexen Wellenamplituden lassen sich aus den resultierenden Spannungen

und resultierenden Strömen analog zu (7.20) und (7.21) wie folgt berechnen:

$$\underline{a}^{(-)}(z) = \sqrt{\frac{1}{2Z_L^{(-)}}} \underline{U}^{(-)}(z) + \sqrt{\frac{Z_L^{(-)}}{2}} \underline{I}^{(-)}(z), \quad (7.44)$$

$$\underline{b}^{(-)}(z) = \sqrt{\frac{1}{2Z_L^{(-)}}} \underline{U}^{(-)}(z) - \sqrt{\frac{Z_L^{(-)}}{2}} \underline{I}^{(-)}(z), \quad (7.45)$$

$$\underline{a}^{(+)}(z) = \sqrt{\frac{1}{2Z_L^{(+)}}} \underline{U}^{(+)}(z) + \sqrt{\frac{Z_L^{(+)}}{2}} \underline{I}^{(+)}(z), \quad (7.46)$$

$$\underline{b}^{(+)}(z) = \sqrt{\frac{1}{2Z_L^{(+)}}} \underline{U}^{(+)}(z) - \sqrt{\frac{Z_L^{(+)}}{2}} \underline{I}^{(+)}(z). \quad (7.47)$$

Zunächst sollen nur symmetrische Abschlüsse betrachtet werden, siehe Abbildung 7.13. An symmetrischen Abschlüssen wird jeder Mode nur in sich selbst reflektiert. An asymmetrischen Abschlüssen kann hingegen auch eine Modenkonzersion auftreten, siehe Abschnitt 9.6. Wegen der im Allgemeinen unterschiedlichen Wellenwiderstände von Gegentaktmode und Gleichtaktmode und der unterschiedlichen für die verschiedenen Moden sichtbaren Impedanzen sind die Reflexionsfaktoren an ein und dem selben symmetrischen Abschluss für die beiden Moden im Allgemeinen unterschiedlich.

Die für den Gegentaktmode wirksame Abschlussimpedanz ergibt sich aus der Parallelschaltung von $\underline{Z}_{2,10}$ und $\frac{\underline{Z}_{2,12}}{2}$:

$$\underline{Z}_2^{(-)} = \underline{Z}_{2,10} \parallel \frac{\underline{Z}_{2,12}}{2} = \frac{\underline{Z}_{2,10} \frac{\underline{Z}_{2,12}}{2}}{\underline{Z}_{2,10} + \frac{\underline{Z}_{2,12}}{2}}. \quad (7.48)$$

Aus (7.24) ergibt sich unter Verwenden des Wellenwiderstands $\underline{Z}_L^{(-)}$ des Gegentaktmodes gemäß (3.72) der Reflexionsfaktor

$$\underline{\Gamma}_2^{(-)} = \frac{\frac{\underline{Z}_2^{(-)}}{\underline{Z}_L^{(-)}} - 1}{\frac{\underline{Z}_2^{(-)}}{\underline{Z}_L^{(-)}} + 1} \quad (7.49)$$

des Gegentaktmodes. Die Abschlussimpedanz $\underline{Z}_2^{(-)}$ wird durch die Leitung in die für den Gegentaktmode sichtbare normierte Eingangsimpedanz

$$\frac{\underline{Z}_1^{(-)}}{\underline{Z}_L^{(-)}} = \frac{\underline{Z}_{1,10} \parallel \frac{\underline{Z}_{1,12}}{2}}{\underline{Z}_L^{(-)}} = \frac{\frac{\underline{Z}_2^{(-)}}{\underline{Z}_L^{(-)}} + j \tan(\beta l)}{1 + j \frac{\underline{Z}_2^{(-)}}{\underline{Z}_L^{(-)}} \tan(\beta l)} \quad (7.50)$$

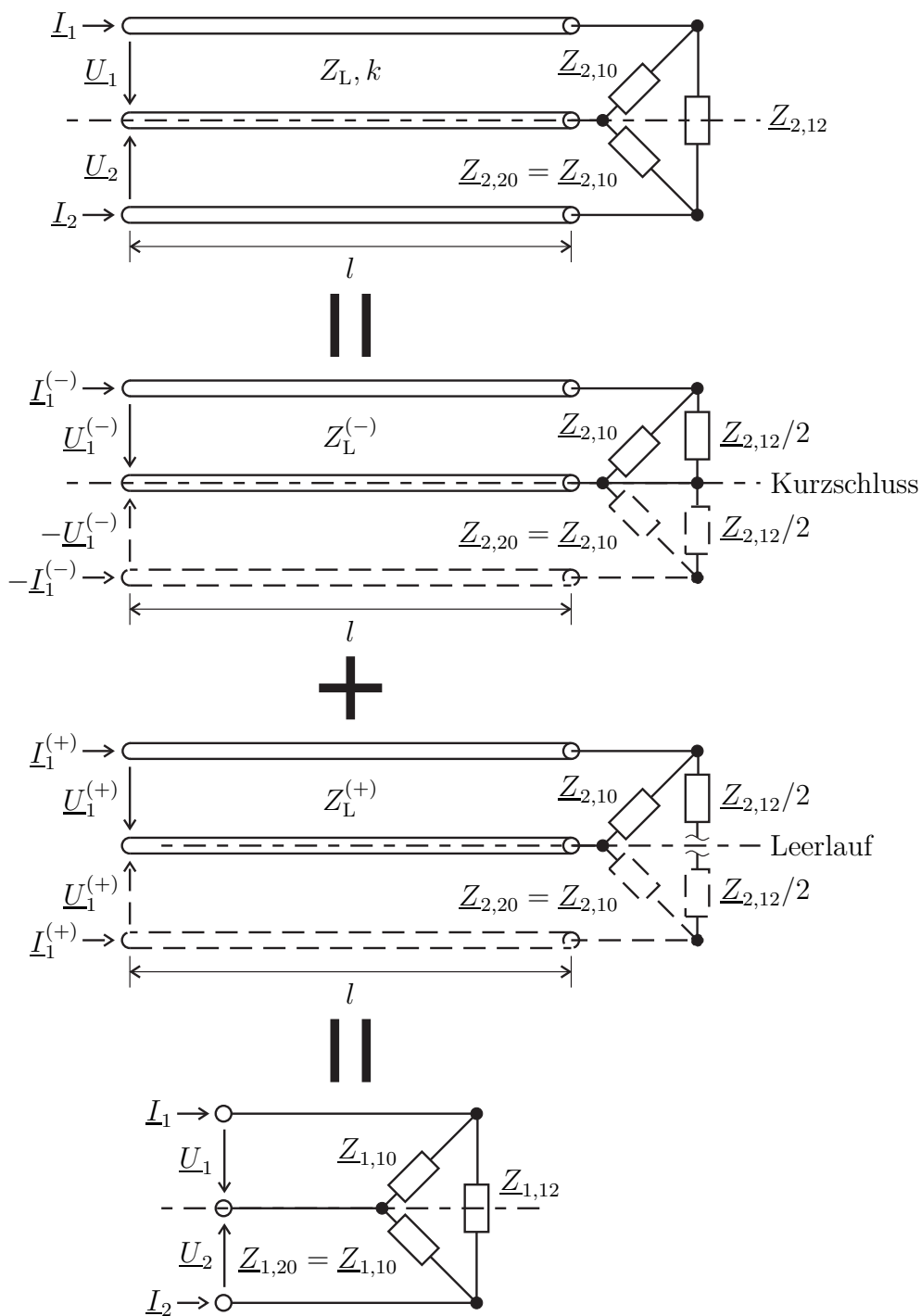


Abbildung 7.13.: Impedanztransformation durch ein symmetrisches Dreileitersystem

transformiert, siehe (7.26).

Für den Gleichtaktmode ist die Abschlussimpedanz

$$\underline{Z}_2^{(+)} = \underline{Z}_{2,10} \quad (7.51)$$

wirksam, so dass sich aus (7.24) unter Verwenden des Wellenwiderstands $\underline{Z}_L^{(+)}$ des Gleichtaktmodes gemäß (3.73) der Reflexionsfaktor

$$\Gamma_2^{(+)} = \frac{\frac{\underline{Z}_2^{(+)}}{\underline{Z}_L^{(+)}} - 1}{\frac{\underline{Z}_2^{(+)}}{\underline{Z}_L^{(+)}} + 1} \quad (7.52)$$

des Gleichtaktmodes ergibt. Die Abschlussimpedanz $\underline{Z}_2^{(+)}$ wird durch die Leitung in die für den Gleichtaktmode sichtbare normierte Eingangsimpedanz

$$\frac{\underline{Z}_1^{(+)}}{\underline{Z}_L^{(+)}} = \frac{\underline{Z}_{1,10}^{(+)}}{\underline{Z}_L^{(+)}} = \frac{\frac{\underline{Z}_2^{(+)}}{\underline{Z}_L^{(+)}} + j \tan(\beta l)}{1 + j \frac{\underline{Z}_2^{(+)}}{\underline{Z}_L^{(+)}} \tan(\beta l)} \quad (7.53)$$

transformiert, siehe (7.26).

7.12. Rein massegekoppelte symmetrische Dreileitersysteme

Für rein massegekoppelte symmetrische Dreileitersysteme sind gemäß (3.84) die Wellenwiderstände der beiden Moden gleich. Damit sind auch die Reflexionsfaktoren an einem symmetrischen rein massegekoppelten Abschluss für beide Moden gleich. Der Abschluss in Abbildung 7.13 wäre beispielsweise dann ein rein massegekoppelter Abschluss, wenn $\underline{Z}_{2,12} = \infty$ nicht vorhanden wäre und damit auch $\underline{Z}_2^{(-)} = \underline{Z}_2^{(+)}$ gelte.

Die hier primär interessierende Besonderheit eines rein massegekoppelten symmetrischen Dreileitersystems besteht jedoch darin, dass man es auch als ein Paar gleichartiger Zweileitersysteme ansehen kann. Die komplexen Wellenamplituden auf diesen Zweileitersystemen kann man aus den zugehörigen Spannungen und Strömen auf den Zweileitersystemen berechnen, siehe (7.16) und (7.17). Die Spannungen und Ströme auf den Zweileitersystemen kann man durch die Spannungen und Ströme der Gegentaktwellen und Gleichtaktwellen ausdrücken, siehe (3.74),

(3.75) (3.78) und (3.79), und diese kann man schließlich aus den komplexen Wellenamplituden der Gegentaktwellen und Gleichtaktwellen berechnen, siehe (7.36), (7.37), (7.38) und (7.39):

$$\begin{aligned}
 \underline{a}_1(z) &= \frac{\underline{U}_{1H}(z)}{\sqrt{Z_L}} = \frac{\underline{U}_H^{(-)}(z) + \underline{U}_H^{(+)}(z)}{\sqrt{Z_L}} \\
 &= \sqrt{Z_L} \underline{I}_{1H}(z) = \sqrt{Z_L} (\underline{I}_H^{(-)}(z) + \underline{I}_H^{(+)}(z)) \\
 &= \frac{\underline{a}^{(-)}(z) + \underline{a}^{(+)}(z)}{\sqrt{2}}, \tag{7.54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{b}_1(z) &= \frac{\underline{U}_{1R}(z)}{\sqrt{Z_L}} = \frac{\underline{U}_R^{(-)}(z) + \underline{U}_R^{(+)}(z)}{\sqrt{Z_L}} \\
 &= -\sqrt{Z_L} \underline{I}_{1R}(z) = -\sqrt{Z_L} (\underline{I}_R^{(-)}(z) + \underline{I}_R^{(+)}(z)) \\
 &= \frac{\underline{b}^{(-)}(z) + \underline{b}^{(+)}(z)}{\sqrt{2}}, \tag{7.55}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{a}_2(z) &= \frac{\underline{U}_{2H}(z)}{\sqrt{Z_L}} = \frac{-\underline{U}_H^{(-)}(z) + \underline{U}_H^{(+)}(z)}{\sqrt{Z_L}} \\
 &= \sqrt{Z_L} \underline{I}_{2H}(z) = \sqrt{Z_L} (-\underline{I}_H^{(-)}(z) + \underline{I}_H^{(+)}(z)) \\
 &= \frac{-\underline{a}^{(-)}(z) + \underline{a}^{(+)}(z)}{\sqrt{2}}, \tag{7.56}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{b}_2(z) &= \frac{\underline{U}_{2R}(z)}{\sqrt{Z_L}} = \frac{-\underline{U}_R^{(-)}(z) + \underline{U}_R^{(+)}(z)}{\sqrt{Z_L}} \\
 &= -\sqrt{Z_L} \underline{I}_{2R}(z) = -\sqrt{Z_L} (-\underline{I}_R^{(-)}(z) + \underline{I}_R^{(+)}(z)) \\
 &= \frac{-\underline{b}^{(-)}(z) + \underline{b}^{(+)}(z)}{\sqrt{2}}. \tag{7.57}
 \end{aligned}$$

Durch Auflösen nach den komplexen Wellenamplituden der Gegentaktwellen und Gleichtaktwellen erhält man:

$$\underline{a}^{(-)}(z) = \frac{\underline{a}_1(z) - \underline{a}_2(z)}{\sqrt{2}}, \tag{7.58}$$

$$\underline{b}^{(-)}(z) = \frac{\underline{b}_1(z) - \underline{b}_2(z)}{\sqrt{2}}, \tag{7.59}$$

$$\underline{a}^{(+)}(z) = \frac{\underline{a}_1(z) + \underline{a}_2(z)}{\sqrt{2}}, \tag{7.60}$$

$$\underline{b}^{(+)}(z) = \frac{\underline{b}_1(z) + \underline{b}_2(z)}{\sqrt{2}}. \tag{7.61}$$

Kapitel 8.

Kreisdiagramme

8.1. Inversionsdiagramm

8.1.1. Herleitung des Inversionsdiagramms

Das Ziel der folgenden Überlegungen ist es, graphische Hilfsmittel zur Analyse und Synthese von Transformationsschaltungen zu schaffen.

Die Inversion

$$\underline{Z} = R + jX = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G}{G^2 + B^2} - j\frac{B}{G^2 + B^2} \quad (8.1)$$

beschreibt eine konforme Abbildung der Admittanzebene auf die Impedanzebene, siehe Abbildung 8.1. Da es sich um einen Sonderfall der Möbius-Transformation handelt, werden Kreise auf Kreise abgebildet, wobei Geraden als Sonderfälle von Kreisen mit unendlichem Radius anzusehen sind. Die senkrechten Geraden $G = \text{const.}$ konstanten Wirkleitwerts der Admittanzebene werden auf Kreise konstanten Wirkleitwerts G mit Mittelpunkt $\frac{1}{2G}$ und Radius $\frac{1}{2G}$ in der Impedanzebene abgebildet. Die horizontalen Geraden $B = \text{const.}$ konstanten Blindleitwerts der Admittanzebene werden auf Kreise konstanten Blindleitwerts B mit Mittelpunkt $-j\frac{1}{2B}$ und Radius $\frac{1}{2B}$ in der Impedanzebene abgebildet.

Die Umkehrabbildung

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \quad (8.2)$$

der Impedanzebene auf die Admittanzebene ist völlig dual. Die senkrechten Geraden $R = \text{const.}$ konstanten Wirkwiderstands der Impedanzebene werden auf Kreise konstanten Wirkwiderstands R mit Mittelpunkt $\frac{1}{2R}$ und Radius $\frac{1}{2R}$ in der Admittanzebene abgebildet. Die horizontalen Geraden $X = \text{const.}$ konstanten Blindwiderstands der Impedanzebene werden auf Kreise konstanten Blindwiderstands X mit Mittelpunkt $-j\frac{1}{2X}$ und Radius $\frac{1}{2X}$ in der Admittanzebene abgebildet.

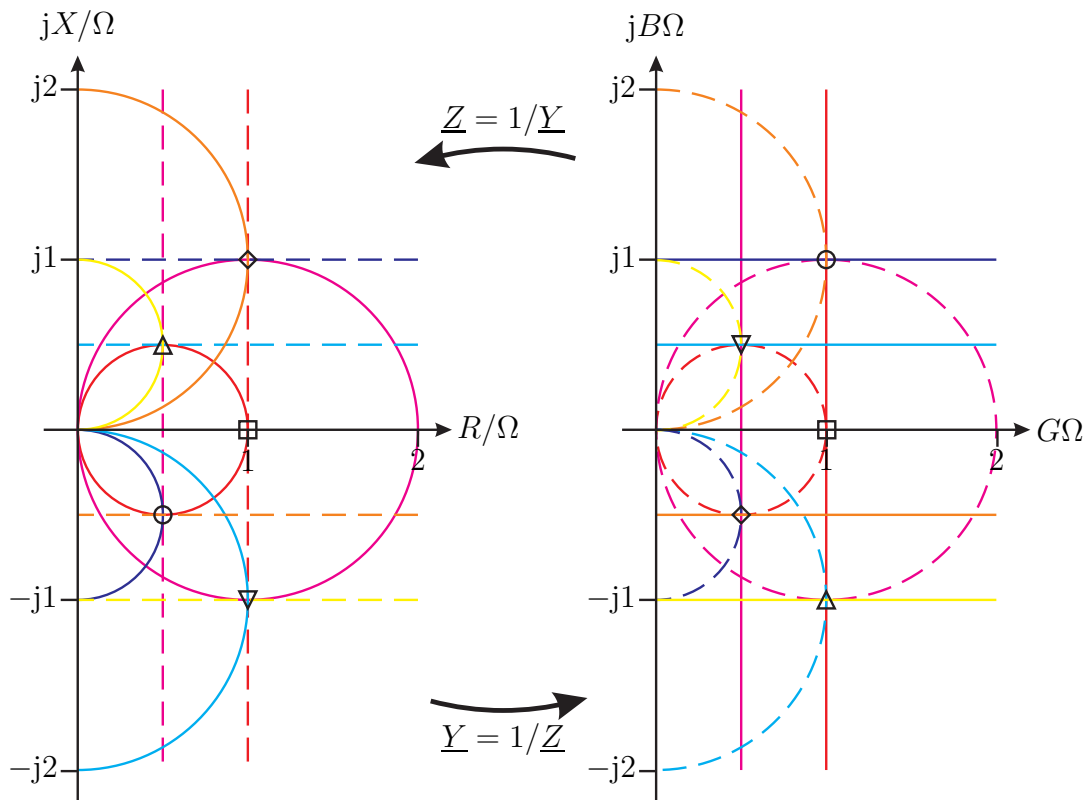


Abbildung 8.1.: Inversionsdiagramm

Ein universell einsetzbares Inversionsdiagramm erhält man, wenn man die Impedanzen und Admittanzen normiert. Mit dem Bezugswiderstand

$$R_N = \frac{1}{G_N} \quad (8.3)$$

folgen die normierte Impedanz

$$\frac{\underline{Z}}{R_N} = \frac{R}{R_N} + j\frac{X}{R_N} \quad (8.4)$$

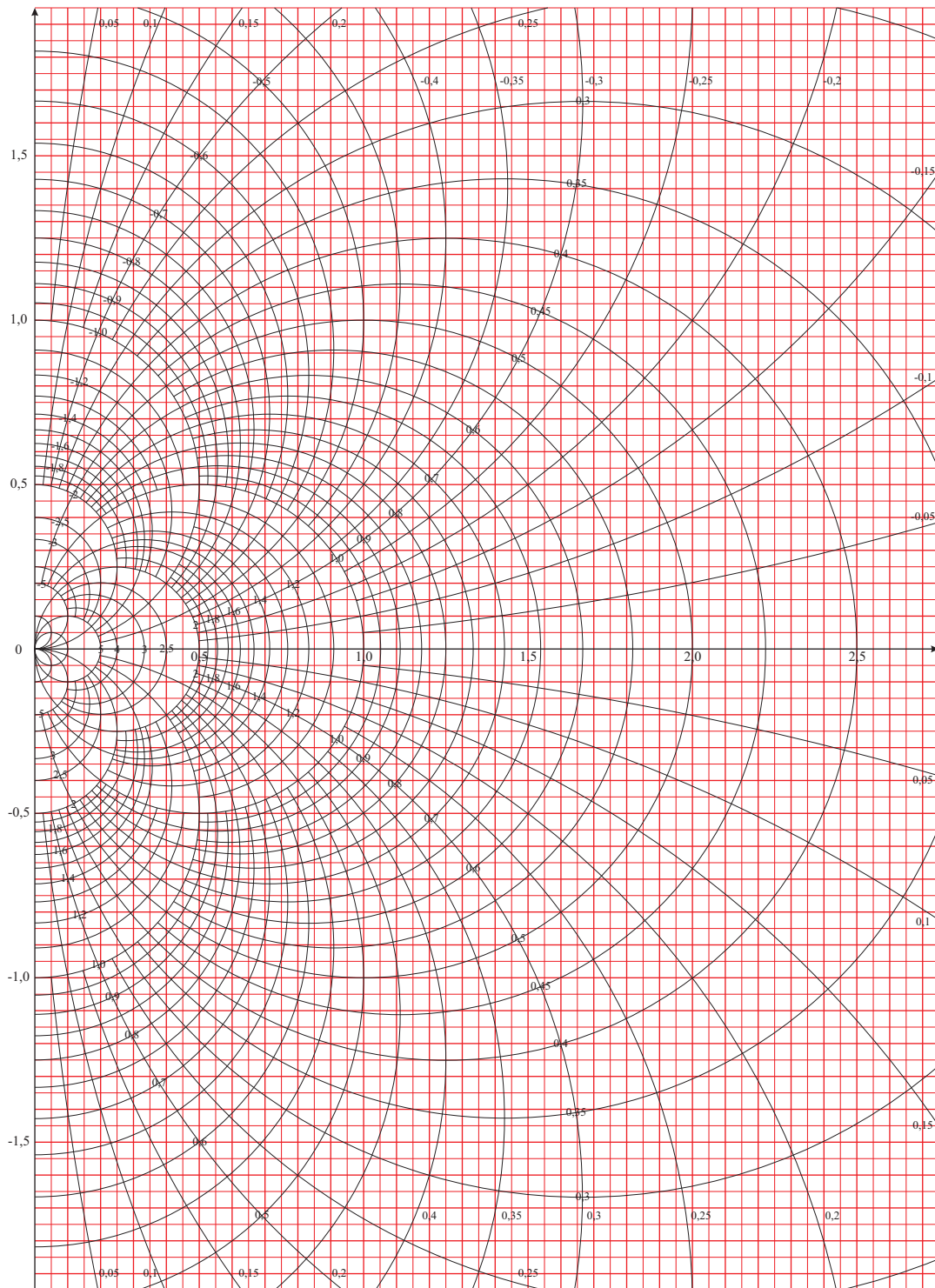
und die normierte Admittanz

$$\frac{\underline{Y}}{G_N} = \underline{Y}R_N = \frac{G}{G_N} + j\frac{B}{G_N} = GR_N + jBR_N. \quad (8.5)$$

Wegen der Dualität kann man das gleiche Inversionsdiagramm als Impedanzebene oder als Admittanzebene nutzen.

Aufgabe 8.1 Zeigen Sie, dass die Orte konstanten Wirkleitwerts G und die Orte konstanten Blindleitwerts B Kreise in der Impedanzebene sind!

8.1. Inversionsdiagramm



8.1.2. Transformation mit konzentrierten Bauelementen

8.1.2.1. Serienschaltung im Inversionsdiagramm

Zunächst wird die Serienschaltung konzentrierter Bauelemente betrachtet, siehe Abbildung 8.2.

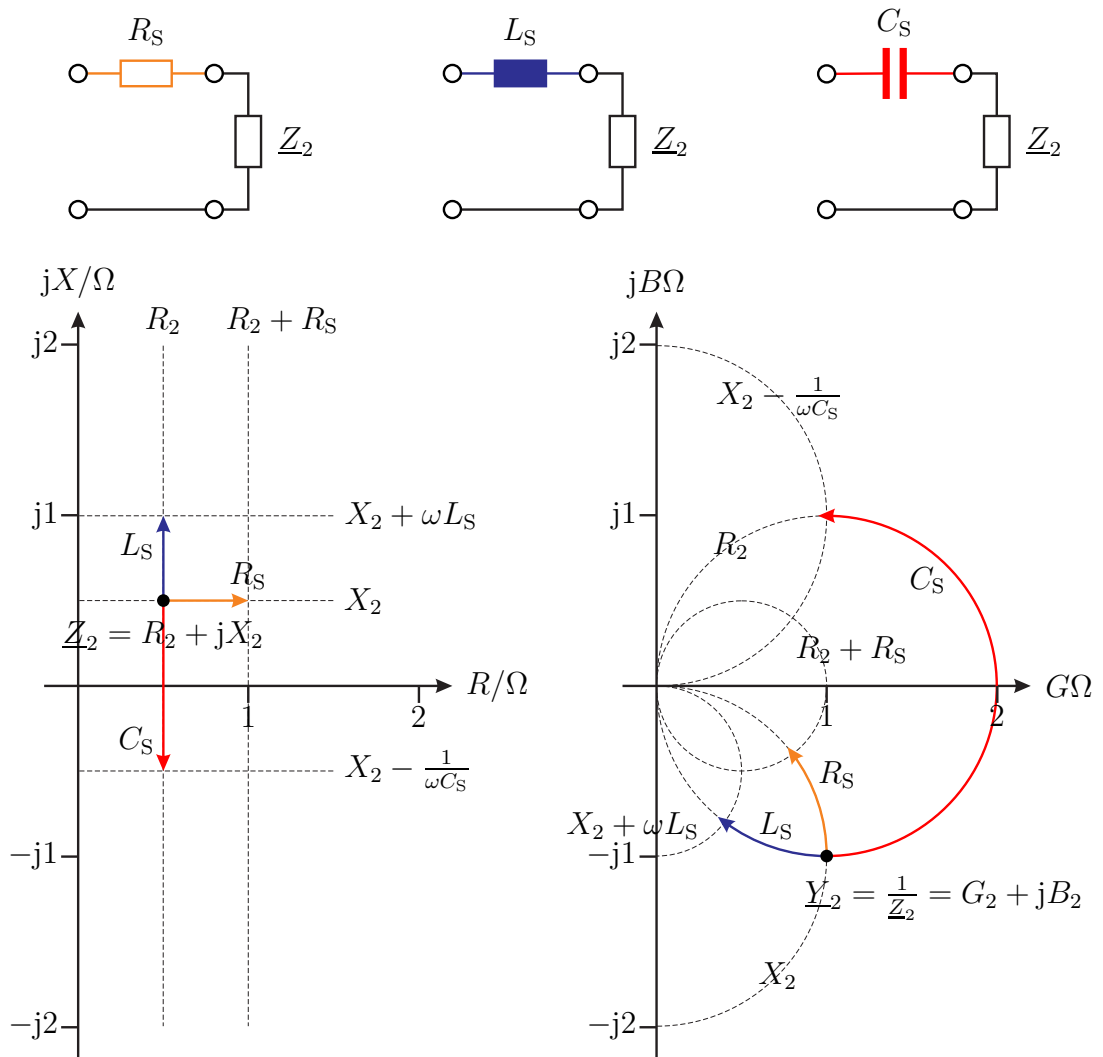


Abbildung 8.2.: Serienschaltung im Inversionsdiagramm

- Die Serienschaltung eines Wirkwiderstands ist eine verlustbehaftete Transformation, mit der sich in der Impedanzebene Punkte rechts von \underline{Z}_2 und in der Admittanzebene Punkte auf dem Segment des Kreises konstanten Blindwiderstands X_2 durch \underline{Y}_2 in Richtung Ursprung erreichen lassen.

- Die Serienschaltung eines Blindwiderstands ist eine verlustfreie Transformation, mit der sich in der Impedanzebene Punkte oberhalb oder unterhalb von \underline{Z}_2 und in der Admittanzebene Punkte auf dem Kreis konstanten Wirkwiderstands R_2 durch \underline{Y}_2 erreichen lassen.

8.1.2.2. Parallelschaltung im Inversionsdiagramm

Nun wird die Parallelschaltung konzentrierter Bauelemente betrachtet, siehe Abbildung 8.3.

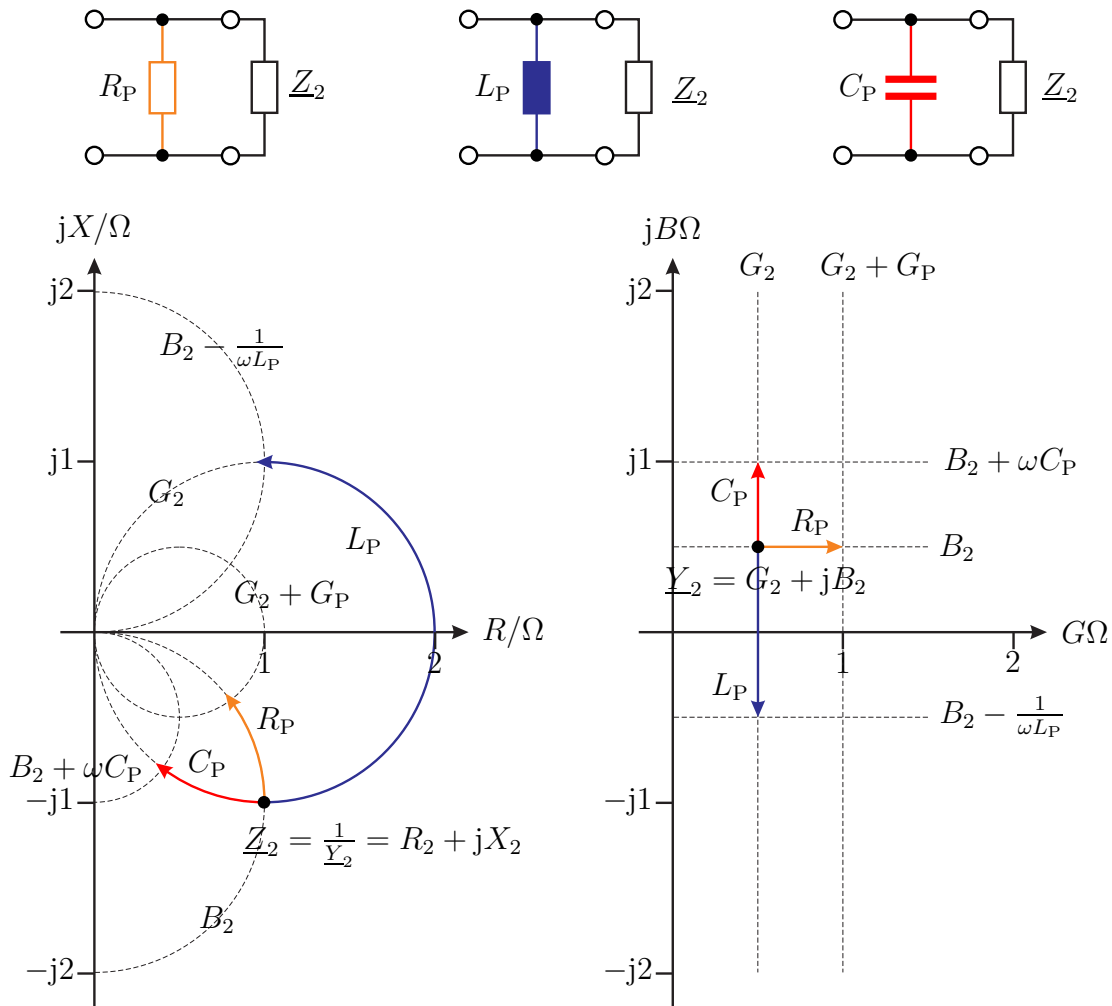


Abbildung 8.3.: Parallelschaltung im Inversionsdiagramm

- Die Parallelschaltung eines Wirkleitwerts ist eine verlustbehaftete Transformation, mit der sich in der Impedanzebene Punkte auf dem Segment des

Kreises konstanten Blindleitwerts B_2 durch \underline{Z}_2 in Richtung Ursprung und in der Admittanzebene Punkte rechts von \underline{Y}_2 erreichen lassen.

- Die Parallelschaltung eines Blindleitwerts ist eine verlustfreie Transformation, mit der sich in der Impedanzebene Punkte auf dem Kreis konstanten Wirkleitwerts G_2 durch \underline{Z}_2 und in der Admittanzebene Punkte oberhalb oder unterhalb von \underline{Y}_2 erreichen lassen.

Mit nur einem Blindelement sind nur bestimmte Transformationen möglich. Zum Lösen beliebiger Transformationsaufgaben werden im Allgemeinen Transformationsschaltungen mit mehreren Blindelementen benötigt.

8.1.2.3. Transformation mit mehreren Blindelementen

Wenn mehr als ein Blindelement verwendet wird, können ausgehend von \underline{Z}_2 flächige Bereiche in der Impedanzebene oder in der Admittanzebene erreicht werden, siehe Abbildung 8.4.

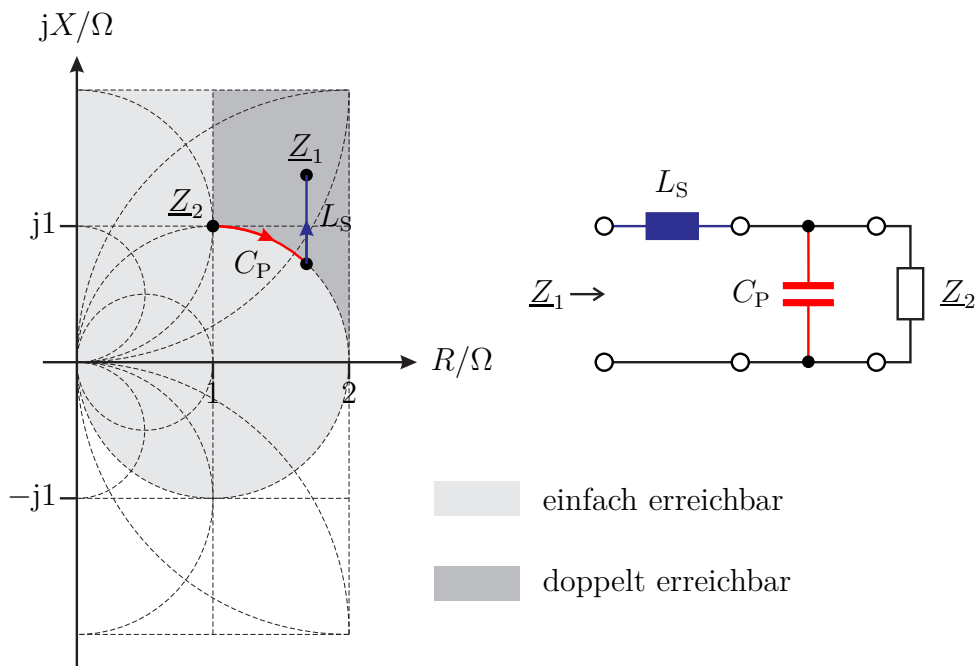


Abbildung 8.4.: Transformation mit mehreren Blindelementen

Man kann prinzipiell jede Transformationsaufgabe mit einer verlustfreien Transformationsschaltung aus maximal zwei Blindelementen lösen, man muss hier jedoch neben den Bauelementewerten auch die Schaltungsstruktur geeignet wählen. Es gibt verlustfreie Transformationsschaltungen aus drei Blindelementen, mit

denen man bei vorgegebener Schaltungsstruktur allein durch passende Wahl der Bauelementewerte jede Transformationsaufgabe lösen kann. Die Π -Schaltung, siehe Abbildung 8.5, ist eine derartige universelle Transformationsschaltung. Eine bestimmte Eingangsimpedanz \underline{Z}_1 ist hier ausgehend von der Ausgangsimpedanz \underline{Z}_2 auf unendlich vielen Transformationswegen erreichbar.

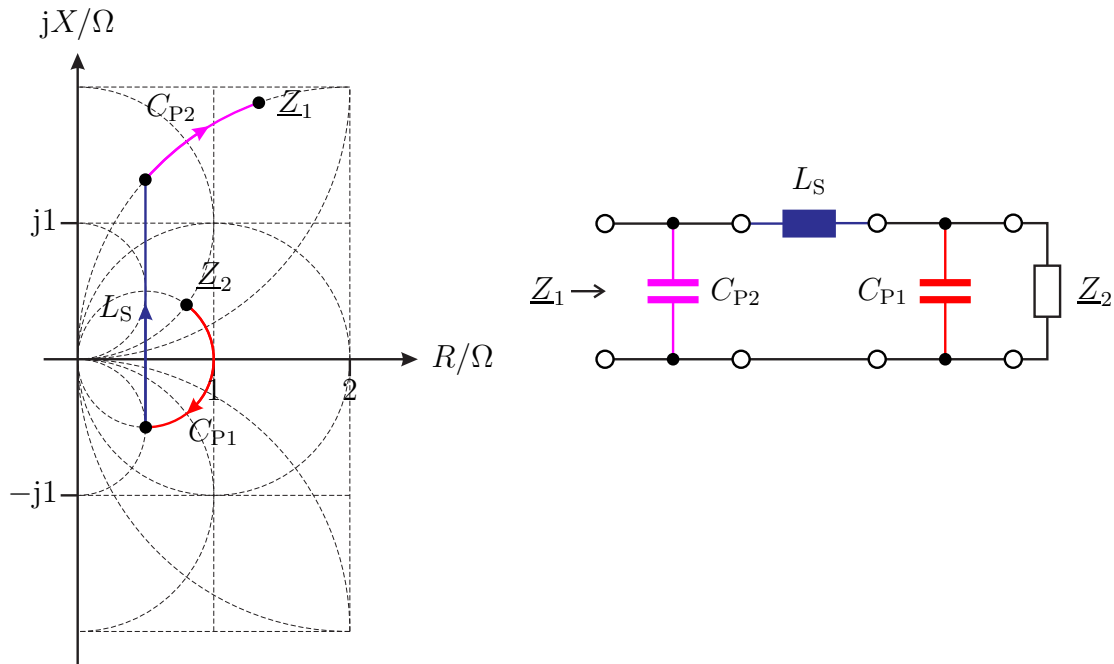


Abbildung 8.5.: Π -Schaltung

Aufgabe 8.2 Die in Abbildung 8.6 dargestellte Schaltung aus der Induktivität $L = 20 \mu\text{H}$ und den Kapazitäten $C_1 = 1,25 \text{ nF}$ und $C_2 = 500 \text{ pF}$ transformiert den Widerstand $R_2 = 100 \Omega$ in die Eingangsimpedanz \underline{Z}_1 . Die Schaltung werde bei der Kreisfrequenz $\omega = 10^7 \text{ s}^{-1}$ betrieben. Bestimmen Sie die Eingangsimpedanz \underline{Z}_1 mit Hilfe des Inversionsdiagramms!

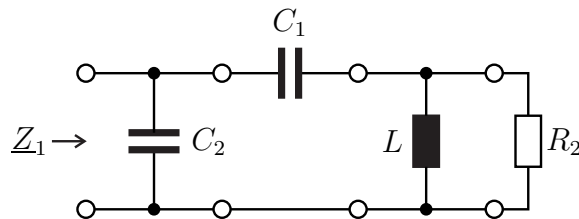


Abbildung 8.6.: Transformationsschaltung mit konzentrierten Bauelementen

8.2. Leitungsdiagramm

8.2.1. Herleitung des Leitungsdiagramms

8.2.1.1. Negativer reeller Reflexionsfaktor

Es werden Leitungstransformationen in der Impedanzebene betrachtet, siehe Abbildung 8.7. Zunächst wird der Spezialfall der Transformation eines negativen reellen Reflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_2 = -|\underline{\Gamma}_2|$ betrachtet. Die Impedanz \underline{Z}_2 ist dann reell und kleiner als der Wellenwiderstand Z_L , siehe (7.23). Mit (7.14) folgt der Anpassungsfaktor

$$m = \frac{1 - |\underline{\Gamma}_2|}{1 + |\underline{\Gamma}_2|}.$$

Die auf den Wellenwiderstand Z_L normierte Eingangsimpedanz einer mit dem negativem reellem Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_2$ abgeschlossenen Leitung der normierten Länge l/λ ist

$$\frac{\underline{Z}_1}{Z_L} = \frac{m + j \tan\left(2\pi\frac{l}{\lambda}\right)}{1 + jm \tan\left(2\pi\frac{l}{\lambda}\right)}, \quad (8.6)$$

siehe (7.27) und (2.38).

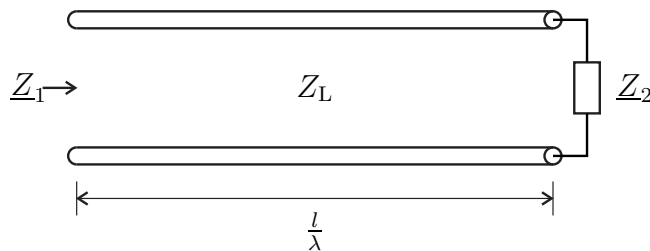


Abbildung 8.7.: Leitungstransformation

Die Eingangsimpedanz \underline{Z}_1 kann als Funktion des Anpassungsfaktors m oder als Funktion von $\tan\left(2\pi\frac{l}{\lambda}\right)$ betrachtet werden. Es handelt sich um Sonderfälle der Möbius-Transformation. Bei den Orten konstanten Anpassungsfaktors m oder den Orten konstanter normierter Leitungslänge l/λ , was einem konstanten $\tan\left(2\pi\frac{l}{\lambda}\right)$ entspricht, handelt es sich folglich um Kreise in der Impedanzebene, siehe Abbildung 8.8.

Einen Kreis konstanten Anpassungsfaktors m erhält man bei einem konstantem negativem reellem Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_2 = -|\underline{\Gamma}_2|$ und Variation der normierten Leitungslänge l/λ . Der Kreis konstanten Anpassungsfaktors m hat den Mittelpunkt $\frac{Z_L}{2} \left(\frac{1}{m} + m\right)$ und den Radius $\frac{Z_L}{2} \left(\frac{1}{m} - m\right)$,

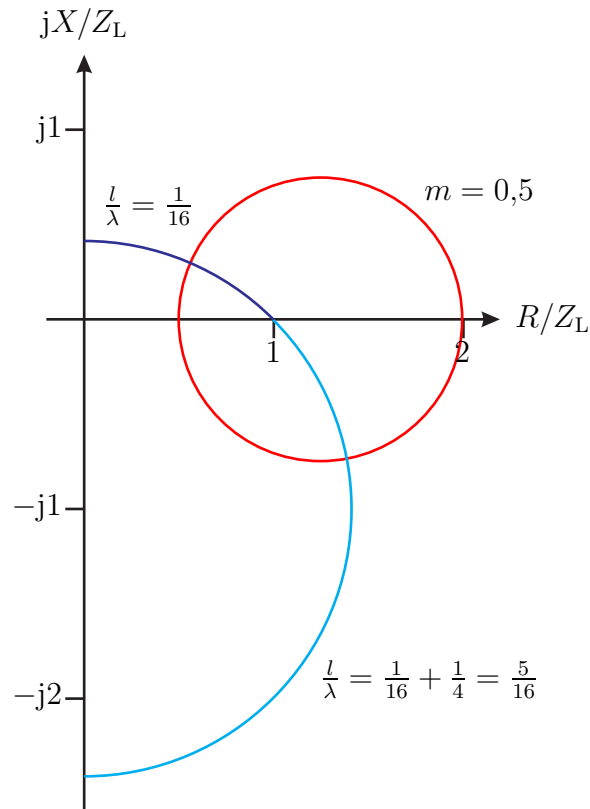


Abbildung 8.8.: Kreis konstanten Anpassungsfaktors m und Kreise konstanter normierter Leitungslänge l/λ in der auf den Wellenwiderstand Z_L normierten Impedanzebene

Einen Kreis konstanter normierter Leitungslänge l/λ erhält man bei Variation des Anpassungsfaktors m , das heißt bei Variation des negativen reellen Reflexionsfaktors $\Gamma_2 = -|\Gamma_2|$. Der Kreis konstanter normierter Leitungslänge l/λ hat den Mittelpunkt $-jZ_L \cot\left(4\pi\frac{l}{\lambda}\right)$ und den Radius $\left|\frac{Z_L}{\sin\left(4\pi\frac{l}{\lambda}\right)}\right|$. Die Kreisgleichung ist

$$\left|Z_1 + jZ_L \cot\left(4\pi\frac{l}{\lambda}\right)\right|^2 = \left(\frac{Z_L}{\sin\left(4\pi\frac{l}{\lambda}\right)}\right)^2.$$

Einsetzen von $\underline{Z}_1 = Z_L$ ergibt

$$\begin{aligned} \left| Z_L + jZ_L \cot\left(4\pi\frac{l}{\lambda}\right) \right|^2 &= Z_L^2 + Z_L^2 \left(\cot\left(4\pi\frac{l}{\lambda}\right) \right)^2 \\ &= Z_L^2 \frac{\left(\sin\left(4\pi\frac{l}{\lambda}\right)\right)^2 + \left(\cos\left(4\pi\frac{l}{\lambda}\right)\right)^2}{\left(\sin\left(4\pi\frac{l}{\lambda}\right)\right)^2} \\ &= \left(\frac{Z_L}{\sin\left(4\pi\frac{l}{\lambda}\right)} \right)^2, \end{aligned}$$

das heißt alle Kreise konstanter normierter Leitungslänge l/λ gehen durch den Punkt Z_L . Beim Durchlaufen des Punktes Z_L auf einem der Kreise ändert sich der Parameter l/λ um $1/4$, siehe Abbildung 8.8.

In der Admittanzebene erhält man durch Bilden des Kehrwerts von (8.6)

$$\underline{Y}_1 Z_L = \frac{Z_L}{\underline{Z}_1} = \frac{1 + jm \tan\left(2\pi\frac{l}{\lambda}\right)}{m + j \tan\left(2\pi\frac{l}{\lambda}\right)} = \frac{\frac{1}{m} + j \tan\left(2\pi\frac{l}{\lambda}\right)}{1 + j\frac{1}{m} \tan\left(2\pi\frac{l}{\lambda}\right)}. \quad (8.7)$$

Bis auf die Ersetzung von m durch $1/m$ ist dies die gleiche Formel wie in der Impedanzebene, siehe (8.6). Für die Orte konstanten Anpassungsfaktors m oder die Orte konstanter normierter Leitungslänge l/λ ergeben sich deshalb die formal gleichen Kreisgleichungen wie in der Impedanzebene, wobei die beiden Äste l/λ und $l/\lambda \pm 4$ der Kreise konstanter normierter Leitungslänge l/λ jedoch vertauscht sind. Insbesondere befinden sich die Orte negativen reellen Reflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_2 = -|\underline{\Gamma}_2|$ jetzt rechts vom Ort perfekter Anpassung.

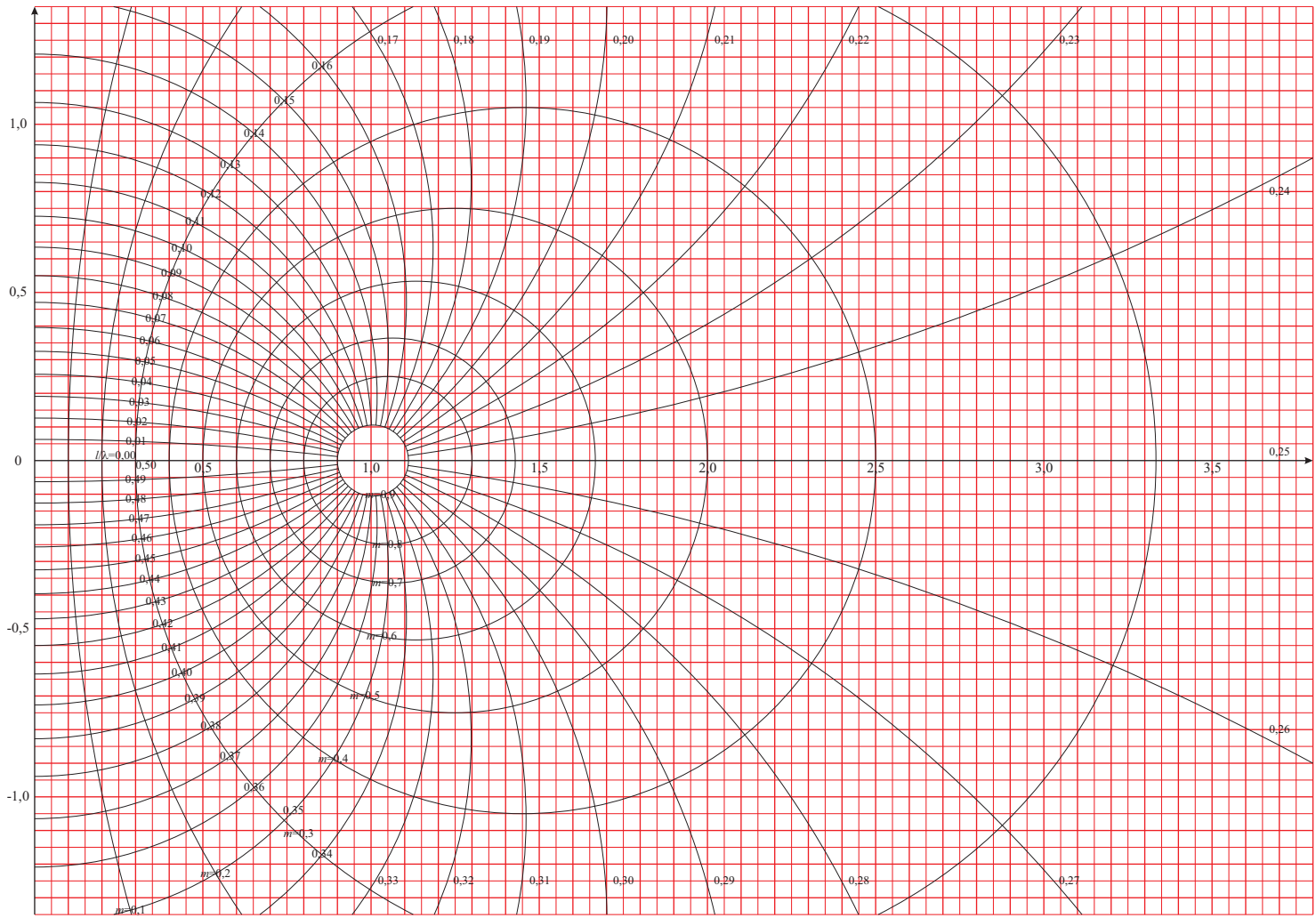
Aufgabe 8.3 Zeigen Sie, dass die Orte konstanten Anpassungsfaktors m und die Orte konstanter normierter Leitungslänge l/λ Kreise in der Impedanzebene sind!

8.2.1.2. Komplexer Reflexionsfaktor

Der komplexe Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_2$ kann gemäß (7.9) als Ergebnis der Transformation eines negativen reellen Reflexionsfaktors $-|\underline{\Gamma}_2|$ mit einer Leitung der normierten Länge

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{\pi - \arg(\underline{\Gamma}_2)}{4\pi}$$

aufgefasst werden, siehe auch (2.38). Diese virtuelle normierte Leitungslänge l/λ ist zur normierten Länge der realen Leitung hinzu zu addieren, um die Eingangsimpedanz \underline{Z}_1 als Ergebnis der Transformation eines negativen reellen Reflexionsfaktors $-|\underline{\Gamma}_2|$ zu erhalten, siehe Abbildung 8.9.



8.2. Leitungsdiagramm

widerstands normierten Admittanzebene mittels der Abbildungsvorschrift

$$\underline{\Gamma} = \frac{1 - \underline{Y}Z_L}{1 + \underline{Y}Z_L} \quad (8.9)$$

auffassen, siehe (8.2). Die beiden konformen Abbildungen unterscheiden sich mathematisch nur im Vorzeichen, das heißt in einer Spiegelung am Ursprung. Da es sich um Sonderfälle der Möbius-Transformation handelt, werden Kreise auf Kreise abgebildet, wobei Geraden wieder als Sonderfälle von Kreisen mit unendlichem Radius anzusehen sind.

Im Smith-Diagramm sind die Kreise konstanten normierten Wirkwiderstands R/Z_L und die Kreise konstanten normierten Blindwiderstands X/Z_L eingezeichnet. Die Kreise konstanten normierten Wirkwiderstands R/Z_L sind Kreise mit Mittelpunkt $\frac{\frac{R}{Z_L}}{1 + \frac{R}{Z_L}}$ und Radius $\frac{1}{1 + \frac{R}{Z_L}}$. Die Kreise konstanten normierten Blindwiderstands X/Z_L sind Kreise mit Mittelpunkt $1 + j\frac{1}{\frac{X}{Z_L}}$ und Radius $\left| \frac{1}{\frac{X}{Z_L}} \right|$.

Die Kreise konstanten normierten Wirkleitwerts GZ_L und den Kreise konstanten normierten Blindleitwerts BZ_L fehlen meistens. Da sich die Abbildungsvorschriften (8.8) und (8.9) nur im Vorzeichen unterscheiden, entstehen diese Kreisysteme aus den Kreisen konstanten normierten Wirkwiderstands R/Z_L und den Kreisen konstanten normierten Blindwiderstands X/Z_L durch Spiegeln am Ursprung. Man behilft sich, indem man die zu betrachtenden Punkte und Transformationswege am Ursprung gespiegelt einträgt.

Die Kreise konstanten Anpassungsfaktors m sind Kreise konstanten Reflexionsfaktorbetrags $|\underline{\Gamma}|$ und damit konzentrische Kreise um den Ursprung mit Radius $\frac{1-m}{1+m}$, siehe (7.15). Die Orte konstanter normierter Leitungslänge l/λ sind Geraden durch den Ursprung in der Reflexionsfaktorebene, siehe (7.9) und (2.38).

Aufgabe 8.4 Zeigen Sie, dass die Orte konstanten normierten Wirkwiderstands R/Z_L und die Orte konstanten normierten Blindwiderstands X/Z_L Kreise in der Reflexionsfaktorebene sind!

8.3.2. Transformation mit konzentrierten Bauelementen

8.3.2.1. Serienschaltung im Smith-Diagramm

Zunächst wird die Serienschaltung konzentrierter Bauelemente betrachtet, siehe Abbildung 8.11.

- Bei Serienschaltung eines Wirkwiderstands erfolgt die Reflexionsfaktoränderung entlang eines Kreises konstanten Blindwiderstands X_2 in Richtung des Punktes $\underline{\Gamma} = 1$.

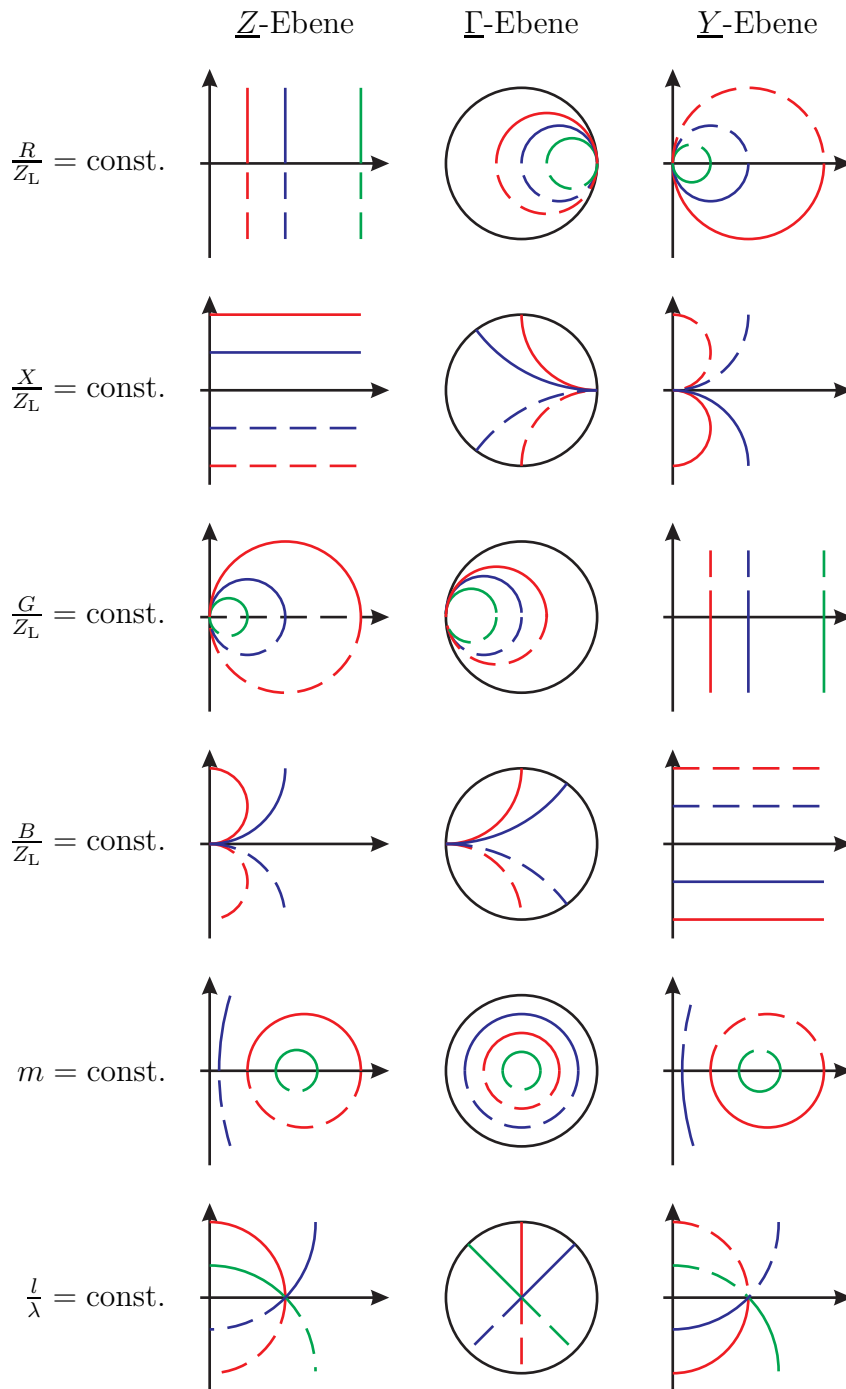
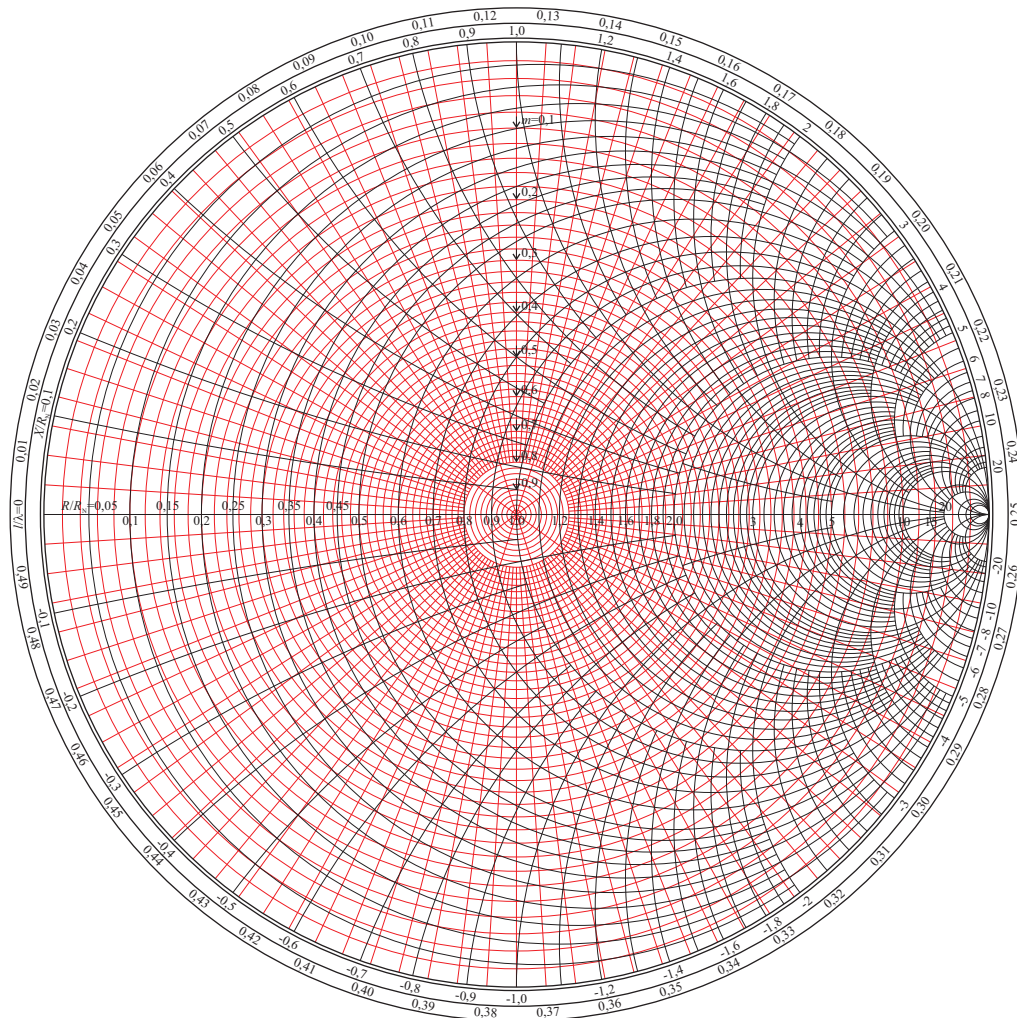


Abbildung 8.10.: Konforme Abbildung der Impedanzebene und der Admittanzebene auf die Reflexionsfaktorebene

8.3. Smith-Diagramm



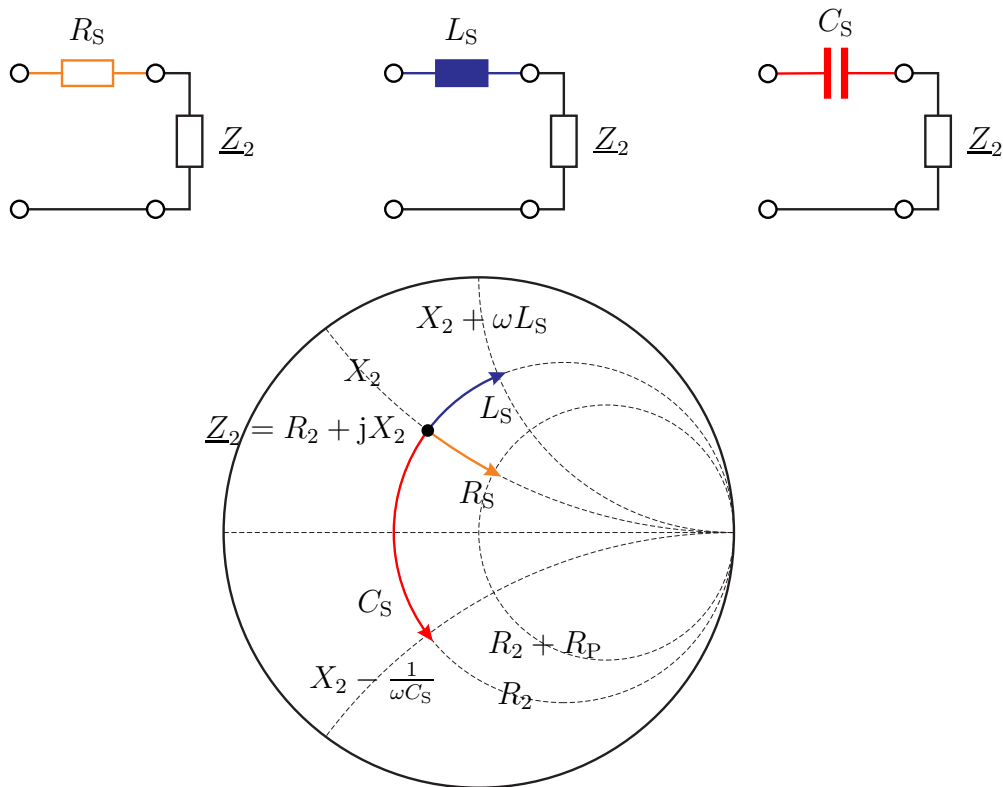


Abbildung 8.11.: Serienschaltung im Smith-Diagramm

- Bei Serienschaltung eines Blindwiderstands erfolgt die Reflexionsfaktoränderung entlang eines Kreises konstanten Wirkwiderstands R_2 .

8.3.2.2. Parallelschaltung im Smith-Diagramm

Nun wird die Parallelschaltung konzentrierter Bauelemente betrachtet, siehe Abbildung 8.12.

- Bei Parallelschaltung eines Wirkleitwerts erfolgt die Reflexionsfaktoränderung entlang eines Kreises konstanten Blindleitwerts B_2 in Richtung des Punktes $\Gamma = -1$.
- Bei Parallelschaltung eines Blindleitwerts erfolgt die Reflexionsfaktoränderung entlang eines Kreises konstanten Wirkleitwerts G_2 .

Rechts unten in Abbildung 8.12 ist am Beispiel der Transformation durch Parallelschaltung einer Induktivität die Konstruktion des am Ursprung gespiegelten

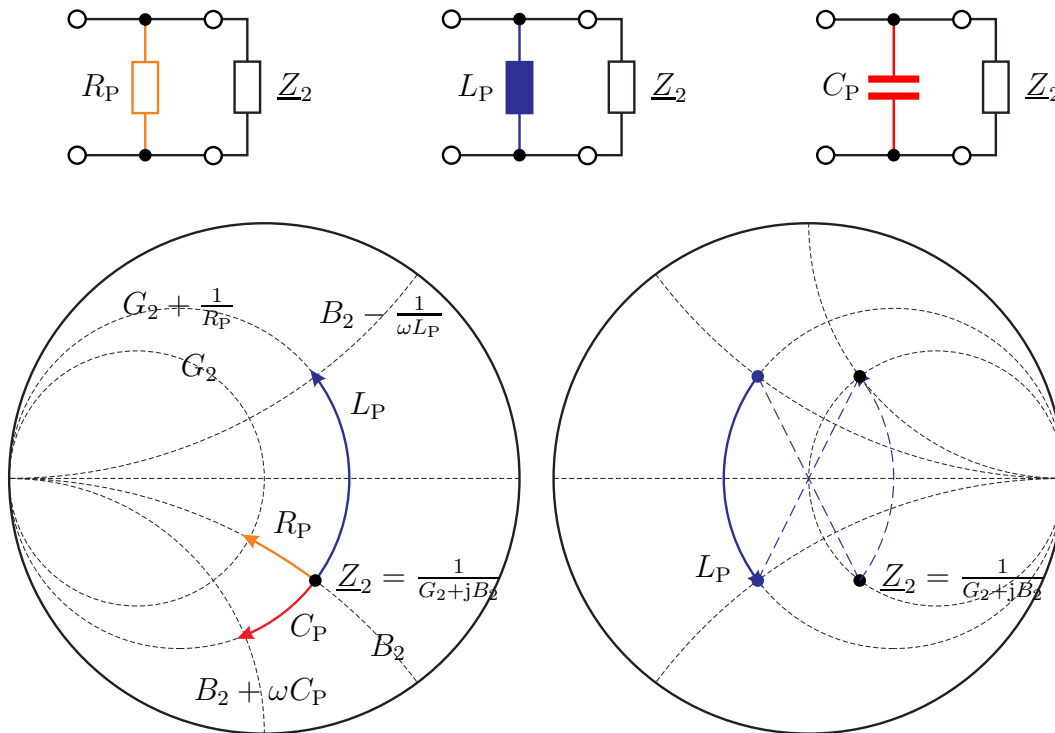


Abbildung 8.12.: Parallelschaltung im Smith-Diagramm

Transformationsweges dargestellt. Diese Konstruktion verwendet man, falls die Kreise konstanten Wirkleitwerts und die Kreise konstanten Blindleitwerts im verwendeten Smith-Diagramm nicht enthalten sind.

8.3.3. Leitungstransformation im Smith-Diagramm

Eine Leitung bewirkt eine Reflexionsfaktoränderung entlang eines Kreises konstanten Anpassungsfaktors m im Uhrzeigersinn, siehe Abbildung 8.13. Der Winkel der Drehung ist proportional zur normierten Leitungslänge l/λ .

Aufgabe 8.5 Der Widerstand $R_2 = 50\ \Omega$ soll in den Eingangsimpedanz $Z_1 = 200\ \Omega$ transformiert werden. Dazu wird die in Abbildung 8.14 dargestellte Transformationsschaltung verwendet. Die Wellenwiderstände beider Leitungen seien $Z_L = 50\ \Omega$. Bestimmen Sie die kürzestmöglichen normierten Leitungslängen l_1/λ und l_2/λ !

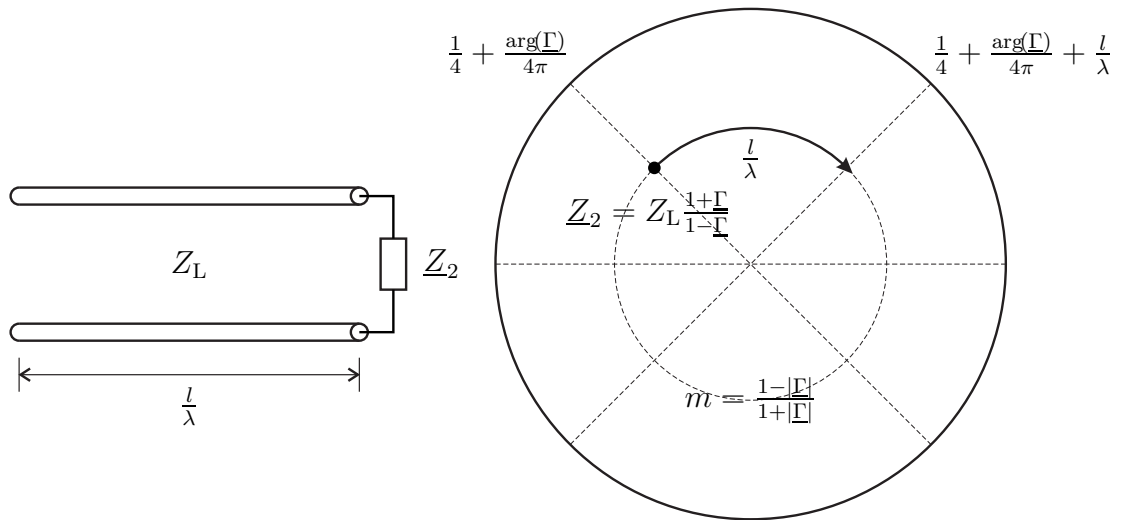


Abbildung 8.13.: Leitungstransformation im Smith-Diagramm

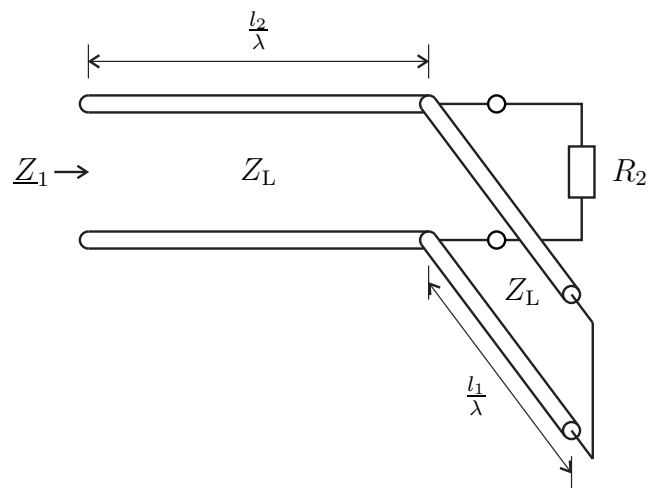


Abbildung 8.14.: Transformationsschaltung mit Leitungen

Kapitel 9.

Mehrtore

9.1. Streumatrix

In den letzten beiden Kapiteln wurden komplexe Wellenamplituden an Eintoren betrachtet. Jetzt sollen komplexe Wellenamplituden an Mehrporten betrachtet werden, siehe Abbildung 9.1.

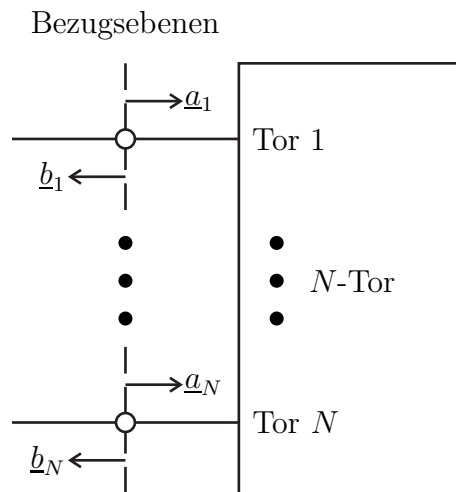


Abbildung 9.1.: Mehrtor

An jedem Tor n definiert man eine komplexe Wellenamplitude \underline{a}_n der zulaufenden Welle und eine komplexe Wellenamplitude \underline{b}_n der ablaufenden Welle. Die Bezugswellen sind wieder so gewählt, dass sich der Betrag der auf das Tor n zulaufende Leistung zu

$$|P_{an}| = \frac{1}{2} |\underline{a}_n|^2$$

ergibt und dass sich der Betrag der von dem Tor n ablaufende Leistung zu

$$|P_{bn}| = \frac{1}{2} |\underline{b}_n|^2$$

ergibt, vergleiche (7.3) und (7.6). Die komplexen Wellenamplituden sind in den Bezugsebenen bezüglich der Bezugswellen auf den verwendeten Wellenleitersystemen definiert. Speziell bei Zweileitersystemen sind die komplexen Wellenamplituden bezüglich eines Bezugswiderstands R_N definiert, der dem Wellenwiderstand Z_L der Wellenleiter entspricht.

Für die vom Mehrtor aufgenommene Leistung folgt mit (7.28)

$$P = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2} |\underline{a}_n|^2 - \frac{1}{2} |\underline{b}_n|^2 \right).$$

Mit dem Vektor

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_N \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

der komplexen Wellenamplituden \underline{a}_n , $n = 1 \dots N$, der zulaufenden Wellen und dem Vektor

$$\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_N \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

der komplexen Wellenamplituden \underline{b}_n , $n = 1 \dots N$, der ablaufenden Wellen schreibt man kompakter

$$P = \frac{1}{2} \|\underline{\mathbf{a}}\|^2 - \frac{1}{2} \|\underline{\mathbf{b}}\|^2 = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{a}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{a}} - \frac{1}{2} \underline{\mathbf{b}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{b}}. \quad (9.3)$$

Eine auf ein Tor n zulaufende Welle der komplexen Wellenamplitude \underline{a}_n wird durch das lineare Mehrtor gestreut, so dass im Allgemeinen an allen Toren $m = 1 \dots N$ ablaufende Wellen entstehen, deren komplexe Wellenamplituden \underline{b}_m proportional zur komplexen Wellenamplitude \underline{a}_n der zulaufenden Welle an Tor n sind. Laufen gleichzeitig auf mehrere Tore des linearen Mehrtors Wellen zu, so überlagern sich die gestreuten Wellen additiv. Der Zusammenhang zwischen den komplexen Wellenamplituden der zulaufenden und der ablaufenden Wellen an einem linearen Mehrtor ergibt sich zu

$$\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_N \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{S}_{1,1} & \cdots & \underline{S}_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{S}_{N,1} & \cdots & \underline{S}_{N,N} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_N \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{a}}. \quad (9.4)$$

Die Elemente $\underline{S}_{m,n}$ der Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ bezeichnet man als Streuparameter.

9.2. Signalflussgraph

Der Signalflussgraph dient dem Veranschaulichen der Funktionsweise von Mehrportennetzen. Die komplexen Wellenamplituden \underline{a}_n , $n = 1 \dots N$, und \underline{b}_n , $n = 1 \dots N$, entsprechen den Knoten im Signalflussgraphen und die Streuparameter $\underline{S}_{m,n}$, $m, n = 1 \dots N$, entsprechen den Kanten im Signalflussgraphen, siehe Abbildung 9.2.

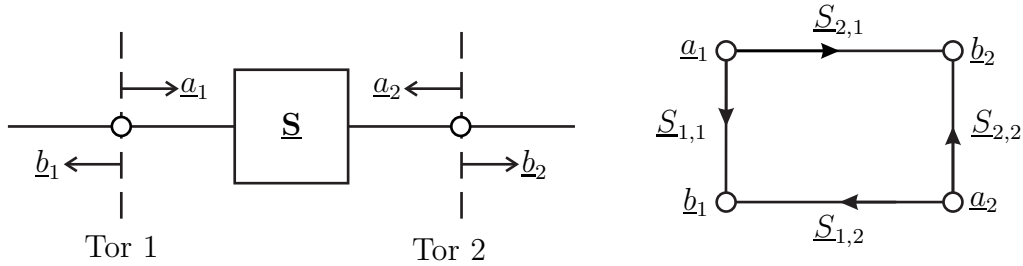


Abbildung 9.2.: Signalflussgraph

Bei komplizierten, aus mehreren Komponenten zusammengesetzten Netzwerken erhält man den resultierenden Signalflussgraphen durch Verknüpfen der Signalflussgraphen der einzelnen Komponenten. Abbildung 9.3 zeigt einige einfache Regeln zum Vereinfachen der entstehenden komplexen Signalflussgraphen. Die Mason-Regeln sind Verallgemeinerungen dieser Regeln [Mas53; Mas56].

Zum Herleiten der Schleifenregel liest man aus dem Signalflussgraphen

$$\begin{aligned}
 \underline{d} &= \underline{c} \\
 &= \underline{S}_{c,b} \underline{b} \\
 &= \underline{S}_{c,b} (\underline{a} + \underline{S}_{b,c} \underline{c}) \\
 &= \underline{S}_{c,b} (\underline{a} + \underline{S}_{b,c} \underline{d})
 \end{aligned}$$

ab. Aufgelöst nach \underline{d} erhält man

$$\underline{d} = \frac{\underline{S}_{c,b}}{1 - \underline{S}_{c,b} \underline{S}_{b,c}} \underline{a}.$$

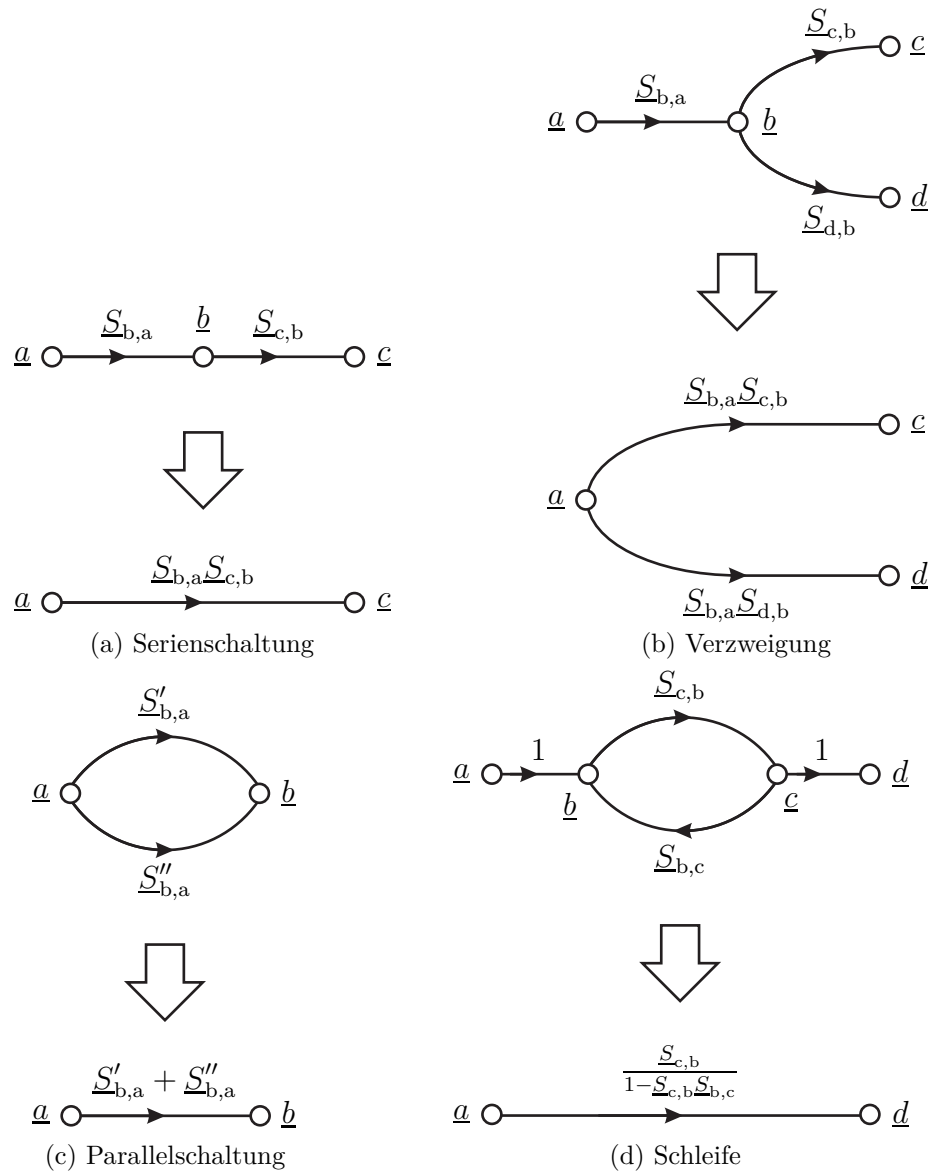


Abbildung 9.3.: Vereinfachen von Signalflussgraphen

9.3. Eigenschaften von Mehratoren

9.3.1. Eigenreflexionsfreiheit

Man bezeichnet ein Mehrator als eigenreflexionsfrei, falls alle $n = 1 \dots N$ Diagonalelemente der Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ Null sind:

$$\underline{S}_{n,n} = 0. \quad (9.5)$$

9.3.2. Passivität und Verlustfreiheit

Man bezeichnet ein Mehrator als passiv, falls die aufgenommene Leistung P stets größer oder gleich Null ist. Aus (9.3) folgt mit (9.4) und der Einheitsmatrix \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \underline{\mathbf{a}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{a}} - \frac{1}{2} \underline{\mathbf{a}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{a}} \geq 0, \\ \underline{\mathbf{a}}^{*\text{T}} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}) \cdot \underline{\mathbf{a}} &\geq 0. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Diese Ungleichung ist nur dann für alle Vektoren $\underline{\mathbf{a}}$ erfüllt, wenn die Matrix $\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}$ positiv semidefinit ist, das heißt keine negativen Eigenwerte hat [GL13].¹

Man bezeichnet ein Mehrator als verlustfrei, wenn die aufgenommene Leistung P stets Null ist, das heißt wenn stets

$$\underline{\mathbf{a}}^{*\text{T}} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}) \cdot \underline{\mathbf{a}} = 0$$

gilt. Diese Gleichung ist nur dann für alle Vektoren $\underline{\mathbf{a}}$ erfüllt, wenn

$$\underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}} = \mathbf{E} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{S}}^{-1} = \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}} = \mathbf{E} \quad (9.7)$$

gilt, das heißt wenn die Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ unitär ist.

9.3.3. Reziprozität

Zum Herleiten des Reziprozitätstheorems wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein Zweitor betrachtet. Das Zweitor selbst enthalte keine Quellen und bestehe aus reziproken, das heißt linearen und isotropen Materialien. Die Feldstärken $\vec{\underline{E}}$ und $\vec{\underline{H}}$ beschreiben die Feldkonfiguration wenn sich eine Quelle an Tor 1 befindet und Tor 2 reflexionsfrei abgeschlossen ist. Dual dazu beschreiben die Feldstärken $\vec{\underline{E}}'$ und $\vec{\underline{H}}'$ die Feldkonfiguration wenn sich eine Quelle an Tor 2 befindet und Tor 1 reflexionsfrei abgeschlossen ist.

¹ Die Eigenwerte der hermiteschen Matrix $\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}$ sind stets reell.

Eine Hülle umschlieÙe das Zweitor und verlaufe durch die Bezugsebenen der Tore. Nicht verschwindende Feldstärken treten dann nur in den Bereichen der Tore auf. Mit dem Reziprozitätstheorem (4.61) folgt

$$\iint_{\text{Tor 1}} \langle \vec{E} \times \vec{H}', d\vec{A} \rangle + \iint_{\text{Tor 2}} \langle \vec{E} \times \vec{H}', d\vec{A} \rangle = \iint_{\text{Tor 1}} \langle \vec{E}' \times \vec{H}, d\vec{A} \rangle + \iint_{\text{Tor 2}} \langle \vec{E}' \times \vec{H}, d\vec{A} \rangle.$$

Vereinfachend wird angenommen, dass an beiden Toren gleichartige Wellenleiter verwendet werden. Mit den Feldstärken \vec{E} und \vec{H} der Bezugswellen folgt mit (7.1) und (7.4) für die Feldstärken an Tor 1:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= a_1 \vec{E} + b_1 \vec{E} = a_1 (1 + \underline{S}_{1,1}) \vec{E}, \\ \vec{H} &= a_1 \vec{H} - b_1 \vec{H} = a_1 (1 - \underline{S}_{1,1}) \vec{H}, \\ \vec{E}' &= b_1 \vec{E} = a_2 \underline{S}_{1,2} \vec{E}, \\ \vec{H}' &= -b_1 \vec{H} = -a_2 \underline{S}_{1,2} \vec{H}. \end{aligned}$$

Dual folgt für die Feldstärken an Tor 2:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= b_2 \vec{E} = a_1 \underline{S}_{2,1} \vec{E}, \\ \vec{H} &= -b_2 \vec{H} = -a_1 \underline{S}_{2,1} \vec{H}, \\ \vec{E}' &= a_2 \vec{E} + b_2 \vec{E} = a_2 (1 + \underline{S}_{2,2}) \vec{E}, \\ \vec{H}' &= a_2 \vec{H} - b_2 \vec{H} = a_2 (1 - \underline{S}_{2,2}) \vec{H}. \end{aligned}$$

Einsetzen in das Reziprozitätstheorem ergibt:

$$\begin{aligned} & - \iint_{\text{Tor 1}} \langle a_1 (1 + \underline{S}_{1,1}) \vec{E} \times a_2 \underline{S}_{1,2} \vec{H}, d\vec{A} \rangle \\ & + \iint_{\text{Tor 2}} \langle a_1 \underline{S}_{2,1} \vec{E} \times a_2 (1 - \underline{S}_{2,2}) \vec{H}, d\vec{A} \rangle \\ & = \iint_{\text{Tor 1}} \langle a_2 \underline{S}_{1,2} \vec{E} \times a_1 (1 - \underline{S}_{1,1}) \vec{H}, d\vec{A} \rangle \\ & \quad - \iint_{\text{Tor 2}} \langle a_2 (1 + \underline{S}_{2,2}) \vec{E} \times a_1 \underline{S}_{2,1} \vec{H}, d\vec{A} \rangle, \\ & \quad \left(a_1 (1 + \underline{S}_{1,1}) a_2 \underline{S}_{1,2} + a_2 \underline{S}_{1,2} a_1 (1 - \underline{S}_{1,1}) \right) \iint_{\text{Tor 1}} \langle \vec{E} \times \vec{H}, d\vec{A} \rangle \\ & = \left(a_1 \underline{S}_{2,1} a_2 (1 - \underline{S}_{2,2}) + a_2 (1 + \underline{S}_{2,2}) a_1 \underline{S}_{2,1} \right) \iint_{\text{Tor 2}} \langle \vec{E} \times \vec{H}, d\vec{A} \rangle \\ & \underline{S}_{1,2} = \underline{S}_{2,1}. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Man bezeichnet ein Mehrtor als reziprok (umkehrbar), falls $\underline{S}_{m,n} = \underline{S}_{n,m}$ für alle $m, n = 1 \dots N$ gilt, das heißt falls die Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ symmetrisch ist:

$$\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{S}}^T. \tag{9.9}$$

Falls ein Mehrtor keine nichtreziproken Materialien (zum Beispiel Ferrite) enthält, ist es gemäß dem Reziprozitätstheorem immer reziprok. Reziprozität bedeutet nicht, dass die Tore vertauschbar sind, da immer noch $\underline{S}_{m,m} \neq \underline{S}_{n,n}$ für $n \neq m$ gelten kann.

9.4. Impedanzmatrix und Admittanzmatrix

Es werden Mehrtore mit Zweileitersystemen an den Toren betrachtet, siehe Abbildung 9.4. Man definiert den Spannungsvektor

$$\underline{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} = \sqrt{R_N} (\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}) \tag{9.10}$$

und den Stromvektor

$$\underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} = \frac{\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}}{\sqrt{R_N}}, \tag{9.11}$$

siehe (7.18) und (7.19).

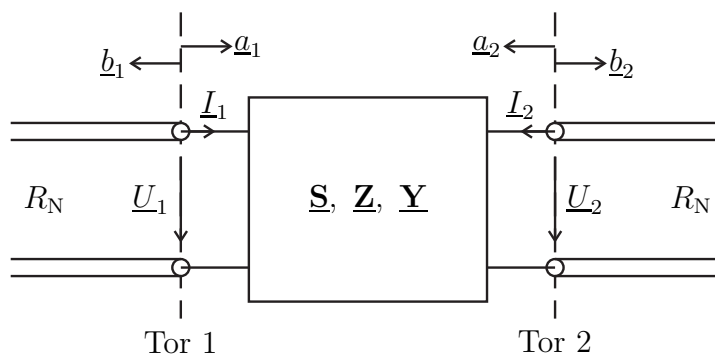


Abbildung 9.4.: Vierpol mit Spannungen und Strömen an den Toren

In der Elektronik hat sich das Verwenden der Impedanzmatrix $\underline{\mathbf{Z}}$ und der Admittanzmatrix $\underline{\mathbf{Y}}$ zum Beschreiben der Zusammenhänge zwischen Spannungsvek-

tor $\underline{\mathbf{U}}$ und Stromvektor $\underline{\mathbf{I}}$ an Mehreren etabliert. Es gelten

$$\underline{\mathbf{U}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{Z}_{1,1} & \cdots & \underline{Z}_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{Z}_{N,1} & \cdots & \underline{Z}_{N,N} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{Z}}} \cdot \underline{\mathbf{I}} \quad (9.12)$$

und

$$\underline{\mathbf{I}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{Y}_{1,1} & \cdots & \underline{Y}_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{Y}_{N,1} & \cdots & \underline{Y}_{N,N} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{Y}}} \cdot \underline{\mathbf{U}}. \quad (9.13)$$

Es folgt der Zusammenhang

$$\underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{Z}}^{-1} \quad (9.14)$$

zwischen Impedanzmatrix und Admittanzmatrix.

Wenn man den Spannungsvektor $\underline{\mathbf{U}}$ und den Stromvektor $\underline{\mathbf{I}}$ durch die komplexen Wellenamplituden $\underline{\mathbf{a}}$ und $\underline{\mathbf{b}}$ ausdrückt, erhält man mit der Einheitsmatrix \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} \sqrt{R_N} (\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}) &= \underline{\mathbf{Z}} \cdot \frac{\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}}{\sqrt{R_N}}, \\ R_N \mathbf{E} \cdot (\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}) &= \underline{\mathbf{Z}} \cdot (\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}), \\ (\underline{\mathbf{Z}} + R_N \mathbf{E}) \cdot \underline{\mathbf{b}} &= (\underline{\mathbf{Z}} - R_N \mathbf{E}) \cdot \underline{\mathbf{a}}, \\ \underline{\mathbf{b}} &= (\underline{\mathbf{Z}} + R_N \mathbf{E})^{-1} \cdot (\underline{\mathbf{Z}} - R_N \mathbf{E}) \cdot \underline{\mathbf{a}}. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Man erhält die Streumatrix (9.4) als Funktion der Impedanzmatrix zu

$$\underline{\mathbf{S}} = (\underline{\mathbf{Z}} + R_N \mathbf{E})^{-1} \cdot (\underline{\mathbf{Z}} - R_N \mathbf{E}) \quad (9.16)$$

Auflösen nach der Impedanzmatrix ergibt:

$$\begin{aligned} (\underline{\mathbf{Z}} + R_N \mathbf{E}) \cdot \underline{\mathbf{S}} &= (\underline{\mathbf{Z}} - R_N \mathbf{E}), \\ \underline{\mathbf{Z}} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}) &= R_N (\mathbf{E} + \underline{\mathbf{S}}), \\ \underline{\mathbf{Z}} &= R_N (\mathbf{E} + \underline{\mathbf{S}}) \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}})^{-1}. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Da die Admittanzmatrix die Inverse der Impedanzmatrix ist, gilt

$$\underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{Z}}^{-1} = \frac{1}{R_N} (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}) \cdot (\mathbf{E} + \underline{\mathbf{S}})^{-1}. \quad (9.18)$$

Auflösen nach der Streumatrix ergibt:

$$\begin{aligned}
 R_N \underline{\mathbf{Y}} &= (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}) \cdot (\mathbf{E} + \underline{\mathbf{S}})^{-1}, \\
 R_N \underline{\mathbf{Y}} \cdot (\mathbf{E} + \underline{\mathbf{S}}) &= (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}), \\
 (\mathbf{E} + R_N \underline{\mathbf{Y}}) \cdot \underline{\mathbf{S}} &= \mathbf{E} - R_N \underline{\mathbf{Y}}, \\
 \underline{\mathbf{S}} &= (\mathbf{E} + R_N \underline{\mathbf{Y}})^{-1} \cdot (\mathbf{E} - R_N \underline{\mathbf{Y}}). \quad (9.19)
 \end{aligned}$$

Man kann jeder Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ formal eine Impedanzmatrix $\underline{\mathbf{Z}}$ und eine Admittanzmatrix $\underline{\mathbf{Y}}$ zuordnen auch wenn dies physikalisch nicht sinnvoll ist, da sich die Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ beispielsweise auf ein Mehrtor in Hohlleitertechnik bezog, bei dem keine sinnvollen Definitionen für Spannungen $\underline{\mathbf{U}}$ und Ströme $\underline{\mathbf{I}}$ an den Toren existieren.

Aufgabe 9.1 Massefreie Netzwerke sind dadurch charakterisiert, dass es keinerlei elektrische Verbindung zwischen Masse und den übrigen Anschlüssen gibt, siehe Abbildung 9.5. Die Summe der in die Tore hineinfließenden Ströme $\underline{I}_m = 0$, $m = 1 \dots N$ muss daher stets Null sein. Betrachten Sie weiterhin den speziellen Betriebszustand, bei dem die Spannungen \underline{U}_n , $n = 1 \dots N$, an allen Toren gleich sind. Dann müssen alle Ströme \underline{I}_m , $m = 1 \dots N$, Null sein. Welche Eigenschaften hat die Admittanzmatrix $\underline{\mathbf{Y}}$ eines massefreien Mehrtors?

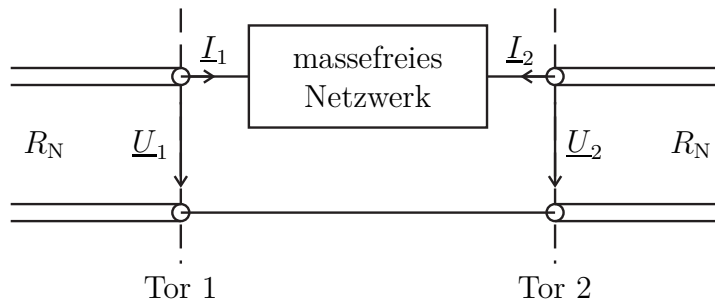


Abbildung 9.5.: Massefreier Vierpol

Aufgabe 9.2 Zeigen Sie, dass die Impedanzmatrix $\underline{\mathbf{Z}}$ und die Admittanzmatrix $\underline{\mathbf{Y}}$ eines reziproken Mehrtors symmetrisch sind! Welche Eigenschaften müssen die Impedanzmatrix $\underline{\mathbf{Z}}$ und die Admittanzmatrix $\underline{\mathbf{Y}}$ eines reziproken verlustfreien Mehrtors haben?

9.5. Transmissionsmatrix

Häufig werden Kaskaden von Zweitoren gebildet. Die Aufgabe besteht nun darin, die Eigenschaften des aus einer Kaskade mehrerer Zweitore bestehenden Zwei-

tors zu berechnen. Diese Aufgabe lässt sich mit Hilfe von Transmissionsmatrizen einfach lösen.

Wenn man die komplexen Wellenamplituden \underline{a}_1 und \underline{b}_1 an Tor 1 als die abhängigen Größen wählt, erhält man mit der Transmissionsmatrix

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{b}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{T}_{a,b} & \underline{T}_{a,a} \\ \underline{T}_{b,b} & \underline{T}_{b,a} \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}_2 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}, \quad (9.20)$$

siehe Abbildung 9.6. Die Elemente der Transmissionsmatrix \mathbf{T} bezeichnet man als Transmissionsparameter.

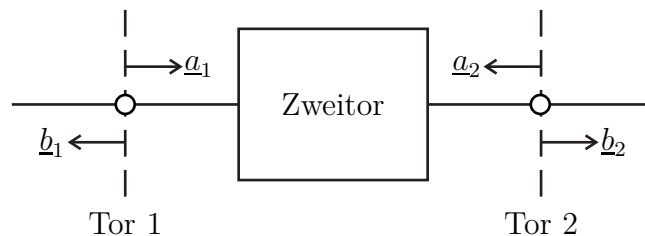


Abbildung 9.6.: Zweitor

Transmissionsmatrizen \mathbf{T} und Streumatrizen \mathbf{S} lassen sich ineinander umrechnen. Ausgehend von dem Streuparametermodell

$$\begin{aligned} \underline{b}_1 &= \underline{S}_{1,1}\underline{a}_1 + \underline{S}_{1,2}\underline{a}_2, \\ \underline{b}_2 &= \underline{S}_{2,1}\underline{a}_1 + \underline{S}_{2,2}\underline{a}_2, \end{aligned}$$

des Zweitores gemäß (9.4) erhält man durch Auflösen nach \underline{a}_1 und \underline{b}_1 :

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= \frac{1}{\underline{S}_{2,1}}\underline{b}_2 - \frac{\underline{S}_{2,2}}{\underline{S}_{2,1}}\underline{a}_2, \\ \underline{b}_1 &= \frac{\underline{S}_{1,1}}{\underline{S}_{2,1}}\underline{b}_2 - \frac{\underline{S}_{1,1}\underline{S}_{2,2}}{\underline{S}_{2,1}}\underline{a}_2 + \underline{S}_{1,2}\underline{a}_2. \end{aligned}$$

Hieraus liest man die Transmissionsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \underline{T}_{a,b} & \underline{T}_{a,a} \\ \underline{T}_{b,b} & \underline{T}_{b,a} \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{S}_{2,1}} \begin{pmatrix} 1 & -\underline{S}_{2,2} \\ \underline{S}_{1,1} & -\det(\mathbf{S}) \end{pmatrix} \quad (9.21)$$

ab, wobei $\det(\cdot)$ die Determinante der Matrix ist.²

² Die Determinante der Matrix \mathbf{S} ist $\det(\mathbf{S}) = \underline{S}_{1,1}\underline{S}_{2,2} - \underline{S}_{1,2}\underline{S}_{2,1}$.

Ausgehend von dem Transmissionsparametermodell

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= \underline{T}_{a,b} \underline{b}_2 + \underline{T}_{a,a} \underline{a}_2, \\ \underline{b}_1 &= \underline{T}_{b,b} \underline{b}_2 + \underline{T}_{b,a} \underline{a}_2, \end{aligned}$$

des Zweiters erhält man durch Auflösen nach \underline{b}_1 und \underline{b}_2 :

$$\begin{aligned} \underline{b}_2 &= \frac{1}{\underline{T}_{a,b}} \underline{a}_1 - \frac{\underline{T}_{a,a}}{\underline{T}_{a,b}} \underline{a}_2, \\ \underline{b}_1 &= \frac{\underline{T}_{b,b}}{\underline{T}_{a,b}} \underline{a}_1 - \frac{\underline{T}_{b,b} \underline{T}_{a,a}}{\underline{T}_{a,b}} \underline{a}_2 + \underline{T}_{b,a} \underline{a}_2. \end{aligned}$$

Hieraus liest man die Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \underline{S}_{1,1} & \underline{S}_{1,2} \\ \underline{S}_{2,1} & \underline{S}_{2,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{T}_{a,b}} \begin{pmatrix} \underline{T}_{b,b} & \det(\underline{\mathbf{T}}) \\ 1 & -\underline{T}_{a,a} \end{pmatrix} \quad (9.22)$$

ab, siehe (9.4).

Die Determinante der Transmissionsmatrix ergibt sich zu

$$\det(\underline{\mathbf{T}}) = \frac{1}{\underline{S}_{2,1}^2} \left(-\det(\underline{\mathbf{S}}) + \underline{S}_{1,1} \underline{S}_{2,2} \right) = \frac{\underline{S}_{1,2}}{\underline{S}_{2,1}}. \quad (9.23)$$

Insbesondere ist die Determinante der Transmissionsmatrix reziproker Zweitore eins, siehe (9.9).

Im Folgenden bezeichnen die tiefgestellten Indizes die Tornummer und die hochgestellten Indizes das Zweitor. Aus Abbildung 9.7 liest man

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1^{(1)} \\ \underline{b}_1^{(1)} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}_2^{(1)} \\ \underline{a}_2^{(1)} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1^{(2)} \\ \underline{b}_1^{(2)} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{(2)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}_2^{(2)} \\ \underline{a}_2^{(2)} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{(2)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}_2 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}$$

ab. Die Transmissionsmatrix einer Kaskade von Zweitoren ergibt sich daher zu

$$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{(2)}. \quad (9.24)$$

Nun wird die Kaskade eines allgemeine Zweitors mit der Transmissionsmatrix $\underline{\mathbf{T}}^{(1)}$ und eines reziproken Zweitors mit der Transmissionsmatrix $\underline{\mathbf{T}}^{(2)}$ betrachtet. Die Determinante der resultierenden Transmissionsmatrix ist

$$\det(\underline{\mathbf{T}}) = \det(\underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{(2)}) = \det(\underline{\mathbf{T}}^{(1)}) \underbrace{\det(\underline{\mathbf{T}}^{(2)})}_{=1} = \det(\underline{\mathbf{T}}^{(1)}). \quad (9.25)$$

Die Determinante der Transmissionsmatrix von Zweitoren ändert sich beim Anfügen weiterer reziproker Zweitore nicht.

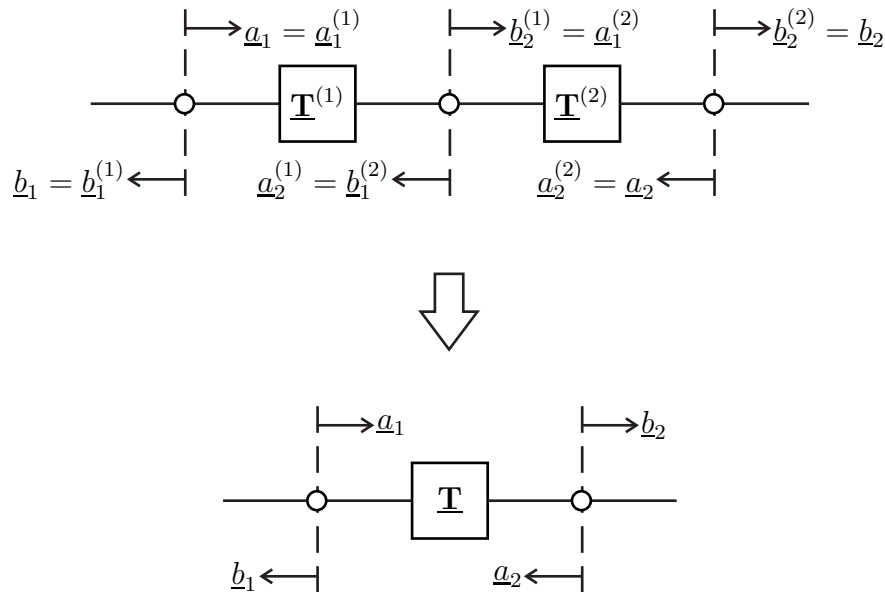


Abbildung 9.7.: Kaskade von Zweitoren

Aufgabe 9.3 Ein zur hier eingeführten Transmissionsmatrix $\underline{\mathbf{T}}$ analoges, in der Elektronik verwendetes Modell von Vierpolen ist die Kettenmatrix (im Englischen ABCD-Matrix). Mit den in Abbildung 9.4 eingeführten Zählpfeilen gilt

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix}. \quad (9.26)$$

Üblicherweise wird \underline{I}_2 mit entgegengesetzter Zählpfeilrichtung definiert, so dass hier aus Konsistenzgründen das Minuszeichen vor \underline{I}_2 erforderlich ist. Berechnen Sie die Kettenparameter \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} und \underline{D} als Funktionen der Transmissionsparameter und der Streuparameter und umgekehrt die Transmissionsparameter und die Streuparameter als Funktionen der Kettenparameter \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} und \underline{D} !

9.6. Modale Streumatrix

Ein Paar an Toren mit gleichartigen Zweileitersystemen kann man auch als ein symmetrisches Torpaar mit einem symmetrischen rein massegekoppelten Dreileitersystem ansehen, siehe Abbildung 9.8. Für die Umrechnung der Wellengrößen

gilt, siehe Abschnitt 7.12:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \underline{a}^{(-)} \\ \underline{a}^{(+)} \end{pmatrix} &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{a}}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{a}}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}^{(-)} \\ \underline{a}^{(+)} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{b}^{(-)} \\ \underline{b}^{(+)} \end{pmatrix} &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}^{(-)} \\ \underline{b}^{(+)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die hier auftretende orthogonale Transformationsmatrix \mathbf{U} entspricht der 2×2 -Hadamard-Matrix.

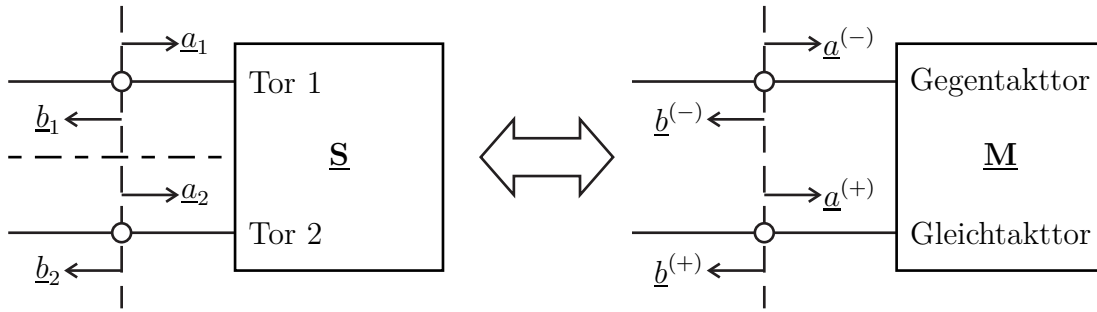


Abbildung 9.8.: Symmetrisches Torpaar

Das Zweitor kann durch seine Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ beschrieben werden, siehe (9.4). Durch Einsetzen ergibt sich für die Gegentaktwellen und die Gleichtaktwellen

$$\begin{pmatrix} \underline{b}^{(-)} \\ \underline{b}^{(+)} \end{pmatrix} = \mathbf{U}^T \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{U} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}^{(-)} \\ \underline{a}^{(+)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{M}^{(--)} & \underline{M}^{(-+)} \\ \underline{M}^{(+-)} & \underline{M}^{(++)} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}^{(-)} \\ \underline{a}^{(+)} \end{pmatrix}.$$

Es folgt die modale Streumatrix

$$\underline{\mathbf{M}} = \mathbf{U}^T \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{U}. \quad (9.27)$$

Mit (9.4) erhält man die modalen Streuparameter:

$$\underline{M}^{(--)} = \frac{1}{2} (\underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,1} - \underline{S}_{1,2} + \underline{S}_{2,2}), \quad (9.28)$$

$$\underline{M}^{(-+)} = \frac{1}{2} (\underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,1} + \underline{S}_{1,2} - \underline{S}_{2,2}), \quad (9.29)$$

$$\underline{M}^{(+-)} = \frac{1}{2} (\underline{S}_{1,1} + \underline{S}_{2,1} - \underline{S}_{1,2} - \underline{S}_{2,2}), \quad (9.30)$$

$$\underline{M}^{(++)} = \frac{1}{2} (\underline{S}_{1,1} + \underline{S}_{2,1} + \underline{S}_{1,2} + \underline{S}_{2,2}). \quad (9.31)$$

Die konventionellen Streuparameter $\underline{S}_{1,1}$, $\underline{S}_{2,1}$, $\underline{S}_{1,2}$ und $\underline{S}_{2,2}$ bezeichnet man auch als nodale Streuparameter. Neben den Eigenparametern $\underline{M}^{(--)}$ und $\underline{M}^{(++)}$ gibt es die Konversionsparameter $\underline{M}^{(-+)}$ und $\underline{M}^{(+-)}$, welche eine eventuell auftretende Modenkonzersion beschreiben. Eine solche Modenkonzersion kann auftreten, da das betrachtete Zweitor selbst nicht zwingend symmetrisch aufgebaut ist. Nur das angeschlossene Dreileitersystem, bezüglich dessen die Wellengrößen definiert sind, muss symmetrisch sein. Aufgelöst nach den nodalen Streuparametern erhält man:

$$\underline{S}_{1,1} = \frac{1}{2} \left(\underline{M}^{(--)} + \underline{M}^{(-+)} + \underline{M}^{(+-)} + \underline{M}^{(++)} \right), \quad (9.32)$$

$$\underline{S}_{2,1} = \frac{1}{2} \left(-\underline{M}^{(--)} - \underline{M}^{(-+)} + \underline{M}^{(+-)} + \underline{M}^{(++)} \right), \quad (9.33)$$

$$\underline{S}_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\underline{M}^{(--)} + \underline{M}^{(-+)} - \underline{M}^{(+-)} + \underline{M}^{(++)} \right), \quad (9.34)$$

$$\underline{S}_{2,2} = \frac{1}{2} \left(\underline{M}^{(--)} - \underline{M}^{(-+)} - \underline{M}^{(+-)} + \underline{M}^{(++)} \right). \quad (9.35)$$

Die Ergebnisse lassen sich einfach auf Mehrtore mit einer geraden Anzahl $2N$ an Toren erweitern. Wenn man jeweils die Tore n und $n+N$ zu einem symmetrischen Torpaar zusammenfasst, erhält man mit der $N \times N$ -Einheitsmatrix \mathbf{E} und der in vier $N \times N$ -Blöcke zerlegten Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{b}}^{(-)} \\ \underline{\mathbf{b}}^{(+)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{b}_1^{(-)} \\ \vdots \\ \underline{b}_N^{(-)} \\ \underline{b}_1^{(+)} \\ \vdots \\ \underline{b}_N^{(+)} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{E} \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{S}}_{1,1} & \underline{\mathbf{S}}_{1,2} \\ \underline{\mathbf{S}}_{2,1} & \underline{\mathbf{S}}_{2,2} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{E} \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{a}}^{(-)} \\ \vdots \\ \underline{a}_N^{(-)} \\ \underline{a}_1^{(+)} \\ \vdots \\ \underline{a}_N^{(+)} \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{M}}^{(--)} & \underline{\mathbf{M}}^{(-+)} \\ \underline{\mathbf{M}}^{(+-)} & \underline{\mathbf{M}}^{(++)} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{a}}^{(-)} \\ \underline{\mathbf{a}}^{(+)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrix \mathbf{U} ist eine orthogonale Transformationsmatrix. Es folgt die modale Streumatrix

$$\underline{\mathbf{M}} = \mathbf{U}^T \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{U}. \quad (9.36)$$

Die Systembeschreibung mit modalen Streuparametern ist eine gleichwertige Beschreibung des Systems bezüglich eines anderen Satzes an Basisvektoren. Für die

modalen Streuparameter gilt:

$$\underline{\mathbf{M}}^{(--)} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{S}}_{1,1} - \underline{\mathbf{S}}_{2,1} - \underline{\mathbf{S}}_{1,2} + \underline{\mathbf{S}}_{2,2}), \quad (9.37)$$

$$\underline{\mathbf{M}}^{(-+)} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{S}}_{1,1} - \underline{\mathbf{S}}_{2,1} + \underline{\mathbf{S}}_{1,2} - \underline{\mathbf{S}}_{2,2}), \quad (9.38)$$

$$\underline{\mathbf{M}}^{(+-)} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{S}}_{1,1} + \underline{\mathbf{S}}_{2,1} - \underline{\mathbf{S}}_{1,2} - \underline{\mathbf{S}}_{2,2}), \quad (9.39)$$

$$\underline{\mathbf{M}}^{(++)} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{S}}_{1,1} + \underline{\mathbf{S}}_{2,1} + \underline{\mathbf{S}}_{1,2} + \underline{\mathbf{S}}_{2,2}). \quad (9.40)$$

Aufgelöst nach den nodalen Streuparametern erhält man:

$$\underline{\mathbf{S}}_{1,1} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{M}}^{(--)} + \underline{\mathbf{M}}^{(-+)} + \underline{\mathbf{M}}^{(+-)} + \underline{\mathbf{M}}^{(++)}), \quad (9.41)$$

$$\underline{\mathbf{S}}_{2,1} = \frac{1}{2} (-\underline{\mathbf{M}}^{(--)} - \underline{\mathbf{M}}^{(-+)} + \underline{\mathbf{M}}^{(+-)} + \underline{\mathbf{M}}^{(++)}), \quad (9.42)$$

$$\underline{\mathbf{S}}_{1,2} = \frac{1}{2} (-\underline{\mathbf{M}}^{(--)} + \underline{\mathbf{M}}^{(-+)} - \underline{\mathbf{M}}^{(+-)} + \underline{\mathbf{M}}^{(++)}), \quad (9.43)$$

$$\underline{\mathbf{S}}_{2,2} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{M}}^{(--)} - \underline{\mathbf{M}}^{(-+)} - \underline{\mathbf{M}}^{(+-)} + \underline{\mathbf{M}}^{(++)}). \quad (9.44)$$

Aufgabe 9.4 Welche Eigenschaft hat die modale Streumatrix $\underline{\mathbf{M}}$ eines passiven Mehrtors? Welche Eigenschaft hat die modale Streumatrix $\underline{\mathbf{M}}$ eines reziproken Mehrtors?

9.7. Mehrtere mit Quellen

9.7.1. Wellenquellen

Es wird ein lineares Mehrter betrachtet, das in seinem Inneren eine beliebige Anzahl an Quellen enthält. Der Antwort $\underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{a}}$ auf die zulaufenden Wellen mit den komplexen Wellenamplituden $\underline{\mathbf{a}}$ sind dann noch die durch die Quellen verursachten Urwellen mit den komplexen Wellenamplituden

$$\underline{\mathbf{b}}_Q = \begin{pmatrix} \underline{b}_{Q1} \\ \vdots \\ \underline{b}_{QN} \end{pmatrix} \quad (9.45)$$

gemäß

$$\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{S}_{1,1} & \cdots & \underline{S}_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{S}_{N,1} & \cdots & \underline{S}_{N,N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{b}_{Q1} \\ \vdots \\ \underline{b}_{QN} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}_Q \quad (9.46)$$

zu überlagern, vergleiche (9.4). Unabhängig von der Anzahl der physikalischen Quellen im Inneren des Mehrtors ist im Modell im Allgemeinen an jedem Tor n genau eine Urwelle mit der komplexen Wellenamplitude \underline{b}_{Qn} zu berücksichtigen. Für ein quellenhaltiges Zweitor erhält man beispielsweise den in Abbildung 9.9 dargestellten Signalfussgraphen.

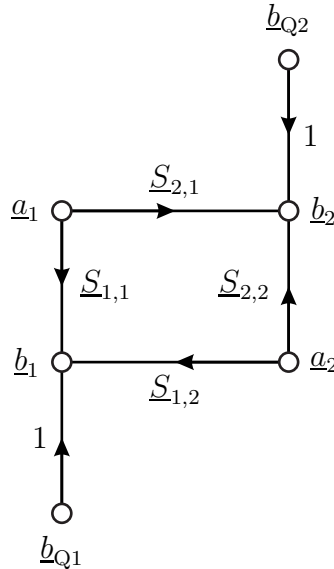


Abbildung 9.9.: Modell eines Zweitors mit Quellen

9.7.2. Spannungsquellen

Das Berücksichtigen von Quellen durch Spannungsquellen an den Toren gemäß

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Z}} \cdot \underline{\mathbf{I}} + \underline{\mathbf{U}}_Q \tag{9.47}$$

ist eine natürliche Erweiterung des Impedanzmatrixmodells (9.12) von Mehratoren, siehe Abbildung 9.10.

Es wird ein spezieller Betriebszustand mit $\underline{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ betrachtet. Dann ist $\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{b}}_Q$ und es folgt mit (7.18) und (7.19) unter Verwenden der Einheitsmatrix \mathbf{E} :

$$\underbrace{\underline{\mathbf{b}}_Q \sqrt{R_N}}_{\underline{\mathbf{U}}} = \underline{\mathbf{Z}} \cdot \underbrace{\frac{-\underline{\mathbf{b}}_Q}{\sqrt{R_N}}}_{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\mathbf{U}}_Q,$$

$$\underline{\mathbf{U}}_Q = \frac{\underline{\mathbf{Z}} + R_N \mathbf{E}}{\sqrt{R_N}} \cdot \underline{\mathbf{b}}_Q, \tag{9.48}$$

$$\underline{\mathbf{b}}_Q = (\underline{\mathbf{Z}} + R_N \mathbf{E})^{-1} \cdot \sqrt{R_N} \underline{\mathbf{U}}_Q. \tag{9.49}$$

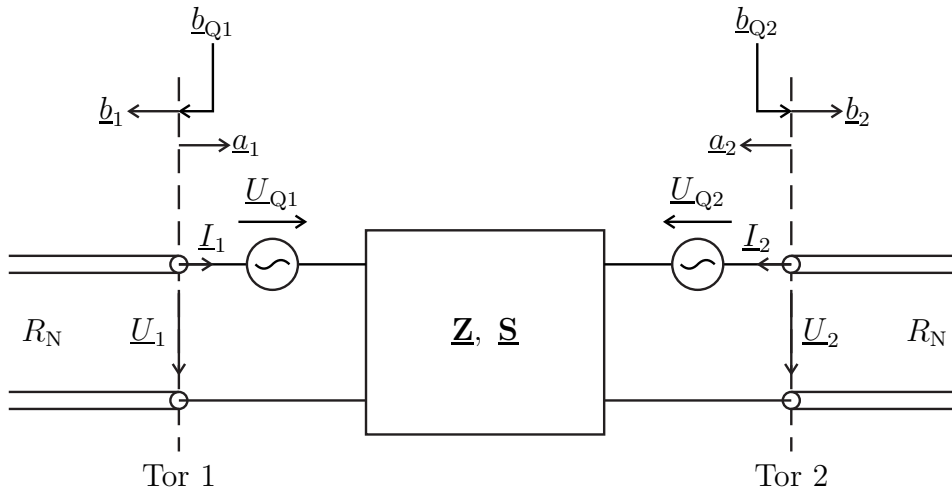


Abbildung 9.10.: Vierpol mit durch Spannungsquellen an den Toren berücksichtigten Quellen

Im Betriebszustand $\underline{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$ ist $\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}_Q$ und man erhält mit (7.20) und (7.21):

$$\underbrace{\frac{\underline{\mathbf{U}}_Q}{2\sqrt{R_N}}}_{\underline{\mathbf{b}}} = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underbrace{\frac{\underline{\mathbf{U}}_Q}{2\sqrt{R_N}}}_{\underline{\mathbf{a}}} + \underline{\mathbf{b}}_Q,$$

$$\underline{\mathbf{b}}_Q = \frac{1}{2\sqrt{R_N}} (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}) \cdot \underline{\mathbf{U}}_Q, \quad (9.50)$$

$$\underline{\mathbf{U}}_Q = 2\sqrt{R_N} (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_Q. \quad (9.51)$$

9.7.3. Stromquellen

Das Berücksichtigen von Quellen durch Stromquellen an den Toren gemäß

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{I}}_Q \quad (9.52)$$

ist eine natürliche Erweiterung des Admittanzmatrixmodells (9.13) von Mehrtern, siehe Abbildung 9.11.

Es wird ein spezieller Betriebszustand mit $\underline{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ betrachtet. Dann ist $\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{b}}_Q$

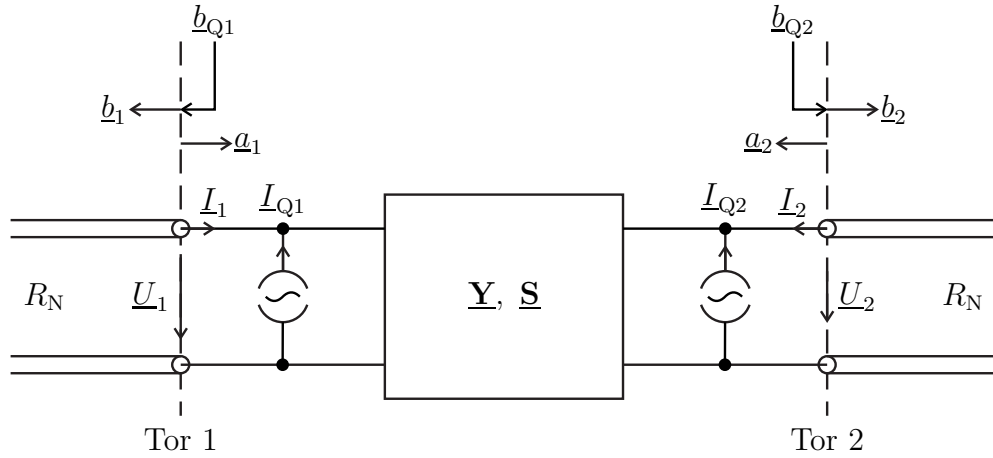


Abbildung 9.11.: Vierpol mit durch Stromquellen an den Toren berücksichtigten Quellen

und es folgt mit (7.18) und (7.19):

$$\underbrace{\frac{-\mathbf{b}_Q}{\sqrt{R_N}}}_{\mathbf{I}} = \mathbf{Y} \cdot \underbrace{\mathbf{b}_Q \sqrt{R_N}}_{\mathbf{U}} + \mathbf{I}_Q,$$

$$\mathbf{I}_Q = - \frac{R_N \mathbf{Y} + \mathbf{E}}{\sqrt{R_N}} \cdot \mathbf{b}_Q, \quad (9.53)$$

$$\mathbf{b}_Q = - (R_N \mathbf{Y} + \mathbf{E})^{-1} \cdot \sqrt{R_N} \mathbf{I}_Q. \quad (9.54)$$

Im Betriebszustand $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ ist $\mathbf{I} = \mathbf{I}_Q$ und man erhält mit (7.20) und (7.21):

$$\underbrace{\frac{-\sqrt{R_N}}{2} \mathbf{I}_Q}_{\mathbf{b}} = \mathbf{S} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{R_N}}{2} \mathbf{I}_Q}_{\mathbf{a}} + \mathbf{b}_Q,$$

$$\mathbf{b}_Q = - \frac{\sqrt{R_N}}{2} (\mathbf{E} + \mathbf{S}) \cdot \mathbf{I}_Q, \quad (9.55)$$

$$\mathbf{I}_Q = - \frac{2}{\sqrt{R_N}} (\mathbf{E} + \mathbf{S})^{-1} \cdot \mathbf{b}_Q. \quad (9.56)$$

9.8. Analyse komplexer Netzwerke mit Quellen

Es werden aus K Mehrtoren mit Quellen zusammengesetzte Netzwerke betrachtet. Abbildung 9.12 zeigt ein Beispiel. Das k -te Mehrtor habe $N^{(k)}$ Tore und sein

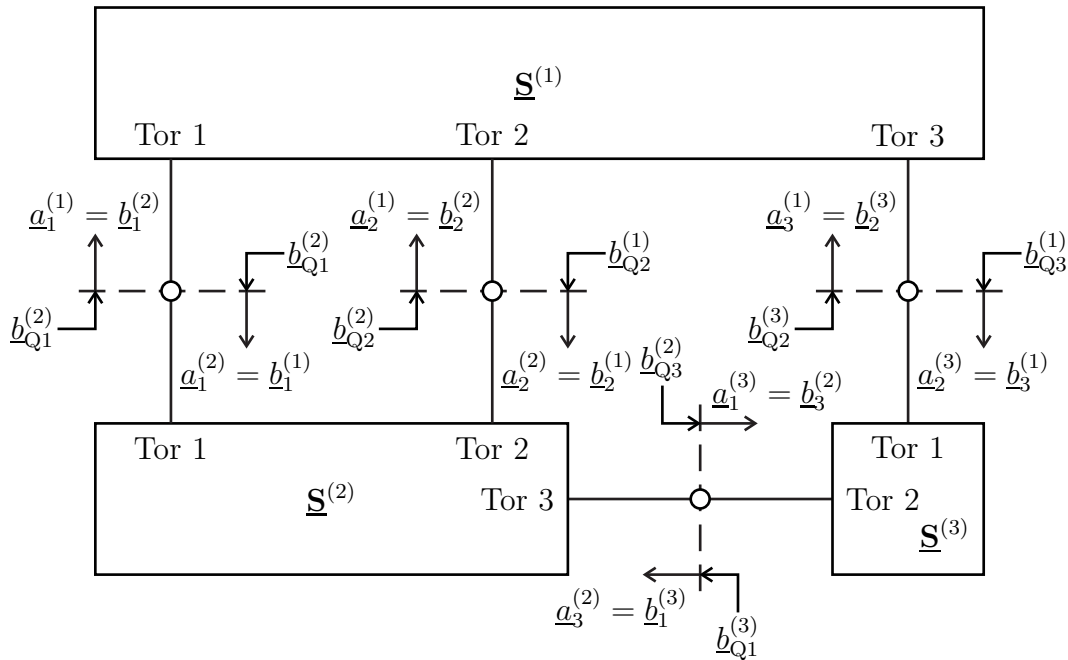


Abbildung 9.12.: Komplexes Netzwerk mit Quellen

Verhalten wird durch die Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}^{(k)}$ und die komplexen Wellenamplituden $\underline{\mathbf{b}}_Q^{(k)}$ der Urwellen beschrieben.

Für die folgenden Betrachtungen ist es sinnvoll, dass Streumatrixmodell (9.46) eines Mehrtors mit Quellen unter Verwenden der Einheitsmatrix \mathbf{E} gemäß

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\underline{\mathbf{S}}^{(k)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{b}}^{(k)} \\ \underline{\mathbf{a}}^{(k)} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{b}}_Q^{(k)}$$

etwas umzuformulieren. Der Zustand an den $N^{(k)}$ Toren wird durch die $2N^{(k)}$ in den Vektoren $\underline{\mathbf{a}}^{(k)}$ und $\underline{\mathbf{b}}^{(k)}$ zusammengefassten komplexen Wellenamplituden beschrieben. Das Mehrtor erzwingt das Einhalten von $N^{(k)}$ inhomogenen linearen Gleichungen, so dass nur noch $N^{(k)}$ Freiheitsgrade verbleiben. Mehrtore ohne Quellen sind als Spezialfall mit enthalten. Hier ist der Vektor $\underline{\mathbf{b}}_Q^{(k)}$ der komplexen Wellenamplituden der Urwellen gleich dem Nullvektor und es resultieren $N^{(k)}$ homogene Gleichungen.

In dem Netzwerk gibt es insgesamt

$$N = \sum_{k=1}^K N^{(k)}$$

Tore. Man definiert den N -dimensionalen Vektor

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{a}}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}^{(K)} \end{pmatrix} \quad (9.57)$$

der komplexen Wellenamplituden aller zulaufenden Wellen und den N -dimensionalen Vektor

$$\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{b}}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{b}}^{(K)} \end{pmatrix} \quad (9.58)$$

der komplexen Wellenamplituden aller ablaufenden Wellen. Weiterhin definiert man den N -dimensionalen Vektor

$$\underline{\mathbf{b}}_Q = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{b}}_Q^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{b}}_Q^{(K)} \end{pmatrix} \quad (9.59)$$

der komplexen Wellenamplituden aller Urwellen.

Jedes Tor sei mit genau einem anderen Tor verbunden. Dann entspricht jede komplexe Wellenamplitude $[\underline{\mathbf{a}}]_n$ einer zulaufenden Welle genau einer komplexen Wellenamplitude $[\underline{\mathbf{b}}]_m$ einer ablaufenden Welle und umgekehrt. Die Verbindungsstruktur des Netzwerks kann durch eine $N \times N$ Konnektivitätsmatrix \mathbf{K} mit den Elementen

$$[\mathbf{K}]_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{falls } [\underline{\mathbf{b}}]_m = [\underline{\mathbf{a}}]_n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad m, n = 1 \dots N, \quad (9.60)$$

beschrieben werden. $[\cdot]_{m,n}$ bezeichnet hierbei das Element in der m -ten Zeile und n -ten Spalte der Matrix und $[\cdot]_n$ bezeichnet das n -te Element des Vektors. Es gilt

$$\underline{\mathbf{b}} = \mathbf{K} \cdot \underline{\mathbf{a}}. \quad (9.61)$$

Die Konnektivitätsmatrix \mathbf{K} ist eine Permutationsmatrix. Da Permutationsmatrizen stets orthogonal sind, gilt

$$\mathbf{K}^T \cdot \mathbf{K} = \mathbf{E}. \quad (9.62)$$

Beim Verbinden zweier Tore sind immer zwei Paare von komplexen Wellenamplituden gleichzusetzen, das heißt aus

$$[\underline{\mathbf{b}}]_m = [\underline{\mathbf{a}}]_n$$

folgt auch

$$[\underline{\mathbf{a}}]_m = [\underline{\mathbf{b}}]_n.$$

Die Konnektivitätsmatrix ist folglich symmetrisch:

$$\mathbf{K}^T = \mathbf{K}. \quad (9.63)$$

Weiterhin folgt mit der Orthogonalität der Konnektivitätsmatrix, dass die Konnektivitätsmatrix selbstinvers ist:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{E}. \quad (9.64)$$

Zusammengefasst erhält man mit

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{S}}^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underline{\mathbf{S}}^{(K)} \end{pmatrix} \quad (9.65)$$

folgendes aus $2N$ Gleichungen bestehendes, das Netzwerk beschreibende inhomogene lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\underline{\mathbf{S}} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{K} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{b}} \\ \underline{\mathbf{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{b}}_Q \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (9.66)$$

Dieses Gleichungssystem ist die Grundlage von Programmen zur Simulation von Schaltungen [Hor85].

Es gibt insgesamt $2N$ zu bestimmende komplexe Wellenamplituden in den Vektoren $\underline{\mathbf{a}}$ und $\underline{\mathbf{b}}$, das heißt es gibt genau so viele Gleichungen wie Unbekannte. Normalerweise hat das lineare Gleichungssystem (9.66) daher genau eine Lösung

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{b}} \\ \underline{\mathbf{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\underline{\mathbf{S}} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{K} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{b}}_Q \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Die spezielle Struktur der Matrix ausnutzend, erhält man

$$\underline{\mathbf{a}} = (\mathbf{K} - \underline{\mathbf{S}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_Q \quad (9.67)$$

und

$$\underline{\mathbf{b}} = \mathbf{K} \cdot (\mathbf{K} - \underline{\mathbf{S}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_Q = (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{K})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_Q, \quad (9.68)$$

was man durch Einsetzen leicht überprüft.

Kapitel 10.

Komponenten hochfrequenztechnischer Systeme

10.1. Eintore

10.1.1. Quellenfreies Eintor

Der einzige Streuparameter des Eintors aus Abbildung 10.1 entspricht dem bekannten Reflexionsfaktor

$$\underline{S}_{1,1} = \frac{\underline{Z} - R_N}{\underline{Z} + R_N}, \quad (10.1)$$

siehe (7.24).

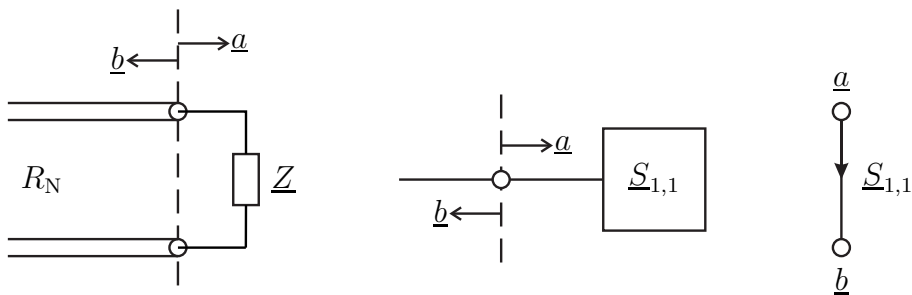


Abbildung 10.1.: Eintor

10.1.2. Eintorquelle

Der Reflexionsfaktor der Eintorquelle aus Abbildung 10.2 ist

$$\underline{S}_{1,1} = \frac{\underline{Z}_Q - R_N}{\underline{Z}_Q + R_N}, \quad (10.2)$$

siehe (7.24). Mit (9.49) ergibt sich die komplexe Wellenamplitude der Urwelle zu

$$\underline{b}_Q = \frac{\underline{U}_Q \sqrt{R_N}}{\underline{Z}_Q + R_N}. \quad (10.3)$$

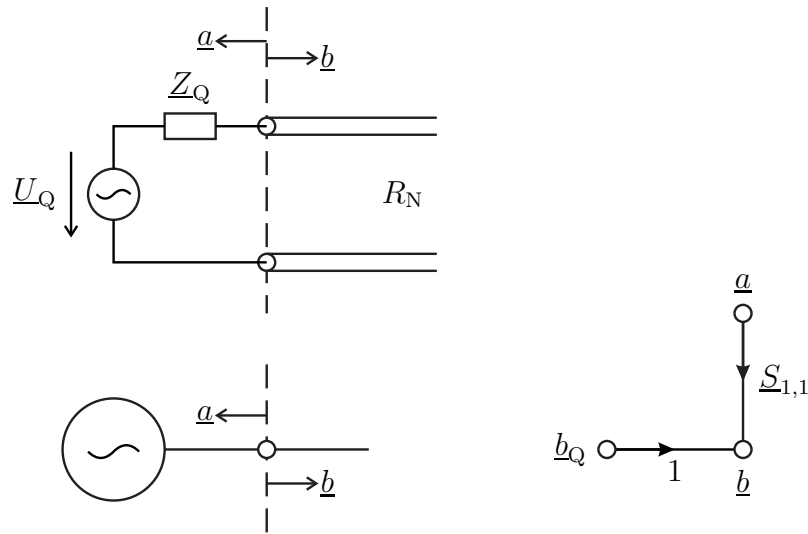


Abbildung 10.2.: Eintorquelle

10.2. Zweitore

10.2.1. Symmetrisch aufgebaute Zweitore

Aufgrund des symmetrischen Aufbaus des Zweitores muss für die nodalen Streuparameter

$$\underline{S}_{1,1} = \underline{S}_{2,2} \quad (10.4)$$

und

$$\underline{S}_{1,2} = \underline{S}_{2,1} \quad (10.5)$$

gelten, siehe Abbildung 10.3. Insbesondere sind symmetrisch aufgebaute Zweitore immer reziprok, siehe (9.9).

Interessante weitere Eigenschaften erkennt man, wenn man die beiden Tore als ein einziges symmetrisches Torpaar auffasst und die modalen Streuparameter betrachtet. Aus (9.28) bis (9.31) erhält man:

$$\underline{M}^{(--)} = \underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{1,2}, \quad (10.6)$$

$$\underline{M}^{(-+)} = 0, \quad (10.7)$$

$$\underline{M}^{(+-)} = 0, \quad (10.8)$$

$$\underline{M}^{(++)} = \underline{S}_{1,1} + \underline{S}_{1,2}. \quad (10.9)$$

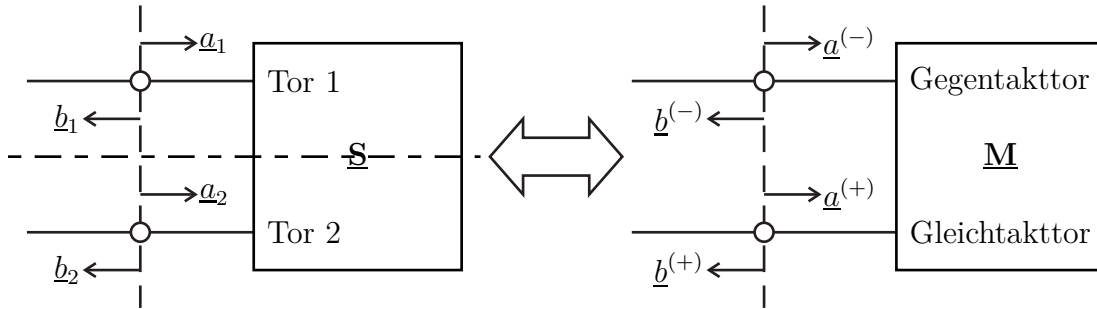


Abbildung 10.3.: Symmetrisch aufgebautes Zweitor

Insbesondere tritt in symmetrisch aufgebauten Zweitoren niemals Modenkonversion auf, das heißt der Gegentaktmode und der Gleichtaktmode sind Eigenmoden des symmetrisch aufgebauten Zweitores. Mit der für den Gegentaktmode sichtbaren Impedanz $\underline{Z}^{(-)}$ gilt

$$\underline{M}^{(--)} = \frac{\underline{Z}^{(-)} - R_N}{\underline{Z}^{(-)} + R_N}$$

und mit der für den Gleichtaktmode sichtbaren Impedanz $\underline{Z}^{(+)}$ gilt

$$\underline{M}^{(++)} = \frac{\underline{Z}^{(+)} - R_N}{\underline{Z}^{(+)} + R_N},$$

siehe (7.49), (7.52) und (3.84).

Speziell für symmetrisch aufgebaute, eigenreflexionsfreie Zweitore gilt

$$\underline{S}_{1,2} = -\underline{M}^{(--)} = \underline{M}^{(++)},$$

siehe (9.5). Daraus folgt

$$\underline{Z}^{(-)} = R_N \frac{1 - \underline{S}_{1,2}}{1 + \underline{S}_{1,2}}, \quad (10.10)$$

$$\underline{Z}^{(+)} = R_N \frac{1 + \underline{S}_{1,2}}{1 - \underline{S}_{1,2}} \quad (10.11)$$

und schließlich

$$\sqrt{\underline{Z}^{(-)} \underline{Z}^{(+)}} = R_N. \quad (10.12)$$

Wenn man zusätzlich auch noch Verlustfreiheit fordert, müssen die Streumatrizen \underline{S} und \underline{M} gemäß (9.7) und Aufgabe 9.4 unitär sein. Daraus folgt

$$|\underline{M}^{(--)}| = |\underline{M}^{(++)}| = |\underline{S}_{1,2}| = 1. \quad (10.13)$$

Symmetrisch aufgebaute, eigenreflexionsfreie und verlustfreie Zweitore sind Phasenschieber.

10.2.2. Serienimpedanz

Aus Abbildung 10.4 liest man die Admittanzmatrix

$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z}} & -\frac{1}{\underline{Z}} \\ -\frac{1}{\underline{Z}} & \frac{1}{\underline{Z}} \end{pmatrix}$$

der Serienimpedanz \underline{Z} ab. Mit (9.19) erhält man hieraus die Streumatrix

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{S}} &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{R_N}{\underline{Z}} & -\frac{R_N}{\underline{Z}} \\ -\frac{R_N}{\underline{Z}} & 1 + \frac{R_N}{\underline{Z}} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \frac{R_N}{\underline{Z}} & \frac{R_N}{\underline{Z}} \\ \frac{R_N}{\underline{Z}} & 1 - \frac{R_N}{\underline{Z}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 + 2\frac{R_N}{\underline{Z}}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{R_N}{\underline{Z}} & \frac{R_N}{\underline{Z}} \\ \frac{R_N}{\underline{Z}} & 1 + \frac{R_N}{\underline{Z}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \frac{R_N}{\underline{Z}} & \frac{R_N}{\underline{Z}} \\ \frac{R_N}{\underline{Z}} & 1 - \frac{R_N}{\underline{Z}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\underline{Z} + 2R_N} \begin{pmatrix} \underline{Z} & 2R_N \\ 2R_N & \underline{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.14)$$

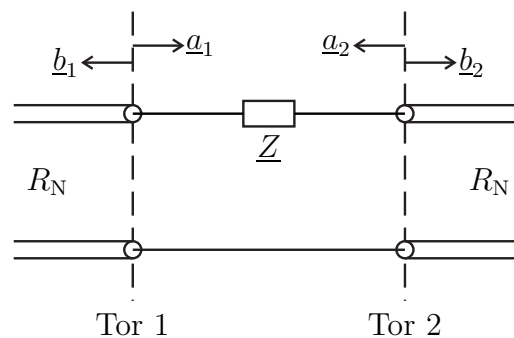


Abbildung 10.4.: Serienimpedanz \underline{Z}

10.2.3. Paralleladmittanz

Aus Abbildung 10.5 liest man die Impedanzmatrix

$$\underline{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Y}} & \frac{1}{\underline{Y}} \\ \frac{1}{\underline{Y}} & \frac{1}{\underline{Y}} \end{pmatrix}$$

der Paralleladmittanz \underline{Y} ab. Mit (9.16) erhält man hieraus die Streumatrix

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{S}} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Y}} + R_N & \frac{1}{\underline{Y}} \\ \frac{1}{\underline{Y}} & \frac{1}{\underline{Y}} + R_N \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Y}} - R_N & \frac{1}{\underline{Y}} \\ \frac{1}{\underline{Y}} & \frac{1}{\underline{Y}} - R_N \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\frac{R_N}{\underline{Y}} + R_N^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Y}} + R_N & -\frac{1}{\underline{Y}} \\ -\frac{1}{\underline{Y}} & \frac{1}{\underline{Y}} + R_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Y}} - R_N & \frac{1}{\underline{Y}} \\ \frac{1}{\underline{Y}} & \frac{1}{\underline{Y}} - R_N \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2 + \underline{Y}R_N} \begin{pmatrix} -\underline{Y}R_N & 2 \\ 2 & -\underline{Y}R_N \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

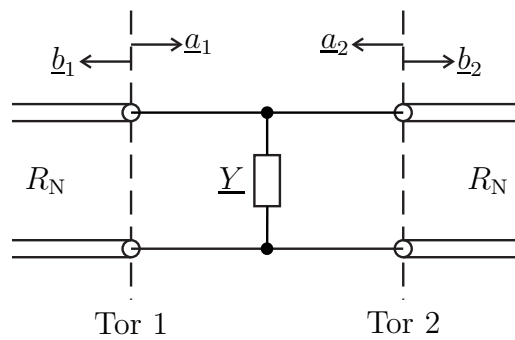


Abbildung 10.5.: Paralleladmittanz \underline{Y}

Aufgabe 10.1 Der in Abbildung 10.6 gezeigte RC-Tiefpass kann als Kaskade eines Serienwiderstands R und einer Parallelkapazität C aufgefasst werden. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion, das heißt den Streuparameter $\underline{S}_{2,1}$ des RC-Tiefpasses, als Funktion der Kreisfrequenz ω , des Widerstands R , der Kapazität C und des Bezugswiderstands R_N !

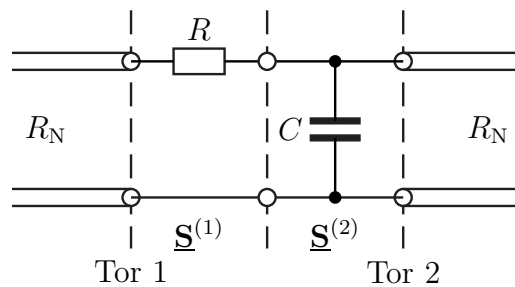


Abbildung 10.6.: RC-Tiefpass

10.2.4. Dämpfungsglied

Abbildung 10.7 zeigt ein in Π -Schaltung realisiertes Dämpfungsglied. Damit das Dämpfungsglied eigenreflexionsfrei (9.5) ist, müssen die an einem Tor bei reflexionsfreiem Abschluss des jeweils anderen Tors mit dem Bezugswiderstand R_N sichtbaren Impedanzen gemäß (7.23) gleich dem Bezugswiderstand R_N sein:

$$R_N = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_N}}}},$$

$$R_2 = \frac{R_1 R_N}{R_1 - R_N} - \frac{R_1 R_N}{R_1 + R_N}.$$

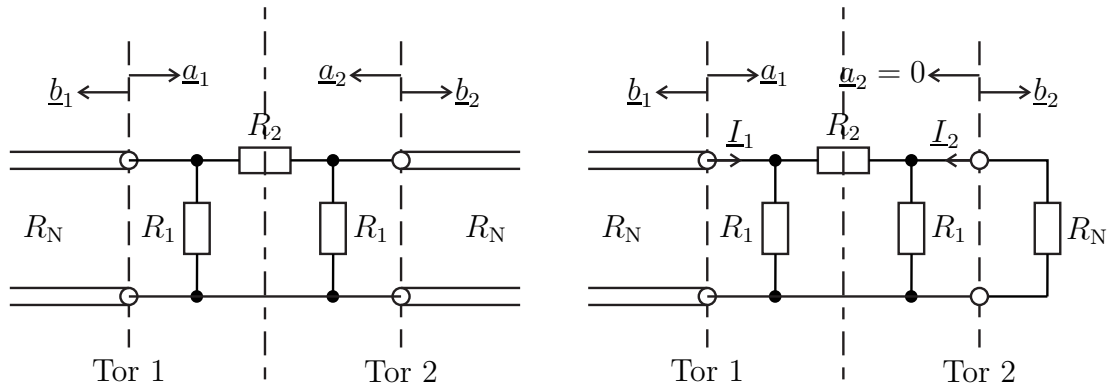


Abbildung 10.7.: Dämpfungsglied. Rechts spezieller Betriebszustand $\underline{a}_2 = 0$

Wegen der geforderten Eigenreflexionsfreiheit gilt bei reflexionsfreiem Abschluss von Tor 2 mit dem Bezugswiderstand R_N für die komplexen Wellenamplituden $\underline{b}_1 = 0$ und $\underline{a}_2 = 0$. Aus (9.4) folgt mit (7.19) für den Gewinn G des Dämpfungsglieds in diesem Betriebszustand

$$\sqrt{G} = |\underline{S}_{2,1}| = \left| \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_1} \right| = \left| \frac{-\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right| = \frac{\frac{1}{R_1 + R_N} R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_N}}}{R_N} = \frac{R_1 R_N}{R_2 (R_1 + R_N) + R_1 R_N},$$

woraus durch Einsetzen von R_2

$$\sqrt{G} = \frac{R_1 - R_N}{R_1 + R_N}$$

folgt. Man erhält schließlich die Widerstände

$$R_1 = R_N \frac{1 + \sqrt{G}}{1 - \sqrt{G}} \quad (10.16)$$

und

$$R_2 = R_N \frac{1 - G}{2\sqrt{G}}. \quad (10.17)$$

10.2.5. Leitungsstück

Zunächst wird der Sonderfall, dass der Wellenwiderstand Z_L des Leitungsstücks dem Bezugswiderstand R_N entspricht betrachtet. Bei reflexionsfreiem Abschluss von Tor 2 mit dem Bezugswiderstand R_N , siehe (7.23), ist der an Tor 1 sichtbare Reflexionsfaktor gemäß (7.9)

$$\underline{S}_{1,1} = 0.$$

Weiterhin gilt wegen (7.5) in diesem Betriebszustand

$$\underline{b}_2 = e^{-j\beta l} \underline{a}_1.$$

Mit (9.4) folgt

$$\underline{S}_{2,1} = e^{-j\beta l}.$$

Aufgrund des symmetrischen Aufbaus des Zweitores ergibt sich mit (10.4) und (10.5) die Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j\beta l} \\ e^{-j\beta l} & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.18)$$

Wie man leicht überprüft, ist die Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ unitär und das Leitungsstück somit wie erwartet verlustfrei, siehe (9.7).

Nun soll der allgemeine Fall eines vom Bezugswiderstand R_N abweichenden Wellenwiderstands Z_L betrachtet werden, siehe Abbildung 10.8. Hierzu führt man eine Renormalisierung der Streumatrix durch.

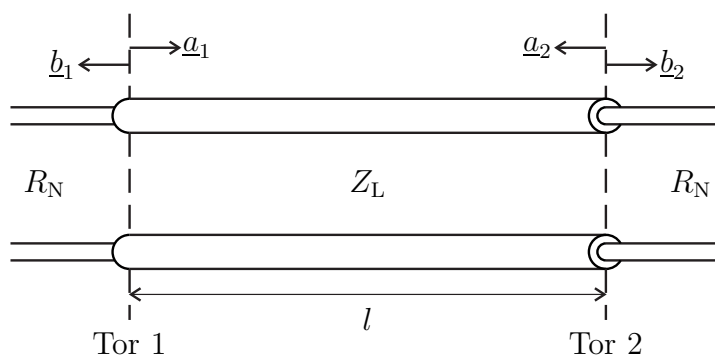


Abbildung 10.8.: Leitung

Aus der Streumatrix bezüglich dem Wellenwiderstand Z_L gemäß (10.18) berechnet man zunächst mit (9.17) die Impedanzmatrix

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{Z}} &= Z_L \begin{pmatrix} 1 & e^{-j\beta l} \\ e^{-j\beta l} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -e^{-j\beta l} \\ -e^{-j\beta l} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= Z_L \begin{pmatrix} 1 & e^{-j\beta l} \\ e^{-j\beta l} & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1 - e^{-j2\beta l}} \begin{pmatrix} 1 & e^{-j\beta l} \\ e^{-j\beta l} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{Z_L}{e^{j\beta l} - e^{-j\beta l}} \begin{pmatrix} e^{j\beta l} + e^{-j\beta l} & 2 \\ 2 & e^{j\beta l} + e^{-j\beta l} \end{pmatrix} = -j \frac{Z_L}{\sin(\beta l)} \begin{pmatrix} \cos(\beta l) & 1 \\ 1 & \cos(\beta l) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aus dieser Impedanzmatrix $\underline{\mathbf{Z}}$ ergibt sich mit (9.16) die Streumatrix bezüglich des Bezugswiderstands R_N zu

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{S}} &= \begin{pmatrix} \cos(\beta l) + j \frac{R_N}{Z_L} \sin(\beta l) & 1 \\ 1 & \cos(\beta l) + j \frac{R_N}{Z_L} \sin(\beta l) \end{pmatrix}^{-1} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta l) - j \frac{R_N}{Z_L} \sin(\beta l) & 1 \\ 1 & \cos(\beta l) - j \frac{R_N}{Z_L} \sin(\beta l) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\cos^2(\beta l) + j 2 \frac{R_N}{Z_L} \cos(\beta l) \sin(\beta l) - \left(\frac{R_N}{Z_L}\right)^2 \sin^2(\beta l) - 1} \\ &\quad \begin{pmatrix} \cos(\beta l) + j \frac{R_N}{Z_L} \sin(\beta l) & -1 \\ -1 & \cos(\beta l) + j \frac{R_N}{Z_L} \sin(\beta l) \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta l) - j \frac{R_N}{Z_L} \sin(\beta l) & 1 \\ 1 & \cos(\beta l) - j \frac{R_N}{Z_L} \sin(\beta l) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2R_N Z_L \cos(\beta l) + j(R_N^2 + Z_L^2) \sin(\beta l)} \\ &\quad \begin{pmatrix} -j(R_N^2 - Z_L^2) \sin(\beta l) & 2R_N Z_L \\ 2R_N Z_L & -j(R_N^2 - Z_L^2) \sin(\beta l) \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{10.19}$$

Für den $\lambda/4$ -Transformator erhält man mit $\beta l = \pi/2$, siehe (2.38), die Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{Z_L^2 + R_N^2} \begin{pmatrix} Z_L^2 - R_N^2 & -2jR_N Z_L \\ -2jR_N Z_L & Z_L^2 - R_N^2 \end{pmatrix}.\tag{10.20}$$

Für den $\lambda/2$ -Transformator erhält man mit $\beta l = \pi$, siehe (2.38), die Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.\tag{10.21}$$

Aufgabe 10.2 Berechnen Sie die Admittanzmatrix $\underline{\mathbf{Y}}$ eines $\lambda/4$ -Transformators mit dem vom Bezugswiderstand R_N abweichenden Wellenwiderstand Z_L !

10.3. Dreitore

10.3.1. Zirkulator

Die Streumatrix eines eigenreflexionsfreien Dreitors hat die Struktur

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{S}_{1,2} & \underline{S}_{1,3} \\ \underline{S}_{2,1} & 0 & \underline{S}_{2,3} \\ \underline{S}_{3,1} & \underline{S}_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$$

siehe (9.5). Die Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ eines verlustfreien Dreitors ist gemäß (9.7) unitär. Hieraus folgt für eigenreflexionsfreie, verlustfreie Dreitore:

$$\begin{aligned} \underline{S}_{3,1}^* \underline{S}_{3,2} &= 0, \\ \underline{S}_{2,1}^* \underline{S}_{2,3} &= 0, \\ \underline{S}_{1,2}^* \underline{S}_{1,3} &= 0, \\ |\underline{S}_{2,1}|^2 + |\underline{S}_{3,1}|^2 &= 1, \\ |\underline{S}_{1,2}|^2 + |\underline{S}_{3,2}|^2 &= 1, \\ |\underline{S}_{1,3}|^2 + |\underline{S}_{2,3}|^2 &= 1. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann auf zweierlei Art und Weise entweder durch

$$\underline{S}_{1,2} = \underline{S}_{2,3} = \underline{S}_{3,1} = 0$$

und

$$|\underline{S}_{2,1}| = |\underline{S}_{3,2}| = |\underline{S}_{1,3}| = 1$$

oder durch

$$\underline{S}_{2,1} = \underline{S}_{2,3} = \underline{S}_{1,3} = 0$$

und

$$|\underline{S}_{1,2}| = |\underline{S}_{2,1}| = |\underline{S}_{3,1}| = 1$$

erfüllt werden. Ein an einem Tor eingespeistes Signal wird zum jeweils nächsten Tor weitergeleitet, wobei sich die beiden Lösungen nur in der Nummerierung der Tore unterscheiden. Derartige Dreitore bezeichnet man als Zirkulatoren. Abbildung 10.9 zeigt das Symbol und den Signalfussgraphen eines Zirkulators mit der Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.22)$$

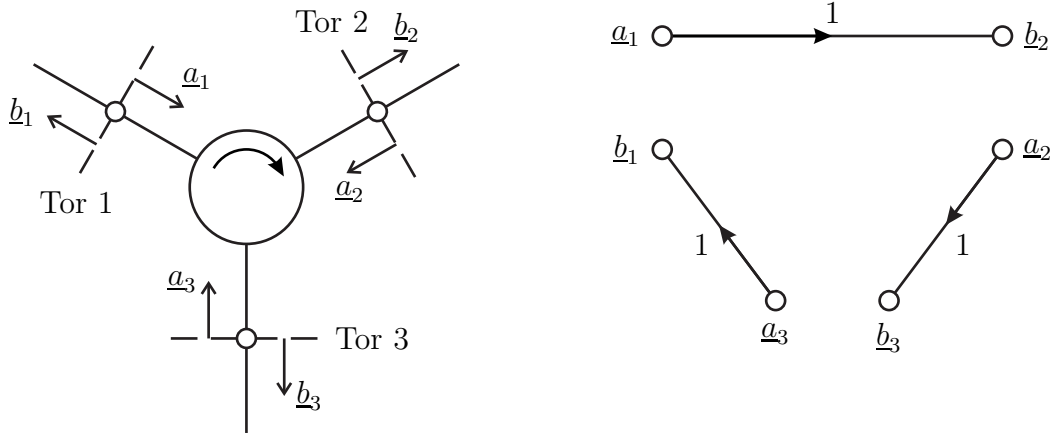


Abbildung 10.9.: Zirkulator

Zirkulatoren sind offensichtlich nicht reziprok, siehe (9.9).

Wenn man einen Zirkulator am dritten Tor reflexionsfrei abschließt, erhält man eine Einwegleitung, siehe Abbildung 10.10. Die Streumatrix der Einwegleitung ist

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.23)$$

Die Einwegleitung ist wie der Zirkulator nicht reziprok, siehe (9.9).

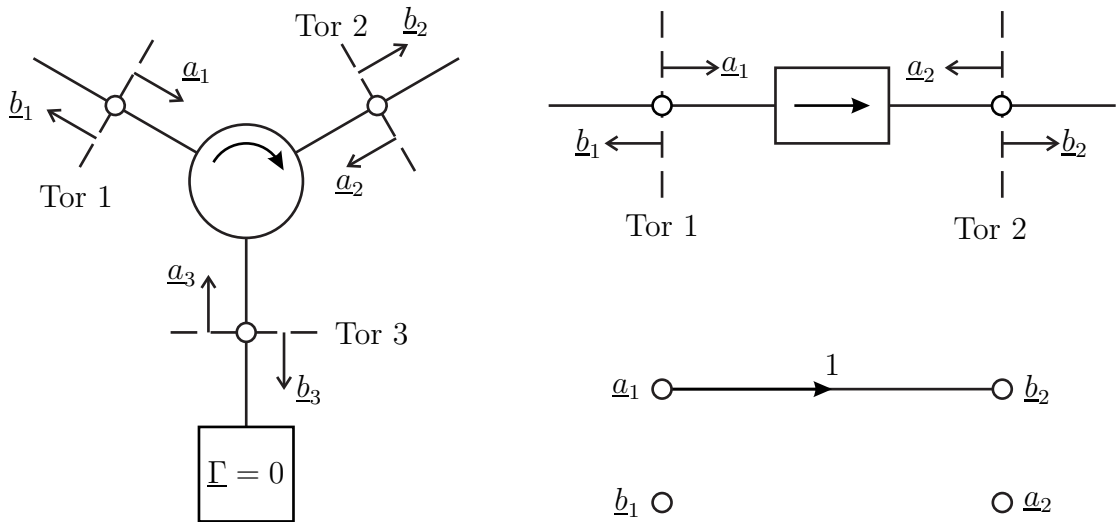


Abbildung 10.10.: Einwegleitung

10.3.2. Verzweigung

Bei reflexionsfreiem Abschluss von Tor 2 und Tor 3 der in Abbildung 10.11 gezeigten Verzweigung mit dem Bezugswiderstand R_N sieht man an Tor 1 eine Impedanz von $R_N/2$, so dass sich mit (7.24)

$$\underline{S}_{1,1} = \frac{\frac{R_N}{2} - R_N}{\frac{R_N}{2} + R_N} = -\frac{1}{3}$$

ergibt. Da weiterhin die Spannungen an allen Toren gleich sind, folgt mit (7.18) und (9.4):

$$\begin{aligned} \underbrace{(a_1 + b_1)}_{\underline{U}_1} \sqrt{R_N} &= \underbrace{b_2}_{\underline{U}_2} \sqrt{R_N}, \\ (1 + \underline{S}_{1,1}) a_1 &= b_2 \\ \underline{S}_{2,1} = 1 + \underline{S}_{1,1} &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

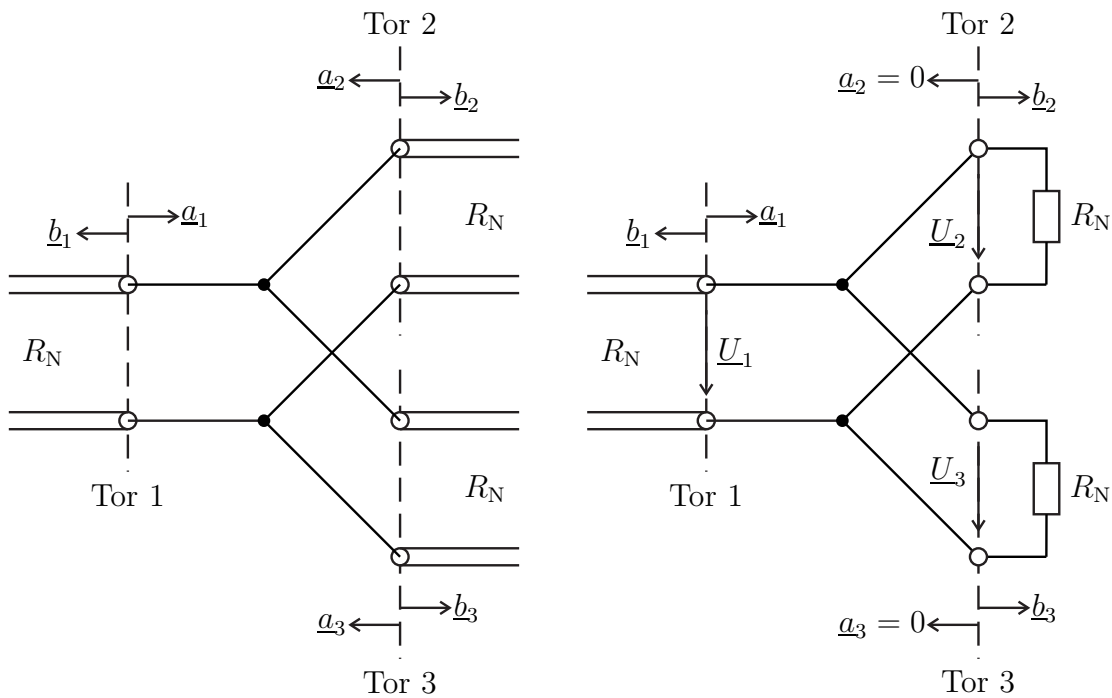


Abbildung 10.11.: Verzweigung. Rechts spezieller Betriebszustand $a_2 = a_3 = 0$

Unter Berücksichtigen des symmetrischen Aufbaus der Verzweigung erhält man schließlich die Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.24)$$

Die Verzweigung ist verlustfrei und reziprok, aber keines der Tore ist eigenreflexionsfrei, siehe (9.7), (9.9) und (9.5). Die Verzweigung hat daher in der Hochfrequenztechnik keine praktische Bedeutung.

10.3.3. Allseitig angepasster Teiler

Es wird der in Abbildung 10.12 gezeigte allseitig angepasste Teiler betrachtet. Um Eigenreflexionsfreiheit (9.5) zu erreichen, muss die bei reflexionsfreiem Abschluss von Tor 2 und Tor 3 mit dem Bezugswiderstand R_N die an Tor 1 sichtbare Impedanz gemäß (7.23) gleich dem Bezugswiderstand R_N sein:

$$R + \frac{1}{2}(R + R_N) = R_N,$$

$$R = \frac{R_N}{3}.$$

Dann gilt

$$\underline{S}_{1,1} = 0.$$

Aus Symmetriegründen teilt sich der in Tor 1 hineinfließende Strom gleichmäßig auf Tor 2 und Tor 3 auf. Mit (7.19) und (9.4) folgt:

$$\underbrace{\frac{a_1}{\sqrt{R_N}}}_{I_1} = -2 \underbrace{\frac{-b_2}{\sqrt{R_N}}}_{I_2},$$

$$b_2 = \frac{1}{2}a_1,$$

$$\underline{S}_{2,1} = \frac{1}{2}.$$

Unter Berücksichtigen des symmetrischen Aufbaus des allseitig angepassten Teilers erhält man schließlich die Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.25)$$

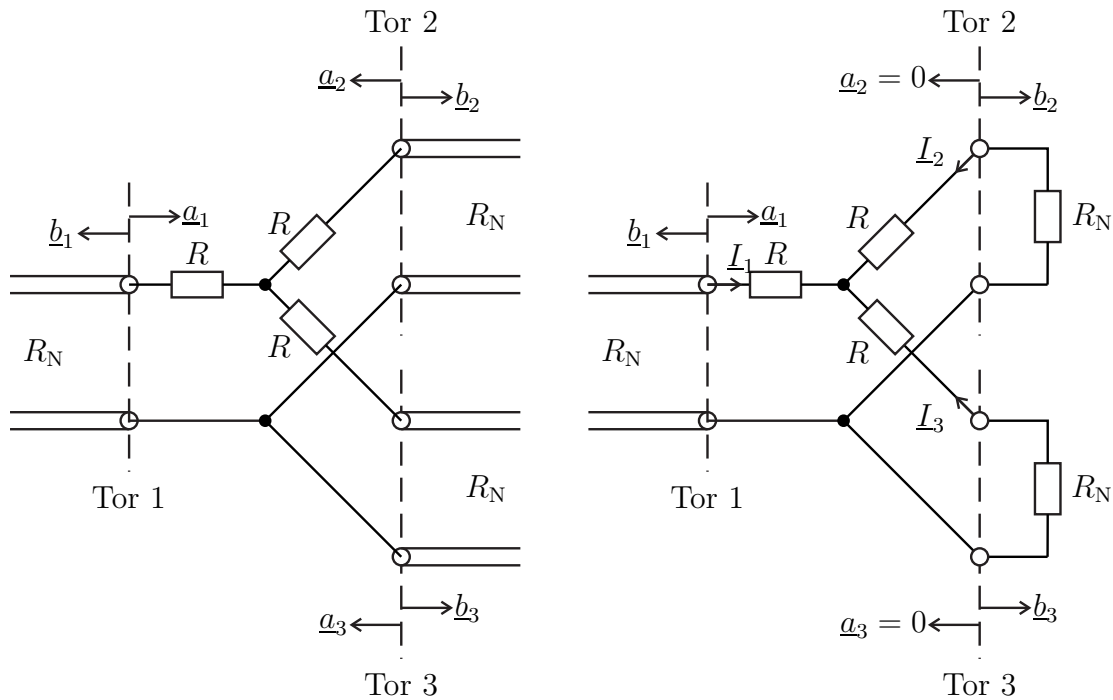


Abbildung 10.12.: Allseitig angepasster Teiler. Rechts spezieller Betriebszustand $a_2 = a_3 = 0$

Der allseitig angepasste Teiler ist eigenreflexionsfrei und reziprok aber nicht verlustfrei, siehe (9.5), (9.9) und (9.7).

Aufgabe 10.3 Es wird der in Abbildung 10.13 gezeigte eingangsseitig angepasste Teiler betrachtet. Wie muss der Widerstand R gewählt werden, damit $\underline{S}_{1,1} = 0$ gilt? Berechnen Sie die Streumatrix \underline{S} des bei dieser speziellen Wahl des Widerstands R erhaltenen eingangsseitig angepassten Teilers!

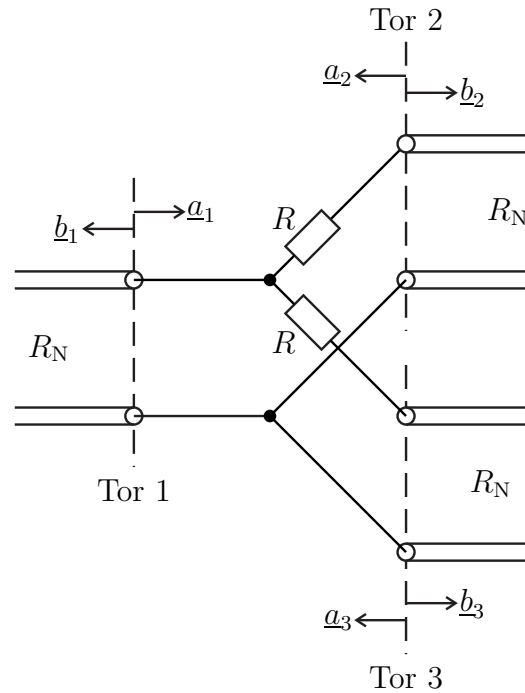


Abbildung 10.13.: Eingangsseitig angepasster Teiler

10.4. Viertore

10.4.1. Symmetrisch aufgebaute Viertore

Aufgrund des symmetrischen Aufbaus des Viertors gilt für die nodalen Streuparameter

$$\underline{S}_{1,1} = \underline{S}_{3,3},$$

$$\underline{S}_{2,2} = \underline{S}_{4,4},$$

$$\underline{S}_{1,3} = \underline{S}_{3,1},$$

$$\underline{S}_{2,4} = \underline{S}_{4,2},$$

$$\underline{S}_{1,2} = \underline{S}_{3,4},$$

$$\underline{S}_{2,1} = \underline{S}_{4,3},$$

$$\underline{S}_{1,4} = \underline{S}_{3,2},$$

$$\underline{S}_{4,1} = \underline{S}_{2,3},$$

siehe Abbildung 10.14.

Man kann wieder symmetrische Torpaare bilden und die modalen Streupara-

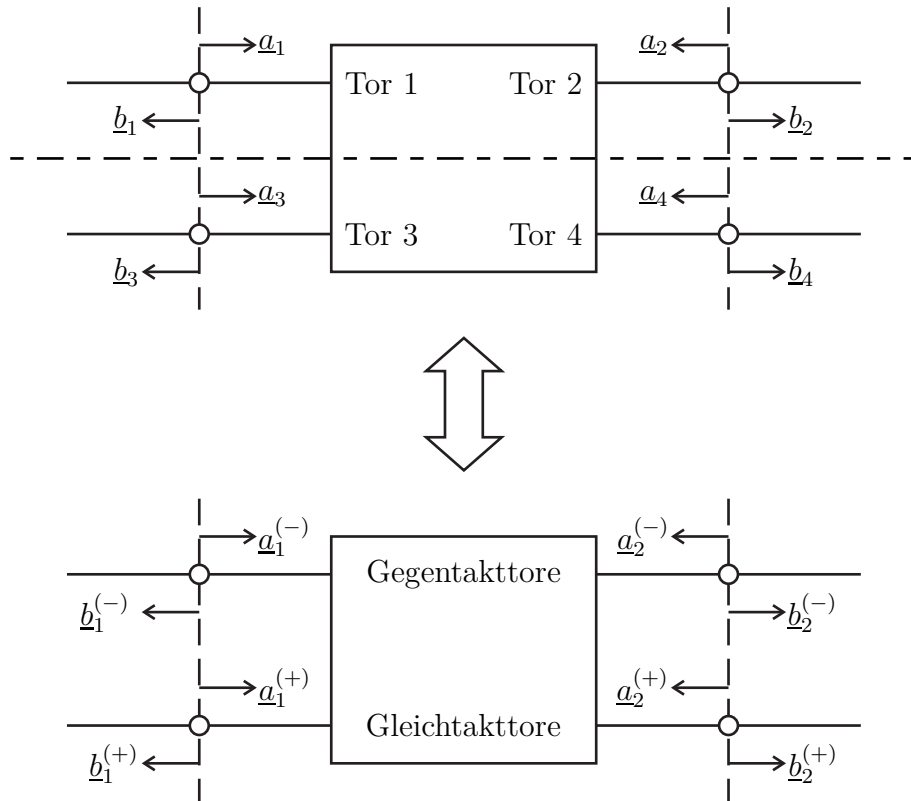


Abbildung 10.14.: Einfach symmetrisch aufgebautes Viertor

meter betrachten. Aus (9.37) bis (9.40) erhält man:

$$\underline{\mathbf{M}}^{(--)} = \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{S}}_{1,1} - \underline{\mathcal{S}}_{1,3} & \underline{\mathcal{S}}_{1,2} - \underline{\mathcal{S}}_{1,4} \\ \underline{\mathcal{S}}_{2,1} - \underline{\mathcal{S}}_{2,3} & \underline{\mathcal{S}}_{2,2} - \underline{\mathcal{S}}_{2,4} \end{pmatrix}, \quad (10.26)$$

$$\underline{\mathbf{M}}^{(++)} = \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{S}}_{1,1} + \underline{\mathcal{S}}_{1,3} & \underline{\mathcal{S}}_{1,2} + \underline{\mathcal{S}}_{1,4} \\ \underline{\mathcal{S}}_{2,1} + \underline{\mathcal{S}}_{2,3} & \underline{\mathcal{S}}_{2,2} + \underline{\mathcal{S}}_{2,4} \end{pmatrix}, \quad (10.27)$$

$$\underline{\mathbf{M}}^{(-+)} = \underline{\mathbf{M}}^{(+-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.28)$$

Insbesondere tritt in einem symmetrisch aufgebauten Viertor niemals Modenkongression auf.

In einem nächsten Schritt sollen doppelt symmetrisch aufgebaute Viertore betrachtet werden, siehe Abbildung 10.15. Für die nodalen Streuparameter folgen

weitere Übereinstimmungen:

$$\underline{S}_{1,1} = \underline{S}_{3,3} = \underline{S}_{2,2} = \underline{S}_{4,4},$$

$$\underline{S}_{1,3} = \underline{S}_{3,1} = \underline{S}_{2,4} = \underline{S}_{4,2},$$

$$\underline{S}_{1,2} = \underline{S}_{3,4} = \underline{S}_{2,1} = \underline{S}_{4,3},$$

$$\underline{S}_{1,4} = \underline{S}_{3,2} = \underline{S}_{4,1} = \underline{S}_{2,3}.$$

Insbesondere sind doppelt symmetrisch aufgebaute Viertore immer reziprok, siehe (9.9). Für die modalen Streuparameter folgt:

$$\underline{\mathbf{M}}^{(--)} = \begin{pmatrix} \underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{1,3} & \underline{S}_{1,2} - \underline{S}_{1,4} \\ \underline{S}_{1,2} - \underline{S}_{1,4} & \underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{1,3} \end{pmatrix}, \quad (10.29)$$

$$\underline{\mathbf{M}}^{(++)} = \begin{pmatrix} \underline{S}_{1,1} + \underline{S}_{1,3} & \underline{S}_{1,2} + \underline{S}_{1,4} \\ \underline{S}_{1,2} + \underline{S}_{1,4} & \underline{S}_{1,1} + \underline{S}_{1,3} \end{pmatrix}, \quad (10.30)$$

$$\underline{\mathbf{M}}^{(-+)} = \underline{\mathbf{M}}^{(+-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.31)$$

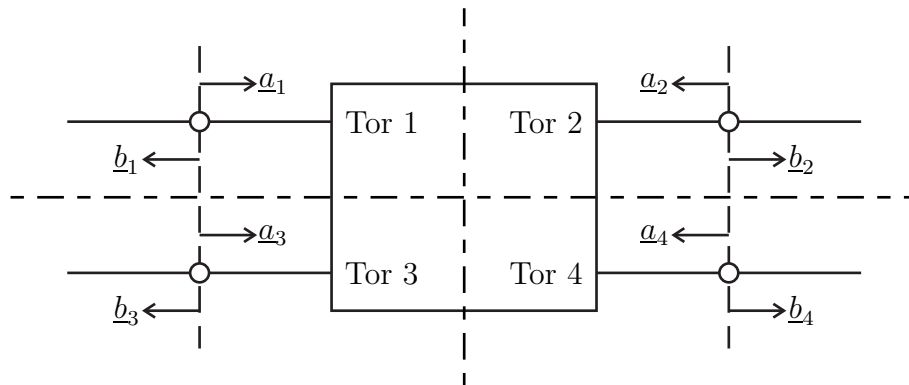


Abbildung 10.15.: Doppelt symmetrisch aufgebautes Viertor

Aufgabe 10.4 Es wird der in Abbildung 10.16 gezeigte allseitig angepasste Teiler mit vier Toren betrachtet. Wie muss der Widerstand R gewählt werden, damit der Teiler eigenreflexionsfrei ist? Berechnen Sie die sich bei dieser speziellen Wahl des Widerstands R ergebende Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$!

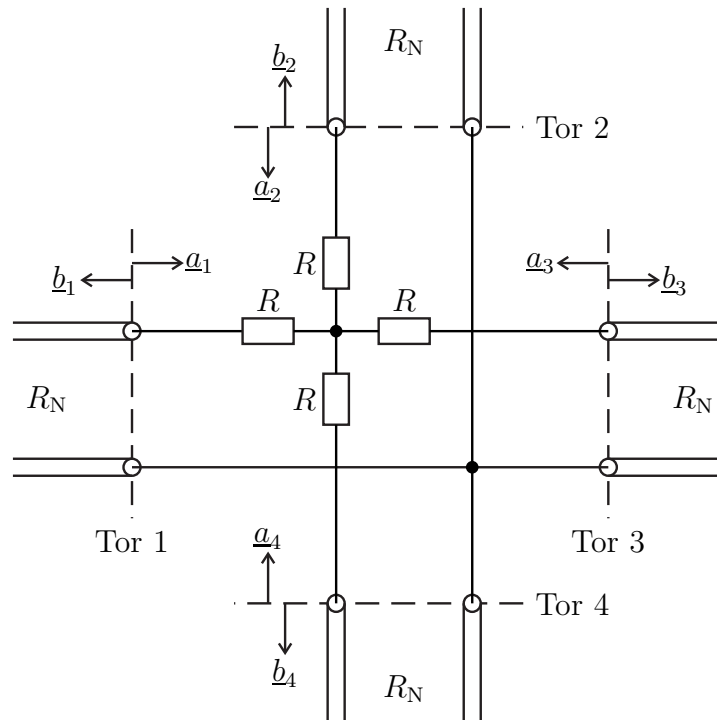


Abbildung 10.16.: Allseitig angepasster Teiler mit vier Toren

10.4.2. Richtkoppler

Die Streumatrix eines doppelt symmetrisch aufgebauten, eigenreflexionsfreien Viertors hat die Struktur

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{S}_{1,2} & \underline{S}_{1,3} & \underline{S}_{1,4} \\ \underline{S}_{1,2} & 0 & \underline{S}_{1,4} & \underline{S}_{1,3} \\ \underline{S}_{1,3} & \underline{S}_{1,4} & 0 & \underline{S}_{1,2} \\ \underline{S}_{1,4} & \underline{S}_{1,3} & \underline{S}_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

siehe (9.5) Die Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ eines verlustfreien Viertors ist gemäß (9.7) unitär. Hieraus folgt für doppelt symmetrisch aufgebaute, eigenreflexionsfreie, verlustfreie Viertore:

$$\begin{aligned} |\underline{S}_{1,2}|^2 + |\underline{S}_{1,3}|^2 + |\underline{S}_{1,4}|^2 &= 0, \\ \underline{S}_{1,3}^* \underline{S}_{1,4} + \underline{S}_{1,4}^* \underline{S}_{1,3} &= 0, \\ \underline{S}_{1,2}^* \underline{S}_{1,4} + \underline{S}_{1,4}^* \underline{S}_{1,2} &= 0, \\ \underline{S}_{1,2}^* \underline{S}_{1,3} + \underline{S}_{1,3}^* \underline{S}_{1,2} &= 0. \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt:¹

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\underline{S}_{1,2}^* \underline{S}_{1,3}) &= 0, \\ \arg(\underline{S}_{1,2}) - \arg(\underline{S}_{1,3}) &= \pm \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Analoges gilt auch für die beiden anderen Paare von Streuparametern:

$$\begin{aligned} \arg(\underline{S}_{1,2}) - \arg(\underline{S}_{1,4}) &= \pm \frac{\pi}{2}, \\ \arg(\underline{S}_{1,3}) - \arg(\underline{S}_{1,4}) &= \pm \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Alle drei Streuparameter $\underline{S}_{1,2}$, $\underline{S}_{1,3}$ und $\underline{S}_{1,4}$ müssen in der komplexen Ebene paarweise senkrecht zueinander sein. Dies erfordert, dass einer der drei Streuparameter $\underline{S}_{1,2}$, $\underline{S}_{1,3}$ und $\underline{S}_{1,4}$ Null ist. Willkürlich wird die Variante

$$\underline{S}_{1,4} = 0$$

weiter betrachtet. Es folgen

$$\arg(\underline{S}_{1,2}) - \arg(\underline{S}_{1,3}) = \pm \frac{\pi}{2} \quad (10.32)$$

und

$$|\underline{S}_{1,2}|^2 + |\underline{S}_{1,3}|^2 = 1. \quad (10.33)$$

Die resultierende Streumatrix hat die Gestalt

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{S}_{1,2} & \underline{S}_{1,3} & 0 \\ \underline{S}_{1,2} & 0 & 0 & \underline{S}_{1,3} \\ \underline{S}_{1,3} & 0 & 0 & \underline{S}_{1,2} \\ 0 & \underline{S}_{1,3} & \underline{S}_{1,2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.34)$$

das heißt doppelt symmetrisch aufgebaute, eigenreflexionsfreie, verlustfreie Viertere sind stets Richtkoppler. Abbildung 10.17 zeigt Symbol und Signalflussgraph eines Richtkopplers.

10.4.3. Parallelleitungskoppler

Der Parallelleitungskoppler ist ein doppelt symmetrisches Dreileitersystem mit Koppelfaktor k , siehe Abbildung 10.18. Der Wellenwiderstand $Z_L^{(-)}$ des Gegenaktmodes und der Wellenwiderstand $Z_L^{(+)}$ des Gleichaktmodes weichen im Allgemeinen vom Bezugswiderstand R_N ab. Mit (10.19) erhält man die modalen

¹ Der Realteil einer komplexen Größe berechnet sich zu $\operatorname{Re}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\underline{x} + \underline{x}^*)$.

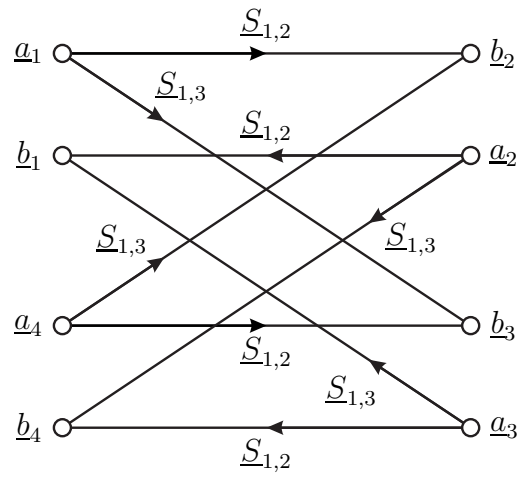
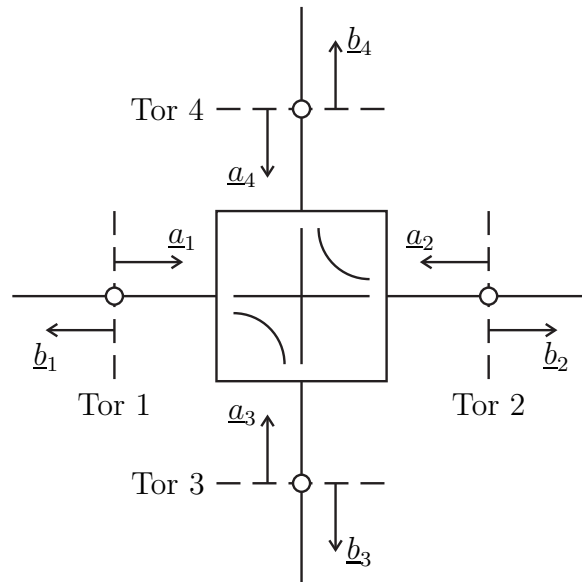


Abbildung 10.17.: Richtkoppler

Streuparameter:

$$\underline{M}_{1,1}^{(--)} = \frac{-j \left(R_N^2 - Z_L^{(-)2} \right) \sin(\beta l)}{2R_N Z_L^{(-)} \cos(\beta l) + j \left(R_N^2 + Z_L^{(-)2} \right) \sin(\beta l)}, \quad (10.35)$$

$$\underline{M}_{1,1}^{(++)} = \frac{-j \left(R_N^2 - Z_L^{(+2)} \right) \sin(\beta l)}{2R_N Z_L^{(+)} \cos(\beta l) + j \left(R_N^2 + Z_L^{(+2)} \right) \sin(\beta l)}, \quad (10.36)$$

$$\underline{M}_{1,2}^{(--)} = \frac{2R_N Z_L^{(-)}}{2R_N Z_L^{(-)} \cos(\beta l) + j \left(R_N^2 + Z_L^{(-)2} \right) \sin(\beta l)}, \quad (10.37)$$

$$\underline{M}_{1,2}^{(++)} = \frac{2R_N Z_L^{(+)}}{2R_N Z_L^{(+)} \cos(\beta l) + j \left(R_N^2 + Z_L^{(+2)} \right) \sin(\beta l)}. \quad (10.38)$$

Wegen des symmetrischen Aufbaus gilt für den Eigenreflexionsfaktor

$$\underline{S}_{1,1} = \frac{\underline{M}_{1,1}^{(--)} + \underline{M}_{1,1}^{(++)}}{2}, \quad (10.39)$$

siehe (10.29) und (10.30). Der Parallellleitungskoppler ist gemäß (9.5) eigenreflexionsfrei, falls die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= 2\underline{S}_{1,1} = \underline{M}_{1,1}^{(--)} + \underline{M}_{1,1}^{(++)} \\ &= \frac{-j \left(R_N^2 - Z_L^{(-)2} \right) \sin(\beta l)}{2R_N Z_L^{(-)} \cos(\beta l) + j \left(R_N^2 + Z_L^{(-)2} \right) \sin(\beta l)} \\ &\quad + \frac{-j \left(R_N^2 - Z_L^{(+2)} \right) \sin(\beta l)}{2R_N Z_L^{(+)} \cos(\beta l) + j \left(R_N^2 + Z_L^{(+2)} \right) \sin(\beta l)} \end{aligned}$$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist erfüllt, falls die Leitungslänge l ein ganzzahliges Vielfaches von $\lambda/2$ ist, siehe (2.38), oder

$$\begin{aligned} 0 &= \left(R_N^2 - Z_L^{(-)2} \right) \left(2R_N Z_L^{(+)} \cos(\beta l) + j \left(R_N^2 + Z_L^{(+2)} \right) \sin(\beta l) \right) \\ &\quad + \left(R_N^2 - Z_L^{(+2)} \right) \left(2R_N Z_L^{(-)} \cos(\beta l) + j \left(R_N^2 + Z_L^{(-)2} \right) \sin(\beta l) \right), \\ &= 2R_N \cos(\beta l) \left(Z_L^{(-)} + Z_L^{(+)} \right) \left(R_N^2 - Z_L^{(-)} Z_L^{(+)} \right) + j2 \sin(\beta l) \left(R_N^4 - Z_L^{(-)2} Z_L^{(+2)} \right) \end{aligned}$$

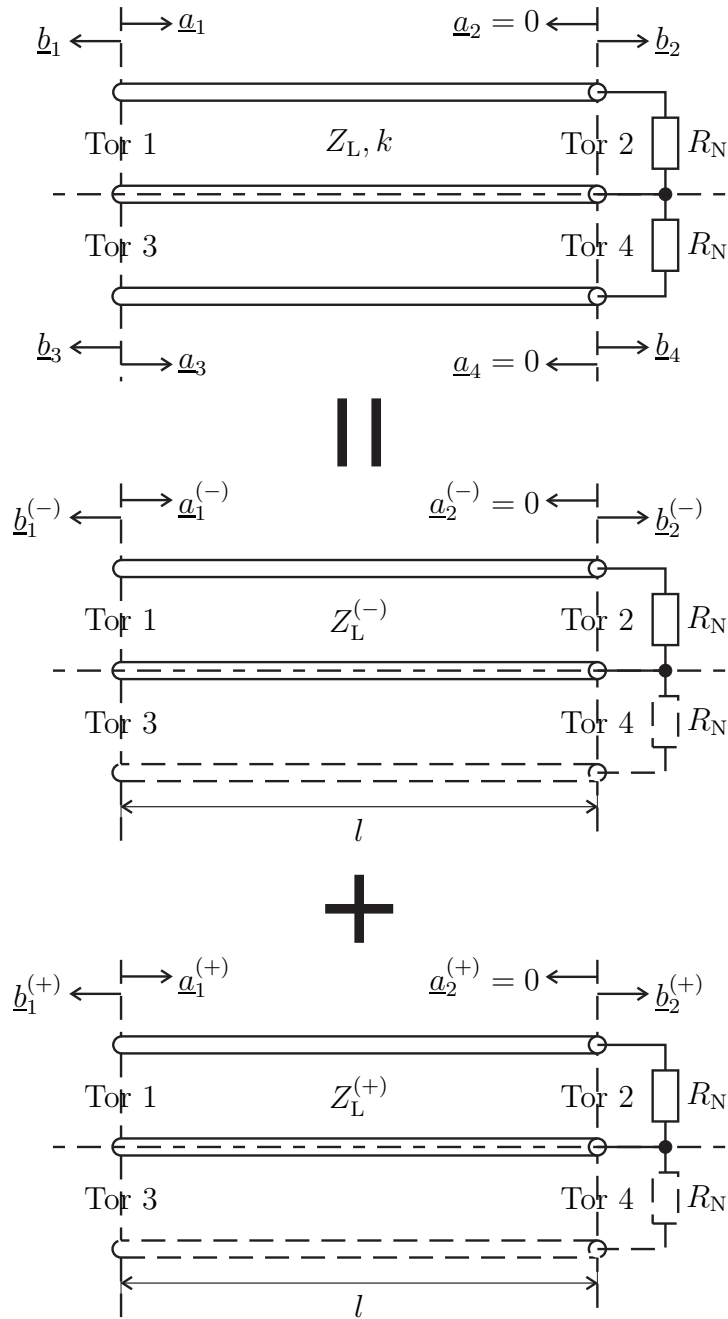


Abbildung 10.18.: Parallelleitungskoppler. Spezieller Betriebszustand $\underline{a}_2 = \underline{a}_4 = 0$

gilt. Dies ist der Fall, falls

$$R_N = \sqrt{Z_L^{(-)} Z_L^{(+)}} \quad (10.40)$$

gilt. Im Folgenden wird nur dieser spezielle Wert des Bezugswiderstands R_N weiter betrachtet. Mit (3.71), (3.72) und (3.73) folgen die modalen Streuparameter:

$$\underline{M}_{1,1}^{(--)} = \frac{-jk \sin(\beta l)}{\sqrt{1 - k^2} \cos(\beta l) + j \sin(\beta l)}, \quad (10.41)$$

$$\underline{M}_{1,1}^{(-+)} = 0, \quad (10.42)$$

$$\underline{M}_{1,1}^{(+-)} = 0, \quad (10.43)$$

$$\underline{M}_{1,1}^{(++)} = \frac{jk \sin(\beta l)}{\sqrt{1 - k^2} \cos(\beta l) + j \sin(\beta l)}, \quad (10.44)$$

$$\underline{M}_{1,2}^{(--)} = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{\sqrt{1 - k^2} \cos(\beta l) + j \sin(\beta l)}, \quad (10.45)$$

$$\underline{M}_{1,2}^{(-+)} = 0, \quad (10.46)$$

$$\underline{M}_{1,2}^{(+-)} = 0, \quad (10.47)$$

$$\underline{M}_{1,2}^{(++)} = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{\sqrt{1 - k^2} \cos(\beta l) + j \sin(\beta l)}. \quad (10.48)$$

Die nodalen Streuparameter ergeben sich mit (9.41) bis (9.44) zu:

$$\underline{S}_{1,1} = \frac{\underline{M}_{1,1}^{(--)} + \underline{M}_{1,1}^{(++)}}{2} = 0, \quad (10.49)$$

$$\underline{S}_{1,2} = \frac{\underline{M}_{1,2}^{(--)} + \underline{M}_{1,2}^{(++)}}{2} = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{\sqrt{1 - k^2} \cos(\beta l) + j \sin(\beta l)}, \quad (10.50)$$

$$\underline{S}_{1,3} = \frac{-\underline{M}_{1,1}^{(--)} + \underline{M}_{1,1}^{(++)}}{2} = \frac{jk \sin(\beta l)}{\sqrt{1 - k^2} \cos(\beta l) + j \sin(\beta l)}, \quad (10.51)$$

$$\underline{S}_{1,4} = \frac{-\underline{M}_{1,2}^{(--)} + \underline{M}_{1,2}^{(++)}}{2} = 0. \quad (10.52)$$

Die restlichen nodalen Streuparameter sind aus Symmetriegründen gleich zu den berechneten.

Es folgen

$$|\underline{S}_{1,2}|^2 = \frac{1 - k^2}{1 - k^2 \cos^2(\beta l)} \quad (10.53)$$

und

$$|\underline{S}_{1,3}|^2 = \frac{k^2 \sin^2(\beta l)}{1 - k^2 \cos^2(\beta l)}. \quad (10.54)$$

Das Nahnebensprechen

$$\underline{S}_{1,3} = \frac{jk \sin(\beta l)}{\sqrt{1-k^2} \cos(\beta l) + j \sin(\beta l)} = \frac{k}{1 - j\sqrt{1-k^2} \cot(\beta l)} \quad (10.55)$$

wird für $l = \lambda/4$ maximal, siehe (2.38). Der bei dieser Leitungslänge erzielte Maximalwert des Nahnebensprechens ist $\underline{S}_{1,3} = k$. Das Fernnebensprechen $\underline{S}_{1,4}$ ist unabhängig von der Leitungslänge l immer Null.

Zum Veranschaulichen der Ergebnisse wird der in Abbildung 10.18 gezeigte spezielle Betriebszustand mit reflexionsfreiem Abschluss an Tor 2 und Tor 4 betrachtet. Man beachte, dass der Abschluss bezüglich der an den Toren angeschlossenen Zweileitersysteme, nicht aber bezüglich des gekoppelten Dreileitersystems im Inneren des Viertors reflexionsfrei ist. Nur an Tor 1 liege eine zulaufende Welle an, das heißt an Tor 1 überlagern sich zulaufende Gegentaktwelle und zulaufende Gleichtaktwelle konstruktiv und an Tor 3 löschen sich zulaufende Gegentaktwelle und zulaufende Gleichtaktwelle destruktiv aus. Für Gegentaktmode und Gleichtaktmode ist die gleiche Abschlussimpedanz R_N sichtbar. Diese Abschlussimpedanz R_N wird jedoch aufgrund der unterschiedlichen Wellenwiderstände von Gegentaktmode und Gleichtaktmode in unterschiedliche Eingangsimpedanzen transformiert, so dass auch die eingangsseitigen Reflexionsfaktoren für Gegentaktmode und Gleichtaktmode unterschiedlich sind. Die ablaufende Gegentaktwelle und die ablaufende Gleichtaktwelle löschen sich daher an Tor 3 nicht mehr vollständig aus. Es kommt zu Nahnebensprechen. Nur wenn die Leitungslänge ein ganzzahliges Vielfaches von $\lambda/2$ ist, wird unabhängig vom Wellenwiderstand die Abschlussimpedanz R_N stets in sich selbst transformiert und es treten keine Reflexionen und insbesondere kein Nahnebensprechen auf. Speziell für

$$R_N = \sqrt{Z_L^{(-)} Z_L^{(+)}} \quad (10.56)$$

unterscheiden sich die Reflexionsfaktoren von Gegentaktmode und Gleichtaktmode nur im Vorzeichen. Dann löschen sich die ablaufende Gegentaktwelle und die ablaufende Gleichtaktwelle an Tor 1, nicht aber an Tor 3 gegenseitig aus.

Kapitel 11.

Vektorielle Netzwerkanalyse

11.1. Reflektometer

11.1.1. Aufbau eines Reflektometers

Das Reflektometer dient dem Messen des Reflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_{\text{DUT}}$ eines Messobjekts (Device under Test, DUT). Da nicht nur der Betrag des Reflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_{\text{DUT}}$, sondern auch das Argument gemessen wird, spricht man von einer vektoriellen Messung. Wenn es gelänge, die komplexe Wellenamplitude \underline{a} der auf das Messobjekt zulaufenden Welle und die komplexe Wellenamplitude \underline{b} der ablaufenden Welle getrennt zu erfassen, so könnte man den Reflexionsfaktor mit

$$\underline{\Gamma}_{\text{DUT}} = \frac{\underline{b}}{\underline{a}} \quad (11.1)$$

direkt berechnen, siehe (7.7).

Für eine praktische Realisierung des Reflektometers sind direktive Elemente wie Richtkoppler verfügbar, die im Idealfall zu den gesuchten Wellen proportionale Wellen an getrennten Toren auskoppeln. Zum Messen der komplexen Wellenamplituden kann man beispielsweise Quadraturdemodulatoren verwenden, siehe Anhang A.6.5. Die resultierenden Gleichspannungen in den Inphasekanälen und Quadraturkanälen entsprechen den Realteilen beziehungsweise den Imaginärteilen der zu messenden komplexen Wellenamplituden. Zum Unterdrücken von Rauschen führt man eine Mittelung über eine gewisse Integrationsdauer durch, was im Frequenzbereich einer Filterung mit einer zur Integrationsdauer umgekehrt proportionalen Auflösungsbreite (Resolution Bandwidth, RBW) entspricht. Wegen der unbekanntenen Nullphase des Oszillatorsignals geht die absolute Phaseninformation zunächst verloren. Wenn man in beiden Messkanalempfängern das selbe Oszillatorsignal verwendet, bleibt die hier relevante relative Phaseninformation jedoch erhalten. Man erhält im Idealfall zu den komplexen Wellenamplituden proportionale Messgrößen

$$\underline{a}' \sim \underline{a}$$

und

$$\underline{b}' \sim \underline{b}.$$

Die Proportionalitätsfaktoren des direktiven Elements und die Verstärkungen und Phasenverschiebungen der Messkanalempfänger sind im Idealfall für beide Messgrößen gleich, so dass man den Reflexionsfaktor des Messobjekts direkt als Verhältnis der Messgrößen berechnen kann:

$$\underline{\Gamma}_{\text{DUT}} = \frac{\underline{b}'}{\underline{a}'}. \quad (11.2)$$

In der Realität treten signifikante Fehler auf. Neben Imperfektionen des direktiven Elements sind dies insbesondere Phasenverschiebungen und Dämpfungen der Verbindungsleitungen zwischen Messgerät und Messobjekt. Man modelliert dieses reale Reflektometer durch ein Viertor an dessen vier Toren

1. das Messobjekt mit Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_{\text{DUT}}$,
2. die Testsignalquelle,
3. die Messstelle für die komplexe Wellenamplitude \underline{a}' der hinlaufenden Welle mit Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_{\text{a}}$ und
4. die Messstelle für die komplexe Wellenamplitude \underline{b}' der rücklaufenden Welle mit Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_{\text{b}}$

angeschlossen sind, siehe Abbildung 11.1.

Mit den Reflexionsfaktoren der Messstellen folgen

$$\underline{a}_4 = \underline{\Gamma}_{\text{a}} \underline{a}' \quad (11.3)$$

und

$$\underline{a}_3 = \underline{\Gamma}_{\text{b}} \underline{b}', \quad (11.4)$$

siehe (7.7). Das Viertor kann gemäß (9.4) durch seine Streuparameter beschrieben werden:

$$\underline{a} = \underline{S}_{1,1} \underline{b} + \underline{S}_{1,2} \underline{a}_2 + \underline{S}_{1,3} \underline{a}_3 + \underline{S}_{1,4} \underline{a}_4, \quad (11.5)$$

$$\underline{b}_2 = \underline{S}_{2,1} \underline{b} + \underline{S}_{2,2} \underline{a}_2 + \underline{S}_{2,3} \underline{a}_3 + \underline{S}_{2,4} \underline{a}_4, \quad (11.6)$$

$$\underline{b}' = \underline{S}_{3,1} \underline{b} + \underline{S}_{3,2} \underline{a}_2 + \underline{S}_{3,3} \underline{a}_3 + \underline{S}_{3,4} \underline{a}_4, \quad (11.7)$$

$$\underline{a}' = \underline{S}_{4,1} \underline{b} + \underline{S}_{4,2} \underline{a}_2 + \underline{S}_{4,3} \underline{a}_3 + \underline{S}_{4,4} \underline{a}_4. \quad (11.8)$$

Diese Gleichungen stellen ein lineares Gleichungssystem mit sechs Gleichungen und den sechs Unbekannten \underline{a} , \underline{b}' , \underline{a}_2 , \underline{a}_3 , \underline{a}_4 und \underline{b}_2 dar, das heißt man kann \underline{a}

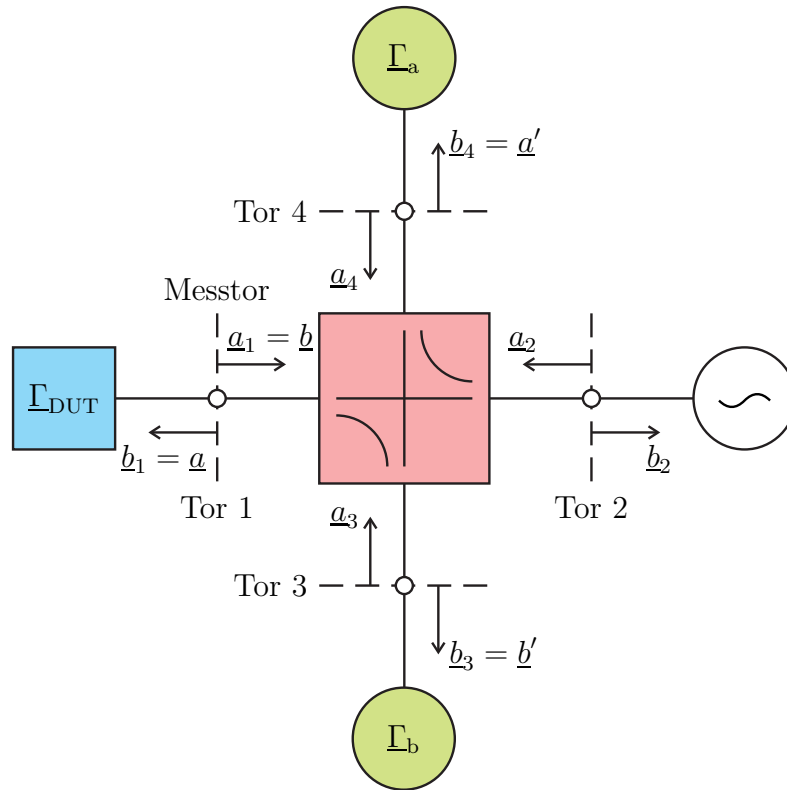


Abbildung 11.1.: Reflektometer

und \underline{b}' als Funktionen von \underline{b} und \underline{a}' berechnen. Unter Verwenden von (11.3) und (11.4) erhält man aus (11.8)

$$\begin{aligned} \underline{a}_2 &= \frac{1}{\underline{S}_{4,2}} \underline{a}' - \frac{\underline{S}_{4,1}}{\underline{S}_{4,2}} \underline{b} - \frac{\underline{S}_{4,3}}{\underline{S}_{4,2}} \underline{a}_3 - \frac{\underline{S}_{4,4}}{\underline{S}_{4,2}} \underline{a}_4 \\ &= \left(\frac{1}{\underline{S}_{4,2}} - \frac{\underline{S}_{4,4} \Gamma_a}{\underline{S}_{4,2}} \right) \underline{a}' - \frac{\underline{S}_{4,1}}{\underline{S}_{4,2}} \underline{b} - \frac{\underline{S}_{4,3} \Gamma_b}{\underline{S}_{4,2}} \underline{b}'. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Mit (11.3), (11.4) und (11.9) eliminiert man \underline{a}_2 , \underline{a}_3 und \underline{a}_4 in (11.5) und (11.7) und erhält schließlich \underline{a} und \underline{b}' als lineare Funktionen von \underline{b} und \underline{a}' gemäß

$$\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b}' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{F}_{0,0} & \underline{F}_{0,1} \\ \underline{F}_{1,0} & \underline{F}_{1,1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b} \\ \underline{a}' \end{pmatrix}. \quad (11.10)$$

Abbildung 11.2 zeigt das so erhaltene Modell des imperfekten Reflektometers. Die Fehler werden durch ein zwischen virtuelles ideales Reflektometer und Mesobjekt geschaltetes Fehlerzweitor mit der Streumatrix \mathbf{F} berücksichtigt. Dieses

Fehlerzweitor entspricht keinem direkt physikalisch vorhandenem Zweitor und ist daher im Allgemeinen auch nicht reziprok. Das hier geschilderte Vorgehen wird als Viertor-Zweitor-Reduktion bezeichnet [ES91].

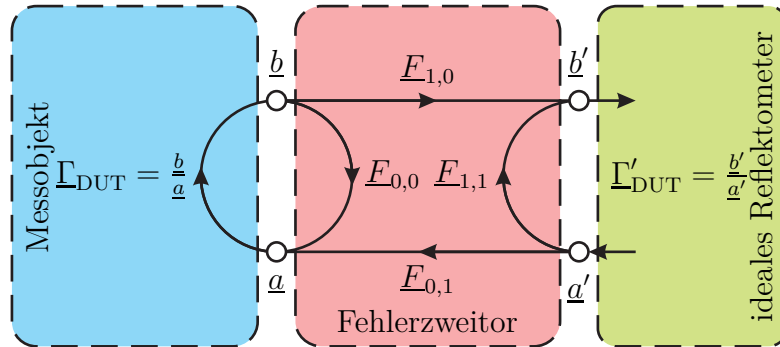


Abbildung 11.2.: Modell des imperfekten Reflektometers

Aufgabe 11.1 Berechnen Sie die Streuparameter $E_{0,0}$, $E_{0,1}$, $E_{1,0}$ und $E_{1,1}$ des Fehlerzweitors als Funktionen der Streuparameter des Viertors und der Reflexionsfaktoren der Messstellen! Wie vereinfachen sich die Ergebnisse, wenn das Viertor ein Richtkoppler ist, siehe Abschnitt 10.4.2? Wie vereinfachen sich die Ergebnisse im Falle reflexionsfreier Messstellen $\Gamma_a = 0$ und $\Gamma_b = 0$?

11.1.2. Reflektometerfehlerkorrektur

Mit der Transmissionsmatrix (9.21) des Fehlerzweitors mit den Streuparametern gemäß (11.10), siehe Abbildung 11.2, kann man die am Messobjekt anliegenden komplexen Wellenamplituden aus den vom virtuellen idealen Reflektometer gemessenen komplexen Wellenamplituden berechnen:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{E_{1,0}} \begin{pmatrix} -\det(\mathbf{E}) & E_{0,0} \\ -E_{1,1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}. \quad (11.11)$$

Man beachte, dass die Vektorelemente und entsprechend auch die Matrixelemente gegenüber der Definition der Transmissionsmatrix in (9.20) vertauscht sind, was sich später in (11.24) als vorteilhaft erweisen wird.

Für den Reflexionsfaktor (11.1) des Messobjekts folgt

$$\Gamma_{\text{DUT}} = \frac{b}{a} = \frac{b' - E_{1,1}a'}{E_{0,0}b' - \det(\mathbf{E})a'} = \frac{\Gamma'_{\text{DUT}} - E_{1,1}}{E_{0,0}\Gamma'_{\text{DUT}} - \det(\mathbf{E})}, \quad (11.12)$$

das heißt bei Kenntnis der drei Fehlerterme $\det(\underline{\mathbf{F}})$, $\underline{F}_{0,0}$ und $\underline{F}_{1,1}$ kann man den Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_{\text{DUT}}$ des Messobjekts aus den gemessenen komplexen Wellenamplituden \underline{a}' und \underline{b}' oder dem gemessenen Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}'_{\text{DUT}}$ gemäß (11.2) berechnen. Man spricht daher auch vom 3-Term-Fehlermodell. In der Literatur [Hie11] wird der Anschauung wegen üblicherweise statt $\det(\underline{\mathbf{F}})$ der unter Verwenden der übrigen Fehlerterme $\underline{F}_{0,0}$ und $\underline{F}_{1,1}$ daraus berechenbare Fehlerterm

$$\underline{F}_{0,1}\underline{F}_{1,0} = \underline{F}_{0,0}\underline{F}_{1,1} - \det(\underline{\mathbf{F}})$$

verwendet. Die Fehlerterme werden dann wie folgt bezeichnet:

Reflexionsgleichlauf: $\underline{F}_{0,1}\underline{F}_{1,0}$

Direktivität: $\underline{F}_{1,1}$

Messtoranpassung: $\underline{F}_{0,0}$

Bemerkenswert ist, dass nur das Produkt $\underline{F}_{0,1}\underline{F}_{1,0}$, nicht aber $\underline{F}_{0,1}$ und $\underline{F}_{1,0}$ für die Korrekturrechnung (11.12) benötigt werden.

Die drei Fehlerterme bestimmt man durch Messungen an drei Kalibrierstandards exakt bekannten Reflexionsfaktors. Beim OSM-Verfahren verwendet man folgende Kalibrierstandards:

Leerlauf (OPEN): wahrer Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_{\text{O}}$, gemessener Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}'_{\text{O}}$

Kurzschluss (SHORT): wahrer Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_{\text{S}}$, gemessener Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}'_{\text{S}}$

Abschluss (MATCH): wahrer Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_{\text{M}}$, gemessener Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}'_{\text{M}}$

Reale Kalibrierstandards haben in nicht vernachlässigbarer Weise von den Reflexionsfaktoren eines idealen Leerlaufs, Kurzschlusses beziehungsweise Abschlusses abweichende Reflexionsfaktoren. Neben einer gewissen Leitungslänge zwischen der Referenzebene im Steckverbinder und dem eigentlichen Kalibrierstandard sind insbesondere Streukapazitäten des offenen Leitungsendes im Leerlauf signifikant. Hersteller von Kalibrierstandards legen daher für jeden Kalibrierstandard individuell mit geeichten Messgeräten bei verschiedenen Kreisfrequenzen ω gemessene Kalibrierdaten bei. Das im Folgenden beschriebene Verfahren zum Ermitteln der Fehlerterme ist von den konkreten Kalibrierstandards unabhängig und kann somit Imperfektionen der Kalibrierstandards berücksichtigen.

Aus (11.12) folgt

$$\underline{\Gamma}'\underline{\Gamma}\underline{F}_{0,0} - \underline{\Gamma}\det(\underline{\mathbf{F}}) = \underline{\Gamma}' - \underline{F}_{1,1}. \quad (11.13)$$

Dies ist eine lineare Gleichung für die drei Fehlerterme $\det(\underline{\mathbf{F}})$, $\underline{F}_{0,0}$ und $\underline{F}_{1,1}$, in welcher der wahre Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}$ und der zugehörige gemessene Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}'$ vorkommen. Durch Einsetzen der drei Paare wahrer und gemessener Reflexionsfaktoren der drei Kalibrierstandards erhält man ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \underline{\Gamma}'_{\text{O}} \\ \underline{\Gamma}'_{\text{S}} \\ \underline{\Gamma}'_{\text{M}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{\Gamma}'_{\text{O}}\underline{\Gamma}_{\text{O}} & -\underline{\Gamma}_{\text{O}} \\ 1 & \underline{\Gamma}'_{\text{S}}\underline{\Gamma}_{\text{S}} & -\underline{\Gamma}_{\text{S}} \\ 1 & \underline{\Gamma}'_{\text{M}}\underline{\Gamma}_{\text{M}} & -\underline{\Gamma}_{\text{M}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{F}_{1,1} \\ \underline{F}_{0,0} \\ \det(\underline{\mathbf{F}}) \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist

$$\begin{pmatrix} \underline{F}_{1,1} \\ \underline{F}_{0,0} \\ \det(\underline{\mathbf{F}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{\Gamma}'_{\text{O}}\underline{\Gamma}_{\text{O}} & -\underline{\Gamma}_{\text{O}} \\ 1 & \underline{\Gamma}'_{\text{S}}\underline{\Gamma}_{\text{S}} & -\underline{\Gamma}_{\text{S}} \\ 1 & \underline{\Gamma}'_{\text{M}}\underline{\Gamma}_{\text{M}} & -\underline{\Gamma}_{\text{M}} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\Gamma}'_{\text{O}} \\ \underline{\Gamma}'_{\text{S}} \\ \underline{\Gamma}'_{\text{M}} \end{pmatrix}. \quad (11.14)$$

Falls mehr als die minimal erforderlichen drei Kalibrierstandards verwendet werden, kann man die zusätzlichen Messwerte im Rahmen einer Ausgleichsrechnung zur Messfehlerreduktion nutzen [Kay93; MS00].

Aufgabe 11.2 *Wie vereinfachen sich die Gleichungen (11.14) zum Berechnen der drei Fehlerterme $\det(\underline{\mathbf{F}})$, $\underline{F}_{0,0}$ und $\underline{F}_{1,1}$, falls ideale Kalibrierstandards $\underline{\Gamma}_{\text{O}} = 1$, $\underline{\Gamma}_{\text{S}} = -1$ und $\underline{\Gamma}_{\text{M}} = 0$ verwendet werden?*

11.2. Vektornetzwerkanalysator

11.2.1. Aufbau eines Vektornetzwerkanalysators

Ein Vektornetzwerkanalysator zum Messen der Streuparameter eines Zweitorts besteht im Wesentlichen aus zwei Reflektometern mit insgesamt vier Messstellen, siehe Abbildung 11.3. Man spricht von einem vollwertigen Vektornetzwerkanalysator. Es gibt auch vereinfachte Vektornetzwerkanalysatoren mit weniger Messstellen [Mar97]. Hier ergeben sich jedoch Einschränkungen bei den Fehlerkorrekturmöglichkeiten. Zunächst wird nur der vollwertige Vektornetzwerkanalysator mit zwei Messtoren betrachtet. Heutige Vektornetzwerkanalysatoren enthalten darüber hinaus einen Rechner, der die Messwerte verarbeitet. Außer einer graphischen Darstellung der Messergebnisse wird insbesondere die Fehlerkorrektur vollautomatisch durchgeführt. Auch weiterführende Messwertverarbeitungen wie Berechnen der modalen Streuparameter und Berechnen der Impedanzmatrizen und der Admittanzmatrizen, siehe Kapitel 9, sind heute Standard.

Der Umschalter in Abbildung 11.3 dient dazu, zwei verschiedene Testsignale zu erzeugen. Im Idealfall würde in der gezeigten Schalterstellung I nur an Messstor 1 ein Testsignal anliegen und nach Umschalten in Stellung II würde nur an Messstor 2 ein Testsignal anliegen. Das heißt man würde das Messobjekt einmal in Vorwärtsrichtung und einmal in Rückwärtsrichtung messen. Wären neben dem Umschalter auch die direktiven Elemente perfekt, so könnte man aus den Ergebnissen der Messung in Vorwärtsrichtung

$$\underline{S}_{1,1} = \frac{b'_{I1}}{a'_{I1}}$$

und

$$\underline{S}_{2,1} = \frac{b'_{II2}}{a'_{II2}}$$

berechnen, siehe (9.4). Dual erhalte man aus den Ergebnissen der Messung in Rückwärtsrichtung

$$\underline{S}_{2,2} = \frac{b'_{II2}}{a'_{II2}}$$

und

$$\underline{S}_{1,2} = \frac{b'_{II1}}{a'_{II2}}.$$

In der Realität gibt es ein Übersprechen am Umschalter, so dass immer an beiden Messtoren Testsignale anliegen. Für das im Folgenden beschriebene Messverfahren ist dies kein Problem, da keine speziellen Annahmen über die Art der Testsignale gemacht werden. Weiterhin sind die direktiven Elemente nicht perfekt. Für jedes Reflektometer kann man wieder wie in Abschnitt 11.1.1 beschrieben eine Viertor-Zweitort-Reduktion durchführen. Man erhält als Ergebnis das in Abbildung 11.4 dargestellte Modell des imperfekten Vektornetzwerkanalysators. Zwischen die beiden Messtore eines virtuellen idealen Vektornetzwerkanalysators und die Tore des Messobjekts ist jeweils ein Fehlerzweitort geschaltet.

Die Determinanten der Streumatrizen der Fehlerzweitore sind

$$\det(\underline{\mathbf{F}}_A) = \underline{F}_{0,0}\underline{F}_{1,1} - \underline{F}_{0,1}\underline{F}_{1,0}$$

und

$$\det(\underline{\mathbf{F}}_B) = \underline{F}_{2,2}\underline{F}_{3,3} - \underline{F}_{2,3}\underline{F}_{3,2}.$$

Mit den Transmissionsmatrizen der Fehlerzweitore erhält man

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{F}_{1,0}} \underbrace{\begin{pmatrix} -\det(\underline{\mathbf{F}}_A) & \underline{F}_{0,0} \\ -\underline{F}_{1,1} & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \begin{pmatrix} a'_1 \\ b'_1 \end{pmatrix} \quad (11.15)$$

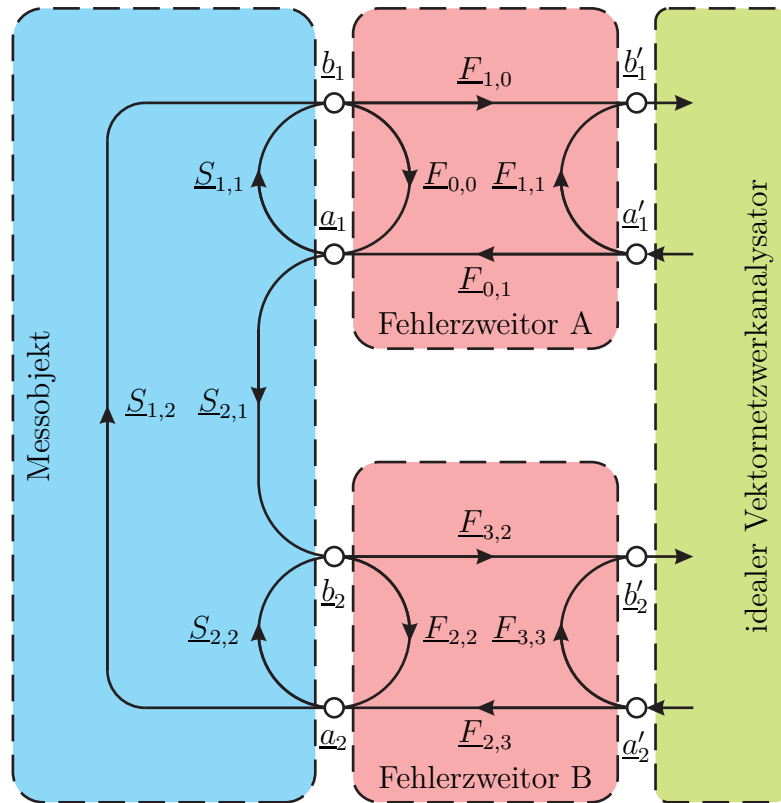


Abbildung 11.4.: Modell des imperfekten Vektornetzwerkanalysators

und

$$\begin{pmatrix} \underline{b}_2 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{F_{3,2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -F_{3,3} \\ F_{2,2} & -\det(\mathbf{F}_B) \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}'_2 \\ \underline{a}'_2 \end{pmatrix}, \quad (11.16)$$

vergleiche (11.11). Die Fehlerzweite entsprechen wieder keinen direkt physikalisch vorhandenen Zweiten und sind daher im Allgemeinen auch nicht reziprok.

Das Verhalten des Messobjekts wird gemäß (9.4) durch seine Streumatrix beschrieben:

$$\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}_{\text{DUT}}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}. \quad (11.17)$$

11.2.2. Vektornetzwerkanalysatorfehlerkorrektur

Mit Hilfe der Transmissionsmatrizen kann man die am Messobjekt anliegenden komplexen Wellenamplituden aus den vom virtuellen idealen Vektornetzwerkanalysator

lyikator gemessenen komplexen Wellenamplituden berechnen. Nach Multiplikation aller Gleichungen in (11.15) und (11.16) mit $\underline{F}_{1,0}$ erhält man:

$$\underline{F}_{1,0}\underline{a}_1 = -\det(\underline{\mathbf{F}}_A)\underline{a}'_1 + \underline{F}_{0,0}\underline{b}'_1, \quad (11.18)$$

$$\underline{F}_{1,0}\underline{b}_1 = -\underline{F}_{1,1}\underline{a}'_1 + \underline{b}'_1, \quad (11.19)$$

$$\underline{F}_{1,0}\underline{b}_2 = \frac{\underline{F}_{1,0}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_2 - \frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{3,3}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{a}'_2, \quad (11.20)$$

$$\underline{F}_{1,0}\underline{a}_2 = \frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_2 - \frac{\underline{F}_{1,0}\det(\underline{\mathbf{F}}_B)}{\underline{F}_{3,2}}\underline{a}'_2. \quad (11.21)$$

Beim Messen in Schalterstellung I erhält man die Messwerte \underline{a}'_{I1} , \underline{b}'_{I1} , \underline{a}'_{I2} und \underline{b}'_{I2} und beim Messen in Schalterstellung II erhält man die Messwerte \underline{a}'_{II1} , \underline{b}'_{II1} , \underline{a}'_{II2} und \underline{b}'_{II2} . Aus diesen Messwerten berechnet man die zugehörigen, am Messobjekt anliegenden und mit $\underline{F}_{1,0}$ skalierten komplexen Wellenamplituden $\underline{F}_{1,0}\underline{a}_{I1}$, $\underline{F}_{1,0}\underline{b}_{I1}$, $\underline{F}_{1,0}\underline{a}_{I2}$, $\underline{F}_{1,0}\underline{b}_{I2}$, $\underline{F}_{1,0}\underline{a}_{II1}$, $\underline{F}_{1,0}\underline{b}_{II1}$, $\underline{F}_{1,0}\underline{a}_{II2}$ und $\underline{F}_{1,0}\underline{b}_{II2}$. Durch Kombination der Ergebnisse aus beiden Messungen erhält man mit (11.17)

$$\begin{pmatrix} \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{I1} & \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{II1} \\ \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{I2} & \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{II2} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{S}}_{\text{DUT}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{I1} & \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{II1} \\ \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{I2} & \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{II2} \end{pmatrix} \quad (11.22)$$

und schließlich

$$\underline{\mathbf{S}}_{\text{DUT}} = \begin{pmatrix} \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{I1} & \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{II1} \\ \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{I2} & \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{II2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{I1} & \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{II1} \\ \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{I2} & \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{II2} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (11.23)$$

Zum Berechnen der Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}_{\text{DUT}}$ des Messobjekts aus den Messergebnissen werden die sieben Fehlerterme $\det(\underline{\mathbf{F}}_A)$, $\underline{F}_{0,0}$, $\underline{F}_{1,1}$, $\underline{F}_{1,0}\det(\underline{\mathbf{F}}_B)/\underline{F}_{3,2}$, $\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}/\underline{F}_{3,2}$, $\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{3,3}/\underline{F}_{3,2}$ und $\underline{F}_{1,0}/\underline{F}_{3,2}$ benötigt. Man spricht auch vom 7-Term-Fehlermodell. In der Literatur [Hie11] werden der Anschauung wegen die folgenden sieben äquivalenten Fehlerterme verwendet:

Reflexionsgleichlauf: $\underline{F}_{0,1}\underline{F}_{1,0}$ und $\underline{F}_{2,3}\underline{F}_{3,2}$

Transmissionsgleichlauf: $\underline{F}_{0,1}\underline{F}_{3,2}$

Direktivität: $\underline{F}_{1,1}$ und $\underline{F}_{2,2}$

Messtoranpassung: $\underline{F}_{0,0}$ und $\underline{F}_{3,3}$

Sofern die Transmissionsmatrix $\underline{\mathbf{T}}_{\text{DUT}}$ des Messobjekts gemäß (9.21) existiert, das heißt $\underline{S}_{2,1}$ nicht Null ist, sind die Messwerte an Messtor 1 und an Messtor 2 durch

$$\begin{pmatrix} \underline{a}'_1 \\ \underline{b}'_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{\underline{F}_{1,0}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{\text{DUT}} \cdot \underline{\mathbf{B}}}_{\underline{\mathbf{T}}'_{\text{DUT}}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}'_2 \\ \underline{a}'_2 \end{pmatrix} \quad (11.24)$$

miteinander verknüpft, siehe (11.15), (11.16) und (9.20). Kombinieren der Ergebnisse beider Messungen ergibt

$$\begin{pmatrix} \underline{a}'_{I1} & \underline{a}'_{II1} \\ \underline{b}'_{I1} & \underline{b}'_{II1} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{T}}'_{\text{DUT}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}'_{I2} & \underline{b}'_{II2} \\ \underline{a}'_{I2} & \underline{a}'_{II2} \end{pmatrix}.$$

Hieraus kann man die gemessene Transmissionsmatrix

$$\underline{\mathbf{T}}'_{\text{DUT}} = \begin{pmatrix} \underline{a}'_{I1} & \underline{a}'_{II1} \\ \underline{b}'_{I1} & \underline{b}'_{II1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}'_{I2} & \underline{b}'_{II2} \\ \underline{a}'_{I2} & \underline{a}'_{II2} \end{pmatrix}^{-1} \quad (11.25)$$

berechnen. Bei Kenntnis der Fehlerterme kann man die korrigierte Messung mittels Deembedding berechnen:

$$\underline{\mathbf{T}}_{\text{DUT}} = \frac{F_{3,2}}{F_{1,0}} \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{T}}'_{\text{DUT}} \cdot \underline{\mathbf{B}}^{-1}. \quad (11.26)$$

Die Fehlerterme sind durch Messungen an bekannten Kalibrierstandards zu bestimmen. Eine Messung an einem Zweitor bekannter Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ ergibt gemäß (11.22) vier lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -F_{1,1}\underline{a}'_{I1} + \underline{b}'_{I1} & -F_{1,1}\underline{a}'_{II1} + \underline{b}'_{II1} \\ \frac{F_{1,0}}{F_{3,2}}\underline{b}'_{I2} - \frac{F_{1,0}F_{3,3}}{F_{3,2}}\underline{a}'_{I2} & \frac{F_{1,0}}{F_{3,2}}\underline{b}'_{II2} - \frac{F_{1,0}F_{3,3}}{F_{3,2}}\underline{a}'_{II2} \end{pmatrix} \\ & = \underline{\mathbf{S}} \cdot \begin{pmatrix} -\det(\underline{\mathbf{F}}_A)\underline{a}'_{I1} + F_{0,0}\underline{b}'_{I1} & -\det(\underline{\mathbf{F}}_A)\underline{a}'_{II1} + F_{0,0}\underline{b}'_{II1} \\ \frac{F_{1,0}F_{2,2}}{F_{3,2}}\underline{b}'_{I2} - \frac{F_{1,0}\det(\underline{\mathbf{F}}_B)}{F_{3,2}}\underline{a}'_{I2} & \frac{F_{1,0}F_{2,2}}{F_{3,2}}\underline{b}'_{II2} - \frac{F_{1,0}\det(\underline{\mathbf{F}}_B)}{F_{3,2}}\underline{a}'_{II2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11.27)$$

für die unbekanntenen Fehlerterme. Eine Messung an einem Eintor bekannten Reflexionsfaktors $\underline{\Gamma}$ an Messtor 1 oder Messtor 2 ergibt eine lineare Gleichung

$$-F_{1,1}\underline{a}'_{I1} + \underline{b}'_{I1} = \underline{\Gamma} \left(-\det(\underline{\mathbf{F}}_A)\underline{a}'_{I1} + F_{0,0}\underline{b}'_{I1} \right) \quad (11.28)$$

beziehungsweise

$$\frac{F_{1,0}}{F_{3,2}}\underline{b}'_{II2} - \frac{F_{1,0}F_{3,3}}{F_{3,2}}\underline{a}'_{II2} = \underline{\Gamma} \left(\frac{F_{1,0}F_{2,2}}{F_{3,2}}\underline{b}'_{II2} - \frac{F_{1,0}\det(\underline{\mathbf{F}}_B)}{F_{3,2}}\underline{a}'_{II2} \right) \quad (11.29)$$

für die unbekanntenen Fehlerterme. Man beachte, dass (11.28) exakt der Grundgleichung (11.13) der Reflektometerkalibrierung entspricht. Durch Messungen an hinreichend vielen bekannten Kalibrierstandards sind sieben linear unabhängige Gleichungen zu gewinnen. Aus dem so erhaltenen linearen Gleichungssystem können dann die Fehlerterme berechnet werden. Falls mehr als die minimal erforderliche Anzahl an Gleichungen gewonnen wird, kann man die zusätzlichen

Messwerte im Rahmen einer Ausgleichsrechnung zur Messfehlerreduktion nutzen [Kay93; MS00]. Je nach der Art der verwendeten Kalibrierstandards erhält man so eine Vielfalt unterschiedlicher Kalibrierverfahren. Ein bekanntes Beispiel ist das TOSM-Verfahren. Hier werden zunächst durch OSM-Messungen an beiden Toren insgesamt sechs Gleichungen gewonnen. Durch Messungen in Vorwärtsrichtung und in Rückwärtsrichtung an einem bekannten

Verbindungsstück (THROUGH): mit der wahren Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}_T$

können vier weitere Gleichungen gewonnen werden.

11.2.3. Verwenden teilweise unbekannter Kalibrierstandards

Unter dem Schlagwort Selbstkalibrierung sind in der Literatur Verfahren mit teilweise unbekanntem Kalibrierstandards bekannt. Vorteilhafterweise setzt man nur die zuverlässig reproduzierbaren Eigenschaften der Kalibrierstandards als bekannt voraus.

Ein bekanntes Verfahren mit teilweise unbekanntem Kalibrierstandards ist das UOSM-Verfahren [FP92]. Zunächst bestimmt man mit einer Reflektometerkalibrierung an Messtor 1 die in (11.15) eingeführte Matrix $\underline{\mathbf{A}}$. Als nächstes bestimmt man mit einer Reflektometerkalibrierung an Messtor 2 die in (11.16) eingeführte Matrix $\underline{\mathbf{B}}$. Zum Berechnen der korrigierten Messung mit (11.26) fehlt jetzt nur noch die Kenntnis des Fehlerterms $\underline{F}_{1,0}/\underline{F}_{3,2}$. Zum Bestimmen dieses Fehlerterms $\underline{F}_{1,0}/\underline{F}_{3,2}$ führt man eine Kalibrierung mit einem weiteren, teilweise unbekanntem aber reziproken Kalibrierstandard durch:

Unbekanntes Verbindungsstück (UNKNOWN THROUGH): Für die wahre Transmissionsmatrix gilt aufgrund der Reziprozität $\det(\underline{\mathbf{T}}_U) = 1$, siehe (9.23). Die gemessene Transmissionsmatrix ist $\underline{\mathbf{T}}'_U$.

Mit (11.26) folgt¹

$$\begin{aligned} 1 = \det(\underline{\mathbf{T}}_U) &= \det\left(\frac{\underline{F}_{3,2}}{\underline{F}_{1,0}} \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{T}}'_U \cdot \underline{\mathbf{B}}^{-1}\right) \\ &= \left(\frac{\underline{F}_{3,2}}{\underline{F}_{1,0}}\right)^2 \det(\underline{\mathbf{A}}) \det(\underline{\mathbf{T}}'_U) \det(\underline{\mathbf{B}}^{-1}) \\ &= \left(\frac{\underline{F}_{3,2}}{\underline{F}_{1,0}}\right)^2 \frac{\det(\underline{\mathbf{A}}) \det(\underline{\mathbf{T}}'_U)}{\det(\underline{\mathbf{B}})} \end{aligned}$$

¹ Für quadratische Matrizen $\underline{\mathbf{A}}$ und $\underline{\mathbf{B}}$ gilt $\det(\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}}) = \det(\underline{\mathbf{A}}) \det(\underline{\mathbf{B}})$.

und schließlich der Fehlerterm

$$\frac{E_{1,0}}{E_{3,2}} = \pm \sqrt{\frac{\det(\underline{\mathbf{A}}) \det(\underline{\mathbf{T}}'_U)}{\det(\underline{\mathbf{B}})}}.$$

Damit folgt für die korrigierte Messung des Kalibrierstandards

$$\underline{\mathbf{T}}_U = \pm \sqrt{\frac{\det(\underline{\mathbf{A}}) \det(\underline{\mathbf{T}}'_U)}{\det(\underline{\mathbf{B}})}} \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{T}}'_U \cdot \underline{\mathbf{B}}^{-1}. \quad (11.30)$$

Das Vorzeichen des Fehlerterms $E_{1,0}/E_{3,2}$ kann man anhand einer groben Kenntnis des für die Kalibriermessung verwendeten Verbindungsstücks ermitteln. Aus (9.21) folgt

$$\underline{S}_{2,1} = \frac{1}{\underline{T}_{a,b}} = \pm \sqrt{\frac{\det(\underline{\mathbf{B}})}{\det(\underline{\mathbf{A}}) \det(\underline{\mathbf{T}}'_U)}} \frac{1}{[\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{T}}'_U \cdot \underline{\mathbf{B}}^{-1}]_{1,1}}. \quad (11.31)$$

Wenn man nun weiß, dass das Verbindungsstück kurz ist und die Phasenverschiebung somit gering sein sollte, so muss das Vorzeichen so gewählt werden, dass der Realteil von $\underline{S}_{2,1}$ positiv ist.

11.2.4. Vereinfachter Vektornetzwerkanalysator

Abbildung 11.5 zeigt eine häufig eingesetzte vereinfachte Vektornetzwerkanalysatorarchitektur mit zwei Messtoren und drei Messstellen. Dem reduzierten Aufwand durch Entfall einer Messstelle, des Umschalters und des zweiten direktiven Elements steht der Nachteil gegenüber, dass das Messobjekt zwischen Messung in Vorwärtsrichtung und Messung in Rückwärtsrichtung manuell umgedreht werden muss. Ohne eine Messung in Vorwärtsrichtung und eine Messung in Rückwärtsrichtung können nicht alle Streuparameter bestimmt werden und insbesondere ist keine vollständige Fehlerkorrektur möglich. Das heißt, selbst wenn man sich nur für die Streuparameter $\underline{S}_{1,1}$ und $\underline{S}_{2,1}$ in Vorwärtsrichtung interessiert, ist für die vollständige Fehlerkorrektur trotzdem auch eine Messung in Rückwärtsrichtung erforderlich.

Mit der Viertor-Zweitorduktion erhält man die in Abbildung 11.6 gezeigten Modelle. In der Abbildung ist sowohl das Modell für die Messung in Vorwärtsrichtung als auch das Modell für die Messung in Rückwärtsrichtung gezeigt. Man beachte, dass die Modelle bei der Messung in Vorwärtsrichtung und bei der Messung in Rückwärtsrichtung die selben sind.

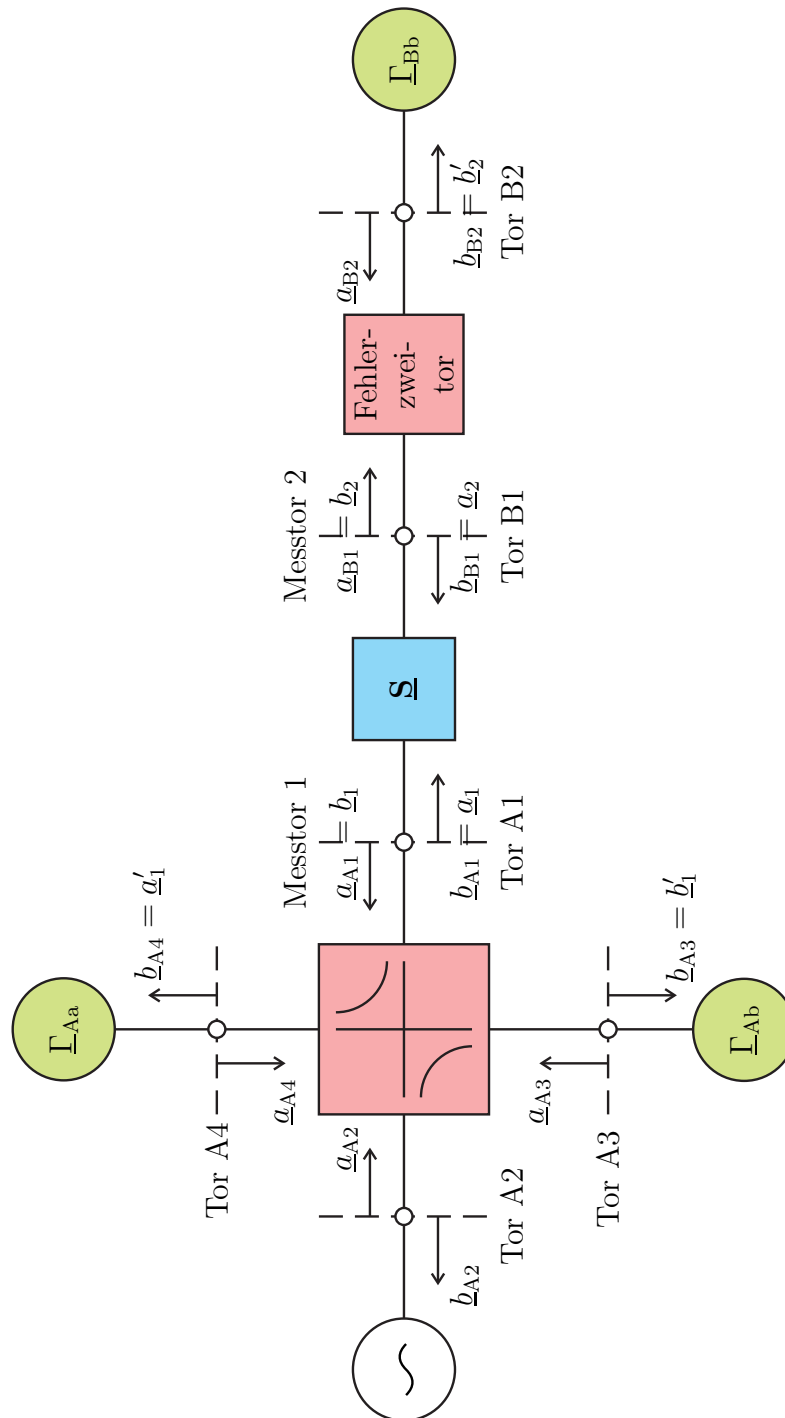
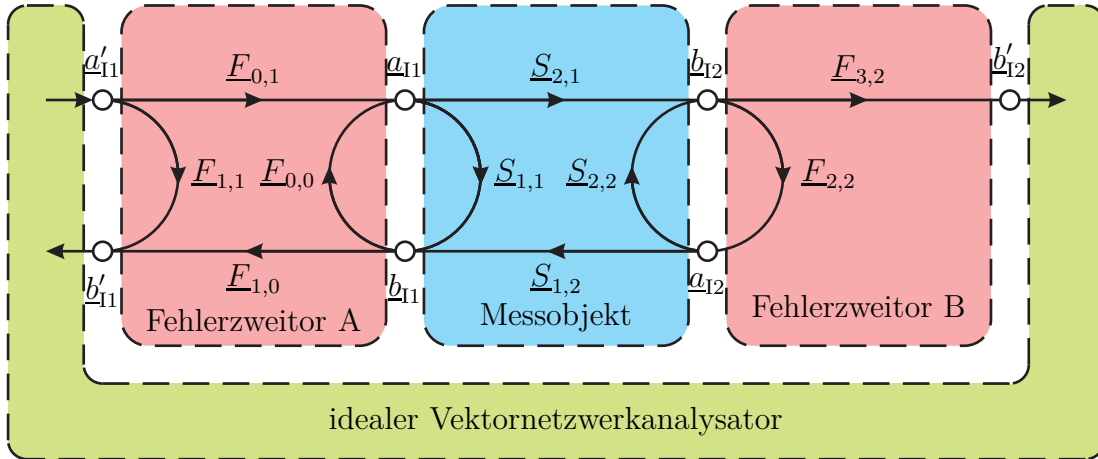
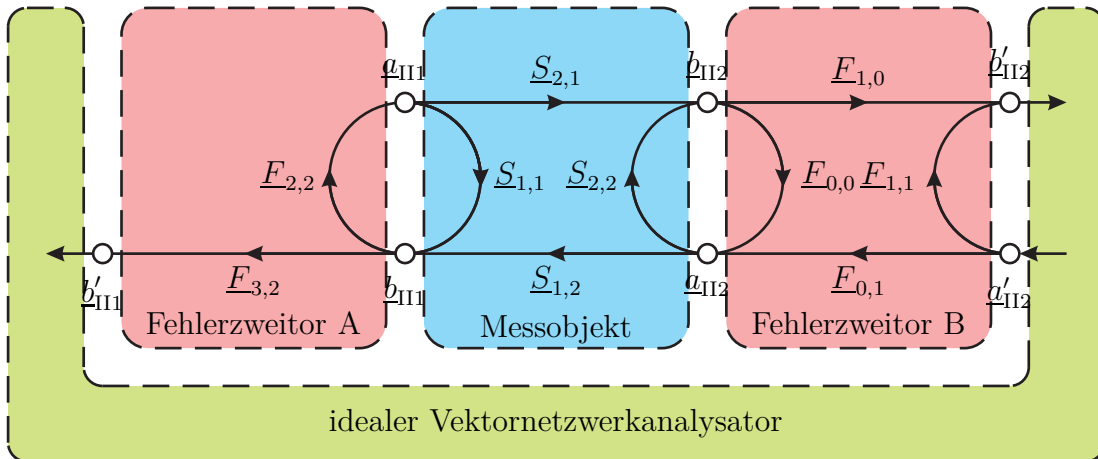


Abbildung 11.5.: Vereinfachter Vektornetzwerkanalysator mit zwei Messtoren und drei Messstellen



(a) Messung in Vorwärtsrichtung



(b) Messung in Rückwärtsrichtung

Abbildung 11.6.: Modell des imperfekten vereinfachten Vektornetzwerkanalysators

Aus (11.18), (11.19), (11.20) und (11.21) erhält man durch Nullsetzen von \underline{a}'_2 die am Messobjekt anliegenden komplexen Wellenamplituden für die Messung in Vorwärtsrichtung:

$$\begin{aligned}\underline{F}_{1,0}\underline{a}_{I1} &= -\det(\underline{\mathbf{F}}_A)\underline{a}'_{I1} + \underline{F}_{0,0}\underline{b}'_{I1}, \\ \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{I1} &= -\underline{F}_{1,1}\underline{a}'_{I1} + \underline{b}'_{I1}, \\ \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{I2} &= \frac{\underline{F}_{1,0}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_{I2}, \\ \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{I2} &= \frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_{I2}.\end{aligned}$$

Dual dazu erhält man für die Messung in Rückwärtsrichtung:

$$\begin{aligned}\underline{F}_{1,0}\underline{a}_{II2} &= -\det(\underline{\mathbf{F}}_A)\underline{a}'_{II2} + \underline{F}_{0,0}\underline{b}'_{II2}, \\ \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{II2} &= -\underline{F}_{1,1}\underline{a}'_{II2} + \underline{b}'_{II2}, \\ \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{III1} &= \frac{\underline{F}_{1,0}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_{III1}, \\ \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{III1} &= \frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_{III1}.\end{aligned}$$

Bei Kenntnis der fünf Fehlerterme $\det(\underline{\mathbf{F}}_A)$, $\underline{F}_{0,0}$, $\underline{F}_{1,1}$, $\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}/\underline{F}_{3,2}$, und $\underline{F}_{1,0}/\underline{F}_{3,2}$ kann man die Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}_{\text{DUT}}$ des Messobjekts wieder mit (11.23) berechnen. Man spricht vom 5-Term-Fehlermodell. In der Literatur [Hie11] werden abweichend die folgenden fünf Fehlerterme verwendet:

Reflexionsgleichlauf: $\underline{F}_{0,1}\underline{F}_{1,0}$

Transmissionsgleichlauf: $\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{3,2}$

Direktivität: $\underline{F}_{1,1}$

Quelltoranpassung: $\underline{F}_{0,0}$

Lasttoranpassung: $\underline{F}_{2,2}$

Es gibt auch hier nicht weiter betrachtete Vektornetzwerkanalysatoren mit drei Messstellen und einem internen Messrichtungsumschalter, bei denen in Vorwärtsrichtung und in Rückwärtsrichtung unterschiedliche Fehlermodelle zu berücksichtigen sind. Dies führt zu einem 10-Term-Fehlermodell [Hie11].

Die Fehlerterme sind wieder durch Messungen an bekannten Kalibrierstandards zu bestimmen. Eine Messung in Vorwärtsrichtung an einem Zweitor bekannter Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ ergibt nach (11.27) zwei lineare Gleichungen

$$\begin{pmatrix} -\underline{E}_{1,1}\underline{a}'_{11} + \underline{b}'_{11} \\ \frac{\underline{E}_{1,0}}{\underline{E}_{3,2}}\underline{b}'_{12} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{S}} \cdot \begin{pmatrix} -\det(\underline{\mathbf{E}}_A)\underline{a}'_{11} + \underline{E}_{0,0}\underline{b}'_{11} \\ \frac{\underline{E}_{1,0}\underline{E}_{2,2}}{\underline{E}_{3,2}}\underline{b}'_{12} \end{pmatrix} \quad (11.32)$$

für die unbekanntenen Fehlerterme, wobei \underline{a}'_2 wieder zu Null gesetzt wurde. Eine Messung in Rückwärtsrichtung entspricht hier einem Umdrehen des Zweitores und ergibt nur bei nicht vertauschbaren Toren neue Gleichungen, die formal den Gleichungen der Messung in Rückwärtsrichtung entsprechen. Eine Messung an einem Eintor bekannten Reflexionsfaktors $\underline{\Gamma}$ an Messtor 1 ergibt eine lineare Gleichung

$$-\underline{E}_{1,1}\underline{a}'_{11} + \underline{b}'_{11} = \underline{\Gamma} \left(-\det(\underline{\mathbf{E}}_A)\underline{a}'_{11} + \underline{E}_{0,0}\underline{b}'_{11} \right) \quad (11.33)$$

für die unbekanntenen Fehlerterme, siehe (11.28). Die Messung eines Eintors an Messtor 2 ist wegen des fehlenden Testsignals sinnlos. Durch Messungen an hinreichend vielen bekannten Kalibrierstandards sind fünf linear unabhängige Gleichungen zu gewinnen. Beim TOSM-Verfahren werden der Zweitorstandard Durchverbindung und die Eintorstandards Leerlauf, Kurzschluss und Abschluss verwendet. Man erhält so exakt fünf linear unabhängige Gleichungen.

Aufgabe 11.3 Berechnen Sie mit (11.32) und (11.33) die fünf Fehlerterme $\det(\underline{\mathbf{E}}_A)$, $\underline{E}_{0,0}$, $\underline{E}_{1,1}$, $\underline{E}_{1,0}\underline{E}_{2,2}/\underline{E}_{3,2}$, und $\underline{E}_{1,0}/\underline{E}_{3,2}$ für den Fall, dass ideale Kalibrierstandards

$$\underline{\mathbf{S}}_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\underline{\Gamma}_O = 1$, $\underline{\Gamma}_S = -1$ und $\underline{\Gamma}_M = 0$ verwendet werden!

Kapitel 12.

Hochfrequenzverstärker

12.1. Aufbau von Hochfrequenzverstärkern

Hochfrequenzverstärker werden heute überwiegend mit Transistoren realisiert [Bae02; Gon97]. Es stehen eine Vielzahl von Transistortypen in verschiedenen Grundschaltungen zu Verfügung. Es gibt viele hier nicht diskutierte Möglichkeiten der Arbeitspunkteinstellung und Arbeitspunktstabilisierung.

Der in Abbildung 12.1 dargestellte Signalpfad eines Hochfrequenzverstärkers besteht aus dem Transistor und den eingangsseitigen und ausgangsseitigen Anpassnetzwerken. Im hier betrachteten Kleinsignalbetrieb können die Eigenschaften des dann näherungsweise linearen Transistors durch eine Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ beschrieben werden. Die Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ eines Transistors hängt unter anderem von dem Transistortyp, der gewählten Grundschaltung, dem Arbeitspunkt und der Kreisfrequenz ω ab.

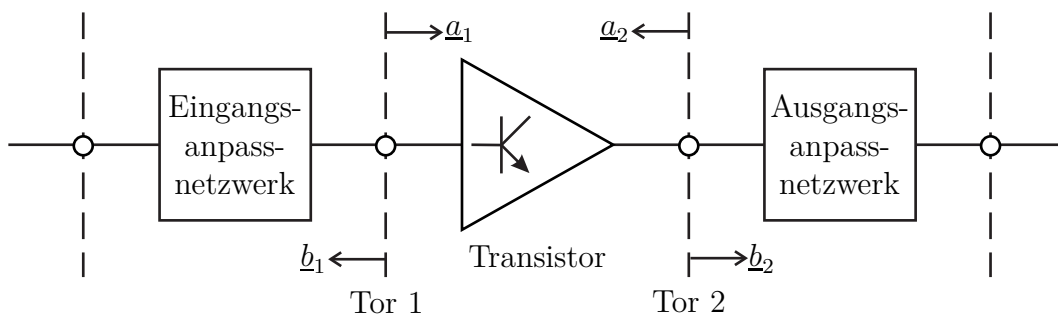


Abbildung 12.1.: Signalpfad eines Hochfrequenzverstärkers

Idealerweise wäre ein Hochfrequenzverstärker eigenreflexionsfrei $\underline{S}_{1,1} = \underline{S}_{2,2} = 0$, siehe (9.5), und rückwirkungsfrei $\underline{S}_{1,2} = 0$. Die Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ eines Transistors weicht üblicherweise von diesem Idealfall ab. Die Aufgabe der Anpassnetze ist es, die Reflexionsfaktoren derart zu transformieren, dass das Gesamtsystem ein günstigeres Verhalten aufweist. Neben der möglichst guten eingangsseitigen und ausgangsseitigen Anpassung, das heißt dem Minimieren der an den Toren

des Gesamtsystems sichtbaren Reflexionsfaktoren, ist die Stabilität ein wichtiger Aspekt. Im Gegensatz zur Anpassung, die nur bei der Kreisfrequenz ω des zu verstärkenden Signals von Interesse ist, muss die Stabilität bei allen Kreisfrequenzen ω gewährleistet sein. Die Anpassung hat einen Einfluss auf den Leistungsgewinn. Abhängig davon, wie Fehlanpassungen berücksichtigt werden, ergeben sich unterschiedliche Definitionen des Leistungsgewinns.

Aufgabe 12.1 *Einen Transistor kann man zunächst als Dreitor modellieren, siehe Abbildung 12.2. Durch Kurzschließen eines der Tore, zum Beispiel Tor 3, erhält man eine der drei möglichen Grundschaltungen. Ermitteln Sie die Admittanzmatrix des so erhaltenen Zweitors als Funktion der Admittanzmatrix $\underline{\mathbf{Y}}$ des Dreitors! Kann man aus der Admittanzmatrix des Zweitors wieder die Admittanzmatrix $\underline{\mathbf{Y}}$ des Dreitors berechnen, wenn man berücksichtigt, dass der als Dreitor betrachtete Transistor ein massefreies Netzwerk ist?*

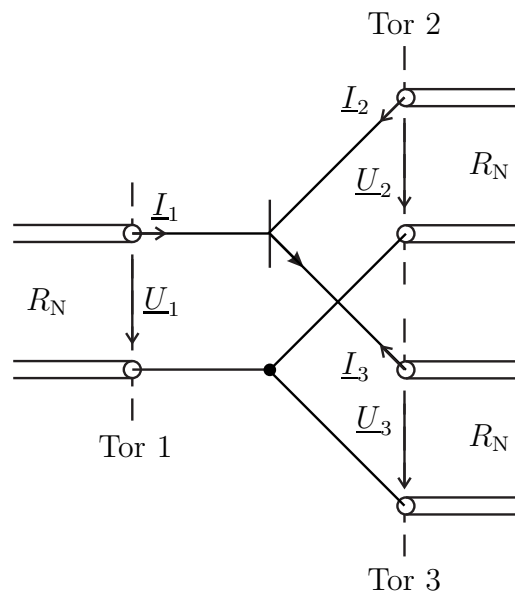


Abbildung 12.2.: Transistor als Dreitor

12.2. Leistungsabgabe von Eintorquellen

Als Vorbereitung für die Betrachtung von Zweitoren soll hier die Leistungsabgabe einer Quelle mit dem Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_Q$ an eine passive Last mit dem Lastreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_L$ analysiert werden. Wegen der Passivität gilt für den Betrag des Lastreflexionsfaktors $|\underline{\Gamma}_L| < 1$.

Aus dem Signalflussgraphen in Abbildung 12.3 liest man mit der Schleifenregel

$$\underline{b} = \frac{\underline{b}_Q}{1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L}$$

ab, siehe Abbildung 9.3d. Weiterhin gilt

$$\underline{a} = \underline{\Gamma}_L \underline{b}.$$

Die von der Quelle an die Last abgegebene Leistung berechnet sich mit (7.28) zu

$$P = \frac{1}{2} |\underline{b}_Q|^2 \frac{1 - |\underline{\Gamma}_L|^2}{|1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}. \quad (12.1)$$

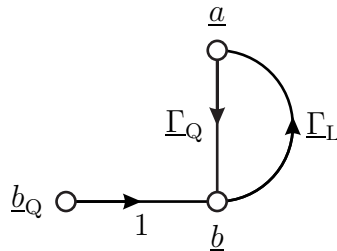


Abbildung 12.3.: Zusammenschalten von Quelle und Last

Für eine reflexionsfreie Last $\underline{\Gamma}_L = 0$ ist die von der Quelle abgegebene Leistung P gleich der Leistung der Urwelle

$$P_0 = \frac{1}{2} |\underline{b}_Q|^2. \quad (12.2)$$

Die abgegebene Leistung P wird unendlich, wenn der Nenner $|1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2$ Null wird. In diesem Fall ist das aus Quelle und Last bestehende System instabil. Man bezeichnet die Quelle als stabil, wenn das System für keine passive Last $|\underline{\Gamma}_L| < 1$ instabil wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn für den Quellenreflexionsfaktor

$$|\underline{\Gamma}_Q| < 1 \quad (12.3)$$

gilt. Die Stabilität einer Quelle sollte für alle Kreisfrequenzen ω gewährleistet sein und wird im Folgenden vorausgesetzt.

Im Folgenden sollen die Orte konstanter Leistungsabgabe P in der Ebene des Lastreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_L$ bestimmt werden. Aus (12.1) erhält man durch quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned}
 2(1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L)(1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L)^* P &= |\underline{b}_Q|^2 (1 - \underline{\Gamma}_L \underline{\Gamma}_L^*), \\
 \underline{\Gamma}_L \underline{\Gamma}_L^* (2P \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_Q^* + |\underline{b}_Q|^2) - \underline{\Gamma}_L 2P \underline{\Gamma}_Q - \underline{\Gamma}_L^* 2P \underline{\Gamma}_Q^* &= |\underline{b}_Q|^2 - 2P, \\
 \left| \underline{\Gamma}_L - \frac{2P \underline{\Gamma}_Q^*}{2P \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_Q^* + |\underline{b}_Q|^2} \right|^2 &= \frac{4P^2 \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_Q^*}{(2P \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_Q^* + |\underline{b}_Q|^2)^2} \\
 &\quad + \frac{|\underline{b}_Q|^2 - 2P}{2P \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_Q^* + |\underline{b}_Q|^2}, \\
 \left| \underline{\Gamma}_L - \frac{2P \underline{\Gamma}_Q^*}{\underbrace{2P |\underline{\Gamma}_Q|^2 + |\underline{b}_Q|^2}_M} \right|^2 &= \frac{|\underline{b}_Q|^2 (|\underline{b}_Q|^2 + 2P (|\underline{\Gamma}_Q|^2 - 1))}{\underbrace{(2P |\underline{\Gamma}_Q|^2 + |\underline{b}_Q|^2)^2}_{R^2}}.
 \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt

$$\underline{M} = \frac{2P \underline{\Gamma}_Q^*}{2P |\underline{\Gamma}_Q|^2 + |\underline{b}_Q|^2} \quad (12.4)$$

und Radius

$$R = \frac{|\underline{b}_Q| \sqrt{|\underline{b}_Q|^2 + 2P (|\underline{\Gamma}_Q|^2 - 1)}}{2P |\underline{\Gamma}_Q|^2 + |\underline{b}_Q|^2} \quad (12.5)$$

in der Ebene des Lastreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_L$, siehe Abbildung 12.4. Der Mittelpunkt \underline{M} liegt auf der Geraden durch $\underline{\Gamma}_Q^*$ und den Ursprung, da die Argumente aller Mittelpunkte gleich sind:

$$\arg(\underline{M}) = \arg(\underline{\Gamma}_Q^*).$$

Die abgegebene Leistung P wird für genau einen optimalen Lastreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_{L\text{opt}}$ maximal. Durch Nullsetzen des Radius R erhält man die dann abgegebene

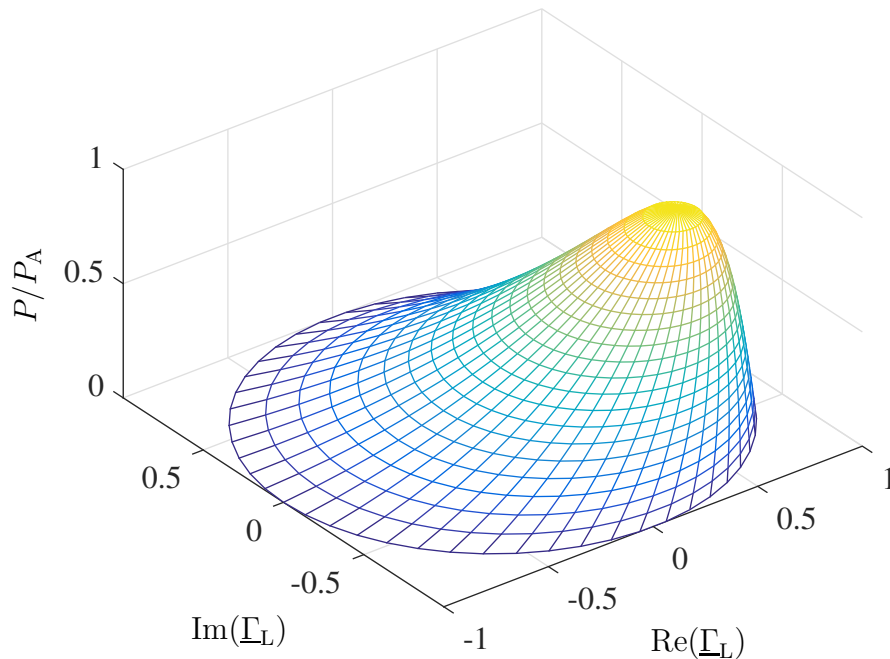


Abbildung 12.4.: Ausnutzungsfaktor als Funktion des Lastreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_L$. Der Quellenreflexionsfaktor ist $\underline{\Gamma}_Q = 0,5 + j0,5$. Die Höhenlinien sind Kreise konstanter Leistungsabgabe

verfügbare Leistung:

$$0 = |\underline{b}_Q|^2 + 2P_A \left(|\underline{\Gamma}_Q|^2 - 1 \right),$$

$$P_A = \frac{1}{2} |\underline{b}_Q|^2 \frac{1}{1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2}. \quad (12.6)$$

Der Mittelpunkt \underline{M} des zur verfügbaren Leistung P_A gehörenden Kreises entspricht dem optimalen Lastreflexionsfaktor

$$\underline{\Gamma}_{Lopt} = \frac{2P_A \underline{\Gamma}_Q^*}{2P_A |\underline{\Gamma}_Q|^2 + |\underline{b}_Q|^2} = \underline{\Gamma}_Q^*. \quad (12.7)$$

Dieses Ergebnis ist als Leistungsanpassung bekannt. Die bei einem beliebigen Lastreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_L$ abgegebene, als Ausnutzungsfaktor bezeichnete, normierte Leistung ergibt sich mit (12.1) zu

$$\frac{P}{P_A} = \frac{(1 - |\underline{\Gamma}_L|^2) (1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2)}{|1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}. \quad (12.8)$$

12.3. Stabilität von Zweitoren

12.3.1. Stabilitätskreise

In Anlehnung an (12.3) bezeichnet man ein Zweitor als an seinem Eingang stabil, wenn für den am Eingang sichtbaren Reflexionsfaktor

$$|\underline{\Gamma}_1| < 1 \quad (12.9)$$

gilt. Weiterhin bezeichnet man ein Zweitor als an seinem Ausgang stabil, wenn für den am Ausgang sichtbaren Reflexionsfaktor

$$|\underline{\Gamma}_2| < 1 \quad (12.10)$$

gilt. Man bezeichnet das Zweitor als stabil, wenn es sowohl am Eingang als auch am Ausgang stabil ist.

Die Analyse ist für beide Tore formal gleich. Hier wird zunächst die Transformation des Lastreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_L$ durch das Zweitor in den eingangsseitig sichtbaren Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_1$ betrachtet. Aus dem Signalflussgraphen in Abbildung 12.5 liest man unter Verwenden der Vereinfachungsregeln aus Abbildung 9.3

$$\underline{\Gamma}_1 = \underline{S}_{1,1} + \frac{\underline{S}_{2,1}\underline{S}_{1,2}\underline{\Gamma}_L}{1 - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_L} = \frac{\underline{S}_{1,1} - \det(\underline{\mathbf{S}})\underline{\Gamma}_L}{1 - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_L} \quad (12.11)$$

ab. Dual erhält man für die Transformation des Quellenreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_Q$ in den ausgangsseitig sichtbaren Reflexionsfaktor

$$\underline{\Gamma}_2 = \underline{S}_{2,2} + \frac{\underline{S}_{1,2}\underline{S}_{2,1}\underline{\Gamma}_Q}{1 - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q} = \frac{\underline{S}_{2,2} - \det(\underline{\mathbf{S}})\underline{\Gamma}_Q}{1 - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q}. \quad (12.12)$$

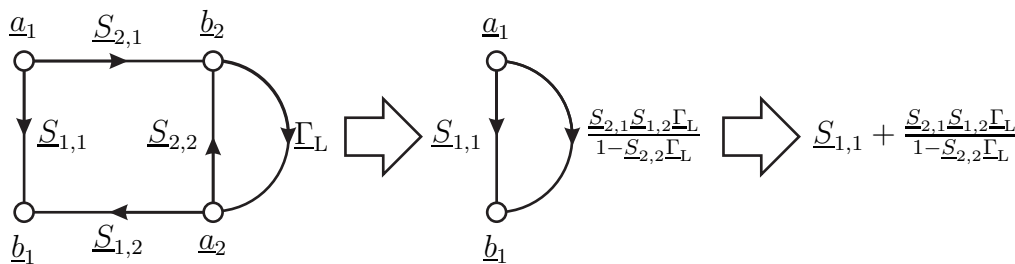


Abbildung 12.5.: Transformation des Lastreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_L$ durch das Zweitor

Es stellt sich nun die Frage, in welchen Bereichen der Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_Q$ und der Lastreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_L$ liegen dürfen, so dass das Zweitor stabil ist.

Es handelt sich wieder um zwei mathematisch gleichartige Probleme. Zunächst wird der Lastreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_L$ betrachtet. An den Orten der Stabilitätsgrenze $|\underline{\Gamma}_1| = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\underline{S}_{1,1} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_L}{1 - \underline{S}_{2,2} \underline{\Gamma}_L} \right| &= 1, \\ (\underline{S}_{1,1} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_L) (\underline{S}_{1,1} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_L)^* &= (1 - \underline{S}_{2,2} \underline{\Gamma}_L) (1 - \underline{S}_{2,2} \underline{\Gamma}_L)^*, \\ \underline{\Gamma}_L \underline{\Gamma}_L^* (\underline{S}_{2,2} \underline{S}_{2,2}^* - \det(\underline{\mathbf{S}}) \det(\underline{\mathbf{S}}^*)) & \\ + \underline{\Gamma}_L (\underline{S}_{1,1}^* \det(\underline{\mathbf{S}}) - \underline{S}_{2,2}) + \underline{\Gamma}_L^* (\underline{S}_{1,1} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{2,2}^*) &= \underline{S}_{1,1} \underline{S}_{1,1}^* - 1. \end{aligned}$$

Durch quadratische Ergänzung erhält man

$$\begin{aligned} \left| \underline{\Gamma}_L - \frac{\underline{S}_{2,2}^* - \underline{S}_{1,1} \det(\underline{\mathbf{S}}^*)}{\underbrace{\underline{S}_{2,2} \underline{S}_{2,2}^* - \det(\underline{\mathbf{S}}) \det(\underline{\mathbf{S}}^*)}_{\underline{M}_L}} \right|^2 &= \frac{\underline{S}_{1,1} \underline{S}_{1,1}^* - 1}{\underline{S}_{2,2} \underline{S}_{2,2}^* - \det(\underline{\mathbf{S}}) \det(\underline{\mathbf{S}}^*)} \\ &+ \frac{(\underline{S}_{2,2}^* - \underline{S}_{1,1} \det(\underline{\mathbf{S}}^*)) (\underline{S}_{2,2}^* - \underline{S}_{1,1} \det(\underline{\mathbf{S}}^*))^*}{(\underline{S}_{2,2} \underline{S}_{2,2}^* - \det(\underline{\mathbf{S}}) \det(\underline{\mathbf{S}}^*))^2} \\ &= \frac{\underline{S}_{2,1} \underline{S}_{2,1}^* \underline{S}_{1,2} \underline{S}_{1,2}^*}{\underbrace{(\underline{S}_{2,2} \underline{S}_{2,2}^* - \det(\underline{\mathbf{S}}) \det(\underline{\mathbf{S}}^*))^2}_{R_L^2}}. \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Orte der Stabilitätsgrenze $|\underline{\Gamma}_1| = 1$ auf einem Stabilitätskreis mit Mittelpunkt

$$\underline{M}_L = \frac{\underline{S}_{2,2}^* - \underline{S}_{1,1} \det(\underline{\mathbf{S}}^*)}{|\underline{S}_{2,2}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2} \quad (12.13)$$

und Radius

$$R_L = \left| \frac{\underline{S}_{2,1} \underline{S}_{1,2}}{|\underline{S}_{2,2}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2} \right| \quad (12.14)$$

in der Ebene des Lastreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_L$ liegen. Abbildung 12.6 zeigt einen exemplarischen Stabilitätskreis in der Ebene des Lastreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_L$. Ob das Innere oder das Äußere des Stabilitätskreises der stabile Bereich ist, überprüft man am einfachsten anhand eines markanten Punktes. Aus $\underline{\Gamma}_L = 0$ folgt für den eingangsseitig sichtbaren Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_1 = \underline{S}_{1,1}$. Das heißt für $|\underline{S}_{1,1}| < 1$ liegt

der Ursprung der Ebene des Lastreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_L$ im stabilen Bereich und für $|\underline{S}_{1,1}| > 1$ liegt der Ursprung der Ebene des Lastreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_L$ im instabilen Bereich. Da die Streuparameter im Allgemeinen frequenzabhängig sind, ist auch der Stabilitätskreis frequenzabhängig.

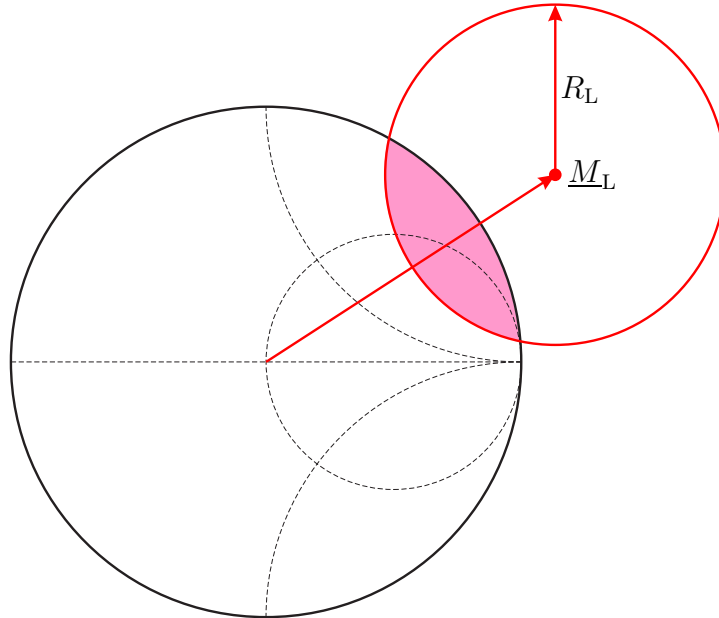


Abbildung 12.6.: Exemplarischer Stabilitätskreis mit eingefärbten instabilen Bereich in der Ebene des Lastreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_L$. $|\underline{S}_{1,1}| < 1$

Dual erhält man den Mittelpunkt

$$\underline{M}_Q = \frac{\underline{S}_{1,1}^* - \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*)}{|\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2} \quad (12.15)$$

und den Radius

$$R_Q = \left| \frac{\underline{S}_{1,2} \underline{S}_{2,1}}{|\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2} \right| \quad (12.16)$$

des Stabilitätskreises in der Ebene des Quellenreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_Q$. Für $|\underline{S}_{2,2}| < 1$ liegt der Ursprung der Ebene des Quellenreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_Q$ im stabilen Bereich und für $|\underline{S}_{2,2}| > 1$ liegt der Ursprung der Ebene des Quellenreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_Q$ im instabilen Bereich.

Sowohl der Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_Q$ als auch der Lastreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_L$ sollen im jeweils stabilen Bereich liegen. Da der Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_Q$ und der

Lastreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_L$ auf jeden Fall innerhalb des Einheitskreises liegen, interessieren primär die Schnittmengen der instabilen Bereiche mit dem Inneren des Einheitskreises, siehe Abbildung 12.6.

12.3.2. Unbedingte Stabilität

Wünschenswert ist es, dass ein Zweitor für alle passiven Abschlüsse stabil ist. Diese Eigenschaft bezeichnet man als unbedingte Stabilität. Im Folgenden sollen einfach überprüfbare Kriterien für die unbedingte Stabilität hergeleitet werden.

Zunächst wird wieder der eingangsseitig sichtbare Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_1$ als Funktion des Lastreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_L$ betrachtet. Auflösen von (12.11) nach dem Lastreflexionsfaktor ergibt

$$\underline{\Gamma}_L = \frac{\underline{S}_{1,1} - \underline{\Gamma}_1}{\det(\underline{\mathbf{S}}) - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_1}.$$

Der Einheitskreis $|\underline{\Gamma}_L| = 1$ ist der Rand des Bereichs passiver Lasten. Dort gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\underline{S}_{1,1} - \underline{\Gamma}_1}{\det(\underline{\mathbf{S}}) - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_1} \right| &= 1, \\ (\underline{S}_{1,1} - \underline{\Gamma}_1) (\underline{S}_{1,1} - \underline{\Gamma}_1)^* &= (\det(\underline{\mathbf{S}}) - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_1) (\det(\underline{\mathbf{S}}) - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_1)^*, \\ \underline{\Gamma}_1 \underline{\Gamma}_1^* (1 - \underline{S}_{2,2}\underline{S}_{2,2}^*) + \underline{\Gamma}_1 (\underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{1,1}^*) & \\ + \underline{\Gamma}_1^* (\underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}}) - \underline{S}_{1,1}) &= \det(\underline{\mathbf{S}}) \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{1,1}\underline{S}_{1,1}^*. \end{aligned}$$

Durch quadratische Ergänzung erhält man

$$\begin{aligned} \left| \underline{\Gamma}_1 - \underbrace{\frac{\underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}})}{1 - \underline{S}_{2,2}\underline{S}_{2,2}^*}}_{\underline{M}_1} \right|^2 &= \frac{\det(\underline{\mathbf{S}}) \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{1,1}\underline{S}_{1,1}^*}{1 - \underline{S}_{2,2}\underline{S}_{2,2}^*} \\ &+ \frac{(\underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}})) (\underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}}))^*}{(1 - \underline{S}_{2,2}\underline{S}_{2,2}^*)^2} \\ &= \underbrace{\frac{\underline{S}_{2,1}\underline{S}_{2,1}^*\underline{S}_{1,2}\underline{S}_{1,2}^*}{(1 - \underline{S}_{2,2}\underline{S}_{2,2}^*)^2}}_{R_1^2}. \end{aligned}$$

Es handelt sich offensichtlich um einen Kreis mit Mittelpunkt

$$\underline{M}_1 = \frac{\underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}})}{1 - |\underline{S}_{2,2}|^2} \quad (12.17)$$

und Radius

$$R_1 = \left| \frac{\underline{S}_{2,1}\underline{S}_{1,2}}{1 - |\underline{S}_{2,2}|^2} \right| \quad (12.18)$$

in der $\underline{\Gamma}_1$ -Ebene. Ob das Innere oder das Äußere des Kreises das Bild des Bereichs der passiven Lasten $|\underline{\Gamma}_L| < 1$ ist, überprüft man wieder am einfachsten anhand eines markanten Punktes. Aus $\underline{\Gamma}_L = 0$ folgt für den eingangsseitig sichtbaren Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_1 = \underline{S}_{1,1}$. Es stellt sich nun die Frage, ob $\underline{S}_{1,1}$ innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt. Für den Abstand zum Mittelpunkt gilt

$$|\underline{S}_{1,1} - \underline{M}_1| = \left| \frac{-\underline{S}_{1,1} |\underline{S}_{2,2}|^2 + \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}})}{1 - |\underline{S}_{2,2}|^2} \right| = \left| \frac{\underline{S}_{2,2}^* \underline{S}_{2,1} \underline{S}_{1,2}}{1 - |\underline{S}_{2,2}|^2} \right| = |\underline{S}_{2,2}| R_1.$$

Offensichtlich ist genau dann das Innere des Kreises das Bild des Bereichs der passiven Lasten $|\underline{\Gamma}_L| < 1$, wenn $|\underline{S}_{2,2}| < 1$ gilt.

Damit nicht zwingend Teile des Bildes des Bereichs passiver Lasten $|\underline{\Gamma}_L| < 1$ außerhalb des Einheitskreises in der $\underline{\Gamma}_1$ -Ebene liegen, muss das Innere des Kreises in der $\underline{\Gamma}_1$ -Ebene das Bild des Bereichs der passiven Lasten $|\underline{\Gamma}_L| < 1$ sein und der Kreis muss vollständig im Inneren des Einheitskreises liegen, das heißt es müssen $|\underline{S}_{2,2}| < 1$ und

$$|\underline{M}_1| + R_1 < 1$$

gelten. Einsetzen von Mittelpunkt \underline{M}_1 und Radius R_1 ergibt

$$\frac{|\underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}})| + |\underline{S}_{2,1}\underline{S}_{1,2}|}{|1 - |\underline{S}_{2,2}|^2|} < 1.$$

Man erhält die unter dem Namen μ -Test bekannte Bedingung

$$\mu_1 = \frac{1 - |\underline{S}_{2,2}|^2}{|\underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}})| + |\underline{S}_{2,1}||\underline{S}_{1,2}|} > 1 \quad (12.19)$$

für unbedingte Stabilität [ES92]. Ausgehend von der Betrachtung des ausgangsseitig sichtbaren Reflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_2$ als Funktion des Quellenreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_Q$ erhält man dual die Bedingung

$$\mu_2 = \frac{1 - |\underline{S}_{1,1}|^2}{|\underline{S}_{2,2} - \underline{S}_{1,1}^* \det(\underline{\mathbf{S}})| + |\underline{S}_{1,2}||\underline{S}_{2,1}|} > 1 \quad (12.20)$$

für unbedingte Stabilität.

Ein alternatives Stabilitätskriterium erhält man durch Umformen des Stabilitätsfaktors μ_1 . Ausgehend von (12.19) erhält man zunächst

$$|\underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}})| < 1 - |\underline{S}_{2,2}|^2 - |\underline{S}_{2,1}| |\underline{S}_{1,2}|.$$

Diese Ungleichung kann nur dann erfüllt sein, wenn die rechte Seite größer Null ist. Man erhält die Nebenbedingung

$$|\underline{S}_{2,1}| |\underline{S}_{1,2}| < 1 - |\underline{S}_{2,2}|^2. \quad (12.21)$$

Durch Quadrieren der Ungleichung erhält man weiterhin:

$$\begin{aligned} |\underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}})|^2 &< \left(1 - |\underline{S}_{2,2}|^2 - |\underline{S}_{2,1}| |\underline{S}_{1,2}|\right)^2, \\ |\underline{S}_{1,1}|^2 - \underline{S}_{1,1} \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) \\ - \underline{S}_{1,1}^* \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}) + |\underline{S}_{2,2}|^2 |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 &< \left(1 - |\underline{S}_{2,2}|^2 - |\underline{S}_{2,1}| |\underline{S}_{1,2}|\right)^2, \\ |\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 + |\underline{S}_{2,1}|^2 |\underline{S}_{1,2}|^2 \\ - |\underline{S}_{2,2}|^2 |\underline{S}_{1,1}|^2 + |\underline{S}_{2,2}|^2 |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 &< \left(1 - |\underline{S}_{2,2}|^2\right) \left(1 - |\underline{S}_{2,2}|^2 - 2 |\underline{S}_{2,1}| |\underline{S}_{1,2}|\right) \\ &\quad + |\underline{S}_{2,1}|^2 |\underline{S}_{1,2}|^2, \\ \left(1 - |\underline{S}_{2,2}|^2\right) \left(|\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2\right) &< \left(1 - |\underline{S}_{2,2}|^2\right) \left(1 - |\underline{S}_{2,2}|^2 - 2 |\underline{S}_{2,1}| |\underline{S}_{1,2}|\right), \\ |\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 &< 1 - |\underline{S}_{2,2}|^2 - 2 |\underline{S}_{2,1}| |\underline{S}_{1,2}|. \end{aligned}$$

Eine Bedingung für unbedingte Stabilität ist somit, dass die Nebenbedingung (12.21) erfüllt ist und der nach Rollett benannte Stabilitätsfaktor größer als eins ist [Rol62]:

$$K = \frac{1 - |\underline{S}_{2,2}|^2 - |\underline{S}_{1,1}|^2 + |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2}{2 |\underline{S}_{2,1}| |\underline{S}_{1,2}|} > 1. \quad (12.22)$$

Ausgehend vom Stabilitätsfaktor μ_2 hätte man auf dualem Weg die Nebendingung

$$|\underline{S}_{1,2}| |\underline{S}_{2,1}| < 1 - |\underline{S}_{1,1}|^2 \quad (12.23)$$

und den gleichen Ausdruck für den Stabilitätsfaktor K gefunden. Aus diesen Nebenbedingungen folgt für den Betrag der Determinante der Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ eines

unbedingt stabilen Zweitoren unter Verwenden der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |\det(\underline{\mathbf{S}})| &= |\underline{S}_{1,1}\underline{S}_{2,2} - \underline{S}_{1,2}\underline{S}_{2,1}| \leq |\underline{S}_{1,1}\underline{S}_{2,2}| + |\underline{S}_{1,2}\underline{S}_{2,1}| \\ &< \sqrt{1 - |\underline{S}_{1,2}| |\underline{S}_{2,1}|} \sqrt{1 - |\underline{S}_{1,2}| |\underline{S}_{2,1}|} + |\underline{S}_{1,2}\underline{S}_{2,1}| = 1. \end{aligned} \quad (12.24)$$

Ein verlustfreies Eingangsanpassnetzwerk oder Ausgangsanpassnetzwerk bildet das Innere des Einheitskreises in der Reflexionsfaktorebene auf das vollständige Innere des Einheitskreises ab. Verlustfreie Anpassnetzwerke beeinflussen die Eigenschaft der unbedingten Stabilität daher nicht.

12.4. Gewinn von Zweitoren

12.4.1. Klemmenleistungsgewinn

Der Klemmenleistungsgewinn (Power Gain)

$$G = \frac{P_L}{P_Q} \quad (12.25)$$

ist als das Verhältnis aus der an die Last abgegebenen Leistung P_L und der von der Quelle an das Zweitor abgegebenen Leistung P_Q definiert. Der Klemmenleistungsgewinn G hängt vom Lastreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_L$, nicht aber vom Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_Q$ ab.

Aus dem Signalflussgraphen in Abbildung 12.7 folgt analog zu (12.1) für die von der Quelle an das Zweitor abgegebene Leistung

$$\begin{aligned} P_Q &= \frac{1}{2} |\underline{b}_Q|^2 \frac{1 - |\underline{\Gamma}_1|^2}{|1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_1|^2} \\ &= \frac{1}{2} |\underline{b}_Q|^2 \frac{|1 - \underline{S}_{2,2} \underline{\Gamma}_L|^2 - |\underline{S}_{1,1} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_L|^2}{|1 - \underline{S}_{2,2} \underline{\Gamma}_L - \underline{S}_{1,1} \underline{\Gamma}_Q + \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}, \end{aligned} \quad (12.26)$$

wobei in der letzten Zeile (12.11) eingesetzt wurde.

Aus dem Signalflussgraphen in Abbildung 12.8 liest man mit der Schleifenregel

$$\underline{b}_2 = \underline{b}_Q \frac{1}{1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_1} \underline{S}_{2,1} \frac{1}{1 - \underline{S}_{2,2} \underline{\Gamma}_L}$$

ab, siehe Abbildung 9.3d. Weiterhin gilt

$$\underline{a}_2 = \underline{\Gamma}_L \underline{b}_2.$$

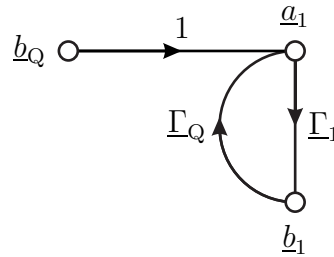


Abbildung 12.7.: Betrachtung des Zweitoreingangs

Die an die Last abgegebene Leistung berechnet sich mit (7.28) und (12.11) zu

$$\begin{aligned}
 P_L &= \frac{1}{2} |\underline{b}_Q|^2 \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_L|^2)}{|1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_1|^2 |1 - \underline{S}_{2,2} \underline{\Gamma}_L|^2} \\
 &= \frac{1}{2} |\underline{b}_Q|^2 \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_L|^2)}{|1 - \underline{S}_{2,2} \underline{\Gamma}_L - \underline{S}_{1,1} \underline{\Gamma}_Q + \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}.
 \end{aligned}
 \tag{12.27}$$

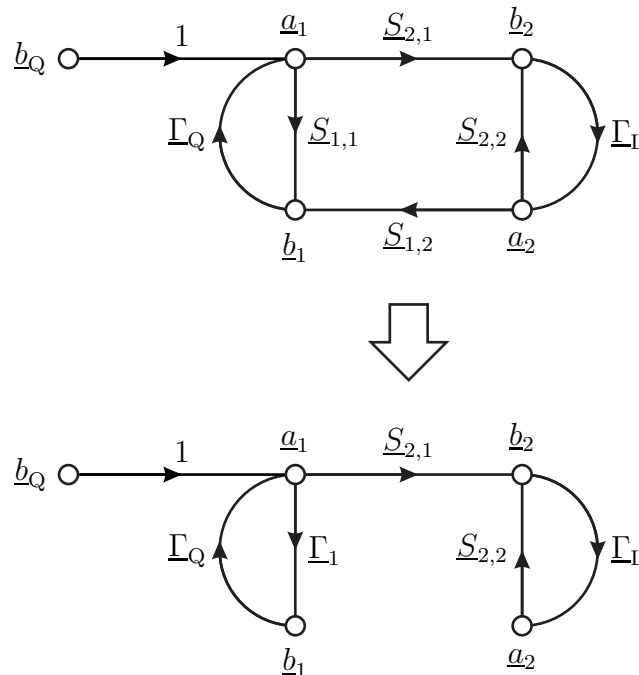


Abbildung 12.8.: Betrachtung des Zweitorausgangs

Durch Einsetzen von (12.26) und (12.27) in (12.25) erhält man den Klemmenleistungsgewinn

$$G = \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_L|^2)}{|1 - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_L|^2 - |\underline{S}_{1,1} - \det(\underline{\mathbf{S}})\underline{\Gamma}_L|^2}. \quad (12.28)$$

12.4.2. Einfügungsgewinn

Der Einfügungsgewinn (Insertion Power Gain)

$$G_I = \frac{P_L}{P} \quad (12.29)$$

ist als das Verhältnis aus der an die Last abgegebenen Leistung P_L und der von der Quelle bei direkter Verbindung an die Last abgegebenen Leistung P definiert. Der Einfügungsgewinn G_I hängt vom Lastreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_L$ und vom Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_Q$ ab.

Durch Einsetzen von (12.27) und (12.1) in (12.29) erhält man den Einfügungsgewinn

$$G_I = \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2 |1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}{|1 - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_L - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q + \det(\underline{\mathbf{S}})\underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}. \quad (12.30)$$

12.4.3. Übertragungsgewinn

Der Übertragungsgewinn (Transducer Power Gain)

$$G_T = \frac{P_L}{P_{QA}}. \quad (12.31)$$

ist als das Verhältnis aus der an die Last abgegebenen Leistung P_L und der von der Quelle verfügbaren Leistung P_{QA} definiert. Der Übertragungsgewinn G_T hängt vom Lastreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_L$ und vom Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_Q$ ab.

Durch Einsetzen von (12.27) und (12.6) in (12.31) erhält man den Übertragungsgewinn

$$G_T = \frac{(1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2) |\underline{S}_{2,1}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_L|^2)}{|1 - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_L - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q + \det(\underline{\mathbf{S}})\underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}. \quad (12.32)$$

12.4.4. Verfügbarer Leistungsgewinn

Der verfügbare Leistungsgewinn (Available Power Gain)

$$G_A = \frac{P_{LA}}{P_{QA}} \quad (12.33)$$

ist als das Verhältnis aus der vom Zweitoren verfügbaren Leistung P_{LA} und der von der Quelle verfügbaren Leistung P_{QA} definiert. Der verfügbare Leistungsgewinn G_A hängt vom Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_Q$, nicht aber vom Lastreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_L$ ab.

Bei Leistungsanpassung $\underline{\Gamma}_L = \underline{\Gamma}_2^*$, vergleiche (12.7), folgt aus (12.27)

$$\begin{aligned} P_{LA} &= \frac{1}{2} |b_Q|^2 \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_2|^2)}{|1 - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_2^* - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q + \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_2^*|^2} \\ &= \frac{1}{2} |b_Q|^2 \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_2|^2)}{|(1 - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q) - (\underline{S}_{2,2} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_Q) \underline{\Gamma}_2^*|^2}. \end{aligned}$$

Einsetzen von (12.12) ergibt

$$\begin{aligned} P_{LA} &= \frac{1}{2} |b_Q|^2 \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2 \left(|1 - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q|^2 - |\underline{S}_{2,2} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_Q|^2 \right)}{\left| |1 - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q|^2 - |\underline{S}_{2,2} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_Q|^2 \right|^2} \\ &= \frac{1}{2} |b_Q|^2 \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2}{|1 - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q|^2 - |\underline{S}_{2,2} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_Q|^2}. \end{aligned} \quad (12.34)$$

Durch Einsetzen von (12.6) und (12.34) in (12.33) erhält man den verfügbaren Leistungsgewinn

$$G_A = \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2)}{|1 - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q|^2 - |\underline{S}_{2,2} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_Q|^2}. \quad (12.35)$$

Der verfügbare Leistungsgewinn einer Kaskade aus zwei Zweitoren, siehe Abbildung 12.9, ergibt sich zu

$$G_A = \frac{P_{A3}}{P_{A1}} = \frac{P_{A2}}{P_{A1}} \frac{P_{A3}}{P_{A2}} = G_{A1} G_{A2}. \quad (12.36)$$

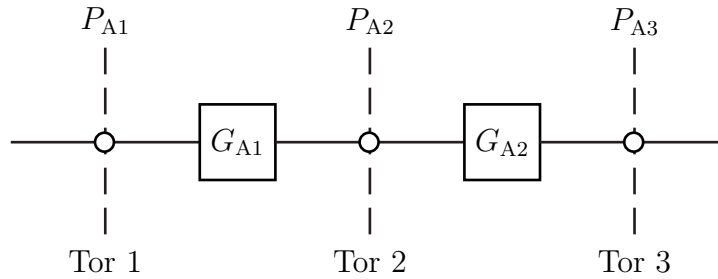


Abbildung 12.9.: Leistungsgewinn einer Kaskade von Zweitoren

12.4.5. Vergleich der Gewinndefinitionen

Durch sinngemäßes Anwenden von (12.8) erhält man den Ausnutzungsfaktor an Tor 1

$$\frac{G_T}{G} = \frac{P_L}{P_{QA}} \frac{P_Q}{P_L} = \frac{P_Q}{P_{QA}} = \frac{(1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2)(1 - |\underline{\Gamma}_1|^2)}{|1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_1|^2}. \quad (12.37)$$

Auf gleichem Wege erhält man Ausnutzungsfaktor an Tor 2

$$\frac{G_T}{G_A} = \frac{P_L}{P_{QA}} \frac{P_{QA}}{P_{LA}} = \frac{P_L}{P_{LA}} = \frac{(1 - |\underline{\Gamma}_L|^2)(1 - |\underline{\Gamma}_2|^2)}{|1 - \underline{\Gamma}_L \underline{\Gamma}_2|^2}. \quad (12.38)$$

Für den Fall, dass sowohl die Quelle an den Eingang angepasst ist $\underline{\Gamma}_Q = \underline{\Gamma}_1^*$ als auch die Last an den Ausgang angepasst ist $\underline{\Gamma}_L = \underline{\Gamma}_2^*$, vergleiche (12.7), sind die drei hier definierten Gewinne Klemmenleistungsgewinn G , Übertragungsgewinn G_T und verfügbarer Leistungsgewinn G_A gleich. Wenn zusätzlich auch noch der Quellenreflexionsfaktor konjugiert komplex zum Lastreflexionsfaktor ist $\underline{\Gamma}_Q = \underline{\Gamma}_1^* = \underline{\Gamma}_L^* = \underline{\Gamma}_2$, sind alle vier hier definierten Gewinne Klemmenleistungsgewinn G , Einfügungsgewinn G_I , Übertragungsgewinn G_T und verfügbarer Leistungsgewinn G_A gleich.

12.4.6. Maximaler verfügbarer Leistungsgewinn

Der verfügbare Leistungsgewinn G_A hängt vom Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_Q$ ab. Nun soll der bei einem optimalen Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_Q$ erzielbare maximale verfügbare Leistungsgewinn (Maximum Available Power Gain, MAG) G_{MAG}

ermittelt werden. Aus (12.35) folgt

$$\begin{aligned}
 G_A & \left(1 - \underline{S}_{1,1} \Gamma_Q - \underline{S}_{1,1}^* \Gamma_Q^* + |\underline{S}_{1,1}|^2 |\Gamma_Q|^2 \right. \\
 & \quad \left. - |\underline{S}_{2,2}|^2 + \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) \Gamma_Q^* + \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}}) \Gamma_Q - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 |\Gamma_Q|^2 \right) \\
 & = |\underline{S}_{2,1}|^2 \left(1 - |\Gamma_Q|^2 \right).
 \end{aligned}$$

Für die Orte konstanten verfügbaren Leistungsgewinns G_A in der Ebene des Quellenreflexionsfaktors Γ_Q gilt

$$\begin{aligned}
 |\Gamma_Q|^2 & \left(|\underline{S}_{2,1}|^2 + G_A \left(|\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 \right) \right) \\
 & \quad + \Gamma_Q G_A \left(\underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}}) - \underline{S}_{1,1} \right) + \Gamma_Q^* G_A \left(\underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{1,1}^* \right) \\
 & = |\underline{S}_{2,1}|^2 + G_A \left(|\underline{S}_{2,2}|^2 - 1 \right).
 \end{aligned}$$

Mittels quadratischer Ergänzung erhält man

$$\begin{aligned}
 \left| \Gamma_Q + \frac{G_A \left(\underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{1,1}^* \right)}{|\underline{S}_{2,1}|^2 + G_A \left(|\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 \right)} \right|^2 & = \frac{G_A^2 \left| \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{1,1}^* \right|^2}{\left(|\underline{S}_{2,1}|^2 + G_A \left(|\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 \right) \right)^2} \\
 & \quad + \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2 + G_A \left(|\underline{S}_{2,2}|^2 - 1 \right)}{|\underline{S}_{2,1}|^2 + G_A \left(|\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 \right)}.
 \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises in der Ebene des Quellenreflexionsfaktors Γ_Q .

Beim maximalen verfügbaren Leistungsgewinn G_{MAG} wird der Radius des Kreises Null:

$$\begin{aligned}
 0 & = G_{\text{MAG}}^2 \left| \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{1,1}^* \right|^2 \\
 & \quad + \left(|\underline{S}_{2,1}|^2 + G_{\text{MAG}} \left(|\underline{S}_{2,2}|^2 - 1 \right) \right) \left(|\underline{S}_{2,1}|^2 + G_{\text{MAG}} \left(|\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 \right) \right) \\
 & = G_{\text{MAG}}^2 \left(\left| \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{1,1}^* \right|^2 + \left(|\underline{S}_{2,2}|^2 - 1 \right) \left(|\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 \right) \right) \\
 & \quad + G_{\text{MAG}} \left| \underline{S}_{2,1} \right|^2 \left(|\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 + |\underline{S}_{2,2}|^2 - 1 \right) + |\underline{S}_{2,1}|^4.
 \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
 & \left| \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{1,1}^* \right|^2 + \left(\left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 - 1 \right) \left(\left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 - \left| \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2 \right) \\
 &= \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 \left| \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2 - \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) \underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{S}_{1,1}^* + \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 \\
 & \quad + \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 - \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 \left| \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2 - \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 + \left| \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2 \\
 &= - \underbrace{\left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 + \underline{S}_{1,1} \underline{S}_{2,2} \underline{S}_{1,2}^* \underline{S}_{2,1}^*}_{-\underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) \underline{S}_{1,1}} \\
 & \quad - \underbrace{\left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 + \underline{S}_{1,1}^* \underline{S}_{2,2}^* \underline{S}_{1,2} \underline{S}_{2,1}}_{-\underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{S}_{1,1}^*} + \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 \\
 & \quad + \underbrace{\left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 - \underline{S}_{1,1} \underline{S}_{2,2} \underline{S}_{1,2}^* \underline{S}_{2,1}^* - \underline{S}_{1,1}^* \underline{S}_{2,2}^* \underline{S}_{1,2} \underline{S}_{2,1} + \left| \underline{S}_{1,2} \right|^2 \left| \underline{S}_{2,1} \right|^2}_{\left| \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2} \\
 &= \left| \underline{S}_{1,2} \right|^2 \left| \underline{S}_{2,1} \right|^2
 \end{aligned}$$

und

$$\left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 - \left| \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2 + \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 - 1 = -2 \left| \underline{S}_{1,2} \right| \left| \underline{S}_{2,1} \right| K,$$

wobei der K der Stabilitätsfaktor gemäß (12.22) ist, vereinfacht sich die quadratische Gleichung für den maximalen verfügbaren Leistungsgewinn G_{MAG} zu

$$\left| \underline{S}_{1,2} \right|^2 \left| \underline{S}_{2,1} \right|^2 G_{\text{MAG}}^2 - 2 \underline{S}_{1,2} \underline{S}_{2,1}^3 K G_{\text{MAG}} + \left| \underline{S}_{2,1} \right|^4 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$G_{\text{MAG}} = \frac{\left| \underline{S}_{2,1} \right|}{\left| \underline{S}_{1,2} \right|} \left(K \pm \sqrt{K^2 - 1} \right). \quad (12.39)$$

Für die hier betrachteten unbedingt stabilen Zweitore ist der Term unter Wurzel gemäß (12.22) immer positiv. Bezüglich des Vorzeichens vor der Wurzel betrachtet man den Grenzfall des rückwirkungsfreien Zweitores $\underline{S}_{1,2} \rightarrow 0$. Aus (12.22) folgt im Grenzfall eines rückwirkungsfreien Zweitores $\underline{S}_{1,2} \rightarrow 0$ für den Stabilitätsfaktor

$$K \rightarrow \frac{\left(\left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 - 1 \right) \left(\left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 - 1 \right)}{2 \underline{S}_{2,1} \underline{S}_{1,2}}, \quad (12.40)$$

das heißt der Stabilitätsfaktor K wird unendlich groß. Ein physikalisch sinnvoller endlich großer maximaler verfügbarer Leistungsgewinn G_{MAG} kann sich nur dann ergeben, wenn in (12.39) das negative Vorzeichen gilt.

Aufgabe 12.2 Es wird ein Leitungsstück der Länge l mit der Phasenkonstante β betrachtet. Der Wellenwiderstand sei gleich dem Bezugswiderstand $Z_L = R_N$, so dass sich die Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ gemäß (10.18) ergibt. Berechnen Sie den Klemmenleistungsgewinn G , den Einfügungsgewinn G_I , den Übertragungsgewinn G_T , den verfügbaren Leistungsgewinn G_A und den maximalen verfügbaren Leistungsgewinn G_{MAG} des Leitungsstücks jeweils als Funktion der Länge l , der Phasenkonstante β , des Quellenreflexionsfaktors Γ_Q und des Lastreflexionsfaktors Γ_L !

12.4.7. Maximaler stabiler Leistungsgewinn

Ein nicht unbedingt stabiles Zweitor kann man zum Beispiel durch Serienschalten oder Parallelschalten von Wirkwiderständen an Eingang oder Ausgang unbedingt stabil machen. Wie aus (9.25) ersichtlich ist, ändert sich das Verhältnis $\underline{S}_{2,1}/\underline{S}_{1,2}$ durch Anfügen eines derartigen reziproken Zweitores nicht. Man kann die Wirkwiderstände nun so groß wählen, dass der Stabilitätsfaktor gerade eins wird. In diesem Grenzfall erhält man durch Einsetzen von $K = 1$ in (12.39) den maximalen stabilen Leistungsgewinn (Maximum Stable Power Gain, MSG)

$$G_{\text{MSG}} = \frac{|\underline{S}_{2,1}|}{|\underline{S}_{1,2}|}. \quad (12.41)$$

Der maximale stabile Leistungsgewinn G_{MSG} ist für nicht unbedingt stabile Zweitore definiert.

12.4.8. Unilateraler Übertragungsgewinn

Bei Hochfrequenzverstärkern ist die Rückwirkung $\underline{S}_{1,2}$ häufig relativ klein. Wenn man die Rückwirkung $\underline{S}_{1,2}$ vernachlässigt, vereinfachen sich die Gewinnberechnungen beträchtlich. Aus (12.32) erhält man mit $\underline{S}_{1,2} = 0$ den unilateralen Übertragungsgewinn

$$\begin{aligned} G_{\text{TU}} &= \frac{(1 - |\Gamma_Q|^2) |\underline{S}_{2,1}|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|1 - \underline{S}_{1,1}\Gamma_Q - \underline{S}_{2,2}\Gamma_L + \underline{S}_{1,1}\underline{S}_{2,2}\Gamma_Q\Gamma_L|^2} \\ &= \underbrace{\frac{1 - |\Gamma_Q|^2}{|1 - \underline{S}_{1,1}\Gamma_Q|^2}}_{G_Q} \underbrace{|\underline{S}_{2,1}|^2}_{G_0} \underbrace{\frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - \underline{S}_{2,2}\Gamma_L|^2}}_{G_L}, \end{aligned} \quad (12.42)$$

der sich offensichtlich als ein Produkt aus

- Gewinn

$$G_Q = \frac{1 - |\Gamma_Q|^2}{|1 - \underline{S}_{1,1}\Gamma_Q|^2} \quad (12.43)$$

der Eingangsanpassung,

- unilateralen Zweitorgewinn

$$G_0 = |\underline{S}_{2,1}|^2 \quad (12.44)$$

und

- Gewinn

$$G_L = \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - \underline{S}_{2,2}\Gamma_L|^2} \quad (12.45)$$

der Ausgangsanpassung

darstellen lässt.

Zunächst werde der Gewinn G_Q der Eingangsanpassung genauer untersucht. Für die Orte konstanten Gewinns G_Q der Eingangsanpassung gilt:

$$\begin{aligned} G_Q |1 - \underline{S}_{1,1}\Gamma_Q|^2 &= 1 - |\Gamma_Q|^2, \\ \Gamma_Q \Gamma_Q^* (G_Q \underline{S}_{1,1} \underline{S}_{1,1}^* + 1) \\ - \Gamma_Q G_Q \underline{S}_{1,1} - \Gamma_Q^* G_Q \underline{S}_{1,1}^* &= 1 - G_Q, \\ \left| \Gamma_Q - \frac{G_Q \underline{S}_{1,1}^*}{1 + G_Q |\underline{S}_{1,1}|^2} \right|^2 &= \frac{1 - G_Q}{1 + G_Q |\underline{S}_{1,1}|^2} + \frac{G_Q^2 |\underline{S}_{1,1}|^2}{(1 + G_Q |\underline{S}_{1,1}|^2)^2} \\ &= \frac{1 - G_Q + G_Q |\underline{S}_{1,1}|^2}{(1 + G_Q |\underline{S}_{1,1}|^2)^2}. \end{aligned}$$

R_Q^2

Die Orte konstanten Gewinns G_Q der Eingangsanpassung bilden einen Kreis mit Mittelpunkt

$$\underline{M}_Q = \frac{G_Q \underline{S}_{1,1}^*}{1 + G_Q |\underline{S}_{1,1}|^2} \quad (12.46)$$

und Radius

$$R_Q = \frac{\sqrt{1 - G_Q + G_Q |\underline{S}_{1,1}|^2}}{1 + G_Q |\underline{S}_{1,1}|^2} \quad (12.47)$$

in der Ebene des Quellenreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_Q$.

Beim maximalen Gewinn $G_{Q\max}$ der Eingangsanpassung wird der Radius R Null. Es folgt:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - G_{Q\max} + G_{Q\max} |\underline{S}_{1,1}|^2} &= 0, \\ G_{Q\max} &= \frac{1}{1 - |\underline{S}_{1,1}|^2}. \end{aligned} \quad (12.48)$$

Dieser maximale Gewinn $G_{Q\max}$ der Eingangsanpassung wird für den dem zugehörigen Mittelpunkt \underline{M}_Q entsprechenden optimalen Quellenreflexionsfaktor

$$\underline{\Gamma}_{Q\max} = \frac{G_{Q\max} \underline{S}_{1,1}^*}{1 + G_{Q\max} |\underline{S}_{1,1}|^2} = \underline{S}_{1,1}^*, \quad (12.49)$$

das heißt bei Leistungsanpassung erreicht, vergleiche (12.7).

Abbildung 12.10 zeigt einen exemplarischen Kreis konstanten Gewinns der Eingangsanpassung G_Q . Der Mittelpunkt \underline{M}_Q liegt auf der Geraden durch $\underline{\Gamma}_{Q\max}$ und den Ursprung, da die Argumente aller Mittelpunkte gleich sind:

$$\arg(\underline{M}_Q) = \arg(\underline{\Gamma}_{Q\max}) = \arg(\underline{S}_{1,1}^*).$$

Dual erhält man den Kreis konstanten Gewinns G_L der Ausgangsanpassung mit Mittelpunkt

$$\underline{M}_L = \frac{G_L \underline{S}_{2,2}^*}{1 + G_L |\underline{S}_{2,2}|^2} \quad (12.50)$$

und Radius

$$R_L = \frac{\sqrt{1 - G_L + G_L |\underline{S}_{2,2}|^2}}{1 + G_L |\underline{S}_{2,2}|^2} \quad (12.51)$$

in der Ebene des Lastreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_L$. Bei Leistungsanpassung

$$\underline{\Gamma}_{L\max} = \underline{S}_{2,2}^* \quad (12.52)$$

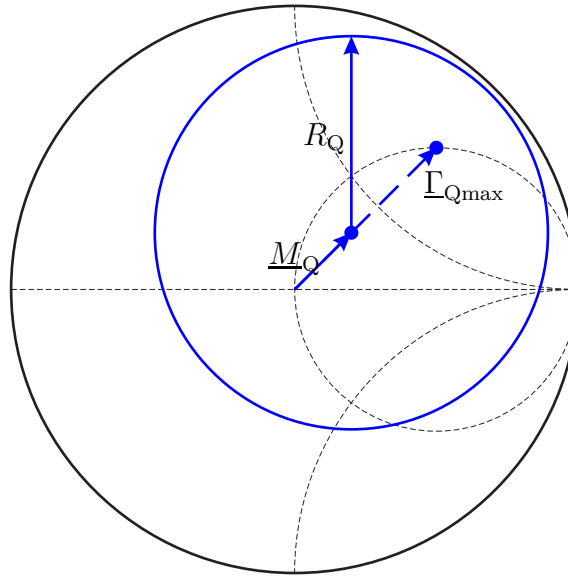


Abbildung 12.10.: Exemplarischer Kreis konstanten Gewinns der Eingangsanpassung $G_Q = 0,5$. $\underline{S}_{1,1} = 0,5 - j0,5$

erhält man den maximalen erzielbaren Gewinn

$$G_{L\max} = \frac{1}{1 - |\underline{S}_{2,2}|^2} \quad (12.53)$$

der Ausgangsanpassung.

Der sich bei eingangsseitiger und ausgangsseitiger Anpassung ergebende maximale unilaterale Übertragungsgewinn ist

$$G_{TU\max} = \frac{1}{1 - |\underline{S}_{1,1}|^2} |\underline{S}_{2,1}|^2 \frac{1}{1 - |\underline{S}_{2,2}|^2}. \quad (12.54)$$

Aufgabe 12.3 Berechnen Sie den Übertragungsgewinn G_T , den Klemmenleistungsgewinn G , den verfügbaren Leistungsgewinn G_A und den Einfügungsgewinn G_I der Einwegleitung mit der Streumatrix \underline{S} gemäß (10.23) jeweils als Funktion des Quellenreflexionsfaktors Γ_Q und des Lastreflexionsfaktors Γ_m !

Aufgabe 12.4 Zeigen Sie, dass für den Grenzfall eines rückwirkungsfreien Zweitports $\underline{S}_{1,2} \rightarrow 0$ der maximale verfügbare Leistungsgewinn G_{MAG} gegen den maximalen unilateralen Übertragungsgewinn $G_{TU\max}$ konvergiert!

Kapitel 13.

Rauschen

13.1. Rauschende Eintore

13.1.1. Modellierung rauschender Eintore

Es wird ein rauschendes Eintor mit dem Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}$ betrachtet, siehe Abbildung 13.1. Im Folgenden wird stets das Rauschen innerhalb einer sehr kleinen vorgegebenen Bandbreite B betrachtet.¹ Bei sehr kleiner Bandbreite B ist das Rauschen näherungsweise sinusförmig mit zufälliger Amplitude und Nullphase, das heißt die komplexe Wellenamplitude \underline{b}_R der Rauschurwelle ist eine Zufallsvariable. Mit (12.6) ergibt sich die verfügbare Rauschleistung zu

$$P_{\text{RA}} = \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_R|^2\} \frac{1}{1 - |\underline{\Gamma}|^2}. \quad (13.1)$$

$\text{E}\{\cdot\}$ bezeichnet den Erwartungswert.

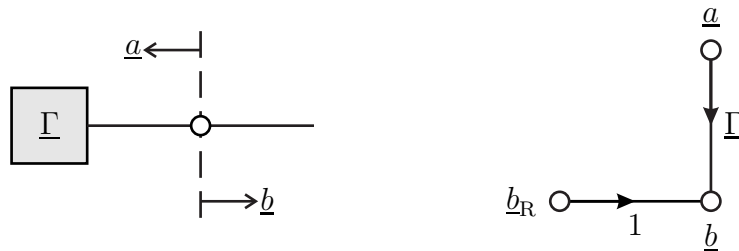


Abbildung 13.1.: Modell eines rauschenden Eintors

Rauschsignale mit größeren Bandbreiten B , wie sie beispielsweise in der Nachrichtentechnik vorkommen, können im Sinne einer Frequenzbereichsmodellierung durch ihr Leistungsdichtespektrum beschrieben werden [PP02].

¹ Üblicherweise interessiert von dem an sich breitbandigen Rauschen nur der Anteil innerhalb der kleinen Bandbreite B des Nutzsignals.

13.1.2. Thermisches Rauschen von Widerständen

Eine häufige Quelle von Rauschen im Bereich der Hochfrequenztechnik ist das thermische Rauschen von Widerständen, siehe Abbildung 13.2. Mit der Boltzmann-Konstante

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ W s K}^{-1} \quad (13.2)$$

ergibt sich die innerhalb der Bandbreite B verfügbare Rauschleistung bei einer Temperatur T zu

$$\boxed{P_{\text{RA}} = kTB} . \quad (13.3)$$

Insbesondere ist das thermische Rauschen innerhalb der in der Hochfrequenztechnik interessierenden Frequenzbereiche weiß. Die verfügbare Rauschleistung P_{RA} hängt nicht vom Widerstand R ab. Bei der üblicherweise verwendeten Bezugstemperatur

$$T_0 = 290 \text{ K} \quad (13.4)$$

ergibt sich die verfügbare Rauschleistungsdichte

$$\frac{P_{\text{RA}}}{B} = kT_0 = 4 \cdot 10^{-21} \text{ W Hz}^{-1}. \quad (13.5)$$

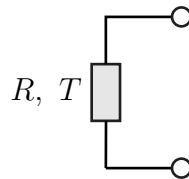


Abbildung 13.2.: Thermisch rauschender Widerstand R

13.1.3. Thermisch rauschende Eintore homogener Temperatur

Ein thermisch rauschender Widerstand R der Temperatur T ist mit einer thermisch rauschenden Impedanz Z gleicher Temperatur T verbunden, siehe Abbildung 13.3. Für die komplexen Wellenamplituden gilt

$$\underline{a} = \underline{b}'_{\text{R}} + \underline{\Gamma}' \underline{b}$$

und

$$\underline{b} = \underline{b}_{\text{R}} + \underline{\Gamma} \underline{a}.$$

Aufgelöst nach den komplexen Wellenamplituden erhält man

$$\underline{a} = \frac{\underline{b}'_R + \Gamma' \underline{b}_R}{1 - \Gamma \Gamma'}$$

und

$$\underline{b} = \frac{\underline{b}_R + \Gamma \underline{b}'_R}{1 - \Gamma \Gamma'}.$$

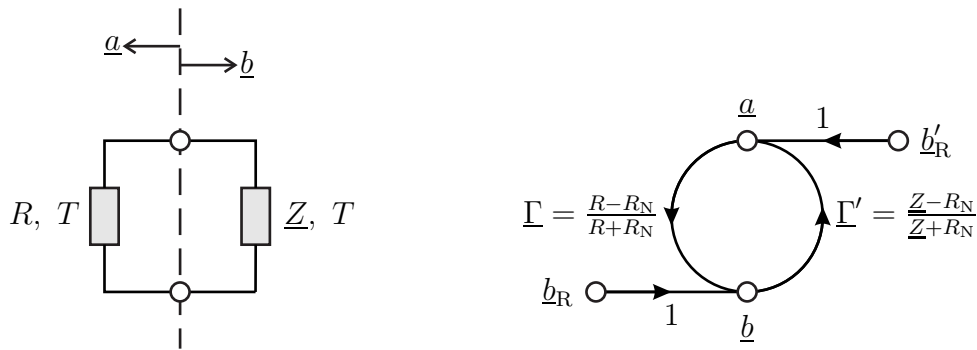


Abbildung 13.3.: Verbinden eines thermisch rauschenden Widerstands R mit einer thermisch rauschenden Impedanz Z gleicher Temperatur T

Im hier betrachteten thermodynamischen Gleichgewicht muss die Leistungsbilanz, vergleiche (9.3), ausgeglichen sein:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{a}|^2\} &= \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}|^2\}, \\ \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}'_R + \Gamma' \underline{b}_R|^2\} &= \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_R + \Gamma \underline{b}'_R|^2\}. \end{aligned}$$

Da es sich um räumlich getrennte unabhängige Rauschquellen handelt, sind die komplexen Wellenamplituden der Rauschwellen unkorreliert und es gilt

$$\frac{1}{2} \text{E}\{\underline{b}_R \underline{b}'_R^*\} = \frac{1}{2} \text{E}\{\underline{b}'_R \underline{b}_R^*\} = 0.$$

Mit (13.1) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}'_R|^2\} + |\Gamma'|^2 \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_R|^2\} &= \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_R|^2\} + |\Gamma|^2 \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}'_R|^2\}, \\ \underbrace{\frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_R|^2\}}_{P_{\text{RA}}} \frac{1}{1 - |\Gamma|^2} &= \underbrace{\frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}'_R|^2\}}_{P'_{\text{RA}}} \frac{1}{1 - |\Gamma'|^2}. \end{aligned}$$

Schließlich erhält man mit (13.3) die innerhalb der Bandbreite B verfügbare Rauschleistung

$$P'_{\text{RA}} = \frac{1}{2} \text{E}\{|b'_R|^2\} \frac{1}{1 - |\underline{\Gamma}'|^2} = kTB. \quad (13.6)$$

Die verfügbare Rauschleistung P'_{RA} aller thermisch rauschenden Eintore homogener Temperatur T und nicht nur die von Wirkwiderständen R ist daher kTB .

Auch andere Rauschquellen modelliert man in der Hochfrequenztechnik häufig als thermisch rauschende Impedanzen \underline{Z} , wobei die Rauschtemperatur T entsprechend der jeweils verfügbaren Rauschleistung P'_{RA} zu wählen ist.

13.2. Rauschende Mehr Tore

13.2.1. Modellierung rauschender Mehr Tore

Im Modell eines rauschenden Mehrtors ist an jedem Tor n eine Rauschurwelle mit der komplexen Wellenamplitude b_{Rn} zu berücksichtigen, siehe Abbildung 13.4.

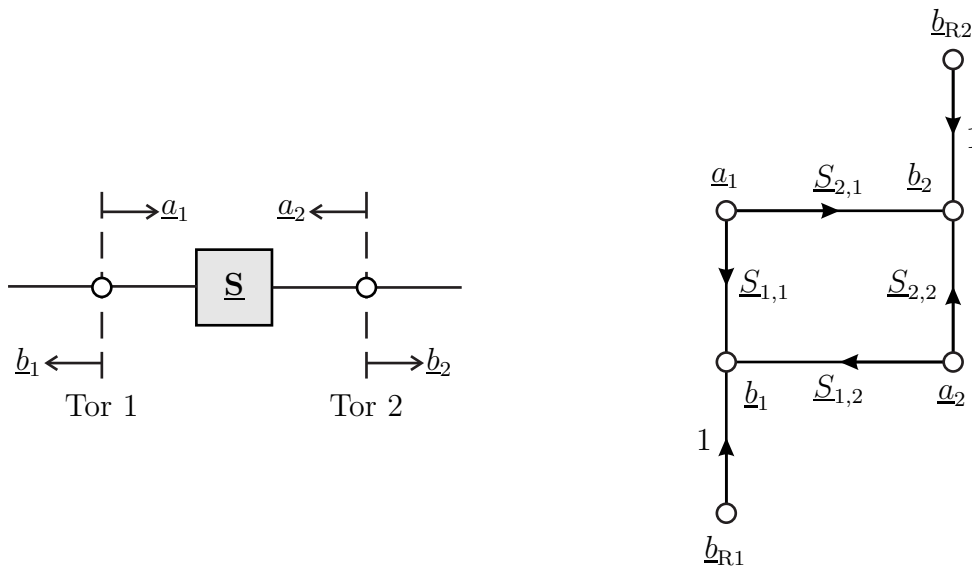


Abbildung 13.4.: Modell eines rauschenden Zweitores

Mit dem Vektor

$$\underline{b}_R = \begin{pmatrix} b_{R1} \\ \vdots \\ b_{RN} \end{pmatrix} \quad (13.7)$$

der komplexen Wellenamplituden der Rauschurwellen und der Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ erhält man den Zusammenhang

$$\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}_{\text{R}} \quad (13.8)$$

zwischen den komplexen Wellenamplituden, vergleiche (9.46).

Die komplexen Wellenamplituden $\underline{\mathbf{b}}_{\text{R}n}$ der Rauschurwellen sind im Allgemeinen korreliert, da sie zumindest teilweise auf gemeinsame physikalische Rauschquellen im Inneren des Mehrtors zurückgehen. Man definiert die Rauschwellenkorrelationsmatrix

$$\underline{\mathbf{R}} = \frac{1}{2} \text{E}\{\underline{\mathbf{b}}_{\text{R}} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\text{R}}^{*\text{T}}\}. \quad (13.9)$$

Die Korrelationen sind bei Rauschleistungsberechnungen zu berücksichtigen, da man die Beiträge der einzelnen Rauschurwellen zur Gesamtleistung nicht einfach aufaddieren darf.

13.2.2. Analyse komplexer rauschender Netzwerke

Die Analyse komplexer rauschender Netzwerke beruht auf dem in Abschnitt 9.8 geschilderten Ansatz. An Stelle des Vektors $\underline{\mathbf{b}}_{\text{Q}}$ der komplexen Wellenamplituden der Urwellen tritt nun der Vektor $\underline{\mathbf{b}}_{\text{R}}$ der komplexen Wellenamplituden der Rauschurwellen mit der Rauschwellenkorrelationsmatrix $\underline{\mathbf{R}}$.

Einsetzen der komplexen Wellenamplituden $\underline{\mathbf{b}}_{\text{R}}$ der Rauschurwellen in (9.67) ergibt die komplexen Wellenamplituden der zulaufenden Wellen

$$\underline{\mathbf{a}} = (\underline{\mathbf{K}} - \underline{\mathbf{S}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\text{R}}.$$

Die zulaufenden Rauschleistungen entsprechen den Diagonalelementen der Korrelationsmatrix

$$\frac{1}{2} \text{E}\{\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{a}}^{*\text{T}}\} = (\underline{\mathbf{K}} - \underline{\mathbf{S}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{R}} \cdot (\underline{\mathbf{K}} - \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}})^{-1}, \quad (13.10)$$

wobei (9.63) und (13.9) verwendet wurde. Analog erhält man aus (9.68) die komplexen Wellenamplituden der ablaufenden Wellen

$$\underline{\mathbf{b}} = (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{K}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\text{R}}$$

und als Diagonalelemente der Korrelationsmatrix

$$\frac{1}{2} \text{E}\{\underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{b}}^{*\text{T}}\} = (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{K}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{R}} \cdot (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}})^{-1} \quad (13.11)$$

die ablaufenden Rauschleistungen.

Zunächst wird der Betriebszustand mit reflexionsfreien Abschlüssen $\underline{\Gamma}'_l = 0$ an allen Toren $l = 1 \dots N$ betrachtet. An Tor n gilt dann

$$\underline{b}_n = \underline{b}_{Rn} + \sum_l \underline{S}_{n,l} \underline{a}_l = \underline{b}_{Rn} + \sum_l \underline{S}_{n,l} \underline{b}'_{Rl}.$$

Die Rauschquellen der Abschlüsse sind untereinander und mit den Rauschquellen des Mehrtors unkorreliert. Für ein beliebiges Paar verschiedener Tore $n \neq m$ gilt

$$\frac{1}{2} \text{E}\{\underline{b}'_{Rn} \underline{b}'_{Rm}^*\} = \frac{1}{2} \text{E}\{\underline{b}'_{Rn}^* \underline{b}'_{Rm}\} = 0$$

und für beliebige Tore n und m gilt

$$\frac{1}{2} \text{E}\{\underline{b}_{Rn} \underline{b}'_{Rm}^*\} = \frac{1}{2} \text{E}\{\underline{b}'_{Rn}^* \underline{b}'_{Rm}\} = 0.$$

Es folgt die von Tor n ablaufende Rauschleistung

$$\underbrace{\frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_n|^2\}}_{kTB} = \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_{Rn}|^2\} + \sum_l |\underline{S}_{n,l}|^2 \underbrace{\frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}'_{Rl}|^2\}}_{kTB}.$$

Schließlich erhält man im thermodynamischen Gleichgewicht die Leistung der Rauschurwelle an Tor n

$$\frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_{Rn}|^2\} = kTB \left(1 - \sum_l |\underline{S}_{n,l}|^2 \right) = kTB \left(1 - [\underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*T}]_{n,n} \right). \quad (13.12)$$

Damit ist ein Zusammenhang zwischen den Leistungen der Rauschurwellen und den Streuparametern thermisch rauschender Mehrtore homogener Temperatur T hergestellt.

Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, Zusammenhänge zwischen den Kreuzleistungen der Rauschurwellen und den Streuparametern thermisch rauschender Mehrtore homogener Temperatur T zu finden. Bei reflexionsfreiem Abschluss $\underline{\Gamma}'_l = 0$ an den Toren $l \neq m$ erhält man

$$\underline{a}_l = \underline{b}'_{Rl}$$

und mit den Vereinfachungsregeln aus Abbildung 9.3

$$\underline{a}_m = \sum_{l \neq m} \frac{\underline{\Gamma}'_m}{1 - \underline{S}_{m,m} \underline{\Gamma}'_m} \underline{S}_{m,l} \underline{b}'_{Rl} + \frac{1}{1 - \underline{S}_{m,m} \underline{\Gamma}'_m} \underline{b}'_{Rm} + \frac{\underline{\Gamma}'_m}{1 - \underline{S}_{m,m} \underline{\Gamma}'_m} \underline{b}_{Rm}.$$

An Tor $n \neq m$ gilt dann allgemein

$$\begin{aligned} \underline{b}_n &= \sum_{l \neq m} \underline{S}_{n,l} \underline{a}_l + \underline{S}_{n,n} \underline{a}_m + \underline{b}_{Rn} \\ &= \sum_{l \neq m} \underline{S}_{n,l} \underline{b}'_{Rl} + \sum_{l \neq m} \underline{S}_{n,m} \frac{\underline{\Gamma}'_m}{1 - \underline{S}_{m,m} \underline{\Gamma}'_m} \underline{S}_{m,l} \underline{b}'_{Rl} \\ &\quad + \underline{S}_{n,m} \frac{1}{1 - \underline{S}_{m,m} \underline{\Gamma}'_m} \underline{b}'_{Rm} + \underline{S}_{n,m} \frac{\underline{\Gamma}'_m}{1 - \underline{S}_{m,m} \underline{\Gamma}'_m} \underline{b}_{Rm} + \underline{b}_{Rn}. \end{aligned}$$

Zunächst wird der Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}'_m$ des Abschlusses an Tor m so gewählt, dass

$$\underline{S}_{n,m} \frac{\underline{\Gamma}'_m}{1 - \underline{S}_{m,m} \underline{\Gamma}'_m} = 1$$

gilt.² Der erforderliche Reflexionsfaktor ergibt sich zu

$$\underline{\Gamma}'_m = \frac{1}{\underline{S}_{n,m} + \underline{S}_{m,m}}.$$

Mit (13.6) ergibt sich die Leistung der Rauschurwelle des Abschlusses zu

$$\frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}'_{Rm}|^2\} = kTB \left(1 - \frac{1}{|\underline{S}_{n,m} + \underline{S}_{m,m}|^2} \right).$$

Da die Rauschquellen der Abschlüsse untereinander und mit den Rauschquellen des Mehrtors unkorreliert sind, folgt für die von Tor n ablaufende Rauschleistung

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_n|^2\}}_{kTB} &= \sum_{l \neq m} |\underline{S}_{n,l} + \underline{S}_{m,l}|^2 \underbrace{\frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}'_{Rl}|^2\}}_{kTB} + |\underline{S}_{n,m} + \underline{S}_{m,m}|^2 \underbrace{\frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}'_{Rm}|^2\}}_{kTB \left(1 - \frac{1}{|\underline{S}_{n,m} + \underline{S}_{m,m}|^2} \right)} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_{Rm}|^2\}}_{kTB \left(1 - \sum_l |\underline{S}_{m,l}|^2 \right)} + \underbrace{\frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_{Rn}|^2\}}_{kTB \left(1 - \sum_l |\underline{S}_{n,l}|^2 \right)} + \frac{1}{2} \text{E}\{\underline{b}_{Rm} \underline{b}_{Rn}^*\} + \frac{1}{2} \text{E}\{\underline{b}_{Rm}^* \underline{b}_{Rn}\}. \end{aligned}$$

²Dies ist abhängig von den Streuparametern nicht immer mit einem passiven Abschluss $|\underline{\Gamma}'_m| \leq 1$ möglich, was aber für die folgenden Berechnungen irrelevant ist.

Schließlich erhält man mit (13.12) im thermodynamischen Gleichgewicht

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \mathbb{E}\{\underline{b}_{Rm} \underline{b}_{Rn}^*\} + \frac{1}{2} \mathbb{E}\{\underline{b}_{Rm}^* \underline{b}_{Rn}\} \\
 &= -kTB \left(\sum_l |\underline{S}_{n,l} + \underline{S}_{m,l}|^2 - \sum_l |\underline{S}_{m,l}|^2 - \sum_l |\underline{S}_{n,l}|^2 \right) \\
 &= -kTB \left(\sum_l \underline{S}_{n,l} \underline{S}_{m,l}^* + \sum_l \underline{S}_{n,l}^* \underline{S}_{m,l} \right) \\
 &= -kTB \left([\underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*T}]_{n,m} + [\underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*T}]_{m,n} \right).
 \end{aligned} \tag{13.13}$$

Nun wird der Reflexionsfaktor Γ'_m des Abschlusses an Tor m so gewählt, dass

$$\underline{S}_{n,m} \frac{\Gamma'_m}{1 - \underline{S}_{m,m} \Gamma'_m} = -j$$

gilt. Der erforderliche Reflexionsfaktor ergibt sich zu

$$\Gamma'_m = \frac{1}{j \underline{S}_{n,m} + \underline{S}_{m,m}}.$$

Mit (13.6) ergibt sich die Leistung der Rauschurwelle des Abschlusses zu

$$\frac{1}{2} \mathbb{E}\{|b'_R|^2\} = kTB \left(1 - \frac{1}{|j \underline{S}_{n,m} + \underline{S}_{m,m}|^2} \right).$$

Da die Rauschquellen der Abschlüsse untereinander und mit den Rauschquellen des Mehrtors unkorreliert sind, folgt für die von Tor n ablaufende Rauschleistung

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{1}{2} \mathbb{E}\{|b_n|^2\}}_{kTB} &= \sum_{l \neq m} |\underline{S}_{n,l} - j \underline{S}_{m,l}|^2 \underbrace{\frac{1}{2} \mathbb{E}\{|b'_{Rl}|^2\}}_{kTB} + |j \underline{S}_{n,m} + \underline{S}_{m,m}|^2 \underbrace{\frac{1}{2} \mathbb{E}\{|b'_{Rm}|^2\}}_{kTB \left(1 - \frac{1}{|j \underline{S}_{n,m} + \underline{S}_{m,m}|^2} \right)} \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{2} \mathbb{E}\{|b_{Rm}|^2\}}_{kTB \left(1 - \sum_l |\underline{S}_{m,l}|^2 \right)} + \underbrace{\frac{1}{2} \mathbb{E}\{|b_{Rn}|^2\}}_{kTB \left(1 - \sum_l |\underline{S}_{n,l}|^2 \right)} - j \frac{1}{2} \mathbb{E}\{\underline{b}_{Rm} \underline{b}_{Rn}^*\} + j \frac{1}{2} \mathbb{E}\{\underline{b}_{Rm}^* \underline{b}_{Rn}\}.
 \end{aligned}$$

Schließlich erhält man mit (13.12) im thermodynamischen Gleichgewicht

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \mathbb{E}\{\underline{b}_{Rm} \underline{b}_{Rn}^*\} - \frac{1}{2} \mathbb{E}\{\underline{b}_{Rm}^* \underline{b}_{Rn}\} \\
 &= -jkTB \left(\sum_l |\underline{S}_{n,l} - j\underline{S}_{m,l}|^2 - \sum_l |\underline{S}_{m,l}|^2 - \sum_l |\underline{S}_{n,l}|^2 \right) \\
 &= -kTB \left(-\sum_l \underline{S}_{n,l} \underline{S}_{m,l}^* + \sum_l \underline{S}_{n,l}^* \underline{S}_{m,l} \right) \\
 &= -kTB \left(-[\underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*T}]_{n,m} + [\underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*T}]_{m,n} \right).
 \end{aligned} \tag{13.14}$$

Durch Addition von (13.13) und (13.14) erhält man

$$\frac{1}{2} \mathbb{E}\{\underline{b}_{Rm} \underline{b}_{Rn}^*\} = -kTB [\underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*T}]_{m,n}.$$

Die in (13.9) eingeführte Rauschwellenkorrelationsmatrix ergibt sich schließlich zu

$$\underline{\mathbf{R}} = kTB (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*T}). \tag{13.15}$$

Die durch die Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ beschriebene Fähigkeit eines Mehrtors Leistung aufzunehmen und die durch die Rauschwellenkorrelationsmatrix $\underline{\mathbf{R}}$ beschriebene Fähigkeit eines Mehrtors Rauschleistung abzugeben sind für thermisch rauschende Mehrtere homogener Temperatur T eng miteinander verknüpft.

Die Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ eines entkoppelten Mehrtors ist eine Diagonalmatrix. Die Rauschquellen entkoppelter thermisch rauschender Mehrtere homogener Temperatur T sind somit unkorreliert. Bei eigenreflexionsfreien thermisch rauschenden Zweitoren homogener Temperatur T , das heißt bei $\underline{S}_{1,1} = \underline{S}_{2,2} = 0$ gemäß (9.5), sind die Rauschquellen ebenfalls unkorreliert. Verlustfreie thermisch rauschende Mehrtere homogener Temperatur T sind rauschfrei, da ihre Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ unitär ist, siehe (9.7).

Aufgabe 13.1 *Es wird die in Abbildung 13.6 gezeigte thermisch rauschende Paralleladmittanz homogener Temperatur T betrachtet. Berechnen Sie den normierten Korrelationskoeffizienten*

$$\underline{C} = \frac{\frac{1}{2} \mathbb{E}\{\underline{b}_{R1} \underline{b}_{R2}^*\}}{\sqrt{\frac{1}{2} \mathbb{E}\{|\underline{b}_{R1}|^2\} \frac{1}{2} \mathbb{E}\{|\underline{b}_{R2}|^2\}}}$$

der Rauschurwellen!

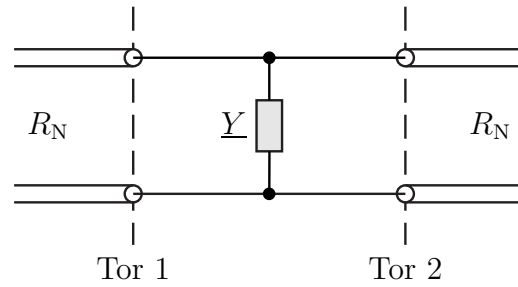


Abbildung 13.6.: Thermisch rauschende Paralleladmittanz

13.3. Rauschende Zweitore

13.3.1. Effektive Rauschtemperatur und Rauschzahl

Zweitore sind von besonderer Bedeutung beim Verarbeiten nachrichtentechnischer Signale. Eine intensivere Beschäftigung mit den Rauscheigenschaften von Zweitoren ist somit angebracht. Hierzu wird der in Abbildung 13.7 gezeigte Signalflussgraph eines eingangsseitig an Tor 1 mit einer rauschfreien Quelle mit dem Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_Q$ abgeschlossenen und ausgangsseitig an Tor 2 mit einer reflexionsfreien Last abgeschlossenen rauschenden Zweitors betrachtet.

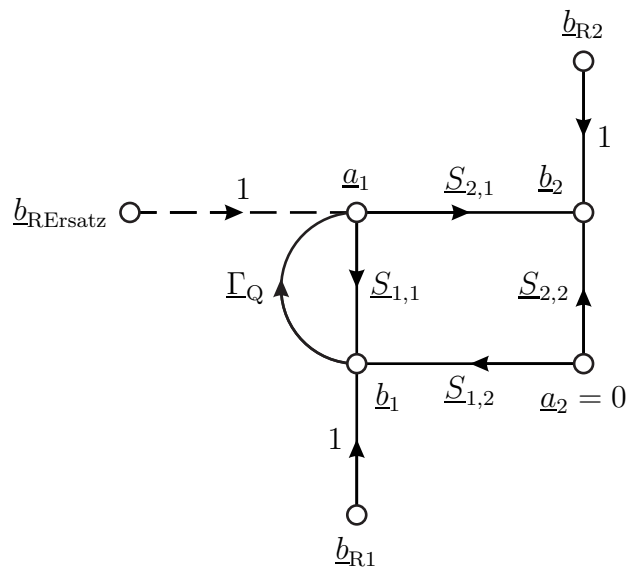


Abbildung 13.7.: Modell eines an eine rauschfreie Quelle und eine reflexionsfreie Last angeschlossenen rauschenden Zweitors

Die komplexe Wellenamplitude der ausgangsseitig von Tor 2 ablaufenden Welle

bei reflexionsfreier Last erhält man unter Verwenden der Vereinfachungsregeln aus Abbildung 9.3 zu

$$\underline{b}_2 = \underline{b}_{R1} \frac{\underline{\Gamma}_Q \underline{S}_{2,1}}{1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{S}_{1,1}} + \underline{b}_{R2} = \frac{\underline{S}_{2,1}}{1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{S}_{1,1}} \left(\underline{b}_{R1} \underline{\Gamma}_Q + \frac{1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{S}_{1,1}}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2} \right),$$

das heißt die Rauschquellen im Zweitor wirken wie eine Ersatzrauschquelle mit der komplexen Wellenamplitude der Rauschurwelle

$$\underline{b}_{RErsatz} = \underline{b}_{R1} \underline{\Gamma}_Q + \frac{1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{S}_{1,1}}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2} = \underline{\Gamma}_Q \left(\underline{b}_{R1} - \frac{\underline{S}_{1,1}}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2} \right) + \frac{1}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2}$$

am Zweitoreingang. Die verfügbare Eingangsrauschleistung der Ersatzrauschquelle an Tor 1 ist

$$\Delta P_{RA1} = \frac{1}{2} \text{E} \left\{ |\underline{b}_{RErsatz}|^2 \right\} \frac{1}{1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2},$$

siehe (13.1).

Ein thermisch rauschendes Eintor müsste gemäß (13.6) die effektive Rauschtemperatur

$$T_{\text{eff}} = \frac{\Delta P_{RA1}}{kB} = \frac{\frac{1}{2} \text{E} \left\{ \left| \underline{\Gamma}_Q \left(\underline{b}_{R1} - \frac{\underline{S}_{1,1}}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2} \right) + \frac{1}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2} \right|^2 \right\}}{kB \left(1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2 \right)}$$

haben, um diese verfügbare Eingangsrauschleistung ΔP_{RA1} zu erzeugen. Mit den Rauschparametern

$$R_{1,1} = \frac{1}{2} \text{E} \left\{ \left| \underline{b}_{R1} - \frac{\underline{S}_{1,1}}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2} \right|^2 \right\}, \quad (13.16)$$

$$\underline{R}_{1,2} = \underline{R}_{2,1}^* = \frac{1}{2} \text{E} \left\{ \left(\underline{b}_{R1} - \frac{\underline{S}_{1,1}}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2} \right) \left(\frac{1}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2} \right)^* \right\}, \quad (13.17)$$

$$R_{2,2} = \frac{1}{2} \text{E} \left\{ \left| \frac{1}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2} \right|^2 \right\} \quad (13.18)$$

folgt für die effektive Rauschtemperatur

$$T_{\text{eff}} = \frac{|\underline{\Gamma}_Q|^2 R_{1,1} + \underline{\Gamma}_Q \underline{R}_{1,2} + \underline{\Gamma}_Q^* \underline{R}_{2,1} + R_{2,2}}{kB \left(1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2 \right)}. \quad (13.19)$$

Die effektive Rauschtemperatur T_{eff} ist offensichtlich eine Funktion des Quellenreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_Q$.

Mit dem verfügbaren Leistungsgewinn G_A des Zweitors ergibt sich die vom Zweitor erzeugte verfügbare Ausgangsrauschleistung

$$\Delta P_{\text{RA2}} = G_A \Delta P_{\text{RA1}} \quad (13.20)$$

an Tor 2, siehe (12.33). Es folgt

$$T_{\text{eff}} = \frac{\Delta P_{\text{RA2}}}{G_A k B} \quad (13.21)$$

für die effektive Rauschtemperatur. Mit der Bezugstemperatur T_0 definiert man weiterhin die zusätzliche Rauschzahl

$$F_Z = \frac{T_{\text{eff}}}{T_0}. \quad (13.22)$$

In der Realität ist die am Zweitoreingang angeschlossene Quelle nicht rauschfrei. Das Rauschen des Zweitors wirkt wie eine Erhöhung der Rauschtemperatur der Quelle um die effektive Rauschtemperatur T_{eff} . Falls die Rauschtemperatur der Quelle der Bezugstemperatur T_0 entspricht, ergibt sich die Systemrauschtemperatur

$$T_S = T_0 + T_{\text{eff}}. \quad (13.23)$$

Man definiert die Rauschzahl

$$F = \frac{T_S}{T_0} = 1 + \frac{T_{\text{eff}}}{T_0} = 1 + F_Z. \quad (13.24)$$

Die Rauschzahl F ist ebenso wie die effektive Rauschtemperatur T_{eff} und die zusätzliche Rauschzahl F_Z vom Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_Q$ abhängig. Man beachte, dass die Rauschzahl F immer bezüglich einer Bezugstemperatur T_0 definiert ist. Für die Rauschzahl F' bei einer anderen Bezugstemperatur T'_0 ergibt sich

$$F' = (F - 1) \frac{T_0}{T'_0} + 1. \quad (13.25)$$

Man kann die Rauschzahl auch als Verhältnis der verfügbaren Ausgangsrauschleistung

$$P_{\text{RA2}} = G_A k T_S B = G_A k (T_0 + T_{\text{eff}}) B \quad (13.26)$$

an Tor 2 und der verstärkten von der thermisch rauschenden Quelle der Bezugstemperatur T_0 stammenden verfügbaren Eingangsrauschleistung

$$P_{\text{RA1}} = k T_0 B \quad (13.27)$$

gemäß (13.6) darstellen [Fri44]:

$$F = \frac{P_{\text{RA2}}}{G_A P_{\text{RA1}}}. \quad (13.28)$$

Falls die Rauschtemperatur der Quelle der Bezugstemperatur T_0 entspricht, ergibt sich das Signal-Rausch-Abstand am Zweitoreingang mit der verfügbaren Nutzsignalleistung P_{SA} zu

$$\gamma_1 = \frac{P_{\text{SA}}}{P_{\text{RA1}}} = \frac{P_{\text{SA}}}{kT_0 B}.$$

Am Zweitorausgang erhält man mit dem verfügbaren Leistungsgewinn G_A des Zweitors das Signal-Rausch-Abstand

$$\gamma_2 = \frac{G_A P_{\text{SA}}}{P_{\text{RA2}}} = \frac{G_A P_{\text{SA}}}{G_A kT_S B} = \frac{P_{\text{SA}}}{kT_S B}.$$

Das Verhältnis dieser Signal-Rausch-Abstände entspricht der Rauschzahl

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{T_S}{T_0} = F. \quad (13.29)$$

Die Rauschzahl F ist somit ein Maß für die Verschlechterung des Signal-Rausch-Abstands infolge des Rauschens des Zweitors.

Aufgabe 13.2 *Es wird eine an eine Quelle mit dem Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_Q$ angeschlossene thermisch rauschende Einwegleitung homogener Temperatur T betrachtet, siehe Abbildung 13.8. Berechnen Sie die Rauschzahl F der Einwegleitung als Funktion des Quellenreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_Q$, der Temperatur T der Einwegleitung und der Bezugstemperatur T_0 !!*

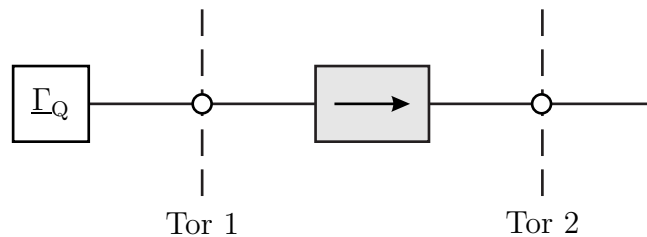


Abbildung 13.8.: An eine Quelle mit Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_Q$ angeschlossene thermisch rauschende Einwegleitung

13.3.2. Thermisch rauschende Zweitore homogener Temperatur

Es werden thermisch rauschende Zweitore homogener Temperatur T wie zum Beispiel Dämpfungsglieder betrachtet, siehe Abbildung 13.9. Die Temperatur T entspreche der Bezugstemperatur T_0 .

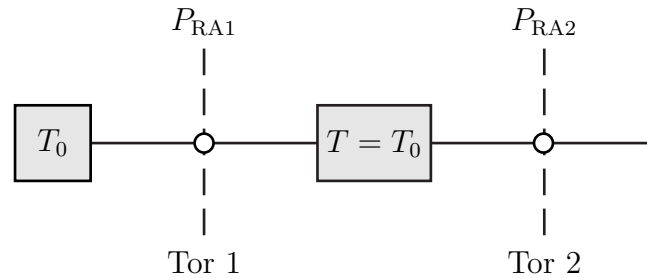


Abbildung 13.9.: An eine thermisch rauschende Quelle der Bezugstemperatur T_0 angeschlossenes thermisch rauschendes Zweitor homogener Temperatur $T = T_0$

Die von der thermisch rauschenden Quelle der Temperatur T_0 stammende verfügbare Eingangsrauschleistung ergibt sich mit (13.6) zu

$$P_{\text{RA1}} = kT_0B.$$

Vom Ausgang her gesehen entspricht das thermisch rauschende Zweitor homogener Temperatur T_0 mit dem eingangsseitigen thermisch rauschenden Abschluss der gleichen Temperatur T_0 einem thermisch rauschendem Eintor homogener Temperatur T_0 . Die verfügbare Ausgangsrauschleistung ist gemäß (13.6)

$$P_{\text{RA2}} = kT_0B.$$

Mit (13.28) folgt die Rauschzahl

$$F = \frac{P_{\text{RA2}}}{G_A P_{\text{RA1}}} = \frac{1}{G_A}, \quad (13.30)$$

die dem Kehrwert des verfügbaren Leistungsgewinns G_A entspricht, siehe (12.33).

13.3.3. Kaskade rauschender Zweitore

Bei einer rauschfreien Quelle am Eingang der beiden in Serie geschalteten Zweitore ergäbe sich die verfügbare Rauschleistung am Ausgang der Kaskade als Summe

der vom ersten Zweitor erzeugten und anschließend vom zweiten Zweitor verstärkten Rauschleistung und der vom zweiten Zweitor erzeugten Rauschleistung, siehe Abbildung 13.10. Mit (13.21) folgt für die effektive Rauschtemperatur der Kaskade

$$T_{\text{eff}} = \frac{G_{A2}G_{A1}kT_{\text{eff1}}B + G_{A2}kT_{\text{eff2}}B}{G_A k B} = T_{\text{eff1}} + \frac{T_{\text{eff2}}}{G_{A1}}. \quad (13.31)$$

Wichtig hierbei ist, dass jeweils die bei dem für den Eingang sichtbaren Reflexionsfaktor gültige effektive Rauschtemperatur des Zweitores verwendet wird. Die zusätzliche Rauschzahl der Kaskade ergibt sich gemäß (13.22) zu

$$F_Z = \frac{T_{\text{eff1}}}{T_0} + \frac{T_{\text{eff2}}}{G_{A1}T_0} = F_{Z1} + \frac{F_{Z2}}{G_{A1}} \quad (13.32)$$

und die Rauschzahl der Kaskade ergibt sich schließlich mit (13.24) zu

$$F = 1 + F_{Z1} + \frac{F_{Z2}}{G_{A1}} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{A1}}. \quad (13.33)$$

Die effektive Rauschtemperatur T_{eff} , die zusätzliche Rauschzahl F_Z und die Rauschzahl F einer Hochfrequenzverstärkerkaskade werden typischerweise im Wesentlichen durch die effektive Rauschtemperatur T_{eff1} , die zusätzliche Rauschzahl F_{Z1} beziehungsweise die Rauschzahl F_1 des ersten Hochfrequenzverstärkers in der Kaskade bestimmt.

13.3.4. Messen der Rauschzahl mit der Y -Faktor-Methode

Ziel ist es, zunächst die vom Messobjekt erzeugte verfügbare Ausgangsrauschleistung ΔP_{RA2} und den verfügbaren Leistungsgewinn G_{ADUT} zu bestimmen. Daraus lässt sich die Rauschzahl

$$F = 1 + \frac{\Delta P_{\text{RA2}}}{G_{\text{ADUT}}kT_0B}$$

prinzipiell berechnen, siehe (13.21) und (13.24). Beim Durchführen der Messung treten zwei Probleme auf, siehe Abbildung 13.11:³

- Zum direkten Messen der vom Messobjekt erzeugten verfügbaren Ausgangsrauschleistung ΔP_{RA2} wäre es erforderlich, das Messobjekt eingangsseitig rauschfrei abzuschließen, was praktisch nicht möglich ist. Statt dessen führt

³ Zum frequenzselektiven Messen von Rauschleistungen verwendet man üblicherweise einen Spektralanalysator, siehe Anhang B.2.2.

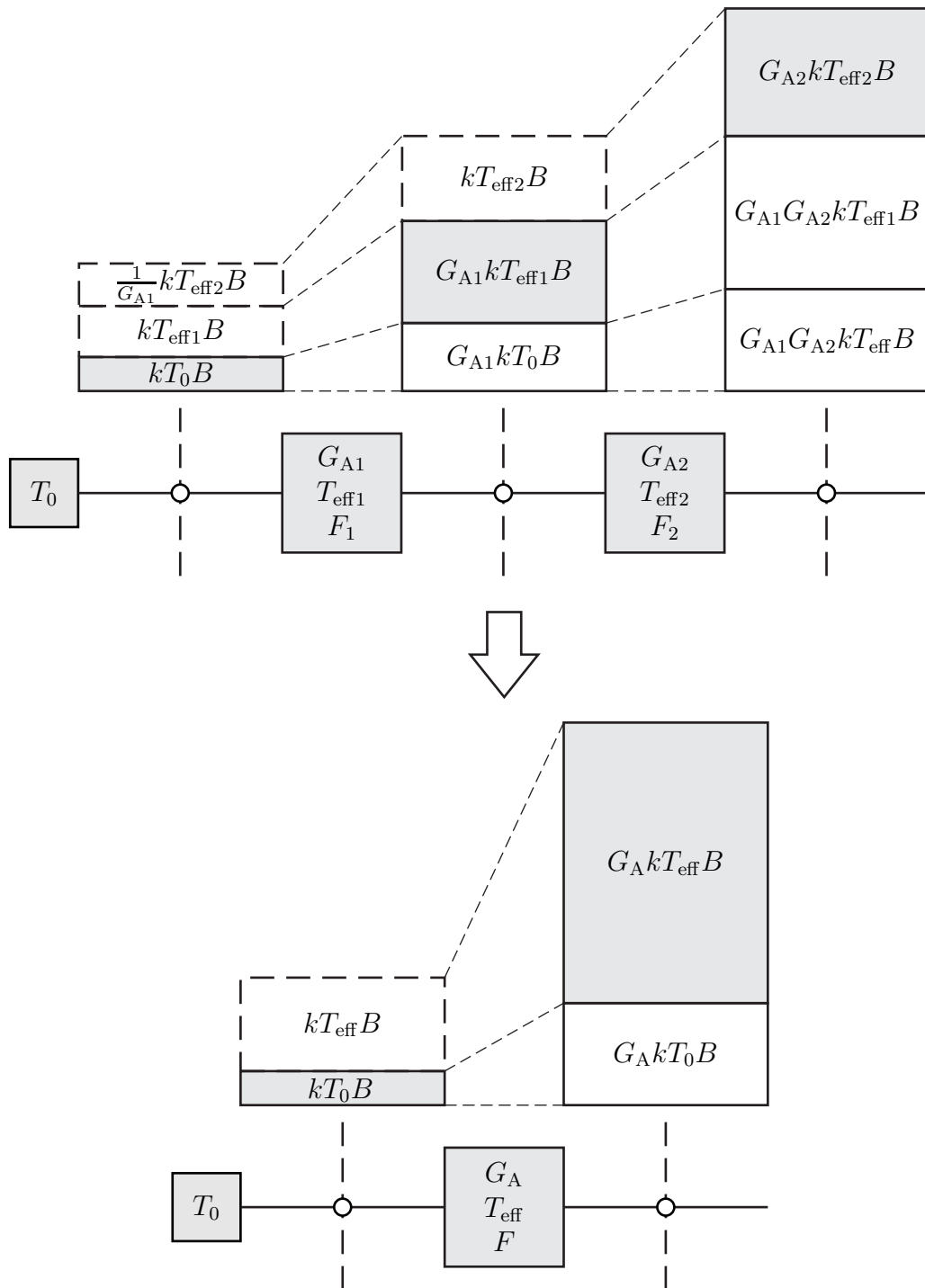


Abbildung 13.10.: Kaskade rauschender Zweitore

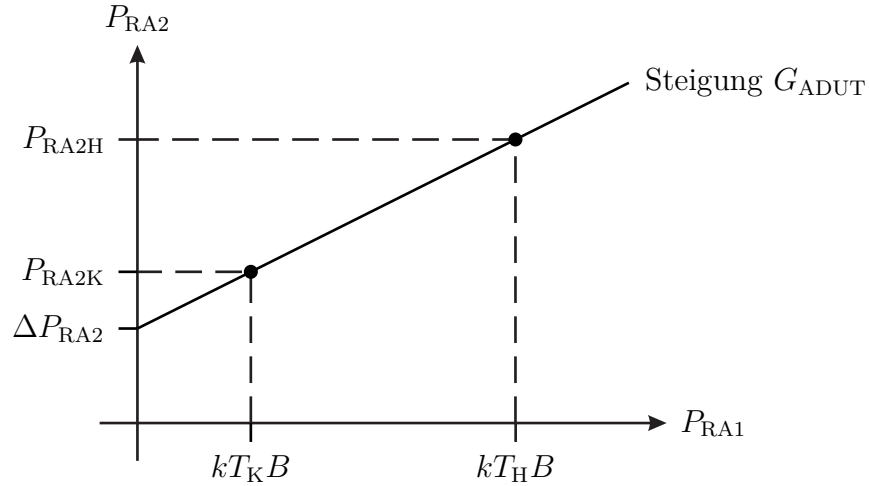


Abbildung 13.11.: Messen der Rauszahl

man zwei Messungen mit eingangsseitigen Abschlüssen mit unterschiedlichen bekannten Rauschtemperaturen durch. Man kann hierzu eine Rauschdiode verwenden, die durch eine Steuerspannung zwischen einem kalten Zustand mit der Rauschtemperatur T_K und einem heißen Zustand mit der Rauschtemperatur T_H umgeschaltet werden kann. Für die verfügbaren Ausgangsrauschleistungen des Messobjekts gilt gemäß (13.26):

$$\begin{aligned} P_{RA2K} &= G_{ADUT} k (T_K + T_{\text{eff}}) B, \\ P_{RA2H} &= G_{ADUT} k (T_H + T_{\text{eff}}) B. \end{aligned}$$

Für die Differenz der verfügbaren Ausgangsrauschleistungen gilt

$$P_{RA2H} - P_{RA2K} = G_{ADUT} k (T_H - T_K) B. \quad (13.34)$$

Aus dem als Y -Faktor bezeichneten Verhältnis der gemessenen verfügbaren Ausgangsrauschleistungen

$$Y = \frac{P_{RA2H}}{P_{RA2K}} = \frac{T_H + T_{\text{eff}}}{T_K + T_{\text{eff}}} \quad (13.35)$$

lässt sich nun einfach die effektive Rauschtemperatur

$$T_{\text{eff}} = \frac{T_H - Y T_K}{Y - 1}$$

berechnen. Mit (13.24) folgt die Rauschzahl

$$F = \frac{T_H/T_0 - 1 + Y(1 - T_K/T_0)}{Y - 1}. \quad (13.36)$$

Speziell wenn die Rauschtemperatur T_K im kalten Zustand gleich der Bezugstemperatur T_0 ist, gilt vereinfachend

$$F = \frac{\frac{T_H - T_0}{T_0}}{Y - 1}.$$

Die als bekannt vorausgesetzten relevanten Eigenschaften der Rauschdiode werden hier durch das als Übertemperaturverhältnis (Excess Noise Ratio, ENR) bezeichnete Verhältnis $\frac{T_H - T_0}{T_0}$ vollständig spezifiziert.

- Man misst zunächst nur die Rauschzahl F der Kaskade aus Messobjekt und Leistungsmessgerät, siehe Abbildung 13.12. Zur Elimination des Einflusses des Leistungsmessgeräts ist eine Fehlerkorrektur erforderlich. Zur Kalibrierung wird die Rauschquelle direkt mit dem Leistungsmessgerät verbunden. Man misst die verfügbaren Ausgangsrauschleistungen P_{RA2HM} und P_{RA2KM} im heißen beziehungsweise kalten Zustand der Rauschquelle. Man erhält das Verhältnis

$$Y_M = \frac{P_{RA2HM}}{P_{RA2KM}} = \frac{T_H + T_{\text{effM}}}{T_K + T_{\text{effM}}} \quad (13.37)$$

der gemessenen verfügbaren Rauschleistungen und schließlich die Rauschzahl

$$F_M = \frac{T_H/T_0 - 1 + Y_M(1 - T_K/T_0)}{Y_M - 1} \quad (13.38)$$

des Leistungsmessgeräts. Wichtig hierbei ist, dass die Rauschquelle den gleichen Reflexionsfaktor hat wie der Ausgang des Messobjekts, da die Rauschzahl des Leistungsmessgeräts vom Reflexionsfaktor abhängt. Aus der Differenz der am Ausgang der Rauschquelle gemessenen verfügbaren Rauschleistungen

$$P_{RA2H} - P_{RA2K} = k (T_H - T_K) B$$

kann man unter Verwenden von (13.34) den verfügbaren Leistungsgewinn des Messobjekts

$$G_{ADUT} = \frac{P_{RA2H} - P_{RA2K}}{P_{RA2HM} - P_{RA2KM}} \quad (13.39)$$

berechnen. Auch hierbei ist es wieder wichtig, dass die Rauschquelle den gleichen Reflexionsfaktor hat wie der Ausgang des Messobjekts, da sonst unterschiedliche Fehlanpassungen des Leistungsmessgeräts resultieren. Schließlich führt man basierend auf (13.33) die Korrekturrechnung durch und erhält die Rauschzahl

$$F_{DUT} = F - \frac{F_M - 1}{G_{ADUT}} \quad (13.40)$$

des Messobjekts. Diese theoretisch mögliche Fehlerkorrektur gelingt praktisch nur unvollkommen. Um den Fehler von vornherein klein zu halten ist es daher wichtig, ein Leistungsmessgerät mit kleiner Rauschzahl F_M zu verwenden. Praktisch erreicht man dies durch Einsatz eines rauscharmen Vorverstärkers, siehe (13.33).

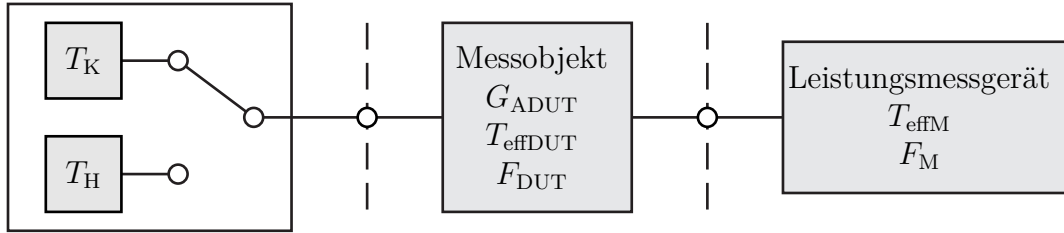


Abbildung 13.12.: System zum Messen der Rauschzahl F_{DUT}

13.3.5. Rauschanpassung

Die vom Quellenreflexionsfaktor Γ_Q abhängige effektive Rauschtemperatur T_{eff} eines Zweitorts wurde in (13.19) berechnet. Für die Orte konstanter effektiver Rauschtemperatur T_{eff} folgt

$$kT_{\text{eff}}B(1 - \Gamma_Q\Gamma_Q^*) = \Gamma_Q\Gamma_Q^*R_{1,1} + \Gamma_Q R_{1,2} + \Gamma_Q^* R_{1,2}^* + R_{2,2},$$

$$\left| \Gamma_Q - \frac{-R_{1,2}^*}{\underbrace{R_{1,1} + kT_{\text{eff}}B}_{M_Q}} \right|^2 = \frac{kT_{\text{eff}}B - R_{2,2}}{\underbrace{R_{1,1} + kT_{\text{eff}}B}_{R_Q^2}} + \frac{R_{1,2}R_{1,2}^*}{(R_{1,1} + kT_{\text{eff}}B)^2}.$$

Es handelt sich offensichtlich um einen Kreis mit Mittelpunkt

$$M_Q = -\frac{R_{1,2}^*}{R_{1,1} + kT_{\text{eff}}B} \quad (13.41)$$

und Radius

$$R_Q = \sqrt{\frac{kT_{\text{eff}}B - R_{2,2}}{R_{1,1} + kT_{\text{eff}}B} + \frac{R_{1,2}R_{1,2}^*}{(R_{1,1} + kT_{\text{eff}}B)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{k^2T_{\text{eff}}^2B^2 - R_{2,2}kT_{\text{eff}}B + kT_{\text{eff}}BR_{1,1} - R_{2,2}R_{1,1} + |R_{1,2}|^2}}{R_{1,1} + kT_{\text{eff}}B} \quad (13.42)$$

in der Ebene des Quellenreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_Q$.

Bei der minimalen effektiven Rauschtemperatur T_{effmin} wird der Radius Null:

$$k^2 T_{\text{effmin}}^2 B^2 - R_{2,2} k T_{\text{effmin}} B + k T_{\text{effmin}} B R_{1,1} - R_{2,2} R_{1,1} + |\underline{R}_{1,2}|^2 = 0.$$

Da es nur positive effektive Rauschtemperaturen gibt, hat diese quadratische Gleichung eine einzige physikalisch sinnvolle Lösung

$$\begin{aligned} T_{\text{effmin}} &= \frac{1}{2kB} \left(R_{2,2} - R_{1,1} + \sqrt{(R_{2,2} - R_{1,1})^2 + \underbrace{4R_{1,1}R_{2,2} - 4|\underline{R}_{1,2}|^2}_{\geq 0}} \right) \\ &= \frac{1}{2kB} \left(R_{2,2} - R_{1,1} + \sqrt{(R_{2,2} + R_{1,1})^2 - 4|\underline{R}_{1,2}|^2} \right). \end{aligned} \quad (13.43)$$

Der zur minimalen effektiven Rauschtemperatur T_{effmin} gehörende Kreismittelpunkt entspricht dem optimalen Quellenreflexionsfaktor

$$\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}} = -\frac{2\underline{R}_{1,2}^*}{R_{2,2} + R_{1,1} + \sqrt{(R_{2,2} + R_{1,1})^2 - 4|\underline{R}_{1,2}|^2}}. \quad (13.44)$$

Unter Verwenden der minimalen effektiven Rauschtemperatur T_{effmin} , des optimalen Quellenreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}$ und der sich bei reflexionsfreier Quelle $\underline{\Gamma}_Q = 0$ aus (13.19) ergebenden effektiven Rauschtemperatur

$$T_{\text{eff0}} = \frac{R_{2,2}}{kB} \quad (13.45)$$

kann man die Korrelationskoeffizienten

$$R_{2,2} = k T_{\text{eff0}} B \quad (13.46)$$

$$\begin{aligned} \underline{R}_{1,2} &= \frac{(R_{2,2} + R_{1,1})^2 - \left((R_{2,2} + R_{1,1})^2 - 4|\underline{R}_{1,2}|^2 \right)}{4\underline{R}_{1,2}^*} \\ &= \frac{R_{2,2} + R_{1,1} - \sqrt{(R_{2,2} + R_{1,1})^2 - 4|\underline{R}_{1,2}|^2}}{\frac{4\underline{R}_{1,2}^*}{R_{2,2} + R_{1,1} + \sqrt{(R_{2,2} + R_{1,1})^2 - 4|\underline{R}_{1,2}|^2}}} \\ &= k \frac{T_{\text{effmin}} - T_{\text{eff0}}}{\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}} B \end{aligned} \quad (13.47)$$

und

$$\begin{aligned}
 R_{1,1} &= \frac{R_{2,2} + R_{1,1} + \sqrt{(R_{2,2} + R_{1,1})^2 - 4|R_{1,2}|^2}}{2} \\
 &\quad - \frac{R_{2,2} - R_{1,1} + \sqrt{(R_{2,2} + R_{1,1})^2 - 4|R_{1,2}|^2}}{2} \\
 &= -\frac{R_{1,2}}{\Gamma_{\text{Qopt}}^*} - kT_{\text{effmin}}B = k\frac{T_{\text{eff0}} - T_{\text{effmin}}}{|\Gamma_{\text{Qopt}}|^2}B - kT_{\text{effmin}}B \\
 &= k\frac{T_{\text{eff0}} - T_{\text{effmin}} \left(|\Gamma_{\text{Qopt}}|^2 + 1 \right)}{|\Gamma_{\text{Qopt}}|^2}B
 \end{aligned} \tag{13.48}$$

aus obigen Gleichungen eliminieren. Aus (13.41) folgt der Mittelpunkt

$$\begin{aligned}
 \underline{M}_Q &= -\frac{\frac{R_{1,2}^*}{kB}}{\frac{R_{1,1}}{kB} + T_{\text{eff}}} = -\frac{\frac{T_{\text{effmin}} - T_{\text{eff0}}}{\Gamma_{\text{Qopt}}^*}}{\frac{T_{\text{eff0}} - T_{\text{effmin}} \left(|\Gamma_{\text{Qopt}}|^2 + 1 \right)}{|\Gamma_{\text{Qopt}}|^2} + T_{\text{eff}}} \\
 &= \frac{(T_{\text{eff0}} - T_{\text{effmin}}) \Gamma_{\text{Qopt}}}{T_{\text{eff0}} - T_{\text{effmin}} + (T_{\text{eff}} - T_{\text{effmin}}) |\Gamma_{\text{Qopt}}|^2}
 \end{aligned} \tag{13.49}$$

und aus (13.42) folgt der Radius

$$\begin{aligned}
 R_Q &= \frac{\sqrt{T_{\text{eff}} \left(T_{\text{eff}} - \frac{R_{2,2}}{kB} \right) + \left(T_{\text{eff}} - \frac{R_{2,2}}{kB} \right) \frac{R_{1,1}}{kB} + \frac{|R_{1,2}|^2}{k^2 B^2}}{\frac{R_{1,1}}{kB} + T_{\text{eff}}} \\
 &= \frac{\sqrt{T_{\text{eff}} (T_{\text{eff}} - T_{\text{eff0}}) + (T_{\text{eff}} - T_{\text{eff0}}) \frac{T_{\text{eff0}} - T_{\text{effmin}} \left(|\Gamma_{\text{Qopt}}|^2 + 1 \right)}{|\Gamma_{\text{Qopt}}|^2} + \frac{(T_{\text{effmin}} - T_{\text{eff0}})^2}{|\Gamma_{\text{Qopt}}|^2}}{\frac{T_{\text{eff0}} - T_{\text{effmin}} \left(|\Gamma_{\text{Qopt}}|^2 + 1 \right) + T_{\text{eff}} |\Gamma_{\text{Qopt}}|^2}{|\Gamma_{\text{Qopt}}|^2}} \\
 &= |\Gamma_{\text{Qopt}}| \frac{\sqrt{(T_{\text{eff}} - T_{\text{effmin}}) \left(T_{\text{eff0}} - T_{\text{effmin}} + (T_{\text{eff}} - T_{\text{eff0}}) |\Gamma_{\text{Qopt}}|^2 \right)}}{T_{\text{eff0}} - T_{\text{effmin}} + (T_{\text{eff}} - T_{\text{effmin}}) |\Gamma_{\text{Qopt}}|^2}.
 \end{aligned} \tag{13.50}$$

Die effektive Rauschtemperatur berechnet man mit (13.19) zu

$$\begin{aligned}
 T_{\text{eff}} &= \frac{|\underline{\Gamma}_Q|^2 \frac{R_{1,1}}{kB} + \underline{\Gamma}_Q \frac{R_{1,2}}{kB} + \underline{\Gamma}_Q^* \frac{R_{1,2}^*}{kB} + \frac{R_{2,2}}{kB}}{1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2} \\
 &= \frac{|\underline{\Gamma}_Q|^2 \frac{T_{\text{eff}0} - T_{\text{effmin}} (|\underline{\Gamma}_{\text{Qopt}}|^2 + 1)}{|\underline{\Gamma}_{\text{Qopt}}|^2} + \underline{\Gamma}_Q \frac{T_{\text{effmin}} - T_{\text{eff}0}}{\underline{\Gamma}_{\text{Qopt}}} + \underline{\Gamma}_Q^* \frac{T_{\text{effmin}} - T_{\text{eff}0}}{\underline{\Gamma}_{\text{Qopt}}^*} + T_{\text{eff}0}}{1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2} \\
 &= T_{\text{effmin}} + (T_{\text{eff}0} - T_{\text{effmin}}) \frac{|\underline{\Gamma}_Q|^2 - (\underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_{\text{Qopt}}^* + \underline{\Gamma}_Q^* \underline{\Gamma}_{\text{Qopt}}) + |\underline{\Gamma}_{\text{Qopt}}|^2}{|\underline{\Gamma}_{\text{Qopt}}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2)} \\
 &= T_{\text{effmin}} + (T_{\text{eff}0} - T_{\text{effmin}}) \frac{|\underline{\Gamma}_Q - \underline{\Gamma}_{\text{Qopt}}|^2}{|\underline{\Gamma}_{\text{Qopt}}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2)}.
 \end{aligned} \tag{13.51}$$

Abbildung 13.13 zeigt einige exemplarische Kreise konstanter effektiver Rauschtemperatur T_{eff} . Die Mittelpunkte \underline{M}_Q aller Kreise liegen auf einer Geraden durch den optimalen Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_{\text{Qopt}}$ und den Ursprung, da die Argumente aller Mittelpunkte gleich sind:

$$\arg(\underline{M}_Q) = \arg(\underline{\Gamma}_{\text{Qopt}}).$$

Für sehr große effektive Rauschtemperaturen T_{eff} konvergieren die Kreise gegen den Einheitskreis. Beim Entwurf eines Hochfrequenzverstärkers gilt es einen von der Anwendung abhängigen günstigen Kompromiss zwischen Leistungsanpassung und Rauschanpassung, das heißt zwischen Gewinn und effektiver Rauschtemperatur T_{eff} des Hochfrequenzverstärkers zu finden.

Wenn man alternativ von der minimalen Rauschzahl

$$F_{\text{min}} = 1 + \frac{T_{\text{effmin}}}{T_0} \tag{13.52}$$

und der Rauschzahl

$$F_0 = 1 + \frac{T_{\text{eff}0}}{T_0} \tag{13.53}$$

bei Abschluss mit einer reflexionsfreien Quelle ausgeht, erhält man für den Kreis konstanter Rauschzahl F den Mittelpunkt

$$\underline{M}_Q = \frac{(F_0 - F_{\text{min}}) \underline{\Gamma}_{\text{Qopt}}}{F_0 - F_{\text{min}} + (F - F_{\text{min}}) |\underline{\Gamma}_{\text{Qopt}}|^2} \tag{13.54}$$

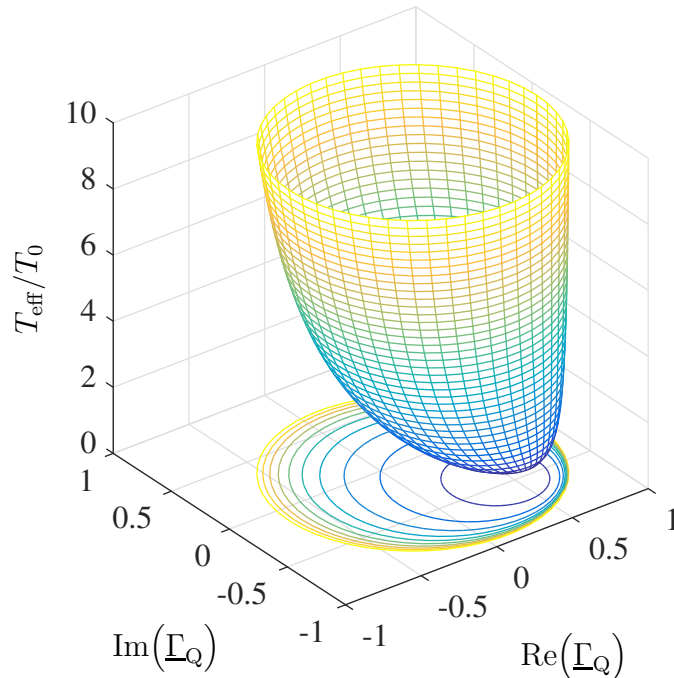


Abbildung 13.13.: Effektive Rauschtemperatur T_{eff} als Funktion des Quellenreflexionsfaktors $\underline{\Gamma}_Q$ mit $\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}} = 0,5 - j0,5$, $T_{\text{effmin}} = 0,5T_0$ und $T_{\text{eff0}} = 2T_0$.

und den Radius

$$R_Q = |\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}| \sqrt{\frac{(F - F_{\text{min}}) \left(F_0 - F_{\text{min}} + (F - F_0) |\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}|^2 \right)}{F_0 - F_{\text{min}} + (F - F_{\text{min}}) |\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}|^2}}, \quad (13.55)$$

siehe (13.24). Für die Rauschzahl folgt

$$F = F_{\text{min}} + (F_0 - F_{\text{min}}) \frac{|\underline{\Gamma}_Q - \underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}|^2}{|\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}|^2 \left(1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2 \right)}. \quad (13.56)$$

Aufgabe 13.3 Es werden thermisch rauschende Zweitore homogener Temperatur T betrachtet. Vereinfachend entspreche die Temperatur T der Bezugstemperatur T_0 . Berechnen Sie die bei Rauschanpassung erzielbare minimale Rauschzahl F_{min} als Funktion der Streuparameter und des Stabilitätsfaktors K !

13.3.6. Messen der Rauschparameter

Zum vollständigen Charakterisieren des Rauschverhaltens eines Zweitores ist es nicht ausreichend, nur die effektive Rauschtemperatur T_{eff} an einer einzigen Quelle mit Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_Q$ zu kennen. Man muss vielmehr die Rauschparameter minimale effektive Rauschtemperatur T_{effmin} , optimaler Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}$ und effektive Rauschtemperatur T_{eff0} bei Abschluss mit einer reflexionsfreien Quelle kennen, zu deren messtechnischem Bestimmen Rauschzahlmessungen bei verschiedenen Quellenreflexionsfaktoren erforderlich sind. Intuitiv würde man

- zunächst experimentell den optimalen Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}$ bestimmen,
- dann die minimale effektive Rauschtemperatur T_{effmin} an einer Quelle mit dem optimalen Quellenreflexionsfaktor $\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}$ messen und
- schließlich die effektive Rauschtemperatur T_{eff0} bei Abschluss mit einer reflexionsfreien Quelle $\underline{\Gamma}_Q = 0$ messen.

Eleganter ist es von (13.19) auszugehen. Man erhält eine in den vier reellen Rauschparametern $R_{1,1}$, $\text{Re}(\underline{R}_{1,2})$, $\text{Im}(\underline{R}_{1,2})$ und $R_{2,2}$ lineare Gleichung

$$kT_{\text{eff}}B \left(1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2\right) = |\underline{\Gamma}_Q|^2 R_{1,1} + 2 \text{Re}(\underline{\Gamma}_Q) \text{Re}(\underline{R}_{1,2}) - 2 \text{Im}(\underline{\Gamma}_Q) \text{Im}(\underline{R}_{1,2}) + R_{2,2}.$$

Durch Messen der Rauschtemperaturen T_{eff1} , T_{eff2} , T_{eff3} und T_{eff4} an vier verschiedenen Quellenreflexionsfaktoren $\underline{\Gamma}_{Q1}$, $\underline{\Gamma}_{Q2}$, $\underline{\Gamma}_{Q3}$ und $\underline{\Gamma}_{Q4}$ gewinnt man vier Gleichungen für diese vier Unbekannten

$$\begin{pmatrix} kT_{\text{eff1}}B \left(1 - |\underline{\Gamma}_{Q1}|^2\right) \\ kT_{\text{eff2}}B \left(1 - |\underline{\Gamma}_{Q2}|^2\right) \\ kT_{\text{eff3}}B \left(1 - |\underline{\Gamma}_{Q3}|^2\right) \\ kT_{\text{eff4}}B \left(1 - |\underline{\Gamma}_{Q4}|^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\underline{\Gamma}_{Q1}|^2 & 2 \text{Re}(\underline{\Gamma}_{Q1}) & -2 \text{Im}(\underline{\Gamma}_{Q1}) & 1 \\ |\underline{\Gamma}_{Q2}|^2 & 2 \text{Re}(\underline{\Gamma}_{Q2}) & -2 \text{Im}(\underline{\Gamma}_{Q2}) & 1 \\ |\underline{\Gamma}_{Q3}|^2 & 2 \text{Re}(\underline{\Gamma}_{Q3}) & -2 \text{Im}(\underline{\Gamma}_{Q3}) & 1 \\ |\underline{\Gamma}_{Q4}|^2 & 2 \text{Re}(\underline{\Gamma}_{Q4}) & -2 \text{Im}(\underline{\Gamma}_{Q4}) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{1,1} \\ \text{Re}(\underline{R}_{1,2}) \\ \text{Im}(\underline{R}_{1,2}) \\ R_{2,2} \end{pmatrix}, \quad (13.57)$$

aus denen sich die Rauschparameter leicht berechnen lassen. Falls mehr als die minimal erforderliche Anzahl an Messungen durchgeführt wird, kann man die zusätzlichen Messwerte im Rahmen einer Ausgleichsrechnung zur Messfehlerreduktion nutzen [Kay93; MS00]. Mit (13.43), (13.44) und (13.45) kann man dann auch die Rauschparameter minimale effektive Rauschtemperatur T_{effmin} , optimaler Quellenreflexionsfaktor Γ_{Qopt} und effektive Rauschtemperatur T_{eff0} bei Abschluss mit einer reflexionsfreien Quelle berechnen.

Teil III.
Anhänge

Anhang A.

Nichtlineare Systeme

A.1. Potenzreihenansatz

Schwerpunkt des vorliegenden Buchs ist die Theorie der linearen Systeme. Reale Systeme wie beispielsweise Verstärker sind aber typischerweise zumindest leicht nichtlinear. Im Ausgangssignal nichtlinearer Systeme können Signalanteile bei Kreisfrequenzen auftreten, die im Eingangssignal nicht vorhanden waren. Derartige nichtlineare Effekte sind häufig störend und ihre Minimierung motiviert viele der teilweise komplexen Architekturen hochfrequenztechnischer Systeme. Andererseits können nichtlineare Systeme gewinnbringend zur Signaldetektion und zum Umsetzen von Signalen in andere Frequenzbereiche genutzt werden. Im Folgenden sollen die Grundzüge der Theorie nichtlinearer Systeme vorgestellt werden. Die Notation weicht zwangsläufig von der zum Beschreiben linearer Systeme verwendeten Notation ab. Auch aus diesem Grund wurde die Behandlung nichtlinearer Systeme in den Anhang ausgegliedert.

Im Folgenden sollen nur statische nichtlineare Systeme mit einem einzigen Eingang und einem einzigen Ausgang betrachtet werden. Statische nichtlineare Systeme haben kein Gedächtnis, so dass das Ausgangssignal $y(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt t eine nichtlineare Funktion des Eingangssignals $x(t)$ zum selben Zeitpunkt t ist:

$$y(t) = f(x(t)). \quad (\text{A.1})$$

Diese Kennlinie kann graphisch dargestellt werden, siehe Abbildung [A.1](#).

Für die Analyse statischer nichtlinearer Systeme entwickelt man die Kennlinie in eine Taylor-Reihe und erhält so die Potenzreihe

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n(t). \quad (\text{A.2})$$

Wenn man vereinfachend den Nullpunkt $x(t) = 0$ als Entwicklungspunkt verwen-

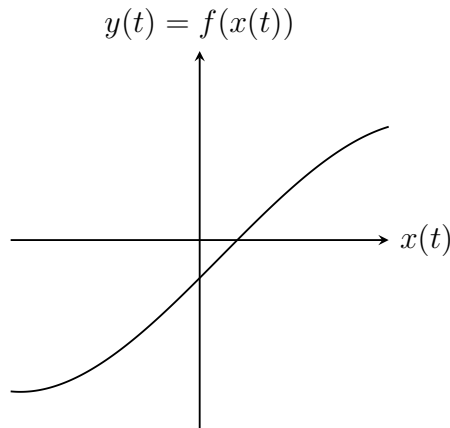


Abbildung A.1.: Nichtlineare Kennlinie

det, ergeben sich die Koeffizienten zu

$$c_n = \begin{cases} f(0) & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \right|_{x=0} & \text{für } n \geq 1 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

A.2. Eintonanregung

A.2.1. Analyse der Eintonanregung

Zunächst werde der Fall harmonischer, das heißt sinusförmiger Anregung der Kreisfrequenz ω_0 und der Eingangsamplitude X betrachtet. Die Nullphase ist keine physikalische Eigenschaft, sondern ergibt sich im Rahmen der Modellbildung durch Wahl des Nullpunktes der Zeitmessung. Es genügt daher, nur eine einzige willkürliche Nullphase zu betrachten. Es wird das Eingangssignal

$$x(t) = X \cos(\omega_0 t) = X \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \quad (\text{A.4})$$

betrachtet. Die Grundwelle der Kreisfrequenz ω_0 wird auch als erste Harmonische bezeichnet.

Für die zweite Potenz folgt

$$\begin{aligned} x^2(t) &= X^2 \frac{1}{4} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})^2 = X^2 \frac{1}{4} (e^{j2\omega_0 t} + 2 + e^{-j2\omega_0 t}) \\ &= X^2 \frac{1}{2} + X^2 \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t). \end{aligned}$$

Neben einem Gleichanteil entsteht eine erste Oberwelle der Kreisfrequenz $2\omega_0$, die auch als zweite Harmonische bezeichnet wird.

Allgemein gilt für die n -te Potenz¹

$$\begin{aligned} x^n(t) &= X^n \frac{1}{2^n} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})^n = X^n \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \underbrace{e^{jm\omega_0 t} e^{-j(n-m)\omega_0 t}}_{e^{j(2m-n)\omega_0 t}} \\ &= X^n \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{1}{2} (e^{j(2m-n)\omega_0 t} + e^{-j(2m-n)\omega_0 t}) \\ &= X^n \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \cos((2m-n)\omega_0 t). \end{aligned}$$

Die höchste entstehende Oberwelle ist die $(n-1)$ -te Oberwelle, die auch als n -te Harmonische bezeichnet wird.

Einsetzen der Potenzen in die Potenzreihe (A.2) ergibt das Ausgangssignal

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \cos((2m-n)\omega_0 t) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m-l} X^{2m-l} \frac{1}{2^{2m-l}} \binom{2m-l}{m} \cos(l\omega_0 t) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} X^{2m} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=l}^{\infty} c_{2m-l} X^{2m-l} \frac{1}{2^{2m-l}} \binom{2m-l}{m} \cos(l\omega_0 t) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+l} X^{2m+l} \frac{1}{2^{2m+l}} \binom{2m+l}{m} \cos(-l\omega_0 t) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} X^{2m} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+l} X^{2m+l} \frac{1}{2^{2m+l}} \binom{2m+l}{m} \cos(l\omega_0 t) \\ &= \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} X^{2m} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m}}_{\text{Gleichanteil}} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+l} X^{2m+l} \frac{1}{2^{2m+l-1}} \binom{2m+l}{m} \cos(l\omega_0 t)}_{l\text{-te Harmonische}}. \end{aligned} \tag{A.5}$$

¹ Für den Binomialkoeffizienten gilt $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$.

A.2.2. Kompressionspunkt

Mit der aus (A.5) abgelesenen Amplitude

$$Y_1 = \left| \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} X^{2m+1} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m+1}{m} \right|$$

der Grundwelle ergibt sich der Amplitudengewinn zu

$$\frac{Y_1}{X} = \left| \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} X^{2m} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m+1}{m} \right|. \quad (\text{A.6})$$

Der Amplitudengewinn ist im Allgemeinen von der Eingangsamplitude X abhängig, das heißt aussteuerungsabhängig. Nur bei linearen Systemen wäre der Amplitudengewinn von der Eingangsamplitude X unabhängig. Bei realen Systemen ergibt sich bei hinreichend großen Eingangsamplituden X aufgrund von Begrenzungseffekten eine Reduktion des Amplitudengewinns. Abbildung A.2 zeigt einen typischen Verlauf des von der Eingangsamplitude X abhängigen Amplitudengewinns.

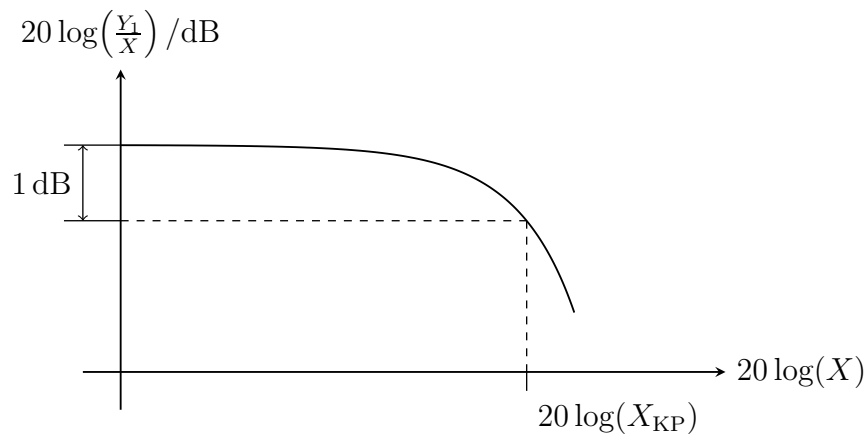


Abbildung A.2.: Amplitudengewinn als Funktion der Eingangsamplitude X an einem Beispiel

Bei kleinen Eingangsamplituden X ist der Amplitudengewinn $|c_1|$. Beim 1 dB-Kompressionspunkt ist der Amplitudengewinn um $-1 \text{ dB} \cong 0,891$ abgefallen. Die Eingangsamplitude, bei der diese Amplitudengewinnreduktion eintritt, bezeichnet man als Eingangskompressionspunkt X_{KP} . Die zugehörige Ausgangsamplitude

$$Y_{\text{KP}} = 0,891 |c_1| X_{\text{KP}} \quad (\text{A.7})$$

bezeichnet man als Ausgangskompressionspunkt.

Für nichtlineare Systeme dritter Ordnung, das heißt für

$$c_n = \begin{cases} c_n & \text{für } n \leq 3 \\ 0 & \text{für } n \geq 4 \end{cases},$$

ergibt sich der Amplitudengewinn zu

$$\frac{Y_1}{X} = \left| c_1 + \frac{3}{4}c_3X^2 \right|. \quad (\text{A.8})$$

c_3 hat normalerweise entgegengesetztes Vorzeichen wie c_1 , so dass der Amplitudengewinn bei steigenden Eingangsamplituden X zunächst abnimmt. Für den Eingangskompressionspunkt erhält man:

$$\begin{aligned} 0,891c_1 &= c_1 + \frac{3}{4}c_3X_{\text{KP}}^2, \\ X_{\text{KP}} &= \sqrt{\frac{4(0,891-1)c_1}{3c_3}} = \sqrt{-0,145\frac{c_1}{c_3}}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A.2.3. Harmonischenabstand

Bei kleinen Eingangsamplituden X sind die höheren Potenzen von X vernachlässigbar und das Ausgangssignal (A.5) kann durch die Kleinsignalnäherung

$$y(t) \approx \underbrace{c_0 + \frac{c_2}{2}X^2}_{\text{Gleichanteil}} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{c_n}{2^{n-1}}X^n \cos(n\omega_0 t)}_{n\text{-te Harmonische}} \quad (\text{A.10})$$

approximiert werden.

Im Gültigkeitsbereich der Kleinsignalnäherung ist die Amplitude

$$Y_n = \frac{|c_n|}{2^{n-1}}X^n \quad (\text{A.11})$$

der n -ten Harmonischen proportional zur n -ten Potenz der Eingangsamplitude X . Bei kleinen Eingangsamplituden X haben die Oberwellen relativ kleine Amplituden Y_n , $n \geq 2$. Die Amplituden Y_n , $n \geq 2$, der Oberwellen nehmen jedoch bei steigender Eingangsamplitude X stärker zu als die Amplitude Y_1 der Grundwelle und würden bei hinreichend großen Eingangsamplituden X , wenn die Kleinsignalnäherung bei derartig großen Eingangsamplituden X noch gelten würde, sogar größer als die Amplitude Y_1 der Grundwelle werden.

Der n -te Harmonischenabstand wird als das Verhältnis der Amplitude Y_1 der Grundwelle zur Amplitude Y_n der n -ten Harmonischen definiert:

$$H_n = \frac{Y_1}{Y_n}. \quad (\text{A.12})$$

Im Gültigkeitsbereich der Kleinsignalnäherung ist der n -te Harmonischenabstand

$$H_n = \frac{|c_1| X}{\frac{|c_n|}{2^{n-1}} X^n} = \left| \frac{c_1}{c_n} \right| \frac{2^{n-1}}{X^{n-1}}. \quad (\text{A.13})$$

Der erste Harmonischenabstand H_1 ist definitionsgemäß eins, das heißt 0 dB. Die Harmonischenabstände H_n nehmen mit steigender Eingangsamplitude X ab, siehe Abbildung A.3. In doppellogarithmischer Darstellung ist der Graph des n -ten Harmonischenabstands H_n eine Gerade mit der Steigung $-n$.

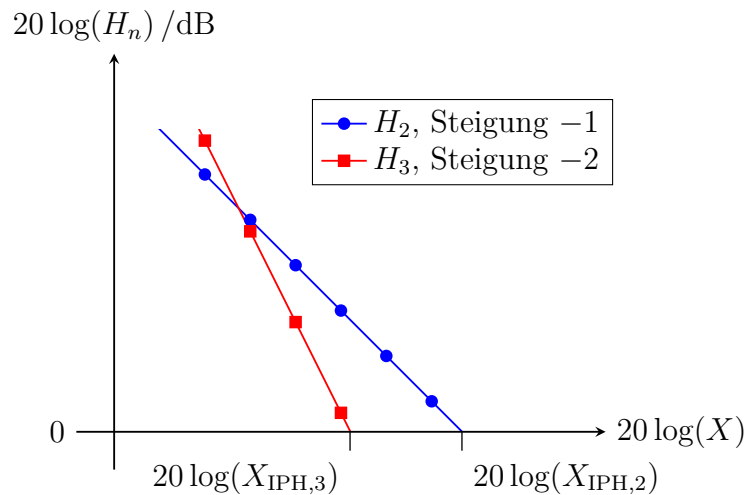


Abbildung A.3.: Harmonischenabstände H_n als Funktionen der Eingangsamplitude X an einem Beispiel

Am Interceptpunkt der Harmonischen wird der unter Verwenden der Kleinsignalnäherung berechnete Harmonischenabstand H_n eins, das heißt 0 dB. Der eingangsseitige Interceptpunkt der n -ten Harmonischen ergibt sich zu

$$X_{\text{IPH},n} = 2^{n-1} \sqrt[n]{\left| \frac{c_1}{c_n} \right|}. \quad (\text{A.14})$$

Aus dem n -ten Harmonischenabstand H_n bei einer Eingangsamplitude X kann man den eingangsseitigen Interceptpunkt der n -ten Harmonischen gemäß

$$X_{\text{IPH},n} = \sqrt[n]{H_n X} \quad (\text{A.15})$$

berechnen. Der ausgangsseitige Interceptpunkt der n -ten Harmonischen ergibt sich zu

$$Y_{\text{IPH},n} = |c_1| X_{\text{IPH},n} = 2 |c_1| \sqrt[n-1]{\left| \frac{c_1}{c_n} \right|}. \quad (\text{A.16})$$

Die bei Eintonanregung eines nichtlinearen Systems auftretenden Effekte werden in der Hochfrequenztechnik unter anderem in Signaldetektoren und Frequenzvervielfachern genutzt. Unerwünschte auftretende Oberwellen können in der Regel einfach durch Filter unterdrückt werden, da die Bandbreiten der Nutzsignale typischerweise wesentlich kleiner als eine Oktave sind.

A.3. Zweitonanregung

A.3.1. Analyse der Zweitonanregung

Im Allgemeinen wird das Eingangssignal Signalanteile bei vielen verschiedenen Kreisfrequenzen enthalten. Zum Studium der grundsätzlichen Effekte wird der einfachste Fall, dass das Eingangssignal aus der Überlagerung zweier harmonischer Signale gleicher Amplitude X aber unterschiedlicher Kreisfrequenzen besteht, studiert. Die Nullphasen sind auch hier keine physikalische Eigenschaft, sondern ergeben sich im Rahmen der Modellbildung durch Wahl des Nullpunktes der Zeitmessung. Mit den Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 der beiden Anteile gelte für das Eingangssignal:

$$x(t) = X (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) = X \frac{1}{2} (e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t} + e^{-j\omega_2 t} + e^{-j\omega_1 t}). \quad (\text{A.17})$$

Für die zweite Potenz folgt

$$\begin{aligned} x^2(t) &= X^2 \frac{1}{4} (e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t} + e^{-j\omega_2 t} + e^{-j\omega_1 t})^2 \\ &= X^2 \frac{1}{4} (4 + e^{j2\omega_1 t} + 2e^{j(\omega_1 + \omega_2)t} + 2e^{j(\omega_1 - \omega_2)t} + e^{j2\omega_2 t} \\ &\quad + e^{-j2\omega_1 t} + 2e^{-j(\omega_1 + \omega_2)t} + 2e^{-j(\omega_1 - \omega_2)t} + e^{-j2\omega_2 t}) \\ &= X^2 + X^2 \frac{1}{2} \cos(2\omega_1 t) + X^2 \cos((\omega_1 + \omega_2)t) \\ &\quad + X^2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t) + X^2 \frac{1}{2} \cos(2\omega_2 t). \end{aligned}$$

Es entstehen Intermodulationsprodukte zweiter Ordnung.

Allgemein gilt für die n -te Potenz²

$$\begin{aligned} x^n(t) &= X^n \frac{1}{2^n} \left(e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t} + e^{-j\omega_2 t} + e^{-j\omega_1 t} \right)^n \\ &= X^n \frac{1}{2^n} \sum_{m_1+m_2+m_3+m_4=n} \binom{n}{m_1, m_2, m_3, m_4} e^{jm_1\omega_1 t} e^{jm_2\omega_2 t} e^{-jm_3\omega_2 t} e^{-jm_4\omega_1 t} . \end{aligned}$$

Es entstehen Intermodulationsprodukte n -ter Ordnung.

Einsetzen der Potenzen in die Potenzreihe (A.2) ergibt unter Verwenden der Kleinsignalnäherung die Approximation

$$\begin{aligned} y(t) &\approx c_0 + c_2 X^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \left(e^{jm\omega_1 t} e^{j(n-m)\omega_2 t} \right. \\ &\quad \left. + e^{jm\omega_1 t} e^{-j(n-m)\omega_2 t} + e^{-jm\omega_1 t} e^{j(n-m)\omega_2 t} + e^{-jm\omega_1 t} e^{-j(n-m)\omega_2 t} \right) \\ &= c_0 + c_2 X^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{c_n}{2^{n-1}} \binom{n}{m} X^n \left(\cos((m\omega_1 + (n-m)\omega_2) t) \right. \\ &\quad \left. + \cos((m\omega_1 - (n-m)\omega_2) t) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

des Ausgangssignals. Die Intermodulationsprodukte haben im Gültigkeitsbereich der Kleinsignalnäherung die Amplituden

$$Y_{n,m} = \frac{|c_n|}{2^{n-1}} \binom{n}{m} X^n. \quad (\text{A.19})$$

A.3.2. Intermodulationsabstand

Der Intermodulationsabstand wird als Verhältnis der Amplitude Y_1 der Grundwelle zur Amplitude $Y_{n,m}$ des Intermodulationsproduktes definiert:

$$I_{n,m} = \frac{Y_1}{Y_{n,m}}. \quad (\text{A.20})$$

Im Gültigkeitsbereich der Kleinsignalnäherung ist der Intermodulationsabstand

$$I_{n,m} = \frac{|c_1| X}{\frac{|c_n|}{2^{n-1}} \binom{n}{m} X^n} = \frac{|c_1|}{\frac{|c_n|}{2^{n-1}} \binom{n}{m} X^{n-1}} = \left| \frac{c_1}{c_n} \right| \frac{2^{n-1}}{\binom{n}{m} X^{n-1}}. \quad (\text{A.21})$$

Es besteht der Zusammenhang

$$H_n = \binom{n}{m} I_{n,m} \quad (\text{A.22})$$

² Der Multinomialkoeffizient ist als $\binom{n}{m_1, \dots, m_K} = \frac{n!}{m_1! \dots m_K!}$ definiert, wobei $\sum_{k=1}^K m_k = n$ gilt.

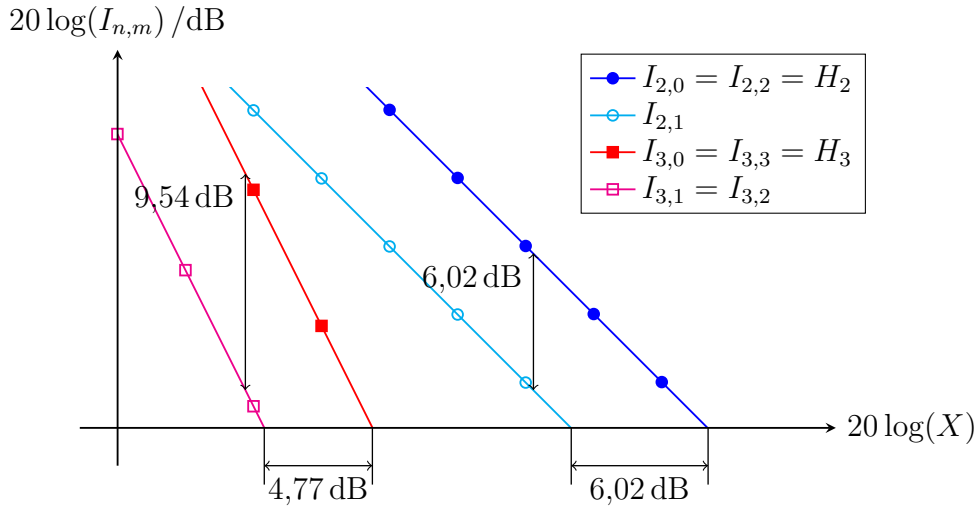


Abbildung A.4.: Intermodulationsabstände $I_{n,m}$ als Funktionen der Eingangsamplitude X an einem Beispiel

zwischen den Harmonischenabständen H_n gemäß (A.13) und den Intermodulationsabständen $I_{n,m}$, siehe Abbildung A.4.

In vielen Anwendungen sind die Intermodulationsprodukte dritter Ordnung besonders kritisch. Beispielsweise erzeugen Störsignale der sich bei kleinem $\Delta\omega$ nur geringfügig von der Kreisfrequenz ω_0 eines Nutzsymbols unterscheidenden Kreisfrequenzen $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$ und $\omega_2 = \omega_0 + 2\Delta\omega$ ein Intermodulationsprodukt dritter Ordnung der gleichen Kreisfrequenz $2\omega_1 - \omega_2 = \omega_0$ wie das Nutzsymbols. Der hier relevante Intermodulationsabstand dritter Ordnung ist

$$I_{3,2} = I_{3,1} = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\hat{=}-9,54 \text{ dB}} H_3.$$

Am Interceptpunkt wird der unter Verwenden der Kleinsignalnäherung berechnete Intermodulationsabstand $I_{n,m}$ eins, das heißt 0 dB. Der eingangsseitige Interceptpunkt ergibt sich zu

$$X_{\text{IP},n,m} = 2^{n-1} \sqrt{\left| \frac{c_1}{c_n} \right| \frac{1}{\binom{n}{m}}}. \quad (\text{A.23})$$

Speziell für den in der Praxis häufig zum quantitativen Beurteilen der Nichtlinearität verwendeten eingangsseitigen Interceptpunkt dritter Ordnung gilt

$$X_{\text{IP},3,1} = \sqrt{\left| \frac{4c_1}{3c_3} \right|}. \quad (\text{A.24})$$

Aus dem Intermodulationsabstand $I_{n,m}$ bei einer Eingangsamplitude X kann man den eingangsseitigen Interceptpunkt gemäß

$$X_{\text{IP},n,m} = \sqrt[n-1]{I_{n,m}} X \quad (\text{A.25})$$

berechnen.

Es besteht der Zusammenhang

$$X_{\text{IPH},n} = \sqrt[n-1]{\binom{n}{m}} X_{\text{IP},n,m} \quad (\text{A.26})$$

zwischen den eingangsseitigen Interceptpunkten der Harmonischen $X_{\text{IPH},n}$ gemäß (A.14) und den eingangsseitigen Interceptpunkten $X_{\text{IP},n,m}$, siehe Abbildung A.4.

Der ausgangsseitige Interceptpunkt ergibt sich zu

$$Y_{\text{IP},n,m} = |c_1| X_{\text{IP},n,m} = 2 |c_1| \sqrt[n-1]{\left| \frac{c_1}{c_n} \right| \frac{1}{\binom{n}{m}}}. \quad (\text{A.27})$$

Speziell für den in der Praxis häufig zum quantitativen Beurteilen der Nichtlinearität verwendeten ausgangsseitigen Interceptpunkt dritter Ordnung gilt

$$Y_{\text{IP},3,1} = \sqrt{\left| \frac{4c_1^3}{3c_3} \right|}. \quad (\text{A.28})$$

Für nichtlineare Systeme dritter Ordnung folgt aus (A.9) der Zusammenhang

$$X_{\text{KP}} = \underbrace{\sqrt{0,1087}}_{\hat{=}-9,64 \text{ dB}} X_{\text{IP},3,1} \quad (\text{A.29})$$

zwischen dem Eingangskompressionspunkt X_{KP} und dem eingangsseitigen Interceptpunkt dritter Ordnung $X_{\text{IP},3,1}$.

A.4. Dynamikbereich

Ziel ist es, ein Eingangssignal in einem System möglichst störungsfrei, das heißt linear zu verarbeiten. Neben den durch das nichtlineare Verhalten des Systems erzeugten Störungen in Form von Intermodulationsprodukten gibt es in der Praxis auch noch Störungen in Form von additivem Rauschen. Die störende Wirkung der Intermodulationsprodukte wird durch die Intermodulationsabstände $I_{m,n}$ quantifiziert. Die Amplitude Y_{R} des dem Ausgangssignal überlagerten Rauschsignals ist

eine Zufallsvariable. Da die störende Wirkung auf der zum Quadrat der Amplitude Y_R proportionalen Leistung des Rauschsignals beruht, ist es sinnvoll die Wurzel des zweiten Moments der Rauschamplitude Y_R als mittlere Rauschamplitude in der quantitativen Bewertung zu verwenden. Man definiert den Rauschabstand

$$R = \frac{Y_1}{\sqrt{\mathbb{E}\{Y_R^2\}}}. \quad (\text{A.30})$$

Der Rauschabstand nimmt mit wachsender Eingangsamplitude X zu, siehe Abbildung A.5.

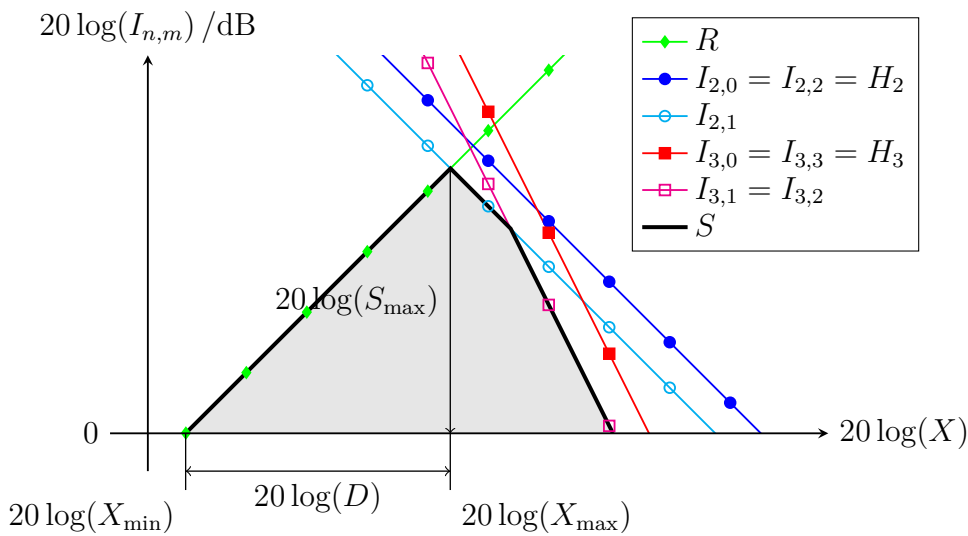


Abbildung A.5.: Rauschabstand R und Intermodulationsabstände $I_{n,m}$ als Funktionen der Eingangsamplitude X an einem Beispiel

Die störende Wirkung resultiert im Wesentlichen aus dem stärksten Störsignal. Es ist daher sinnvoll, den Störabstand als das Minimum von Rauschabstand R und allen Intermodulationsabständen $I_{n,m}$ zu definieren:

$$S = \min\{R, I_{2,0}, I_{2,1}, I_{2,2}, I_{3,0}, I_{3,1}, I_{3,3}, \dots\}. \quad (\text{A.31})$$

Da der Rauschabstand R und die Intermodulationsabstände $I_{n,m}$ von der Eingangsamplitude X abhängen, hängt der Störabstand S auch von der Eingangsamplitude X ab. Bei einer bestimmten Eingangsamplitude X_{\max} wird der maximale Störabstand S_{\max} erzielt. Für Eingangsamplituden X die größer als die maximale Eingangsamplitude X_{\max} sind, gibt es Intermodulationsprodukte die stärker als das Rauschen sind. Die maximale Eingangsamplitude X_{\max} ist daher die größtmögliche Eingangsamplitude X , bei der das System noch in guter Näherung linear

ist. Bei der Eingangsamplitude X_{\min} wird der Rauschabstand R eins, das heißt 0 dB. Für Eingangsamplituden X , die kleiner als die minimale Eingangsamplitude X_{\min} sind, ist das Rauschen stärker als das Ausgangssignal. Für die minimale Eingangsamplitude gilt

$$X_{\min} = \frac{X_{\max}}{S_{\max}},$$

siehe Abbildung A.5. Man definiert den Dynamikbereich³

$$D = \frac{X_{\max}}{X_{\min}} = S_{\max}. \quad (\text{A.32})$$

Wenn das Rauschen im Wesentlichen im nichtlinearen System selbst erzeugt wird und nicht bereits im Eingangssignal enthalten war, ändert sich die mittlere Rauschamplitude bei Vorschalten eines linearen Dämpfungsglieds nicht. Man kann nun eine Eingangsamplitude X , die in einer konkreten Anwendung größer als die maximale Eingangsamplitude X_{\max} des nichtlinearen Systems ist, durch das Vorschalten eines Dämpfungsglieds auf die maximale Eingangsamplitude X_{\max} reduzieren und so einen maximalen Störabstand S_{\max} erzielen.

A.5. Kaskade nichtlinearer Systeme

Einsetzen der Kennlinie des ersten Systems

$$y^{(1)}(t) = f^{(1)}(x^{(1)}(t)) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l^{(1)} (x^{(1)}(t))^l \quad (\text{A.33})$$

in die Kennlinie des zweiten Systems

$$y^{(2)}(t) = f^{(2)}(x^{(2)}(t)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^{(2)} (x^{(2)}(t))^m \quad (\text{A.34})$$

ergibt die Kennlinie der Kaskade

$$y(t) = f(x(t)) = f^{(2)}(f^{(1)}(x(t))) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n(t), \quad (\text{A.35})$$

siehe Abbildung A.6. Falls die Systeme wie in der Hochfrequenztechnik üblich wechselspannungsgekoppelt sind, sind die Koeffizienten der konstanten Terme

$$c_0^{(2)} = c_0^{(1)} = 0.$$

³ Genauer handelt es sich bei dieser Definition um den sogenannten Spurious Free Dynamic Range (SFDR).

Dann ergeben sich die Koeffizienten der Kaskade wie folgt:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= 0 \\
 c_1 &= c_1^{(2)} c_1^{(1)}, \\
 c_2 &= c_1^{(2)} c_2^{(1)} + c_2^{(2)} c_1^{(1)2}, \\
 c_3 &= c_1^{(2)} c_3^{(1)} + c_3^{(2)} c_1^{(1)3} + 2c_2^{(2)} c_2^{(1)} c_1^{(1)}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

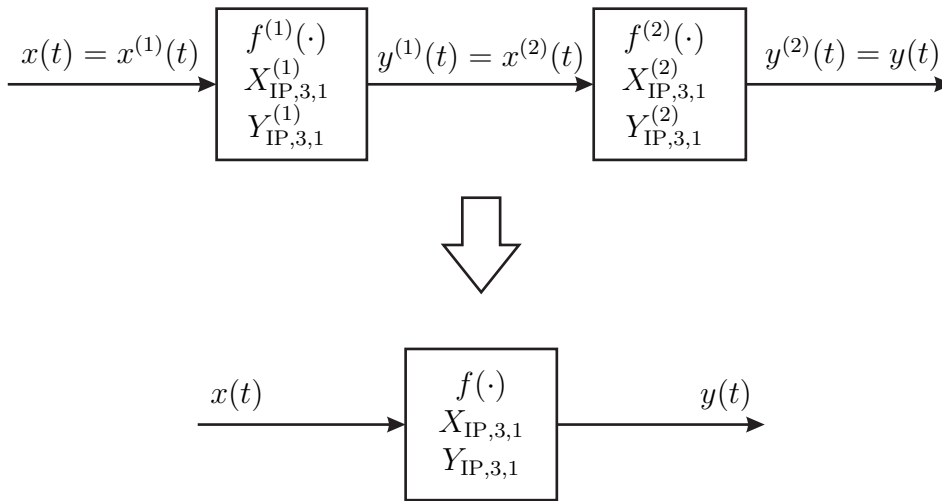


Abbildung A.6.: Kaskade nichtlinearer Systeme

Im Folgenden soll als wichtiges Maß zum quantitativen Beurteilen der Nichtlinearität der Interceptpunkt dritter Ordnung der Kaskade bestimmt werden. Der eingangsseitige Interceptpunkt dritter Ordnung der Kaskade ist

$$X_{\text{IP},3,1} = \sqrt{\left| \frac{4c_1}{3c_3} \right|} = \sqrt{\left| \frac{4c_1^{(2)} c_1^{(1)}}{3 \left(c_1^{(2)} c_3^{(1)} + c_3^{(2)} c_1^{(1)3} + 2c_2^{(2)} c_2^{(1)} c_1^{(1)} \right)} \right|},$$

siehe (A.24). Es folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{X_{\text{IP},3,1}} &= \sqrt{\left| \frac{3c_3^{(1)}}{4c_1^{(1)}} + \frac{3c_3^{(2)}c_1^{(1)2}}{4c_1^{(2)}} + 2\frac{3c_2^{(2)}c_2^{(1)}}{4c_1^{(2)}} \right|} \\
 &\approx \sqrt{\left| \frac{3c_3^{(1)}}{4c_1^{(1)}} \right| + \left| \frac{3c_3^{(2)}c_1^{(1)2}}{4c_1^{(2)}} \right|} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{X_{\text{IP},3,1}^{(1)2}} + \frac{c_1^{(1)2}}{X_{\text{IP},3,1}^{(2)2}}}.
 \end{aligned}$$

Diese Approximation entspricht der Vorstellung, dass keine weiteren Intermodulationsprodukte durch Wechselwirkungen zwischen den vom ersten System erzeugten Intermodulationsprodukten im zweiten System entstehen. Aufgelöst nach dem eingangsseitigen Interceptpunkt dritter Ordnung der Kaskade erhält man

$$X_{\text{IP},3,1} \approx \sqrt{\frac{1}{X_{\text{IP},3,1}^{(1)2}} + \frac{c_1^{(1)2}}{X_{\text{IP},3,1}^{(2)2}}}. \quad (\text{A.36})$$

Für den ausgangsseitigen Interceptpunkt dritter Ordnung der Kaskade folgt mit (A.28)

$$\begin{aligned}
 Y_{\text{IP},3,1} &= |c_1| X_{\text{IP},3,1} = |c_1^{(2)}| |c_1^{(1)}| X_{\text{IP},3,1} \\
 &\approx \sqrt{\frac{1}{c_1^{(2)2} c_1^{(1)2}} \left(\frac{1}{X_{\text{IP},3,1}^{(1)2}} + \frac{c_1^{(1)2}}{X_{\text{IP},3,1}^{(2)2}} \right)}^{-1} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{c_1^{(2)2} c_1^{(1)2}} \left(\frac{c_1^{(1)2}}{Y_{\text{IP},3,1}^{(1)2}} + \frac{c_1^{(2)2} c_1^{(1)2}}{Y_{\text{IP},3,1}^{(2)2}} \right)}^{-1} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{c_1^{(2)2} Y_{\text{IP},3,1}^{(1)2}} + \frac{1}{Y_{\text{IP},3,1}^{(2)2}}}. \quad (\text{A.37})
 \end{aligned}$$

In einer Hochfrequenzverstärkerkaskade dominiert im allgemeinen der Interceptpunkt des letzten Hochfrequenzverstärkers der Kaskade. Die Anforderungen an die Großsignalfestigkeit steigen zum Ende der Hochfrequenzverstärkerkaskade hin an. Im Gegensatz dazu steigen die Anforderungen bezüglich der Rauscharmut

zum Anfang der Hochfrequenzverstärkerkaskade hin an, siehe (13.33). Weiterhin erkennt man, dass man den eingangsseitigen Interceptpunkt durch Vorschalten eines linearen Dämpfungsgliedes erhöhen kann. Der ausgangsseitige Interceptpunkt bleibt dabei jedoch unverändert.

A.6. Mischer

A.6.1. Idealer Mischer

Aufgabe eines Mixers ist es, ein Eingangssignal in einen anderen Frequenzbereich umzusetzen. Mixer werden beispielsweise in Sendern und in Empfängern eingesetzt. Ein idealer Mischer entspricht einem Multiplizierer, den man als nicht-lineares Dreitor modellieren kann, siehe Abbildung A.7. Das Ausgangssignal

$$y(t) = x_E(t) x_O(t) \quad (\text{A.38})$$

ist das Produkt aus Eingangssignal $x_E(t)$ und Oszillatorsignal $x_O(t)$.

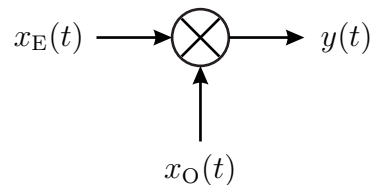


Abbildung A.7.: Idealer Mischer

Die Wirkungsweise eines idealen Mixers soll anhand eines harmonischen Eingangssignals

$$x_E(t) = X \cos(\omega_E t) = X \frac{1}{2} (e^{j\omega_E t} + e^{-j\omega_E t})$$

und eines harmonischen Oszillatorsignals

$$x_O(t) = 2 \cos(\omega_O t) = e^{j\omega_O t} + e^{-j\omega_O t}$$

untersucht werden. Das Ausgangssignal ergibt sich in diesem Fall zu

$$\begin{aligned} y(t) &= X \frac{1}{2} (e^{j\omega_E t} + e^{-j\omega_E t}) (e^{j\omega_O t} + e^{-j\omega_O t}) \\ &= X \frac{1}{2} (e^{j(\omega_E + \omega_O)t} + e^{j(\omega_E - \omega_O)t} + e^{-j(\omega_E + \omega_O)t} + e^{-j(\omega_E - \omega_O)t}) \\ &= X \cos((\omega_E + \omega_O)t) + X \cos((\omega_E - \omega_O)t). \end{aligned}$$

Es entstehen Signalanteile bei der Summe $\omega_E + \omega_O$ und bei der Differenz $\omega_E - \omega_O$ der Kreisfrequenzen. Üblicherweise wird nur einer der beiden entstehenden Signalanteile weiter genutzt und der andere durch Filter unterdrückt.

A.6.2. Additiver Mischer

Analoge Multiplizierer für hochfrequente Signale lassen sich nur schwer realisieren. Man behilft sich mit Mischern, die neben weiteren durch Filter zu unterdrückenden störenden Signalanteilen auch den gewünschten Signalanteil erzeugen. Der in Abbildung A.8 gezeigte additive Mischer ist ein solcher Mischer. Er besteht aus der Kaskade eines Addierers und eines nichtlinearen Systems mit quadratischer Kennlinie. Als nichtlineare Bauelemente zum näherungsweise Realisieren eines nichtlinearen Systems mit quadratischer Kennlinie kann man beispielsweise Dioden verwenden.

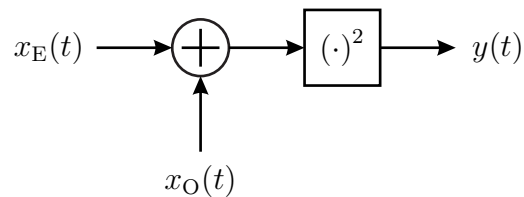


Abbildung A.8.: Additiver Mischer

Das Ausgangssignal ergibt sich zu

$$y(t) = (x_E(t) + x_O(t))^2 = x_E^2(t) + 2x_E(t)x_O(t) + x_O^2(t)$$

und enthält offensichtlich auch den gewünschten Signalanteil $x_E(t)x_O(t)$. Falls das nichtlineare System keine perfekt quadratische Kennlinie hat, entstehen weitere Signalanteile.

A.6.3. Multiplikativer Mischer

Die Idee des multiplikativen Mischers besteht darin, dass eine Multiplikation mit einer Rechteckschwingung einem periodischen Umpolen des Signals entspricht und dies lässt sich relativ einfach mit Schaltern realisieren, siehe Abbildung A.9. Aufgrund der charakteristischen Schaltungsstruktur wird der multiplikative Mischer auch als Ringmischer bezeichnet. In der Hochfrequenztechnik können Schalter mit Dioden realisiert werden.

Die Rechteckschwingung kann man als Fourier-Reihe darstellen:

$$x_O(t) = \frac{\pi}{4} \left(\cos(\omega_O t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_O t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_O t) - \dots \right).$$

Das Eingangssignal $x_E(t)$ wird nicht nur mit einem harmonischen Oszillatorsignal der gewünschten Kreisfrequenz ω_O multipliziert, sondern es entstehen auch noch Mischprodukte mit allen ungeraden Oberwellen des Oszillatorsignals.

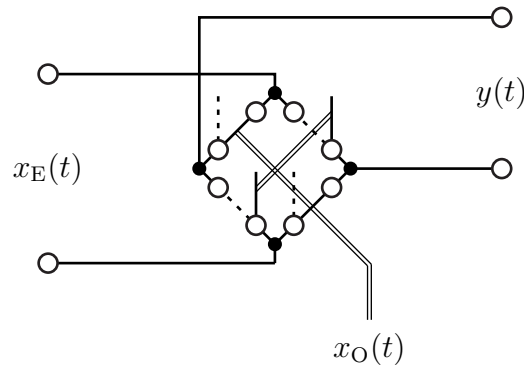


Abbildung A.9.: Multiplikativer Mischer

A.6.4. Quadraturmodulator

Ein Quadraturmodulator dient dem Erzeugen eines Bandpasssignals $a(t)$ aus dem äquivalenten komplexwertigen Tiefpasssignal $\underline{u}(t)$ [OL10; PS08]. Für die Tiefpass-Bandpass-Transformation gilt

$$a(t) = \operatorname{Re}(\underline{u}(t) e^{j\omega_0 t}) = \operatorname{Re}(\underline{u}(t)) \cos(\omega_0 t) - \operatorname{Im}(\underline{u}(t)) \sin(\omega_0 t). \quad (\text{A.39})$$

Den Realteil $\operatorname{Re}(\underline{u}(t))$ des äquivalenten komplexwertigen Tiefpasssignals bezeichnet man auch als Inphasekomponente und den Imaginärteil $\operatorname{Im}(\underline{u}(t))$ als Quadraturkomponente. Die Bezugskreisfrequenz ω_0 der Tiefpass-Bandpass-Transformation entspricht in der Regel der Mittenkreisfrequenz des Bandpasssignals.

Die Realisierung eines Quadraturmodulators erfordert zwei Mischer, siehe Abbildung A.10. Die beiden um $\pi/2$ gegeneinander phasenverschobenen Oszillatorsignale kann man aus einem einzigen Oszillatorsignal unter Verwenden eines Phasenschiebers erzeugen. Der Phasenschieber besteht im einfachsten Fall aus einem Leitungsstück passender Länge.

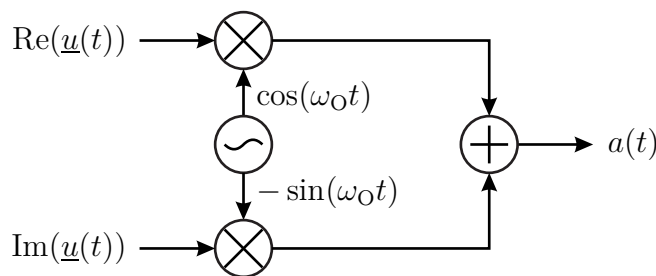


Abbildung A.10.: Quadraturmodulator

Moderne nach dem sogenannten direktumsetzenden Prinzip arbeitende Sender bestehen im Wesentlichen aus einem Quadraturmodulator. Das äquivalente

komplexwertige Tiefpasssignal $\underline{u}(t)$ wird digital erzeugt.

A.6.5. Quadraturdemodulator

Ein Quadraturdemodulator dient dem Erzeugen des zu einem Bandpasssignal $a(t)$ äquivalenten komplexwertigen Tiefpasssignals $\underline{u}(t)$. Das Bandpasssignal gemäß (A.39) kann man umformen in⁴

$$a(t) = \frac{1}{2}\underline{u}(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}\underline{u}^*(t) e^{-j\omega_0 t}.$$

Multiplizieren des Bandpasssignals $a(t)$ mit

$$2 \cos(\omega_0 t) - j2 \sin(\omega_0 t) = 2 e^{-j\omega_0 t}$$

ergibt

$$\left(\frac{1}{2}\underline{u}(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}\underline{u}^*(t) e^{-j\omega_0 t} \right) 2 e^{-j\omega_0 t} = \underline{u}(t) + \underline{u}^*(t) e^{-j2\omega_0 t}.$$

Nach Unterdrücken der Signalanteile $\underline{u}^*(t) e^{-j2\omega_0 t}$ bei der doppelten Kreisfrequenz $2\omega_0$ mit einem Tiefpass verbleibt das gesuchte äquivalente komplexwertige Tiefpasssignal $\underline{u}(t)$. Man erhält den in Abbildung A.11 gezeigten Quadraturdemodulator.

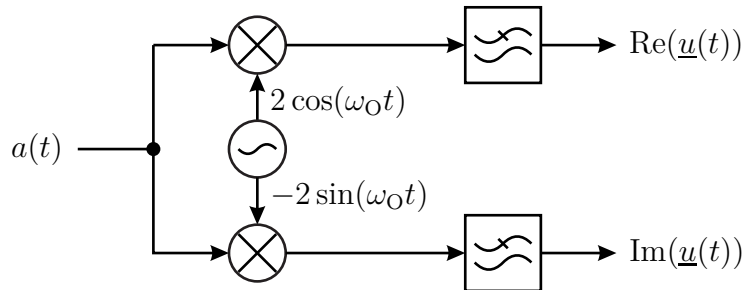


Abbildung A.11.: Quadraturdemodulator

Moderne nach dem sogenannten direktumsetzenden Prinzip arbeitende Empfänger bestehen im Wesentlichen aus einem Quadraturdemodulator. Das äquivalente komplexwertige Tiefpasssignal $\underline{u}(t)$ wird digital weiterverarbeitet.

⁴ Der Realteil einer komplexen Größe berechnet sich zu $\text{Re}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\underline{x} + \underline{x}^*)$.

Anhang B.

Fourier-Analyse

B.1. Zeitbereichsanalyse

B.1.1. Anwendungsbeispiel der Zeitbereichsanalyse

Die Fourier-Analyse ist ein wichtiger Bestandteil vieler Messverfahren in der Hochfrequenztechnik. Im Folgenden sollen einige diesbezügliche Signalverarbeitungsaspekte diskutiert werden, die neben hochfrequenztechnischen Aspekten beim Konzipieren von Messsystemen und beim Interpretieren von Messergebnissen zu berücksichtigen sind.

Als Beispiel eines linearen zeitinvarianten Systems wird eine Leitung betrachtet, siehe Abbildung B.1. Es wird angenommen, dass die Leitung dispersionsfrei ist. Die Phasengeschwindigkeit v_p ist dann frequenzunabhängig und gleich der Lichtgeschwindigkeit c , siehe (2.44). Die dem Streuparameter $\underline{S}_{2,1}$ gemäß (10.18) entsprechende Übertragungsfunktion der Leitung ergibt sich mit (2.43) und (1.1) zu

$$\underline{H}(f) = e^{-j2\pi f \frac{l}{c}}.$$

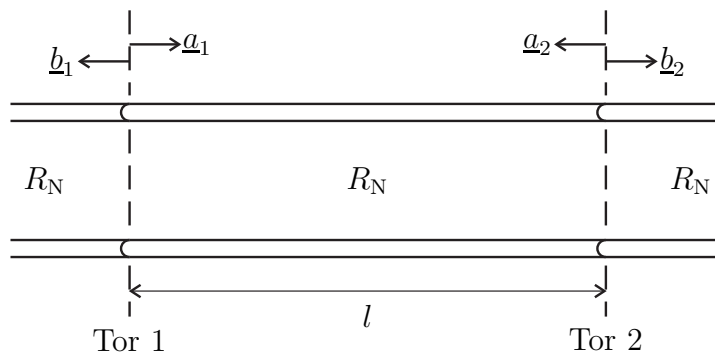


Abbildung B.1.: Leitung mit Verzögerung $t_0 = l/c$

Durch inverse Fourier-Transformation der Übertragungsfunktion $\underline{H}(f)$ erhält

man die Impulsantwort [FB08]

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}(\underline{H}(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (\text{B.1})$$

Im obigen Beispiel erhält man die Impulsantwort¹

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f \frac{l}{c}} e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t - \frac{l}{c})} df = \left[\frac{e^{j2\pi f(t - \frac{l}{c})}}{j2\pi(t - \frac{l}{c})} \right]_{f=-\infty}^{\infty} \\ &= \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{e^{j2\pi f(t - \frac{l}{c})} - e^{-j2\pi f(t - \frac{l}{c})}}{j2\pi(t - \frac{l}{c})} = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi f(t - \frac{l}{c}))}{\pi(t - \frac{l}{c})} \\ &= \delta\left(t - \frac{l}{c}\right) \end{aligned}$$

der Leitung. Insbesondere ist die Fourier-Transformierte des Dirac-Impulses

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = 1. \quad (\text{B.2})$$

Die Impulsantwort $h(t)$ der Leitung beschreibt die Verzögerung

$$t_0 = \frac{l}{c}$$

eines Signals, das sich mit der Lichtgeschwindigkeit c über die Leitung der Länge l ausbreitet. Auch in vielen anderen Beispielen besteht ein direkter Zusammenhang zwischen der Impulsantwort $h(t)$ und der Geometrie des Systems. Es ist daher von Interesse, aus der messtechnisch einfacher zu ermittelnden Übertragungsfunktion $\underline{H}(f)$ die Impulsantwort $h(t)$ zu berechnen. Die praktische Umsetzung dieser Zeitbereichsanalyse wird in den folgenden Abschnitten diskutiert.

Die Fourier-Transformation

$$\underline{H}(f) = \mathcal{F}(h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (\text{B.3})$$

ist die Umkehrtransformation der inversen Fourier-Transformation. Mit der Aus-

¹ Es gilt $\delta(t) = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{\pi t}$.

blendeigenschaft des Dirac-Impulses gilt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\underline{H}(f))) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}(\varphi) e^{j2\pi\varphi t} d\varphi e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}(\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(\varphi-f)t} dt d\varphi \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}(\varphi) \delta(\varphi - f) d\varphi \\
 &= \underline{H}(f).
 \end{aligned}$$

Die Fourier-Transformation ist eine lineare Transformation. Es gelten das Proportionalitätsprinzip

$$\mathcal{F}(h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} ch(t) e^{-j2\pi ft} dt = c \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt = c\mathcal{F}(h(t)) \quad (\text{B.4})$$

und das Superpositionsprinzip

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(g(t) + h(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (g(t) + h(t)) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \mathcal{F}(g(t)) + \mathcal{F}(h(t)).
 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Weiterhin gilt der Ähnlichkeitssatz

$$\mathcal{F}(h(ct)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(ct) e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi \frac{f}{c} \tau} d\tau = \frac{1}{|c|} \underline{H}\left(\frac{f}{c}\right), \quad (\text{B.6})$$

wobei von der Substitution $\tau = ct$ Gebrauch gemacht wurde.

Aus der Symmetrie der Formeln (B.1) und (B.3) folgt die Dualität der Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}^{-1}(h(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} h(f) e^{-j2\pi f(-t)} df = \underline{H}(-t). \quad (\text{B.7})$$

Hiermit erhält man die Fourier-Transformierte der konstanten Funktion

$$\mathcal{F}(1) = \delta(f). \quad (\text{B.8})$$

Mit der Fourier-Transformation

$$\underline{S}(f) = \mathcal{F}(s(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

von $s(t)$ folgt das Faltungstheorem

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(s(t) h(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) h(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}(\varphi) e^{j2\pi\varphi t} d\varphi e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{s(t) e^{-j2\pi(f-\varphi)t}}_{\underline{S}(f-\varphi)} dt \underline{H}(\varphi) d\varphi \\ &= \underline{S}(f) * \underline{H}(f) = \mathcal{F}(s(t)) * \mathcal{F}(h(t)). \end{aligned} \tag{B.9}$$

Die Multiplikation im Zeitbereich entspricht einer Faltung im Frequenzbereich. Wegen der Dualität der Fourier-Transformation gilt weiterhin

$$\mathcal{F}^{-1}(\underline{S}(f) \underline{H}(f)) = \mathcal{F}^{-1}(\underline{S}(f)) * \mathcal{F}^{-1}(\underline{H}(f)). \tag{B.10}$$

Die inverse Fourier-Transformierte der konjugiert komplexen Übertragungsfunktion $\underline{H}^*(f)$ ist

$$\mathcal{F}^{-1}(\underline{H}^*(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}^*(f) e^{j2\pi ft} df = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}(f) e^{j2\pi f(-t)} df \right)^* = h^*(-t). \tag{B.11}$$

Die Impulsantwort $h(t)$ eines physikalischen Systems ist stets reell, das heißt es gilt

$$h(t) = h^*(t).$$

Daraus folgt mit (B.6) und (B.11) die Symmetrie

$$\underline{H}(f) = \underline{H}^*(-f). \tag{B.12}$$

der Übertragungsfunktion $\underline{H}(f)$. Der Realteil $\text{Re}(\underline{H}(f))$ der Übertragungsfunktion $\underline{H}(f)$ ist eine gerade Funktion der Frequenz f und der Imaginärteil $\text{Im}(\underline{H}(f))$ der Übertragungsfunktion $\underline{H}(f)$ ist eine ungerade Funktion der Frequenz f .

B.1.2. Kausalität

Die Impulsantwort $h(t)$ eines physikalischen Systems ist stets kausal. Mit der Vorzeichenfunktion

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

gilt daher im Zeitbereich

$$h(t) = \text{sign}(t) \underline{h}(t).$$

Die Fourier-Transformierte (B.3) der Vorzeichenfunktion ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\text{sign}(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(t) e^{-j2\pi ft} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^{\infty} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= -2j \int_0^{\infty} \sin(2\pi ft) dt = -2j \left[-\frac{\cos(2\pi ft)}{2\pi f} \right]_{t=0}^{\infty} \\ &= -\frac{j}{\pi f}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Mit dem Faltungstheorem (B.9) folgt bei kausaler Impulsantwort $h(t)$ für die Übertragungsfunktion²

$$\underline{H}(f) = \mathcal{F}(h(t)) = \mathcal{F}(\text{sign}(t) \underline{h}(t)) = \left(-\frac{j}{\pi f} \right) * \underline{H}(f) = -\frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\underline{H}(\varphi)}{f - \varphi} d\varphi.$$

Nach Realteil und Imaginärteil getrennt gilt:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\underline{H}(f)) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}(\underline{H}(\varphi))}{f - \varphi} d\varphi, \\ \text{Im}(\underline{H}(f)) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}(\underline{H}(\varphi))}{f - \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Man kann den Realteil $\text{Re}(\underline{H}(f))$ der Übertragungsfunktion $\underline{H}(f)$ aus dem Imaginärteil $\text{Im}(\underline{H}(f))$ der Übertragungsfunktion $\underline{H}(f)$ berechnen und umgekehrt.

Unter Ausnutzen der Symmetrie der Übertragungsfunktion $\underline{H}(f)$ bei reeller

² Die Hilbert-Transformierte von $h(t)$ ist $\mathcal{F}^{-1}(-j \text{sign}(f) \underline{H}(f)) = \frac{1}{\pi t} * h(t)$.

Impulsantwort $h(t)$ gemäß (B.12) folgt

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(\underline{H}(f)) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Im}(\underline{H}(\varphi))}{f - \varphi} d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(\underline{H}(\varphi))}{f - \varphi} d\varphi \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(\underline{H}(\varphi))}{f + \varphi} d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(\underline{H}(\varphi))}{f - \varphi} d\varphi \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varphi \operatorname{Im}(\underline{H}(\varphi))}{f^2 - \varphi^2} d\varphi.
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}(\underline{H}(f)) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Re}(\underline{H}(\varphi))}{f - \varphi} d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(\underline{H}(\varphi))}{f - \varphi} d\varphi \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(\underline{H}(\varphi))}{f + \varphi} d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(\underline{H}(\varphi))}{f - \varphi} d\varphi \\
 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f \operatorname{Re}(\underline{H}(\varphi))}{f^2 - \varphi^2} d\varphi.
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

Dies sind die Kramers-Kronig-Beziehungen [Kra27; Kro26].

B.1.3. Bandbegrenzung

In der Praxis wird man die Messung der Übertragungsfunktion $\underline{H}(f)$ nur in einem begrenzten Frequenzbereich mit einer Bandbreite B , das heißt für Frequenzen $-B/2 < f < B/2$ durchführen können. Mathematisch entspricht dies einer Multiplikation

$$\underline{G}(f) = \underline{H}(f) \underline{W}(f) \tag{B.16}$$

mit der Fensterfunktion

$$\underline{W}(f) = \frac{1}{B} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{B}\right) = \begin{cases} \frac{1}{B} & -B < f < B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{B.17}$$

im Frequenzbereich, siehe Abbildung B.2.

Gemäß dem Faltungstheorem (B.10) ergibt sich die Impulsantwort $g(t)$ durch Faltung mit der Impulsantwort $w(t)$ des Fensters zu

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}(\underline{H}(f) \underline{W}(f)) = h(t) * w(t). \tag{B.18}$$

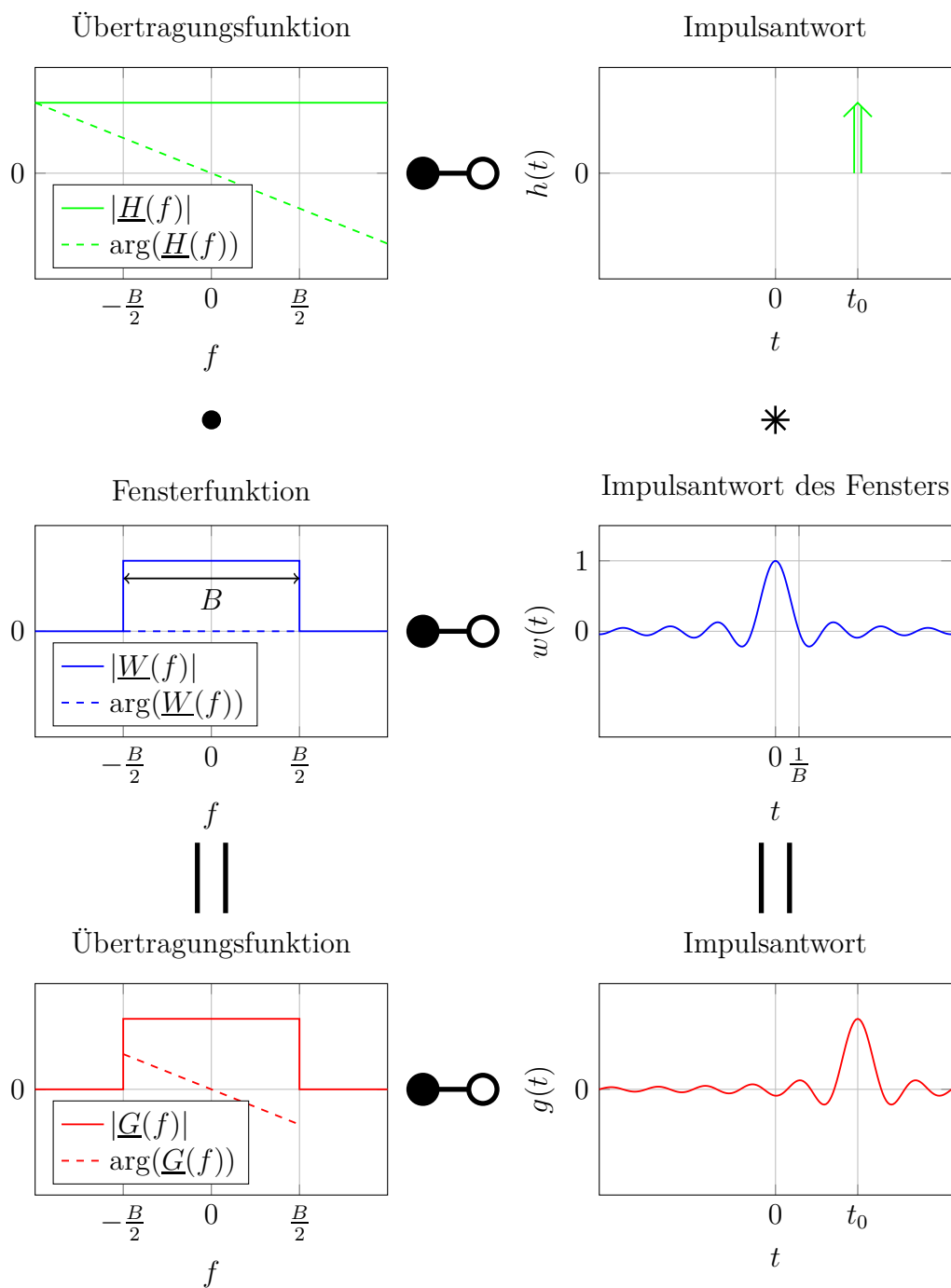


Abbildung B.2.: Bandbegrenzung am Beispiel der Übertragungsfunktion $\underline{G}(f)$ und der Impulsantwort $g(t)$ einer Leitung

Die Impulsantwort des Rechteckfensters $\underline{W}(f)$ ergibt sich mit der inversen Fourier-Transformation (B.1) zu

$$\begin{aligned}
 w(t) &= \mathcal{F}^{-1}(\underline{W}(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{W}(f) e^{j2\pi ft} \, df \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{B} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{B}\right) e^{j2\pi ft} \, df = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{1}{B} e^{j2\pi ft} \, df \\
 &= \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{1}{B} \cos(2\pi ft) \, df = \left[\frac{1}{B} \frac{\sin(2\pi ft)}{2\pi t} \right]_{f=-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \\
 &= \frac{\sin(\pi Bt)}{\pi Bt} = \operatorname{si}(\pi Bt).
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

Diese unter dem Namen Spaltfunktion bekannte Impulsantwort $w(t)$ hat große Nebenmaxima, was in manchen Anwendungen störend ist. Man verwendet dann andere optimierte Fensterfunktionen $\underline{W}(f)$ [KK12; OS10; SM05]. Die Fensterfunktion $\underline{W}(f)$, siehe (B.17), wurde so normiert, dass das Maximum der Impulsantwort $w(t)$ des Fensters eins ist:

$$1 = w(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{W}(f) \, df. \tag{B.20}$$

Falls die Impulsantwort $h(t)$ aus einem einzigen Dirac-Impuls besteht, kann man das Gewicht des Dirac-Impulses bei derartiger Normierung der Fensterfunktion $\underline{W}(f)$ direkt am Maximalwert der einer Spaltfunktion entsprechenden Impulsantwort $g(t)$ ablesen.

B.1.4. Tiefpassmodus

Messungen der Übertragungsfunktion $\underline{H}(f)$ erfolgen typischerweise beginnend bei einer Startfrequenz f_{Start} bis zu einer Stopfrequenz f_{Stop} , das heißt mit einer Mittenfrequenz

$$f_0 = \frac{f_{\text{Stop}} + f_{\text{Start}}}{2}$$

und einer Bandbreite

$$B = f_{\text{Stop}} - f_{\text{Start}}.$$

Bei bekannter Übertragungsfunktion $\underline{H}(f)$ bei positiven Frequenzen f kann die Übertragungsfunktion $\underline{H}(-f)$ bei negativen Frequenzen $-f$ wegen der Symmetrie

der Übertragungsfunktion $\underline{H}(f)$ bei reellen Impulsantworten $h(t)$ gemäß (B.12) durch konjugiert komplexe Spiegelung leicht ergänzt werden:

$$\underline{H}(f) = \begin{cases} \underline{H}(f) & f > 0 \\ \underline{H}^*(-f) & f < 0 \end{cases}. \quad (\text{B.21})$$

Es bleibt die Bandbegrenzung auf $f_{\text{Start}} < |f| < f_{\text{Stop}}$. Diese in einer Bandpassübertragungsfunktion $\underline{G}_{\text{BP}}(f)$ resultierende Vorgehensweise wird als Tiefpassmodus bezeichnet.

Die Bandpassübertragungsfunktion

$$\underline{G}_{\text{BP}}(f) = \underline{H}(f) \underline{W}_{\text{BP}}(f) \quad (\text{B.22})$$

kann man sich als durch Verwenden einer speziellen Fensterfunktion

$$\underline{W}_{\text{BP}}(f) = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{B} \text{rect}\left(\frac{f+f_0}{B}\right)}_{\underline{W}(f+f_0)} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{B} \text{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right)}_{\underline{W}(f-f_0)} \quad (\text{B.23})$$

entstanden denken, siehe (B.17) und Abbildung B.3. Diese Fensterfunktion $\underline{W}_{\text{BP}}(f)$ ist entsprechend (B.20) normiert.

Durch inverse Fourier-Transformation (B.1) erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\underline{W}(f-f_0)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{W}(f-f_0) e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{W}(\varphi) e^{j2\pi(\varphi+f_0)t} d\varphi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{W}(\varphi) e^{j2\pi\varphi t} d\varphi e^{j2\pi f_0 t} \\ &= w(t) e^{j2\pi f_0 t}, \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

wobei von der Substitution $\varphi = f - f_0$ Gebrauch gemacht wurde. Die Frequenzverschiebung $\underline{W}(f-f_0)$ im Frequenzbereich entspricht einer Multiplikation mit $e^{j2\pi f_0 t}$ im Zeitbereich.

Schließlich folgt mit (B.4), (B.5) und (B.19) die Impulsantwort

$$\begin{aligned} w_{\text{BP}}(t) &= \mathcal{F}^{-1}(\underline{W}_{\text{BP}}(f)) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2}\underline{W}(f+f_0) + \frac{1}{2}\underline{W}(f-f_0)\right) \\ &= \frac{1}{2}w(t) e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}w(t) e^{j2\pi f_0 t} \\ &= w(t) \cos(2\pi f_0 t) \\ &= \text{si}(\pi B t) \cos(2\pi f_0 t) \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

des Fensters. Insbesondere bei im Vergleich zur Bandbreite B großer Mittenfrequenz f_0 ergibt sich eine stark oszillierende Impulsantwort $w_{\text{BP}}(t)$ des Fensters, siehe Abbildung B.3. Die gepunktet gezeichnete Hüllkurve der Impulsantwort $w_{\text{BP}}(t)$ des Fensters entspricht der Impulsantwort $w(t)$ des Rechteckfensters gemäß (B.19).

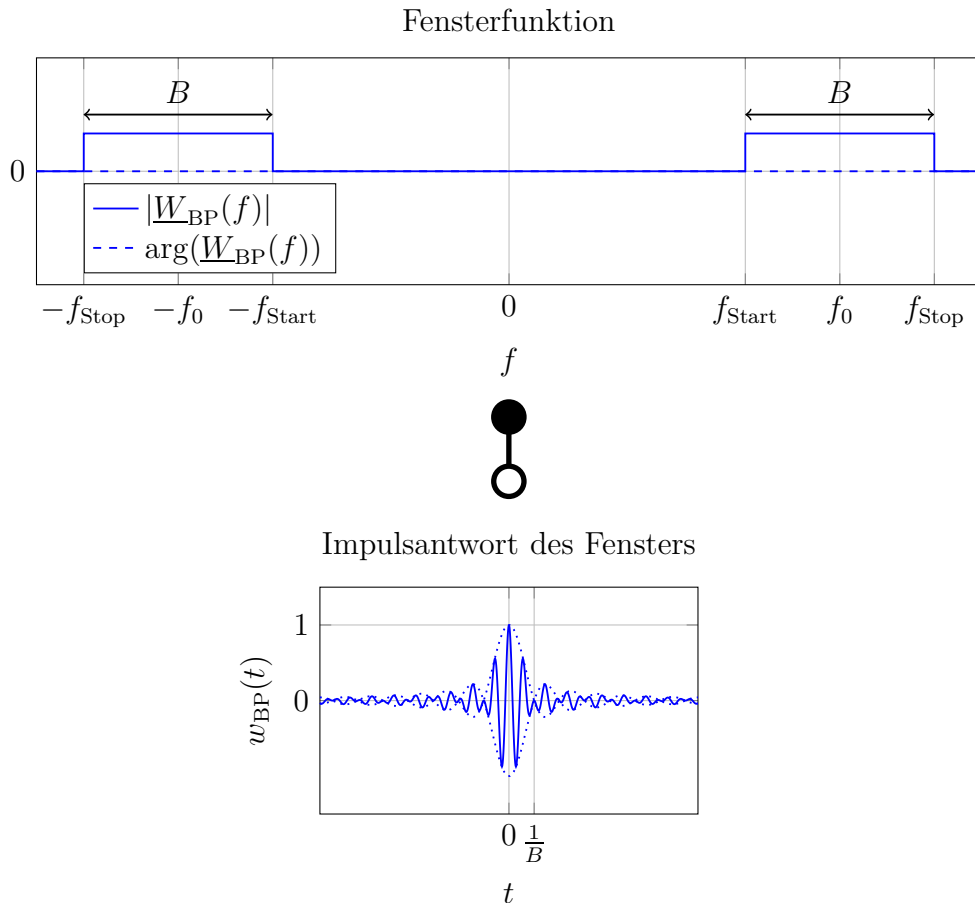


Abbildung B.3.: Fensterfunktion $G_{\text{BP}}(f)$ und Impulsantwort $w_{\text{BP}}(t)$ des Fensters im Tiefpassmodus am Beispiel $f_0 = 1,75B$

B.1.5. Bandpassmodus

Beim Bandpassmodus verschiebt man die im Frequenzbereich $f_{\text{Start}} < f < f_{\text{Stop}}$ mit einer Mittenfrequenz f_0 gemessene Übertragungsfunktion $\underline{H}(f)$ um f_0 zu kleineren Frequenzen f hin, ohne den konjugiert komplex gespiegelten Anteil

der Übertragungsfunktion $\underline{H}(f)$ bei negativen Frequenzen f zu verwenden. Unter Berücksichtigen der Fensterfunktion $\underline{W}(f)$ gemäß (B.17) erhält man die auf $-B/2 < f < B/2$ bandbegrenzte Tiefpassübertragungsfunktion

$$\underline{G}_{\text{TP}}(f) = \underline{H}(f + f_0) \underline{W}(f + f_0). \quad (\text{B.26})$$

Diese Tiefpassübertragungsfunktion $\underline{G}_{\text{TP}}(f)$ erfüllt im Allgemeinen nicht die Symmetrieeigenschaften gemäß (B.12). Die aus der Tiefpassübertragungsfunktion $\underline{G}_{\text{TP}}(f)$ durch inverse Fourier-Transformation (B.1) berechnete Tiefpassimpulsantwort

$$\underline{g}_{\text{TP}}(t) = \mathcal{F}^{-1}(\underline{G}_{\text{TP}}(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{G}_{\text{TP}}(f) e^{j2\pi ft} df \quad (\text{B.27})$$

ist daher im Allgemeinen komplex.

Mit (B.21), (B.22) und (B.23) ergibt sich die Bandpassübertragungsfunktion als Funktion der Tiefpassübertragungsfunktion zu

$$\underline{G}_{\text{BP}}(f) = \frac{1}{2} \underline{G}_{\text{TP}}(f - f_0) + \frac{1}{2} \underline{G}_{\text{TP}}^*(-(f + f_0)).$$

Durch inverse Fourier-Transformation (B.1) erhält man mit (B.4), (B.5), (B.6) und (B.11) die reelle Bandpassimpulsantwort³

$$\begin{aligned} g_{\text{BP}}(t) &= \mathcal{F}^{-1}(\underline{G}_{\text{BP}}(f)) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2} \underline{G}_{\text{TP}}(f - f_0) + \frac{1}{2} \underline{G}_{\text{TP}}^*(-(f + f_0))\right) \\ &= \frac{1}{2} g_{\text{TP}}(t) e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} g_{\text{TP}}^*(t) e^{-j2\pi f_0 t} \\ &= \text{Re}\left(g_{\text{TP}}(t) e^{j2\pi f_0 t}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Das Verschieben um f_0 im Frequenzbereich entspricht der Multiplikation mit $e^{j2\pi f_0 t}$ im Zeitbereich und das Ergänzen des konjugiert komplex gespiegelten Anteils der Übertragungsfunktion $\underline{G}_{\text{BP}}(f)$ bei negativen Frequenzen f im Frequenzbereich entspricht dem Bilden des Realteils im Zeitbereich. Die komplexe Tiefpassimpulsantwort $\underline{g}_{\text{TP}}(t)$ und die reelle Bandpassimpulsantwort $g_{\text{BP}}(t)$, siehe Abbildung B.4, sind über die Tiefpass-Bandpass-Transformation miteinander verknüpft, vergleiche (A.39).

³ Der Realteil einer komplexen Größe berechnet sich zu $\text{Re}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\underline{x} + \underline{x}^*)$.

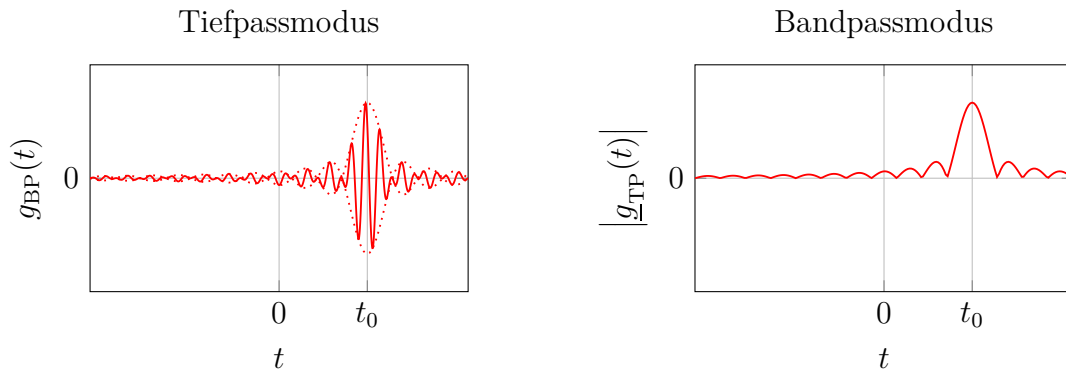


Abbildung B.4.: Vergleich von Tiefpassmodus und Bandpassmodus am Beispiel der Impulsantworten einer Leitung. $f_0 = 1,75B$

B.1.6. Abtastung

In der Praxis wird man die Messung der Übertragungsfunktion $\underline{G}(f)$ nur bei einigen diskreten Frequenzen f durchführen können, das heißt die Übertragungsfunktion $\underline{G}(f)$ wird im Frequenzbereich abgetastet. Mit der Dirac-Impulsfolge

$$\text{III}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n) \quad (\text{B.29})$$

erhält man die äquidistant mit der Abtastperiode F abgetastete Übertragungsfunktion⁴

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{G}(nF) F \delta(f - nF) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{G}(nF) F \delta\left(F \left(\frac{f}{F} - n\right)\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{G}(nF) \delta\left(\frac{f}{F} - n\right) \\ &= \underline{G}(f) \text{III}\left(\frac{f}{F}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Mit der Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses ergibt sich die inverse Fourier-

⁴ Für den Dirac-Impuls gilt $\delta(Ff) = \frac{1}{|F|} \delta(f)$.

Transformierte (B.1) der Dirac-Impulsfolge zu

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left(\text{III}\left(\frac{f}{F}\right)\right) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F \delta(f - nF)\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F \delta(f - nF) e^{j2\pi ft} \, df \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F e^{jnFt}.\end{aligned}$$

Diese Funktion ist periodisch mit der Periode $1/F$. Mit (B.2), dem Faltungstheorem (B.9) und (B.19) gilt

$$\begin{aligned}\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}(1) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{f - nF}{F}\right)\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\text{rect}\left(\frac{f}{F}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nF)\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{F} \text{rect}\left(\frac{f}{F}\right) * \text{III}\left(\frac{f}{F}\right)\right) \\ &= \text{si}(\pi Ft) \mathcal{F}^{-1}\left(\text{III}\left(\frac{f}{F}\right)\right).\end{aligned}$$

Für die inverse Fourier-Transformierte der Dirac-Impulsfolge gilt daher

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\text{III}\left(\frac{f}{F}\right)\right) = \begin{cases} \delta(t) & t = 0 \\ ? & t = \pm\frac{1}{F}, \pm\frac{2}{F}, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zusammen mit der $1/F$ -Periodizität der inversen Fourier-Transformierten der Dirac-Impulsfolge erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left(\text{III}\left(\frac{f}{F}\right)\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{F}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{1}{F}(Ft - n)\right) \\ &= F \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(Ft - n) = F \text{III}(Ft),\end{aligned}\tag{B.31}$$

das heißt die inverse Fourier-Transformierte der Dirac-Impulsfolge ist wieder eine Dirac-Impulsfolge.

Entsprechend dem Faltungstheorem (B.10) entspricht die als Multiplikation mit der Dirac-Impulsfolge $\text{III}\left(\frac{f}{F}\right)$ beschriebene Abtastung im Frequenzbereich einer Faltung mit der Dirac-Impulsfolge $F\text{III}(Ft)$ im Zeitbereich:

$$g_p(t) = g(t) * F\text{III}(Ft) = g(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{F}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(t - \frac{n}{F}\right). \quad (\text{B.32})$$

Die Faltung mit der Dirac-Impulsfolge $F\text{III}(Ft)$ im Zeitbereich entspricht einer periodischen Wiederholung mit der Periodendauer

$$D = \frac{1}{F}. \quad (\text{B.33})$$

Falls die Impulsantwort $g_p(t)$ auf das Intervall $-D/2 < t < D/2$ zeitbegrenzt wäre, das heißt falls das Abtasttheorem erfüllt wäre, wäre eine perfekte Rekonstruktion der Impulsantwort $g(t)$ durch Multiplikation mit einem Rechteckfenster möglich:

$$g(t) = g_p(t) \text{rect}\left(\frac{t}{D}\right) = g_p(t) \text{rect}(Ft). \quad (\text{B.34})$$

Da die Übertragungsfunktion $\underline{G}(f)$ bandbegrenzt ist, kann die Impulsantwort $g_p(t)$ allerdings nur näherungsweise zeitbegrenzt sein, so dass bei geschickter Parametrisierung bestenfalls eine näherungsweise Rekonstruktion möglich ist.

Die Impulsantwort berechnet sich durch inverse Fourier-Transformation (B.1) aus den Abtastwerten der Übertragungsfunktion $\underline{G}(f)$ unter Verwenden der Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses zu

$$\begin{aligned} g_p(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{G}(nF) F \delta(f - nF)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{G}(nF) F \delta(f - nF) e^{j2\pi ft} df \\ &= F \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{G}(nF) e^{j2\pi nFt}. \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Dies ist eine Fourier-Reihe.

Die Übertragungsfunktion $\underline{G}(f)$ ist aufgrund des Anwendens der Fensterfunktion $\underline{W}(f)$ bandbegrenzt. Im Folgenden wird vereinfachend nur der Fall einer ungeraden Anzahl

$$M = 2N + 1 \quad (\text{B.36})$$

an nichtverschwindenden Abtastwerten

$$\underline{G}_n = \underline{G}(nF), \quad n = -N \dots + N, \quad (\text{B.37})$$

weiter betrachtet. Es ergibt sich die Impulsantwort

$$g_p(t) = F \sum_{n=-N}^N \underline{G}_n e^{j2\pi n F t}. \quad (\text{B.38})$$

Mit (B.18) ergibt sich die Impulsantwort zu

$$g_p(t) = h(t) * w(t) * F \text{III}(Ft).$$

Mit dem Faltungstheorem (B.10) und (B.31) gilt

$$w(t) * (F \text{III}(Ft)) = \mathcal{F}^{-1}(\underline{W}(f) \mathcal{F}(F \text{III}(Ft))) = \mathcal{F}^{-1}\left(\underline{W}(f) \text{III}\left(\frac{f}{F}\right)\right).$$

Falls ein Rechteckfenster (B.17) verwendet wird, folgt analog zu (B.30) mit

$$B = MF, \quad (\text{B.39})$$

der inversen Fourier-Transformation (B.1) und der Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses⁵

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left(\underline{W}(f) \text{III}\left(\frac{f}{F}\right)\right) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{B} \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F \delta(f - nF)\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{B} \sum_{n=-N}^N F \delta(f - nF)\right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=-N}^N \mathcal{F}^{-1}(\delta(f - nF)) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=-N}^N \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - nF) e^{j2\pi f t} df \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=-N}^N e^{j2\pi n F t} = \frac{1}{M} e^{-j2\pi N F t} \sum_{n=0}^{2N=M-1} e^{j2\pi n F t} \\ &= \frac{1}{M} e^{-j2\pi N F t} \frac{1 - e^{j2\pi M F t}}{1 - e^{j2\pi F t}} = \frac{1}{M} \frac{e^{-j\pi M F t} - e^{j\pi M F t}}{e^{-j\pi F t} - e^{j\pi F t}} \\ &= \frac{\sin(\pi M F t)}{M \sin(\pi F t)} = \text{di}_M(2\pi F t). \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

⁵ Die Summenformel der geometrischen Reihe lautet $\sum_{m=0}^{M-1} q^m = \frac{1-q^M}{1-q}$.

Das heißt die Bandbegrenzung und die Abtastung zusammen bewirken eine Faltung der Impulsantwort $h(t)$ mit dem Dirichlet-Kern $\text{di}_M(2\pi Ft)$.

Für die Abtastwerte der mit der Abtastperiode

$$T = \frac{D}{M} = \frac{1}{MF} \quad (\text{B.41})$$

abgetasteten Impulsantwort $g_p(t)$ folgt aus (B.38)

$$g_{p,m} = g_p(mT) = \frac{1}{MT} \sum_{n=-N}^N \underline{G}_n e^{j2\pi \frac{mn}{M}}, \quad m = -N \dots + N. \quad (\text{B.42})$$

Dies ist eine inverse diskrete Fourier-Transformation, siehe Abbildung B.5.⁶ Eine Periode der Impulsantwort $g_p(t)$ enthält M Abtastwerte.

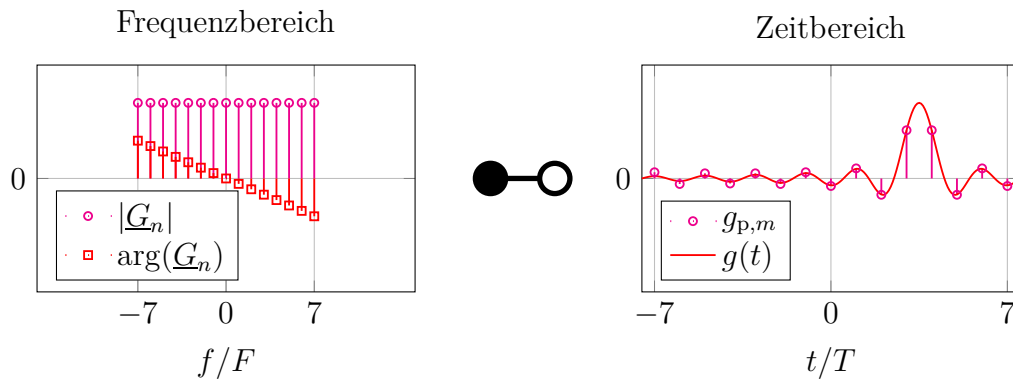


Abbildung B.5.: Abtastung im Frequenzbereich und im Zeitbereich. Die am linken Bildrand deutlich sichtbare Abweichung der Abtastwerte $g_{p,m}$ von der Impulsantwort $g(t)$ resultiert aus der periodischen Wiederholung

Mit der schnellen Fourier-Transformation existiert ein aufwandsgünstiger Algorithmus zum Berechnen der inversen diskreten Fourier-Transformation [PTVF07; CT65]. Die üblichen Implementierungen der inversen diskreten Fourier-Transformation erwarten abweichend, dass der erste Abtastwert der zur Frequenz $f = 0$ beziehungsweise der zum Zeitpunkt $t = 0$ gehörende ist. Mit dem die Abtastwerte \underline{G}_n der Übertragungsfunktion $\underline{G}(f)$ enthaltenden Vektor \mathbf{G} und der Abtastperiode T im Zeitbereich ergibt sich der Matlab-Code

⁶ Bei der allgemein üblichen Definition der inversen diskreten Fourier-Transformation ist der Vorfaktor nicht $\frac{1}{MT}$ sondern $\frac{1}{M}$. Bei Verwenden eines Rechteckfensters (B.17) kürzt sich der zusätzliche Vorfaktor $1/T$ der inversen diskreten Fourier-Transformation mit dem Vorfaktor $1/B = T$ der Fensterfunktion weg.

`gp = fftshift(iffshift(iffshift(G))) / T;`

zum Berechnen des Vektors g_p mit den Abtastwerten $g_{p,m}$ der Impulsantwort $g_p(t)$.⁷

Hinsichtlich der Parametrisierung gilt:

- Die Bandbreite B ist hinreichend groß zu wählen, so dass eine ausreichende zeitliche Auflösung T der Impulsantwort $h(t)$ erzielt wird.
- Die Abtastperiode F im Frequenzbereich ist hinreichend klein zu wählen, so dass die Periodendauer D im Zeitbereich deutlich größer als die Dauer der Impulsantwort $h(t)$ ist.
- Bei Kombination der Abtastung mit dem Tiefpassmodus ist besonders darauf zu achten, dass die Übertragungsfunktion $\underline{H}(f)$ bei ganzzahligen Vielfachen der Abtastperiode F abgetastet wird. Insbesondere muss die Startfrequenz f_{start} ein ganzzahliges Vielfaches der Abtastperiode F sein.

Anwenden der diskreten Fourier-Transformation auf die Abtastwerte $g_{p,m}$, $m = -N \dots +N$, der Impulsantwort $g_p(t)$ ergibt unter Ausnutzen der Periodizität der komplexen Exponentialfunktion^{8,9}

$$\begin{aligned}
 T \sum_{m=-N}^N g_{p,m} e^{-j2\pi \frac{mn}{M}} &= T \sum_{m=-N}^N \frac{1}{MT} \sum_{l=-N}^N \underline{G}_l e^{j2\pi \frac{ml}{M}} e^{-j2\pi \frac{mn}{M}} \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{l=-N}^N \underline{G}_l \sum_{m=0}^{M-1} e^{j2\pi m \frac{l-n}{M}} \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{l=-N}^N \underline{G}_l \begin{cases} M & l = n \\ 1 - e^{j2\pi m(l-n)} & l \neq n \\ 1 - e^{j2\pi m \frac{l-n}{M}} & \end{cases} = 0 \\
 &= \underline{G}_n.
 \end{aligned} \tag{B.43}$$

Die diskrete Fourier-Transformation ist die exakte Umkehrtransformation der inversen diskreten Fourier-Transformation. Die M Abtastwerte $g_{p,m}$, $m = -N \dots +$

⁷ Der angegebene Matlab-Code berücksichtigt neben dem Fall der ungeraden Anzahl M an Abtastwerten auch den Fall der geraden Anzahl an Abtastwerten. In beiden Fällen gibt es einen Abtastwert der Übertragungsfunktion $\underline{G}(f)$ exakt bei der Frequenz $f = 0$. Per Konvention gibt es dann bei einer geraden Anzahl an Abtastwerten einen zusätzlichen Abtastwert der Übertragungsfunktion $\underline{G}(f)$ bei negativen Frequenzen f .

⁸ Bei der allgemein üblichen Definition der diskreten Fourier-Transformation fehlt der Vorfaktor T .

⁹ Die Summenformel der geometrischen Reihe lautet $\sum_{m=0}^{M-1} q^m = \frac{1-q^M}{1-q}$.

N , der Impulsantwort $g_p(t)$ im Zeitbereich enthalten exakt die selbe Information wie die M Abtastwerte \underline{G}_n , $n = -N \dots + N$, der Übertragungsfunktion $\underline{G}(f)$ im Frequenzbereich.

B.1.7. Überabtastung im Zeitbereich

Zur besseren graphischen Darstellung der Impulsantwort $g_p(t)$ möchte man die Verläufe zwischen den Abtastwerten $g_{p,m}$, $m = -N \dots + N$, der Impulsantwort $g_p(t)$ mit der Abtastperiode T interpolieren, das heißt man möchte viele Zwischenwerte bestimmen. Das Resultat ist eine Überabtastung um einen ganzzahligen, vereinfachend wieder ungeraden Faktor M_z/M im Zeitbereich. Die Abtastperiode im Zeitbereich ist dann

$$T_z = \frac{D}{M_z} = \frac{1}{M_z F}, \quad (\text{B.44})$$

vergleiche (B.41).

Das korrekte Interpolationsverfahren zum Berechnen der

$$M_z = 2N_z + 1 \quad (\text{B.45})$$

Abtastwerte

$$g_{p,m} = g_p(mT_z), \quad m = -N_z \dots + N_z, \quad (\text{B.46})$$

der Impulsantwort $g_p(t)$ resultiert aus dem Auswerten der Fourier-Reihe (B.38):

$$g_{p,m} = g_p(mT_z) = \frac{1}{MT} \sum_{n=-N}^N \underline{G}_n e^{j2\pi \frac{mz n}{M_z}} = \frac{1}{M_z T_z} \sum_{n=-N_z}^{N_z} \underline{G}_n e^{j2\pi \frac{mn}{M_z}}. \quad (\text{B.47})$$

Dies ist wieder eine inverse diskrete Fourier-Transformation. Im Vergleich zu (B.42) wurden jetzt M_z statt M Abtastwerte berechnet. Das Reduzieren der Abtastperiode T_z im Zeitbereich entspricht einem Erhöhen der Bandbreite im Frequenzbereich, wobei allerdings die zusätzlichen berücksichtigten Abtastwerte \underline{G}_n der Übertragungsfunktion $\underline{G}(f)$ außerhalb des Fensters liegen, das heißt alle Null sind und somit keine zusätzliche Information verwendet wurde. Man spricht auch von Zero-Padding, siehe Abbildung B.6. Die mit der Periodendauer D im Zeitbereich verknüpfte Abtastperiode F im Frequenzbereich bleibt unverändert.

Mit dem die M Abtastwerte \underline{G}_n der Übertragungsfunktion $\underline{G}(f)$ enthaltenden Vektor \mathbf{G} , der Anzahl N der Abtastwerte \underline{G}_n der Übertragungsfunktion $\underline{G}(f)$ bei negativen Frequenzen $f < 0$ und der Abtastperiode T_z im Zeitbereich bei Überabtastung ergibt sich der Matlab-Code

```
gp = fftshift(iffshift([G(N+1:M); zeros(Mz - M); G(1:N)])) / Tz;
```

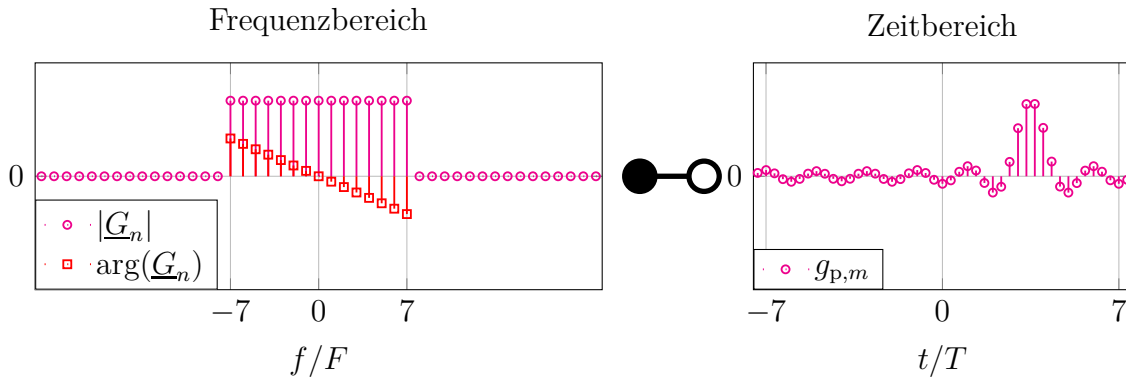


Abbildung B.6.: Zero Padding im Frequenzbereich und Überabtastung im Zeitbereich. Dreifache Überabtastung $M_z/M = 3$. $M = 15$

zum Berechnen des Vektors \mathbf{g}_p mit den M_z Abtastwerten $g_{p,m}$ der überabgetasteten Impulsantwort $g_p(t)$.¹⁰

Wollte man ausgehend von den M Abtastwerten $g_{p,m}$, $m = -N \dots + N$, der Impulsantwort $g_p(t)$ die Zwischenwerte durch Interpolation bestimmen, müsste man zunächst mit einer diskreten Fourier-Transformation (B.43) die Abtastwerte \underline{G}_n , $n = -N \dots + N$, der Übertragungsfunktion $\underline{G}(f)$ berechnen.

B.2. Spektralanalyse

B.2.1. Spektralanalyse deterministischer Signale

Die Spektralanalyse deterministischer Signale ist dual zur Zeitbereichsanalyse, siehe Anhang B.1. Die Gleichungen folgen mit der Dualität der Fourier-Transformation (B.7) auf einfache Weise aus den entsprechenden Gleichungen der Zeitbereichsanalyse und werden daher im Folgenden nicht nochmals hergeleitet.

Ziel der Spektralanalyse ist das Bestimmen des Spektrums

$$\underline{X}(f) = \mathcal{F}(x(t)) \tag{B.48}$$

eines Signals $x(t)$ mit im Allgemeinen unbegrenzter Dauer. Der endlichen zur Verfügung stehenden Messdauer D entspricht die Multiplikation

$$y(t) = x(t) w(t) \tag{B.49}$$

¹⁰ Der angegebene Matlab-Code berücksichtigt beliebige ganzzahlige Faktoren M_z/M der Überabtastung und somit neben dem Fall der ungeraden Anzahl M an Abtastwerten auch den Fall der geraden Anzahl an Abtastwerten.

mit einer Fensterfunktion $w(t)$ im Zeitbereich. Im Frequenzbereich entspricht dies einer Faltung

$$\underline{Y}(f) = \underline{X}(f) * \underline{W}(f) \quad (\text{B.50})$$

mit

$$\underline{W}(f) = \mathcal{F}(w(t)). \quad (\text{B.51})$$

Der Abtastung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT) T \delta(t - nT) = y(t) \text{III}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (\text{B.52})$$

des Signals $y(t)$ mit der Abtastperiode T entspricht eine periodische Wiederholung des Spektrums $\underline{Y}(f)$ mit der Periode

$$B = \frac{1}{T}. \quad (\text{B.53})$$

Falls das Spektrum $\underline{Y}(f)$ auf $-B/2 < f < B/2$ bandbegrenzt wäre, würden sich die periodischen Wiederholungen nicht überlappen und das Abtasttheorem wäre erfüllt. Da das Signal $y(t)$ zeitbegrenzt ist, kann das Spektrum $\underline{Y}(f)$ allerdings nur näherungsweise bandbegrenzt sein, so dass bei geschickter Parametrisierung bestenfalls eine näherungsweise Rekonstruktion möglich ist. Im Folgenden sei die Anzahl

$$M = 2N + 1 \quad (\text{B.54})$$

der Abtastwerte vereinfachend wieder ungerade. Mit der Abtastperiode

$$T = \frac{D}{M} \quad (\text{B.55})$$

werden M Abtastwerte

$$y_n = y(nT), \quad n = -N \dots + N, \quad (\text{B.56})$$

des Signals $y(t)$ während der Messdauer D gewonnen.

Anwenden der Fensterfunktion und Abtasten im Zeitbereich zusammen entsprechen bei Verwenden eines Rechteckfensters

$$w(t) = \frac{1}{D} \text{rect}\left(\frac{t}{D}\right) \quad (\text{B.57})$$

einer Faltung

$$\underline{Y}_p(f) = \underline{X}(f) * \text{di}_M(2\pi fT) \quad (\text{B.58})$$

mit dem Dirichlet-Kern

$$\text{di}_M(2\pi fT) = \frac{\sin(\pi fMT)}{M \sin(\pi fT)} \quad (\text{B.59})$$

im Frequenzbereich. Die gesamte Information ist in den M mit einer Abtastperiode

$$F = \frac{B}{M} = \frac{1}{D} \quad (\text{B.60})$$

gewonnenen Abtastwerten

$$\underline{Y}_{p,m} = \underline{Y}_p(mF), \quad m = -N \dots + N, \quad (\text{B.61})$$

des Spektrums $\underline{Y}_p(f)$ enthalten. Die Abtastperiode F wird auch als Auflösbandbreite (Resolution Bandwidth, RBW) bezeichnet. Die Messdauer D ist umgekehrt proportional zur Auflösbandbreite F .

Als Beispiel soll ein harmonisches, das heißt sinusförmiges Signal

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \quad (\text{B.62})$$

betrachtet werden. Das Spektrum dieses Signals $x(t)$ ergibt sich mit (B.4), (B.5) und (B.24) zu

$$\begin{aligned} \underline{X}(f) &= \mathcal{F}(A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)) \\ &= \mathcal{F}\left(\frac{A}{2} e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi)} + \frac{A}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}\right) \\ &= \mathcal{F}\left(\frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j\varphi} + \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} e^{j\varphi}\right) \\ &= \frac{A}{2} \delta(f + f_0) e^{-j\varphi} + \frac{A}{2} \delta(f - f_0) e^{j\varphi}. \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

Mit der Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses folgt das Spektrum

$$\begin{aligned} \underline{Y}_p(f) &= \left(\frac{A}{2} \delta(f + f_0) e^{-j\varphi} + \frac{A}{2} \delta(f - f_0) e^{j\varphi}\right) * \text{di}_M(2\pi fT) \\ &= \frac{A}{2} \text{di}_M(2\pi (f + f_0) T) e^{-j\varphi} + \frac{A}{2} \text{di}_M(2\pi (f - f_0) T) e^{j\varphi} \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

des bandbegrenzten abgetasteten Signals, dessen Betragsquadrat in Abbildung B.7 dargestellt ist. Dargestellt sind die Betragsquadrate $|\underline{Y}_{p,m}|^2$, $m = -N \dots + N$, der mit der Abtastperiode F gewonnenen Abtastwerte $\underline{Y}_{p,m}$, $m = -N \dots + N$, und die Betragsquadrate $|\underline{Y}_p(f)|^2$ der durch Überabtastung berechneten Zwischenwerte $\underline{Y}_p(f)$. Wegen $F \ll f \ll B$ überlappen sich die Beiträge der beiden

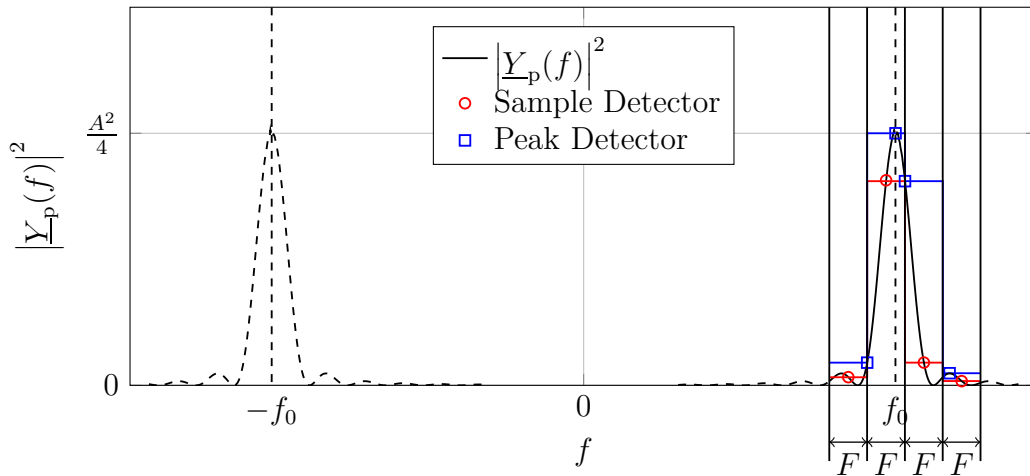


Abbildung B.7.: Spektralanalyse eines harmonischen Signals $x(t)$. Da das Betragsquadrat $|\underline{Y}_p(f)|^2$ des Spektrums $\underline{Y}_p(f)$ symmetrisch ist, wird üblicherweise nur der Anteil bei positiven Frequenzen f dargestellt

gegeneinander verschobenen Dirichlet-Kerne praktisch nicht, und man kann die Leistung des Signals $x(t)$ direkt am Maximum des Betragsquadrates $|\underline{Y}_p(f)|^2$ des Spektrums $\underline{Y}_p(f)$ ablesen.

Ein praktisches Problem der Spektralanalyse besteht darin, dass man häufig eine große Bandbreite B mit einer kleinen Abtastperiode F abtastet, was eine sehr große Anzahl M an Abtastwerten $|\underline{Y}_{p,m}|^2$, $m = -N \dots + N$, zur Folge hat. Es ist dann nicht mehr möglich, zusätzlich auch eine noch größere Anzahl an Zwischenwerten $|\underline{Y}_p(f)|^2$ darzustellen. Man löst dieses Problem, indem man mit einem Detektor einen einzigen Repräsentanten je Abtastintervall m auswählt:

Sample Detector: Im einfachsten Fall ist dieser Repräsentant das Betragsquadrat $|\underline{Y}_{p,m}|^2$ des Abtastwertes $\underline{Y}_{p,m}$. Diese mit einer vom Signal $x(t)$ unabhängigen konstanten Abtastperiode F gewonnenen Repräsentanten $|\underline{Y}_{p,m}|^2$ eignen sich als Grundlage für eine weitere Signalverarbeitung, siehe zum Beispiel Anhang B.2.2.

Peak Detector: Wenn das Ziel jedoch das Bestimmen der Leistung eines harmonischen Signals $x(t)$ ist, dessen Frequenz f_0 in der Regel kein ganzzahliges Vielfaches der Abtastperiode F ist, sollte man als Repräsentanten das Maximum $\max_{(m-\frac{1}{2})F < f < (m+\frac{1}{2})F} \{|\underline{Y}_p(f)|^2\}$ des Betragsquadrates $|\underline{Y}_p(f)|^2$ des

Spektrums $\underline{Y}_p(f)$ innerhalb des m -ten Abtastintervalls wählen.

Übliche Spektralanalysatoren stellen die Repräsentanten des Spektrums $\underline{Y}_p(f)$ logarithmisch dar und beschriften die Achse mit der Leistung, die ein entsprechendes harmonisches Signal $x(t)$ hätte.

B.2.2. Spektralanalyse stochastischer Signale

Es werden zufällige Signale $x(t)$ betrachtet, aus denen durch Anwenden einer Fensterfunktion und Abtasten zufällige Abtastwerte des Signals y_n resultieren. Der m -te Abtastwert $\underline{Y}_{p,m}$ des Spektrums $\underline{Y}_p(f)$ ist eine, durch die diskrete Fourier-Transformation (B.43) beschriebene, lineare Funktion der mittelwertfreien Abtastwerte y_n , $n = -N \dots + N$. Die Aufgabe besteht nun darin, die der Leistung entsprechende Varianz

$$\sigma_m^2 = \mathbb{E}\left\{|\underline{Y}_{p,m}|^2\right\} = \mathbb{E}\left\{|\underline{Y}_p(f = mF)|^2\right\} \quad (\text{B.65})$$

des mittelwertfreien Abtastwertes $\underline{Y}_{p,m}$ des Spektrums $\underline{Y}_p(f)$ zu schätzen.

Falls die Überlappung der periodisch wiederholten Spektren infolge der Abtastung im Zeitbereich vernachlässigbar ist, folgt mit (B.10), (B.11) und (B.49) die Näherung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{|\underline{Y}_p(f)|^2\right\} &\approx \mathbb{E}\left\{|\underline{Y}(f)|^2\right\} = \mathbb{E}\{\underline{Y}(f)\underline{Y}^*(f)\} \\ &= \mathbb{E}\{\mathcal{F}(y(t) * y^*(-t))\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau + t) y^*(\tau) d\tau\right)\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau + t) w(\tau + t) x^*(\tau) w^*(\tau) d\tau\right)\right\} \\ &= \mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\{x(\tau + t) x^*(\tau)\} w(\tau + t) w^*(\tau) d\tau\right) \end{aligned}$$

Die Autokorrelationsfunktion stationärer Signale $x(t)$ ist von τ unabhängig:

$$R_{xx}(t) = \mathbb{E}\{x(\tau + t) x(\tau)\}. \quad (\text{B.66})$$

Mit (B.9), (B.10) und (B.11) folgt schließlich die auf die Auflösebandbreite F

normierte Varianz

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{F} \mathbb{E}\left\{ \left| \underline{Y}_p(f) \right|^2 \right\} &= \frac{1}{F} \mathbb{E}\left\{ \left| \underline{Y}_p(f) \right|^2 \right\} \\
 &\approx \frac{1}{F} \mathcal{F} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\{x(\tau+t)x^*(\tau)\} w(\tau+t)w^*(\tau) d\tau \right) \\
 &= \frac{1}{F} \mathcal{F} \left(\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t) w(\tau+t)w(\tau) d\tau \right) \\
 &= \mathcal{F}(R_{xx}(t)) * \frac{\mathcal{F}(w(t) * w(-t))}{F} \\
 &= \underbrace{\mathcal{F}(R_{xx}(t))}_{\text{Leistungsdichtespektrum}} * \frac{|\mathcal{F}(w(t))|^2}{F}.
 \end{aligned} \tag{B.67}$$

Die Faltung mit $|\mathcal{F}(w(t))|^2/F$ bewirkt eine Glättung des Leistungsdichtespektrums $\mathcal{F}(R_{xx}(t))$. Die Frequenzauflösung ist aufgrund der endlichen Messdauer begrenzt. Die auf die Auflösungsbreite normierte Varianz $\mathbb{E}\left\{ \left| \underline{Y}_p(f) \right|^2 \right\} / F$ entspricht näherungsweise der Leistungsdichte.

Realteil $\text{Re}(\underline{Y}_{p,m})$ und Imaginärteil $\text{Im}(\underline{Y}_{p,m})$ des Abtastwertes $\underline{Y}_{p,m}$ haben jeweils die Varianz $\sigma_m^2/2$. Wenn man die Messung K -mal wiederholt, stehen K Realisationen $\underline{Y}_{p,m}^{(k)}$, $k = 1 \dots K$, dieser Zufallsvariablen zum Schätzen der Varianz σ_m^2 zur Verfügung. Wenn die Abtastwerte y_n , $n = -N \dots + N$, des Signals mittelwertfrei normalverteilt sind, dann ist auch der Abtastwert $\underline{Y}_{p,m}$ des Spektrums $\underline{Y}_p(f)$ mittelwertfrei normalverteilt. Da die K Messungen $\underline{Y}_{p,m}^{(k)}$, $k = 1 \dots K$, stochastisch unabhängig sind, ergibt sich die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte als Produkt der Wahrscheinlichkeitsdichten der Randverteilungen:

$$\begin{aligned}
 p(\underline{Y}_{p,m}^{(1)}, \dots, \underline{Y}_{p,m}^{(K)}) &= \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_m^2}} e^{-\frac{\text{Re}^2(\underline{Y}_{p,m}^{(k)})}{\sigma_m^2}} \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_m^2}} e^{-\frac{\text{Im}^2(\underline{Y}_{p,m}^{(k)})}{\sigma_m^2}} \\
 &= \frac{1}{(\pi\sigma_m^2)^K} e^{-\frac{\sum_{k=1}^K |\underline{Y}_{p,m}^{(k)}|^2}{\sigma_m^2}}.
 \end{aligned}$$

Man kann die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $p(\underline{Y}_{p,m}^{(1)}, \dots, \underline{Y}_{p,m}^{(K)})$ als Funktion des zu schätzenden Parameters

$$\sigma_m^2 = \theta$$

auffassen und erhält so die Likelihood-Funktion

$$p(\underline{Y}_{p,m}^{(1)}, \dots, \underline{Y}_{p,m}^{(K)}; \theta) = \frac{1}{(\pi\theta)^K} e^{-\frac{\sum_{k=1}^K |\underline{Y}_{p,m}^{(k)}|^2}{\theta}}.$$

Die Maximum-Likelihood-Schätzung

$$\hat{\sigma}_m^2 = \hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \left\{ p(\underline{Y}_{p,m}^{(1)}, \dots, \underline{Y}_{p,m}^{(K)}; \theta) \right\}$$

ist derjenige Wert des Parameters θ , für den die Likelihood-Funktion maximal wird [Kay93]. Zum Bestimmen der Maximum-Likelihood-Schätzung $\hat{\theta}$ setzt man die Ableitung der Likelihood-Funktion gleich Null:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\underline{Y}_{p,m}^{(1)}, \dots, \underline{Y}_{p,m}^{(K)}; \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} &= 0, \\ -\frac{K}{\pi^K \hat{\theta}^{K+1}} e^{-\frac{\sum_{k=1}^K |\underline{Y}_{p,m}^{(k)}|^2}{\hat{\theta}}} + \frac{1}{\pi^K \hat{\theta}^K} \frac{\sum_{k=1}^K |\underline{Y}_{p,m}^{(k)}|^2}{\hat{\theta}^2} e^{-\frac{\sum_{k=1}^K |\underline{Y}_{p,m}^{(k)}|^2}{\hat{\theta}}} &= 0, \\ -K + \frac{\sum_{k=1}^K |\underline{Y}_{p,m}^{(k)}|^2}{\hat{\theta}} &= 0 \\ \hat{\sigma}_m^2 = \hat{\theta} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |\underline{Y}_{p,m}^{(k)}|^2. \quad (\text{B.68}) \end{aligned}$$

Die im Sinne des Maximum-Likelihood-Kriteriums optimale Schätzung der Varianz $\hat{\sigma}_m^2$ erhält man durch Mitteln (Averaging) über die Betragsquadrate $|\underline{Y}_{p,m}^{(k)}|^2$, $k = 1 \dots K$ der K Messungen $\underline{Y}_{p,m}^{(k)}$, $k = 1 \dots K$. Diese Vorgehensweise ist auch als Bartlett-Methode bekannt [KK12].

B.3. Fourier-Korrespondenzen

Als weiteres Ergebnis der Herleitungen in diesem Kapitel erhält man die in Tabelle B.1 zusammengestellten Fourier-Korrespondenzen.

Tabelle B.1.: Zusammenstellung der wichtigsten Fourier-Korrespondenzen

Gleichung	Zeitbereich	Frequenzbereich
(B.1)	$\int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(f) e^{j2\pi ft} df$	$\underline{X}(f)$
(B.3)	$x(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$
(B.4)	$cx(t)$	$c\underline{X}(f)$
(B.5)	$x(t) + y(t)$	$\underline{X}(f) + \underline{Y}(f)$
(B.6)	$x(ct)$	$\frac{1}{ c } \underline{X}\left(\frac{f}{c}\right)$
(B.7)	$\underline{X}(-t)$	$x(f)$
(B.9)	$x(t) y(t)$	$\underline{X}(f) * \underline{Y}(f)$
(B.10)	$x(t) * y(t)$	$\underline{X}(f) \underline{Y}(f)$
(B.11)	$x^*(-t)$	$\underline{X}^*(f)$
(B.12)	$x(t) = x^*(t)$	$\underline{X}(f) = \underline{X}^*(-f)$
(B.24)	$x(t) e^{j2\pi f_0 t}$	$\underline{X}(f - f_0)$
(B.2)	$\delta(t)$	1
(B.8)	1	$\delta(f)$
(B.13)	$\text{sign}(t)$	$-\frac{j}{\pi f}$
(B.19)	$\text{si}(\pi Bt) = \frac{\sin(\pi Bt)}{\pi Bt}$	$\frac{1}{B} \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$
(B.31)	$F \text{III}(Ft)$	$\text{III}\left(\frac{f}{F}\right)$
(B.63)	$A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$	$\frac{A}{2} \delta(f + f_0) e^{-j\varphi} + \frac{A}{2} \delta(f - f_0) e^{j\varphi}$

Anhang C.

Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1.1 Für das infinitesimale Flächenelement dA_z gilt

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial dA_z} \langle \vec{D}, \vec{u} \rangle ds &= \int_{\substack{\text{rechts oben} \\ \text{rechts unten}}} \langle \vec{D}, \vec{u}_x \rangle ds + \int_{\substack{\text{links oben} \\ \text{rechts oben}}} \langle \vec{D}, \vec{u}_y \rangle ds \\
 &\quad - \int_{\substack{\text{links unten} \\ \text{links oben}}} \langle \vec{D}, \vec{u}_x \rangle ds - \int_{\substack{\text{rechts unten} \\ \text{links unten}}} \langle \vec{D}, \vec{u}_y \rangle ds \\
 &= \left(\frac{D_x\left(x_0 + \frac{dx}{2}, y_0, z_0\right) - D_x\left(x_0 - \frac{dx}{2}, y_0, z_0\right)}{dx} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{D_y\left(x_0, y_0 + \frac{dy}{2}, z_0\right) - D_y\left(x_0, y_0 - \frac{dy}{2}, z_0\right)}{dy} \right) dx dy \\
 &= \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} \right) dA_z,
 \end{aligned}$$

siehe Abbildung C.1.

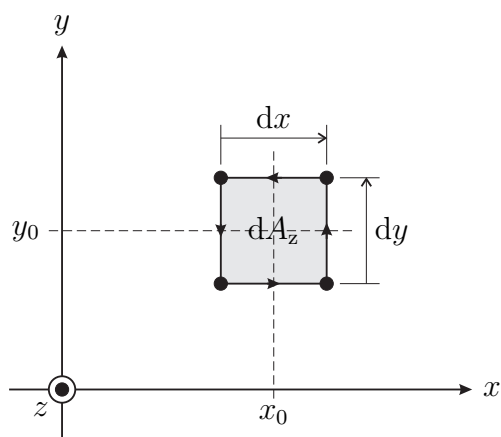


Abbildung C.1.: Infinitesimales Flächenelement $dA_z = dx dy$

Da sich nicht infinitesimale Flächen A in unendlich viele infinitesimale Flächenelemente zerlegen lassen und sich die Linienintegrale entlang der inneren Begrenzungen wegekürzen, folgt

$$\iint_A \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} \right) dA = \oint_{\partial A} \langle \vec{D}, \vec{u} \rangle ds.$$

Aufgabe 1.2 Unter Verwenden von (1.14) und (1.31) erhält man

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{H})) &= \operatorname{div} \left(\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.3 Für die Differenz der Normalkomponenten der elektrischen Flussdichten erhält man mit der z -Komponente (1.20) des Durchflutungsgesetzes und (1.31)

$$\begin{aligned} \langle \vec{D}_1 - \vec{D}_2, \vec{u}_z \rangle &= \underline{D}_{1z} - \underline{D}_{2z} \\ &= \frac{1}{j\omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\underline{H}_{1y} - \underline{H}_{2y}) - \frac{\partial}{\partial y} (\underline{H}_{1x} - \underline{H}_{2x}) \right) - \frac{1}{j\omega} (\underline{J}_{1z} - \underline{J}_{2z}) \\ &= \frac{1}{j\omega} \operatorname{div} \left(\begin{pmatrix} \underline{H}_{1y} - \underline{H}_{2y} \\ -\underline{H}_{1x} + \underline{H}_{2x} \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \frac{1}{j\omega} (\underline{J}_{1z} - \underline{J}_{2z}) \\ &= \frac{1}{j\omega} \operatorname{div} \left((\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{u}_z \right) - \frac{1}{j\omega} (\underline{J}_{1z} - \underline{J}_{2z}). \end{aligned}$$

Mit der Grenzflächenbedingung (1.60) der Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärken und der Kontinuitätsgleichung (1.41) erhält man schließlich

$$\langle \vec{D}_1 - \vec{D}_2, \vec{u}_z \rangle = -\frac{1}{j\omega} \operatorname{div}(\vec{J}_F) - \frac{1}{j\omega} (\underline{J}_{1z} - \underline{J}_{2z}) = \underline{\rho}_{eF}.$$

Dies ist die Grenzflächenbedingung (1.57) der Normalkomponenten der elektrischen Flussdichten.

Dual erhält man für die Differenz der Normalkomponenten der magnetischen Flussdichten mit der z -Komponente (1.27) des Induktionsgesetzes, (1.31), der

Grenzflächenbedingung (1.58) der Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärken und der Kontinuitätsgleichung (1.43) die Grenzflächenbedingung (1.59) der Normalkomponenten der magnetischen Flussdichten:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{B}_1 - \vec{B}_2, \vec{u}_z \rangle &= B_{1z} - B_{2z} \\
&= -\frac{1}{j\omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\underline{E}_{1y} - \underline{E}_{2y}) - \frac{\partial}{\partial y} (\underline{E}_{1x} - \underline{E}_{2x}) \right) - \frac{1}{j\omega} (\underline{M}_{1z} - \underline{M}_{2z}) \\
&= -\frac{1}{j\omega} \operatorname{div} \left(\begin{pmatrix} \underline{E}_{1y} - \underline{E}_{2y} \\ -\underline{E}_{1x} + \underline{E}_{2x} \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \frac{1}{j\omega} (\underline{M}_{1z} - \underline{M}_{2z}) \\
&= -\frac{1}{j\omega} \operatorname{div} \left((\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{u}_z \right) - \frac{1}{j\omega} (\underline{M}_{1z} - \underline{M}_{2z}) \\
&= -\frac{1}{j\omega} \operatorname{div}(\vec{M}_F) - \frac{1}{j\omega} (\underline{M}_{1z} - \underline{M}_{2z}) \\
&= \underline{\rho}_{mF}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.4 Unter Verwenden von (1.31) und (1.14) und unter Berücksichtigen der Produktregel der Ableitung erhält man

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) &= \operatorname{div}((E_y H_z - E_z H_y) \vec{u}_x + (E_z H_x - E_x H_z) \vec{u}_y + (E_x H_y - E_y H_x) \vec{u}_z) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} (E_y H_z - E_z H_y) + \frac{\partial}{\partial y} (E_z H_x - E_x H_z) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x H_y - E_y H_x) \\
&= \frac{\partial E_y}{\partial x} H_z + E_y \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial x} H_y - E_z \frac{\partial H_y}{\partial x} \\
&\quad + \frac{\partial E_z}{\partial y} H_x + E_z \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial E_x}{\partial y} H_z - E_x \frac{\partial H_z}{\partial y} \\
&\quad + \frac{\partial E_x}{\partial z} H_y + E_x \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial E_y}{\partial z} H_x - E_y \frac{\partial H_x}{\partial z} \\
&= \left(H_x \frac{\partial E_z}{\partial y} - H_x \frac{\partial E_y}{\partial z} + H_y \frac{\partial E_x}{\partial z} - H_y \frac{\partial E_z}{\partial x} + H_z \frac{\partial E_y}{\partial x} - H_z \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\
&\quad - \left(E_x \frac{\partial H_z}{\partial y} - E_x \frac{\partial H_y}{\partial z} + E_y \frac{\partial H_x}{\partial z} - E_y \frac{\partial H_z}{\partial x} + E_z \frac{\partial H_y}{\partial x} - E_z \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\
&= \langle \vec{H}, \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \rangle \\
&\quad - \langle \vec{E}, \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \rangle \\
&= \langle \vec{H}, \operatorname{rot}(\vec{E}) \rangle - \langle \vec{E}, \operatorname{rot}(\vec{H}) \rangle.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.1 Setzt man die aus der magnetischen Feldstärke \vec{H} berechnete elektrische Feldstärke \vec{E} in die mit (2.2) umgeformte Helmholtz-Gleichung (2.5) ein, so erhält man unter Verwenden von (1.44) und der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes im ladungsfreien Raum $\rho_m = 0$, siehe (1.39) und (1.50),

$$\begin{aligned}\Delta\vec{E} + \beta_0^2\vec{E} &= \text{grad}(\text{div}(\vec{E})) - \text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) + \beta_0^2\vec{E} \\ &= -j\frac{1}{\omega\varepsilon} \left(\text{grad}(\text{div}(\text{rot}(\vec{H}))) - \text{rot}(\text{rot}(\text{rot}(\vec{H}))) + \beta_0^2 \text{rot}(\vec{H}) \right) \\ &= -j\frac{1}{\omega\varepsilon} \text{rot}(-\text{rot}(\text{rot}(\vec{H})) + \text{grad}(\text{div}(\vec{H})) + \beta_0^2\vec{H}) \\ &= -j\frac{1}{\omega\varepsilon} \text{rot}(\Delta\vec{H} + \beta_0^2\vec{H}) = \vec{0}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2.2 Unter Verwenden von (1.31), (1.14) und (2.1) folgt aus (2.2)

$$\begin{aligned}\Delta\vec{H} &= \text{grad}(\text{div}(\vec{H})) - \text{rot}(\text{rot}(\vec{H})) \\ &= \text{grad}\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}\right) \\ &\quad - \text{rot}\left(\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial x\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y\partial z}\right)\vec{u}_y \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z\partial y} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}\right)\vec{u}_z - \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z\partial x}\right)\vec{u}_x \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial x\partial y}\right)\vec{u}_y - \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y\partial z}\right)\vec{u}_z \\ &= \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}\right)\vec{u}_y \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}\right)\vec{u}_z \\ &= \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2.3 Die momentane elektrische Energiedichte ist

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon (E_x^2 + E_y^2),$$

siehe (1.45) und (1.74). Die momentane magnetische Energiedichte (1.75) berechnet sich mit (1.49), (2.28), (1.2), (1.4) und (2.25) zu

$$w_m = \frac{1}{2}\mu (H_x^2 + H_y^2) = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{E_y^2}{Z_F^2} + \frac{E_x^2}{Z_F^2} \right) = \frac{1}{2}\varepsilon (E_x^2 + E_y^2) = w_e.$$

Die Norm des Poynting-Vektors gemäß (1.77) berechnet sich mit (2.28), (1.2), (1.4) und (2.25) zu

$$\|\vec{S}\| = E_x H_y - E_y H_x = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (E_x^2 + E_y^2).$$

Mit (2.30) und (2.44) folgt die Energiegeschwindigkeit

$$v_e = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Aufgabe 2.4 Ableiten der Phasengeschwindigkeit (2.43) nach der Kreisfrequenz ergibt

$$\frac{\partial v_p}{\partial \omega} = \frac{\beta - \omega \frac{\partial \beta}{\partial \omega}}{\beta^2}.$$

Auflösen nach der Gruppengeschwindigkeit (2.47) ergibt

$$v_g = \frac{\omega}{\beta - \beta^2 \frac{\partial v_p}{\partial \omega}},$$

was sich mit (2.43) zu

$$v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p} \frac{\partial v_p}{\partial \omega}}$$

vereinfachen lässt.

Aufgabe 2.5 Es handelt sich um eine elliptisch rechtsdrehend polarisierte Welle. Allgemein gilt für die Momentanwerte der elektrischen Feldkomponenten

$$E_{0x} = \operatorname{Re}(\underline{E}_{0x} e^{j\omega t}) = \underbrace{\operatorname{Re}(\underline{E}_{0x})}_{A=1 \text{ V m}^{-1}} \cos(\omega t) - \underbrace{\operatorname{Im}(\underline{E}_{0x})}_{B=0,5 \text{ V m}^{-1}} \sin(\omega t)$$

und

$$E_{0y} = \operatorname{Re}(\underline{E}_{0y} e^{j\omega t}) = \underbrace{\operatorname{Re}(\underline{E}_{0y})}_{C=1 \text{ V m}^{-1}} \cos(\omega t) - \underbrace{\operatorname{Im}(\underline{E}_{0y})}_{D=-0,5 \text{ V m}^{-1}} \sin(\omega t).$$

Die Maximalwerte der elektrischen Feldstärkekomponenten sind dann

$$E_{0x,\max} = |\underline{E}_{0x}| = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1,25} \text{ V m}^{-1}$$

und

$$E_{0y,\max} = |\underline{E}_{0y}| = \sqrt{C^2 + D^2} = \sqrt{1,25} \text{ V m}^{-1}.$$

Der Betrag des momentanen elektrischen Feldstärkevektors \vec{E}_0 ergibt sich zu¹

$$\begin{aligned} \|\vec{E}_0\| &= \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \\ &= \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}{2} + \frac{A^2 - B^2 + C^2 - D^2}{2} \cos(2\omega t) - (AB + CD) \sin(2\omega t)}. \end{aligned}$$

Die den Halbachsen entsprechenden Extremalwerte des Betrags des momentanen elektrischen Feldstärkevektors \vec{E}_0 berechnet man damit zu²

$$\begin{aligned} \|\vec{E}_0\|_{\max,\min} &= \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(A^2 - B^2 + C^2 - D^2)^2}{4} + (AB + CD)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2,5}{2} \pm \sqrt{\frac{1,25}{4}}} \text{ V m}^{-1} \\ &= \sqrt{1,25 \pm 0,75} \text{ V m}^{-1}. \end{aligned}$$

Für die Zeitpunkte, zu denen die Extremalwerte erreicht werden, gilt

$$2(\omega t)_{\max,\min} + \arctan\left(\frac{2(AB + CD)}{A^2 - B^2 + C^2 - D^2}\right) = 0, +\pi.$$

Hier ist

$$\frac{2(AB + CD)}{A^2 - B^2 + C^2 - D^2} = 0.$$

Daraus folgt für die Zeitpunkte, zu denen die Extremalwerte erreicht werden

$$(\omega t)_{\max,\min} = 0, \frac{\pi}{2}.$$

¹ Es werden die Additionstheoreme $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$, $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$ und $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$ verwendet.

² Die Überlagerung $A_1 \cos(2\omega t) - A_2 \sin(2\omega t)$ einer Kosinusschwingung und einer Sinusschwingung gleicher Kreisfrequenz ergibt eine Kosinusschwingung $\sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos(2\omega t + \varphi)$, für deren Nullphase $\tan(\varphi) = \frac{A_2}{A_1}$ gilt.

Für den Winkel α , um den die große Hauptachse der Ellipse bezüglich der x -Achse verdreht ist, gilt

$$\tan(\alpha) = \frac{E_{0y}((\omega t)_{\max})}{E_{0x}((\omega t)_{\max})} = \frac{C \cos((\omega t)_{\max}) - D \sin((\omega t)_{\max})}{A \cos((\omega t)_{\max}) - B \sin((\omega t)_{\max})}.$$

Mit den vorgegebenen Werten und $(\omega t)_{\max} = 0$ folgt

$$\tan(\alpha) = 1,$$

das heißt

$$\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Man erhält die in Abbildung C.2 gezeigte Polarisationsellipse.

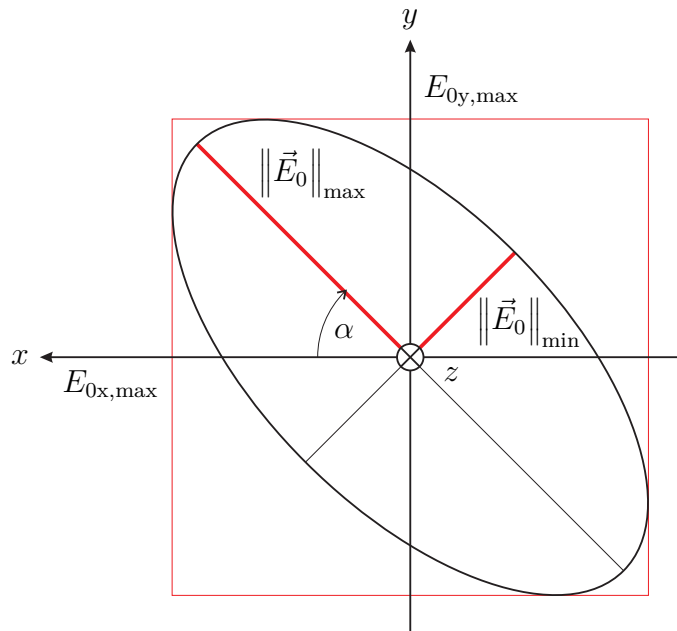


Abbildung C.2.: Polarisationsellipse für $\underline{E}_{0x} = (1 + j0,5) \text{ V m}^{-1}$ und $\underline{E}_{0y} = (1 - j0,5) \text{ V m}^{-1}$

Aufgabe 3.1 Mit (3.2) folgt aus (2.36) die kritische Kreisfrequenz

$$\omega_c = \frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

Tabelle C.1.: Kritische Kreisfrequenzen ω_c

ω_c	m		
	0	1	2
0		$1,89 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$	$3,77 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$
n	1	$3,14 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$	$4,91 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$
	2	$6,28 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$	$7,33 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$

Mit den Abmessungen $a = 50 \text{ mm}$ und $b = 30 \text{ mm}$ und (2.45) ergeben sich die Zahlenwerte in Tabelle C.1.

Man erkennt, dass bei einer Kreisfrequenz von $\omega = 2 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$ nur $\text{TE}_{1,0}$ -Wellen ausbreitungsfähig sind. Damit ergeben sich mit (2.46), (2.48), (2.42), (2.38), (2.45) und (2.43):

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} = 9,17 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1},$$

$$v_g = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} = 0,981 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1},$$

$$\lambda = \frac{2\pi v_p}{\omega} = 28,8 \text{ cm}.$$

Aufgabe 3.2 Mit (1.67), (1.46), (3.3) und (3.4) ergibt sich die elektrische Flächenladungsdichte auf der linken Seitenwand $x = 0$

$$\rho_{\text{eF}} = \varepsilon \underline{E}_x = j \frac{\omega \varepsilon \mu \underline{H}_0 n \pi}{\beta_c^2 b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j \beta z},$$

der rechten Seitenwand $x = a$

$$\rho_{\text{eF}} = -\varepsilon \underline{E}_x = -j \frac{\omega \varepsilon \mu \underline{H}_0 n \pi}{\beta_c^2 b} \cos(m\pi) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j \beta z}$$

$$= \begin{cases} j \frac{\omega \varepsilon \mu \underline{H}_0 n \pi}{\beta_c^2 b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j \beta z} & m \text{ ungerade} \\ -j \frac{\omega \varepsilon \mu \underline{H}_0 n \pi}{\beta_c^2 b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j \beta z} & m \text{ gerade} \end{cases},$$

dem Boden $y = 0$

$$\rho_{\text{eF}} = \varepsilon \underline{E}_y = -j \frac{\omega \varepsilon \mu \underline{H}_0 m \pi}{\beta_c^2 a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{\mp j \beta z}$$

und dem Deckel $y = b$

$$\begin{aligned}\rho_{\text{eF}} &= -\varepsilon \underline{E}_y = j \frac{\omega \varepsilon \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos(n\pi) e^{\mp j\beta z} \\ &= \begin{cases} -j \frac{\omega \varepsilon \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{\mp j\beta z} & n \text{ ungerade} \\ j \frac{\omega \varepsilon \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{\mp j\beta z} & n \text{ gerade} \end{cases}.\end{aligned}$$

Der Normaleneinheitsvektor auf der linken Seitenwand entspricht dem Einheitsvektor \vec{u}_x in x -Richtung. Dies in (1.68) eingesetzt ergibt mit (3.1) und (3.6) die elektrische Flächenstromdichte

$$\begin{aligned}\vec{J}_{\text{F}} &= -\vec{H} \times \vec{u}_x = \underline{H}_y \vec{u}_z - \underline{H}_z \vec{u}_y \\ &= \pm j \frac{\beta \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} \vec{u}_z - \underline{H}_0 \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} \vec{u}_y\end{aligned}$$

auf der linken Seitenwand $x = 0$ des Hohlleiters. Der Normaleneinheitsvektor der rechten Seitenwand entspricht dem negativen Einheitsvektor $-\vec{u}_x$ in x -Richtung. Dies in (1.68) eingesetzt ergibt mit (3.1) und (3.6) die elektrische Flächenstromdichte

$$\begin{aligned}\vec{J}_{\text{F}} &= \vec{H} \times \vec{u}_x = -\underline{H}_y \vec{u}_z + \underline{H}_z \vec{u}_y \\ &= \mp j \frac{\beta \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos(m\pi) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} \vec{u}_z + \underline{H}_0 \cos(m\pi) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} \vec{u}_y\end{aligned}$$

auf der rechten Seitenwand $x = a$ des Hohlleiters. Der Normaleneinheitsvektor auf dem Boden entspricht dem Einheitsvektor \vec{u}_y in y -Richtung. Dies in (1.68) eingesetzt ergibt mit (3.1) und (3.5) die elektrische Flächenstromdichte

$$\begin{aligned}\vec{J}_{\text{F}} &= -\vec{H} \times \vec{u}_y = \underline{H}_z \vec{u}_x - \underline{H}_x \vec{u}_z \\ &= \underline{H}_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{\mp j\beta z} \vec{u}_x \mp j \frac{\beta \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{\mp j\beta z} \vec{u}_z\end{aligned}$$

auf dem Boden $y = 0$ des Hohlleiters. Der Normaleneinheitsvektor auf dem Deckel entspricht dem negativen Einheitsvektor $-\vec{u}_y$ in y -Richtung. Dies in (1.68) eingesetzt ergibt mit (3.1) und (3.5) die elektrische Flächenstromdichte

$$\begin{aligned}\vec{J}_{\text{F}} &= \vec{H} \times \vec{u}_y = -\underline{H}_z \vec{u}_x + \underline{H}_x \vec{u}_z \\ &= -\underline{H}_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos(n\pi) e^{\mp j\beta z} \vec{u}_x \pm j \frac{\beta \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos(n\pi) e^{\mp j\beta z} \vec{u}_z\end{aligned}$$

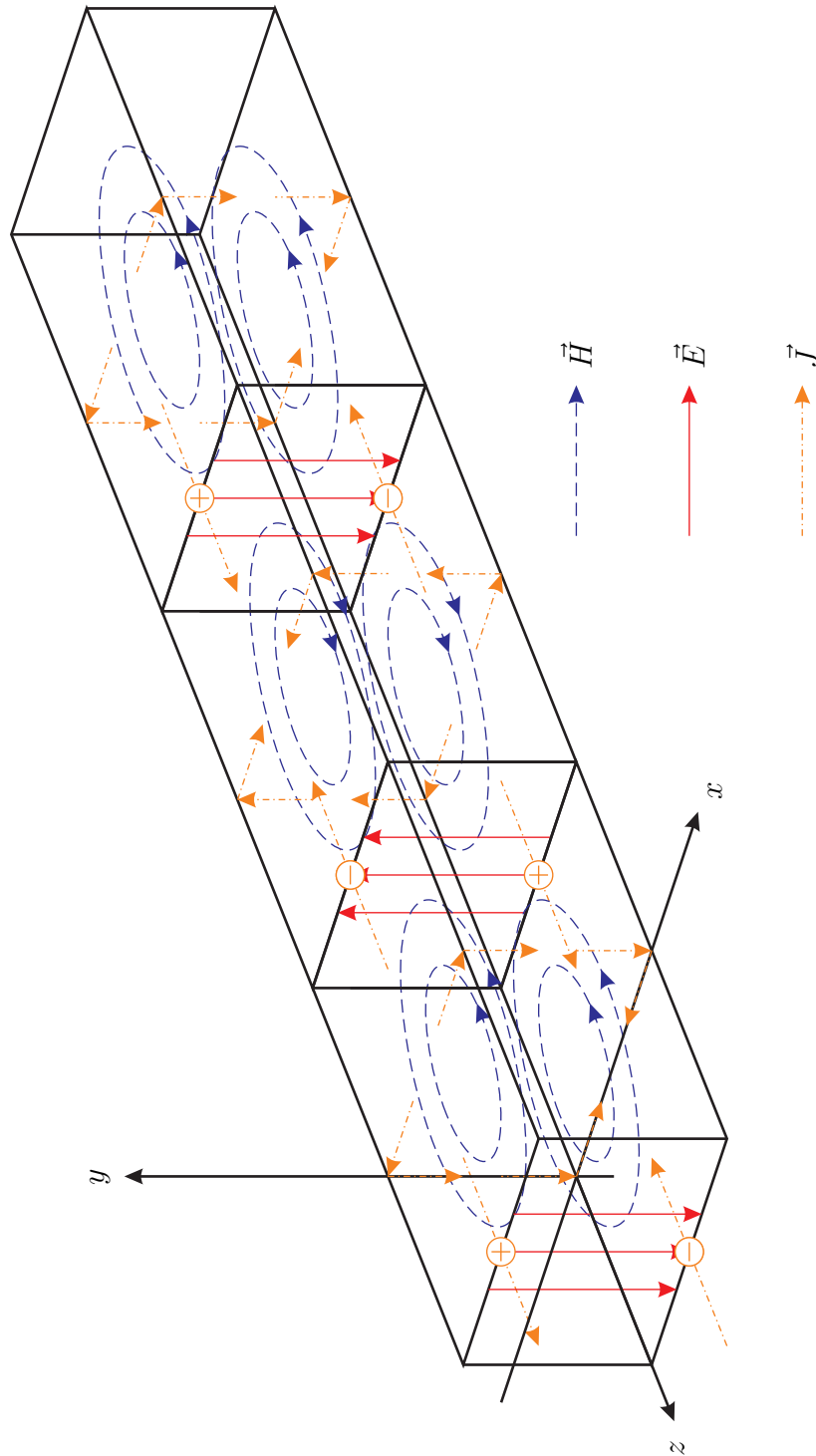


Abbildung C.3.: Sich in positive z -Richtung ausbreitende $TE_{1,0}$ -Welle

auf dem Deckel $y = b$ des Hohlleiters.

In Abbildung C.3 sind die Ergebnisse für eine $TE_{1,0}$ -Welle graphisch dargestellt.

Die Überprüfung mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (1.41) ergibt mit (2.35) für die linke Seitenwand $x = 0$ des Hohlleiters

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{J}_F) &= \frac{\beta^2 \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} + \underline{H}_0 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} \\ &= \frac{\omega^2 \varepsilon \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} \\ &= -j\omega \underline{\rho}_{eF},\end{aligned}$$

für die rechte Seitenwand $x = a$ des Hohlleiters

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{J}_F) &= -\frac{\beta^2 \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos(m\pi) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} - \underline{H}_0 \cos(m\pi) \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} \\ &= -\frac{\omega^2 \varepsilon \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos(m\pi) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} \\ &= -j\omega \underline{\rho}_{eF},\end{aligned}$$

für den Boden $y = 0$ des Hohlleiters

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{J}_F) &= -\underline{H}_0 \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{\mp j\beta z} - \frac{\beta^2 \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{\mp j\beta z} \\ &= -\frac{\omega^2 \varepsilon \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{\mp j\beta z} \\ &= -j\omega \underline{\rho}_{eF}\end{aligned}$$

und für den Deckel $y = b$ des Hohlleiters

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{J}_F) &= \underline{H}_0 \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos(n\pi) e^{\mp j\beta z} + \frac{\beta^2 \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos(n\pi) e^{\mp j\beta z} \\ &= \frac{\omega^2 \varepsilon \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos(n\pi) e^{\mp j\beta z} \\ &= -j\omega \underline{\rho}_{eF}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3.3 Mit (1.14) und (2.1) erhält man

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(\phi)) &= \operatorname{rot}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{u}_z\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right)\vec{u}_z \\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3.4 Mit (1.31) und (2.1) erhält man

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\phi)) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{u}_z\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

Aufgabe 3.5 Im Fall horizontaler Polarisation gilt mit (2.15) für die elektrischen Feldstärken der beiden zu überlagernden ebenen homogenen Wellen

$$\vec{E}_1 = \underline{E}_0 e^{-j\langle\vec{\beta}_1, \vec{r}\rangle} \vec{u}_x = \underline{E}_0 e^{-j\beta_0(y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha))} \vec{u}_x$$

und

$$\vec{E}_2 = \underline{E}_0 e^{-j\langle\vec{\beta}_2, \vec{r}\rangle} \vec{u}_x = \underline{E}_0 e^{-j\beta_0(-y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha))} \vec{u}_x.$$

Es folgt für die Überlagerung der Wellen

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2\underline{E}_0 \cos(\beta_0 y \sin(\alpha)) e^{-j\beta_0 z \cos(\alpha)} \vec{u}_x.$$

Die magnetischen Feldstärken der zu überlagernden ebenen homogenen Wellen ergeben sich durch sinngemäßes Anwenden von (2.28) zu

$$\vec{H}_1 = \frac{\underline{E}_0}{Z_F} e^{-j\beta_0(y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha))} (\cos(\alpha) \vec{u}_y - \sin(\alpha) \vec{u}_z)$$

und

$$\vec{H}_2 = \frac{\underline{E}_0}{Z_F} e^{-j\beta_0(-y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha))} (\cos(\alpha) \vec{u}_y + \sin(\alpha) \vec{u}_z).$$

Hieraus erhält man für die Überlagerung der Wellen

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 + \vec{H}_2 &= \frac{2\underline{E}_0}{Z_F} e^{-j\beta_0 z \cos(\alpha)} \\ &\quad (\cos(\alpha) \cos(\beta_0 y \sin(\alpha)) \vec{u}_y + j \sin(\alpha) \sin(\beta_0 y \sin(\alpha)) \vec{u}_z). \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist eine sich in z -Richtung ausbreitende transversalelektrische Welle mit der Phasenkonstante

$$\beta = \beta_0 \cos(\alpha),$$

woraus sich mit (2.12) die kritische Phasenkonstante

$$\beta_c = \sqrt{\beta_0^2 - \beta^2} = \beta_0 \sin(\alpha)$$

ergibt. In y -Richtung hat die resultierende elektrische Feldstärke Nullstellen im Abstand von

$$\Delta y = \frac{\pi}{\beta_0 \sin(\alpha)} = \frac{\pi}{\beta_c}.$$

An den Orten der Nullstellen kann man einen elektrischen Leiter parallel zur x - z -Ebene einfügen, ohne dass dies einen Einfluss auf das elektromagnetische Feld hätte. Der Leiterabstand muss folglich ein ganzzahliges Vielfaches des Abstands der Nullstellen sein:

$$b = \frac{n\pi}{\beta_c}.$$

Setzt man weiterhin

$$\underline{E}_0 = -j \frac{Z_F \beta_0}{2\beta_c} \underline{H}_0$$

ein, so erhält man bis auf eine vertikale Verschiebung in y -Richtung, die aus Abschnitt 3.2.3.1 bekannte Lösung

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -j \frac{Z_F \beta_0 \underline{H}_0}{\beta_c} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z} \vec{u}_x$$

und

$$\vec{H}_1 + \vec{H}_2 = -j \frac{\beta \underline{H}_0}{\beta_c} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z} \vec{u}_y + \underline{H}_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z} \vec{u}_z.$$

Die transversalelektrische Welle entsteht durch Überlagern zweier zwischen den Leitern reflektierter horizontal polarisierter ebener homogener Wellen.

Im Fall vertikaler Polarisation gilt mit (2.14) für die magnetischen Feldstärken der beiden zu überlagernden ebenen homogenen Wellen

$$\vec{H}_1 = \underline{H}_0 e^{-j(\vec{\beta}_1, \vec{r})} \vec{u}_x = \underline{H}_0 e^{-j\beta_0(y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha))} \vec{u}_x$$

und

$$\vec{H}_2 = \underline{H}_0 e^{-j(\vec{\beta}_2, \vec{r})} \vec{u}_x = \underline{H}_0 e^{-j\beta_0(-y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha))} \vec{u}_x.$$

Es folgt für die Überlagerung der Wellen

$$\vec{H}_1 + \vec{H}_2 = 2\underline{H}_0 \cos(\beta_0 y \sin(\alpha)) e^{-j\beta_0 z \cos(\alpha)} \vec{u}_x.$$

Die elektrischen Feldstärken der zu überlagernden ebenen homogenen Wellen ergeben sich durch sinngemäßes Anwenden von (2.27) zu

$$\vec{E}_1 = \underline{H}_0 Z_F e^{-j\beta_0(y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha))} (-\cos(\alpha) \vec{u}_y + \sin(\alpha) \vec{u}_z)$$

und

$$\vec{E}_2 = \underline{H}_0 Z_F e^{-j\beta_0(-y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha))} (-\cos(\alpha) \vec{u}_y - \sin(\alpha) \vec{u}_z).$$

Hieraus erhält man für die Überlagerung der Wellen

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = & 2\underline{H}_0 Z_F e^{-j\beta_0 z \cos(\alpha)} \\ & (-\cos(\alpha) \cos(\beta_0 y \sin(\alpha)) \vec{u}_y - j \sin(\alpha) \sin(\beta_0 y \sin(\alpha)) \vec{u}_z). \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist eine sich in z -Richtung ausbreitende transversalmagnetische Welle mit der Phasenkonstante

$$\beta = \beta_0 \cos(\alpha),$$

woraus sich mit (2.12) wieder die kritische Phasenkonstante

$$\beta_c = \sqrt{\beta_0^2 - \beta^2} = \beta_0 \sin(\alpha)$$

ergibt. In y -Richtung hat die z -Komponente der resultierenden elektrischen Feldstärke Nullstellen im Abstand von

$$\Delta y = \frac{\pi}{\beta_0 \sin(\alpha)} = \frac{\pi}{\beta_c}.$$

An den Orten der Nullstellen der z -Komponente könnte man einen elektrischen Leiter parallel zur x - z -Ebene einfügen. Die nicht verschwindende y -Komponente der resultierenden elektrischen Feldstärke wäre eine Normalkomponente auf der Oberfläche dieses Leiters. Der Leiterabstand muss auch hier ein ganzzahliges Vielfaches des Abstands der Nullstellen sein:

$$b = \frac{n\pi}{\beta_c}.$$

Setzt man weiterhin

$$\underline{H}_0 = j \frac{\beta_0}{2Z_F \beta_c} \underline{E}_0$$

ein, so erhält man die aus Abschnitt 3.2.3.1 bekannte Lösung

$$\vec{H}_1 + \vec{H}_2 = j \frac{\beta_0 \underline{E}_0}{Z_F \beta_c} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z} \vec{u}_x$$

und

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -j \frac{\beta \underline{E}_0}{\beta_c} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z} \vec{u}_y + \underline{E}_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z} \vec{u}_z.$$

Die transversalmagnetische Welle entsteht durch Überlagern zweier zwischen den Leitern reflektierter vertikal polarisierter ebener homogener Wellen.

Für den Winkel α gilt

$$\sin(\alpha) = \frac{\beta_c}{\beta_0} = \frac{n\pi}{b\beta_0}.$$

Aus (2.46) folgt die Phasengeschwindigkeit

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} \\ &= \frac{c}{\sqrt{1 - (\sin(\alpha))^2}} = \frac{c}{\cos(\alpha)} \end{aligned}$$

und aus (2.48) folgt die Gruppengeschwindigkeit

$$\begin{aligned} v_g &= c \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2} \\ &= c \sqrt{1 - (\sin(\alpha))^2} = c \cos(\alpha), \end{aligned}$$

siehe Abbildung C.4.

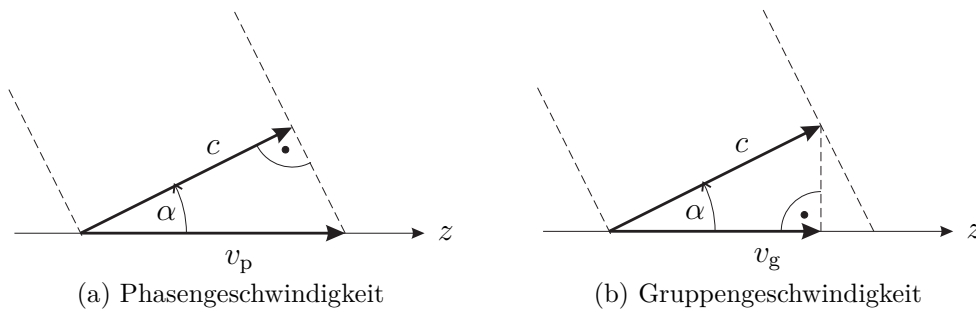


Abbildung C.4.: Ermitteln der Geschwindigkeiten durch Projektion der Lichtgeschwindigkeit c

Aufgabe 3.6 Für die Kapazitätsbeläge gilt aus Symmetriegründen

$$C'_{1,0} = C'_{2,0} = C'_{1,2} = C',$$

siehe Abbildung 3.16. Mit (3.63), (3.63) und (3.63) folgen die Influenzbelagskoeffizienten:

$$\begin{aligned} c'_{1,1} &= C'_{1,0} + C'_{1,2} = 2C', \\ c'_{2,2} &= C'_{2,0} + C'_{1,2} = 2C', \\ c'_{1,2} &= -C'_{1,2} = -C'. \end{aligned}$$

Mit (3.70) erhält man schließlich den Kopplungsfaktor

$$k = -\frac{-C'}{2C'} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4.1 Die Tangentialvektoren und die metrischen Größen ergeben sich entsprechend (4.11), (4.12) und (4.13) wie folgt:

$$\begin{aligned}\vec{t}_r &= \frac{\partial x}{\partial r} \vec{u}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{u}_y + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{u}_z = \cos(\varphi) \vec{u}_x + \sin(\varphi) \vec{u}_y, \\ g_r &= \|\vec{t}_r\| = 1, \\ \vec{t}_\varphi &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \vec{u}_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \vec{u}_y + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \vec{u}_z = -r \sin(\varphi) \vec{u}_x + r \cos(\varphi) \vec{u}_y, \\ g_\varphi &= \|\vec{t}_\varphi\| = r, \\ \vec{t}_z &= \frac{\partial x}{\partial z} \vec{u}_x + \frac{\partial y}{\partial z} \vec{u}_y + \frac{\partial z}{\partial z} \vec{u}_z = \vec{u}_z, \\ g_z &= \|\vec{t}_z\| = 1.\end{aligned}$$

Durch Normieren der Tangentialvektoren erhält man die Einheitsvektoren, vergleiche (4.14), (4.15) und (4.16):

$$\begin{aligned}\vec{u}_r &= \cos(\varphi) \vec{u}_x + \sin(\varphi) \vec{u}_y, \\ \vec{u}_\varphi &= -\sin(\varphi) \vec{u}_x + \cos(\varphi) \vec{u}_y, \\ \vec{u}_z &= \vec{u}_z.\end{aligned}$$

Die Integrationselemente berechnet man entsprechend (4.19), (4.21) und (4.25) zu:

$$\begin{aligned}\|\mathrm{d}\vec{s}\|^2 &= g_r^2 \mathrm{d}r^2 + g_\varphi^2 \mathrm{d}\varphi^2 + g_z^2 \mathrm{d}z^2 \\ &= \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2, \\ \mathrm{d}\vec{A}_r &= g_\varphi g_z \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z \vec{u}_r \\ &= r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z \vec{u}_r, \\ \mathrm{d}\vec{A}_\varphi &= g_r g_z \mathrm{d}r \mathrm{d}z \vec{u}_\varphi \\ &= \mathrm{d}r \mathrm{d}z \vec{u}_\varphi, \\ \mathrm{d}\vec{A}_z &= g_r g_\varphi \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \vec{u}_z \\ &= r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \vec{u}_z, \\ \mathrm{d}V &= g_r g_\varphi g_z \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z \\ &= r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Schließlich ergeben sich analog zu (4.27), (4.29), (4.31) und (4.33) noch die

Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 \text{grad}(\underline{\phi}) &= \frac{1}{g_r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{g_\varphi} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{1}{g_z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{u}_z \\
 &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{u}_z, \\
 \text{div}(\vec{D}) &= \frac{1}{g_r g_\varphi g_z} \left(\frac{\partial}{\partial r} (D_r g_\varphi g_z) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (D_\varphi g_r g_z) + \frac{\partial}{\partial z} (D_z g_r g_\varphi) \right) \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}, \\
 \text{rot}(\vec{H}) &= \frac{1}{g_\varphi g_z} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \{ \underline{H}_z g_z \} - \frac{\partial}{\partial z} (\underline{H}_\varphi g_\varphi) \right) \vec{u}_r \\
 &\quad + \frac{1}{g_r g_z} \left(\frac{\partial}{\partial z} (\underline{H}_r g_r) - \frac{\partial}{\partial r} (\underline{H}_z g_z) \right) \vec{u}_\varphi \\
 &\quad + \frac{1}{g_r g_\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} (\underline{H}_\varphi g_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\underline{H}_r g_r) \right) \vec{u}_z \\
 &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial \underline{H}_r}{\partial z} - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{H}_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_z, \\
 \Delta \underline{\phi} &= \frac{1}{g_r g_\varphi g_z} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{g_\varphi g_z}{g_r} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{g_r g_z}{g_\varphi} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{g_r g_\varphi}{g_z} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial z} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \underline{\phi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{\phi}}{\partial z^2}.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.2 Die Komponenten des vektoriellen Richtungsfaktors (4.42) ergeben sich, wenn man das Volumen gemäß Abbildung C.5 in zwei Hälften zerlegt, zu³

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_{xyz} &= \iiint_{V'_1} \underline{J}_{xyz}(\vec{r}') e^{j\langle \vec{\beta}, \vec{r}' \rangle} dV' + \iiint_{V'_2} \underline{J}_{xyz}(\vec{r}') e^{j\langle \vec{\beta}, \vec{r}' \rangle} dV' \\
 &= \iiint_{V'_1} \underline{J}_{xyz}(\vec{r}') e^{j\langle \vec{\beta}, \vec{r}' \rangle} dV' + \iiint_{V'_1} \underline{J}_{xyz}^*(\vec{r}') e^{-j\langle \vec{\beta}, \vec{r}' \rangle} dV' \\
 &= \iiint_{V'_1} 2 \text{Re}(\underline{J}_{xyz}(\vec{r}') e^{j\langle \vec{\beta}, \vec{r}' \rangle}) dV'.
 \end{aligned}$$

Der Richtungsfaktor \underline{E}_{xyz} ist hier reell. Damit ist das Argument $\arg(\underline{E}_{xyz})$ des Richtungsfaktors von der Raumrichtung unabhängig.

³ Der Realteil einer komplexen Größe berechnet sich zu $\text{Re}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\underline{x} + \underline{x}^*)$.

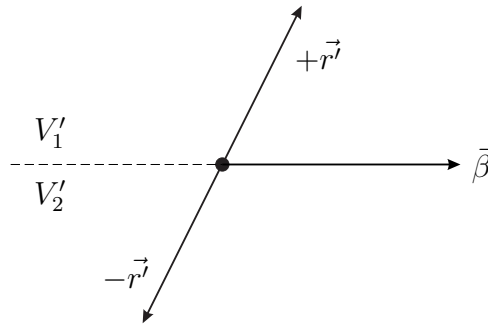


Abbildung C.5.: Zum Berechnen des Phasenzentrums

Aufgabe 4.3 Mit

$$R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

und der Greenschen Funktion

$$\underline{\psi}(z) = \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R}$$

ergibt sich die erste Ableitung der Greenschen Funktion nach z zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\psi}(z)}{\partial z} &= \frac{\partial \underline{\psi}(z)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z} \\ &= \frac{-j\beta e^{-j\beta R} R - e^{-j\beta R}}{4\pi R^2} \frac{z}{\underbrace{\sqrt{\rho^2 + z^2}}_R} = -\frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R^3} (j\beta R + 1) z. \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung der Greenschen Funktion nach z berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \underline{\psi}(z)}{\partial z^2} &= -\frac{(-j\beta e^{-j\beta R} (j\beta R + 1) + e^{-j\beta R} j\beta) R^3 - e^{-j\beta R} (j\beta R + 1) 3R^2 z^2}{4\pi R^6} \\ &\quad - \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R^3} (j\beta R + 1) \\ &= \frac{(-\beta^2 R^2 + j3\beta R + 3) z^2 - j\beta R^3 - R^2}{4\pi R^5} e^{-j\beta R}. \end{aligned}$$

Mit

$$z^2 = R^2 - \rho^2$$

folgt schließlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \underline{\psi}(z)}{\partial z^2} &= \frac{(-\beta^2 R^2 + j3\beta R + 3) (R^2 - \rho^2) - j\beta R^3 - R^2}{4\pi R^5} e^{-j\beta R} \\ &= \frac{-\beta^2 R^4 + j2\beta R^3 + 2R^2 + \beta^2 R^2 \rho^2 - j3\beta R \rho^2 - 3\rho^2}{4\pi R^5} e^{-j\beta R}. \end{aligned}$$

Für stückweise konstante Basisfunktionen $f_n(z')$ vereinfacht sich (4.68) zu

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}_{m,n} &= -jZ_F \int_{z_n - \frac{\Delta z}{2}}^{z_n + \frac{\Delta z}{2}} \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \underline{\psi}(z - z')}{\partial z'^2} \Big|_{z_m} + \beta \underline{\psi}(z_m - z') \right) 2\pi \rho \, dz' \\
 &= -jZ_F \int_{z_n - \frac{\Delta z}{2}}^{z_n + \frac{\Delta z}{2}} \frac{e^{-j\beta R_m}}{2\beta R_m^5} \left(j2\beta R_m^3 + 2R_m^2 + \beta^2 R_m^2 \rho^2 - j3\beta R_m \rho^2 - 3\rho^2 \right) \rho \, dz' \\
 &= -jZ_F \int_{z_n - \frac{\Delta z}{2}}^{z_n + \frac{\Delta z}{2}} \frac{e^{-j\beta R_m}}{2\beta R_m^5} \left((1 + j\beta R_m) (2R_m^2 - 3\rho^2) + \beta^2 \rho^2 R_m^2 \right) \rho \, dz'.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.4 Zweimaliges Anwenden der Produktintegrationsregel ergibt

$$\begin{aligned}
 &\int_{z_k}^{z_l} \left(\frac{\partial^2 \underline{\psi}(z - z')}{\partial z'^2} + \beta^2 \underline{\psi}(z - z') \right) f_n(z') \, dz' \\
 &= \int_{z_k}^{z_l} \left(\frac{\partial^2 \underline{\psi}(z - z')}{\partial z'^2} f_n(z') + \beta^2 \underline{\psi}(z - z') f_n(z') \right) dz' \\
 &= \left[\frac{\partial \underline{\psi}(z - z')}{\partial z'} f_n(z') \right]_{z'=z_k}^{z_l} + \int_{z_k}^{z_l} \left(-\frac{\partial \underline{\psi}(z - z')}{\partial z'} \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} + \beta^2 \underline{\psi}(z - z') f_n(z') \right) dz' \\
 &= \left[\frac{\partial \underline{\psi}(z - z')}{\partial z'} f_n(z') - \underline{\psi}(z - z') \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \right]_{z'=z_k}^{z_l} \\
 &\quad + \int_{z_k}^{z_l} \left(\frac{\partial^2 f_n(z')}{\partial z'^2} + \beta^2 f_n(z') \right) \underline{\psi}(z - z') \, dz' \\
 &= - \left[\frac{\partial \underline{\psi}(z - z')}{\partial z} f_n(z') + \underline{\psi}(z - z') \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \right]_{z'=z_k}^{z_l} \\
 &\quad + \int_{z_k}^{z_l} \left(\frac{\partial^2 f_n(z')}{\partial z'^2} + \beta^2 f_n(z') \right) \underline{\psi}(z - z') \, dz'.
 \end{aligned}$$

Die Ableitungen der stückweise sinusförmigen Basisfunktionen $f_n(z')$ berechnen sich zu

$$\frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} = \begin{cases} \frac{\beta \cos(\beta(z' - z_{n-1}))}{\sin(\beta \Delta z)} & z_{n-1} \leq z' \leq z_n \\ -\frac{\beta \cos(\beta(z_{n+1} - z'))}{\sin(\beta \Delta z)} & z_n \leq z' \leq z_{n+1} \end{cases}$$

und

$$\frac{\partial^2 f_n(z')}{\partial z'^2} = \begin{cases} \frac{-\beta^2 \sin(\beta(z' - z_{n-1}))}{\sin(\beta\Delta z)} & z_{n-1} \leq z' \leq z_n \\ \frac{-\beta^2 \sin(\beta(z_{n+1} - z'))}{\sin(\beta\Delta z)} & z_n \leq z' \leq z_{n+1} \end{cases} = -\beta^2 f_n(z').$$

Damit folgen

$$\frac{\partial^2 f_n(z')}{\partial z'^2} + \beta^2 f_n(z') = 0$$

und

$$\begin{aligned} & \int_{z_k}^{z_l} \left(\frac{\partial^2 \underline{\psi}(z - z')}{\partial z^2} + \beta^2 \underline{\psi}(z - z') \right) f_n(z') dz' \\ &= - \left[\frac{\partial \underline{\psi}(z - z')}{\partial z} f_n(z') + \underline{\psi}(z - z') \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \right]_{z'=z_k}^{z_l}. \end{aligned}$$

Die Impedanzen (4.68) berechnen sich bei Verwenden stückweise sinusförmiger Basisfunktionen $f_n(z')$ zu

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{m,n} &= -j \frac{Z_F 2\pi\rho}{\beta} \int_{z_{n-1}}^{z_{n+1}} \left(\frac{\partial^2 \underline{\psi}(z - z')}{\partial z^2} \Big|_{z_m} + \beta^2 \underline{\psi}(z_m - z') \right) f_n(z') dz' \\ &= -j \frac{Z_F 2\pi\rho}{\beta} \int_{z_{n-1}}^{z_n} \left(\frac{\partial^2 \underline{\psi}(z - z')}{\partial z^2} \Big|_{z_m} + \beta^2 \underline{\psi}(z_m - z') \right) f_n(z') dz' \\ &\quad - j \frac{Z_F 2\pi\rho}{\beta} \int_{z_n}^{z_{n+1}} \left(\frac{\partial^2 \underline{\psi}(z - z')}{\partial z^2} \Big|_{z_m} + \beta^2 \underline{\psi}(z_m - z') \right) f_n(z') dz' \\ &= j \frac{Z_F 2\pi\rho}{\beta} \left[\frac{\partial \underline{\psi}(z - z')}{\partial z} \Big|_{z_m} f_n(z') + \underline{\psi}(z_m - z') \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \right]_{z'=z_{n-1}}^{z_n} \\ &\quad + j \frac{Z_F 2\pi\rho}{\beta} \left[\frac{\partial \underline{\psi}(z - z')}{\partial z} \Big|_{z_m} f_n(z') + \underline{\psi}(z_m - z') \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \right]_{z'=z_n}^{z_{n+1}}. \end{aligned}$$

Da die stückweise sinusförmige Basisfunktion $f_n(z')$ für z_{n-1} und für z_{n+1} Null wird, kürzen sich beim Einsetzen der Grenzen die Terme mit der Ableitung der

Greenschen Funktion weg und man erhält⁴

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}_{m,n} &= j \frac{Z_F 2\pi\rho}{\beta} \left(\underline{\psi}(z_m - z_n) \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \Big|_{z_n} - \underline{\psi}(z_m - z_{n-1}) \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \Big|_{z_{n-1}} \right. \\
 &\quad \left. + \underline{\psi}(z_m - z_{n+1}) \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \Big|_{z_{n+1}} - \underline{\psi}(z_m - z_n) \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \Big|_{z_n} \right) \\
 &= j \frac{Z_F 2\pi\rho}{\beta} \left(\frac{e^{-j\beta R_{m,n}} \beta \cos(\beta\Delta z)}{4\pi R_{m,n} \sin(\beta\Delta z)} - \frac{e^{-j\beta R_{m,n-1}} \beta}{4\pi R_{m,n-1} \sin(\beta\Delta z)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e^{-j\beta R_{m,n+1}} \beta}{4\pi R_{m,n+1} \sin(\beta\Delta z)} + \frac{e^{-j\beta R_{m,n}} \beta \cos(\beta\Delta z)}{4\pi R_{m,n} \sin(\beta\Delta z)} \right) \\
 &= -j \frac{1}{2} Z_F \rho \left(\frac{e^{-j\beta R_{m,n-1}}}{R_{m,n-1} \sin(\beta\Delta z)} - \frac{e^{-j\beta R_{m,n}} \sin(2\beta\Delta z)}{R_{m,n} \sin^2(\beta\Delta z)} + \frac{e^{-j\beta R_{m,n+1}}}{R_{m,n+1} \sin(\beta\Delta z)} \right).
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.5

```

function J = momentenmethode(1, rho, N)
% MOMENTENMETHODE Strombelegung einer Dipolantenne berechnen.
% Dipolantenne mit auf die Wellenlaenge normierten Radius rho
% und normierter Laenge 1.
% Es werden 2 * N + 1 Segmente verwendet.
% Beispielaufruf:
% J = momentenmethode(1.5, 0.005, 100);

ZF = 120 * pi; % Feldwellenwiderstand
beta = 2 * pi; % Phasenkonstante
U = 1; % Fusspunktspannung
deltaz = 1 / (2 * N + 1); % Segmentlaenge

% Impedanzmatrix berechnen
[zn,zm] = meshgrid((-N:N) * deltaz, (-N:N) * deltaz);
Z = -j * ZF * rho / 2 * ( ...
    exp(-j * beta * sqrt(rho^2 + (zm - zn + deltaz).^2)) ...
    ./ sqrt(rho^2 + (zm - zn + deltaz).^2) / sin(beta * deltaz) ...
    - exp(-j * beta * sqrt(rho^2 + (zm - zn).^2)) ...
    * sin(2 * beta * deltaz) ...

```

⁴ Es wird das Additionstheorem $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$ verwendet.

```

./ sqrt(rho^2 + (zm - zn).^2) / sin(beta * deltaz)^2 ...
+ exp(-j * beta * sqrt(rho^2 + (zm - zn - deltaz).^2)) ...
./ sqrt(rho^2 + (zm - zn - deltaz).^2) / sin(beta * deltaz));

% Strombelegung durch Loesen des linearen Gleichungssystems
E = zeros(2 * N + 1, 1);
E(N + 1) = -U / deltaz;
J = inv(Z) * E;

end

```

Aufgabe 5.1 Aus der Länge $l = \lambda/2$ der Dipolantenne folgt mit (4.43)

$$\frac{\beta l}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Dies in (5.21) eingesetzt ergibt mit (5.18) den Richtungsfaktor

$$\underline{F}_\vartheta(\vartheta) = -\frac{2\underline{I}_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\vartheta)\right)}{\beta \sin(\vartheta)}.$$

Daraus berechnet man mit (4.48) unter Verwenden von (4.2) und (4.50) die elektrische Feldstärke

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}} &= -j \frac{\beta^2 e^{-j\beta r}}{\omega \varepsilon} \frac{1}{4\pi r} \underline{F}_\vartheta \vec{u}_\vartheta \\ &= j \frac{\beta e^{-j\beta r}}{\omega \varepsilon} \frac{1}{4\pi r} 2\underline{I}_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\vartheta)\right)}{\sin(\vartheta)} \vec{u}_\vartheta = j Z_F \frac{e^{-j\beta r}}{2\pi r} \underline{I}_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\vartheta)\right)}{\sin(\vartheta)} \vec{u}_\vartheta \end{aligned}$$

im Fernfeld und schließlich folgt mit (4.53) die Strahlungsleistungsdichte

$$S = \frac{Z_F}{2} |\underline{I}_0|^2 \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\vartheta)\right)}{2\pi r \sin(\vartheta)} \right)^2$$

im Fernfeld.

Die abgestrahlte Leistung ergibt sich mit (4.54) zu

$$\begin{aligned} P &= \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{Z_F}{2} |\underline{I}_0|^2 \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\vartheta)\right)}{2\pi \sin(\vartheta)} \right)^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta \\ &= Z_F \frac{|\underline{I}_0|^2}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos(\vartheta)\right)}{\sin(\vartheta)} d\vartheta. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $z = \cos(\vartheta)$ folgt

$$\begin{aligned}
 P &= Z_F \frac{|\underline{I}_0|^2}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{1-z^2} dz \\
 &= Z_F \frac{|\underline{I}_0|^2}{8\pi} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{2}z\right) dz \\
 &= Z_F \frac{|\underline{I}_0|^2}{8\pi} \left(\int_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{z} dz + \int_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{z} dz \right) \\
 &= Z_F \frac{|\underline{I}_0|^2}{4\pi} \underbrace{\int_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{z} dz}_{\approx 1,22}.
 \end{aligned}$$

In der Hauptstrahlrichtung $\vartheta_{\max} = \pi/2$ ergibt sich die maximale Strahlungsleistungsdichte

$$S_{\max} = Z_F \frac{|\underline{I}_0|^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Mit (5.2) berechnet man den Richtfaktor

$$D = \frac{2}{1,22} = 1,64.$$

Aufgabe 5.2 Der Gruppenrichtungsfaktor der konstant belegten Dipolantenne der Länge $l = \lambda/2$ ergibt sich gemäß (5.19) als Fourier-Transformierte der Strombelegung $\underline{I}(z')$:

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_G(\beta_z) &= \underline{I}_0 \int_{-l/2}^{+l/2} e^{j\beta_z z'} dz' = 2\underline{I}_0 \int_0^{+l/2} \cos(\beta_z z') dz' = 2\underline{I}_0 \left[\frac{\sin(\beta_z z')}{\beta_z} \right]_{z'=0}^{+l/2} \\
 &= 2\underline{I}_0 \frac{\sin\left(\beta_z \frac{l}{2}\right)}{\beta_z} = \underline{I}_0 l \operatorname{si}\left(\frac{l}{2}\beta_z\right).
 \end{aligned}$$

Einsetzen von (5.18) ergibt

$$\underline{E}_G(\vartheta) = \underline{I}_0 l \operatorname{si}\left(\frac{l}{2}\beta \cos(\vartheta)\right).$$

Mit (5.14) folgt der Richtungsfaktor

$$\underline{E}_\vartheta(\vartheta) = -\sin(\vartheta) \underline{I}_0 l \operatorname{si}\left(\beta \frac{l}{2} \cos(\vartheta)\right)$$

mit dem Betrag

$$|\underline{E}_\vartheta| = |\underline{I}_0| l \left| \sin(\vartheta) \operatorname{si} \left(\beta \frac{l}{2} \cos(\vartheta) \right) \right|.$$

In der Hauptstrahlrichtung $\vartheta_{\max} = \pi/2$ ergibt sich der Maximalwert

$$|\underline{E}_\vartheta|_{\max} = |\underline{I}_0| l.$$

Einsetzen in (5.16) ergibt mit (4.43) die Richtcharakteristik

$$C(\vartheta) = \left| \sin(\vartheta) \operatorname{si} \left(\frac{l}{2} \beta \cos(\vartheta) \right) \right| = \left| \sin(\vartheta) \operatorname{si} \left(\pi \frac{l}{\lambda} \cos(\vartheta) \right) \right|,$$

siehe Abbildung C.6.

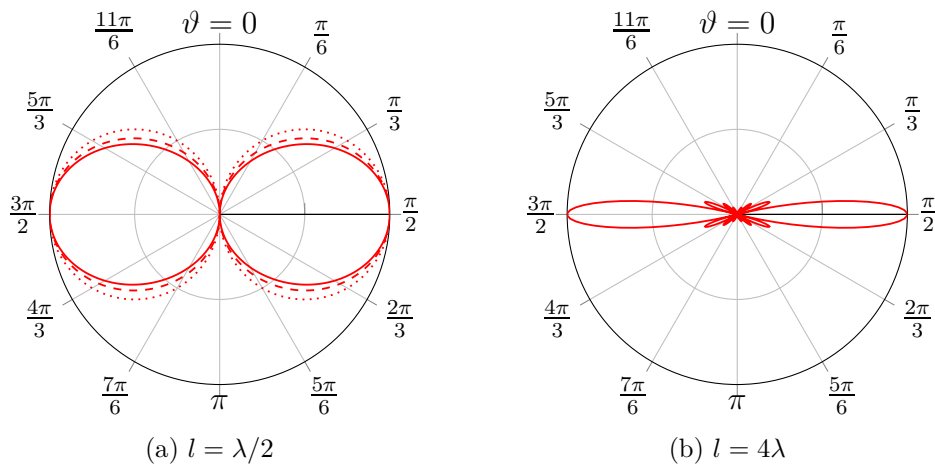


Abbildung C.6.: Richtcharakteristiken $C(\vartheta)$ von Dipolantennen mit konstanter Strombelegung. In Abbildung C.6a zum Vergleich gestrichelt Dipolantenne der Länge $l = \lambda/2$ mit sinusförmiger Strombelegung und gepunktet idealer elektrischer Dipol

Aufgabe 5.3 Die elektrische Feldstärke der sich im Hohlleiter ausbreitenden $\text{TE}_{1,0}$ -Welle in der Apertur $x = 0$ ist

$$\vec{E}_0 = -j \underbrace{\frac{\omega \mu H_0 \pi}{\beta_c^2 a}}_{E_0} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{u}_z,$$

siehe (3.4). Man beachte das abweichend von den üblichen Konventionen in Abschnitt 3.1 gewählte Koordinatensystem. Nach dem Äquivalenztheorem strahlt die magnetischen Flächenstromdichte

$$\vec{M}_F = 2\vec{E}_0 \times \vec{u}_x = 2\vec{E}_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{u}_y$$

in der Apertur $x = 0$ das gleiche elektromagnetische Feld in den rechten Halbraum $x > 0$ ab, siehe Abbildung 4.11.

Dual zu (5.27) berechnet man den Gruppenrichtungsfaktor⁵

$$\begin{aligned} \underline{E}_G(\beta_y, \beta_z) &= \iint_{A'} \underline{M}_{Fy}(y', z') e^{j(\beta_y y' + \beta_z z')} dy' dz' \\ &= 2\underline{E}_0 \int_{-a/2}^{+a/2} \cos\left(\frac{\pi y'}{a}\right) e^{j\beta_y y'} dy' \int_{-b/2}^{+b/2} e^{j\beta_z z'} dz' \\ &= 2\underline{E}_0 \int_{-a/2}^{+a/2} \cos\left(\frac{\pi y'}{a}\right) \cos(\beta_y y') dy' \int_{-b/2}^{+b/2} \cos(\beta_z z') dz' \\ &= 4\underline{E}_0 \int_0^{+a/2} \left(\cos\left(\left(\frac{\pi}{a} - \beta_y\right) y'\right) + \cos\left(\left(\frac{\pi}{a} + \beta_y\right) y'\right) \right) dy' \int_0^{+b/2} \cos(\beta_z z') dz' \\ &= 4\underline{E}_0 \left(\left[\frac{\sin\left(\left(\frac{\pi}{a} - \beta_y\right) y'\right)}{\frac{\pi}{a} - \beta_y} \right]_{z'=0}^{a/2} + \left[\frac{\sin\left(\left(\frac{\pi}{a} + \beta_y\right) y'\right)}{\frac{\pi}{a} + \beta_y} \right]_{z'=0}^{a/2} \right) \left[\frac{\sin(\beta_z z')}{\beta_z} \right]_{z'=0}^{b/2} \\ &= \underline{E}_0 ab \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_y \frac{a}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \beta_y \frac{a}{2}} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta_y \frac{a}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} + \beta_y \frac{a}{2}} \right) \frac{\sin\left(\beta_z \frac{b}{2}\right)}{\beta_z \frac{b}{2}} \\ &= \underline{E}_0 ab \left(\frac{\cos\left(\beta_y \frac{a}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \beta_y \frac{a}{2}} + \frac{\cos\left(\beta_y \frac{a}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} + \beta_y \frac{a}{2}} \right) \text{si}\left(\beta_z \frac{b}{2}\right) \\ &= \frac{4\underline{E}_0 ab}{\pi} \frac{\cos\left(\beta_y \frac{a}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\beta_y a}{\pi}\right)^2} \text{si}\left(\beta_z \frac{b}{2}\right). \end{aligned}$$

Der Betrag des Gruppenrichtungsfaktors $\underline{E}_G(\beta_y, \beta_z)$ ist

$$|\underline{E}_G(\beta_y, \beta_z)| = \frac{4|\underline{E}_0| ab}{\pi} \left| \frac{\cos\left(\beta_y \frac{a}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\beta_y a}{\pi}\right)^2} \right| \left| \text{si}\left(\beta_z \frac{b}{2}\right) \right|.$$

⁵ Es wird das Additionstheorem $\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$ verwendet.

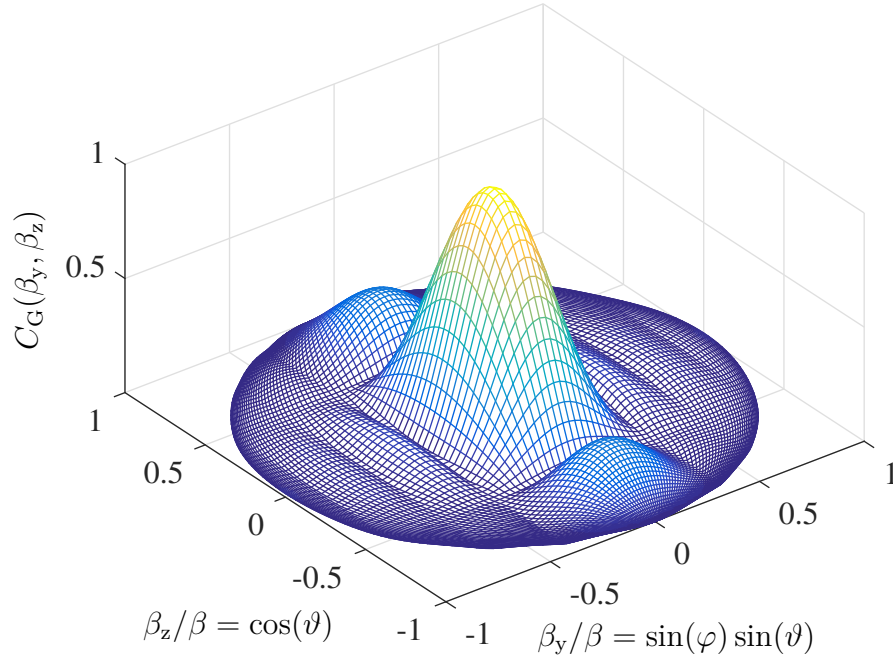


Abbildung C.7.: Gruppenrichtcharakteristik $C_G(\beta_y, \beta_z)$ einer Hornantenne. Breite $a = 4\lambda$ und Höhe $b = 2\lambda$

Die Hauptstrahlrichtung ist $\beta_y = 0$ und $\beta_z = 0$, das heißt senkrecht zur Apertur. Der dort erreichte Maximalwert des Betrags des Gruppenrichtungsfaktors $\underline{F}_G(\beta_y, \beta_z)$ berechnet sich zu

$$|\underline{F}_G|_{\max} = \frac{4 |\underline{E}_0| ab}{\pi},$$

so dass man mit (5.24) die Gruppenrichtcharakteristik

$$C_G(\beta_y, \beta_z) = \left| \frac{\cos\left(\beta_y \frac{a}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\beta_y a}{\pi}\right)^2} \right| \left| \text{si}\left(\beta_z \frac{b}{2}\right) \right|$$

erhält, siehe Abbildung C.7.

Für stark bündelnde Hornantennen entspricht die Richtcharakteristik $C(\beta_y, \beta_z)$ ungefähr der Gruppenrichtcharakteristik $C_G(\beta_y, \beta_z)$ und der Richtfaktor kann gemäß (5.36) näherungsweise aus der Gruppenrichtcharakteristik alleine berechnet werden:

$$D \approx \frac{4\pi\beta^2}{\int_{\beta_z=-\infty}^{\infty} \int_{\beta_y=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cos\left(\beta_y \frac{a}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\beta_y a}{\pi}\right)^2} \right)^2 \text{si}^2\left(\beta_z \frac{b}{2}\right) d\beta_y d\beta_z}.$$

Die auftretenden Integrale berechnen sich zu⁶

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{si}^2\left(\beta_z \frac{b}{2}\right) d\beta_z = \frac{2\pi}{b}$$

und⁷

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cos\left(\beta_y \frac{a}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\beta_y a}{\pi}\right)^2} \right)^2 d\beta_y = \frac{\pi^4}{8} \int_0^{\infty} \left(\frac{\cos\left(\beta_y \frac{a}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\beta_y \frac{a}{2}\right)^2} \right)^2 d\beta_y = \frac{\pi^3}{4a}.$$

Mit (4.43) erhält man schließlich für Richtfaktor

$$D = \frac{8\beta^2 ab}{\pi^3} = 32 \frac{ab}{\pi \lambda^2}.$$

Aufgabe 5.4 Da die Richtcharakteristik $C(\vartheta)$ nur vom Poldistanzwinkel ϑ abhängt, berechnet sich der Richtfaktor entsprechend (5.17) zu

$$D = \frac{2}{\int_0^{\pi} \frac{1}{N^2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn(\beta d \cos(\vartheta) - \psi)} \right|^2 \sin(\vartheta) d\vartheta}.$$

Mit der Substitution

$$z = \beta d \cos(\vartheta) - \psi$$

vereinfacht sich das Integral zu

$$\begin{aligned} D &= \frac{2}{-\frac{1}{\beta d N^2} \int_{\beta d - \psi}^{-\beta d - \psi} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{jnz} \right|^2 dz} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{\beta d N^2} \int_{-\beta d - \psi}^{\beta d - \psi} \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{jnz} \right) \left(\sum_{m=0}^{N-1} e^{-jmz} \right) dz}. \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren ergibt den Richtfaktor

$$D = \frac{2}{\frac{1}{\beta d N^2} \int_{-\beta d - \psi}^{\beta d - \psi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j(n-m)z} dz}.$$

⁶ Es wird das bestimmte Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \text{si}^2(ax) dx = \frac{\pi}{|a|}$ verwendet.

⁷ Es wird das bestimmte Integral $\int_0^{\infty} \frac{\cos^2(ax)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - (ax)^2} dx = \frac{1}{\pi|a|}$ verwendet.

Da immer Paare mit $e^{\pm j(n-m)x}$ auftreten, kürzen sich die Sinusanteile weg und man erhält

$$D = \frac{2}{\frac{1}{\beta d N^2} \int_{-\beta d - \psi}^{\beta d - \psi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \cos((n-m)z) dz}$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{\beta d N^2} \int_{-\beta d - \psi}^{\beta d - \psi} \left(N + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{N-1} \cos((n-m)z) \right) dz}.$$

Terme mit der Indexdifferenz $n-m = \pm p$ kommen in der Summe jeweils $N-p$ -mal vor. Damit erhält man⁸

$$D = \frac{2}{\frac{1}{\beta d N^2} \int_{-\beta d - \psi}^{\beta d - \psi} \left(\underbrace{\sum_{p=1}^{N-1} (N-p) \cos(pz)}_{n-m=-} + \underbrace{N}_{n-m=0} + \underbrace{\sum_{p=1}^{N-1} (N-p) \cos(pz)}_{n-m=p} \right) dz}$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{\beta d N^2} \left[Nz + 2 \sum_{p=1}^{N-1} \frac{N-p}{p} \sin(pz) \right]_{z=-\beta d - \psi}^{\beta d - \psi}}$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{\beta d N^2} \left(2\beta d N + 2 \sum_{p=1}^{N-1} (\sin(p(\beta d - \psi)) - \sin(p(-\beta d - \psi))) \right)}$$

$$= \frac{N}{1 + \frac{2}{N} \sum_{p=1}^{N-1} (N-p) \frac{\sin(p\beta d) \cos(p\psi)}{p\beta d}},$$

siehe Abbildung C.8. Man beachte, dass diese Gleichung natürlich nur dann gilt, wenn die Richtcharakteristik $C_{GN}(\vartheta)$ korrekt normiert war, das heißt wenn irgendwo innerhalb des sichtbaren Bereichs der Maximalwert eins erreicht wird. Dies ist nicht bei allen beliebig gewählten Phasendekrementen ψ der Fall.

Speziell für $d = \lambda/2$ ist gemäß (4.43) $\beta d = \pi$ und es folgt $D = N$. Bei anderen Antennennabständen auftretende abweichende Ergebnisse erklären sich dadurch, dass Verkopplungen der Antennenelemente nirgends korrekt berücksichtigt wurden.

⁸ Es wird das Additionstheorem $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ verwendet.

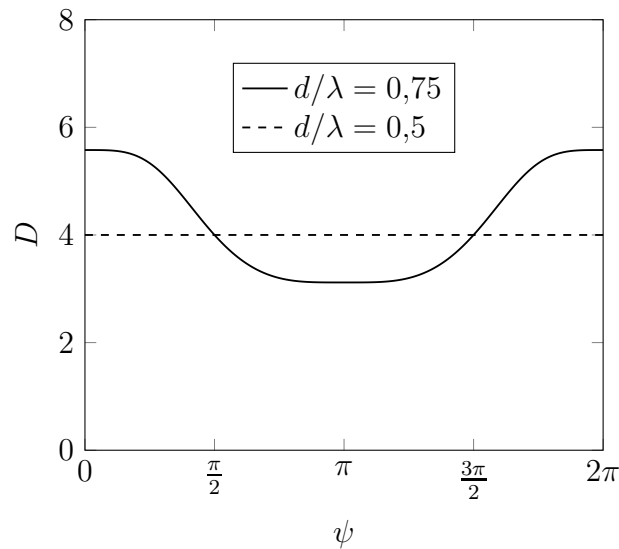


Abbildung C.8.: Richtfaktor D einer linearen Gruppenantenne. $N = 4$

Aufgabe 6.1 Mit (6.5) ergibt sich die Wellenlänge zu

$$\lambda = \sqrt{\frac{4\pi A_R}{G_R}} = 1,12 \text{ m.}$$

Die Strahlungsleistungsdichte am Ort des Empfängers ergibt sich mit (6.2) und dem Gewinn $G_T = 1$ der Sendeantenne zu

$$S = \frac{P_T}{4\pi r^2} = 7,958 \mu\text{W m}^{-2}.$$

Schließlich erhält man mit (6.1) die Empfangsleistung

$$P_R = S A_R = 7,958 \mu\text{W}.$$

Aufgabe 6.2 Oberhalb der Grenzfläche, das heißt im Gebiet 1, existieren die einfallende und die reflektierte elektromagnetische Welle mit den Normalkomponenten

$$\underline{S}_{\text{Iz}} = \frac{1}{2Z_{\text{F1}}} |\underline{E}_{\text{I0y}}|^2 \cos(\alpha_1)$$

und

$$\underline{S}_{\text{Rz}} = -\frac{1}{2Z_{\text{F1}}} |\underline{E}_{\text{R0y}}|^2 \cos(\alpha_1) = -\frac{\Gamma_{\perp}^2}{2Z_{\text{F1}}} |\underline{E}_{\text{I0y}}|^2 \cos(\alpha_1)$$

der komplexen Poynting-Vektoren, siehe (2.29). Dies ergibt nach Überlagern eine Normalkomponente

$$\underline{S}_{Iz} + \underline{S}_{Rz} = \frac{1 - \Gamma_{\perp}^2}{2Z_{F1}} |\underline{E}_{I0y}|^2 \cos(\alpha_I) = \frac{2Z_{F2} \cos^2(\alpha_I) \cos(\alpha_T)}{(Z_{F2} \cos(\alpha_I) + Z_{F1} \cos(\alpha_T))^2} |\underline{E}_{I0y}|^2$$

des resultierenden komplexen Poynting-Vektors, wobei im letzten Schritt der Reflexionsfaktor Γ_{\perp} für senkrechte Polarisation gemäß (6.19) eingesetzt wurde.

Die Normalkomponente des komplexen Poynting-Vektors der transmittierten Welle im Gebiet 2 ergibt sich mit dem Transmissionsfaktor T_{\perp} für senkrechte Polarisation gemäß (6.21) zu

$$\begin{aligned} \underline{S}_{Tz} &= \frac{1}{2Z_{F2}} |\underline{E}_{T0y}|^2 \cos(\alpha_T) = \frac{T_{\perp}^2}{2Z_{F2}} |\underline{E}_{I0y}|^2 \cos(\alpha_T) \\ &= \frac{2Z_{F2} \cos^2(\alpha_I) \cos(\alpha_T)}{(Z_{F2} \cos(\alpha_I) + Z_{F1} \cos(\alpha_T))^2} |\underline{E}_{I0y}|^2. \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Normalkomponenten der komplexen Poynting-Vektoren gleich sind.

Aufgabe 6.3 Es wird der Einfallswinkel $\alpha_I = \alpha_B$ gesucht, für den der Reflexionsfaktor Null wird. Im Fall senkrechter Polarisation folgt durch Nullsetzen des Zählerterms des Reflexionsfaktors Γ_{\perp} gemäß (6.19) die folgende Bedingung:

$$\begin{aligned} 0 &= Z_{F2} \cos(\alpha_B) - Z_{F1} \cos(\alpha_T), \\ \frac{Z_{F2}^2}{Z_{F1}^2} &= \frac{\cos^2(\alpha_T)}{\cos^2(\alpha_B)} = \frac{1 - \sin^2(\alpha_T)}{1 - \sin^2(\alpha_B)} = \frac{\frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} - \frac{\sin^2(\alpha_T)}{\sin^2(\alpha_B)}}{\frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} - 1}, \\ \frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} \left(\frac{Z_{F2}^2}{Z_{F1}^2} - 1 \right) &= \frac{Z_{F2}^2}{Z_{F1}^2} - \frac{\sin^2(\alpha_T)}{\sin^2(\alpha_B)}. \end{aligned}$$

Mit dem Snelliusschen Brechungsgesetz (6.14) und dem sich mit den Feldwellenwiderständen gemäß (2.25) ergebenden Verhältnis

$$\frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_1}}$$

folgt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} \left(\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_1} - 1 \right) &= \frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_1} - \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}, \\ \frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) &= \frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu_2}, \\ \sin(\alpha_B) &= \sqrt{\frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{\frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu_2}}}.\end{aligned}$$

Speziell für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ erhält man:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_B) &= \sqrt{\frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1}{\frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu_2}}}, \\ \cos(\alpha_B) &= \sqrt{1 - \sin^2(\alpha_B)} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}}{\frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu_2}}}, \\ \frac{\sin(\alpha_B)}{\cos(\alpha_B)} &= \sqrt{\frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1}{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}, \\ \alpha_B &= \arctan\left(\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\right).\end{aligned}$$

Im Fall paralleler Polarisation folgt durch Nullsetzen des Zählerterms des Reflexionsfaktors Γ_{\parallel} gemäß (6.25) die folgende Bedingung:

$$\begin{aligned}0 &= Z_{F1} \cos(\alpha_B) - Z_{F2} \cos(\alpha_T), \\ \frac{Z_{F1}^2}{Z_{F2}^2} &= \frac{\cos^2(\alpha_T)}{\cos^2(\alpha_B)} = \frac{1 - \sin^2(\alpha_T)}{1 - \sin^2(\alpha_B)} = \frac{\frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} - \frac{\sin^2(\alpha_T)}{\sin^2(\alpha_B)}}{\frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} - 1}, \\ \frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} \left(\frac{Z_{F1}^2}{Z_{F2}^2} - 1 \right) &= \frac{Z_{F1}^2}{Z_{F2}^2} - \frac{\sin^2(\alpha_T)}{\sin^2(\alpha_B)}, \\ \frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} \left(\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2} - 1 \right) &= \frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2} - \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}, \\ \frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \\ \sin(\alpha_B) &= \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}.\end{aligned}$$

Speziell für $\mu_1 = \mu_2$ erhält man:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_B) &= \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}, \\ \cos(\alpha_B) &= \sqrt{1 - \sin^2(\alpha_B)} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}, \\ \frac{\sin(\alpha_B)}{\cos(\alpha_B)} &= \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \\ \alpha_B &= \arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right).\end{aligned}$$

Aufgabe 6.4 Die Länge des direkten Pfades ergibt sich zu

$$r^{(1)} = \sqrt{r^2 + (h_T - h_R)^2} \approx r + \frac{(h_T - h_R)^2}{2r},$$

siehe Abbildung C.9. Der reflektierte Pfad scheint von einem gespiegelten Sender auszugehen, siehe Abbildung 4.7. Die Länge des reflektierten Pfades ergibt sich zu

$$r^{(2)} = \sqrt{r^2 + (h_T + h_R)^2} \approx r + \frac{(h_T + h_R)^2}{2r},$$

siehe Abbildung C.9. Die Näherungen gelten jeweils für den betrachteten Fall, dass der horizontale Abstand viel größer als die Höhen ist, das heißt dass h_T/r und h_R/r sehr klein sind.

Mit (6.7) folgt die Transfermatrix

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{T}}^{(1)} &\approx \frac{e^{-j\beta\left(r + \frac{(h_T - h_R)^2}{2r}\right)}}{r + \frac{(h_T - h_R)^2}{2r}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\approx \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{-j\beta\frac{(h_T - h_R)^2}{2r}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

des direkten Pfades. Beim Spiegeln des Senders ergibt sich gemäß Abbildung 4.7 im Fall horizontaler linearer Polarisierung eine zusätzliche Phasendrehung um π , vergleiche auch (6.28) und Abbildung 6.4. Mit (6.7) folgt die Transfermatrix

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{T}}^{(2)} &\approx \frac{e^{-j\beta\left(r + \frac{(h_T + h_R)^2}{2r}\right)}}{r + \frac{(h_T + h_R)^2}{2r}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\approx \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{-j\beta\frac{(h_T + h_R)^2}{2r}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

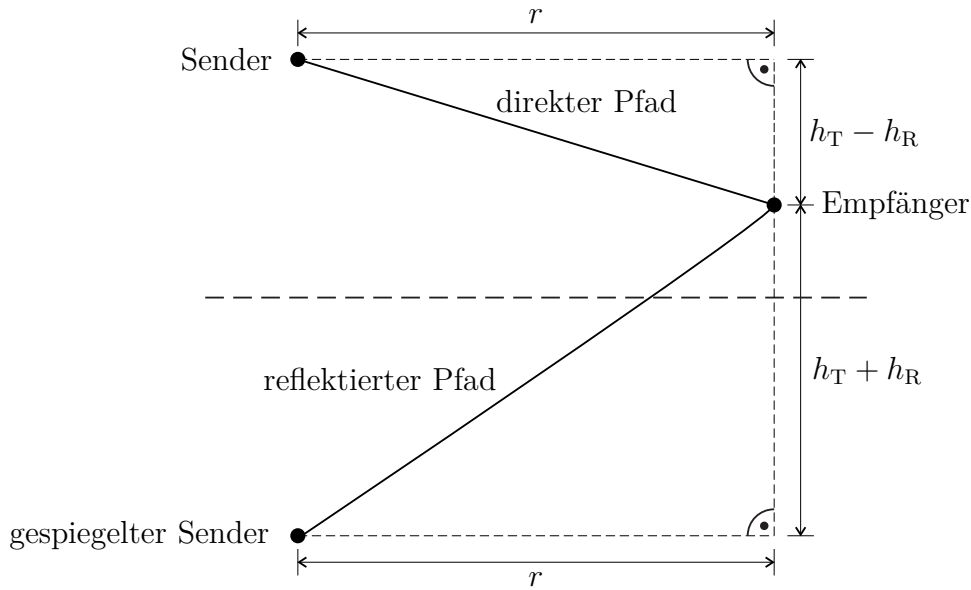


Abbildung C.9.: Spiegelung des Senders an der ideal elektrisch leitenden Ebene

des gespiegelten Pfades.

Entsprechend (6.39) erhält man mit (4.43) im Fall vertikaler linearer Polarisation die Empfangsleistung

$$\begin{aligned}
 P_R &\approx P_T \left(\frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 \left| \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{-j\beta \frac{(h_T - h_R)^2}{2r}} + \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{-j\beta \frac{(h_T + h_R)^2}{2r}} \right|^2 \\
 &= P_T \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 \left| e^{j\beta \frac{h_T h_R}{r}} + e^{-j\beta \frac{h_T h_R}{r}} \right|^2 \\
 &= P_T \left(\frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2 \cos^2 \left(2\pi \frac{h_T h_R}{\lambda r} \right) \\
 &\approx P_T \left(\frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2 .
 \end{aligned}$$

Die Näherung in der letzten Zeile gilt für sehr große horizontale Abstände r . Für sehr große horizontale Abstände r überlagern sich im Fall vertikaler linearer Polarisation die Beiträge der beiden Pfade konstruktiv, so dass sich im Vergleich zur Freiraumausbreitung (6.6) die doppelte Amplitude und die vierfache Leistung ergeben. Im Fall horizontaler linearer Polarisation erhält man auf analoge Art und

Weise die Empfangsleistung

$$\begin{aligned}
 P_R &\approx P_T \left(\frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 \left| -\frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{-j\beta \frac{(h_T - h_R)^2}{2r}} + \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{-j\beta \frac{(h_T + h_R)^2}{2r}} \right|^2 \\
 &= P_T \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 \left| -e^{j\beta \frac{h_T h_R}{r}} + e^{-j\beta \frac{h_T h_R}{r}} \right|^2 \\
 &= P_T \left(\frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2 \sin^2 \left(2\pi \frac{h_T h_R}{\lambda r} \right) \\
 &\approx P_T \frac{h_T^2 h_R^2}{r^4}.
 \end{aligned}$$

Für sehr große horizontale Abstände r überlagern sich im Fall horizontaler linearer Polarisation die Beiträge der beiden Pfade fast destruktiv, so dass sich eine sehr stark mit vierter Potenz des horizontalen Abstands r abnehmende Empfangsleistung P_R ergibt. Abbildung C.10 zeigt typische Verläufe des Übertragungsfaktors P_R/P_T als Funktion des horizontalen Abstands r . Die starken Fluktuationen im Bereich kleiner horizontaler Abstände r resultieren aus dem raschen Wechsel zwischen konstruktiver und destruktiver Interferenz der beiden Pfade.

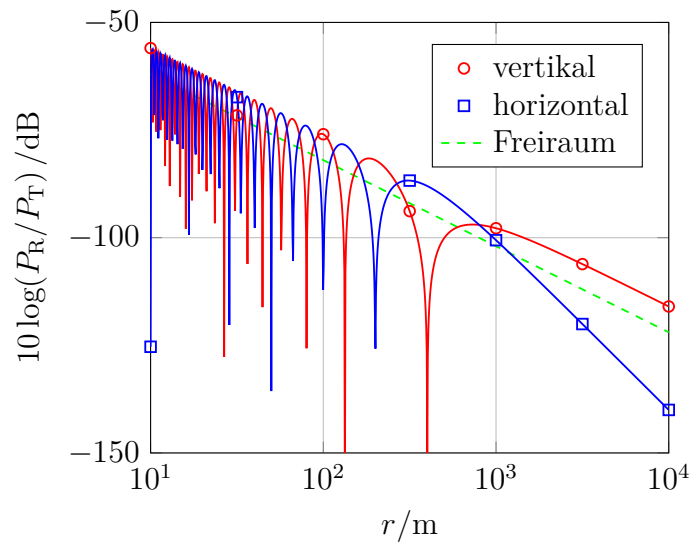


Abbildung C.10.: Übertragungsfaktor P_R/P_T als Funktion des horizontalen Abstands r bei Zweiwegeausbreitung bei unterschiedlichen linearen Polarisationen. Gestrichelt zum Vergleich Freiraumausbreitung. $\lambda = 0,1 \text{ m}$, $h_T = 10 \text{ m}$, $h_R = 1 \text{ m}$

Aufgabe 7.1 Die normierte resultierende komplexe Wellenamplitude lässt sich mit (7.7) und (7.13) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}\underline{c}'(z) &= \frac{\underline{a}(z)(1 + \underline{\Gamma}(z))}{|\underline{a}_0|(1 + |\underline{\Gamma}_0|)} \\ &= \frac{\underline{a}_0(e^{-j\beta z} + \underline{\Gamma}_0 e^{j\beta z})}{|\underline{a}_0|(1 + |\underline{\Gamma}_0|)} \\ &= \frac{e^{-j\beta z} + \underline{\Gamma}_0 e^{j\beta z}}{1 + |\underline{\Gamma}_0|} e^{j\arg(\underline{a}_0)}.\end{aligned}$$

Der Betrag der normierten resultierenden komplexen Wellenamplitude ergibt sich zu

$$\begin{aligned}|\underline{c}'(z)| &= \frac{|e^{-j\beta z} + \underline{\Gamma}_0 e^{j\beta z}|}{1 + |\underline{\Gamma}_0|} \\ &= \frac{|e^{-j\beta z} (1 + |\underline{\Gamma}_0| e^{j\arg(\underline{\Gamma}_0)} e^{j2\beta z})|}{1 + |\underline{\Gamma}_0|} \\ &= \frac{1}{1 + |\underline{\Gamma}_0|} \sqrt{(1 + |\underline{\Gamma}_0| \cos(\arg(\underline{\Gamma}_0) + 2\beta z))^2 + |\underline{\Gamma}_0|^2 \sin^2(\arg(\underline{\Gamma}_0) + 2\beta z)} \\ &= \frac{1}{1 + |\underline{\Gamma}_0|} \sqrt{1 + |\underline{\Gamma}_0|^2 + 2|\underline{\Gamma}_0| \cos(\arg(\underline{\Gamma}_0) + 2\beta z)},\end{aligned}$$

Mit

$$|\underline{\Gamma}_0| = \frac{1 - m}{1 + m}$$

gemäß (7.15) erhält man den Betrag der normierten resultierenden komplexen Wellenamplitude als Funktion des Anpassungsfaktors m und des Reflexionsfaktorarguments $\arg(\underline{\Gamma}_0)$:⁹

$$\begin{aligned}|\underline{c}'(z)| &= \frac{1 + m}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{1 - m}{1 + m}\right)^2 + 2\frac{1 - m}{1 + m} \cos(\arg(\underline{\Gamma}_0) + 2\beta z)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(1 + m)^2 + (1 - m)^2 + 2(1 - m^2) \cos(\arg(\underline{\Gamma}_0) + 2\beta z)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2m^2 + 2(1 - m^2) \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{1}{2} \arg(\underline{\Gamma}_0) + \beta z\right)\right)} \\ &= \sqrt{1 + (m^2 - 1) \sin^2\left(\frac{1}{2} \arg(\underline{\Gamma}_0) + \beta z\right)}.\end{aligned}$$

⁹ Es wird das Additionstheorem $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$ verwendet.

Aufgabe 7.2 Mit der kritischen Kreisfrequenz

$$\omega_c = \frac{\beta_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\omega_{c0}}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}},$$

siehe (2.36), (1.47) und (1.51), berechnet sich der Feldwellenwiderstand transversalelektrischer Wellen gemäß (2.31) zu

$$Z_{\text{FTE}} = \frac{Z_{\text{F}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} = \frac{Z_{\text{F0}}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c0}}{\omega\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}\right)^2}},$$

siehe (2.42) und (2.25).

Unter Verwenden des Reflexionsfaktors

$$\underline{\Gamma} = \frac{\underline{E}_{\text{R0y}}}{\underline{E}_{\text{H0y}}} = -\frac{\underline{H}_{\text{R0x}}}{\underline{H}_{\text{H0x}}},$$

siehe (7.1), (7.4) und (7.7), und des Feldwellenwiderstands

$$Z_{\text{FTE1}} = -\frac{\underline{E}_{\text{H0y}}}{\underline{H}_{\text{H0x}}} = \frac{\underline{E}_{\text{R0y}}}{\underline{H}_{\text{R0x}}}$$

im ungefüllten Teil $z < 0$ des Hohlleiters ergibt sich die Wellenimpedanz

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= -\frac{\underline{E}_{\text{H0y}} + \underline{E}_{\text{R0y}}}{\underline{H}_{\text{H0x}} + \underline{H}_{\text{R0x}}} = -\frac{\underline{E}_{\text{H0y}}(1 + \underline{\Gamma})}{\underline{H}_{\text{H0x}}(1 - \underline{\Gamma})} \\ &= Z_{\text{FTE1}} \frac{1 + \underline{\Gamma}}{1 - \underline{\Gamma}} \end{aligned}$$

im ungefüllten Teil $z < 0$ des Hohlleiters, siehe (2.32). Unter Verwenden des Feldwellenwiderstands

$$Z_{\text{FTE2}} = -\frac{\underline{E}_{\text{T0y}}}{\underline{H}_{\text{T0x}}},$$

im gefüllten Teil $z > 0$ des Hohlleiters ergibt sich die Wellenimpedanz

$$\underline{Z}_2 = -\frac{\underline{E}_{\text{T0y}}}{\underline{H}_{\text{T0x}}} = Z_{\text{FTE2}}$$

im gefüllten Teil $z > 0$ des Hohlleiters, siehe (2.32). An der Grenzfläche müssen die resultierenden Tangentialkomponenten der Feldstärken gemäß (1.62) und (1.64)

stetig sein. Es folgt, dass auch die Wellenimpedanzen gleich sein müssen:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_2, \\ Z_{\text{FTE1}} \frac{1 + \underline{\Gamma}}{1 - \underline{\Gamma}} &= Z_{\text{FTE2}} \\ \underline{\Gamma} &= \frac{Z_{\text{FTE2}} - Z_{\text{FTE1}}}{Z_{\text{FTE2}} + Z_{\text{FTE1}}}. \end{aligned}$$

Damit keine Reflexion auftritt, müssen die Feldwellenwiderstände des ungefüllten und des gefüllten Hohlleiterbereichs gleich sein:

$$\begin{aligned} Z_{\text{FTE1}} &= Z_{\text{FTE2}}, \\ \frac{Z_{\text{F0}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\text{c0}}}{\omega}\right)^2}} &= \frac{Z_{\text{F0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\text{c0}}}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \omega}\right)^2}}, \\ 1 - \left(\frac{\frac{\omega_{\text{c0}}}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}}{\omega}\right)^2 &= \frac{\mu_r}{\varepsilon_r} \left(1 - \left(\frac{\omega_{\text{c0}}}{\omega}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Hier ist $\omega_{\text{c0}} = \omega/2$ und es folgt:

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}\right)^2 &= \frac{\mu_r}{\varepsilon_r} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right), \\ 4 - \frac{1}{\varepsilon_r \mu_r} &= 3 \frac{\mu_r}{\varepsilon_r}, \\ 3\mu_r^2 - 4\varepsilon_r \mu_r + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Speziell für $\varepsilon_r = 4$ erhält man eine quadratische Gleichung

$$3\mu_r^2 - 16\mu_r + 1 = 0$$

für die Permeabilität μ_r mit den Lösungen

$$\mu_r = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} - \frac{1}{3}} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{61}{9}}.$$

Aufgabe 7.3 Aus (7.24) folgt für den Reflexionsfaktor

$$\underline{\Gamma} = \frac{R - Z_L}{R + Z_L}.$$

Der Betrag des Reflexionsfaktors ist

$$|\Gamma| = \pm \frac{R - Z_L}{R + Z_L},$$

wobei das obere Vorzeichen für $R > Z_L$ gilt. Dies in (7.14) eingesetzt ergibt den Anpassungsfaktor

$$m = \frac{1 \mp \frac{R-Z_L}{R+Z_L}}{1 \pm \frac{R-Z_L}{R+Z_L}} = \frac{R + Z_L \mp R \pm Z_L}{R + Z_L \pm R \mp Z_L} = \begin{cases} \frac{Z_L}{R} & \text{falls } R > Z_L \\ \frac{R}{Z_L} & \text{falls } R < Z_L \end{cases}.$$

Aufgabe 7.4 Eine beidseitig kurzgeschlossene Leitung der Länge l ist bei jenen Kreisfrequenzen in Resonanz, bei denen die Leitungslänge ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist, siehe (7.33) und (2.38):

$$l = p \frac{\lambda}{2} = p \frac{\pi}{\beta},$$

$$\frac{p\pi}{l} = \beta.$$

Zunächst werden $TE_{m,n}$ -Wellen betrachtet, bei denen m oder n von Null verschieden sein muss. Mit (2.35) und (3.2) erhält man:

$$\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 = \beta^2 = \beta_0^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,$$

$$\beta_0^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2.$$

Mit (2.3) folgt für die Resonanzkreisfrequenzen

$$\omega_{m,n,p} = \frac{\beta_0}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{4\pi\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2},$$

wobei p von Null verschieden sein muss.

Die kritischen Phasenkonstanten β_c der $TM_{m,n}$ -Wellen berechnen sich mit der gleichen Formel (3.2), so dass sich auch die gleiche Formel für die Resonanzkreisfrequenzen $\omega_{m,n,p}$ ergibt, mit dem Unterschied das jetzt m und n von Null verschieden sein müssen. Dafür darf p Null sein, was einer unendlichen Wellenlänge λ entspricht. Die Resonanzkreisfrequenz $\omega_{m,n,0}$ entspricht dann der kritischen Kreisfrequenz der $TM_{m,n}$ -Welle.

Aufgabe 8.1 Es wird behauptet, dass die Orte konstanten Wirkleitwertes G Kreise mit Mittelpunkt $\frac{1}{2G}$ und Radius $\frac{1}{2G}$ in der Impedanzebene sind. Daher muss für einen beliebigen gegebenen Wirkleitwert G unabhängig vom Blindleitwert B stets die folgende Kreisgleichung erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \left| \underline{Z} - \frac{1}{2G} \right|^2 &= \left(\frac{1}{2G} \right)^2, \\ \left| \frac{1}{G + jB} - \frac{1}{2G} \right|^2 &= \left(\frac{1}{2G} \right)^2, \\ |2G - (G + jB)|^2 &= |G + jB|^2, \\ G^2 + B^2 &= G^2 + B^2. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde die Impedanz \underline{Z} gemäß (8.1) eingesetzt.

Es wird behauptet, dass die Orte konstanten Blindleitwertes B Kreise mit Mittelpunkt $-j\frac{1}{2B}$ und Radius $\frac{1}{2B}$ in der Impedanzebene sind. Daher muss für einen beliebigen gegebenen Blindleitwert B unabhängig vom Wirkleitwert G stets die folgende Kreisgleichung erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \left| \underline{Z} + j\frac{1}{2B} \right|^2 &= \left(\frac{1}{2B} \right)^2, \\ \left| \frac{1}{G + jB} + j\frac{1}{2B} \right|^2 &= \left(\frac{1}{2B} \right)^2, \\ |2B + j(G + jB)|^2 &= |G + jB|^2, \\ B^2 + G^2 &= G^2 + B^2. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde wieder die Impedanz \underline{Z} gemäß (8.1) eingesetzt.

Aufgabe 8.2 Man wählt den Bezugswiderstand $R_N = 100 \Omega$ und erhält so die in Tabelle C.2 zusammengestellten normierten Bauelementewerte.

Tabelle C.2.: Bauelementewerte

$R_2 = 100 \Omega$	$R_2/R_N = 1$	$G_2 R_N = 1$
$X_L = \omega L = 200 \Omega$	$X_L/R_N = 2$	$B_L R_N = -0,5$
$X_{C1} = -\frac{1}{\omega C_1} = -80 \Omega$	$X_{C1}/R_N = -0,8$	$B_{C1} R_N = 1,25$
$X_{C2} = -\frac{1}{\omega C_2} = -200 \Omega$	$X_{C2}/R_N = -2$	$B_{C2} R_N = 0,5$

Mit den Bauelementewerten zeichnet man den Transformationsweg im Inversionsdiagramm, siehe Abbildung C.11. und erhält so die Eingangsimpedanz

$$\underline{Z}_1 = (0,5 - j0,5) R_N = (50 - j50) \Omega.$$

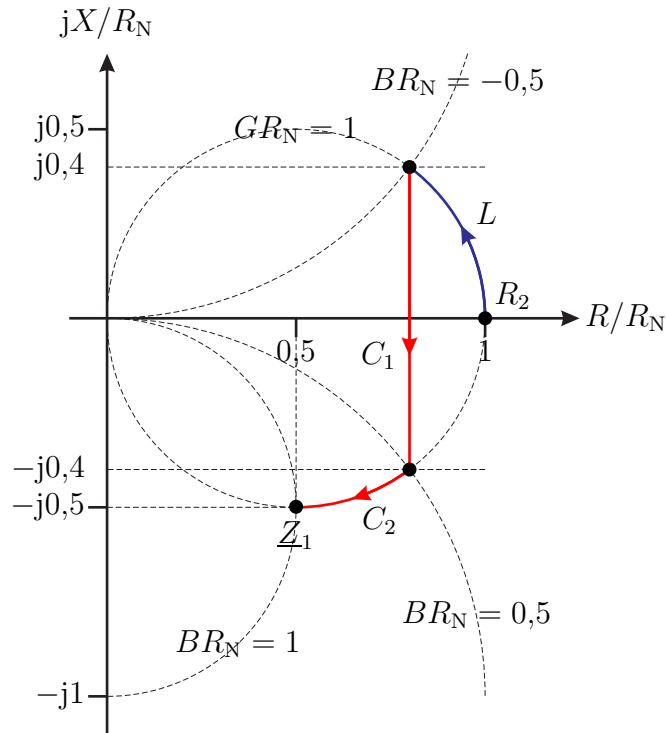


Abbildung C.11.: Transformationsweg in der Impedanzenebene

Aufgabe 8.3 Es wird behauptet, dass die Orte konstanten Anpassungsfaktors m Kreise mit Mittelpunkt $\frac{Z_L}{2} \left(\frac{1}{m} + m \right)$ und Radius $\frac{Z_L}{2} \left(\frac{1}{m} - m \right)$ in der Impedanzenebene sind. Daher muss für einen beliebigen gegebenen Anpassungsfaktor m unabhängig von der normierten Leitungslänge l/λ stets die folgende Kreisgleichung erfüllt sein:

$$\left| Z - \frac{Z_L}{2} \left(\frac{1}{m} + m \right) \right|^2 = \left(\frac{Z_L}{2} \left(\frac{1}{m} - m \right) \right)^2,$$

$$\left| Z_L \frac{m + j \tan\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right)}{1 + jm \tan\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right)} - Z_L \frac{1 + m^2}{2m} \right|^2 = \left(Z_L \frac{1 - m^2}{2m} \right)^2,$$

$$\left| m^2 + jm \tan\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) - 1 - jm^3 \tan\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) \right|^2 = (1 - m^2)^2 \left| 1 + jm \tan\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) \right|^2,$$

$$(m^2 - 1)^2 \left| 1 - jm \tan\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) \right|^2 = (1 - m^2)^2 \left| 1 + jm \tan\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) \right|^2$$

$$(m^2 - 1)^2 \left(1 + m^2 \tan^2\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) \right) = (1 - m^2)^2 \left(1 + m^2 \tan^2\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) \right).$$

In der zweiten Zeile wurde die Impedanz \underline{Z} gemäß (8.6) eingesetzt.

Es wird behauptet, dass die Orte konstanter normierter Leitungslänge l/λ Kreise mit Mittelpunkt $-jZ_L \cot(4\pi \frac{l}{\lambda})$ und Radius $\left| \frac{Z_L}{\sin(4\pi \frac{l}{\lambda})} \right|$ in der Impedanzebene sind. Daher muss für eine beliebige gegebene normierte Leitungslänge l/λ unabhängig vom Anpassungsfaktor m stets die folgende Kreisgleichung erfüllt sein.¹⁰¹¹

$$\begin{aligned} \left| \underline{Z} + jZ_L \cot\left(4\pi \frac{l}{\lambda}\right) \right|^2 &= \left(\frac{Z_L}{\sin\left(4\pi \frac{l}{\lambda}\right)} \right)^2 \\ \left| Z_L \frac{m + j \tan\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right)}{1 + jm \tan\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right)} + jZ_L \frac{1 - \tan^2\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right)}{2 \tan\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right)} \right|^2 &= \left(Z_L \frac{1 + \tan^2\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right)}{2 \tan\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right)} \right)^2 \\ \left| m \tan\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) + j \tan^2\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) + j + m \tan^3\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) \right|^2 & \\ &= \left(1 + \tan^2\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) \right)^2 \left| 1 + jm \tan\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) \right|^2 \\ \left(1 + \tan^2\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) \right)^2 \left| 1 + jm \tan\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) \right|^2 & \\ &= \left(1 + \tan^2\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) \right)^2 \left| 1 + jm \tan\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) \right|^2. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde wieder die Impedanz \underline{Z} gemäß (8.6) eingesetzt.

Aufgabe 8.4 Es wird behauptet, dass die Orte konstanten Wirkwiderstands R Kreise mit Mittelpunkt $\frac{R}{Z_L + R}$ und Radius $\frac{Z_L}{Z_L + R}$ in der Reflexionsfaktorebene sind. Daher muss für einen beliebigen gegebenen Wirkwiderstand R unabhängig vom

¹⁰ Es wird das Additionstheorem $\cot(2\alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan(\alpha)} - \tan(\alpha) \right) = \frac{1 - \tan^2(\alpha)}{2 \tan(\alpha)}$ verwendet.

¹¹ Es gilt $\frac{1}{\sin(2\alpha)} = \frac{1}{2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}{2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)} = \frac{1 + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}{2 \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \frac{1 + \tan^2(\alpha)}{2 \tan(\alpha)}$.

Blindwiderstand X stets die folgende Kreisgleichung erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \left| \underline{\Gamma} - \frac{R}{Z_L + R} \right|^2 &= \left(\frac{Z_L}{Z_L + R} \right)^2, \\ \left| \frac{R + jX - Z_L}{R + jX + Z_L} - \frac{R}{Z_L + R} \right|^2 &= \left(\frac{Z_L}{Z_L + R} \right)^2, \\ |(R + jX - Z_L)(Z_L + R) - R(R + jX + Z_L)|^2 &= Z_L^2 |R + jX + Z_L|^2, \\ |jXZ_L - Z_L^2 - Z_LR|^2 &= |Z_LR + jZ_LX + Z_L^2|^2, \\ (Z_L^2 + Z_LR)^2 + X^2 Z_L^2 &= (Z_LR + Z_L^2)^2 + Z_L^2 X^2. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde der Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}$ gemäß (8.8) eingesetzt.

Es wird behauptet, dass die Orte konstanten Blindwiderstands X Kreise mit Mittelpunkt $1 + j\frac{Z_L}{X}$ und Radius $\left| \frac{Z_L}{X} \right|$ in der Reflexionsfaktorebene sind. Daher muss für einen beliebigen gegebenen Blindwiderstand X unabhängig vom Wirkwiderstand R stets die folgende Kreisgleichung erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \left| \underline{\Gamma} - 1 - j\frac{Z_L}{X} \right|^2 &= \left(\frac{Z_L}{X} \right)^2, \\ \left| \frac{R + jX - Z_L}{R + jX + Z_L} - \frac{X + jZ_L}{X} \right|^2 &= \left(\frac{Z_L}{X} \right)^2, \\ |(R + jX - Z_L)X - (X + jZ_L)(R + jX + Z_L)|^2 &= Z_L^2 |R + jX + Z_L|^2, \\ |-Z_LX - jZ_LR - jZ_L^2|^2 &= |Z_LR + jZ_LX + Z_L^2|^2, \\ Z_L^2 X^2 + (Z_LR + Z_L^2)^2 &= (Z_LR + Z_L^2)^2 + Z_L^2 X^2. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde wieder der Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma}$ gemäß (8.8) eingesetzt.

Aufgabe 8.5 Mit dem Wellenwiderstand $Z_L = 50 \Omega$ der Leitungen ergibt sich der normierte Widerstand

$$\frac{R_2}{Z_L} = 1.$$

Die parallelgeschaltete kurzgeschlossene Stichleitung wirkt wie ein parallelgeschalteter Blindleitwert B . Dieser muss so groß sein, dass das Transformationsergebnis auf dem Kreis konstanten Anpassungsfaktors m durch die normierte Eingangsimpedanz

$$\frac{Z_1}{Z_L} = 4$$

liegt. Aus Abbildung C.12 liest man den erforderlichen normierten Blindleitwert

$$BZ_L = -1,5$$

ab. Als minimal erforderliche normierte Länge der kurzgeschlossenen Stickleitung zum Realisieren dieses Blindleitwerts liest man aus Abbildung C.12

$$\frac{l_1}{\lambda} = 0,094$$

ab. Zur Transformation in die Eingangsimpedanz Z_1 wird nun noch eine Leitung der kürzestmöglichen normierten Länge

$$\frac{l_2}{\lambda} = (0,25 - 0,074) = 0,176$$

benötigt, siehe Abbildung C.12.

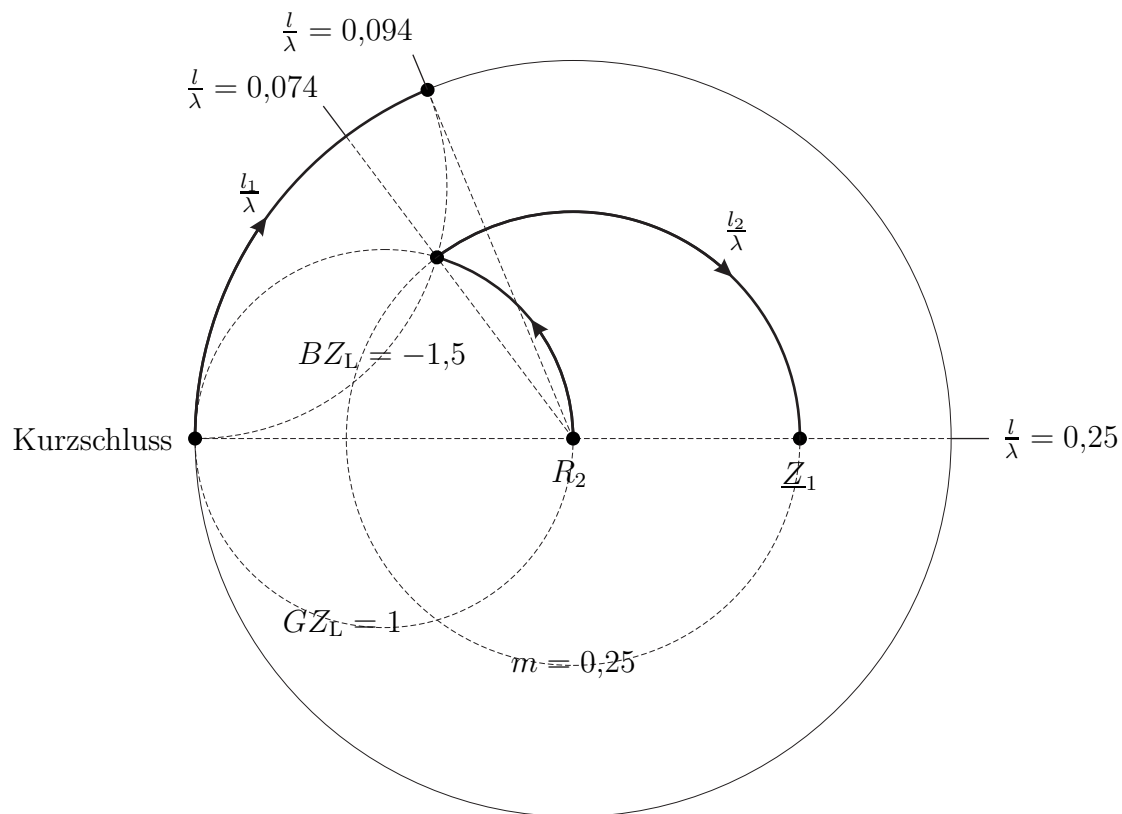


Abbildung C.12.: Transformationsweg im Smith-Diagramm

Aufgabe 9.1 Es wird ein Betriebszustand betrachtet, in dem alle Spannungen bis auf die Spannung \underline{U}_n an Tor n Null sind. Mit (9.13) folgt für die Summe der in die Tore hineinfließenden Ströme

$$0 = \sum_{m=1}^N \underline{I}_m = \sum_{m=1}^N \underline{Y}_{m,n} \underline{U}_n = \underline{U}_n \sum_{m=1}^N \underline{Y}_{m,n}.$$

Die Spaltensummen der Admittanzmatrix \underline{Y} eines massefreien Netzwerks müssen Null sein. Falls die Spannungen

$$\underline{U}_n = \underline{U}, \quad n = 1 \dots N,$$

an allen Toren gleich sind, ergibt sich der in Tor m hineinfließende Strom mit (9.13) zu

$$\underline{I}_m = \sum_{n=1}^N \underline{Y}_{m,n} \underline{U} = \underline{U} \sum_{n=1}^N \underline{Y}_{m,n}.$$

Die Zeilensummen der Admittanzmatrix \underline{Y} eines massefreien Netzwerks müssen Null sein.

Aufgabe 9.2 Da die Streumatrix \underline{S} eines reziproken Mehrtors gemäß (9.9) symmetrisch ist, ergibt sich die transponierte Impedanzmatrix mit (9.17) zu

$$\begin{aligned} \underline{Z}^T &= R_N (\mathbf{E} - \underline{S})^{-1} \cdot (\mathbf{E} + \underline{S}) \\ &= R_N (\mathbf{E} - \underline{S})^{-1} \cdot (2\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \underline{S})) \\ &= R_N (2(\mathbf{E} - \underline{S})^{-1} - \mathbf{E}) \\ &= R_N (2\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \underline{S})) \cdot (\mathbf{E} - \underline{S})^{-1} \\ &= R_N (\mathbf{E} + \underline{S}) \cdot (\mathbf{E} - \underline{S})^{-1} \\ &= \underline{Z}, \end{aligned}$$

das heißt die Impedanzmatrix \underline{Z} eines reziproken Mehrtors ist symmetrisch.

Da die Inverse einer symmetrischen Matrix symmetrisch ist, muss auch die Admittanzmatrix symmetrisch sein

$$\underline{Y} = \underline{Y}^T.$$

Die mit (9.16) aus der Impedanzmatrix \underline{Z} berechenbare Streumatrix \underline{S} verlustfreier Mehrtere muss gemäß (9.7) unitär sein. Man erhält die Bedingung

$$(\underline{Z} + R_N \mathbf{E})^{-1} \cdot (\underline{Z} - R_N \mathbf{E}) \cdot (\underline{Z}^{*T} - R_N \mathbf{E}) \cdot (\underline{Z}^{*T} + R_N \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{E}.$$

Da die Impedanzmatrix $\underline{\mathbf{Z}}$ reziproker Mehrtere symmetrisch ist, folgt¹²

$$\begin{aligned}(\underline{\mathbf{Z}} - R_N \underline{\mathbf{E}}) \cdot (\underline{\mathbf{Z}}^* - R_N \underline{\mathbf{E}}) &= (\underline{\mathbf{Z}} + R_N \underline{\mathbf{E}}) \cdot (\underline{\mathbf{Z}}^* + R_N \underline{\mathbf{E}}) \\ \underline{\mathbf{Z}} \cdot \underline{\mathbf{Z}}^* - R_N \underline{\mathbf{Z}}^* - R_N \underline{\mathbf{Z}} + R_N^2 \underline{\mathbf{E}} &= \underline{\mathbf{Z}} \cdot \underline{\mathbf{Z}}^* + R_N \underline{\mathbf{Z}}^* + R_N \underline{\mathbf{Z}} + R_N^2 \underline{\mathbf{E}} \\ \underline{\mathbf{Z}} + \underline{\mathbf{Z}}^* &= 0 \\ \operatorname{Re}(\underline{\mathbf{Z}}) &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Da die Inverse einer rein imaginären Matrix auch rein imaginär ist, muss gleiches für die Admittanzmatrix gelten:

$$\operatorname{Re}(\underline{\mathbf{Y}}) = \mathbf{0}.$$

Aufgabe 9.3 Ausdrücken der Spannungen und Ströme durch die komplexen Wellenamplituden gemäß (7.18) und (7.19) ergibt:

$$\begin{aligned}\underbrace{\sqrt{R_N} (a_1 + b_1)}_{U_1} &= \underline{A} \underbrace{\sqrt{R_N} (a_2 + b_2)}_{U_2} - \underline{B} \underbrace{\frac{a_2 - b_2}{\sqrt{R_N}}}_{I_2}, \\ \underbrace{\frac{a_1 - b_1}{\sqrt{R_N}}}_{I_1} &= \underline{C} \underbrace{(a_2 + b_2) \sqrt{R_N}}_{U_2} - \underline{D} \underbrace{\frac{a_2 - b_2}{\sqrt{R_N}}}_{I_2}.\end{aligned}$$

Auflösen nach a_1 und b_1 ergibt:

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\underline{A} + \frac{\underline{B}}{R_N} + R_N \underline{C} + \underline{D} \right)}_{T_{a,b}} b_2 + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\underline{A} - \frac{\underline{B}}{R_N} + R_N \underline{C} - \underline{D} \right)}_{T_{a,a}} a_2, \\ b_1 &= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\underline{A} + \frac{\underline{B}}{R_N} - R_N \underline{C} - \underline{D} \right)}_{T_{b,b}} b_2 + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\underline{A} - \frac{\underline{B}}{R_N} - R_N \underline{C} + \underline{D} \right)}_{T_{b,a}} a_2.\end{aligned}$$

Durch Auflösen nach den Kettenparametern erhält man:

$$\begin{aligned}\underline{A} &= \frac{1}{2} (\underline{T}_{a,b} + \underline{T}_{a,a} + \underline{T}_{b,b} + \underline{T}_{b,a}), \\ \underline{B} &= \frac{R_N}{2} (\underline{T}_{a,b} - \underline{T}_{a,a} + \underline{T}_{b,b} - \underline{T}_{b,a}), \\ \underline{C} &= \frac{1}{2R_N} (\underline{T}_{a,b} + \underline{T}_{a,a} - \underline{T}_{b,b} - \underline{T}_{b,a}), \\ \underline{D} &= \frac{1}{2} (\underline{T}_{a,b} - \underline{T}_{a,a} - \underline{T}_{b,b} + \underline{T}_{b,a}).\end{aligned}$$

¹² Der Realteil einer komplexen Größe berechnet sich zu $\operatorname{Re}(\underline{x}) = \frac{1}{2} (\underline{x} + \underline{x}^*)$.

Jetzt kann man noch gemäß (9.21) die Transmissionsparameter als Funktionen der Streuparameter einsetzen und erhält:

$$\begin{aligned}\underline{A} &= \frac{1}{2\underline{S}_{2,1}} \left(1 - \underline{S}_{2,2} + \underline{S}_{1,1} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \right), \\ \underline{B} &= \frac{R_N}{2\underline{S}_{2,1}} \left(1 + \underline{S}_{2,2} + \underline{S}_{1,1} + \det(\underline{\mathbf{S}}) \right), \\ \underline{C} &= \frac{1}{2R_N\underline{S}_{2,1}} \left(1 - \underline{S}_{2,2} - \underline{S}_{1,1} + \det(\underline{\mathbf{S}}) \right), \\ \underline{D} &= \frac{1}{2\underline{S}_{2,1}} \left(1 + \underline{S}_{2,2} - \underline{S}_{1,1} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \right).\end{aligned}$$

Auflösen der Gleichung für \underline{a}_1 nach \underline{b}_2 ergibt die ersten beiden Streuparameter als Funktionen der Kettenparameter:

$$\underline{b}_2 = \underbrace{\frac{2}{\underline{A} + \frac{\underline{B}}{R_N} + R_N\underline{C} + \underline{D}}}_{\underline{S}_{2,1}} \underline{a}_1 + \underbrace{\frac{-\underline{A} + \frac{\underline{B}}{R_N} - R_N\underline{C} + \underline{D}}{\underline{A} + \frac{\underline{B}}{R_N} + R_N\underline{C} + \underline{D}}}_{\underline{S}_{2,2}} \underline{a}_2.$$

Dies in die Gleichung für \underline{b}_1 eingesetzt und aufgelöst nach \underline{b}_1 ergibt die übrigen beiden Streuparameter:

$$\begin{aligned}\underline{b}_1 &= \frac{\underline{A} + \frac{\underline{B}}{R_N} - R_N\underline{C} - \underline{D}}{\underline{A} + \frac{\underline{B}}{R_N} + R_N\underline{C} + \underline{D}} \underline{a}_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\underline{A} + \frac{\underline{B}}{R_N} - R_N\underline{C} - \underline{D} \right) \frac{-\underline{A} + \frac{\underline{B}}{R_N} - R_N\underline{C} + \underline{D}}{\underline{A} + \frac{\underline{B}}{R_N} + R_N\underline{C} + \underline{D}} \underline{a}_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\underline{A} - \frac{\underline{B}}{R_N} - R_N\underline{C} + \underline{D} \right) \underline{a}_2 \\ &= \underbrace{\frac{\underline{A} + \frac{\underline{B}}{R_N} - R_N\underline{C} - \underline{D}}{\underline{A} + \frac{\underline{B}}{R_N} + R_N\underline{C} + \underline{D}}}_{\underline{S}_{1,1}} \underline{a}_1 + \underbrace{\frac{2\underline{A}\underline{D} - 2\underline{B}\underline{C}}{\underline{A} + \frac{\underline{B}}{R_N} + R_N\underline{C} + \underline{D}}}_{\underline{S}_{1,2}} \underline{a}_2.\end{aligned}$$

Aufgabe 9.4 Aus (9.36) folgt

$$\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{U}}^T.$$

Einsetzen in (9.6) ergibt für ein passives Mehrtor

$$\begin{aligned}
0 &\leq \underline{\mathbf{a}}^{*\text{T}} \cdot \left(\mathbf{E} - (\mathbf{U}^{\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{U})^{*\text{T}} \cdot (\mathbf{U}^{\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{U}) \right) \cdot \underline{\mathbf{a}} \\
&= \underline{\mathbf{a}}^{*\text{T}} \cdot \left(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{\text{T}} - \mathbf{U} \cdot \underline{\mathbf{M}}^{*\text{T}} \cdot \mathbf{U}^{\text{T}} \cdot \mathbf{U} \cdot \underline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{U}^{\text{T}} \right) \cdot \underline{\mathbf{a}} \\
&= \underbrace{\underline{\mathbf{a}}^{*\text{T}} \cdot \mathbf{U}}_{\underline{\mathbf{a}}'^{*\text{T}}} \cdot \left(\mathbf{E} - \underline{\mathbf{M}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{M}} \right) \cdot \underbrace{\mathbf{U}^{\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{a}}}_{\underline{\mathbf{a}}'}.
\end{aligned}$$

Mit passend gewähltem Vektor $\underline{\mathbf{a}}'$ ergibt sich eine zu (9.6) formal gleichartige hermitesche Form mit der modalen Streumatrix $\underline{\mathbf{M}}$ statt der Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$. Diese Ungleichung ist nur dann für alle Vektoren $\underline{\mathbf{a}}'$ erfüllt, wenn die Matrix $\mathbf{E} - \underline{\mathbf{M}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{M}}$ positiv semidefinit ist, das heißt keine negativen Eigenwerte hat.

Die nodale Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ reziproker Mehrtores ist gemäß (9.9) symmetrisch. Es folgt:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{U} \cdot \underline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{U}^{\text{T}})^{\text{T}} &= \mathbf{U} \cdot \underline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{U}^{\text{T}}, \\
\mathbf{U} \cdot \underline{\mathbf{M}}^{\text{T}} \cdot \mathbf{U}^{\text{T}} &= \mathbf{U} \cdot \underline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{U}^{\text{T}}, \\
\underline{\mathbf{M}}^{\text{T}} &= \underline{\mathbf{M}}.
\end{aligned}$$

Das heißt die modale Streumatrix $\underline{\mathbf{M}}$ reziproker Mehrtores ist symmetrisch.

Aufgabe 10.1 Die Streumatrix des Serienwiderstands ist

$$\underline{\mathbf{S}}^{(1)} = \frac{1}{R + 2R_{\text{N}}} \begin{pmatrix} R & 2R_{\text{N}} \\ 2R_{\text{N}} & R \end{pmatrix}$$

und die Streumatrix der Parallelkapazität ist

$$\underline{\mathbf{S}}^{(2)} = \frac{1}{2 + j\omega CR_{\text{N}}} \begin{pmatrix} -j\omega CR_{\text{N}} & 2 \\ 2 & -j\omega CR_{\text{N}} \end{pmatrix},$$

siehe (10.14) und (10.15). Mit (9.21) erhält man die Transmissionsmatrizen

$$\underline{\mathbf{T}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{R}{2R_{\text{N}}} & -\frac{R}{2R_{\text{N}}} \\ \frac{R}{2R_{\text{N}}} & 1 - \frac{R}{2R_{\text{N}}} \end{pmatrix}$$

und

$$\underline{\mathbf{T}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{j\omega CR_{\text{N}}}{2} & \frac{j\omega CR_{\text{N}}}{2} \\ -\frac{j\omega CR_{\text{N}}}{2} & 1 - \frac{j\omega CR_{\text{N}}}{2} \end{pmatrix}.$$

Die resultierende Transmissionsmatrix ist

$$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{(2)}.$$

Wegen

$$\underline{S}_{2,1} = \frac{1}{\underline{T}_{a,b}},$$

siehe (9.22), ist insbesondere

$$\begin{aligned} \underline{T}_{a,b} &= \underline{T}_{a,b}^{(1)} \underline{T}_{a,b}^{(2)} + \underline{T}_{a,a}^{(1)} \underline{T}_{b,b}^{(2)} \\ &= \left(1 + \frac{R}{2R_N}\right) \left(1 + \frac{j\omega CR_N}{2}\right) + \frac{R}{2R_N} \frac{j\omega CR_N}{2} \\ &= \frac{2R_N + R + j\omega CR_N (R_N + R)}{2R_N} \end{aligned}$$

von Interesse. Es folgt die Übertragungsfunktion

$$\underline{S}_{2,1} = \frac{2R_N}{2R_N + R + j\omega CR_N (R_N + R)}.$$

Aufgabe 10.2 Mit (9.18) und (10.20) erhält man die Admittanzmatrix

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Y}} &= \frac{1}{R_N} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{Z_L^2 + R_N^2} \begin{pmatrix} Z_L^2 - R_N^2 & -2jR_N Z_L \\ -2jR_N Z_L & Z_L^2 - R_N^2 \end{pmatrix} \right) \\ &\quad \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{Z_L^2 + R_N^2} \begin{pmatrix} Z_L^2 - R_N^2 & -2jR_N Z_L \\ -2jR_N Z_L & Z_L^2 - R_N^2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{R_N} \left(\begin{pmatrix} Z_L^2 + R_N^2 & 0 \\ 0 & Z_L^2 + R_N^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Z_L^2 - R_N^2 & -2jR_N Z_L \\ -2jR_N Z_L & Z_L^2 - R_N^2 \end{pmatrix} \right) \\ &\quad \cdot \left(\begin{pmatrix} Z_L^2 + R_N^2 & 0 \\ 0 & Z_L^2 + R_N^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_L^2 - R_N^2 & -2jR_N Z_L \\ -2jR_N Z_L & Z_L^2 - R_N^2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{R_N} \begin{pmatrix} 2R_N^2 & 2jR_N Z_L \\ 2jR_N Z_L & 2R_N^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2Z_L^2 & -2jR_N Z_L \\ -2jR_N Z_L & 2Z_L^2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{Z_L} \begin{pmatrix} R_N & jZ_L \\ jZ_L & R_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_L & -jR_N \\ -jR_N & Z_L \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{Z_L} \begin{pmatrix} R_N & jZ_L \\ jZ_L & R_N \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{Z_L^2 + R_N^2} \begin{pmatrix} Z_L & jR_N \\ jR_N & Z_L \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_L} \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 10.3 Es werden zwei spezielle Betriebszustände des Teilers betrachtet, siehe Abbildung C.13.

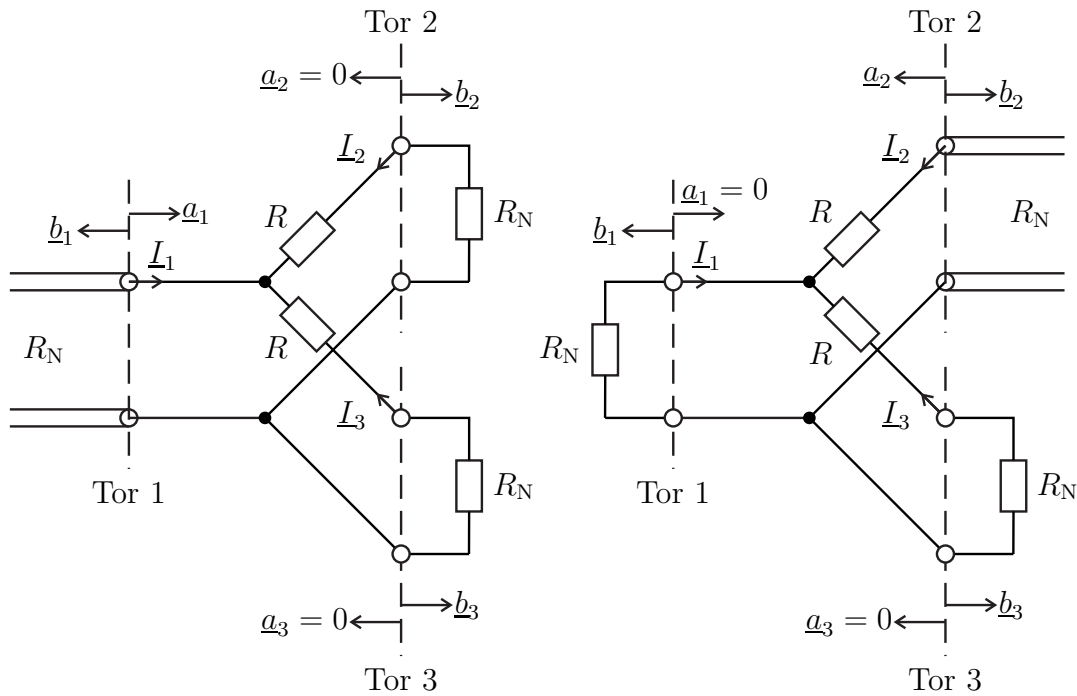


Abbildung C.13.: Spezielle Betriebszustände des eingangsseitig angepassten Teilers

Wegen $\underline{S}_{1,1} = 0$ muss die bei Abschluss von Tor 2 und Tor 3 mit dem Bezugswiderstand R_N an Tor 1 sichtbare Impedanz R_N sein, siehe (9.5) und (7.23):

$$R_N = \frac{1}{2} (R + R_N),$$

$$R = R_N.$$

Der aus Tor 2 herausfließende Strom ist in diesem Betriebszustand aus Symmetriegründen halb so groß wie der in Tor 1 hineinfließende Strom. Mit (7.19) und (9.4) folgt:

$$-\underbrace{\frac{-b_2}{\sqrt{R_N}}}_{I_2} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{a_1 - b_1}{\sqrt{R_N}}}_{I_1},$$

$$b_2 = \frac{1}{2} (1 + \underline{S}_{1,1}) a_1,$$

$$\underline{S}_{2,1} = \frac{1}{2}.$$

Bei Abschluss von Tor 1 und Tor 3 mit dem Bezugswiderstand R_N ist die an Tor 2 sichtbare Impedanz

$$R_2 = R_N + (R_N || 2R_N) = \frac{5}{3}R_N.$$

Mit (7.24) folgt:

$$\underline{S}_{2,2} = \frac{R_2 - R_N}{R_2 + R_N} = \frac{1}{4}.$$

Die Summe der in die Tore hineinfließenden Ströme ist Null. Mit (7.19) und (9.4) folgt:

$$\underbrace{\frac{-b_1}{\sqrt{R_N}}}_{I_1} + \underbrace{\frac{a_2 - b_2}{\sqrt{R_N}}}_{I_2} + \underbrace{\frac{-b_3}{\sqrt{R_N}}}_{I_3} = 0,$$

$$-\underline{S}_{1,2}a_2 + (1 - \underline{S}_{2,2})a_2 = b_3.$$

Unter Ausnutzen der Reziprozität (9.9) folgt mit (9.4):

$$b_3 = (-\underline{S}_{2,1} + 1 - \underline{S}_{2,2})a_2,$$

$$\underline{S}_{3,2} = \frac{1}{4}.$$

Unter Berücksichtigen des symmetrischen Aufbaus des eingangsseitig angepassten Teilers und der Reziprozität (9.9) erhält man schließlich die Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der eingangsseitig angepasste Teiler ist nicht verlustfrei und nur an Tor 1 eigenreflexionsfrei, siehe (9.7) und (9.5).

Aufgabe 10.4 Bei Abschluss der Tore 2, 3 und 4 mit dem Bezugswiderstand R_N muss an die Tor 1 sichtbare Impedanz gemäß (9.5) und (7.23) gleich dem Bezugswiderstand R_N sein, damit der Teiler eigenreflexionsfrei ist:

$$R_N = R + \frac{1}{3}(R + R_N)$$

$$= \frac{4}{3}R + \frac{1}{3}R_N,$$

$$R = \frac{1}{2}R_N.$$

Der aus Tor 2 herausfließende Strom ist in diesem Betriebszustand aus Symmetriegründen ein Drittel so groß wie der in Tor 1 hineinfließende Strom. Mit (7.19) und (9.4) folgt:

$$-\frac{-\underline{b}_2}{\sqrt{R_N}} = \frac{1}{3} \frac{\underline{a}_1}{\sqrt{R_N}},$$

$$\underline{b}_2 = \frac{1}{3} \underline{a}_1,$$

$$\underline{S}_{2,1} = \frac{1}{3}.$$

Unter Ausnutzen des symmetrischen Aufbaus erhält man schließlich die Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.1 Einsetzen von (11.3), (11.4) und (11.9) in (11.7) ergibt

$$\underline{b}' = \underbrace{\frac{\underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,1} - \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,1}}{\underline{S}_{4,2} + \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b}}_{\underline{E}_{1,0}} \underline{b} + \underbrace{\frac{\underline{S}_{3,2} - \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,4}\underline{\Gamma}_a + \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,4}\underline{\Gamma}_a}{\underline{S}_{4,2} + \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b}}_{\underline{E}_{1,1}} \underline{a}'.$$

Man liest

$$\underline{E}_{1,0} = \frac{\underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,1} - \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,1}}{\underline{S}_{4,2} + \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b}$$

und

$$\underline{E}_{1,1} = \frac{\underline{S}_{3,2} - \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,4}\underline{\Gamma}_a + \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,4}\underline{\Gamma}_a}{\underline{S}_{4,2} + \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b}$$

ab. Einsetzen von (11.3), (11.4) und (11.9) in (11.5) ergibt

$$\underline{a} = \left(\underline{S}_{1,1} - \frac{\underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,1}}{\underline{S}_{4,2}} \right) \underline{b} + \left(\frac{\underline{S}_{1,2}}{\underline{S}_{4,2}} - \frac{\underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,4}\underline{\Gamma}_a}{\underline{S}_{4,2}} + \underline{S}_{1,4}\underline{\Gamma}_a \right) \underline{a}'$$

$$+ \left(-\frac{\underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b}{\underline{S}_{4,2}} + \underline{S}_{1,3}\underline{\Gamma}_b \right) \underline{b}'.$$

Mit \underline{b}' aus der ersten Gleichung folgen

$$\underline{E}_{0,0} = \underline{S}_{1,1}$$

$$+ \frac{-\underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,1} + \underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,1}\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b\underline{S}_{3,1} + \underline{S}_{1,3}\underline{\Gamma}_b\underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,1} - \underline{S}_{1,3}\underline{\Gamma}_b\underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,1}}{\underline{S}_{4,2} + \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b}$$

und

$$\begin{aligned} F_{0,1} = & \left(\underline{S}_{1,2} - \underline{S}_{1,2}\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,4}\underline{\Gamma}_a + \underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,4}\underline{\Gamma}_a\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b + \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{1,4}\underline{\Gamma}_a \right. \\ & + \underline{S}_{1,4}\underline{\Gamma}_a\underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{1,4}\underline{\Gamma}_a\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b\underline{S}_{3,4}\underline{\Gamma}_a + \underline{S}_{1,3}\underline{\Gamma}_b\underline{S}_{3,2} \\ & \left. - \underline{S}_{1,3}\underline{\Gamma}_b\underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,4}\underline{\Gamma}_a + \underline{S}_{1,3}\underline{\Gamma}_b\underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,4}\underline{\Gamma}_a \right) / \left(\underline{S}_{4,2} + \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b \right). \end{aligned}$$

Im Falle eines Richtkopplers mit $\underline{S}_{1,1} = \underline{S}_{1,4} = \underline{S}_{2,2} = \underline{S}_{2,3} = \underline{S}_{3,2} = \underline{S}_{3,3} = \underline{S}_{4,1} = \underline{S}_{4,4} = 0$, $\underline{S}_{1,2} = \underline{S}_{2,1} = \underline{S}_{3,4} = \underline{S}_{4,3}$ und $\underline{S}_{1,3} = \underline{S}_{2,4} = \underline{S}_{3,1} = \underline{S}_{4,2}$, siehe (10.34), erhält man:

$$\begin{aligned} F_{0,0} &= (\underline{S}_{1,3}^2 - \underline{S}_{1,2}^2) \underline{\Gamma}_b, \\ F_{0,1} &= \frac{\underline{S}_{1,2} - \underline{S}_{1,2}^3 \underline{\Gamma}_b \underline{\Gamma}_a}{\underline{S}_{1,3}} + \underline{S}_{1,2} \underline{S}_{1,3} \underline{\Gamma}_b \underline{\Gamma}_a, \\ F_{1,0} &= \underline{S}_{1,3}, \\ F_{1,1} &= \underline{S}_{1,2} \underline{\Gamma}_a. \end{aligned}$$

Im Falle reflexionsfreier Messstellen $\underline{\Gamma}_a = \underline{\Gamma}_b = 0$ erhält man:

$$\begin{aligned} F_{0,0} &= \underline{S}_{1,1} - \frac{\underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,1}}{\underline{S}_{4,2}}, \\ F_{0,1} &= \frac{\underline{S}_{1,2}}{\underline{S}_{4,2}}, \\ F_{1,0} &= \underline{S}_{3,1} - \frac{\underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,1}}{\underline{S}_{4,2}}, \\ F_{1,1} &= \frac{\underline{S}_{3,2}}{\underline{S}_{4,2}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 11.2 Die Messung am idealen Abschluss $\underline{\Gamma}_M = 0$ ergibt

$$F_{1,1} = \underline{\Gamma}'_M,$$

siehe (11.13). Für die Messungen am idealen Leerlauf $\underline{\Gamma}_O = 1$ und am idealen Kurzschluss $\underline{\Gamma}_S = -1$ folgen mit (11.13)

$$\underline{\Gamma}'_O = F_{1,1} + \underline{\Gamma}'_O F_{0,0} - \det(\mathbf{F})$$

beziehungsweise

$$\underline{\Gamma}'_S = F_{1,1} - \underline{\Gamma}'_S F_{0,0} + \det(\mathbf{F}).$$

Durch Addition beider Gleichungen erhält man

$$\underline{\Gamma}'_O + \underline{\Gamma}'_S = 2\underline{F}_{1,1} + (\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S) \underline{E}_{0,0}.$$

Einsetzen des aus der Messung am idealen Abschluss $\underline{\Gamma}_M = 0$ bekannten Fehlerterms $\underline{F}_{1,1}$ ergibt

$$\underline{E}_{0,0} = \frac{\underline{\Gamma}'_O + \underline{\Gamma}'_S - 2\underline{F}_{1,1}}{\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S} = \frac{\underline{\Gamma}'_O + \underline{\Gamma}'_S - 2\underline{\Gamma}'_M}{\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S}.$$

Schließlich erhält man aus der Messung am idealen Kurzschluss $\underline{\Gamma}_S = -1$ unter Verwenden der bereits berechneten Fehlerterme $\underline{F}_{1,1}$ und $\underline{E}_{0,0}$

$$\begin{aligned} \det(\underline{\mathbf{F}}) &= \underline{\Gamma}'_S - \underline{F}_{1,1} + \underline{\Gamma}'_S \underline{E}_{0,0} \\ &= \underline{\Gamma}'_S - \underline{F}_{1,1} + \underline{\Gamma}'_S \frac{\underline{\Gamma}'_O + \underline{\Gamma}'_S - 2\underline{\Gamma}'_M}{\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S} \\ &= \frac{2\underline{\Gamma}'_O \underline{\Gamma}'_S - \underline{\Gamma}'_O \underline{\Gamma}'_M - \underline{\Gamma}'_S \underline{\Gamma}'_M}{\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S}. \end{aligned}$$

Aufgabe 11.3 Aus (11.33) erhält man mit $\underline{\Gamma}' = \underline{b}'_{11}/\underline{a}'_{11}$

$$-\underline{F}_{1,1} + \underline{\Gamma}' = -\det(\underline{\mathbf{F}}_A) \underline{\Gamma} + \underline{E}_{0,0} \underline{\Gamma}'.$$

Die Messung am idealen Abschluss $\underline{\Gamma}_M = 0$ ergibt

$$\underline{F}_{1,1} = \underline{\Gamma}'_M.$$

Die Messungen an idealem Leerlauf $\underline{\Gamma}_O = 1$ und am idealem Kurzschluss $\underline{\Gamma}_S = -1$ ergeben

$$-\underline{F}_{1,1} + \underline{\Gamma}'_O = -\det(\underline{\mathbf{F}}_A) + \underline{E}_{0,0} \underline{\Gamma}'_O$$

beziehungsweise

$$-\underline{F}_{1,1} + \underline{\Gamma}'_S = \det(\underline{\mathbf{F}}_A) - \underline{E}_{0,0} \underline{\Gamma}'_S.$$

Durch Addition beider Gleichungen erhält man

$$-2\underline{F}_{1,1} + \underline{\Gamma}'_O + \underline{\Gamma}'_S = \underline{E}_{0,0} (\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S).$$

Einsetzen des aus der Messung am idealen Abschluss $\underline{\Gamma}_M = 0$ bekannten Fehlerterms $\underline{F}_{1,1}$ ergibt

$$\underline{E}_{0,0} = \frac{\underline{\Gamma}'_O + \underline{\Gamma}'_S - 2\underline{F}_{1,1}}{\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S} = \frac{\underline{\Gamma}'_O + \underline{\Gamma}'_S - 2\underline{\Gamma}'_M}{\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S}.$$

Schließlich erhält man aus der Messung am idealen Leerlauf $\underline{\Gamma}_O = 1$ unter Verwenden der bereits berechneten Fehlerterme $\underline{F}_{1,1}$ und $\underline{F}_{0,0}$

$$\begin{aligned}\det(\underline{\mathbf{F}}_A) &= \underline{F}_{1,1} - \underline{\Gamma}'_O + \underline{F}_{0,0}\underline{\Gamma}'_O \\ &= \underline{\Gamma}'_M - \underline{\Gamma}'_O + \frac{\underline{\Gamma}'_O + \underline{\Gamma}'_S - 2\underline{\Gamma}'_M}{\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S} \underline{\Gamma}'_O \\ &= \frac{2\underline{\Gamma}'_O\underline{\Gamma}'_S - \underline{\Gamma}'_O\underline{\Gamma}'_M - \underline{\Gamma}'_S\underline{\Gamma}'_M}{\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S}.\end{aligned}$$

Aus (11.32) erhält man mit $\underline{S}'_{T1,1} = \underline{b}'_{11}/\underline{a}'_{11}$ und $\underline{S}'_{T2,1} = \underline{b}'_{12}/\underline{a}'_{11}$ für die Messung an der idealen Durchverbindung

$$-\underline{F}_{1,1} + \underline{S}'_{T1,1} = \frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}}{\underline{F}_{3,2}} \underline{S}'_{T2,1}$$

und

$$\frac{\underline{F}_{1,0}}{\underline{F}_{3,2}} \underline{S}'_{T2,1} = -\det(\underline{\mathbf{F}}_A) + \underline{F}_{0,0}\underline{S}'_{T1,1}.$$

Einsetzen des aus der Messung am idealen Abschluss $\underline{\Gamma}_M = 0$ bekannten Fehlerterms $\underline{F}_{1,1}$ ergibt

$$\frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}}{\underline{F}_{3,2}} = \frac{-\underline{F}_{1,1} + \underline{S}'_{T1,1}}{\underline{S}'_{T2,1}} = \frac{\underline{S}'_{T1,1} - \underline{\Gamma}'_M}{\underline{S}'_{T2,1}}.$$

Einsetzen der aus den Messungen an den idealen Eintoren bekannten Fehlerterme $\det(\underline{\mathbf{F}}_A)$ und $\underline{F}_{0,0}$ ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\underline{F}_{1,0}}{\underline{F}_{3,2}} &= \frac{-\det(\underline{\mathbf{F}}_A) + \underline{F}_{0,0}\underline{S}'_{T1,1}}{\underline{S}'_{T2,1}} \\ &= \frac{\underline{\Gamma}'_O\underline{\Gamma}'_M + \underline{\Gamma}'_S\underline{\Gamma}'_M - 2\underline{\Gamma}'_O\underline{\Gamma}'_S + (\underline{\Gamma}'_O + \underline{\Gamma}'_S - 2\underline{\Gamma}'_M)\underline{S}'_{T1,1}}{\underline{S}'_{T2,1}(\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S)}.\end{aligned}$$

Aufgabe 12.1 Bei Kurzschluss an Tor 3 gilt

$$\underline{U}_3 = 0.$$

Mit (9.13) folgt

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{1,1} & \underline{Y}_{1,2} & \underline{Y}_{1,3} \\ \underline{Y}_{2,1} & \underline{Z}_{2,2} & \underline{Y}_{2,3} \\ \underline{Y}_{3,1} & \underline{Z}_{3,2} & \underline{Y}_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das heißt man erhält die Admittanzmatrix des Zweitorts durch Streichen der dritten Zeile und der dritten Spalte der Admittanzmatrix \underline{Y} des Dreitors.

Gemäß Aufgabe 9.1 müssen die Spaltensummen der Admittanzmatrix \underline{Y} eines massefreien Netzwerks Null sein. Es folgt:

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{3,1} &= 1 - \underline{Y}_{1,1} - \underline{Y}_{2,1}, \\ \underline{Y}_{3,2} &= 1 - \underline{Y}_{1,2} - \underline{Y}_{2,2}.\end{aligned}$$

Gemäß Aufgabe 9.1 müssen die Zeilensummen der Admittanzmatrix \underline{Y} eines massefreien Netzwerks Null sein. Es folgt:

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{1,3} &= 1 - \underline{Y}_{1,1} - \underline{Y}_{1,2}, \\ \underline{Y}_{2,3} &= 1 - \underline{Y}_{2,1} - \underline{Y}_{2,2}.\end{aligned}$$

Schließlich erhält man noch

$$\underline{Y}_{3,3} = 1 - \underline{Y}_{3,1} - \underline{Y}_{3,2} = \underline{Y}_{1,1} + \underline{Y}_{2,1} + \underline{Y}_{1,2} + \underline{Y}_{2,2} - 1.$$

Hiermit ist es möglich, die Admittanzmatrix \underline{Y} des Dreitors aus der Admittanzmatrix des Zweitorts zu berechnen.

Aufgabe 12.2 Der Klemmenleistungsgewinn ergibt sich mit (10.18) und (12.28) zu

$$G = \frac{|e^{-j\beta l}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_L|^2)}{1 - |e^{-j2\beta l} \underline{\Gamma}_L|^2} = 1.$$

Die von der Leitung aufgenommene Leistung muss gleich der von der Leitung abgegebenen Leistung sein, da die Leitung verlustfrei ist.

Der Einfügungsgewinn ergibt sich mit (10.18) und (12.30) zu

$$G_I = \frac{|e^{-j\beta l}|^2 |1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}{|1 - e^{-j2\beta l} \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2} = \frac{|1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}{|1 - e^{-j2\beta l} \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}.$$

An reflexionsfreien Quellen $\underline{\Gamma}_Q = 0$ oder reflexionsfreien Lasten $\underline{\Gamma}_L = 0$ ist der Einfügungsgewinn $G_I = 1$.

Der Übertragungsgewinn ergibt sich mit (10.18) und (12.32) zu

$$G_T = \frac{(1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2) |e^{-j\beta l}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_L|^2)}{|1 - e^{-j2\beta l} \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2} = \frac{(1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2) (1 - |\underline{\Gamma}_L|^2)}{|1 - e^{-j2\beta l} \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}.$$

Der verfügbare Leistungsgewinn ergibt sich mit (10.18) und (12.35) zu

$$G_A = \frac{|e^{-j\beta l}|^2 \left(1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2\right)}{1 - |e^{-j2\beta l} \underline{\Gamma}_Q|^2} = 1.$$

Dies ist aufgrund der Verlustfreiheit der Leitung zu erwarten.

Zum Berechnen des maximalen verfügbaren Leistungsgewinns G_{MAG} bestimmt man zunächst mit (10.18) und (12.22) den Stabilitätsfaktor

$$K = \frac{1 + |-e^{-j2\beta l}|^2}{2 |e^{-j\beta l}| |e^{-j\beta l}|} = 1.$$

Man erhält schließlich mit (10.18) und (12.39) den maximalen verfügbaren Leistungsgewinn

$$G_{\text{MAG}} = \frac{|e^{-j\beta l}|}{|e^{-j\beta l}|} = 1.$$

Aufgabe 12.3 Die Einwegleitung ist wegen $\underline{S}_{1,2} = 0$ rückwirkungsfrei, so dass der Übertragungsgewinn G_T dem unilateralen Übertragungsgewinn G_{TU} entspricht. Aus (10.23) und (12.42) folgt

$$G_T = G_{\text{TU}} = \underbrace{\left(1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2\right)}_{G_Q} \underbrace{\left(1 - |\underline{\Gamma}_L|^2\right)}_{G_L}.$$

Der Klemmenleistungsgewinn ergibt sich mit (10.23) und (12.28) zu

$$G = 1 - |\underline{\Gamma}_L|^2,$$

vergleiche auch (12.37). Die Einwegleitung ist nicht verlustfrei.

Der verfügbare Leistungsgewinn ergibt sich mit (10.23) und (12.35) zu

$$G_A = 1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2,$$

vergleiche auch (12.38).

Der Einfügungsgewinn ergibt sich mit (10.23) und (12.30) zu

$$G_I = \left|1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L\right|^2.$$

An einer reflexionsfreien Quelle $\underline{\Gamma}_Q = 0$ oder an einer reflexionsfreien Last $\underline{\Gamma}_L = 0$ ist der Einfügungsgewinn $G_I = 1$.

Aufgabe 12.4 Mit

$$(K - \sqrt{K^2 - 1})(K + \sqrt{K^2 - 1}) = K^2 - (K^2 - 1) = 1$$

folgt aus (12.39) für den maximalen verfügbaren Leistungsgewinn unter Berücksichtigen des korrekten Vorzeichens vor der Wurzel

$$G_{\text{MAG}} = \frac{|\underline{S}_{2,1}|}{|\underline{S}_{1,2}|} \frac{1}{(K + \sqrt{K^2 - 1})}.$$

Im Grenzfall rückwirkungsfreier Zweitore $\underline{S}_{1,2} \rightarrow 0$ erhält man mit (12.40)

$$G_{\text{MAG}} \rightarrow \frac{|\underline{S}_{2,1}|}{|\underline{S}_{1,2}|} \frac{|\underline{S}_{2,1}| |\underline{S}_{1,2}|}{(|\underline{S}_{1,1}|^2 - 1)(|\underline{S}_{2,2}|^2 - 1)} = |\underline{S}_{2,1}|^2 \frac{1}{(|\underline{S}_{1,1}|^2 - 1)(|\underline{S}_{2,2}|^2 - 1)}.$$

Dies entspricht dem maximalen unilateralen Übertragungsgewinn G_{TUmax} gemäß (12.54).

Aufgabe 13.1 Aus der Streumatrix \underline{S} der Paralleladmittanz gemäß (10.15) folgen mit (13.15)¹³

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_{R1}|^2\} &= \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_{R2}|^2\} = kTB \left(1 - \frac{|\underline{Y}R_N|^2}{|2 + \underline{Y}R_N|^2} - \frac{4}{|2 + \underline{Y}R_N|^2} \right) \\ &= kTB \frac{|2 + \underline{Y}R_N|^2 - |\underline{Y}R_N|^2 - 4}{|2 + \underline{Y}R_N|^2} \\ &= kTB \frac{2\underline{Y}^* R_N + 2\underline{Y}R_N}{|2 + \underline{Y}R_N|^2} \\ &= -kTB \frac{4 \text{Re}(\underline{Y}R_N)}{|2 + \underline{Y}R_N|^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{E}\{\underline{b}_{R1} \underline{b}_{R2}^*\} &= \frac{1}{2} \text{E}\{\underline{b}_{R2} \underline{b}_{R1}^*\} = -kTB \frac{-2\underline{Y}^* R_N - 2\underline{Y}R_N}{|2 + \underline{Y}R_N|^2} \\ &= kTB \frac{4 \text{Re}(\underline{Y}R_N)}{|2 + \underline{Y}R_N|^2} \\ &= \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_{R1}|^2\} = \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_{R2}|^2\}. \end{aligned}$$

¹³ Der Realteil einer komplexen Größe berechnet sich zu $\text{Re}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\underline{x} + \underline{x}^*)$.

Für den normierten Korrelationskoeffizienten folgt

$$\underline{C} = 1.$$

Die Rauschquellen sind vollständig korreliert, wie man es aufgrund des Kurzschlusses zwischen Tor 1 und Tor 2 auch intuitiv erwartet.

Aufgabe 13.2 Mit (13.15) und (10.23) ergibt sich die Rauschwellenkorrelationsmatrix der thermisch rauschenden Einwegleitung homogener Temperatur T zu

$$\underline{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbb{E}\{|b_{R1}|^2\} & \frac{1}{2} \mathbb{E}\{b_{R1}b_{R2}^*\} \\ \frac{1}{2} \mathbb{E}\{b_{R1}^*b_{R2}\} & \frac{1}{2} \mathbb{E}\{|b_{R2}|^2\} \end{pmatrix} = kTB \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit (13.16), (13.17) und (13.18) berechnet man die Rauschparameter:

$$\begin{aligned} R_{1,1} &= \frac{1}{2} \mathbb{E}\left\{\left|b_{R1} - \frac{S_{1,1}}{S_{2,1}}b_{R2}\right|^2\right\} = kTB, \\ \underline{R}_{1,2} = \underline{R}_{2,1}^* &= \frac{1}{2} \mathbb{E}\left\{\left(b_{R1} - \frac{S_{1,1}}{S_{2,1}}b_{R2}\right)\left(\frac{1}{S_{2,1}}b_{R2}\right)^*\right\} = 0, \\ R_{2,2} &= \frac{1}{2} \mathbb{E}\left\{\left|\frac{1}{S_{2,1}}b_{R2}\right|^2\right\} = 0. \end{aligned}$$

Mit (13.19) erhält man die effektive Rauschtemperatur

$$T_{\text{eff}} = T \frac{|\underline{\Gamma}_Q|^2}{1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2}.$$

Hieraus folgt mit (13.24) die Rauschzahl

$$F = 1 + \frac{T}{T_0} \frac{|\underline{\Gamma}_Q|^2}{1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2}.$$

Falls die Temperatur T der Einwegleitung der Bezugstemperatur T_0 entspricht, erhält man

$$F = \frac{1}{1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2}.$$

Dies entspricht dem Ergebnis, dass man aufgrund von (13.30) und dem Ergebnis von Aufgabe 12.3 erwartet.

Aufgabe 13.3 Aus (13.30) folgt, dass die Rauschzahl F minimal wird, wenn der verfügbare Leistungsgewinn G_A maximal wird. Aus (12.39) folgt

$$F_{\min} = \frac{1}{G_{\text{MAG}}} = \frac{|S_{1,2}|}{|S_{2,1}| (K - \sqrt{K^2 - 1})}.$$

Bei thermisch rauschenden Zweitoren homogener Temperatur T entspricht die Leistungsanpassung der Rauschanpassung.

Literatur

- [Bae02] W. Bächtold. *Mikrowellenelektronik*. Braunschweig: Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, 2002.
- [Bae98] W. Bächtold. *Lineare Elemente der Höchsthfrequenztechnik*. 2. Auflage. Zürich: Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, 1998.
- [Bal05] C. A. Balanis. *Antenna Theory*. 3. Auflage. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2005.
- [Bal12] C. A. Balanis. *Advanced Engineering Electromagnetics*. 2. Auflage. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2012.
- [Bla07] J. G. Van Bladel. *Electromagnetic Fields*. IEEE Press series on electromagnetic wave theory. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2007.
- [Col01] R. E. Collin. *Foundations of Microwave Engineering*. 2. Auflage. IEEE Press series on electromagnetic wave theory. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2001.
- [CT65] J. W. Cooley und J. W. Tukey. »An algorithm for the machine computation of complex Fourier series«. In: *Mathematics of Computation* 19 (Apr. 1965), S. 297–301.
- [Dav11] D. B. Davidson. *Computational Electromagnetics for RF and Microwave Engineering*. 2. Auflage. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2011.
- [ES91] H.-J. Eul und B. Schiek. »A generalized theory and new calibration procedures for network analyzer self-calibration«. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 39.4 (Apr. 1991), S. 724–731.
- [ES92] M. L. Edwards und J. H. Sinsky. »A new criterion for linear 2-port stability using a single geometrically derived parameter«. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 40.12 (Dez. 1992), S. 2303–2311.
- [FB08] T. Frey und M. Bossert. *Signal- und Systemtheorie*. 2. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008.

- [FP92] A. Ferrero und U. Pisani. »Two-port network analyzer calibration using an unknown “Thru”«. In: *IEEE Microwave and Guided Wave Letters* 2.12 (Dez. 1992), S. 505–507.
- [Fri44] H. T. Friis. »Noise figures of radio receivers«. In: *Proceedings of the IRE* 32.7 (Juli 1944), S. 419–422.
- [Fri46] H. T. Friis. »A note on a simple transmission formula«. In: *Proceedings of the IRE* 34.5 (Mai 1946), S. 254–256.
- [Gib14] W. C. Gibson. *The Method of Moments in Electromagnetics*. 2. Auflage. Boca Raton, FL: CRC Press, 2014.
- [GL13] G. H. Golub und C. F. van Loan. *Matrix Computations*. 4. Auflage. Baltimore, MD: The Johns Hopkins University Press, 2013.
- [Gol05] A. Goldsmith. *Wireless Communications*. New York, NY: Cambridge University Press, 2005.
- [Gon97] G. Gonzales. *Microwave Transistor Amplifiers: Analysis and Design*. 2. Auflage. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1997.
- [Gus13] F. Gustrau. *Hochfrequenztechnik*. 2. Auflage. München: Carl Hanser Verlag, 2013.
- [GW98] N. Geng und W. Wiesbeck. *Planungsmethoden für die Mobilkommunikation*. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [Har01] R. F. Harrington. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. IEEE Press series on electromagnetic wave theory. New York, NY: IEEE Press, 2001.
- [Har93] R. F. Harrington. *Field Computation by Moment Methods*. IEEE Press series on electromagnetic wave theory. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 1993.
- [Hie11] M. Hiebel. *Grundlagen der vektoriellen Netzwerkanalyse*. 3. Auflage. München: Rohde & Schwarz, 2011.
- [Hof97] M. H. W. Hoffmann. *Hochfrequenztechnik*. Berlin: Springer-Verlag, 1997.
- [Hor85] E. H. Horneber. *Simulation elektrischer Schaltungen auf dem Rechner*. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [JD93] D. H. Johnson und D. E. Dudgeon. *Array Signal Processing*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1993.
- [Jin15] J.-M. Jin. *Theory and Computation of Electromagnetic Fields*. 2. Auflage. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2015.

-
- [Kar11] K. W. Kark. *Antennen und Strahlungsfelder*. 4. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2011.
- [Kay93] S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1993.
- [KD90] K. W. Kark und R. Dill. »A general theory on the graphical representation of antenna-radiation fields«. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 38.2 (Feb. 1990), S. 160–166.
- [KK12] K. D. Kammeyer und K. Kroschel. *Digitale Signalverarbeitung*. 8. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2012.
- [KM03] J. D. Kraus und R. J. Marhefka. *Antennas for all Applications*. New York, NY: McGraw-Hill, 2003.
- [Kra27] M. H. A. Kramers. »La diffusion de la lumière par les atoms«. In: *Atti Cong. Intern. Fisici, (Transactions of Volta Centenary Congress)*. Bd. 2. Como, 1927, S. 545–557.
- [Kro26] R. de L. Kronig. »On the theory of dispersion of X-rays«. In: *Journal of the Optical Society of America* 12.6 (1926), S. 547–557.
- [Leh10] G. Lehner. *Elektromagnetische Feldtheorie*. 7. Auflage. Berlin: Springer-Verlag, 2010.
- [Ler95] E. Lertes. *Funkortung und Funknavigation*. Wiesbaden: Vieweg & Sohn, 1995.
- [Lev88] N. Levanon. *Radar Principles*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1988.
- [Mar97] R. B. Marks. »Formulations of the basic vector network analyzer error model including switch-terms«. In: *50th ARFTG Conference Digest*. Bd. 32. Portland, OR, 1997, S. 115–126.
- [Mas53] S. J. Mason. »Feedback theory – Some properties of signal flow graphs«. In: *Proceedings of the IRE* 41 (Sep. 1953), S. 1144–1156.
- [Mas56] S. J. Mason. »Feedback theory – Further properties of signal flow graphs«. In: *Proceedings of the IRE* 44 (Juli 1956), S. 920–926.
- [Mic81] H.-J. Michel. *Zweitor-Analyse mit Leistungswellen*. Stuttgart: B. G. Teubner, 1981.
- [Mol11] A. F. Molisch. *Wireless Communications*. 2. Auflage. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2011.

- [MS00] T. K. Moon und W. C. Stirling. *Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000.
- [MYJ80] G. L. Matthaei, L. Young und E. M. T. Jones. *Microwave Filters, Impedance-Matching Networks, and Coupling Structures*. Norwood, MA: Artech House, 1980.
- [OL10] J.-R. Ohm und H. D. Lüke. *Signalübertragung*. 11. Auflage. Berlin: Springer-Verlag, 2010.
- [OS10] A. V. Oppenheim und R. W. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*. 3. Auflage. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, 2010.
- [Pae12] M. Pätzold. *Mobile Radio Channels*. 2. Auflage. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2012.
- [PM13] Edward M. Purcell und David J. Morin. *Electricity and Magnetism*. 3. Auflage. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2013.
- [Poz12] D. M. Pozar. *Microwave Engineering*. 4. Auflage. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2012.
- [PP02] A. Papoulis und S. U. Pillai. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. 4. Auflage. New York, NY: McGraw-Hill, 2002.
- [PS08] J. Proakis und M. Salehi. *Digital Communications*. 5. Auflage. New York, NY: McGraw-Hill, 2008.
- [PTVF07] W. H. Press u. a. *Numerical Recipes*. 3. Auflage. New York, NY: Cambridge University Press, 2007.
- [Ric14] M. A. Richards. *Fundamentals of Radar Signal Processing*. 2. Auflage. New York, NY: McGraw-Hill, 2014.
- [Rol62] J. M. Rollett. »Stability and power-gain invariants of linear two-ports«. In: *IRE Transactions on Circuit Theory* 9.1 (März 1962), S. 29–32.
- [RWD94] S. Ramo, J. R. Whinnery und T. Van Duzer. *Fields and Waves in Communication Electronics*. 3. Auflage. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 1994.
- [Sch99] B. Schiek. *Grundlagen der Hochfrequenz-Messtechnik*. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- [SDM14] S. Sand, A. Dammann und C. Mensing. *Positioning in Wireless Communications Systems*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2014.

-
- [SM05] P. Stoica und R. Moses. *Spectral Analysis of Signals*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, 2005.
- [SRS06] B. Schiek, I. Rolfes und H.-J. Siweris. *Noise in High-Frequency Circuits and Oscillators*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2006.
- [ST13] W. L. Stutzman und G. A. Thiele. *Antenna Theory and Design*. 3. Auflage. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2013.
- [Str41] J. A. Stratton. *Electromagnetic Theory*. New York, NY: McGraw-Hill, 1941.
- [Tre02] H. L. Van Trees. *Optimum Array Processing*. 4. Auflage. New York, NY: John Wiley & Sons, 2002.
- [TSG16] U. Tietze, C. Schenk und E. Gamm. *Halbleiter-Schaltungstechnik*. 15. Auflage. Berlin: Springer-Verlag, 2016.
- [TV05] D. Tse und P. Viswanath. *Fundamentals of Wireless Communication*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2005.
- [Wit14] R. A. Witte. *Spectrum and Network Measurements*. 2. Auflage. SciTech Publishing, 2014.

Index

- 10-Term-Fehlermodell, 258
- 3-Term-Fehlermodell, 247
- 5-Term-Fehlermodell, 258
- 7-Term-Fehlermodell, 252

- ABCD*-Matrix, *siehe* Kettenmatrix
- Abschluss, 159
 - symmetrischer, 174
 - symmetrischer rein massegekoppelter, 176
- Abschlussimpedanz, 165
- Abstandsfaktor, 83
- Abtasttheorem, 125, 342, 348
- Abtastung, 125, 340, 348
- Admittanzmatrix, 203
- Amplitude, 157
- Amplitude, komplexe, 3, 157
- Amplitudengewinn, 314
- Anpassung, 159
- Anpassungsfaktor, 160
- Antenne, *iv*
- Antenne, lineare, 109
- Antenne, omnidirektionale, 105
- Antennenelement, 122
- Auflösebandbreite, 243, 349, 351
- Ausfallswinkel, 137
- Ausgangskompressionspunkt, 315
- Ausgangssignal, 311
 - Eintonanregung, 313
 - Kleinsignalnäherung, 315
 - Zweitonanregung
 - Kleinsignalnäherung, 318
- Ausnutzungsfaktor, 265, 276
- Autokorrelationsfunktion, 112, 351

- Autotransformation, 170
- Available Power Gain, *siehe* Leistungsgewinn, verfügbarer
- Averaging, *siehe* Mitteln
- Azimutwinkel, 73

- Bandleitung, 54
- Bandpassmodus, 338
- Bandpasssignal, 327, 328
- Bartlett-Methode, 353
- Bezugsebene, 198
- Bezugskreisfrequenz, 327
- Bezugstemperatur, 284
- Bezugswelle, 157, 198
- Boltzmann-Konstante, 284
- Brechungsgesetz, *siehe* Snelliussches Brechungsgesetz
- Brewster-Winkel, 143, 145

- Deembedding, 253
- Detektor, 350
- Determinante, 206
- Device under Test, *siehe* Messobjekt
- Dielektrikum, 5
- Dipol, 79
- Dipolantenne, 98, 109
- Dipolmoment, elektrisches, 79
- Dirac-Impuls, 16, 36, 81
- Dirac-Impulses, 330
- Dirac-Impulsfolge, 340
- Direktivität, 247, 252, 258
- Dirichlet-Kern, 127, 344, 349
- Dispersion, 37
- Divergenz

- Berechnung, 76
 Definition, 10
 kartesische Koordinaten, 12
 Kugelkoordinaten, 76
 Dreileitersystem, symmetrisches, 65, 172
 rein massegekoppeltes, 69, 176, 208
 Dreitor, 227
 Dualität, Fourier-Transformation, 331
 Dualität, Maxwellsche Gleichungen, 21
 Dualtransformation, 171
 Durchflutungsgesetz, *siehe* erste Maxwellsche Gleichung
 Dynamikbereich, 322
 Dämpfungsglied, 224, 322
 Dämpfungskonstante, 33

 Eigenparameter, 210
 Eindeutigkeitstheorem, 89
 Einfallsebene, 16, 136
 Einfallrichtung, 16, 136
 Einfallswinkel, 137
 Einfüfungsgewinn, 274
 Eingangsimpedanz, 165
 Eingangskompressionspunkt, 314
 Einheitsvektor, 8, 74
 Eintor, 219
 Eintor, rauschendes, 283
 Eintorque, 219
 Einwegleitung, 228
 Elementardipol, 100
 Elementrichtcharakteristik, 111, 117, 123
 Elementrichtungsfaktor, 110
 Empfangsleistung
 Freiraumausbreitung, 131
 Freiraumausbreitung, polarimetrisch, 135
 Mehrwegeausbreitung, 152
 Streuung, 147
 Streuung, polarimetrisch, 151
 Energiedichte
 elektrische, 22
 magnetische, 22
 Energiegeschwindigkeit, 30
 Ersatzrauschquelle, 294
 Excess Noise Ratio, *siehe* Übertemperaturverhältnis

 Faltungstheorem, 332
 Fehlerkorrektur
 Rauschzahlmessung, 301
 Reflektometer, 246–248
 Vektornetzwerkanalysator, 251–254
 Fehlerzweitor, 245, 250
 Feldstärke
 elektrische, 3
 Dipol, 86
 Fernfeldnäherung, 84
 magnetische, 4
 Dipol, 85
 Fernfeldnäherung, 84
 Feldtheorie, iv
 Feldwellenwiderstand, 85
 in z -Richtung, 140, 142
 transversalelektrische Welle, 32
 transversalelektromagnetische Welle, 30
 transversalmagnetische Welle, 33
 Vakuum, 30
 Fensterfunktion, 125, 334, 348
 Fernfeld, 82
 Fernnebensprechen, 241
 Flussdichte
 elektrische, 3
 magnetische, 4
 Flächenelement
 Berechnung, 75
 Kugelkoordinaten, 75
 Flächenladungsdichte

- elektrische, 16, 20
- magnetische, 18, 21
- Flächenstromdichte
 - elektrische, 18, 20
 - magnetische, 16, 21
- Fourier-Korrespondenzen, 354
- Fourier-Reihe, 124, 342
 - Rechteckschwingung, 326
- Fourier-Transformation, 3, 36, 112, 117, 329
- Fourier-Transformation, diskrete, 344
- Freiraumwellenlänge, 34
- Frequenz, 3
- Frequenzbereich, 3
- Frequenzverschiebung, 337
- Fresnelsche Formeln, 138
- Funkkommunikationssystem, iii
- Funknavigationssystem, iii

- Gauß, Satz von, 12
- Gaußscher Satz in der Ebene, 12
- Gegentaktmode, 172
- Gegentaktspannung, 67
 - resultierende, 173
- Gegentaktstrom, 67
 - resultierender, 173
- Gegentaktwelle, 66, 172
- Gesetz, multiplikatives, 110
- Gewinn, 105, 133
 - Ausgangs Anpassung, 280, 281
 - Dämpfungsglied, 224
 - Eingangs Anpassung, 280
- Gitterkeule, 126, 127
- Gleichanteil, 313
- Gleichgewicht, thermodynamisches, 285, 288
- Gleichtaktmode, 172
- Gleichtaktspannung, 67
 - resultierende, 173
- Gleichtaktstrom, 67
 - resultierender, 173
- Gleichtaktwelle, 66, 172
- Gradient
 - Berechnung, 75
 - kartesische Koordinaten, 25
 - Kugelkoordinaten, 75
- Grating Lobe, *siehe* Gitterkeule
- Greensche Funktion, 81
 - Fernfeldnäherung, 82
- Grenzflächenbedingungen
 - Dielektrika, 19–20
 - elektrisches Feld, 16–18
 - idealer elektrischer Leiter, 20
 - idealer magnetischer Leiter, 20–21
 - magnetisches Feld, 18–19
- Grundwelle, 312
- Gruppenantenne, 122
- Gruppenantenne, lineare, 123
- Gruppengeschwindigkeit, 36
 - Mehrleitersystem, 61
 - Zweileitersystem, 52
- Gruppenrichtcharakteristik, 111, 117, 123
 - konstante Strombelegung, 119
 - Strombelegung mit konstanten Phasendekrement, 128
- Gruppenrichtungsfaktor, 110
 - Aperturantenne, 116, 117
 - Dipolantenne, 112
 - Gruppenantenne, 122
 - konstante Strombelegung, 119
 - lineare Antenne, 110, 111
 - lineare Gruppenantenne, 124
 - Strombelegung mit konstanten Phasendekrement, 127
- Größe, metrische, 74

- harmonisch, 3, 312, 349
- Harmonische, 313, 315

-
- Harmonischenabstand, 316
 - Hauptkeule, 114, 126, 127
 - Helmholtz-Gleichung
 - elektrische Feldstärke, 25
 - magnetische Feldstärke, 25
 - Vektorpotential, 71
 - Helmholtz-Gleichung, zweidimensionale
 - elektrische Feldstärke, 27
 - magnetische Feldstärke, 27
 - Hertzscher Dipol, *siehe* Dipol
 - Hochfrequenzmesstechnik, iii
 - Hochfrequenztechnik, iii
 - Hochfrequenzverstärker, 261
 - Hohlleiter, 43
 - Hohlraumresonator, 171
 - Horizontaldiagramm, 107
 - Hornantenne, 121
 - Huygens-Äquivalent, 96
 - Huygenssches Prinzip, 91

 - Impedanz, 164
 - Impedanzmatrix, 203
 - Impulsantwort, 36, 330
 - reelle, 332
 - Induktionsgesetz, *siehe* zweite Maxwell'sche Gleichung
 - Induktivitätsbelag, 52
 - Bandleitung, 55
 - Koaxialleitung, 59
 - Induktivitätsbelagsmatrix, 62
 - Influenzbelagskoeffizientenmatrix, 63
 - Inphasekomponente, 327
 - Insertion Power Gain, *siehe* Einfüpfungsgewinn
 - Interceptpunkt
 - ausgangsseitiger, 320
 - Kaskade, 324
 - eingangsseitiger, 319
 - Kaskade, 324
 - Interceptpunkt der Harmonischen
 - ausgangsseitiger, 317
 - eingangsseitiger, 316
 - Intermodulationsabstand, 318
 - Intermodulationsprodukt, 318
 - Interpolation, 346
 - Inversionsdiagramm, 180
 - isotrop, 15

 - Kalibrierstandard, 247
 - Kapazitätsbelag, 52
 - Bandleitung, 54
 - Koaxialleitung, 59
 - Kaskade, 207, 297
 - kausal, 333
 - Kennlinie, 311
 - Kaskade, 322
 - Kettenmatrix, 208
 - Kleinsignalnäherung, 315
 - Klemmenleistungsgewinn, 272, 274
 - Koaxialleitung, 58
 - Komponente, hochfrequenztechnische,
 - iv
 - Konnektivitätsmatrix, 216
 - Kontinuitätsgleichung, 14
 - Konversionsparameter, 210
 - Koordinaten
 - krummlinige, 73
 - orthogonale, 74
 - Koordinatenlinie, 73
 - Kopplungsfaktor, 65
 - Kramers-Kronig-Beziehungen, 334
 - Kreisfrequenz, 3, 312
 - Kreisfrequenz, kritische, 33
 - Kugelkoordinaten, 73

 - $\lambda/2$ -Transformator, 171, 226
 - $\lambda/4$ -Transformator, 172, 226
 - Ladung
 - elektrische, 10

- magnetische, 13
- Ladung, elektrische, 14
- Ladungsdichte
 - elektrische, 4
 - magnetische, 4
- Ladungserhaltung, 14–15
- Ladungserhaltungssatz, 14
- Laplace-Gleichung, 49
- Laplace-Operator
 - Definition, 25
 - kartesische Koordinaten, 26
- Laplace-Operator, skalarer
 - Berechnung, 78
 - Definition, 49
 - kartesische Koordinaten, 49
 - Kugelkoordinaten, 78
- Laplace-Operator, zweidimensionaler, 27
- Lasttoranpassung, 258
- Leistung, 167, 351
 - abgestrahlte, 85
 - ablaufende Welle, 197
 - Eintorquelle, 263
 - hinlaufende Welle, 158
 - Mehrter, 198
 - rücklaufende Welle, 158
 - symmetrisches Dreileitersystem, 69
 - verfügbare, 265
 - zulaufende Welle, 197
 - Zweileitersystem, 53
- Leistungsanpassung, 265
- Leistungsdichtespektrum, 352
- Leistungsgewinn, maximaler stabiler, 279
- Leistungsgewinn, maximaler verfügbarer, 276, 278
- Leistungsgewinn, verfügbarer, 275
 - Kaskade, 275
- Leiter
 - idealer elektrischer, 20
 - idealer magnetischer, 20
- Leitfähigkeit, 16
- Leitung, koplanare, 60
- Leitung, kurzgeschlossene, 169
- Leitung, leerlaufende, 170
- Leitungsdiagramm, 186
- Leitungsgleichungen, 52
- Leitungsstrom
 - elektrischer, 5, 14
 - magnetischer, 9
- Leitungsstück, 225
- Leitungstransformation, 195
- Lichtgeschwindigkeit, 35
- Likelihood-Funktion, 353
- Linienelement
 - Berechnung, 74
 - Kugelkoordinaten, 74
- Longitudinalkomponente, 28
- μ -Test, 270
- Main Lobe, *siehe* Hauptkeule
- Mason-Regeln, 199
- Materialgleichung, 15
- Maximum Available Power Gain, *siehe* Leistungsgewinn, maximaler verfügbarer
- Maximum Stable Power Gain, *siehe* Leistungsgewinn, maximaler stabiler
- Maximum-Likelihood-Schätzung, 353
- Maxwellsche Gleichung
 - dritte, 10–12
 - erste, 5–9
 - vierte, 13
 - zweite, 9–10
- Mehrleitersystem, 60
- Mehrter, 197
 - eigenreflexionsfreies, 201
 - entkoppeltes, 292
 - lineares, 198

- passives, 201
- rauschendes, 286
- reziprokes, 203
- verlustfreies, 201, 292
- Mehrwegeausbreitung, 152
- Messleitung, 167
- Messobjekt, 243, 245, 250, 298
- Messtoranpassung, 247, 252
- Mikrostreifenleitung, 60
- Mischer
 - additiver, 326
 - idealer, 325
 - multiplikativer, 326
- Mitteln, 353
- Mode, 28
- Modenkonversion, 174, 210, 221, 233
- Momentenmethode, 97
- Multiplizierer, 325
- Nahfeld-Fernfeld-Transformation, 96
- Nahnebensprechen, 241
- Nebenkeule, 114, 126
- Netzwerk, 214
 - massefreies, 205
 - rauschendes, 287
- Norm, 30
- Normaleneinheitsvektor, 12, 16
- Nullphase, 157
- Oberwelle, 313
- Ortsbereich, 112
- OSM-Verfahren, 247
- II-Schaltung, 185, 224
- Paralleladmittanz, 223
- Parallelleitungskoppler, 236
- Parallelschaltung
 - Blindleitwert, 184, 194
 - Wirkleitwert, 183, 194
- Permeabilität, 16
 - absolute, 16
 - komplexe, 16
 - relative, 16
- Permittivität, 15
 - absolute, 15
 - komplexe, 16
 - relative, 15
- Pfadlängenverkürzung, geometriebedingte, 110
- Phasendekrement, 125
- Phasengeschwindigkeit, 35
 - Mehrleitersystem, 61
 - Zweileitersystem, 52
- Phasenkonstante, 26, 33, 71
 - Mehrleitersystem, 61
 - transversalelektromagnetische Welle, 29
- Phasenkonstante, kritische, 28
 - transversalelektrische Welle
 - Bandleitung, 56, 57
 - Hohlleiter, 44
 - transversalmagnetische Welle
 - Hohlleiter, 47
- Phasenschieber, 221
- Phasenvektor, 28, 82
- Phasenverschiebung, geometriebedingte, 83, 110
- Phasenzentrum, 84
- Poisson-Gleichung, 80
- Polarisation, 39
 - lineare, 40
 - zirkulare, 40
- Polarisationsanpassung, 136
- Polarisationsbasen, 40
- Poldistanzwinkel, 73
- Potenzreihe, 311
- Power Gain, *siehe* Klemmenleistungsgewinn
- Poynting-Vektor
 - Dipol, 86
 - Fernfeldnäherung, 85

- komplexer, 24
- reeller, 23
- transversalelektromagnetische Welle, 30
- Proportionalitätsprinzip, Fourier-Transformation, 331
- Quadraturdemodulator, 328
- Quadraturkomponente, 327
- Quadraturmodulator, 327
- Quelle, 211
- Quelltoranpassung, 258
- Radargleichung, 147
- Radartechnik, iii
- Rauschabstand, 321
- Rauschanpassung, 305
- Rauschdiode, 300
- Rauschen, iv
- Rauschen, thermisches, 284
- Rauschleistung, verfügbare, 283, 284, 286
- Rauschleistungsdichte, verfügbare, 284
- Rauschparameter, 294
- Rauschtemperatur, 286
- Rauschtemperatur, effektive, 294
 - Kaskade, 298
 - minimale, 303
- Rauschurwelle, 283, 286
- Rauschwellenkorrelationsmatrix, 287, 292
- Rauschzahl, 295, 297
 - Kaskade, 298
 - minimale, 305
- Rauschzahl, zusätzliche, 295
 - Kaskade, 298
- Rechteckfenster, 336, 348
- Rechteckhohlleiter, *siehe* Hohlleiter
- Reflektometer, 243
 - ideales, 245
 - imperfektes, 245
- Reflexionsfaktor, 158, 164, 219
 - idealer elektrischer Leiter, 145
 - idealer magnetischer Leiter, 145
- parallele Polarisation, 143
 - senkrechte Polarisation, 140
- Reflexionsgleichlauf, 247, 252, 258
- Renormalisierung, 225
- Resolution Bandwidth, *siehe* Auflösungsbandbreite, *siehe* Auflösungsbandbreite
- Resonator, *siehe* Hohlraumresonator
- reziprok, 88
- Reziprozitätstheorem, 88, 202
- Richtcharakteristik, 111, 117, 123
 - Aperturantenne, 117
 - Definition, 106
 - Dipol, 107
 - Dipolantenne, 114
- Richtcharakteristik, vektorielle komplexe, 109
- Richtdiagramm, 107
- Richtfaktor
 - Definition, 105
 - Dipol, 106, 107
 - Dipolantenne, 114
 - konstante Strombelegung, 121
 - lineare Antenne, 111
 - Strombelegung mit konstanten Phasendekrement, 128
- Richtkoppler, 236
- Richtungsfaktor, 110
 - Aperturantenne, 116
 - lineare Antenne, 109
- Richtungsfaktor, vektorieller, 83
- Ringmischer, 326
- Rollett, *siehe* Stabilitätsfaktor
- Rotation
 - Berechnung, 77
 - Definition, 6

- kartesische Koordinaten, 8
 Kugelkoordinaten, 77
- Schaltungssimulation, 217
- Selbstkalibrierung, 254
- Serienimpedanz, 222
- Serienschaltung
 - Blindwiderstand, 183, 194
 - Wirkwiderstand, 182, 191
- Side Lobe, *siehe* Nebenkeule
- Signal- und Systemtheorie, iv
- Signal-Rausch-Abstand, 296
- Signalflussgraph, 199
- Skalarprodukt, 5
- Smith-Diagramm, 190
- Snelliussches Brechungsgesetz, 137
- Spaltfunktion, 119, 336
- Spannung
 - resultierende, 163
 - Zweileitersystem, 50
- Spannungsquelle, 212
- Spannungsvektor
 - Mehrleitersystem, 62
- Spektralanalysator, 298, 351
- Spektralanalyse, iv, 347
- Spektrum, 347
- Spektrumanalysator, *siehe* Spektralanalysator, *siehe* Spektralanalysator
- Spiegelung
 - idealer elektrischer Leiter, 90
 - idealer magnetischer Leiter, 91
- Spiegelungsprinzip, 90–91
- Sprungfunktion, 16
- Spurious Free Dynamic Range, *siehe* Dynamikbereich
- Stabilität
 - Eintorquelle, 263
 - unbedingte, 269
 - Zweitor, 266
- Stabilitätsfaktor, 271
- Stabilitätskreis, 267, 268
- Standing Wave Ratio, *siehe* Stehwellenverhältnis
- Stehwellenverhältnis, 162
- Stokes, Satz von, 8
- Strahlungsleistung, 23
- Strahlungsleistungsdichte
 - Dipol, 86
 - Fernfeldnäherung, 85
 - mittlere, 24
 - momentane, 23
- Streifenleitung, 60
- Streuer, 146
- Streumatrix, 198
- Streumatrix, komplexe polarimetrische, 151
- Streuparameter, 198
 - modale, 209, 211, 220, 232
 - nodale, 210, 211
- Streuparameter, komplexer polarimetrischer, 150
- Streuquerschnitt, 147
 - bistatischer, 147
 - monostatischer, 147
- Streuung, 146
- Strom
 - elektrischer, 5
 - magnetischer, 9
 - resultierender, 163
 - Zweileitersystem, 51
- Strombelegung, 82
 - konstante, 114, 119
 - sinusförmige, 112
- Stromdichte
 - elektrische, 4
 - magnetische, 4
- Stromquelle, 213
- Stromvektor
 - Mehrleitersystem, 62

- Störabstand, 321
- Superpositionsprinzip, Fourier-Transformation, vollwertiger, 248
331
- Symmetrie, Übertragungsfunktion, 332
- System, nichtlineares, 311
statisches, 311
- Systemrauschtemperatur, 295
- Teiler, allseitig angepasster, 230
- Teiler, eingangsseitig angepasster, 231
- Tiefpass-Bandpass-Transformation, 327,
339
- Tiefpassmodus, 337
- Tiefpasssignal, äquivalentes, 327, 328
- TOSM-Verfahren, 254, 259
- Totalreflexion, 138, 159
- Transducer Power Gain, *siehe* Übertragungsgewinn
- Transfermatrix, 136, 151
- Transformation
 - Impedanz, 165
 - Reflexionsfaktor, 159
 - symmetrisches Dreileitersystem, 176
- Transistor, 261
- Transmissionsfaktor
 - parallele Polarisation, 143
 - senkrechte Polarisation, 141
- Transmissionsgleichlauf, 252, 258
- Transmissionsmatrix, 206
Kaskade, 207
- Transmissionsparameter, 206
- Transversalkomponente, 28
- UOSM-Verfahren, 254
- Urwelle, 211, 219
- Vakuumlichtgeschwindigkeit, 35
- Varianz, 351
- Vektornetzwerkanalysator, iv, 248
idealer, 250
imperfekter, 250
vereinfachter, 255
- Vektorpotential
 - elektrisches, 72
 - magnetisches, 71, 81
Dipol, 85
Fernfeldnäherung, 82
- Vektorprodukt, 17
- Verlustleistungsdichte, 22
- Verschiebungsstrom
 - elektrischer, 5
 - magnetischer, 9
- Vertikaldiagramm, 107
- Verzweigung, 230
- Viertor, 232
- Viertor-Zweitor-Reduktion, 246
- Volumenelement
 - Berechnung, 75
 - Kugelkoordinaten, 75
- Vorverstärker, rauscharmer, 302
- Vorzeichenfunktion, 333
- Welle
 - ablaufende, 197
 - ebene, 38
 - ebene homogene, 38
 - elektromagnetische, 26
 - hinlaufende, 157
 - rücklaufende, 157
 - stehende, 160
 - transversalelektrische, 31
Bandleitung, 55
Hohlleiter, 44
 - transversalelektromagnetische, 29
Bandleitung, 54
Zweileitersystem, 49
 - transversalmagnetische, 32
Bandleitung, 56
Hohlleiter, 46
 - zulaufende, 197

-
- Wellenamplitude, komplexe, [iv](#), [157](#),
[163](#), [197](#)
 Rauschurwelle, [283](#), [286](#)
 symmetrisches Dreileitersystem, [173](#)
 Urwelle, [211](#), [219](#)
- Wellenamplitude, resultierende komplexe, [159](#)
- Wellenimpedanz, [140](#), [143](#)
- Wellenleiter, zylindrischer, [26](#)
- Wellenlänge, [33](#), [83](#)
- Wellenlänge, kritische, [34](#)
- Wellenwiderstand
 Bandleitung, [55](#)
 Gegentaktwelle, [67](#)
 Gleichtaktwelle, [67](#)
 Koaxialleitung, [59](#)
 symmetrisches Dreileitersystem, [67](#)
 Zweileitersystem, [51](#), [52](#)
- Wellenwiderstandsmatrix, [62](#)
- Wellenzahl, [33](#)
- Wellenzahlbereich, [112](#)
- Wirkfläche, [131](#), [133](#)
- Wirkungsgrad, [105](#)
- Y-Faktor, [300](#)
- Zeitbereichsanalyse, [330](#)
- Zero-Padding, [346](#)
- Zirkulator, [227](#)
- Zweileitersystem, [48](#)
- Zweitor
 eigenreflexionsfreies, [292](#)
 rauschendes, [293](#), [297](#)
 symmetrisch aufgebautes, [220](#)
- Zweitorgewinn, unilateraler, [280](#)
- Zylinderkoordinaten, [78](#)
- Ähnlichkeitssatz, Fourier-Transformation,
[331](#)
- Äquivalenztheorem
 ebene Grenzfläche, [95](#)
 feldfreier Innenraum, [92](#)
 idealer Leiter, [93](#)
- Überabtastung, [346](#), [349](#)
- Übertemperaturverhältnis, [301](#)
- Übertragungsfaktor, [132](#)
- Übertragungsfunktion, [36](#), [329](#)
- Übertragungsgewinn, [274](#)
- Übertragungsgewinn, unilateraler, [279](#)
 maximaler, [282](#)