

# Analyse des Solitonengehaltes von optischen Impulsen in Glasfasern

Habilitationsschrift

zur

Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium / habitatus (Dr. rer. nat. habil.)

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Rostock

vorgelegt von

Dr. rer. nat. Ernst-Michael Böhm

aus Rostock

Rostock, Januar 2009

urn:nbn:de:gbv:28-diss2009-0112-7

**Gutachter:**

Prof. Fedor Mitschke, Institut für Physik, Universität Rostock

Prof. Cornelia Denz, Institut für Angewandte Physik, Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Prof. Gerd Leuchs, Institut für Optik, Information und Photonik, Friedrich-Alexander-Universität  
Erlangen-Nürnberg

**Probevorlesung:** 7. Mai 2009

# Inhaltsverzeichnis



# Kapitel 1

## Einleitung

Im Zeitalter des Internets spielt die Datenübertragung eine zentrale Rolle. Um viele Daten in kurzer Zeit über große Entfernungen zu übertragen, verwendet man heutzutage Lichtimpulse in Glasfaserkabeln. Dabei werden Datenraten von über 10 TBit/s erreicht. Wenn man die Datenraten allerdings weiter steigern will, so stößt man an fundamentale Grenzen, deren Überwindung neuartige Konzepte erfordert. Ein vielversprechendes Konzept basiert auf optischen Solitonen und deren Bindungszuständen in Glasfasern. Die Untersuchung von solchen Solitonen ist der Hauptbestandteil dieser Arbeit.

Um hohe Datenübertragungsraten zu erzielen, muss man die einzelnen Informationseinheiten auf möglichst kurzen Zeitskalen unterbringen. Dies ist heutzutage mithilfe von Piko- und Femtosekunden-Lasern möglich. Allerdings unterliegen diese Impulse bei der Ausbreitung durch Glasfasern Effekten, die eine sinnvolle Übertragung über lange Strecken verhindern. Impulse geringer Dauer besitzen immer ein breites Spektrum. Bedingt durch Dispersion breiten sich die verschiedenen Frequenzkomponenten unterschiedlich schnell aus. Dadurch werden die Impulse verbreitert. Ebenfalls bedingt durch die geringe Dauer haben die Lichtimpulse eine vergleichsweise hohe Spitzenleistung und unterliegen somit nichtlinearen Effekten, die das Spektrum der Impulse merklich verändern. Verwendet man Glasfasern mit negativer Gruppengeschwindigkeitsdispersion, so ist es möglich, ein dynamisches Gleichgewicht zwischen den dispersiven und nichtlinearen Effekten zu erzielen. Es entstehen sogenannte Solitonen. Diese bieten sich somit als fundamentale Bits der Datenübertragung an, denn sie sind robust gegenüber störenden Einflüssen. Viele dieser störenden Einflüsse werden mit geringerer Impulsdauer dominanter. Eine sinnvolle Datenübertragung ist deswegen nur mit Pikosekunden-Impulsen möglich. Bevor man die Solitontechnik auch im Femtosekunden-Bereich einsetzen kann, sollte man den Solitonengehalt auch bei Vorhandensein zusätzlicher Effekte genau bestimmen können. In dieser Arbeit wird ein Verfahren vorgestellt, welches dazu in der Lage ist.

Eine Zusammenstellung von veröffentlichten Datenübertragungssystemen ist in Abb. ?? dargestellt. Eingezeichnet ist die größte sinnvolle Übertragungsstrecke auf der Erde – der halbe Erdumfang – von ca. 20 Mm und die Grenze für die Datenübertragung auf einem Kanal. Die absolute Grenze für die lineare Datenübertragung ist gemäß dem Theorem von Shannon einerseits durch die zur Verfügung stehende Bandbreite und andererseits durch das Signal-zu-Rausch-Verhältnis bestimmt [?]. Für Datenübertragungen mit Nichtlinearitäten verringert sich diese Grenze [?]. Die technische Ausnutzung der zur Verfügung stehenden Bandbreite wird in absehbarer Zeit möglich sein. Obwohl mit einer binären Kodierung nur eine Informationseinheit pro Zeittakt übertragen werden kann, verwendet man heutzutage fast ausschließlich binäre Datenübertragung. Dies liegt an der Robustheit eines binären Signals, denn es kann durch geschickte Wahl von Schwellen und gesättigter Verstärkung vom Rauschen befreit werden. Solitonen sind ebenfalls robust gegenüber Störungen. Allerdings ermöglichen einzelne Solitonen ebenfalls nur eine binäre Datenübertragung. Wellenpakete, die aus mehreren Soli-

tonen bestehen, könnten diese Begrenzung aufheben und gleichzeitig ein robustes Signal ermöglichen. Ein solcher Zustand ist beispielsweise der bereits experimentell nachgewiesene Bindungszustand aus Solitonen, das sog. Solitonenmolekül [?].

Es gibt verschiedene Ansätze, um die Eigenschaften von Solitonen zu untersuchen. Einer davon ist die mathematische Beschreibung der Solitonen mit nichtlinearen Differentialgleichungen. Deren allgemeine Lösung ist allerdings vergleichsweise kompliziert und teilweise bis heute nicht bekannt. Solitonen sind heutzutage auch experimentell leicht zugänglich. Allerdings ist es schwierig, die Ausbreitung der Solitonen entlang der Glasfaser zu messen. Zugänglich sind nur die Impulse vor und nach Ausbreitung in der Faser. Die meisten Informationen über Solitonen erhält man heutzutage aus numerischen Simulationen. Allerdings sind die bisher bekannten Methoden nicht in der Lage, den Solitonengehalt von Lichtimpulsen, die aus mehreren Solitonen bestehen, zu bestimmen. Eine Möglichkeit, dies zu realisieren, ist der Grundgedanke dieser Arbeit.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Das hier vorgestellte Verfahren basiert auf zwei Konzepten. Zum einen auf dem der Solitonen, deren Grundlagen in Abschnitt ?? beschrieben werden. Zum anderen auf der Ausbreitung von Lichtimpulsen in Glasfasern. Diese wird in Abschnitt ?? kurz dargestellt mit der Betonung auf optischen Solitonen. Es werden bekannte Verfahren zur Berechnung von Solitonen mit ihren Vor- und Nachteilen diskutiert. Im zentralen Teil dieser Arbeit (Abschnitt ??) geht es um die Bestimmung des Solitonengehaltes mit Hilfe der vom Autor entwickelten Methode: der sog. „*soliton-radiation beat analysis*“ (SRBA). Diese wird anhand von ausgesuchten Beispielen näher erläutert. So wird beispielsweise das Verhalten von Solitonen in Glasfaserstrecken mit alternierender Dispersion („*dispersion-management*“) untersucht, denn solche Systeme spielen in der modernen Datenübertragungstechnik eine wichtige Rolle. Bei der Untersuchung von Solitonen in verlustbehafteten Glasfasern zeigt sich eine vom Autor entdeckte Unschärferelation für Solitonen. Schließlich wird im Abschnitt ?? eine Methode vorgestellt, die sich zum Messen des Solitonengehaltes eignet und auf der SRBA basiert. Zitate mit der Ergänzung <sup>a</sup> sind Veröffentlichungen des Autor die dieser Arbeit angehängt sind. Die Ergänzung <sup>b</sup> verweist auf Veröffentlichungen mit Beteiligung des Autors.

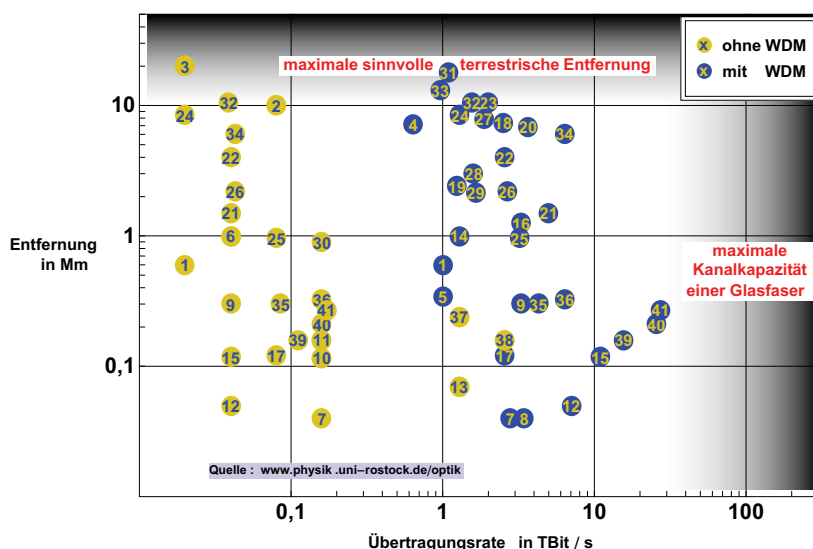


Abbildung 1.1: Zusammenstellung von realisierten Reichweiten aktueller Datenübertragungssysteme als Funktion der Übertragungsrate. Es wird unterschieden zwischen Übertragungen mit Wellenlängenmultiplex (WDM: „*wavelength division multiplex*“) und ohne. Referenzen zum Bild: Seite ??.

# Kapitel 2

## Solitonen

Solitäre Wellen sind Wellenpakete, welche sich, obwohl sie sich in einem dispersiven (diffraktiven) Medium befinden und deswegen zerfließen müssten, aufgrund einer Nichtlinearität formstabil ausbreiten. Haben diese solitären Wellen zusätzlich die Eigenschaft, nur elastische Wechselwirkungen untereinander zu zeigen und insbesondere nicht zu zerfließen, so nennt man sie Solitonen. Treten allerdings weitere Effekte in dem betrachteten System in Erscheinung, so ist darauf zu achten, dass die Stärke dieser meist störenden Effekte vergleichsweise gering ist. Wenn dies der Fall ist, so hat es sich eingebürgert, ebenfalls von Solitonen (im physikalischen Sinn) zu sprechen. Solitonen (im mathematischen Sinn) sind entsprechende Lösungen integrierbarer nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, die bei unendlich langer Ausbreitung lokalisiert bleiben. Es gibt viele Systeme, in denen Solitonen und solitäre Wellen eine wesentliche Rolle spielen. Da optische Solitonen in einer Glasfaser den Schwerpunkt dieser Arbeit bilden, beziehen sich die hier ausgesuchten Beispiele größtenteils auf optische Solitonen oder damit im Zusammenhang stehende Solitontypen.

### 2.1 Historische Betrachtung

Es gibt zahlreiche Solitontypen, die auch in der Natur vorkommen, z. B. in Form eines Tsunamis [?]. Deswegen ist unklar, wann die ersten Solitonen beobachtet wurden. Die erste bekannte wissenschaftliche Auseinandersetzung mit Solitonen begann 1834, als Russel diese zum ersten Mal beschrieb. Er beobachtete eine solitäre Wasserwellenausbreitung in dem „Union Canal“ bei Hermiston in Schottland [?]. Er nannte das Phänomen „wave of translation“, denn im Gegensatz zu anderen Wellen wurden Wassermassen von der Welle mitgenommen, anstatt nur hin und her bewegt zu werden. Es verging aber ein halbes Jahrhundert, bis es 1895 Korteweg und de Vries gelang, eine mathematische Beschreibung der von Russel beobachteten Wassersolitonen zu formulieren [?]. Die nach ihnen benannte Korteweg-de-Vries-Gleichung wird heutzutage auch benutzt, um z. B. solitäre Wellen in kollisionsfreien Plasmen zu beschreiben. Bei numerischen Untersuchungen solcher Plasmen führten Zabusky und Kruskal 1965 den Begriff des Solitons ein, um den Teilchencharakter des Wellenpaketes zu betonen [?]. 1967 konnte Gardner u. a. mit Hilfe der Inversen Streutheorie eine analytische Solitonen-Lösung der Korteweg-de-Vries-Gleichung bestimmen [?]. Dieses Verfahren wurde 1968 von Lax [?] verbessert und schließlich für eine große Klasse von nichtlinearen Differentialgleichungen höherer Ordnung angewendet [?]. Eine davon ist die Nichtlineare Schrödingergleichung NLSE (engl.: *nonlinear Schrödinger equation*), die 1972 mittels der Inversen Streutheorie von Zakharov und Shabat gelöst wurde [?]. Die NLSE wird unter anderem benutzt, um die Ausbreitung von Lichtimpulsen in Glasfasern zu untersuchen. 1973 wurde von Hasegawa und Tappert die Existenz von optischen Solitonen in Glasfasern vorausgesagt [?]. Experimentell wurden diese allerdings erst 1980 von Mollenauer et al. nachgewiesen [?], da man bis

zu diesem Zeitpunkt keine Glasfasern mit ausreichend geringen Verlusten herstellen konnte. Optische Solitonen sind im Vergleich zu anderen Solitonenarten leicht zu untersuchen und sind dadurch ein gutes Modellbeispiel für Solitonen, die durch die NLSE beschrieben werden.

## 2.2 Gleichungssysteme mit Solitonenlösungen

Solitonen sind ein universelles Phänomen und kommen in vielen Bereichen vor: Hydrodynamik, Optik, Plasmaphysik, Astrophysik, Biologie, Elektronik etc. Es gibt zahlreiche Bücher, die auf die Universalität der Solitonen eingehen [?, ?, ?, ?]. Solitonen ergeben sich als stabile Lösungen von verschiedenen nichtlinearen Gleichungen [?]. Dazu gehört z. B. die bereits erwähnte Korteweg-de-Vries-Gleichung, die unter anderem Flachwasserwellen beschreibt. Die Gleichung, die hier optische Solitonen in einer Glasfaser beschreibt, ist die Nichtlineare Schrödingergleichung [?]. Diese Gleichung wird im Zusammenhang mit Solitonen in Bose-Einstein-Kondensaten auch Gross-Pitaevskii-Gleichung genannt [?]. In diskretisierter Form beschreibt sie eindimensionale, räumliche optische Solitonen in gekoppelten Wellenleitersystemen [?]. Optische Solitonen finden sich außer in Glasfasern auch noch in zahlreichen anderen Systemen [?, ?]. Räumliche optische Solitonen eignen sich beispielsweise als Schalter für die optische Informationsverarbeitung [?]. Die Nichtlineare Schrödingergleichung wird in Abschnitt ?? genauer diskutiert.

**Diskrete Solitonen** Nicht immer sind die Felder, die das Soliton formen, kontinuierliche Größen. Können nur diskrete Punkte angeregt werden, so spricht man von diskreten Solitonen. In einem der ersten Computereperimente wollten Fermi, Pasta und Ulam zeigen, dass eine nichtlineare Kopplung zwischen den Teilen einer diskretisierten Saite ergodisches Verhalten zeigt [?]. Als Ergebnis erhielten sie allerdings das genaue Gegenteil: eine Stabilisierung für manche Ausgangszustände. Im kontinuierlichen Grenzfall entspricht das Fermi-Pasta-Ulam-Problem der Korteweg-de-Vries-Gleichung. Deswegen handelt es sich bei den gefundenen stabilen Ausbreitungen um diskrete Korteweg-de-Vries-Solitonen. Eine spezielle Art von eindimensionalen diskreten Solitonen sind die Davydov-Solitonen, die in langen organischen Molekülketten auftreten [?]. Sie werden z. B. zur Beschreibung des Energietransfers in langen Proteinen benötigt. Gekoppelte planare Wellenleiter können dazu verwendet werden, diskrete optische Solitonen zu erzeugen [?]. Der Vorteil solcher Systeme liegt in der Einstellbarkeit der Dispersion (hier Diffraktion) durch geometrische Effekte. Das Konzept konnte auch erfolgreich auf zweidimensionales Gitter ausgeweitet werden [?].

**Solitonen höherer Dimension** Solitonen kommen auch in höherdimensionalen Systemen vor. Als Beispiel seien hier die optischen räumlichen Solitonen erwähnt [?]. Ein Lichtstrahl wird im linearen Fall aufgrund von Beugung verbreitert. Tritt zusätzlich ein nichtlinearer Effekt auf, der der Beugung entgegenwirkt, so entsteht ein induzierter Wellenleiter, der das Licht führt. Ein solches Licht, welches den Wellenleiter selbst erzeugt, in dem es geführt wird, nennt man ein räumliches Soliton. Im Gegensatz zum eindimensionalen Fall der Nichtlinearen Schrödingergleichung ist diese im zweidimensionalen Fall nicht stabil. Eine stabile Ausbreitung eines Lichtstrahls erreicht man nur mit speziellen Nichtlinearitäten, beispielsweise mit Sättigungen oder Nichtlokalitäten [?]. Im dreidimensionalen Fall ist eine Stabilisierung noch schwieriger, aber unter bestimmten Bedingungen noch möglich. Die hier gefundenen Solitonen werden „*optical bullets*“ genannt [?, ?].

**Gekoppelte Solitonen, Vektorsolitonen** Es gibt Fälle, die man mit mehreren gekoppelten Gleichungssystemen beschreiben muss. In Glasfasern kann dies z. B. die Kopplung zwischen den beiden Polarisationsrichtungen sein. Hierbei können gekoppelte Solitonen entstehen, sog. Vektorsolitonen, wobei zusätzliche Effekte wie Polarisationsmodendispersion und Kreuzphasenmodulation zu berücksichtigen sind [?]. Im Falle von optischen räumlichen Solitonen kann es vorkommen, dass in dem



induzierten Lichtleiter auch Moden höherer Ordnung geführt werden. In diesem Fall handelt es sich auch um Vektorsolitonen [?].

**Dissipative Solitonen** Bei Vorhandensein von Verlusten können Solitonen nicht beliebig lang existieren. Durch zusätzliche Verstärkung kann man einen Soliton-ähnlichen Zustand erzeugen. Dabei nehmen die Solitonen in einem Fließgleichgewicht gleichzeitig Energie auf und strahlen Energie ab. Sind diese Effekte vergleichsweise stark, so haben diese Solitonen keine internen Freiheitsgrade mehr und sind durch die Systembedingungen definiert [?, ?]. Dennoch zeigt diese Art von Solitonen ein vielseitiges Verhalten.

**Systeme mit veränderlichen Parametern** Wenn sich die Systemparameter ändern, so können Solitonen in solchen Systemen immer noch vorkommen. Dies ist beispielsweise der Fall bei der Ausbreitung von Lichtimpulsen in modernen Datenübertragungsstrecken, in denen sich die Dispersion periodisch ändert, sog. „*dispersion management*“. Ein solches System wird in Abschnitt ?? näher beschrieben. Ein ähnliches Verhalten kann man für Solitonen in Bose-Einstein-Kondensaten beobachten, an denen Felder mit veränderlichen Eigenschaften angelegt werden [?]. Auch bei periodischen Wellenleitersystemen, deren Orientierung periodisch gewechselt wird, zeigt sich ähnliches Verhalten. Hier spricht man von „*diffraction management*“ [?].

## 2.3 Typen von Solitonenlösungen

Stellt man einem System, in welchem Solitonen existieren können, genügend Energie zur Verfügung, so bilden sich Solitonen sehr effizient. Dabei ist es oft günstiger, wenn sich die Energie auf mehrere Solitonen verteilt, sodass deren nichtlineare Überlagerung der Anregung des Systems möglichst nahe kommt. In [?] ist dies für das Beispiel der NLSE näher erläutert und ist auch für viele andere Fälle anwendbar [?]. Eine beliebige Anregung wird jedoch zusätzlich zu den Solitonen auch sog. dispersive Wellen erzeugen. Diese dispersiven Wellen haben vergleichsweise wenig Energie und zerfließen aufgrund der vorhandenen Dispersion und der fehlenden Nichtlinearität. Nach längerer Ausbreitung bilden dann nur noch die Solitonen eine lokalisierte Struktur. Wenn man mehrere Solitonen anregt, so ergeben sich weitere Unterscheidungsmöglichkeiten.

**Solitonenkollision** Bei der Solitonenkollision werden Solitonen an unterschiedlichen Positionen mit unterschiedlichen Geschwindigkeit erzeugt, sodass es zu einer Kollision der beteiligte Solitonen kommt. Im Gegensatz zu einer solitären Welle bleibt die Wechselwirkung elastisch. Es kommt also zu keinem Energietransfer von einem Soliton zum anderen. Die Energie und auch die Geschwindigkeit der beteiligten Solitonen bleibt erhalten. Jedoch wird sowohl ihre Phase als auch ihre Position durch die anderen Solitonen beeinflusst. Ein solches Verhalten entspricht eher dem von Teilchen als dem von nichtlinearen Wellen. Dies war der Anlass für den Begriff *Soliton*, da Teilchen die Endung „-on“ besitzen.

Man kann eine Solitonenkollision ausnutzen um z. B. zerstörungsfreie Quantenmessungen zu realisieren, indem man die Phasenverschiebung des einen Solitons benutzt, um die Amplitude des anderen Solitons zu bestimmen [?]. Störend sind die Einflüsse von Solitonenkollisionen bei der Datenübertragung auf mehreren Kanälen („*wavelength division multiplex*“) [?].

**Breather und Solitonen höherer Ordnung** Es gibt Überlagerungszustände aus mehreren Solitonen, die dieselbe Geschwindigkeit besitzen. Durch Schwebung zwischen den beteiligten Komponenten kommt es zu einer periodischen Abfolge der Impulsform, weswegen sie als „Breather“ bezeichnet werden. Der Name ist angelehnt an das englische Wort für Atmen („*to breathe*“), weil die Entwicklung der Impulsform an das Atmen erinnert. Ein Spezialfall eines Breathers sind die Solitonen höherer

Ordnung. Sie sind ein Überlagerungszustand aus mehreren Solitonen, die sich am selben Ort befinden und dieselbe Geschwindigkeit besitzen.

**Gebundene Solitonen** Es sind mehrere Arten von gebundenen Solitonen bekannt. In jedem Fall benötigen die Solitonen entweder zusätzliche Effekte oder eine fortwährende Störung bei der Ausbreitung, um eine Wechselwirkung einzugehen. Beispiele hierfür sind Solitonenmoleküle in einer passiven Glasfaserstrecke mit alternierender Dispersion [?], gekoppelte Solitonen, wie z. B. die Vektorsolitonen [?] und gebundene Solitonen in Laserresonatoren [?].

**Solitonengas und Solitonenkristall** Wenn die Nichtlinearität wesentlich stärker als die Dispersion ist, so entstehen zahlreiche Solitonen. Deren Eigenschaften kann man beispielsweise mit einer Rückkopplung verändern und so optimieren [?]. Es entsteht ein sog. Solitonengas. Durch eine geschickte Manipulation kann man sogar einen Solitonenkristall erzeugen [?]. Eine Untersuchung der einzelnen Solitonen in solchen Ensembles ist mit herkömmlichen Mitteln schwierig, da sich die beteiligten Solitonen vielfach überlagern.

## Kapitel 3

# Solitonen in Glasfasern

Motiviert durch das hohe Potential für die Datenübertragung, das optische Solitonen bieten, sind diese der Gegenstand zahlreicher Untersuchungen. Die zentrale Gleichung, die die Ausbreitung von Solitonen in diesem Zusammenhang beschreibt, ist die Nichtlineare Schrödingergleichung. Wie bereits erörtert, gibt es zahlreiche Modifikationen für diese Gleichung, die reale Systeme besser beschreiben. Über das Thema „Optische Solitonen in einer Glasfaser“ findet man heutzutage sowohl zahlreiche Übersichtsartikel auf englisch [?, ?, ?, ?] und deutsch [?][?]b als auch zahlreiche Bücher auf englisch [?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?] und deutsch [?].

### 3.1 Effekte in einer Glasfaser

Lichtimpulse in einer Glasfaser unterliegen verschiedenen Effekten, die einerseits von den Faserparametern und andererseits von den Impulsparametern abhängen. In einer Standardfaser wird das Licht aufgrund von Totalreflexion an der Grenzschicht vom optisch dichten Kern zum optisch dünneren Mantel geführt. Moderne Glasfasern besitzen einen komplizierten transversalen Verlauf der Brechzahl. Dadurch lassen sich die Eigenschaften der Glasfasern in einer gewünschten Weise einstellen [?].

Die Effekte in einer Glasfaser verändern die Parameter eines Wellenpaketes. Die exakte Beschreibung eines beliebigen Wellenpaketes erfordert im Allgemeinen unendlich viele Parameter. Die meisten Wellenpakete, vor allem die, die im Rahmen dieser Arbeit vorkommen, können gut durch eine geringe Anzahl von Parametern beschrieben werden [?]:

$E$ : Energie

$\hat{P}$ : Spitzenleistung der Startbedingung

$\Omega$ : Frequenzverschiebung bezüglich einer gewählten Zentralfrequenz

$T_s$ : zeitliche Verzögerung der Startbedingung (s wie Start)

$\phi_s$ : Phase der Startbedingung

$T_0$ : natürliche Impulsdauer

Es gibt verschiedene Möglichkeiten die Dauer eines Lichtimpulses zu definieren [?]b. Allerdings benötigt man je nach Definition für verschiedene Impulsformen unterschiedliche Korrekturfaktoren. Die natürliche Impulsdauer benötigt per Definition keinen zusätzlichen Korrekturfaktor und ist somit in der Theorie eine leicht zu beschreibende Größe. Messtechnisch ist allerdings die volle Halbwertsdauer  $\tau$  („full width at half maximum“, FWHM) leichter zu bestimmen. Für die meisten hier verwendeten numerischen Untersuchungen hat sich allerdings die Dauer der Verteilung der halben Energie („full width of the half energy“, FWHE) bewährt, da sie geringere systematische Fehler aufweist als andere Definitionen. Der Vollständigkeit halber sei hier noch der Chirp erwähnt, auch wenn dieser für ein Soliton in der Regel Null ist. Dieser Chirp beschreibt, wie sich die Frequenz als Funktion der Zeit

ändert. Ein anwendungsnahes Beispiel für Lichtimpulse mit einem von Null verschiedenen Chirp ist in Abschnitt ?? beschrieben.

**Verluste** Licht, welches sich durch eine Glasfaser ausbreitet, unterliegt immer gewissen Verlusten. Diese sind im Wesentlichen bestimmt durch die Absorption von Glas und durch Rayleigh-Streuung. Wenn man eine Glasfaser stark biegt, führt dies zu weiteren Verlusten. Da man Glasfasern nicht mit beliebiger Länge herstellen kann, muss man sie für eine Übertragungsstrecke zusammenspleißen. Auch an den Spleißstellen treten zusätzliche Verluste auf.

Vernachlässigt man, dass Verluste für verschiedene Wellenlängen unterschiedlich sind, dann ist die Stärke des Verlustes gegeben durch  $\Lambda_\alpha = \alpha$  und hängt nur von dem Faserparameter  $\alpha$  ab. Trotz der Vielzahl der Verluste sind die Gesamtverluste in einer realistischen Glasfaserstrecke geringer als 0,2 dB/km (d. h.  $\alpha < 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ ), wenn man infrarotes Licht im Bereich von ca. 200 THz ( $\hat{=} 1,5 \mu\text{m}$ ) verwendet. Bei den ersten Glasfasern verhinderten die Verluste eine sinnvolle Anwendung. Mittlerweile hat man die physikalisch mögliche Grenze fast erreicht, sodass der Weltrekord aus dem Jahre 1986 von 0,154 dB/km innerhalb von 16 Jahren nur auf 0,1484 dB/km verbessert werden konnte [?]. Verluste können durch Verstärkung kompensiert werden. Dadurch kann man eine effektiv fast verlustfreie Übertragungsstrecke aufbauen [?].

**Dispersive Effekte** In jedem Material breiten sich verschiedene Frequenzkomponenten unterschiedlich schnell aus, was als Dispersion bezeichnet wird. Dies kann man dadurch beschreiben, dass die Wellenzahl  $k$  von der (Kreis-)Frequenz abhängt:  $k(\omega)$ . In Glasfasern treten zusätzlich zur Materialdispersion  $k(\omega)$  auch andere dispersive Effekte auf, deren Beiträge sich zur resultierenden Gesamtdispersion  $\beta(\omega)$  addieren. Man kann den Dispersionsverlauf in einer Taylorentwicklung um die Entwicklungskreisfrequenz  $\omega_e$  darstellen:

$$\beta(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!} (\omega - \omega_e)^m \quad (3.1)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$\beta_m = \left. \frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right|_{\omega=\omega_e}, \quad (3.2)$$

die als Dispersion  $m$ -ter Ordnung bezeichnet werden.

In Multimodeglasfasern, also in Glasfasern, deren transversale Ausdehnung im Vergleich zur verwendeten Wellenlänge wesentlich größer ist, breiten sich die Moden unterschiedlich schnell aus, da sie aufgrund ihrer Geometrie unterschiedlich lange optische Wege zurücklegen. Diese störende Dispersion kann dadurch beseitigt werden, dass man Einmodenfasern benutzt. Ein gewisser Teil des geführten Lichtes dringt auch in den Mantel ein. Die Eindringtiefe des Lichtes nimmt mit zunehmender Wellenlänge zu und ändert die über den Strahlquerschnitt gemittelte Brechzahl. Dies führt zur Wellenleiterdispersion. Man kann dies ausnutzen, indem man das Brechzahlprofil gezielt verändert, dass die erzeugte Wellenleiterdispersion die Dispersion der Glasfaser in gewünschter Weise korrigiert. Beispiele hierfür sind dispersionsverschobene Glasfasern (DS-Fasern von engl. *dispersion shifted*) oder Fasern mit geringer Dispersion dritter Ordnung (DF-Fasern von engl. *dispersion flattened*).

In doppelbrechenden Glasfasern ist die Brechzahl für die beiden Polarisationsrichtungen unterschiedlich. Durch das Biegen einer Glasfaser kann man bereits eine merkliche Doppelbrechung erzeugen. Den hieraus entstehenden Laufzeiteffekt nennt man Polarisationsmodendispersion PMD (engl.: *polarization mode dispersion*).

Der Effekt der Dispersion zweiter Ordnung, die Dispersion der Gruppengeschwindigkeit (GVD von engl. *group velocity dispersion*), wird nach der sog. Dispersionslänge  $L_D$  wirksam [?]. Die Stärke der Dispersion ist das Inverse dieser Länge

$$\Lambda_{\beta_2} = \Lambda_{\text{GVD}} = \frac{1}{L_D} \quad (3.3)$$

und bestimmt sich für jede Dispersionsordnung  $m$  aus den Faserparametern  $\beta_m$  und dem Impulsparameter  $T_0$  bzw.  $\Omega_0$ :

$$\Lambda_{\beta_m} = \frac{|\beta_m|}{T_0^m} \stackrel{\text{gaußförmig}}{=} |\beta_m| \Omega_0^m \quad (3.4)$$

$\Omega_0$  ist hier die natürliche Bandbreite. Eine detaillierte Beschreibung, wie man Dispersion in verschiedenen Systemen messen kann, wurde mit einigen Beispielmessungen bereits vom Autor vorgelegt [?]b.

**Nichtlinearitäten** Glas hat im Vergleich zu anderen Medien eine geringe Nichtlinearität. Die Wechselwirkungslänge von Licht mit dem Medium, welches es durchläuft, ist bei einem Freistrah durch seine Rayleigh-Länge gegeben. In einer Glasfaser hingegen ist die Wechselwirkungslänge lediglich limitiert durch die Absorptionslänge, welche um Größenordnungen höher ist. Für modengekoppelte Lichtquellen wird die zur Verfügung stehende Energie auf eine kurze Zeit beschränkt. Dadurch entsteht, zumindest kurzfristig, eine hohe Intensität  $I$ . Diese hohe Intensität in Kombination mit der großen Wechselwirkungslänge bewirkt vergleichsweise große nichtlineare Effekte. Der dominante nichtlineare Effekt in einer Glasfaser, wie sie hier betrachtet wird, ist der optische Kerr-Effekt. Dieser führt zu einer von der Intensität abhängigen Brechzahl

$$n = n_0 + n_2 I. \quad (3.5)$$

Dabei ist  $n_0$  die lineare Brechzahl und  $n_2$  der nichtlineare Brechzahlkoeffizient. In einer Glasfaser kann man die Ausbreitung des Lichtes durch eine eindimensionale Betrachtungsweise gut beschreiben, sodass man statt der Intensität des Lichtes seine Leistung, die durch eine effektive Fläche  $A_{\text{eff}}$  geht, verwenden kann. Durch die veränderte Brechzahl hat folglich Licht mit unterschiedlicher Intensität eine unterschiedliche Phasengeschwindigkeit. Die Phasen der verwendeten Frequenzkomponenten werden intensitätsabhängig verändert. Die Stärke dieser Selbstphasenmodulation hängt sowohl vom Faserparameter  $\gamma = \frac{n_2 \omega}{c A_{\text{eff}}}$  als auch von der Impulsspitzenleistung  $\hat{P}$  ab:

$$\Lambda_{\text{SPM}} = \gamma \hat{P}. \quad (3.6)$$

Im Unterschied zur linearen Optik gilt bei der nichtlinearen Optik das Superpositionsprinzip nicht mehr. Zusätzlich kann sich Licht einer bestimmten Frequenz in Licht mit einer anderen Frequenz umwandeln – natürlich nur unter Einhaltung von Energie- und Impulserhaltung.

Andere Nichtlinearitäten wirken sich in der Regel störend auf die Ausbreitung von Solitonen aus. Dazu gehört beispielsweise der Raman-Effekt, der durch die endliche Antwortzeit des verwendeten Mediums verursacht wird. Allerdings können hierbei eine andere Art von Solitonen entstehen, sog. Raman-Solitonen [?, ?]. Ein weiterer Effekt, das sog. „*self-steepening*“, führt dazu, dass Solitonen mit unterschiedlicher Amplitude eine unterschiedliche Geschwindigkeit haben [?].

Es gibt aber auch zahlreiche optische Solitonen (allerdings nicht in einer Glasfaser), die andere Nichtlinearitäten benutzen, um die Dispersion zu kompensieren. Einen umfangreichen Überblick findet man in [?].

**Polarisationseffekte** Um die Ausbreitung von Licht vollständig zu beschreiben, muss man berücksichtigen, dass Licht zwei Polarisationsrichtungen besitzen kann. Bei Abweichungen von der perfekten Kreissymmetrie einer idealen Glasfaser kommt es zu Doppelbrechung. Diese ist in realen Glasfasern immer vorhanden, wenn auch gering. Die Stärke ist proportional zum Brechzahlunterschied der betrachteten Polarisationsrichtungen  $x$  und  $y$ :

$$\Lambda_{\text{pol}} = |n_x - n_y| \frac{\omega}{2\pi c}. \quad (3.7)$$

Bei stark doppelbrechenden Glasfasern sind die geringen Brechzahlunterschiede, die unkontrolliert auftreten, vernachlässigbar. Wenn man bei solchen Glasfasern entlang einer Hauptachse polarisiertes

Licht einstrahlt, bleibt die Polarisation des Lichtes erhalten. Auch wenn im Rahmen dieser Arbeit Polarisationseffekte der Einfachheit halber weitestgehend vernachlässigt werden, so sind sie einer der limitierenden Faktoren für die Datenübertragung.

## 3.2 Nichtlineare Schrödingergleichung

Ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen [?] erhält man durch Benutzung der gegebenen Randbedingungen die Gleichung, welche die Ausbreitung von Licht in einer Glasfaser beschreibt [?]. Die Grundgleichung ist die Nichtlineare Schrödingergleichung ohne Zusatzterme [?]

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + i\gamma |A|^2 A. \quad (3.8)$$

Diese beschreibt die Änderung der Amplitude  $A(T, z)$  bei der Ausbreitung durch die Glasfaser. Die Amplitude, deren Betragsquadrat die Leistung ist ( $|A|^2 = P$ ), ist direkt proportional zur Einhüllenden des elektrischen Feldes. Diese hängt einerseits von dem Ort in der Faser  $z$  und andererseits von der lokalen Zeit im Schwerpunktsystem  $T = t - \beta_1 z$  ab.  $1/\beta_1$  ist die Gruppengeschwindigkeit eines ruhenden Wellenpaketes im Schwerpunktsystem. Der Parameter  $\beta_2$  beschreibt die Dispersion der Gruppengeschwindigkeit der Glasfaser und  $\gamma$  ist der Parameter der Nichtlinearität der Glasfaser.

## 3.3 Erzeugung von Solitonen

Erzeugen kann man helle optische Solitonen am einfachsten, wenn man einen Lichtimpuls mit ausreichender Leistung in eine Glasfaser mit negativer Dispersion zweiter Ordnung einkoppelt. Die Leistung, die für ein ideales Soliton benötigt wird, muss nur grob eingestellt sein, um ein Soliton anzuregen. Dabei ist es wichtig, dass der Lichtimpuls keinen zu starken Chirp aufweist [?]. Die Form ist ebenfalls nicht von entscheidender Bedeutung, denn selbst ein rechteckiger Impuls wird sich bei Ausbreitung in einen sech-förmigen<sup>1</sup> Impuls umwandeln [?]. All die Abweichungen von der Idealform führen allerdings zu einer Abstrahlung eines Teiles der Energie, die dann dem Soliton nicht mehr zur Verfügung steht.

Auch wenn die Parameter des Eingangsimpulses nicht genau stimmen müssen, so ist es dennoch besser, wenn man einen möglichst passenden Eingangsimpuls verwendet. Dies kann z. B. mit einem Laser mit Solitonenmodenkopplung erreicht werden. Ein solcher Laser ist beispielsweise ein  $\text{Cr}^{4+}$ :YAG-Laser, welcher im Wellenlängenbereich von  $1,5 \mu\text{m}$  bandbreitenbegrenzte Lichtimpulse mit 100 fs Dauer erzeugen kann [?]<sup>b</sup>. Dies ist genau der Bereich, in dem Glasfasern ihr Absorptionsminimum haben. In einem solchen Laser wirken sowohl Dispersion als auch Selbstphasenmodulation und sind die dominanten Effekte. Durch die vergleichsweise geringe Verstärkung von  $\text{Cr}^{4+}$ :YAG sind die Abweichungen von der idealen Solitonenform nur minimal. Die hiermit erzeugten Lichtimpulse eignen sich so gut zur Erzeugung von idealen Solitonen, dass man mit ihnen sogar Untersuchung von Quanteneffekten an Solitonen durchführen kann [?]. Eine weitere Lichtquelle, welche sich ebenfalls eignet, ist ein OPO-System (Optisch parametrischer Oszillator), da man hiermit die Zentralfrequenz des Impulses über einen weiten Bereich abstimmen kann. Dieses Verschieben der Zentralfrequenz bewirkt bei Fasern mit Dispersion dritter Ordnung, dass sich die Dispersion zweiter Ordnung verändert. Somit kann man die gewünschte Dispersion durch Wahl der Frequenz einstellen.

## 3.4 Kenngrößen von Solitonen

Die Bestimmung der Kenngrößen von Solitonen ist der zentrale Bestandteil dieser Arbeit. Deswegen werden diese hier ausführlich behandelt und in einer teilweise unkonventionellen Darstellungsform be-

---

<sup>1</sup>sech: Sekans Hyperbolicus

schrieben, die jedoch deren Bestimmung erleichtert. Diese Details sind noch in keiner Veröffentlichung beschrieben worden.

Je nach Vorzeichen der beteiligten Faserparameter ergeben sich unterschiedliche Solitonenlösungen. Der Einfachheit halber wird im Folgenden nur der Fall der hellen Solitonen näher beschrieben, da dieser für die Datenübertragung wichtig ist. Helle Solitonen erhält man, wenn  $\gamma > 0$  und  $\beta_2 < 0$  ist. Ein allgemeines helles Soliton besitzt alle in Abschnitt ?? aufgelistete Parameter. Einige dieser Parameter sind nicht unabhängig voneinander. So muss z. B. für ein Soliton die Balance zwischen Dispersion und Nichtlinearität gegeben sein:

$$\Lambda_\gamma = \gamma \hat{P} = \frac{|\beta_2|}{T_0^2} = \Lambda_{\text{GVD}}. \quad (3.9)$$

Trennt man die Impulsparameter und die Faserparameter, so erhält man:

$$\hat{P} T_{\text{sol}}^2 = \frac{|\beta_2|}{\gamma}. \quad (3.10)$$

Das Verhältnis von  $\beta_2$  zu  $\gamma$  ändert sich nicht. Somit ist das Produkt aus Spitzenleistung und Dauer konstant und hat die Dimension einer Wirkung. Man kann daraus jeweils die benötigte Spitzenleistung für ein Soliton bzw. seine Dauer bestimmen:

$$\hat{P} = \frac{|\beta_2|}{\gamma} \frac{1}{T_0^2} \quad \text{bzw.} \quad T_0 = \sqrt{\frac{|\beta_2|}{\gamma} \frac{1}{\hat{P}}}. \quad (3.11)$$

Die Entwicklung eines hellen Solitons mit allen Parametern kann somit auf mehrfache Weise beschrieben werden. Durch simples Einsetzen der nun folgenden Lösungen in die NLSE kann man sich leicht davon überzeugen, dass diese die Gleichung lösen.

**Helles Soliton:  $(T_0, \Omega, T_s, z_s, \phi_s)$ -Notation**

$$A(T, z) = \sqrt{\frac{-\beta_2}{\gamma} \frac{1}{T_0}} \operatorname{sech} \left( \frac{(T - T_s) - (\Omega \beta_2)(z - z_s)}{T_0} \right) \cdot \exp \left( i \left( \frac{1}{2} \frac{-\beta_2}{T_0^2} (z - z_s) - \Omega \left( (T - T_s) - \frac{1}{2} (\Omega \beta_2)(z - z_s) \right) + \phi_s \right) \right) \quad (3.12)$$

**Helles Soliton:  $(\hat{P}, \Omega, T_s, z_s, \phi_s)$ -Notation**

$$A(T, z) = \sqrt{\hat{P}} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{\gamma}{-\beta_2}} \hat{P} \left( (T - T_s) - (\Omega \beta_2)(z - z_s) \right) \right) \cdot \exp \left( i \left( \frac{1}{2} \gamma \hat{P} (z - z_s) - \Omega \left( (T - T_s) - \frac{1}{2} (\Omega \beta_2)(z - z_s) \right) + \phi_s \right) \right) \quad (3.13)$$

Die Energie eines Impulses ist gegeben durch:

$$E_{\text{sol}} = f \hat{P} T_0 \stackrel{\text{sech}}{=} 2 \hat{P} T_0, \quad (3.14)$$

wobei der Formfaktor  $f$  für einen sech-förmigen Impuls 2 ist  $\left( \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(x)^2 dx = 2 \right)$ . Damit ergibt sich eine weitere Notationsmöglichkeit.

**Helles Soliton:  $(E_{\text{sol}}, \Omega, T_s, z_s, \phi_s)$ -Notation**

$$A(T, z) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{-\beta}} E_{\text{sol}} \operatorname{sech} \left( \frac{1}{2} \frac{\gamma}{-\beta_2} E_{\text{sol}} \left( (T - T_s) - (\Omega \beta_2)(z - z_s) \right) \right) \cdot \exp \left( i \left( \frac{1}{8} \frac{\gamma^2}{-\beta_2} E_{\text{sol}}^2 (z - z_s) - \Omega \left( (T - T_s) - \frac{1}{2} (\Omega \beta_2)(z - z_s) \right) + \phi_s \right) \right) \quad (3.15)$$

Diese Lösungen setzen sich alle aus einer Einhüllenden, deren Form nicht ortsabhängig ist, und einer Phase zusammen. Die Phase besteht aus drei Teilen:

1. Je nach Startbedingung aus einem konstanten Wert:  $\phi_s$
2. Einem sich linear entwickelnden Teil, der von der Spitzenleistung des Solitons abhängt:  $\frac{1}{2} \gamma \hat{P} (z - z_s)$  (bzw. von  $E_{\text{sol}}^2$  oder  $1/T_0^2$ )
3. Einem Anteil, der etwas komplizierter von der Frequenzverschiebung abhängt.

Der letzte Anteil wird nun etwas näher betrachtet:

**Im Fall von  $\Omega = 0$**  ist eine Anfangsphase von  $\phi_s$  gleichbedeutend mit einer zusätzlichen Ortsverschiebung  $z_\phi$ :

$$\phi_s = \frac{1}{2} \gamma \hat{P} z_\phi. \quad (3.16)$$

Mit einer künstlichen Verschiebung der Startbedingung um  $z_\phi = 2 \frac{1}{\gamma \hat{P}} \phi_s$  kann man nun eine neue (absolute) Ortskoordinate  $\Delta z$  einführen:

$$\Delta z = z - z_s + 2 \frac{1}{\gamma \hat{P}} \phi_s = z - z_s + z_\phi = z - z_a. \quad (3.17)$$

Dabei verschiebt man die Ortskoordinate um die (absolute) Ortsverschiebung  $z_a$ .

Eine einfachere Transformation kann man für die Zeitverschiebung durchführen:

$$\theta = T - T_s = T - T_a. \quad (3.18)$$

Es ergibt sich eine allgemeine Beschreibung der Solitonen mit lediglich 4 Freiheitsgraden.

**Helles Soliton:  $(\hat{P}, \Omega=0, \theta, \Delta z)$ -Notation**

$$A(T, z) = \sqrt{\hat{P}} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{\gamma}{-\beta_2}} \hat{P} \theta \right) \cdot \exp \left( i \left( \frac{1}{2} \gamma \hat{P} \Delta z \right) \right) \quad (3.19)$$

Die allgemeinste Schreibweise ist:

**Helles Soliton:  $(\hat{P}, \Omega=0, T_a, z_a)$ -Notation**

$$A(T, z) = \sqrt{\hat{P}} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{\gamma}{-\beta_2}} \hat{P} (T - T_a) \right) \cdot \exp \left( i \left( \frac{1}{2} \gamma \hat{P} (z - z_a) \right) \right) \quad (3.20)$$

**Im Fall von  $\Omega \neq 0$**  ist die Reskalierung etwas komplizierter:

Auch hier kann man die zusätzliche Phase  $\phi_s$  durch eine Ortsverschiebung  $z_\phi$  beseitigen. Allerdings benötigt man dazu eine zusätzliche Zeitverschiebung  $T_\phi$ . Eine Orts- und Zeitverschiebung hat folgende Phasenverschiebung:

$$\phi_s = \frac{1}{2} \gamma \hat{P} z_\phi - \Omega T_\phi + \frac{1}{2} \Omega^2 \beta_2 z_\phi = \frac{1}{2} \left( \gamma \hat{P} + \Omega^2 \beta_2 \right) z_\phi - \Omega T_\phi. \quad (3.21)$$



Eine beliebige, unabhängige Wahl für  $T_\phi$  und  $z_\phi$  ist nicht möglich, da sich die Einhüllende verschieben würde. Man fordert also

$$T_\phi = \Omega\beta_2 z_\phi. \quad (3.22)$$

Aus Gl. ?? und Gl. ?? folgt:

$$z_\phi = \frac{2}{\gamma\hat{P} - \Omega^2\beta_2} \phi_s \quad \text{und} \quad T_\phi = \frac{2\Omega\beta_2}{\gamma\hat{P} - \Omega^2\beta_2} \phi_s \quad (3.23)$$

Analog zu Gl. ?? und Gl. ?? ergibt sich nun:

$$\Delta z = z - z_s + z_\phi = z - z_a = z - z_s + \frac{2}{\gamma\hat{P} - \Omega^2\beta_2} \phi_s \quad (3.24)$$

bzw.

$$\theta = T - T_a = T - T_s + \frac{2\Omega\beta_2}{\gamma\hat{P} - \Omega^2\beta_2} \phi_s. \quad (3.25)$$

Damit wird die allgemeinste Form für ein Soliton:

**Helles Soliton:  $(\hat{P}, \Omega, T_a, z_a)$ -Notation**

$$\boxed{A(T, z) = \sqrt{\hat{P}} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{\gamma}{-\beta_2}} \hat{P} \left( (T - T_a) - (\Omega\beta_2)(z - z_a) \right) \right) \cdot \exp \left( i \left( \frac{1}{2} \gamma \hat{P} (z - z_a) - \Omega \left( (T - T_a) - \frac{1}{2} (\Omega\beta_2)(z - z_a) \right) \right) \right)} \quad (3.26)$$

mit  $T_a = T_s - \frac{2\Omega\beta_2}{\gamma\hat{P} - \Omega^2\beta_2} \phi_s$  und  $z_a = z_s - \frac{2}{\gamma\hat{P} - \Omega^2\beta_2} \phi_s$ .

Diese Transformation von  $T_s$  und  $z_s$  nach  $T_a$  bzw.  $z_a$  ist nicht eindeutig. Man kann vor der Transformation zu  $\phi_s$  ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  dazuaddieren und erhält wieder eine identische Solitonenlösung.

**Kenngrößen** Ein helles Soliton ist somit durch vier Kenngrößen eindeutig bestimmt:

1. **Energie, Spitzenleistung, Dauer** Da ein Soliton eine unveränderliche Form besitzt und es der Solitonenbedingung genügen muss, ist diese Kenngröße entweder die Energie des Solitons  $E_{\text{sol}}$  oder auch gleichbedeutend damit seine Dauer  $T_0$  oder ebenfalls gleichbedeutend seine Spitzenleistung  $\hat{P}$ :

|                    | $E_{\text{sol}}$  | $\hat{P}$   | $T_0$                                      |
|--------------------|---|---|--|
| $E_{\text{sol}} =$ | $E_{\text{sol}}$  | $2\sqrt{\frac{ \beta_2 }{\gamma}} \hat{P}$          | $2\frac{ \beta_2 }{\gamma} \frac{1}{T_0}$  |
| $\hat{P} =$        | $\frac{1}{4} \frac{\gamma}{ \beta_2 } E_{\text{sol}}^2$ | $\hat{P}$   | $\frac{ \beta_2 }{\gamma} \frac{1}{T_0^2}$ |
| $T_0 =$            | $2\frac{ \beta_2 }{\gamma} \frac{1}{E_{\text{sol}}}$    | $\sqrt{\frac{ \beta_2 }{\gamma}} \frac{1}{\hat{P}}$ | $T_0$                                      |

2. **Frequenzverschiebung**  $\Omega$ : Diese ist gleichbedeutend mit  $\frac{d\phi(t)}{dt}$ . Sie ist bei Vorhandensein einer festen Dispersion  $\beta_2$  ebenfalls gleichbedeutend mit der Geschwindigkeit  $v = \frac{T_{a,2\pi} - T_a}{z_{a,2\pi} - z_a} = \beta_2\Omega$ .
3. **Zeitliche Verschiebung der Startbedingung**  $T_a$ : Diese ist gleichbedeutend mit  $\frac{d\tilde{\phi}(\omega)}{d\omega}$ .
4. **Phase  $\phi_0$  bzw. Ort  $z_a$  der Startbedingung**: An einem Referenzpunkt hat die Phase des Solitons einen definierten Wert; der Einfachheit halber sei dieser Wert hier immer 0. Da die Phase der Startbedingung  $\phi_0$  sinnvollerweise nur Werte im Intervall  $[0, 2\pi[$  annimmt, kann der Ort  $z_a$  auch nur Werte im Intervall  $[0, z_{\text{sol}}[$  annehmen.

**Fermionencharakter** Anzumerken ist, dass Solitonen nicht in allen vier Kenngrößen gleich sein können. Da sie einer nichtlinearen Gleichung genügen müssen, wäre beispielsweise eine Verdopplung der ursprünglichen Lösung keine Lösung mehr:

$$A(T, z) \text{ ist Lösung der NLSE} \implies 2A(T, z) \text{ ist keine Lösung der NLSE} \quad (3.27)$$

Versucht man beispielsweise zwei identische, aber getrennte Solitonen durch geeignete Wahl der Startbedingungen zusammenzubringen, so spaltet bei Annäherung entweder die Energie (wenn diese in Phase sind) oder die Frequenz (bei Gegenphase) der beteiligten Solitonen auf [?].

**Erhaltungsgrößen** Sowohl die Energie als auch die Frequenzverschiebung sind für die NLSE Erhaltungsgrößen. Die Phase und die zeitliche Verschiebung sind durch eine Solitonenkollision beeinflussbar und sind somit keine Erhaltungsgrößen. Nach einer Solitonenkollision ändert sich die zeitliche und die örtliche Verschiebung der Solitonen. Dadurch wird lokal eine andere Geschwindigkeit der Solitonen beobachtet, als sie nach der erhaltenen Frequenzverschiebung in dem System hätten. Bei Vorhandensein von Dispersionen höherer Ordnung ( $\beta_i$  für  $i > 2$ ) stimmt die Frequenzverschiebung ebenfalls nicht mehr mit der Geschwindigkeit überein.

Alle Erhaltungsgrößen sind eng mit den möglichen Symmetrien des betrachteten Systems verknüpft. Die Wahl der Kenngrößen ist beliebig und bestimmt somit, welche Transformation für ein Soliton möglich ist. Daraus ergeben sich die Erhaltungsgrößen [?].

Nicht alle Kenngrößen von Solitonen sind beliebig scharf bestimmbar. In Systemen, in denen sich der Solitonengehalt ändert, unterliegen die Kenngrößen einer Unschärferelation [?]<sup>a</sup>. Dies wird in Abschnitt ?? näher erläutert.

**Robustheit** Wie in Abschnitt ?? bereits beschrieben, zeigt die Wechselwirkungsfreiheit von Solitonen einen Teilchencharakter. Die Wechselwirkungsfreiheit der Solitonen der Nichtlinearen Schrödingergleichung (NLSE) kann man in Analogie zur Schrödingergleichung in der Quantenmechanik (SG) verstehen. Hierbei zeigen die SG und die NLSE eine formale Ähnlichkeit (von der die NLSE auch ihren Namen hat), wenn man das Wellenpaket der NLSE als Potential der SG auffasst. Ein Soliton ist also ein im Potential gebundenes Wellenpaket, wobei es dieses Potential selbst erzeugt. Kay und Moses zeigten noch vor Einführung der NLSE, dass ein sechsförmiges Potential in der SG reflexionsfrei ist [?]. Da NLSE-Solitonen genau diese Form haben, können andere Solitonen mit ihnen nur elastisch wechselwirken. Die Möglichkeit nur elastischer Wechselwirkungen war der Grund für die Prägung des Begriffes *Soliton* [?].

Bei kleinen Störungen des dynamischen Gleichgewichtes zwischen Dispersion und Nichtlinearität entsteht ein neues, adiabatisch angepasstes Soliton mit veränderten Parametern, welches die gegebene Energie besser ausnutzen kann [?]. So können Solitonen z. B. auch spektrales Filtern vergleichsweise

gut kompensieren [?, ?]. Dieser Umstand wird z. B. bei einer speziellen Filtermethode (*sliding frequency filtering*) eingesetzt um, lineare Anteile zu unterdrücken [?, ?]. Bei dieser Methode werden spektrale Filter so variiert, dass dispersive Wellen größere Verluste erfahren als Solitonen, die sich den veränderten Bedingungen vergleichsweise gut anpassen können. Adiabatisch angepasste Solitonen werden auch zur Impulsformung benutzt [?].

Auch wenn zusätzliche Effekte auftreten, können Solitonen immer noch existieren [?], beispielsweise unter Einfluss des Raman-Effektes [?, ?] oder bei Vorhandensein von Dispersion höherer Ordnung [?]. Selbst bei periodischen oder nahezu periodischen Störungen sind Solitonen möglich [?][?]<sup>a</sup>.

## 3.5 Bekannte Berechnungsmethoden für Solitonen

Gegeben sei ein Gleichungssystem, in welchem Solitonen vorkommen. Lösen dieses Gleichungssystems bedeutet hier die Lösung eines Randwertproblems, also die Bestimmung der Entwicklung eines Anfangszustandes. Ist die Entwicklung des Ausgangszustands durch eine analytisch beschreibbare Funktion möglich, so erhält man exakte Solitonen mit definierten Kenngrößen. Die analytische Funktion für ein exaktes Soliton ist aber nur in wenigen Fällen bekannt. Deswegen versucht man diese durch eine numerische Darstellung zu approximieren. In einer numerischen Darstellung lassen sich auch reale (gemessene) Zustände beschreiben. Dieser Schritt verändert allerdings die Bestimmbarkeit des Solitonengehaltes.

Hier werden nun die drei gängigen Verfahren kurz vorgestellt, die das Verhalten von Solitonen bestimmen können. In Abschnitt ?? wird ein viertes, neues Verfahren vorgestellt, mit welchem man den Solitonengehalt ohne die Einschränkungen der anderen Verfahren mit numerischer Genauigkeit bestimmen kann.

### 3.5.1 Numerische Simulation

Mit numerischen Simulationen kann man die Ausbreitung einer beliebigen Startbedingung unter dem Einfluss von beliebigen physikalischen Effekten untersuchen [?, ?]. Ein bewährter Simulationsalgorithmus ist die „Split-Step-Fourier-Methode“ [?], welche auch in dieser Arbeit benutzt wird um die numerische Impulsausbreitung zu berechnen. Allerdings erhält man hier keine Informationen über den Solitonengehalt. Unterscheiden sich die Solitonen jedoch in ihrem Ort oder in ihrer Geschwindigkeit, so kann man sie leicht voneinander trennen und ihnen die gesuchten Parameter zuordnen.

### 3.5.2 Variations- und störungstheoretische Ansätze

Solitonen lassen sich mit einigen wenigen Kenngrößen beschreiben. Wenn man nicht an der exakten Entwicklung eines beliebigen Lichtimpulses interessiert ist, sondern lediglich das Verhalten eines Solitons bestimmen möchte, ist es ausreichend, nur die Entwicklung der Parameter zu untersuchen. Die analytischen Ansätze lassen sich entweder direkt oder mit numerischen Methoden lösen. Mit einem Variationsansatz kann man einzelne Solitonenlösungen finden [?]. Leider unterliegt ein solcher Ansatz einigen strikten Annahmen. Das Ergebnis ist eine selbstkonsistente Lösung (z. B. ein Soliton), aber der Solitonengehalt bleibt unbekannt. Auch für ein Soliton in dispersionsalternierenden Glasfasern kann dieses Verfahren angewendet werden [?]. Der Fall eines Solitonenmoleküls kann ebenfalls gut beschrieben werden [?]. Auch mit störungstheoretischen Ansätzen kann man Informationen über das Verhalten von Solitonen gewinnen. Im Fall eines Solitonenmoleküls wurde dies von Hause demonstriert [?]<sup>a</sup>.

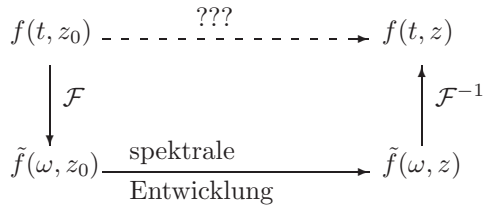


Abbildung 3.1: Berechnung der Entwicklung einer linearen Differentialgleichung im Spektralraum.

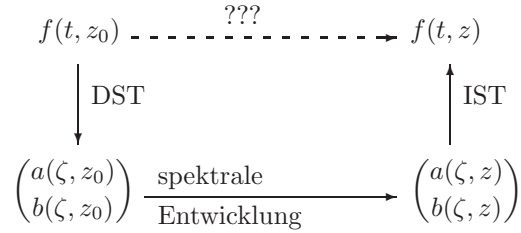


Abbildung 3.2: Berechnung der Entwicklung einer nichtlinearen Differentialgleichung mit der inversen Streutransformation.

### 3.5.3 Inverse Streutheorie

Die Inverse Streutheorie (IST) [?] ist ein analytisches Verfahren, um Solitonen in integrierbaren Systemen zu bestimmen. Reale physikalische Systeme sind aber immer, z. B. aufgrund von Dissipation, nicht integrierbar. Eine gute Näherung an die Dissipationsfreiheit stellen Systeme mit geringen Verlusten dar, z. B. Lichtausbreitung in Glasfasern [?]. Für geringe Abweichungen von der Integrierbarkeit kann man die Eigenschaften der Solitonen näherungsweise berechnen [?]. Für nicht-analytische Eingangsimpulse kann man die IST auch numerisch durchführen [?].

Lineare Differentialgleichungen lassen sich im Fourierraum leicht lösen, denn die  $n$ -te Ableitung einer Funktion entspricht im Fourierraum einer Multiplikation mit der  $n$ -ten Potenz der Fourierfrequenz. So entspricht beispielsweise die  $n$ -te Zeitableitung einer zeitabhängigen Funktion  $\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}$  dem Spektrum  $(i\omega)^n \tilde{f}(\omega)$ , wobei  $\tilde{f}(\omega)$  die Fouriertransformierte von  $f(t)$  ist. Die Kreisfrequenz  $\omega$  ist dabei eine reelle Zahl. Bei den hier untersuchten Problemen handelt es sich um Randwertprobleme. Man möchte aus einer gegebenen Impulsform (beispielsweise  $f(t)$ ) deren Entwicklung berechnen ( $f(t, z)$ ). Dazu Fourier-transformiert man zunächst  $f(t)$ . Anschließend wird die Entwicklung im Spektralraum bestimmt:  $\tilde{f}(\omega) \rightarrow \tilde{f}(\omega, z)$ . Durch Fourierrücktransformation erhält man nun das gewünschte Ergebnis (vgl. Abb. ??).

Die Lösung einer nichtlinearen Differentialgleichungen mit der inversen Streutransformation ist eine Erweiterung des linearen Verfahrens. Zunächst bestimmt man aus der Startbedingung mittels direkter Streutransformation (DST) das Streuspektrum  $a(\zeta, z_0)$  und  $b(\zeta, z_0)$ . Dabei ist  $\zeta$  eine komplexe Erweiterung der Frequenz:

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad (3.28)$$

wobei der Realteil  $\xi$  der Fourierfrequenz und der vierfache Imaginärteil  $4\eta$  der Energie (der Solitonen) entspricht. Die Entwicklung des Streuspektrums kann ebenfalls mit einfachen Gleichungen berechnet werden. Aus der Rücktransformation erhält man die gesuchte Entwicklung (vgl. Abb. ??). Die Kenngrößen der Solitonen kann man aus den Eigenwerten der aufgestellten Gleichungen ermitteln. Sie entsprechen den Nullstellen  $\zeta_j$  im komplexen Streuspektrum:  $a(\zeta_j) = 0$ . Das Spektrum der dispersiven Anteile erhält man als den Anteil des komplexen Streuspektrums, der sich auf der reellen Achse befindet.

## Kapitel 4

# Bestimmung des Solitonengehaltes mit „Soliton-radiation beat analysis“

Wird nur ein einzelnes Soliton angeregt, so kann man seine Kenngrößen leicht mit allen gängigen Methoden bestimmen. Zusätzlich zu den einzelnen Solitonen, die sich formstabil ausbreiten, gibt es auch andere Zustände, die zwar lokalisiert bleiben, jedoch oszillieren. Solche Zustände beinhalten mehrere Komponenten, also mindestens zwei Solitonen oder ein Soliton und eine dispersive Welle. Die Kenngrößen von mehreren Solitonen kann man am einfachsten bestimmen, wenn diese zeitlich getrennt sind. Diese lassen sich dann auf den Fall einzelner Solitonen zurückführen. Schwierigkeiten ergeben sich aber, sobald sich die Solitonen überlappen. In den Fällen, in denen alle beteiligten Solitonen eine unterschiedliche Geschwindigkeit besitzen, trennen sich die Solitonen nach einer gewissen Ausbreitungsstrecke, sodass man sie einzeln identifizieren kann. Überlagert man allerdings Solitonen mit derselben Geschwindigkeit am gleichen Ort, so ist es schwieriger, den Solitonengehalt zu bestimmen. Man kann also leicht bestimmen, ob in einem System Solitonen vorkommen oder nicht, jedoch kann man weder deren Anzahl noch deren Kenngrößen mit herkömmlichen Mitteln im allgemeinen Fall bestimmen. Die Kenngrößen der Solitonen hängen von dem verwendeten Gleichungssystem und Ausgangszustand ab. Eine Methode, die diese Kenngrößen bestimmen kann, sollte unabhängig von Gleichungssystem und von verwendetem Ausgangszustand verlässliche Ergebnisse liefern.

Die „soliton-radiation beat analysis“ (SRBA)<sup>1</sup> ist ein Verfahren, welches den Solitonengehalt bestimmen kann [?]<sup>a</sup>. Es handelt sich dabei um ein rein numerisches Verfahren und kann deswegen nur den Solitonengehalt für die gegebenen Simulationsparameter bestimmen. Diesem Nachteil steht aber gegenüber, dass das Verfahren sowohl mit einem beliebigen Anfangsimpuls brauchbare Ergebnisse liefert [?]<sup>a</sup> als auch auf nichtintegrale Systeme anwendbar ist [?, ?]<sup>a</sup>.

In der Physik ist es üblich, wenn man etwas nicht direkt messen kann, wenigstens eine Vergleichsmessung mit gleichartigen Gebilden durchzuführen: So kann man z. B. in der Interferometrie die Phasendifferenz zwischen zwei Lichtstrahlen messen, auch wenn die Phase des Lichtes nicht direkt messbar ist. Mit einer Autokorrelation kann man z. B. die Dauer eines Lichtimpulses bestimmen, obwohl die Impulsdauer auf direktem Weg nicht messbar ist. Eine Analogie des hier vorgestellten Verfahrens besteht zur der Messung der Energiezustände eines Atoms. Diese können nicht direkt gemessen werden, wohl aber die Schwingung zwischen verschiedenen Energieniveaus. Aus den gewonnenen Spektren des absorbierten oder emittierten Lichtes kann man die Energieniveaus rekonstruieren.

Bei der SRBA wird die Schwebung zwischen zwei Solitonen bzw. die Schwebung zwischen Solitonen

---

<sup>1</sup>Analyse der Schwebung zwischen Solitonen und dispersiven Wellen

und der dispersiven Wellen benutzt, um den Solitonengehalt zu bestimmen. Als Ausgangspunkt für die SRBA benötigt man eine numerische Simulation der Impulsausbreitung. Dies ist mit Hilfe von modernen Computern in überschaubarer Zeit möglich und ist nur durch die numerische Genauigkeit limitiert. Aus den Simulationsdaten werden geeignete Daten extrahiert, die möglichst viele Information über die beteiligten Solitonen beinhalten. Die gewünschten Informationen werden schließlich aus diesen Daten mithilfe einer Fourier-Transformation herausgefiltert. Es hat sich bewährt, die Daten vor der Fourier-Transformation zu apodisieren, d. h. eine gefensterete Fourier-Transformation zu verwenden. Man erhält eine große Fülle von Daten, denen man die richtige Bedeutung zuordnen muss. Diese drei Schritte werden nun im Folgenden detailliert erklärt:

**Datenextraktion** Aus den Simulationsdaten an diskreten Positionen in der Faser  $z_m$  werden die Daten  $x(z_m)$  extrahiert. Um die Interferenzen zwischen Solitonen und dispersiven Wellen gut zu repräsentieren, benutzt man am besten die spektrale Leistung für eine feste Frequenz. Es gibt eine ausgezeichnete Frequenz, bei der die Schwebungsstruktur besonders einfach zu bestimmen ist. Diese ist die Zentralfrequenz  $\omega_0$ , bei der sich im Schwerpunktsystem die Phase der dispersiven Welle nicht verändert. Die verbleibende Phasenänderung resultiert dann lediglich aus nichtlinearen Strukturen, den Solitonen. Man bestimmt also zunächst mit numerischen Methoden  $x(z_m) = \tilde{A}(\omega_0, z_m)$  an äquidistanten Orten  $z_i$ , wobei  $i$  eine ganze Zahl aus dem Intervall  $[1, M]$  sein sollte. Da man eine diskrete Fourier-Transformation auf diese Daten anwenden möchte, ist es vorteilhaft, wenn  $M$  eine Zweierpotenz ist.

**Fourier-Transformation** Da die Schwebungsfrequenz zwischen Soliton und dispersiver Welle auch Oberwellen hat, ist eine Bestimmung der Schwebungsfrequenz aus der Winkelgeschwindigkeit der Schwingung nicht möglich. Deswegen bestimmt man die Schwebungsfrequenzen am einfachsten mit Hilfe einer diskreten Fourier-Transformation

$$\tilde{x}(Z_k) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x(z_m) \exp\left(-2\pi i k \frac{m}{M}\right) \quad \text{mit } k = 0, \dots, M-1. \quad (4.1)$$

Da man nur einen endlichen Bereich simulieren kann und die zu transformierenden Daten bei der Transformation als periodisch fortgesetzt aufgefasst werden, treten an den Rändern Sprünge auf. Solche Sprünge erzeugen Artefakte im Spektrum. Um die Auswirkungen dieser Sprünge zu minimieren, sollte man die Daten vor der Fourier-Transformation apodisieren [?]. Eine effektive Fensterfunktion, die man in ihrer Apodisationsstärke  $\frac{1}{c}$  verändern kann ist z. B. die gaußförmige Fensterfunktion

$$f(m) = \exp\left[-\left(\frac{m - \frac{M}{2}}{cM}\right)^2\right]. \quad (4.2)$$

Eine so gefensterete Fourier-Transformation wird auch Gabor-Transformation genannt [?]. Sie bietet unter anderem die Möglichkeit die Apodisation an das gegebene Problem anzupassen. Die Wahl einer zu starken Apodisation verbreitert die gewonnenen spektralen Linien unnötig und erschwert die Trennung benachbarter Linien. Eine zu schwache Apodisation hingegen beseitigt den störenden Untergrund nicht effektiv genug, sodass einige spektrale Linien nach wie vor vom Untergrund überdeckt werden. In Abschnitt ?? wird gezeigt, wie eine vom Autor entwickelte Erweiterung der Fourier-Transformation die Bestimmung der Schwebungsfrequenzen verbessert.

**Analyse** Als Resultat der Fourier-Transformation erhält man ein Leistungsspektrum mit einigen Spitzen. Jede Spitze, sofern sie nicht auf der Höhe des Rauschniveaus liegt, entspricht einer Schwebungsfrequenz zwischen einem Soliton und dem dispersiven Untergrund bzw. zwischen zwei Solitonen.

Aus der Identifizierung der zu einem Soliton gehörenden Ortsfrequenz  $Z$  kann man, wie im Abschnitt ?? beschrieben, die Solitonenenergie oder deren Impulsdauer berechnen.

Eine eindeutige Zuordnung wird allerdings dadurch erschwert, dass auch bei allen Oberwellen und Mischfrequenzen eine entsprechende Leistungsspitze auftritt. Um eine eindeutige Zuordnung zu bekommen, führt man SRB-Analysen mit verschiedenen Startparametern, die den Solitonengehalt beeinflussen, durch. Ein Beispiel für eine solche Zuordnung wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

## 4.1 Nichtlineare Schrödingergleichung

Im Folgenden werden zum Vergleich die bereits vorgestellten Verfahren benutzt, um den Solitonengehalt zu bestimmen. Zunächst wird gezeigt, dass die Inverse Streutheorie und „soliton-radiation beat analysis“ (SRBA), in dem Fall, in dem beide Verfahren anwendbar sind, dieselben Ergebnisse liefern. Dies ist der Fall für die Nichtlineare Schrödingergleichung (Gl. ??). Es werden zunächst das Ergebnis der Inversen Streutheorie dargestellt und anschließend Vorhersagen für die möglichen Schwebungsfrequenzen ermittelt. Diese werden dann mit den Ergebnissen der SRBA verglichen.

Um für die SRBA eine eindeutige Zuordnung zu bekommen, muss man einen Parameter variieren. Für das hier gewählte Beispiel der Nichtlinearen Schrödingergleichung bietet sich eine Variation der Anfangsamplitude an, da dies sowohl im Experiment als auch bei Simulationen leicht eingestellt werden kann. In den folgenden Abschnitten wird SRBA auch auf andere Gleichungssysteme angewendet.

### 4.1.1 Sech-förmiger Impuls

Die analytische Impulsform eines hellen Solitons der Nichtlinearen Schrödingergleichung ist sech-förmig. Die zu skalierende Impulsform lautet also:

$$A(T, 0) = N\sqrt{\hat{P}} \operatorname{sech}\left(\frac{T}{T_0}\right). \quad (4.3)$$

Die Impulsparameter seien so gewählt, dass die für die Faserstrecke notwendige Wirkung (Gl. ??) für ein reines Soliton gegeben ist, wenn  $N = 1$  ist.  $N$  ist die sog. Solitonenordnung und ist der Parameter, der hier verändert werden soll. Obwohl sich die Energie eines Solitons verändern kann, wird im Folgenden  $N$  nicht auf die veränderten Bedingungen bezogen, sondern auf den hier erwähnten Fall. Dadurch ist eine bessere Vergleichbarkeit gegeben.

**Inverse Streutheorie** Gemäß der IST ergeben sich die in Abb. ?? dargestellten Energien für die Solitonen als Funktion von  $N$ . Die Gesamtenergie skaliert mit  $N^2$  und ist in der Darstellung eine Parabel. Für  $N < 0,5$  ist die Nichtlinearität im Vergleich zur Dispersion zu gering, um ein Soliton zu formen. Für  $N \geq 0,5$  bildet sich ein Soliton, dessen Energie linear mit wachsendem  $N$  zunimmt [?]:

$$E_{1N} = (2N - 1)E_{11}. \quad (4.4)$$

Für  $N = 1$  wird die Energie, die in die Faser eingekoppelt wird, vollständig dazu benutzt, ein Soliton zu formen. Für kleinere oder größere Energien stimmt die Balance zwischen Dispersion und Nichtlinearität nicht exakt und es wird ein Teil der eingestrahnten Energie in eine dispersive Welle umgewandelt. Für  $N = 1,5$  ist die abgestrahlte Energie so groß wie die zur Verfügung stehende Energie bei  $N = 0,5$  und es bildet sich ein weiteres Soliton. Dessen Energie nimmt mit

$$E_{2N} = (2N - 3)E_{11} \quad (4.5)$$

zu. Für  $N = 2$  steckt erneut die gesamte Energie in den Solitonen, sodass keine dispersive Welle abgestrahlt wird. Dieser Zustand aus zwei Solitonen mit dem Energieverhältnis 1:3 wird auch  $N=2$ -Soliton genannt. Ab  $N = 2,5$  bildet sich ein weiteres Soliton und der beschriebene Vorgang wiederholt



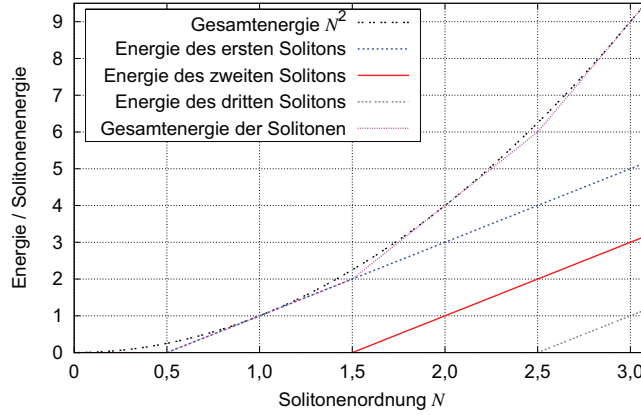


Abbildung 4.1: Energie der beteiligten Solitonen als Funktion von der Solitonenordnung  $N$ .

sich von Neuem. Für alle ganzzahligen  $N$  ist die abgestrahlte Energie Null und man spricht von einem Soliton  $N$ -ter Ordnung.

**Vorhersage der Schwebungsfrequenzen** Sowohl die dispersiven Welle als auch die einzelnen Solitonen haben eine unterschiedliche Phasenentwicklung. Wächst der Phasenunterschied zwischen zwei beteiligten Komponenten auf einer Strecke um  $2\pi$ , so ist das Inverse dieser Strecke die Ortsfrequenz, mit der die beiden Komponenten schweben.

Ist die Zentralfrequenz des Solitons  $\Omega = 0$ , so ergibt sich nach Gl. ?? eine Grundfrequenz für ein helles Soliton von

$$Z_{\text{sol}} = \frac{\gamma \hat{P}}{4\pi} . \quad (4.6)$$

Damit ergibt sich für die Schwebungsfrequenz des ersten Solitons mit der dispersiven Welle

$$Z^{(10)} = (2N - 1)^2 \frac{\gamma \hat{P}}{4\pi} = (2N - 1)^2 Z_{\text{sol}} . \quad (4.7)$$

Die hochgestellten und geklammerten Indizes für die Schwebungsfrequenz geben an, welche Komponenten beteiligt sind. Die erste Zahl steht für die Nummer des niederenergetischen Solitons und die zweite entweder für die Nummer des höherenergetischen Solitons oder sie ist 0, wenn eine Schwebung mit der dispersiven Wellen gemeint ist. Die Schwebungsfrequenz  $Z^{(10)}$  sollte erst für  $N \geq 0,5$  auftreten, da sich erst ab dieser Amplitude ein Soliton bilden kann. Ab  $N \geq 1,5$ ,  $N \geq 2,5$ , etc. treten weitere Frequenzen auf:

$$Z^{(20)} = (2N - 3)^2 Z_{\text{sol}} \quad (4.8)$$

$$Z^{(30)} = (2N - 5)^2 Z_{\text{sol}} \quad (4.9)$$

$$Z^{(40)} = (2N - 7)^2 Z_{\text{sol}} \quad (4.10)$$

⋮

Zusätzlich treten bei einer nichtlinearen Ausbreitung Schwingungen mit allen möglichen Mischfrequenzen auf. Dies gilt für die Harmonischen:  $lZ^{(10)}, lZ^{(20)}, lZ^{(30)}, \dots$  mit einer beliebigen natürlichen Zahl  $l$ , und für die Mischfrequenzen zwischen verschiedenen Komponenten: Ab  $N \geq 1,5$  sollte somit z. B. auch eine Schwingung mit der Frequenz  $Z^{(12)} = Z^{(10)} - Z^{(20)} = 8(N - 1)Z_{\text{sol}}$  auftreten. Die möglichen Schwebungsfrequenzen  $aZ^{(j0)} + bZ^{(l0)}$  für kleine ganzzahlige  $a, b, j, l$  sind in Abb. ?? dargestellt.



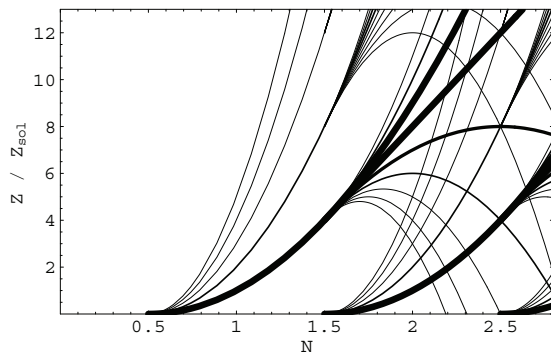


Abbildung 4.2: Abhängigkeit der möglichen Schwebungsfrequenzen von der Solitonordnung  $N$ .

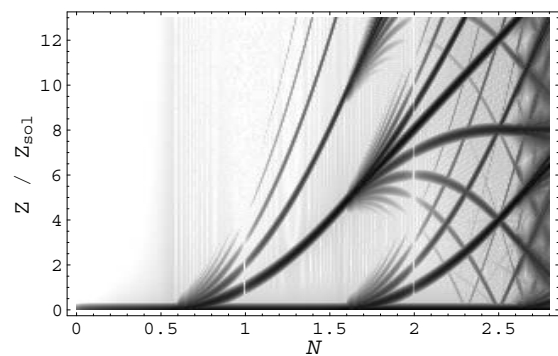


Abbildung 4.3: Leistungsspektren der SRBA als Funktion von  $N$ .

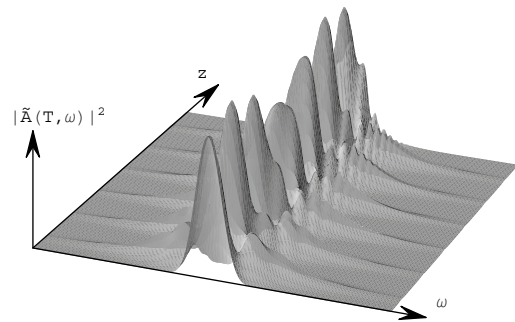
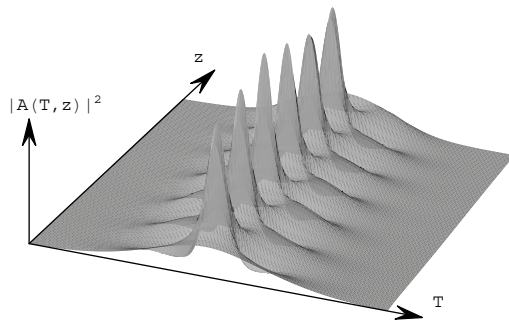


Abbildung 4.4: Zeitliche (links) und spektrale (rechts) Entwicklung eines sechsförmigen Impulses in einer Glasfaser mit  $N = 2,4$ .

„soliton-radiation beat analysis“ Um den Solitonengehalt mit „soliton-radiation beat analysis“ zu untersuchen, benötigt man eine numerische Simulation. Diese wurde hier mit Hilfe der „Split-Step-Fourier-Methode“ durchgeführt. Das damit bestimmte zeitliche bzw. spektrale Verhalten für  $N = 2,4$  – ein Fall, in dem zwei Solitonen und dispersive Wellen vorkommen – ist in Abb. ?? dargestellt. Man erkennt die Schwebung der beiden beteiligten Solitonen. Die dispersiven Wellen werden im Zeitbereich abgestrahlt und verschwinden aus dem Darstellungsbereich. Im Spektrum hingegen führen sie zu einer zusätzlichen Modulation, die in den Flanken gut sichtbar ist.

Aus der Simulation kann man einzelne Impulsparameter extrahieren. Für den einfachen Fall eines einzigen Solitons und einer dispersiven Welle  $N = 1,15$  ergeben sich unter anderem die in Abb. ?? gezeigten Impulsparameter. Obwohl alle Parameter die gewünschte Information beinhalten, ist diese maximal und konstant für den Parameter der spektralen Leistung  $|\tilde{A}(0, z)|^2$  an der Position  $\Omega = 0$ .

Diese Parameter unterzieht man nun einer gefenstereten Fourier-Transformation und erhält das in Abb. ?? (links) gezeigte Spektrum. Das Spektrum zeigt bei verschiedenen Ortsfrequenzen  $Z$  ausgeprägte Maxima, die je nach verwendeter Fensterfunktion um bis zu 20 Größenordnungen über dem Untergrundniveau liegen. Ein so hoher Dynamikbereich ist nur möglich, wenn man eine starke Apodisation durchführt. Dies verbreitert allerdings die Peaks entsprechend stark. Hier wurde eine gaußförmige Apodisation mit der Stärke  $c = 0,12$  gewählt. Für  $N = 1,15$  ist eine Identifizierung der Schwebungsfrequenz und der zugehörigen Oberwellen leicht. Für  $N = 2,40$  hingegen treten so viele Mischfrequenzen auf, dass eine einfache Zuordnung nicht möglich ist.

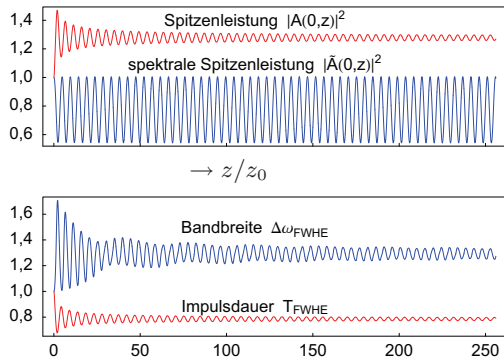


Abbildung 4.5: Entwicklung ausgewählter normierter Impulsparameter als Funktion der Position in der Faser für  $N = 1,15$  über eine Entfernung von  $32/Z_{\text{sol}} = 256$  Solitonperioden (vgl. Gl. ??).

Führt man Transformationen für verschiedene  $N$  durch und stellt die gewonnenen Leistungsspektren in einem Graustufenbild zusammen, so erhält man den in Abb. ?? gezeigten Graphen. Man erkennt eine gute Übereinstimmung mit den vorhergesagten Frequenzen, an denen Schwebung auftritt (vgl. Abb. ??). Für  $N > 0,5$  existiert das erste Soliton und es ist eine Schwebung zwischen Soliton und dispersiver Welle zu beobachten. Für  $N = 1$  verschwindet die dispersive Welle, da ein reines Soliton angeregt wird. Folglich muss auch die Schwebung zwischen Soliton und dispersiver Welle verschwinden. Bei allen ganzzahligen Werten von  $N$  sollte es somit zu keiner Schwebung zwischen Soliton und dispersiver Welle kommen. Bei  $N = 2$  ist dies auch der Fall, bis auf die Linie, die an dieser Stelle den Wert  $Z/Z_{\text{sol}} = 8$  hat. Bei dieser Linie handelt es sich um eine Schwebung zwischen den beiden beteiligten Solitonen. Die Entfernung, nach der ein Soliton zweiter Ordnung seine ursprüngliche Form reproduziert, wird auch Solitonperiode  $z_0$  [?] bzw. die Frequenz, mit der dies geschieht, „lowest common beat frequency“ (lcbf) [?] genannt. Es gilt folglich der Zusammenhang:

$$z_0 = \frac{1}{8Z_{\text{sol}}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\gamma\tilde{P}}. \quad (4.11)$$

Die Lage der Schwebungsfrequenzen sind in Abb. ?? nur mit einer endlichen Genauigkeit ablesbar. Diese Unschärfe wird in Abschnitt ?? ausführlich diskutiert.

Ein Fehler, der bei der Bestimmung der Schwelle gemacht wird, wird durch die diskrete Fourier-Transformation (DFT) verursacht. Für die niedrigsten Frequenzen der Fourier-Transformation ergibt sich immer ein relativ großer Fehler, da die Frequenzen in der Größenordnung des diskreten spektralen Abstandes zweier benachbarter Frequenzen liegt. Man kann diesen Fehler reduzieren, wenn man eine vom Autor entwickelte Variante der Fourier-Transformation benutzt [?]<sup>a</sup>, die sog. Fourier-Transformation mit Phasendrehung („Phase-Rotation Fourier Transform“, PFT). Diese Methode kann annahmefrei Zwischenwerte zwischen zwei spektralen Abtastwerten bestimmen. Das hiermit gewonnene Verhalten für  $N > 0,5$  ist in Abb. ?? dargestellt. Die N-Achse wurde quadriert, damit man eine Gerade für die Schwebungsfrequenz erhält. Man erkennt in dieser Darstellung, dass die Schwelle für die Bildung von Solitonen in der Tat bei 0,5 liegt und nicht, wie man aus Abb. ?? vermuten könnte, etwas darüber. Der mit PFT berechnete Graph ist deutlich glatter als der mit DFT bestimmte. Es verbleiben zwei restliche Fehler: Einerseits ist nun die Diskretisierung in  $N$ -Richtung offensichtlich. Dies kann durch ein dichteres Simulationsraster verbessert werden. Die verbleibende Dicke der Spur in  $Z$ -Richtung kann ebenfalls – zumindest in diesem ungestörten Fall – durch einen größeren Rechenaufwand verringert werden.

### 4.1.2 Gaußförmiger, gechirpter Impuls

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass SRBA bei der Wahl einer beliebigen Impulsform als Startbedingung dieselben Ergebnisse liefert wie die numerische IST [?]<sup>a</sup>. Für diese Vergleichbarkeit

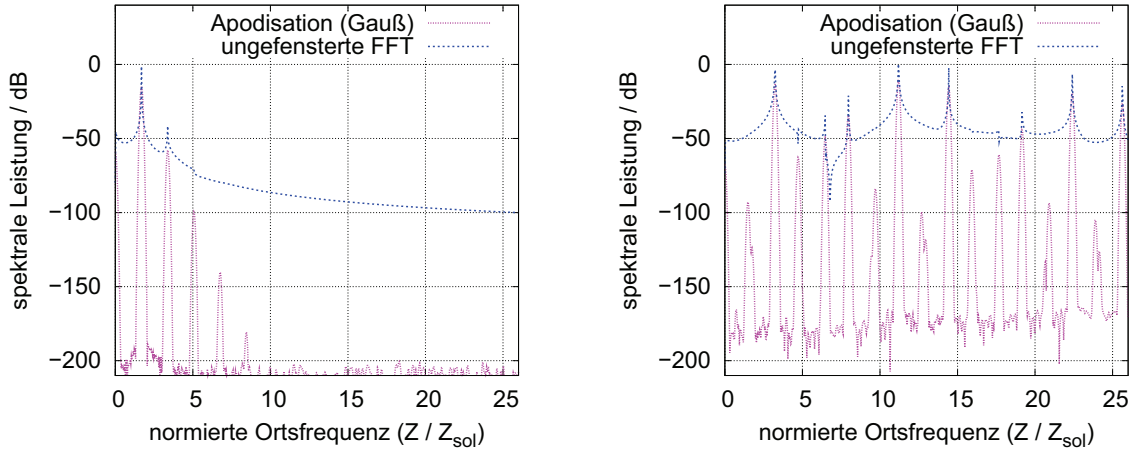


Abbildung 4.6: Logarithmisch dargestelltes Leistungsspektrum der Fourier-Transformation mit und ohne Fensterfunktion für  $N = 1,15$  (links) und  $N = 2,40$  (rechts).

wird hier die einfache NLSE als System betrachtet, da dieses integrabel ist. Eine in der Ultrakurzzeitphysik typische Impulsform ist ein gaußförmiger Impuls mit einem Chirp [?]:

$$A(T, 0) = N\kappa\sqrt{\tilde{P}} \exp\left(-\frac{1+iC}{2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right) \quad \text{mit} \quad \kappa = 2\sqrt{\frac{\sqrt{\ln(2)}}{\frac{\pi}{\text{arcosh}(3)}}} \approx 1,032. \quad (4.12)$$

Dabei ist  $C$  der Chirpparameter. Wenn man einen solchen Impuls mit einem sech-förmigen vergleichen will, so kann man fordern, dass beide dieselbe Energie und dieselbe Dauer (FWHM) besitzen sollen. Dann benötigt man den Amplitudenkorrekturfaktor  $\kappa$ . Die Beschreibung eines gechirpten Wellenpaketes ist nur in manchen Fällen analytisch möglich [?]. Es gibt aber auch numerische Lösungsansätze [?].

Als Beispiel wird nun ein gaußförmiger Impuls mit einem Chirp von  $C = 0,4$  betrachtet. Man erhält bei Variation von  $N$  und anschließender SRBA die in Abb. ?? gezeigten Spektren. Als Apodisationsstärke wurde  $c = 0,24$  gewählt und die Faserlänge wurde so gewählt, dass für  $N = 1$  die Faser  $32z_0$  lang ist. Man erkennt, dass eine Schwebung im Vergleich zur idealen Impulsform erst für größere  $N$  eintritt. Als Schwelle für das erste Soliton ergibt sich ein Wert von  $N = 0,60 \pm 0,05$  und für das zweite einen Wert von  $N = 1,8 \pm 0,1$ . Dies ist signifikant verschieden von den Werten  $0,5$  bzw.  $1,5$  für einen ungechirpten sech-förmigen Impuls.

Zum Vergleich kann man die Schwellen mit der numerischen IST ermitteln. Es ergeben sich Schwellen von  $N = 0,60 \pm 0,01$  bzw.  $1,75 \pm 0,03$ , die mit den anderen Werten im Rahmen der gegebenen Fehlerbereiche übereinstimmen. Der vergleichsweise große Fehler für SRBA liegt hier an der verwendeten Rechenzeit und ist nicht prinzipbedingt.

In Abb. ?? hat keine der Spuren eine deutliche Unterbrechung. Dies liegt darin begründet, dass ein gechirpter, gaußförmiger Impuls unabhängig von seiner Skalierung zusätzlich zum Soliton immer auch eine dispersive Wellen anregt. Ein Minimum der Abstrahlung ist dennoch zu erkennen.

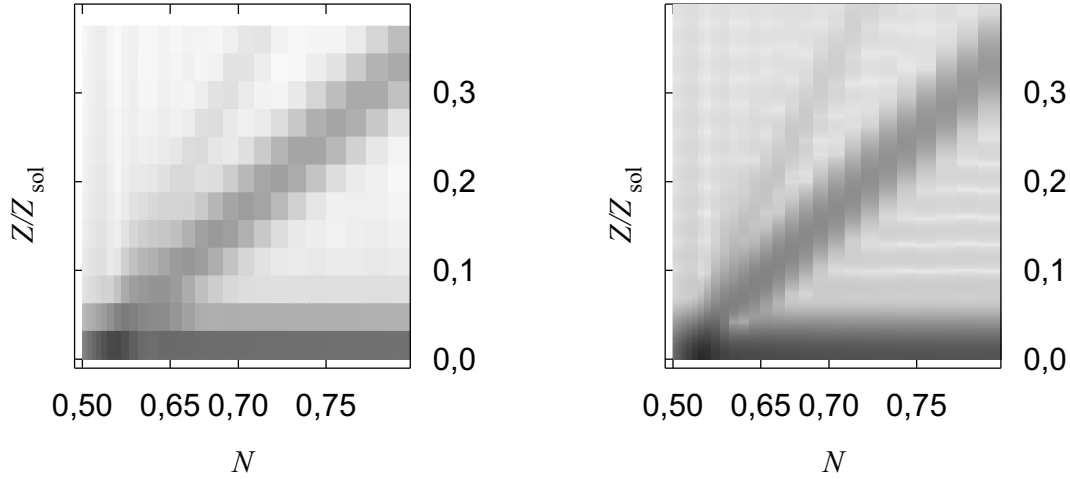


Abbildung 4.7: Ausschnitt aus Abb. ?? . Die  $N$ -Achse wurde gemäß Gl. ?? so umskaliert (quadriert), dass die Schwebungsfrequenz auf einer Geraden liegen sollte. Dies und die vorhergesagte Schwelle für ein Soliton von 0,5 ist gut zu erkennen. Links: mit DFT. Rechts: mit PFT.

## 4.2 Dispersionsalternierende Glasfaserstrecken

Als ein Beispiel eines nichtintegrablen Systems sei hier der Fall von Glasfaserstrecken erwähnt, bei denen sich die Dispersion periodisch ändert. Solche Strecken werden in der Hochgeschwindigkeitsdatenübertragung zur Steigerung der Übertragungsraten verwendet, sog. „dispersion management“ [?]. Modellieren kann man solche Strecken, indem man in der NLSE (Gl. ??) die Dispersion  $\beta_2$  durch einen ortsabhängigen Parameter  $\beta_2(z)$  ersetzt. Die Impulsausbreitung in einem solchen System wird nicht allein von der mittleren Dispersion  $\bar{\beta}$  bestimmt. Wichtig ist auch die Periodenlänge  $L_{\text{map}} = L^+ + L^-$ , welche sich aus der Summe der verwendeten Segmentlängen ergibt. Die Abweichung vom Mittelwert der Dispersion wird als Map-Stärke bezeichnet [?]:

$$S = \frac{|\beta_2^+ - \bar{\beta}| L^+ + |\beta_2^- - \bar{\beta}| L^-}{\tau^2}. \quad (4.13)$$

Eine einheitliche Definition für den Parameter  $S$  hat sich noch nicht durchgesetzt. Hier wird eine Definition verwendet, die die volle Halbwertsdauer bei der halben Höhe  $\tau$  verwendet. Im Fall konstanter Dispersion ist somit  $S = 0$ . Man verwendet Fasern mit positiver ( $\beta_2^+$ ) und negativer ( $\beta_2^-$ ) Dispersion, sodass die mittlere Dispersion  $\bar{\beta}$  nahe Null liegt. Dies hat den Vorteil, dass der Gordon-Haus-Effekt stark unterdrückt wird [?, ?]. Der Gordon-Haus-Effekt spielt in Systemen mit Verstärkern eine Rolle, da zusätzlich zum eigentlichen Signal auch spontan emittierte Photonen verstärkt werden. Dies führt zu einer veränderten Ankunftszeit der Impulse [?]. Aufgrund der hohen lokalen Dispersion wird aber gleichzeitig die Vierwellenmischung unterdrückt [?, ?].

Auch in solchen Systemen kann es zur Ausbildung von Solitonen kommen [?]. Da sich die Dispersion auf eines Wellenpaketes an der Verbindungsstelle zweier Glasfasern ändert, könnte man davon

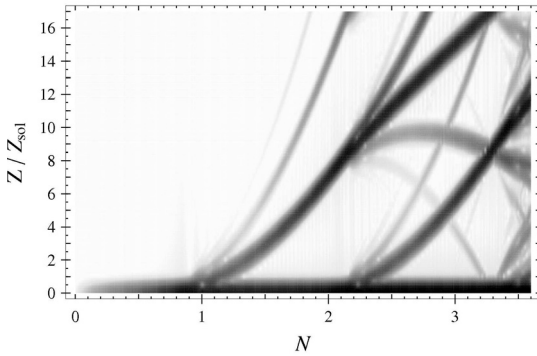


Abbildung 4.8: SRBA-Leistungsspektren als Funktion von  $N$  für eine Glasfaser mit konstanter Dispersion. Ein gechirpter gaußförmiger Impuls wird am Anfang in die Glasfaser eingekoppelt.

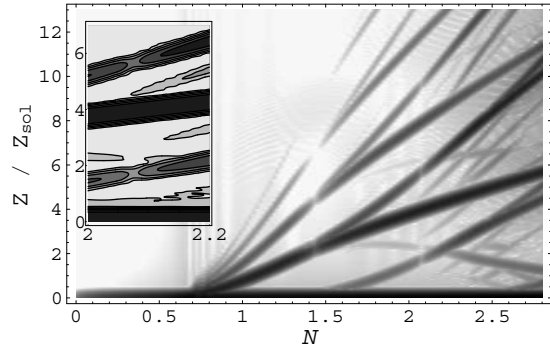


Abbildung 4.9: SRBA-Graph für eine Glasfaserstrecke mit alternierender Dispersion für eine Map-Stärke von  $S = 1,424$ . Der Bereich des Solitons zweiter Ordnung ist im Zusatzbild vergrößert dargestellt.

ausgehen, dass sich der Solitonengehalt ebenfalls scheinbar sprunghaft ändert. Allerdings ist in einer der beteiligten Glasfasersorten  $\beta_2 > 0$ , und somit sind helle Solitonen nicht möglich. Trotzdem erhält man ein qualitativ ähnliches Solitonenverhalten wie in einer homogenen Übertragungsstrecke, wenn man die Impulsform nur stroboskopisch mit  $L_{\text{map}}$  betrachtet. Quantitativ ändern sich die Parameter der Solitonen. Da ein solches System nichtintegrabel ist, kann man den Solitonengehalt mit herkömmlichen Methoden nicht bestimmen.

Man kann aber die Ausbreitung der Lichtimpulse numerisch simulieren. Aus einer solchen Simulation kann man nun Daten stroboskopisch extrahieren und mit SRBA untersuchen [?]<sup>a</sup>. Da es noch keine analytische Beschreibung für solche Solitonen gibt, wurde hier ein ungechirpter gaußförmiger Anfangsimpuls verwendet (Gl. ?? mit  $C = 0$ ), der in die Mitte der Glasfaser mit negativem  $\beta_2$  eingekoppelt wird [?]. Es gibt zwar Ansätze, die exakte Impulsform empirisch zu beschreiben [?], aber solche Impulsformen können experimentell heutzutage nicht erzeugt werden.

Die SRB-Spektren für verschiedene Eingangsamplituden für eine Übertragungsstrecke mit  $S = 1,424$  ist in Abb. ?? dargestellt. Für diese Map-Stärke kann man es erreichen, dass im günstigsten Fall bei Verwendung eines gaußförmigen Startimpulses nur  $10^{-5}$  der Gesamtenergie abgestrahlt wird. Man erkennt, dass auch in diesem Fall Solitonen gebildet werden. Ihre Schwelle ist im Vergleich zu einer Faser mit konstanter Dispersion erhöht. Bei  $N = 1,45$  ist eine Unterbrechung der Linien zu beobachten. Eine solche Energieerhöhung der Solitonen ist für solche Systeme typisch [?, ?]. Mit SRBA kann man aber zusätzlich zu diesen bereits bekannten Eigenschaften auch weitergehende Informationen gewinnen. Ab ca.  $N = 1,5$  entsteht ein weiteres Soliton, welches zusammen mit dem ersten Soliton bei  $N = 2,075$  einen nahezu reines Soliton höherer Ordnung bildet. Dies kann man besonders gut im vergrößerten Ausschnitt in Abb. ?? erkennen. Einige der Linien verschwinden in diesem Bereich, denn es handelt sich um die Schwebung von dispersiven Wellen und einem Soliton. Eine Linie bleibt nahezu unverändert. Dies ist die Schwebung zwischen den beiden Solitonen. Die zeitliche Entwicklung dieses Solitons höherer Ordnung, welches zuerst mit SRBA eindeutig nachgewiesen werden konnte [?]<sup>a</sup>, ist in Abb. ?? dargestellt. Sein Amplitudenverhältnis ist im Gegensatz zu einer homogenen Glasfaserstrecke nicht 9:1 sondern 3,3:1.

In realen dispersionsalternierenden Glasfaserstrecken kann man die Periodenlänge nicht beliebig genau abstimmen. Zum einen verändern sich die Dispersionseigenschaften entlang der Glasfaserstrecke [?]. Dies hat bereits bei Faserstrecken mit nur einer Glasfasersorte Auswirkungen auf die Ausbreitung

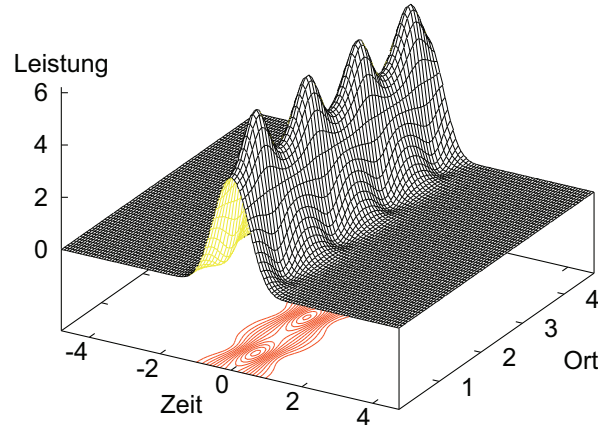


Abbildung 4.10: Zeitliche Entwicklung eines Soliton zweiter Ordnung im Fall einer Glasfaserstrecke mit alternierender Dispersion für eine Map-Stärke von  $S = 1,42$ . Die Achsen sind normiert: Die Zeit auf die FWHM-Dauer der Startbedingung, der Ort auf die Solitonperiode, die Leistung auf die Spitzenleistung eines Standardsolitons ( $N = 1$  im homogenen Fall mit mittlerer Dispersion).

[?, ?]. Zum anderen können Abweichungen in den benötigten Faserlängen auftreten. All diese Effekte beeinflussen die Solitonen so, dass diese Energie abstrahlen [?, ?]. Eine Abweichung von der exakten Periodizität von wenigen Prozent kann in manchen Fällen sogar zur Aufspaltung von Solitonen führen [?]<sup>a</sup>. Bei solchen vom Autor gefundenen Aufspaltungen kann man den Solitonengehalt ganz einfach dadurch bestimmen, dass man die neu entstandenen Solitonen einzeln untersucht, denn diese trennen sich bei Ausbreitung. Die Energieabstrahlung der Solitonen ist ähnlich der, die bei Vorhandensein von Verlusten stattfindet. Ein solches System wird im nächsten Abschnitt näher untersucht.

### 4.3 Nichtlineare Schrödingergleichung mit Verlusten

Reale Systeme unterliegen stets gewissen Verlusten. Diese Verluste verändern nicht nur die Gesamtenergie des betrachteten Systems, sondern auch den Solitonengehalt. Mithilfe einer Störungstheorie lassen sich Aussagen über Systeme mit Verlusten treffen [?, ?]. Wenn die Veränderung des Gleichungssystems gering ist, so kann man mit der IST den Solitonengehalt der ungestörten Gleichung bestimmen und so näherungsweise den Solitonengehalt des gestörten Systems ermitteln. Es gibt auch Möglichkeiten, mit einem Variationsansatz das Verhalten der Solitonen zu untersuchen [?]. Für den Fall  $Z_{\text{sol}} \ll \Lambda_{\alpha}$  sind all diese Näherungen zumindest fragwürdig. In einigen Spezialfällen ist die NLSE auch mit (speziellen) Verlusten integrierbar [?]. Die SRBA hingegen unterliegt keiner Annahme und kann den Solitonengehalt direkt bestimmen.

Konstante Verluste bewirken zunächst eine Abnahme der Gesamtenergie. Dies hat zur Folge, dass sich selbst bei moderaten Verlusten ebenfalls die Energie der Solitonen verringert, denn ein Soliton kann sich bei kleinen Störungen adiabatisch den neuen Gegebenheiten anpassen. Dies ist der Fall, wenn  $\Lambda_{\text{GVD}} = \Lambda_{\text{SPM}} \gg \Lambda_{\alpha}$  ( $L_{\text{D}} = L_{\text{NL}} \ll L_{\alpha}$ ) gilt [?, ?]. Die Stärke der Verluste  $\Lambda_{\alpha}$  hängt nur von der verwendeten Glasfaser ab, und bleibt somit bei der Ausbreitung unverändert. Die Stärken der anderen beiden Effekte hingegen werden sich adiabatisch verringern, bis sie schließlich von derselben



Größenordnung wie die der Absorption sind. Hier wird sich das Verhalten deutlich ändern. Bei abrupten Energieverlusten, welche die Solitonenergie unter die Solitonenschwelle senken (für die einfache NLSE  $N = 0,5$  bzw. 75% der Energie) reicht die verbleibende Nichtlinearität nicht mehr aus, um ein Soliton zu formen.

Die einfachste Erweiterung der NLSE mit einem Verlustterm ist:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + i\gamma |A|^2 A - \frac{\alpha}{2} A. \quad (4.14)$$

Die Gesamtenergie nimmt somit exponentiell ab.

$$E(z) = E(0) e^{-\alpha z}. \quad (4.15)$$

Gemäß der Beziehungen der Kenngrößen (vgl. Abschnitt ??) vergrößert sich somit die Impulsdauer eines Solitons

$$T_0(z) = T_0(0) e^{\alpha z}. \quad (4.16)$$

Damit nimmt auch die Stärke des dispersiven Effektes  $\Lambda_{\text{GVD}}(z) = \frac{|\beta_2|}{T_0^3(z)}$  ab, bis er an einem Punkt  $z_a$  die Stärke der Absorption  $\Lambda_\alpha = \alpha$  erreicht:

$$z_a = \frac{1}{2\Lambda_\alpha} \ln \left( \frac{\Lambda_{\text{GVD}}(0)}{\Lambda_\alpha} \right). \quad (4.17)$$

Nach dieser Entfernung hat die Dispersion dieselbe Stärke wie die Verluste erreicht ( $\Lambda_{\beta_2} = \Lambda_\alpha$ ) und die Bedingung für adiabatisches Verhalten ist verletzt.

Im Folgenden wird gezeigt, wie man den Solitonengehalt in dem hier betrachteten Fall mithilfe der inversen Streutransformation näherungsweise bestimmen kann. Anschließend wird Bestimmung mit SRBA ohne Näherungen durchgeführt und die Ergebnisse verglichen. Als Beispiel sei hier ein sechsförmiger Eingangsimpuls gewählt und so skaliert wie im Beispiel ohne Verluste. Es werden folgende Parameter zur graphischen Auftragung verwendet: Die volle Halbwertsdauer der Anfangsimpulse betrage  $\tau = 1$  ps und die Faser habe eine Dispersion von  $\beta_2 = -20$  ps<sup>2</sup>/km, einen Nichtlinearitätskoeffizienten von  $\gamma = 2,5 \cdot 10^{-3}$  1/(W m) und Verluste von  $\alpha_{\text{dB}} = 0,2$  dB/km. Die Entfernung, ab der die Adiabaticitätsbedingung verletzt wird ist somit  $z_a = 78,3$  km.

**Näherung mit inverser Streutransformation** Das Verhalten eines Wellenpaketes kann man an einer beliebigen Position  $z_s$  mit einer numerischen Simulation bestimmen [?]. Man erhält aber keine direkte Information über den Solitonengehalt. Aus den simulierten Daten kann man den Solitonengehalt näherungsweise mithilfe der inversen Streutransformation ermitteln [?, ?]. Dafür berechnet man den Streukoeffizienten  $a(\zeta, z)$ . Der Streukoeffizient  $a$  ist eigentlich unabhängig von  $z$ . Die  $z$ -Abhängigkeit erhält man aus der durch die Numerik veränderte Impulsform. Das Betragsquadrat des Streukoeffizienten  $|a(\zeta, z_s)|$  einer solchen Berechnung in einer verlustbehafteten Faser ist in Abb. ?? als Funktion des Imaginärteils von  $\zeta$  dargestellt, wobei der Imaginärteil  $\eta = \Im(\zeta)$  der Übersichtlichkeit halber so umskaliert wurde, dass er der Energie entspricht. Der Realteil  $\xi = \Re(\zeta)$  ist in diesem Beispiel gleich Null. Als Startparameter wurde dabei  $N = 1,4$  gewählt. Die Berechnung ergibt, dass ein Soliton mit der Energie von 51 pJ angeregt wird und 4,5 pJ als dispersive Welle abgestrahlt wird. Man beobachtet nun eine (im logarithmischen Maßstab) lineare Abnahme der Energie im adiabatischen Bereich. Eine Änderung dieses Verhaltens tritt ab der Stelle  $z_a$  ein. Ab hier scheint das Soliton stärkere Verluste zu erfahren, bis es schließlich bei ca.  $1,4 z_a$  keine Energie mehr hat.

**Bestimmung mit „soliton-radiation beat analysis“** Die SRBA muss modifiziert werden, um Information über den Ort des ermittelten Solitonengehaltes zu erhalten. Die verwendete Apodisation

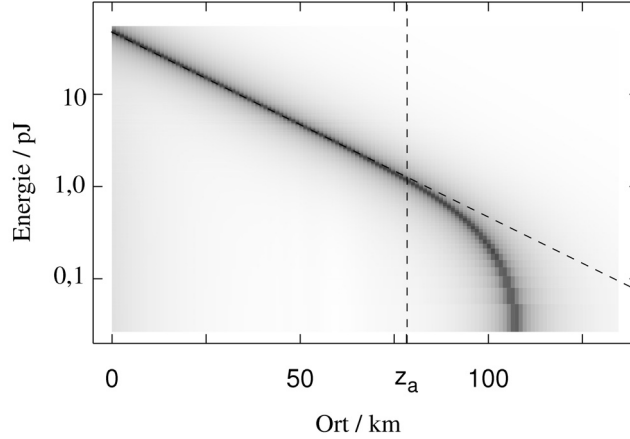


Abbildung 4.11: Entwicklung des energieabhängigen Streukoeffizienten als Funktion des Ortes in der Glasfaser  $z_s$ . Gezeigt ist  $|a(\zeta, z_s)|^2$  in einer logarithmischen Graustufendarstellung. Schwarz entspricht einer Nullstelle des Streukoeffizienten und damit einem Soliton. Zwei Hilfslinien sind gestrichelt eingezeichnet. Die schräge Linie zeigt den Energieabfall nach Gl. ?? und die vertikale markiert die Position, ab der die Adiabazitätsbedingung nicht mehr erfüllt ist (Gl. ??).

ist normalerweise zentriert. Man kann allerdings die Mitte der Apodisationsfunktion verschieben und so die gewünschte Ortsauflösung erhalten. Die Breite der Apodisationsfunktion bestimmt dabei die Ortsunschärfe. Hier soll eine gaußförmige Fensterfunktion mit verschiebbarer Filtermitte  $p$  verwendet werden:

$$f(m, p) = \exp \left[ - \left( \frac{m - p}{cM} \right)^2 \right]. \quad (4.18)$$

$p$  liegt dabei zwischen 1 und  $M$ . Aufgrund von Randeffekten erhält man nur der Bereich  $1 + c > p > M - c$  sinnvolle Ergebnisse. Eine solche Apodisation kann auf die Daten einer Simulation angewendet werden. Das Ergebnis für die spektrale Leistung an der Entwicklungsfrequenz ist in Abb. ?? dargestellt. Man erkennt eine anfänglich hohe Schwebungsfrequenz. Sowohl die Frequenz als auch die Amplitude und der Kontrast der Schwebung nehmen ab. Die genaue Untersuchung liefert die in Abb. ?? gezeigten Spektren. Dabei wurde die Frequenzachse für eine bessere Vergleichbarkeit unter Verwendung der Definition der Solitonenfrequenz und der Beziehung zwischen den Kenngrößen eines Solitons in eine Energieachse umskaliert:

$$E = 4 \sqrt{\pi \frac{|\beta_2|}{\gamma^2}} Z. \quad (4.19)$$

Die gezeigten Graphen unterscheiden sich durch die Wahl der verwendeten Unschärfe (oben  $c = 0,002$ , Mitte  $c = 0,01$ , unten  $c = 0,06$ ). Im Fall geringer Ortsunschärfe kann man am Anfang der Ausbreitung die Schwebung des angeregten Solitons mit der ebenfalls vorhandenen dispersiven Welle erkennen. Die abgelesene Energie stimmt mit der IST bestimmten Energie überein. Die Oberwellen der Schwingung sind zwar schwächer, aber trotzdem gut zu erkennen. Ab ca. 25 km werden alle Linien durch einen starken Untergrund überlagert und sind dadurch nicht mehr erkennbar. Diesen Untergrund kann man



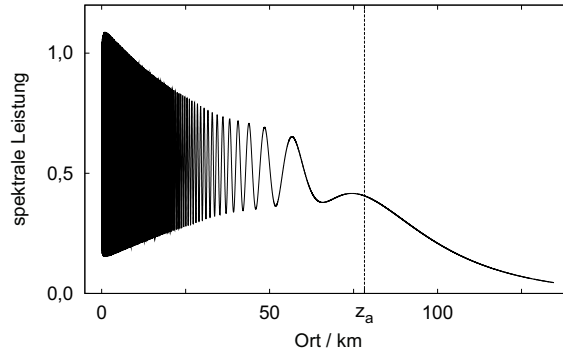


Abbildung 4.12: Numerisch bestimmte Entwicklung der spektralen Leistung an der Entwicklungsfrequenz für eine Ausbreitung mit Verlusten. Die Position  $z_a$ , ab der die Adiabaticitätsbedingung nicht mehr erfüllt ist (Gl. ??), ist markiert.

dadurch beseitigen, dass man die Ortsunschärfe erhöht. Dadurch kann man in den anderen beiden Graphen die Entwicklung des Solitons länger verfolgen: ca. 40 bzw. 60 km. Die Oberwellen sind dann aber nur noch schwach bzw. gar nicht mehr erkennbar. Auch im Fall größter Ortsunschärfe kann man den Energiewert des Solitons und seiner Oberwellen sehr genau bestimmen. Durch das kontinuierliche Abnehmen der Solitonenfrequenz ist die größte vorkommende Frequenz die der Anfangsbedingung und sie erzeugt eine scharfe obere Grenze, welche man in dem Graphen beobachten kann. Artefakte aus der Ortsunschärfe und einer zu nahen Position am Rand sind an den rechten und linken Rändern der Graphen als entsprechend dicke Balken zu erkennen.

In allen Fällen ist jedoch der Bereich jenseits von  $z_a$  nicht zugänglich. Der Grund für diese Nichtzugänglichkeit liegt nicht an dem angewendeten Verfahren, um den Solitoneninhalt zu bestimmen, sondern in einer fundamentalen Unschärferelation, der Solitonen unterliegen. Für die Beziehung zwischen der Solitonenfrequenz und der Solitonenenergie (vgl. Gl. ??) gilt:

$$E^2 = 2\pi\bar{b}Z, \quad (4.20)$$

wobei  $\bar{b} = 8|\beta_2|/\gamma^2$  eine Konstante ist, die die faserabhängigen Kenngrößen beinhaltet. Damit kann man ein Soliton beschreiben als:

$$A(T, z) = A_0(T) \cdot \exp(i2\pi Zz) = A_0(T) \cdot \exp\left(i \frac{E^2 z}{\bar{b}}\right). \quad (4.21)$$

Ein solches Wellenpaket unterliegt gemäß der Fourier-Transformation der Ungleichung:

$$(2\pi\Delta Z) \Delta z \geq \frac{1}{2}. \quad (4.22)$$

Die Kombination der Bedingungen Gl. ?? und Gl. ?? ergibt die Unschärferelation für Solitonen:

$$\boxed{\Delta E^2 \Delta z \geq \frac{\bar{b}}{2}} \quad (4.23)$$

Diese Unschärferelation zeigt das eigentliche Verhalten von Solitonen, die stark gestört werden. Im Gegensatz zu den scheinbar sehr präzisen Ergebnissen der IST liefert SRBA ungenaue Ergebnisse. Jedoch ist es gerade diese Ungenauigkeit, die das Verhalten der Solitonen bestimmt. Die scheinbare

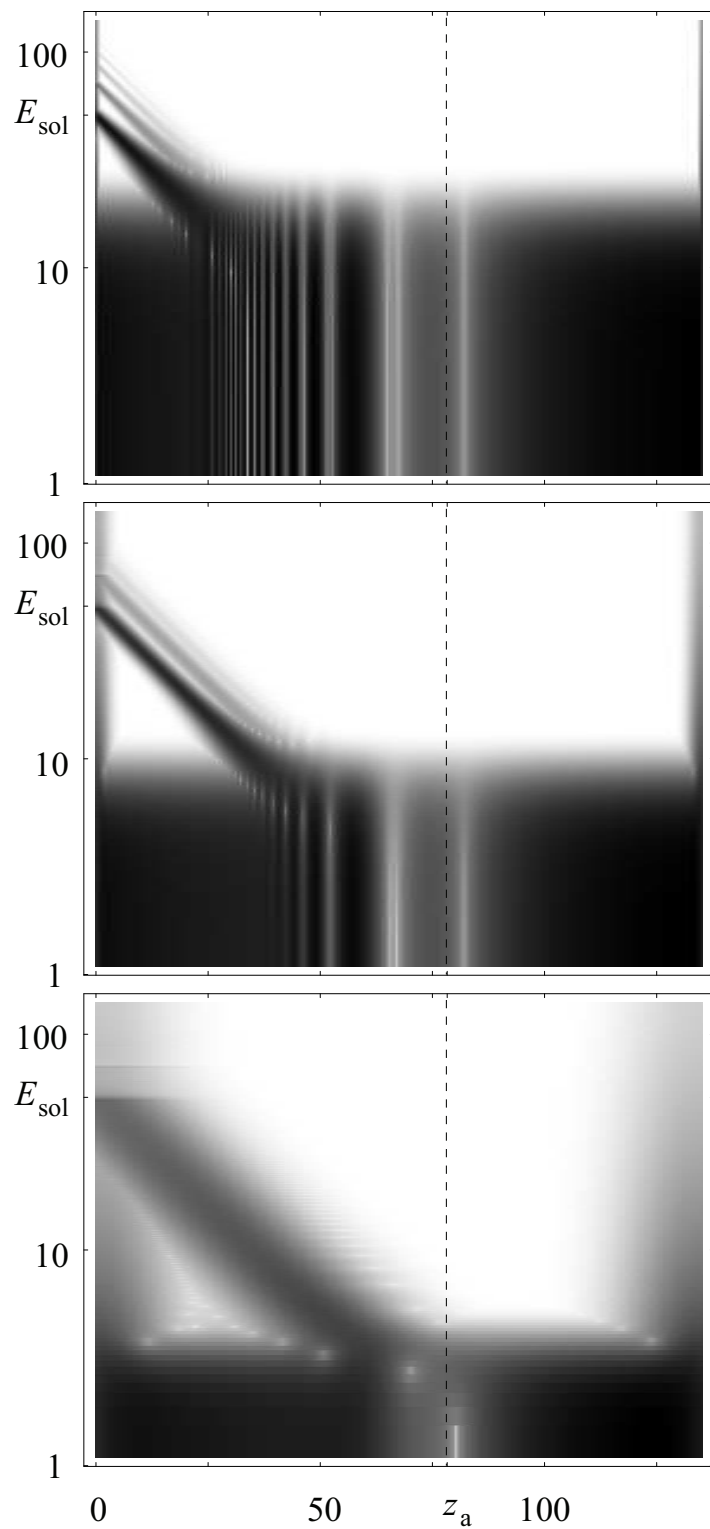


Abbildung 4.13: Lokale Schwebungsanalyse im Graustufenbild als Funktion des Ortes in der Glasfaser. Das betrachtete System ist identisch mit dem in Abb. ???. Die Ortsunschärfe ist für die drei Graphen verschieden: Oben 190 m, in der Mitte 952 m und unten 5,71 km. Die Position  $z_a$ , ab der die Adiabaticitätsbedingung nicht mehr erfüllt ist (Gl. ??), ist markiert.

Genauigkeit von IST liegt in der ungerechtfertigten Annahme, dass sich der Solitonengehalt nicht ändert.

Diese Unschärferelation für die Nichtlineare Schrödingergleichung ist eine nichtlineare Erweiterung der Unschärferelation für die Schrödingergleichung der Quantenmechanik:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi. \quad (4.24)$$

$\psi$  ist die Wellenfunktion eines Teilchens und  $m$  seine Masse. Hier wird das Potential  $V$  nicht durch die Wellenfunktion selbst erzeugt, sondern von außen angelegt.  $\hbar$  ist das Plancksche Wirkungsquantum. Stationäre Zustände haben eine ähnliche Form wie Gl. ??:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \cdot \exp(-i\omega t) = \psi(\vec{r}) \cdot \exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right). \quad (4.25)$$

Die Fourier-Transformation ergibt hier eine Unschärfe von

$$\Delta\omega\Delta t \geq \frac{1}{2}. \quad (4.26)$$

Zusammen mit der Einstein'schen Beziehung zwischen der Frequenz und der Energie

$$E = \hbar\omega \quad (4.27)$$

ergibt sich hier die Unschärferelation der linearen Schrödingergleichung [?]:

$$\Delta E\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (4.28)$$



## Kapitel 5

# Experiment zur Messung des Solitonengehaltes

Wie in den vorherigen Abschnitten gezeigt wurde, kann man den Solitonengehalt sowohl analytisch als auch numerisch für die Nichtlineare Schrödingergleichung bestimmen. Jedoch ist das Messen des Solitonengehaltes schwierig, wenn sich die beteiligten Solitonen räumlich und zeitlich überlappen. Dies ist z. B. bei einem Soliton höherer Ordnung, bei einem Breather und bei gebundenen Solitonen der Fall. Als mögliche Anwendung einer solchen Messung wurde beispielsweise die Verbesserung der Datenübertragung vorgeschlagen. Anstatt nur ein Bit pro Impuls zu übertragen, könnte man in den Eigenwerten der Solitonen mehrere Bits pro Impuls kodieren. Hasegawa verwendete hierfür den Begriff *eigenvalue communication* [?, ?]. Für eine Anwendung in der Datenübertragung ist es allerdings ausreichend, die beteiligten Impulse nach ihrer Gesamtenergie zu unterscheiden. Für ein besseres Verständnis der Vorgänge hingegen ist die Kenntnis des Solitonengehaltes hilfreich.

Bisher gab es nur wenige Versuche, den Solitonengehalt experimentell zu bestimmen. Eine naheliegende Methode wäre es, die Impulsform zu messen und mit Hilfe der Inversen Streutheorie [?] den Solitonengehalt zu berechnen. Einen geeigneten Algorithmus hierfür findet man z. B. in [?]. Um den Solitonengehalt zu bestimmen, müssen zum einen die Faserparameter mit hinreichender Genauigkeit bekannt sein. Diese kann man mit gängigen Methoden messen [?]. Zum anderen benötigt man die Impulsform in Amplitude und Phase, um daraus die zugrundeliegenden Eigenwerte zu bestimmen. Eine solche Messung ist nur langsamer realisierbar, als es für gängige Datenübertragungsraten nötig wäre. Zusätzliche Schwierigkeiten treten auf, wenn der Überlagerungszustand von mehreren Solitonen aus Teilen besteht, die durch eine Nullstelle getrennt sind. Dies ist z. B. beim Solitonenmolekül der Fall. Die Phasenbeziehung zwischen den Teilen kann mit herkömmlichen Messungen, wie z. B. FROG<sup>1</sup> oder SPIDER<sup>2</sup>, nicht immer ermittelt werden, wenn im Spektrum Nullstellen auftreten. Eine vollständige Charakterisierung von komplizierten Überlagerungszuständen von Solitonen ist mit einem neuartigen Verfahren, dem sog. VAMPIRE<sup>3</sup>, möglich. Die vollständige Messung von Amplitude und Phase eines Solitonenmoleküls konnte von Hause et al. zum ersten Mal experimentell gezeigt werden [?]<sup>a</sup>.

Eine Methode, um den Solitonengehalt experimentell zu bestimmen, könnte mit Hilfe einer geeigneten Solitonenaufspaltung („*soliton fission*“) realisiert werden, z. B. unter Verwendung der Raman-induzierten Solitonfrequenzverschiebung („*Raman-induced soliton self-frequency shift*“ [?]), [?]. In neuartigen photonischen Kristallfasern lässt sich dieses Phänomen leicht beobachten [?]. Der sortierende Charakter der Raman-induzierten Solitonfrequenzverschiebung wird ebenfalls diskutiert, um die Da-

---

<sup>1</sup>FROG: frequency-resolved optical gating [?]

<sup>2</sup>SPIDER: spectral phase interferometry for direct electric-field reconstruction [?]

<sup>3</sup>VAMPIRE: very advanced method of phase and intensity retrieval of electric-fields [?]

tenübertragungsraten zu verbessern [?].

Hier wird nun vorgeschlagen, den Solitonengehalt mit Hilfe der Kopplung von Solitonen und dispersiven Wellen zu messen. Dazu benötigt man eine von Null verschiedene Dispersion dritter Ordnung, wobei der Effekt der Dispersion zweiter Ordnung wesentlich größer als der Effekt der Dispersion dritter Ordnung sein sollte. Dies kann man durch den spektralen Abstand zwischen der Wellenlänge der beteiligten Solitonen und der Wellenlänge, bei der die Dispersion zweiter Ordnung verschwindet, einstellen [?]. Die benötigten Werte sind von derselben Größenordnung, wie sie in typischen Glasfasern vorkommen.

## 5.1 Erweiterte Analyse des Solitonengehaltes

Für die vollständige Charakterisierung von Solitonen benötigt man nicht nur deren Energie, sondern auch ihre Geschwindigkeit. Handelt es sich ausschließlich um Solitonen, bei denen die Frequenzverstimmung  $\Omega$  Null ist, so ist die Bestimmung mit dem bisher vorgestellten Verfahren möglich. In allen anderen Fällen muss man die SRBA erweitern. Das Verständnis der Vorgänge führt auf eine Methode, mit der der Solitonengehalt eines Impulses durch simples Messen eines Leistungsspektrums am Ende seiner Ausbreitung durch eine Glasfaser zu bestimmen.

Im Folgenden wird gezeigt, wie man die SRBA so erweitern kann, dass mit ihr die Energie und die Geschwindigkeit der Solitonen bestimmt werden können. Diese beiden Parameter sind auch das grundlegende Ergebnis einer Berechnung mit der Inversen Streutheorie [?]. Hier wird dieses Ergebnis auch für nichtintegrable Systeme bestimmbar. Die Grundidee basiert auf dem Umstand, dass es für jede Frequenz ein Ruhesystem gibt, in dem sich die Phase der dispersiven Welle nicht verändert. Mit SRBA kann man nun die Interferenz eines Solitons mit dieser Referenzphase wellenlängenselektiv bestimmen und die Energie der zugehörigen Solitonen ermitteln.

Als Beispiel diene hier die Erweiterung der Nichtlinearen Schrödingergleichung ?? um einen Term, der die Wirkung der Dispersion dritter Ordnung beschreibt:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \frac{1}{6}\beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} + i\gamma |A|^2 A. \quad (5.1)$$

Diese Erweiterung verändert das Verhalten eines Solitons [?].

Da hier die Schwebung zwischen einem Soliton und der dispersiven Welle untersucht werden soll, eignet sich ein sechsförmiger Eingangsimpuls mit  $N = 1, 2$ , da dieser beide Komponenten erzeugt. Um die Schwebungsstruktur zu berechnen, benötigt man sowohl die Phasenentwicklung des Solitons als auch die Phasenentwicklung der dispersiven Welle. In dieser Arbeit war bisher eine detaillierte Betrachtung der Phasenentwicklung der dispersiven Welle nicht notwendig. Sie wird erst notwendig, wenn sich mehrere Solitonen nicht in einem gemeinsamen Schwerpunktsystem beschreiben lassen, sie also unterschiedliche Geschwindigkeiten besitzen. Die Phasenentwicklung der dispersiven Welle ist gegeben durch

$$\phi_{\text{disp}}(z) = \left( \frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\beta_3}{6}(\omega - \omega_0)^3 \right) z, \quad (5.2)$$

wobei  $\omega_0$  die Kreisfrequenz ist, für welche im Schwerpunktsystem keine Phasendrehung der dispersiven Welle erfolgt. Die Phasenentwicklung des ersten Solitons in einem System, welches näherungsweise durch die NLSE beschrieben werden kann, ist gegeben durch

$$\phi_{\text{nl}}(z) = (2N - 1) \frac{1}{2} \gamma \hat{P} \kappa z, \quad (5.3)$$

wobei  $\kappa$  ein Korrekturfaktor ist. Dieser Korrekturfaktor ist nötig, da bei einer Abweichung vom ungestörten System nicht die gesamte eingestrahlte Energie dazu benutzt werden kann, ein Soliton zu

formen.  $\kappa$  ist näherungsweise 1, wenn die Störung gering ist. Der genaue Wert für  $\kappa$  ist nicht von vornherein, sondern erst nach der Bestimmung des Solitonengehaltes bekannt.

Die Schwebung ist bestimmt durch den Unterschied in den beteiligten Phasenentwicklungen. Da es sich um eine nichtlineare Ausbreitung handelt, müssen auch die Harmonischen der Solitonfrequenzen berücksichtigt werden. Sie sind gegeben durch

$$\Delta\phi = \phi_{\text{disp}}(z) + m\phi_{\text{nl}}(z), \quad (5.4)$$

wobei  $m$  eine ganze Zahl ist (negativ, Null oder positiv).

Die gesuchte Schwebungsstruktur wird nun an einem konkreten Beispiel mit folgenden Werten exemplarisch berechnet:  $\beta_2 = -20 \cdot 10^{-27} \frac{\text{s}^2}{\text{m}}$ ,  $\beta_3 = -20 \cdot 10^{-40} \frac{\text{s}^2}{\text{m}}$ ,  $\gamma = 2,5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{Wm}}$ ,  $T_0 = \frac{1 \text{ ps}}{\text{arcosh}(3)}$  (Halbwertsdauer 1 ps). Die mittlere Wellenlänge sei 1500 nm, was einer Frequenz von ungefähr 200 THz entspricht. Mit diesen Werten ist die Stärke der Dispersion dritter Ordnung um eine Größenordnung geringer als die der Dispersion zweiter Ordnung ( $\Lambda_{\beta_2} \gg \Lambda_{\beta_3}$ ), sodass die Messung das zu messende System nur wenig stört.

Man kann nun alle beschriebenen Phasenentwicklungen auf die zugehörige Ausbreitungsstrecke normieren  $\frac{\Delta\phi}{z}$  und als Funktion der Frequenz auftragen. Dies ist in Abb. ?? gezeigt. Die horizontal ver-

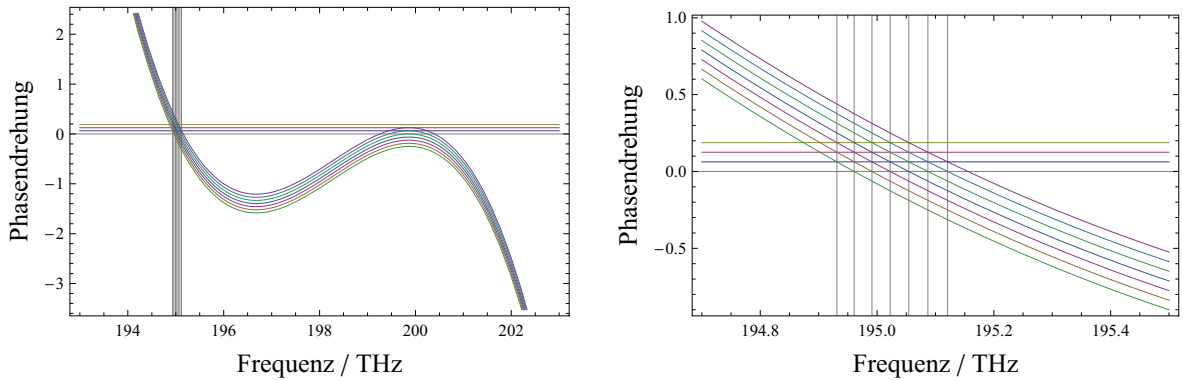


Abbildung 5.1: Phasenentwicklung einer dispersiven Welle (Gl. ??), eines Solitons (Gl. ??) und seiner Harmonischen sowie einige Mischfrequenzen (Gl. ??) für ( $N = 1,2$ ).

laufenden Phasenentwicklungen der nichtlinearen Anteile (Soliton und Oberwellen) und die geschwungenen Phasenentwicklungen der dispersiven Anteile haben für gewisse Frequenzen Schnittpunkte. Der Bereich der Schnittpunkte ist im rechten Teil der Abb. ?? vergrößert dargestellt. Die Schnittpunkte liegen bei 194,931 THz, 194,961 THz, 194,991 THz, 195,022 THz, 195,054 THz, 195,087 THz und 195,121 THz, welche durch entsprechende Gitterlinien hervorgehoben sind.

Bedingt durch die verschiedenen Phasenentwicklungen für die dispersive Welle und das Soliton kommt es zu einer Schwebung zwischen beiden. Diese kann man mit der SRBA untersuchen. Aus einer numerischen Simulation bestimmt man für jede optische Frequenz die Entwicklung der spektralen Leistungsdichte als Funktion von  $z$ . Diese kann man für jede optische Frequenz einer Fourier-Transformation unterziehen. Das Ergebnis dieser Transformationen ist in Abb. ?? dargestellt. Dabei ist es anschaulicher, nicht die Phasenentwicklung zu benutzen, sondern die zugehörige Frequenz, mit der sich die Phase bei der Ausbreitung durch die Faser um  $2\pi$  dreht. Die erzielte Auflösung der Ortsfrequenzen ist einerseits gegeben durch die Faserlänge, welche hier 512 Solitonperioden ist, und andererseits durch die gaußförmige Apodisationsfunktion, deren Stärke hier  $c = 0,05$  gewählt wurde. Da das Vorzeichen einer Frequenz mit einer Fourier-Transformation von rein reellen Werten nicht bestimmt werden kann, ähnelt Abb. ?? der Abb. ??, wobei nur positive Schwebungsfrequenzen vorkommen. Für die Zentralfrequenz von 199,9 THz ist das SRB-Spektrum identisch mit der in Abschnitt ??

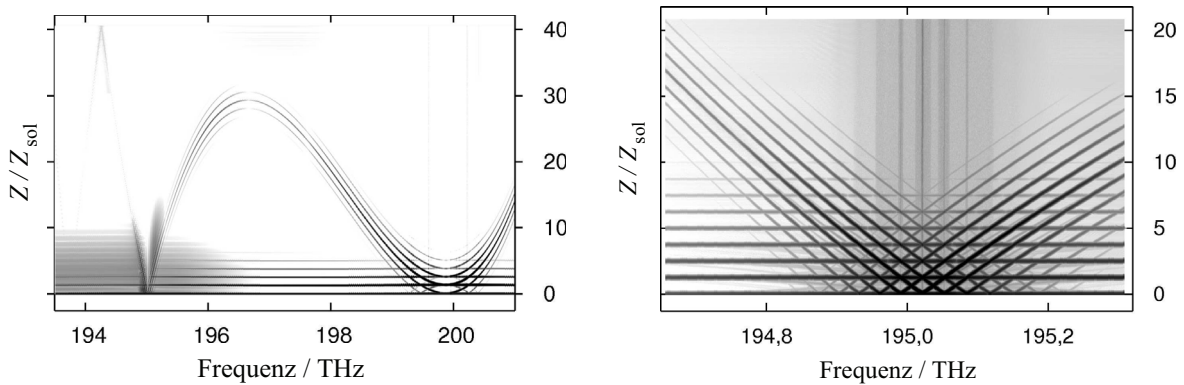


Abbildung 5.2: SRB-Spektren als Funktion der Frequenz der zu untersuchenden spektralen Komponente für  $N = 1,2$ . Die spektrale Leistungsdichte ist als Grauskala dargestellt. Die rechte Abbildung ist ein vergrößerter Ausschnitt der linken Abbildung.

betrachteten Darstellung des SRB-Spektrums. Bei Abweichung von der Zentralfrequenz kann man die dispersiven Anteile und die Solitonen unterscheiden. Die Solitonen erzeugen die horizontalen Geraden, wohingegen die dispersiven Wellen dem Verlauf der Dispersion folgen. Bemerkenswert ist, dass die horizontalen Geraden auch in dem Frequenzbereich zu erkennen sind, in dem die Dispersion zweiter Ordnung positiv ist ( $\beta_2 > 0$ ), da es für positive  $\beta_2$  keine helle Solitonen gibt. Der Bereich der Kreuzungspunkte zwischen dispersiver und nichtlinearer Phasenentwicklung ist im rechten Teil von Abb. ?? mit größerer Auflösung zu erkennen. Das Verhalten stimmt gut mit der Vorhersage überein. Man erkennt jedoch zahlreiche weitere Linien, da prinzipiell alle Mischfrequenzen sichtbar sein sollten. Es gibt theoretisch unendlich viele solcher Mischfrequenzen, aber nur die, die durch den Dynamikbereich der Simulation (der 20 Größenordnungen beträgt) abgedeckt werden, sind auch sichtbar.

Wird mehr Leistung in die Glasfaser eingestrahlt, entstehen mehrere Solitonen mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Wird beispielsweise  $N = 1,9$  gewählt und steht folglich  $N^2 = 3,61$  mal mehr Energie zur Verfügung, als für ein Standardsoliton ( $\beta_3 = 0$ ) benötigt wird, so werden zwei Solitonen angeregt. Das SRB-Spektrum ist für diesen Fall in Abb. ?? gezeigt. Man erkennt verschiedene Parabeln und horizontale Linien. Die Scheitelpunkte der Parabeln geben Aufschluss über die gesuchten Solitonenparameter: Die Stelle der Scheitelpunkte entspricht der optischen Frequenz der beteiligten Solitonen und die Schwebungsfrequenz  $Z$  entspricht ihrer Energie. Die Mischfrequenz der beiden parabelförmig verlaufenden Ortsfrequenzen liegt auf der schrägen Geraden. Diese Mischfrequenz ist Null, wenn sich die beiden Parabeln schneiden. Da sich die Solitonen im Zeitbereich für die hier gezeigten Fälle nicht überlappen, kann man das Verhalten der beteiligten Solitonen mit den mit SRBA ermittelten Werten vergleichen. Das zeitliche Verhalten stimmt mit dem bestimmten Solitonengehalt überein.

## 5.2 Prinzip der experimentellen Messung des Solitonengehaltes

An den Kreuzungspunkten der Solitonen mit der dispersiven Welle gibt es kein Anzeichen dafür, dass eine Koexistenz von Soliton und dispersiver Welle unterdrückt wird. Vielmehr kommt es zu einer starken Kopplung zwischen beiden [?], was zu einer spektralen Signatur bei der Ausbreitung in einer Faser führt. Aus der Simulation, die zu Abb. ?? gehört, erhält man das in Abb. ?? dargestellte optische Spektrum nach der Ausbreitung durch die Faser. Es entsteht eine schmalbandige Struktur



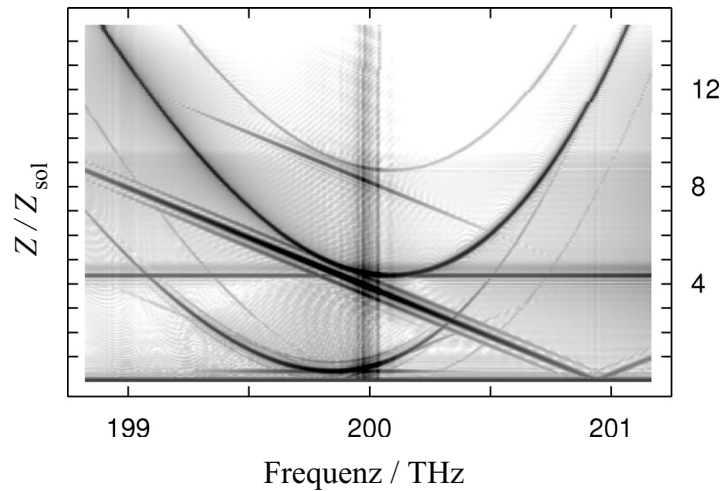


Abbildung 5.3: Dieselbe Abbildung wie Abb. ?? jedoch mit höherer Eingangsleistung ( $N = 1,9$ ). Man erkennt zwei Solitonen mit den Kenngrößen  $(0,5 Z_{\text{sol}}; 199,86 \text{ THz})$  und  $(4,3 Z_{\text{sol}}; 200,09 \text{ THz})$ , die an den Scheitelpunkten abgelesen werden können.

im linken Teil des Spektrums. Diese ist in Abb. ?? (rechts) vergrößert dargestellt, wobei dieselben Gitterlinien eingezeichnet sind wie in Abb. ?. Man erkennt die Zugehörigkeit der spektralen Peaks und der Kopplung zwischen Solitonen und dispersiven Wellen, bei der die Solitonen Energie in dispersiven Wellen abstrahlen. Dieser Energietransfer ist an den Kreuzungspunkten sehr effizient, da die Phasenentwicklung der jeweiligen Solitonen und der dispersiven Wellen gleich sind. Für Abweichungen hiervon verändert sich der Phasenunterschied und es wird wieder Energie zurückgekoppelt. Dies führt zu sinc-förmigen<sup>4</sup> Peaks im Spektrum, deren Breite mit zunehmender Ausbreitung in der Faser abnimmt.

Ein ähnlicher Prozess des Energietransfers zwischen einem Soliton und einer dispersiven Welle wird unter anderem auch in Lasersystemen beobachtet. Dieser wird beispielsweise in einem modengekoppelten Titan-Saphir-Laser mit hoher Dispersion dritter Ordnung beschrieben [?]. In solchen modengekoppelten Lasersystemen, in denen starke Verluste und entsprechende Verstärkung periodisch vorkommen, kann diese Störung ebenfalls eine Kopplung zwischen den Solitonen und der dispersiven Welle bewirken [?]. Für verschwindende Dispersion dritter Ordnung liegen die so erzeugten spektralen Peaks symmetrisch zur Zentralfrequenz der Solitonen.

Verschiebt sich die Solitonenfrequenz, so verschiebt sich das spektrale Muster um denselben Wert, was die Bestimmung der Zentralfrequenz des beteiligten Solitons ermöglicht. Die Struktur ist eine Abbildung des SRB-Spektrums auf das optische Spektrum und enthält folglich dieselbe Information wie das SRB-Spektrum – insbesondere auch die Energie des beteiligten Solitons bzw. der beteiligten Solitonen. Die Auflösung im optischen Spektrum wird durch die Steilheit der Projektionslinie bestimmt, also durch die Steigung der Phasenentwicklung der dispersiven Welle. Da sich die Steigung der Dispersionskurve mit der optischen Frequenz ändert, erhält man eine nichtlineare Projektion. Deswegen muss man eine entsprechende Nachkalibrierung der Achse berücksichtigen. Die Verzerrung ohne diese Nachkalibrierung ist jedoch gering.

In dem prinzipiell messbaren optischen Spektrum nach der Faser kann man somit den Solitonengehalt ablesen (vgl. Abb. ??). Die Frequenz des Solitons wird als Abweichung der SRB-Struktur von der

<sup>4</sup>sinc: Sinus cardinalis

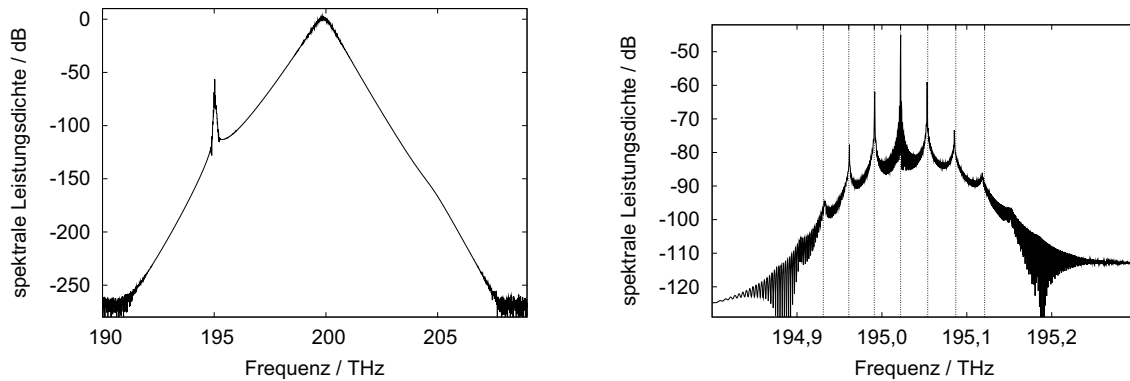


Abbildung 5.4: Optisches Spektrum nach der Glasfaser unter Berücksichtigung von Dispersion dritter Ordnung. Rechts ist der Bereich an denen sich Schwebungsfrequenz kreuzen vergrößert dargestellt. Zusätzlich sind die Frequenzen der Kreuzungspunkte, die auch in Abb. ?? hervorgehoben sind, markiert.

Referenzfrequenz bestimmt. Als Referenzfrequenz kann man prinzipiell eine beliebige Frequenz wählen, die dann das Schwerpunktsystem bestimmt. Im hier gezeigten Fall kennt man die Dispersion und kann ein Schwerpunktsystem wählen, in dem die Startbedingung ruht. Es ergibt sich eine Referenzfrequenz von 195,054 THz. Diese entspricht nicht dem größten Peak, sondern in diesem Fall demjenigen rechts davon. Der größte Peak (bei 195,022 THz) ist von 195,054 THz gerade soweit entfernt, wie es der zugehörigen Solitonenenergie entspricht.

Wenn man die Dispersion dritter Ordnung verändert, so verändert sich die absolute Lage der hier betrachteten charakteristischen Struktur und insbesondere die Referenzfrequenz. Hier sei dies am Beispiel von der halben Dispersion dritter Ordnung demonstriert:  $\beta_3 = -10 \cdot 10^{-40} \frac{\text{s}^2}{\text{m}}$ . Der Einfluss der Dispersion dritter Ordnung ist insgesamt geringer und die Struktur liegt im Bereich von 190 THz. Die Zentralfrequenz beträgt nun 190,312 THz.

Um ähnliche SRB-Graphen wie im Abschnitt ?? zu erhalten, kann man nun ebenfalls die Eingangsamplitude  $N$  skalieren. Trägt man die normierten optischen Spektren nach der Ausbreitung für verschiedene  $N$  auf, so ergibt sich das in Abb. ?? gezeigte Graustufenbild. Für kleinere  $N$  als hier dargestellt liegt das Untergrundniveau über dem Niveau des Signals. Man erkennt, dass für kleine  $N$  ein Soliton erzeugt wird. Mit größer werdendem  $N$  nimmt die Energie dieses Solitons nahezu linear zu, was man an der Auffächerung des Signals ablesen kann. Die Geschwindigkeit des gebildeten Solitons bleibt weitestgehend konstant. Ab  $N = 1,7$  ändert sich dieses Verhalten. Es wird ein weiteres Soliton gebildet, was man an der Auffächerung der einzelnen Spuren erkennen kann, die ab  $N = 1,9$  in der Abb. ?? deutlich zu erkennen sind. Die Frequenz (Geschwindigkeit) des Solitons verringert sich deutlich.

### 5.3 Beispielmessung

Hier wird eine Beispielmessung gezeigt, in der die SRB-Signatur experimentell bestimmt wird. Als Lichtquelle wurde ein OPO-System verwendet, welches nahezu bandbreitenbegrenzte Impulse ( $C = 0,3$ ) mit der FWHM-Dauer von 250 fs erzeugt. Die Wiederholfrequenz beträgt 56 MHz. Verwendet wurde eine 4,3 km lange, dispersionsverschobene Glasfaser (TrueWave-SRS-Faser von OFS<sup>5</sup>), die ein

<sup>5</sup>OFS, 2000 Northeast Expressway, Norcross, Georgia 30071, USA

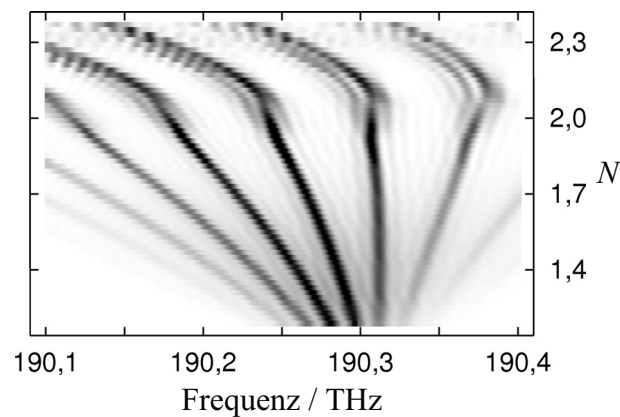


Abbildung 5.5: Normierte optische Spektren am Ausgang der Faser in Graustufendarstellung als Funktion der Solitonenordnung  $N$ . Diese Darstellung entspricht dem SRB-Graphen (vgl. beispielsweise Abb. ??).

negatives  $\beta_2$  für Wellenlänge größer als 1451 nm hat. Das OPO-System wurde so eingestellt, dass es Impulse mit einer mittleren Wellenlänge von ca. 1460 nm emittiert.

Man erhält das in Abb. ?? gezeigte Spektrum. Die mittlere Leistung in der Faser ist dabei 0,8 mW. Man erkennt die Analogie zur Abb. ?. Auch hier entsteht jenseits der Nullstelle (206,6 THz) der Dispersion ein breiter Sockel, auf dem eine Abfolge von Spitzen sitzt. Als Vergleich ist eine Simulation mit gemessenen Faser- und Impulsparametern in Abb. ?? gezeigt. Zusätzlich zur Dispersion dritter Ordnung wurde auch der Raman-Effekt berücksichtigt, der in diesem gezeigten Fall ( $N = 0,8$ ) allerdings nur eine untergeordnete Rolle spielt. Bei Veränderung der Eingangsenergie (von 0,5 mW bis 1,7 mW) hingegen verschiebt sich die SRB-Struktur um ca. 3 THz zu größeren Frequenzen. Aus der Simulation kann man erkennen, dass die Peaks schmaler werden, wenn man eine längere Glasfaser verwendet. Eine solche Glasfaser stand leider nicht zur Verfügung. Die Auflösung der SRB-Struktur ist auch begrenzt durch die Auflösung von 10 GHz des verwendeten Spektrometers. In der Simulation sind sowohl das Rauschen als auch der Sockel, auf dem sich die SRB-Signatur befindet, geringer. Beides liegt an der idealisierten Simulation. Eine Veränderung der Impulsform erhöht auch in der Simulation den Sockel. Auch wenn man die Messung in vielen Details verbessern kann, so kann man dennoch gut erkennen, dass der Solitonengehalt prinzipiell messbar ist.

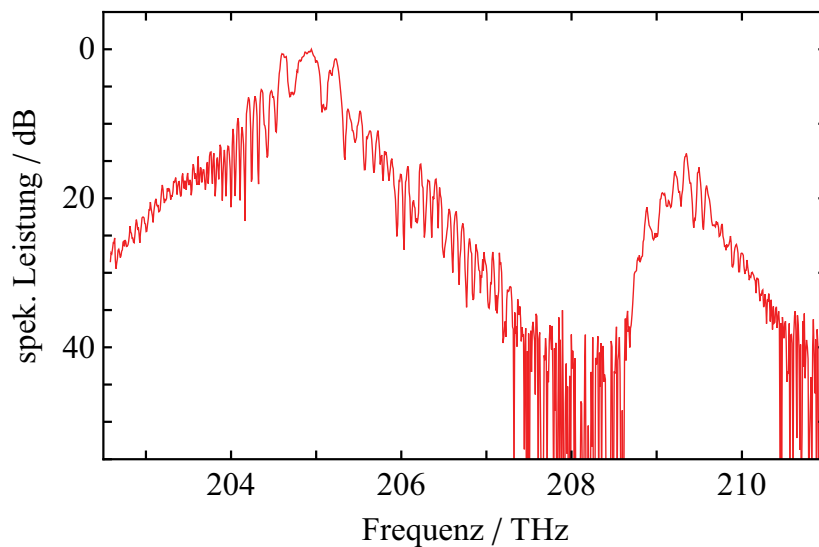


Abbildung 5.6: Gemessenes optisches Spektrum nach der Glasfaser mit einer Auflösung von 10 GHz. Bei 205 THz befindet sich ein Soliton, welches mit dispersiven Wellen interferiert. Bedingt durch das andere Vorzeichen von  $\beta_3$  als in Abb. ?? befindet die SRB-Signatur hier auf der rechten Flanke zwischen 209 und 210 THz.

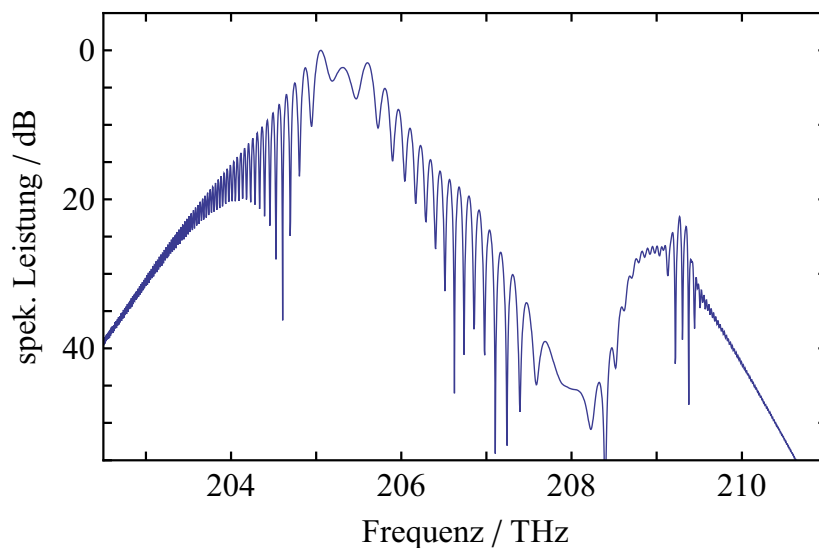


Abbildung 5.7: Simuliertes optisches Spektrum nach der Glasfaser mit den selben Parametern wie im Experiment. Es ist eine gute Übereinstimmung mit der Messung in den wesentlichen Punkten zu erkennen (vgl. Abb. ??).

# Kapitel 6

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein neues, vom Autor entwickeltes Verfahren, die sog. „soliton radiation beat analysis“ (SRBA), zur Bestimmung des Solitonengehaltes von Lichtimpulsen in Glasfasern vorgestellt. Zunächst wurden Solitonen als ein universelles Phänomen erörtert und einige Bereiche vorgestellt in denen diese vorkommen. Solitonen haben die Eigenschaft, dass sie sich trotz Dispersion und Nichtlinearität formstabil ausbreiten können. Bei Kollision mit anderen Solitonen bleiben sie ebenfalls stabil. Da Solitonen robust gegenüber Störungen sind, eignen sie sich hervorragend als fundamentale Bits für die Datenübertragung. Es wurden Effekte diskutiert, die die Ausbreitung von Lichtimpulsen in Glasfasern beeinflussen. In realen Datenübertragungstrecken treten zahlreiche Effekte auf, die es erschweren, den Solitonengehalt der gestörten Solitonen zu bestimmen. Wie dies dennoch erreicht werden kann, ist der Grundgedanke dieser Arbeit.

SRBA ist im Gegensatz zu herkömmlichen Verfahren, beispielsweise der inversen Streutheorie, in der Lage, den Solitonengehalt ohne weitere Annahmen zu ermitteln. Es wurde gezeigt, dass in den Bereichen, in denen der Solitonengehalt auch mit herkömmlichen Verfahren ermittelt werden kann, SRBA identische Ergebnisse liefert. Bei der Betrachtung von Lichtimpulsen in Glasfasern gibt es zwei Problemstellungen. Zum einen möchte man die Entwicklung eines beliebigen Ausgangszustandes bestimmen können. Dies ist mit SRBA möglich und wurde anhand eines in den Experimenten typischen Lichtimpulses, einem gechirpten gaußförmigen Impuls, exemplarisch gezeigt. Im Fall einer homogenen Glasfaser stimmen die Ergebnisse mit denen der inversen Streutheorie überein. Zum anderen möchte man die Entwicklung eines Impulses in einer beliebigen Ausbreitungsstrecke bestimmen können. Im Fall der Datenübertragung spielen dissipative Systeme und Systeme mit alternierender Dispersion eine wichtige Rolle. Den Solitonengehalt in solchen Systemen kann man gerade bei Überlagerungszuständen nicht mit herkömmlichen Mitteln bestimmen. SRBA wurde auf beide Systeme angewendet. Im Fall von dispersionsalternierenden Glasfasersystemen konnte mit SRBA zum ersten Mal ein Soliton höherer Ordnung, ein reiner Überlagerungszustand von zwei Solitonen, zweifelsfrei nachgewiesen werden. Die Untersuchung von Überlagerungszuständen von Solitonen in solchen Glasfasersystemen ist wichtig, um das Verhalten von Multisolitonenzuständen zu verstehen. Beispielsweise kann man Bindungszustände von Solitonen, wie z. B. dem Solitonenmolekül, genauer untersuchen. Detaillierte Messungen und eine Theorie zum besseren Verständnis von Solitonenmolekül sind der Arbeit angehängt. Bei Abweichung von der Periodizität dispersionsalternierender Glasfasersysteme kann es zu effektiven Verlusten und zu einer vom Autor gefundenen Aufspaltung von Solitonen kommen. Im Fall von verlustbehafteten Glasfasern konnte eine Unschärferelation für Solitonen mit SRBA gefunden werden, die den Zerfall von Solitonen beschreibt. Es wurde gezeigt, dass eine durch die verwendete Fourier-Transformation bedingte Unschärfe durch die vom Autor entwickelte Erweiterung zur Fourier-Transformation, der sog. „Phase-Rotation Fourier Transform“, minimiert wird.

Es wurde gezeigt, dass SRBA die vollständige Information über Solitonen in einem Multisolito-

nensystem bestimmen kann. Durch eine Kopplung von Solitonen und dispersiven Wellen bei Vorhandensein von Dispersion dritter Ordnung wird das SRB-Spektrum auf das optische Spektrum nach Ausbreitung durch eine Faser projiziert. Diese Kopplung wurde untersucht. Eine erste Messung des optischen Spektrums nach dem Durchlaufen einer Glasfaser wurde präsentiert, in der die Projektion eines SRB-Spektrums zu erkennen ist. Die hier präsentierten Ergebnisse könnten dazu beitragen, dass man auch andere Solitonensysteme besser analysieren kann. Auch besteht nun die Aussicht, dass man in manchen Fällen den Solitonengehalt von sich überlagernden Solitonen sogar messen kann.

# Literaturverzeichnis

- [1] F. K. Abdullaev and B. B. Baizakov. Disintegration of a soliton in a dispersion-managed optical communication line with random parameters. *Opt. Lett.*, 25(2):93–95, Jan. 2000.
- [2] M. J. Ablowitz, G. Biondini, S. Chakravarty, and R. L. Horne. Four-wave mixing in dispersion-managed return-to-zero systems. *J. Opt. Soc. Am. B*, 20(5):831–845, May 1998.
- [3] M. J. Ablowitz and J. T. Moeser. Dispersion management for randomly varying optical fibers. *Opt. Lett.*, 29(8):821–823, Apr. 2004.
- [4] M. J. Ablowitz and H. Segur. *Soliton and the Inverse Scattering Transform*. Cambridge University Press, 2006.
- [5] G. P. Agrawal. *Applications of Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, San Diego, 2001.
- [6] G. P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, London, fourth edition, 2007.
- [7] G. P. Agrawal and R. W. Boyd, editors. *Contemporary Nonlinear Optics*. Academic Press, San Diego, 1992.
- [8] S. A. Akhmanov, V. A. Vysloukh, and A. S. Chirkin. *Optics of Femtosecond Laser Pulses*. American Institute of Physics, New York, 1992.
- [9] N. Akhmediev and A. Ankiewicz, editors. *Dissipative Solitons*. Number 661 in Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [10] N. Akhmediev and A. Ankiewicz, editors. *Dissipative Solitons: From optics to biology and medicine*. Number 751 in Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin, 2008.
- [11] N. Akhmediev and J. M. Soto-Crespo. Generation of a train of three-dimensional optical solitons in a self-focusing medium. *Phys. Rev. A*, 47(2):1358–1364, Feb. 1993.
- [12] D. Anderson. Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers. *Phys. Rev. A*, 27(6):3135–3145, Jun. 1983.
- [13] J. D. Ania-Castañón, T. J. Ellingham, R. Ibbotson, X. Chen, L. Zhang, and S. K. Turitsyn. Ultralong Raman fiber lasers as virtually lossless optical media. *Phys. Rev. Lett.*, 96:023902, 2006.
- [14] K. J. Blow and N. J. Doran. The asymptotic dispersion of soliton pulses in lossy fibers. *Opt. Commun.*, 52(5):367–370, Jan. 1985.
- [15] G. Boffetta and A. R. Osborne. Computation of the Direct Scattering Transform for the Nonlinear Schroedinger Equation. *J. of Comput. Phys.*, 102:252–264, 1992.

- [16] M. Böhm. *Einfluß der Dispersion auf die nichtlineare Ausbreitung von Lichtimpulsen*. PhD thesis, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Rostock, Jul. 2003. <http://www.physik.uni-rostock.de/optik/staff/michael/Dissertationdruck.pdf>.
- [17] M. Böhm and F. Mitschke. Soliton propagation in a dispersion map with deviation from periodicity. *Appl. Phys. B*, 81(7):983–987, 2005.
- [18] M. Böhm and F. Mitschke. Soliton-radiation beat analysis. *Phys. Rev. E*, 73(066615), Jun. 2006.
- [19] M. Böhm and F. Mitschke. Soliton content of arbitrarily shaped light pulses in fiber obtained from beat pattern. *Appl. Phys. B*, 86:407 – 411, 2007.
- [20] M. Böhm and F. Mitschke. Solitons in lossy fibers. *Phys. Rev. A*, 76, 2007.
- [21] M. Böhm, M. Tasche, B. Seifert, and F. Mitschke. Trim-to-Coherence Fourier Transform. *J. of Comput. Phys.*, accepted for publication.
- [22] E. Bourkoff, W. Zhao, and R. I. Joseph. Intensity-dependent spectra of pulses propagating in optical fibers. *Opt. Commun.*, 62(4):284–288, May 1987.
- [23] A. V. Buryak, P. Di Trapani, D. V. Skryabin, and S. Trillo. Optical solitons due to quadratic nonlinearities: from basic physics to futuristic applications. *Phys. Reports*, 370:63–235, 2002.
- [24] S. V. Chernikov and P. V. Mamyshev. Femtosecond soliton propagation in fibers with slowly decreasing dispersion. *J. Opt. Soc. Am. B*, 8(8):1633–1641, Aug. 1991.
- [25] M. Chertkov, Y. Chung, A. Dyachenko, I. Gabitov, I. Kolokolov, and V. Lebedev. Shedding and interaction of solitons in weakly disordered optical fibers. *Phys. Rev. E*, 67:036615, 2003.
- [26] D. N. Christodoulides and R. I. Joseph. Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides. *Opt. Lett.*, 13(9):794–796, Sep. 1988.
- [27] D. N. Christodoulides and R. I. Joseph. Vector solitons in birefringent nonlinear dispersive media. *Opt. Lett.*, 13(1):53–55, Jan. 1988.
- [28] A. S. Davydov. *Solitons in Molecular Systems*. Mathematics and Its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, second edition, 1991.
- [29] C. Denz, M. Schwab, and C. Weillau. *Transverse-pattern formation in photorefractive optics*. Number 188 in Springer Tracts in Modern Physics. Springer, Berlin, 2003.
- [30] C. Denz and C. Weillau. Räumliche optische Solitonen – Licht steuert Licht. *Phys. Journal*, (10):33–39, Oct. 2003.
- [31] D. Derickson, editor. *Fiber optic test and measurement*. Hewlett Packard Professional Books. Prentice Hall PTR, New Jersey, 1998.
- [32] M. Desaix, L. Helczynski, D. Anderson, and M. Lisak. Propagation properties of chirped soliton pulses in optical nonlinear Kerr media. *Phys. Rev. E*, 65:056602, 2002.
- [33] N. J. Doran. Solitons. *IEE Rev.*, 38(9):291–294, Sep. 1992.
- [34] P. D. Drummond, J. Breslin, and R. M. Shelby. Quantum-nondemolition measurements with coherent soliton probes. *Phys. Rev. Lett.*, 73(21):2837–2841, 1994.



- [35] B. Eiermann and M. K. Oberthaler. Solitonen im Bose-Einstein-Kondensat. *Phys. in unserer Zeit*, 37(4):184–190, 2006.
- [36] B. Eiermann, P. Treutlein, Th. Anker, M. Albiez, M. Taglieber, K.-P. Marzlin, and M. K. Oberthaler. Dispersion Management for Atomic Matter Waves. *Phys. Rev. Lett.*, 91(6):060402, Aug. 2003.
- [37] H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, and J. S. Aitchison. Diffraction Management. *Phys. Rev. Lett.*, 85(9):1863–1866, Aug. 2000.
- [38] H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. R. Boyd, and J. S. Aitchison. Discrete Spatial Optical Solitons in Waveguide Arrays. *Phys. Rev. Lett.*, 81(16):3383–3386, Oct. 1998.
- [39] J. N. Elgin, T. Brabec, and S. M. J. Kelly. A perturbative theory of soliton propagation in the presence of third order dispersion. *Opt. Commun.*, 114:321–328, Feb. 1995.
- [40] E. Fermi, J. Pasta, and S. Ulam. Studies of nonlinear problems. *Document LA-1940*, (266):491–501, May 1955.
- [41] A. T. Filippov. *The versatile soliton*. Birkhäuser, Boston, 2000.
- [42] J. W. Fleischer, M. Segev, N. K. Efremidis, and D. N. Christodoulides. Observation of two-dimensional discrete solitons in optically induced nonlinear photonic lattices. *Nature*, 422:147–150, Mar. 2003.
- [43] I. Gabitov, R. Indik, L. Mollenauer, M. Shkarayev, M. Stepanov, and P. M. Lushnikov. Twin families of bisolitons in dispersion-managed systems. *Opt. Lett.*, 32(6):605, Mar. 2007.
- [44] I. Gabitov and S. K. Turitsyn. Breathing solitons in optical fiber links. *JETP Lett.*, 63(10):861–866, May 1996.
- [45] D. Gabor. Theory of Communication. *J. IEE*, 93, III(26):429–457, Nov. 1946.
- [46] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura. Method for solving the Korteweg-deVries equation. *Phys. Rev. Lett.*, 19(19):1095–1097, Nov. 1967.
- [47] E. A. Golovchenko, A. N. Pilipetskii, C. R. Menyuk, J. P. Gordon, and L. F. Mollenauer. Soliton propagation with up- and down-sliding-frequency guiding filters. *Opt. Lett.*, 20(6):539–541, Mar. 1995.
- [48] J. P. Gordon. Theory of the soliton self-frequency shift. *Opt. Lett.*, 11(10):662–664, Oct. 1986.
- [49] J. P. Gordon and H. A. Haus. Random walk of coherently amplified solitons in optical fiber transmission. *Opt. Lett.*, 11(10):665–667, Oct. 1986.
- [50] J. Gripp and L. F. Mollenauer. Enhanced range for OTDR-like dispersion map measurements. *Opt. Lett.*, 23(20):1603–1605, Oct. 1998.
- [51] J. L. Hammack. A note on tsunamis: their generation and propagation in an ocean of uniform depth. *J. Fluid Mech.*, 60(4):769–799, 1973.
- [52] R. H. Hardin and F. D. Tappert. Applications of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations. *SIAM Rev.*, 15:423, 1973.
- [53] F. J. Harris. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform. *Proc. of the IEEE*, 66:51 – 83, 1978.

- [54] A. Hasegawa and Y. Kodama. Guiding-Center Soliton. *Phys. Rev. Lett.*, 66(2):161–164, Jan. 1991.
- [55] A. Hasegawa and Y. Kodama. *Solitons in optical communications*. Number 7 in Oxford Series in optical and imaging sciences. Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [56] A. Hasegawa and M. Matsumoto. *Optical Solitons in Fibers*. Springer, Berlin, third edition, 2003.
- [57] A. Hasegawa and T. Nyu. Eigenvalue communication. *J. Lightwave Technol.*, 11(3):395, 1993.
- [58] A. Hasegawa and F. Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. *Appl. Phys. Lett.*, 23(3):142–144, Aug. 1973.
- [59] R. W. Hasse. A general method for the solution of nonlinear soliton and kink Schrödinger equations. *Zeitschrift für Physik B*, 37:83–87, 1980.
- [60] H. Hatami-Hanza, A. Mostofi, and P. L. Chu. A multilevel soliton communication system. *J. Lightwave Technol.*, 15(1):6, 1997.
- [61] H. A. Haus. Molding light into solitons. *IEEE Spec.*, 30:48–53, Mar. 1993.
- [62] H. A. Haus. Optical fiber solitons, their properties and uses. *Proceed. of the IEEE*, 81(7):970–983, Jul. 1993.
- [63] A. Hause, H. Hartwig, M. Böhm, and F. Mitschke. Binding mechanism of temporal soliton molecules. *Phys. Rev. A*, 78:063817, 2008.
- [64] A. Hause, H. Hartwig, B. Seifert, H. Stolz, M. Böhm, and F. Mitschke. Phase structure of soliton molecules. *Phys. Rev. A*, 75:063836, 2007.
- [65] W. Heisenberg. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik and Mechanik. *Zeitschrift für Physik*, 43:172, 1927.
- [66] A. V. Husakou and J. Herrmann. Supercontinuum Generation of Higher-Order Solitons by Fission in Photonic Crystal Fibers. *Phys. Rev. Lett.*, 87(20):203901, 2001.
- [67] C. Iaconis and I. A. Walmsley. Spectral phase interferometry for direct electric-field reconstruction of ultrashort optical pulses. *Opt. Lett.*, 23(10):792–794, May 1998.
- [68] E. Infeld and G. Rowlands. *Nonlinear waves, solitons and chaos*. Cambridge University Press, 1990.
- [69] D. J. Kane and R. Trebino. Characterization of arbitrary femtosecond pulses using frequency-resolved optical gating. *IEEE J. Quant. Electron.*, 29(2):571–578, Feb. 1993.
- [70] F. X. Kärtner. Optische Solitonen. Grundlagen und Anwendungen. *Phys. in unserer Zeit*, 26(4):152–161, 1995.
- [71] D. J. Kaup, B. A. Malomed, and J. Yang. Interchannel pulse collision in a wavelength-division-multiplexed system with strong dispersion management. *Opt. Lett.*, 23(20):1600–1602, Oct. 1998.
- [72] I. Kay and H. E. Moses. Reflectionless Transmission through Dielectrics and Scattering Potentials. *J. of Appl. Phys.*, 27(12):1503–1508, Dec. 1956.

- [73] S. M. J. Kelly. Characteristic sideband instability of periodically amplified average soliton. *Electron. Lett.*, 28(8):806–807, Apr. 1992.
- [74] Y. S. Kivshar and B. A. Malomed. Dynamics of solitons in nearly integrable systems. *Rev. of Modern Phys.*, 61(4):763–915, Oct. 1989.
- [75] J. C. Knight. Photonic crystal fibres. *Nature*, 424:847–851, Aug. 2003.
- [76] Y. Kodama, A. Maruta, and A. Hasegawa. Long distance communications with solitons. *Quantum Opt.*, 6:463–512, 1994.
- [77] D. Korteweg and G. de Vries. On the change of form of long wave advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philos. Mag.*, 39(5):422–443, 1895.
- [78] C. Kurtzke. Suppression of fiber nonlinearities by appropriate dispersion management. *IEEE Photon. Tech. Lett.*, 5:1250–1252, 1993.
- [79] P. D. Lax. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves. *Commun. on Pure and Appl. Math.*, 21:467–490, 1968.
- [80] P. M. Lushnikov. Dispersion-managed soliton in a strong dispersion map limit. *Opt. Lett.*, 26(20):1535–1537, Oct. 2001.
- [81] B. A. Malomed. Variational methods in nonlinear fiber optics and related fields. *Progress in Optics*, 43:71–193, 2002.
- [82] M. Matsumoto. Theory of stretched-pulse transmission in dispersion-managed fibers. *Opt. Lett.*, 22(16):1238–1240, Aug. 1997.
- [83] J. C. Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 155:459–512, 1865.
- [84] R. Meinel, G. Neugebauer, and H. Steudel. *Solitonen*. Akademie-Verlag, Berlin, 1991.
- [85] C. R. Menyuk. Origin of solitons in the “real” world. *Phys. Rev. A*, 33(6):4367–4374, Jun. 1986.
- [86] C. R. Menyuk. Soliton robustness in optical fibers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 10(9):1585–1591, Jun. 1993.
- [87] P. P. Mitra and J. B. Stark. Nonlinear limits to the information capacity of optical fibre communications. *Nature*, 411(6841):1027–1030, Jun. 2001.
- [88] F. Mitschke. *Glasfasern*. Elsevier, 2005.
- [89] F. Mitschke and M. Böhm. Solitonen in Glasfasern. *Phys. Bl.*, 56(2):25–30, Feb. 2000.
- [90] F. M. Mitschke and L. F. Mollenauer. Discovery of the soliton self-frequency shift. *Opt. Lett.*, 11(10):659–661, Oct. 1986.
- [91] L. F. Mollenauer, S. G. Evangelides, and H. A. Haus. Long-Distance Soliton Propagation Using Lumped Amplifiers and Dispersion Shifted Fiber. *J. Lightwave Technol.*, 9:194, 1991.
- [92] L. F. Mollenauer and J. P. Gordon. *Solitons in optical fibers*. Elsevier Academic Press, Amsterdam, 2006.
- [93] L. F. Mollenauer, J. P. Gordon, and S. G. Evangelidis. The sliding-frequency guiding filter: an improved form of soliton jitter control. *Opt. Lett.*, 17(22):1575–1577, Nov. 1992.

- [94] L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, and J. P. Gordon. Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers. *Phys. Rev. Lett.*, 45(13):1095–1098, Sep. 1980.
- [95] K. Nagayama, M. Kakui, M. Matsui, T. Saitoh, and Y. Chigusa. Ultra-low-loss (0.1484 dB/km) pure silica core fiber and extension of transmission distance. *Electron. Lett.*, 38(20):1168–1169, Sep. 2002.
- [96] R. Ohhira, A. Hasegawa, and Y. Kodama. Methods of constructing a long-haul soliton transmission system with fibers having a distribution in dispersion. *Opt. Lett.*, 20(20):701–703, Apr. 1995.
- [97] F. G. Omenetto, N. A. Wolchover, M. R. Wehner, M. Ross, A. Efimov, A. J. Taylor, V. V. R. K. Kumar, A. K. George, J. C. Knight, N. Y. Joly, and P. St. J. Russell. Spectrally smooth supercontinuum from 350 nm to 3  $\mu\text{m}$  in sub-centimeter length of soft-glass photonic crystal fibers. *Opt. Exp.*, 14(11):4928–4934, May 2006.
- [98] M. Piché, J.-F. Cormier, and X. Zhu. Bright optical soliton in the presence of fourth-order dispersion. *Opt. Lett.*, 21(12):845–847, Jun. 1996.
- [99] K. Porsezian and V. C. Kuriakose, editors. *Optical Solitons*. Number 613 in Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin, 2003.
- [100] J. E. Prilepsky and S. A. Derevyanko. Breakup of a multisoliton state of the linearly damped nonlinear Schrödinger equation. *Phys. Rev. E*, 75:036616, 2007.
- [101] J. E. Prilepsky, S. A. Derevyanko, and S. K. Turitsyn. Conversion of a chirped Gaussian pulse to a soliton or a bound multisoliton state in quasi-lossless and lossy optical fiber systems. *J. Opt. Soc. Am. B*, 24:1254, 2007.
- [102] M. Remoissenet. *Waves called solitons*. Springer, Berlin, 1996.
- [103] J. S. Russell. Report on waves, Fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science. pages 311–390, 1844.
- [104] S. Rutz, T. Körösi, and F. Mitschke. Manipulation of soliton ensembles by spectral filters. *Appl. Phys. B*, 72:101–104, 2001.
- [105] J. Satsuma and N. Yajima. Initial value problems of one-dimensional self-modulation of nonlinear waves in dispersive media. *Suppl. of the Progr. of Theor. Phys.*, 55:284, 1974.
- [106] A. Schwache and F. Mitschke. Properties of an optical soliton gas. *Phys. Rev. E*, 55(6):7720–7721, Jun. 1997.
- [107] B. Seifert and H. Stolz. A method for unique phase retrieval of ultrafast optical fields. *Meas. Sci. Technol.*, 20:015303, 2009.
- [108] C. E. Shannon. Communication in the presence of noise. *Proc. of the IRE*, 37:10–21, 1949.
- [109] Y. Silberberg. Collapse of optical pulses. *Opt. Lett.*, 15(22):1282–1284, Nov. 1990.
- [110] N. J. Smith, N. J. Doran, W. Forysiak, and F. M. Knox. Soliton transmission using periodic dispersion compensation. *Lightwave Technology*, 15(10):1808, Oct. 1997.
- [111] N. J. Smith, W. Forysiak, and N. J. Doran. Reduced Gordon-Haus jitter due to enhanced power solitons in strongly dispersion managed systems. *Electron. Lett.*, 32(22):2085–2086, Oct. 1996.

- [112] N. J. Smith, F. M. Knox, N. J. Doran, K. J. Blow, and I. Bennion. Enhanced power solitons in optical fibres with periodic dispersion management. *Electron. Lett.*, 32(1):54, Jan. 1996.
- [113] S. Spälter, M. Böhm, M. Burk, B. Mikulla, R. Fluck, I. D. Jung, G. Zhang, U. Keller, A. Sizmann, and G. Leuchs. Self-starting soliton-modelocked femtosecond Cr<sup>4+</sup>:YAG laser using an antiresonant Fabry-Pérot saturable absorber. *Appl. Phys. B*, 65(3):335–338, 1997.
- [114] S. Spälter, M. Burk, U. Strößner, M. Böhm, A. Sizmann, and G. Leuchs. Photon number squeezing of spectrally filtered sub-picosecond optical solitons. *Europhys. Lett.*, 38(5):335–340, 1997.
- [115] C. Spielmann, P. F. Curley, T. Brabec, and F. Krausz. Ultrabroadband Femtosecond Lasers. *IEEE J. Quant. Electron.*, 30(4):1100–1114, Apr. 1994.
- [116] G. I. Stegeman and M. Segev. Optical spatial solitons and their interactions: universality and diversity. *Science Mag.*, 286:1518–1523, Nov. 1999.
- [117] M. Stratmann, T. Pagel, and F. Mitschke. Experimental observation of temporal soliton molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 95:143902, 2005.
- [118] M. Suzuki, I. Morita, N. Edagawa, S. Yamamoto, H. Taga, and S. Akiba. Reduction of Gordon-Haus timing jitter by periodic dispersion compensation in soliton transmission. *Electronics Letters*, 31(23):2027, November 1995.
- [119] D. Y. Tang, W. S. Man, H. Y. Tam, and P. D. Drummond. Observation of bound states of solitons in a passively mode-locked fiber laser. *Phys. Rev. A*, 64:033814, 2001.
- [120] J. R. Taylor, editor. *Optical Solitons*. Number 10 in Cambridge Studies in Modern Optics. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [121] S. K. Turitsyn, E. G. Shapiro, S. B. Medvedev, M. P. Fedoruk, and V. K. Mezentsev. Physics and mathematics of dispersion-managed optical solitons. *C. R. Physique*, 4:145–161, 2003.
- [122] T. Ueda and W. L. Kath. Dynamics of coupled solitons in nonlinear optical fibers. *Phys. Rev. A*, 42(1):563–571, Jul. 1990.
- [123] M. N. Vinoj, V. C. Kuriakose, and K. Porsezian. Optical soliton with damping and frequency chirping in fibre media. *Chaos, Solitons and Fractals*, 12:2569–2575, 2001.
- [124] P. K. A. Wai, C. R. Menyuk, H. H. Chen, and Y. C. Lee. Soliton at the zero-group-dispersion wavelength of a single-mode fiber. *Opt. Lett.*, 12(8):628–630, 1987.
- [125] T.-S. Yang and W. L. Kath. Analysis of enhanced-power solitons in dispersion-managed optical fibers. *Opt. Lett.*, 22(13):985–987, 1997.
- [126] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, 15(6):240–243, Aug. 1965.
- [127] V. E. Zakharov and A. B. Shabat. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Soviet Phy. JETP*, 34(1):62–69, Jan. 1972.



# Referenzen

## Referenzen zur Abbildung ??

1. S. Aisawa, T. Sakamoto, M. Fukui, J. Kani, M. Jinno und K. Oguchi. *Ultra-wideband, long distance WDM demonstration of 1 Tbit/s (50×20 Gbit/s) 600 km transmission using 1550 and 1580 nm wavelength bands*. Electron. Lett. **34** (11) 1127-1128, Mai 1998.
2. M. Nakazawa, K. Suzuki und H. Kubota. *Single-channel 80 Gbit/s soliton transmission over 10000 km using in-line synchronous modulation*. Electron. Lett. **35** (2) 162-164, Januar 1999.
3. G. M. Carter, V. S. Grigoryan, R.-M. Mu, C. R. Menyuk, P. Sinha, T. F. Carruthers, M. L. Dennis und I. N. Duling. *Transmission of dispersion-managed solitons at 20 Gbit/s over 20000 km*. Electron. Lett. **35** (3) 233-234, Februar 1999.
4. Tyco Telecommunications, <http://www.tycotelecom.com> *Tyco Submarine Systems Ltd. demonstrates experimental transmission of 640 Gb/s over 7200 km on a single fiber*. Tyco Submarine Systems Ltd. Pressemitteilung vom 24. Februar 1999 (640 GBit/s über 7200km). <http://www.tycotelecom.com/aboutus/view.asp?id=174&type=Press>,  
Siehe auch: Photonics Spectra **35** (4) 48, 1999.
5. C. D. Chen, J. Kim, O. Mizuhara, T. V. Nguyen, K. Ogawa, R. E. Tench, L. D. Tzeng und P. D. Yeates. *40 Gbit/s × 25 ch (1 Tbit/s aggregate capacity) WDM transmission over 342 km of fibre*. Electron. Lett. **35** (8) 648-649, April 1999.
6. S. B. Alleston, P. Harper, I. S. Penketh, I. Bennion, N. J. Doran und A. D. Ellis. *1000 km transmission of 40 Gbit/s single channel RZ data over dispersion managed standard (non-dispersion shifted) fibre*. Electron. Lett. **35** (10) 823-824, Mai 1999.
7. S. Kawanishi, H. Takara, K. Uchiyama, I. Shake und K. Mori. *3 Tbit/s (160 Gbit/s × 19 channel) optical TDM and WDM transmission experiment*. Electron. Lett. **35** (10) 826-827, Mai 1999.
8. C. Scheerer, C. Glingener, A. Färbert, J.-P. Elbers, A. Schöpflin, E. Gottwald und G. Fischer. *3.2 Tbit/s (80 × 40 Gbit/s) bidirectional WDM/ETDM transmission over 40 km standard singlemode fiber*. Electron. Lett. **35** (20) 1752-1753, September 1999.
9. Bell Labs, <http://www.bell-labs.com>. *Bell Labs Scientists Demo First Long Distance Triple Terabit Transmission*. Bell Labs, Pressemitteilung vom 16. März 2000 (3,28 TBit/s über 300 km). <http://www.bell-labs.com/news/2000/march/16/2.html>
10. Heinrich-Hertz-Institut, <http://www.hhi.fraunhofer.de>. *Wissenschaftlern des Heinrich-Hertz-Instituts und der T-Nova gelingt es weltweit erstmals, eine Datenrate von 160 GBit/s (160 Milliarden Bits pro Sekunde) über eine verlegte Standard-Glasfaser der Deutschen Telekom zu übertragen*. Pressemitteilung des Heinrich-Hertz-Institutes vom Oktober 2000 (0,16 TBit/s über 116 km). <http://www.hhi.de/presse/2000/06Okt2000/06okt2000.html>



11. R. Ludwig, U. Feiste, S. Diez, C. Schubert, C. Schmidt, H. J. Ehrke und H. G. Weber. *Unrepeated 160 Gbit/s RZ single-channel transmission over 160 km of standard fibre at 1550 nm with hybrid MZI optical demultiplexer*. Electron. Lett. **36** (16) 1405-1406, August 2000.
12. Siemens, <http://www.siemens.de>. *Siemens sets new world record in optical data transmission: 7 Tbit/s over a single optical fiber*. Pressemitteilung von Siemens vom 4. Oktober 2000 (7,04 TBit/s über 50 km).  
[http://w4.siemens.de/en2/html/press/newsdesk\\_archive/2000/end00412.html](http://w4.siemens.de/en2/html/press/newsdesk_archive/2000/end00412.html)
13. M. Nakazawa, T. Yamamoto und K. R. Tamura. *1.28 Tbit/s-70km OTDM transmission using third- and fourth-order simultaneous dispersion compensation with a phase modulator*. Electron. Lett. **36** (24) 2027-2029, November 2000.
14. Nortel Networks, <http://www.nortelnetworks.com>. *1.28 Tbit/s (32 × 40 Gbit/s) transmission over 1000 km with only 6 spans*. Pressemitteilung von Nortel Networks vom März 2001.  
<http://www.nortelnetworks.com/products/collateral/pdf/ofc2001-21.pdf>
15. NEC Corporation, <http://www.nec.com>. *NEC sets new 10.9 TeraBit/second, ultra-dense WDM transmission capacity world record*. Pressemitteilung von NEC vom 22. März 2001 (10,9 TBit/s über 117 km). <http://www.nec.co.jp/english/today/newsrel/0103/2201.html>
16. B. Zhu, L. Leng, L. E. Nelson, Y. Qian, L. Cowsar, S. Stulz, C. Doerr, L. Stulz, S. Chandrasekhar, S. Radic, D. Vengsarkar, Z. Chen, J. Park, K. S. Feder, H. Thiele, J. Bromage, L. Gruner-Nielsen und S. Knudsen. *3.08 Tbit/s (77 × 42.7 Gbit/s) WDM transmission over 1200 km fiber with 100 km repeater spacing using dual C- and L-Band hybrid Raman / erbium-doped inline amplifiers*. Electron. Lett. **37** (13) 844, Juni 2001.
17. W. S. Lee, V. Zhu, B. Shaw, D. Watley, C. Scahill, J. Homan, C. R. S. Fludger, M. Jones und A. Hadjifotiou. *2.56 Tbit/s (32 × 80 Gbit/s) polarisation-bit-interleaved transmission over 120 km NDSF with 0.8 bit/s/Hz spectral efficiency*. Electron. Lett. **37** (15) 964-965, Juli 2001.
18. Fujitsu, <http://www.fujitsu.com>. *Fujitsu Successfully Demonstrates Technology Enabling Optical Wavelength Division Multiplexed Communication Over 7400 km at 2.4 Terabits/Second*. Pressemitteilung von Fujitsu vom 24. Oktober 2001 (2,4 TBit/s über 7400 km).  
<http://pr.fujitsu.com/en/news/2001/10/24-1.html>
19. L. du Mouza, G. Le Meur, H. Mardoyan, E. Seve, S. Cussat-Blanc, D. Hamoir, C. Martinelli, D. Bayart und F. Raineri. *1.28 Tbit/s (32 × 40 Gbit/s) WDM transmission over 2400 km of TeraLight<sup>TM</sup>-Reverse TeraLigth(C) fibers using distributed all-Raman amplification*. Electron. Lett. **37** (21) 1300-1302, Oktober 2001.
20. Alcatel, <http://www.alcatel.com>. *Alcatel Breaks Another World Record in Long-haul Submarine Optical Transmission*. Pressemitteilung von Alcatel vom 29. November 2001 (3,65 TBit/s über 6850 km).  
<http://www.home.alcatel.com/vpr/archive.nsf/DateKey/29112001uk>
21. Alcatel, <http://www.alcatel.com>. *Alcatel Extends Distance for DWDM Optical Terrestrial Transmission with New World Record*. Pressemitteilung von Alcatel vom 8. Januar 2002 (5 TBit/s über 1500 km).  
[http://www.home.alcatel.com/vpr/archive.nsf/DateKey/08012002\\_1uk](http://www.home.alcatel.com/vpr/archive.nsf/DateKey/08012002_1uk)
22. Lucent Technologies, <http://www.lucent.com>. *Lucent Technologies' Bell Labs scientists set new fiber optic transmission record*. Pressemitteilung von Lucent vom 22. März 2002 (2,56 TBit/s über 4000 km).  
<http://www.lucent.com/press/0302/020322.bla.html>



23. Y. Yamada, S.-I. Nakagawa, Y. Kurosawa, T. Kawazawa, H. Taga und K. Goto. *2 Tbit/s (200 × 10 Gbit/s) over 9240 km transmission experiment with 0.15 nm channel spacing using VSB format*. Electron. Lett. **38** (7) 328-330, März 2002.
24. Mitsubishi Electric, <http://www.mitsubishielectric.com>. *Transmission of 1.3 Terabit/Second Optical Signals over 8,400 km*. Pressemitteilung von Mitsubishi Electric 2002.  
[http://www.mitsubishielectric.com/news/sc/rd\\_5\\_1\\_b.html](http://www.mitsubishielectric.com/news/sc/rd_5_1_b.html)
25. Agere, <http://www.agere.com>. *3.2 Tbit/s (40 × 80 Gb/s) transmission over 1000 km with 10 km span (25dB loss) and 0.8 bit/s/Hz of spectral efficiency*. <http://www.fibers.org>, 22 Juni 2002,  
<http://www.fibers.org/whitepapers/pdfs/Agere1.pdf>
26. T. Matsuda, T. Kotanigawa, A. Naka und T. Imai. *62 × 42.7 Gbit/s (2.5 Tbit/s) WDM signal transmission over 2200 km with broadband distributed Raman amplification* Electron. Lett. **38** (15) 818, Juli 2002.
27. T. Mizuoichi, K. Ishida, K. Kinjo, T. Kobayashi, S. Kajiya, K. Shimizu, T. Tokura, K. Motoshima und K. Kasahara. *1.7 Tbit/s (85 × 22.8 Gbit/s) transmission over 9180 km using symmetrically collided transmission methodology*. Electron. Lett. **38** (21) 1264-1265, Oktober 2002.
28. Marconi, <http://marconi.com>. *World's Longest High-Speed Fibre Optic Communications Link Begins Transmission*. Marconi, Pressemitteilung vom 19. Dezember 2002 (1,6 TBit/s über 3000 km).  
[http://www.marconi.com/Home/press\\_office/News&Events/News Archive/2002/December/World's Longest High-Speed Fibre Optic Communications Link Begins Transmission](http://www.marconi.com/Home/press_office/News&Events/NewsArchive/2002/December/World's%20Longest%20High-Speed%20Fibre%20Optic%20Communications%20Link%20Begins%20Transmission)
29. M. Sauer, J. E. Hurley, S. Ten, J. J. Ferner und S. P. Colby. *1.6 Tbit/s (40 × 40 Gbit/s) transmission over 2160 km of field-deployed dispersion-managed fibre without per channel dispersion compensation*. Electron. Lett. **39** (9) 728, Mai 2003.
30. J. Fatome, S. Pitois, P. Tchofo Dinda und G. Millot. *Experimental demonstration of 160-GHz densely dispersion-managed soliton transmission in a single channel over 896 km of commercial fibers*. Opt. Express **11** (13) 1553-1558, Juni 2003.
31. L. F. Mollenauer, A. Grant, X. Liu, X. Wei, C. Xie und I. Kang. *Experimental test of dense wavelength-division multiplexing using novel, periodic-group-delay-complemented dispersion compensation and dispersion-managed solitons*. Opt. Letters **28** (21) 2043-2045, November 2003.
32. T. Tsuritani, K. Ishida, A. Agata, K. Shimomura, I. Morita, T. Tokura, H. Taga, T. Mizuoichi, N. Edagawa und S. Akiba. *70-GHz-Spaced 40 × 42 Gb/s Transpacific Transmission Over 9400 km Using Prefiltered CSRZ-DPSK Signals, All-Raman Repeaters, and Symmetrically Dispersion-Managed Fiber Spans*. Journal of Lightwave Technology, **22**, (1), 215-224 Januar 2005.
33. J.-X. Cai, D. G. Foursa, L. Liu, C. R. Davidson, Y. Cai, W. W. Patterson, A. J. Lucero, B. Bakhshi, G. Mohs, P. C. Corbett, V. Gupta, W. Anderson, M. Vaa, G. Domagala, M. Mazurczyk, H. Li, S. Jiang, M. Nissov, A. N. Pilipetskii und N. S. Bergano. *RZ-DPSK field trial over 13100 km of installed non-slope-matched submarine fibers*. Journal of Lightwave Technology, **23**, (1), 95ff Januar 2005.
34. G. Charlet, E. Corbel, J. Lazaro, A. Klekamp, R. Dischler, P. Tran, W. Idler, H. Mardoyan, A. Konczykowska, F. Jorge, und S. Bigo *WDM Transmission at 6-Tbit/s Capacity Over Transatlantic Distance, Using 42.7-Gb/s Differential Phase-Shift Keying Without Pulse Carver RZ DPSK field trial over 13100 km of installed non-slope-matched submarine fibers*. Journal of Lightwave Technology, **23**, (1), 104ff Januar 2005.

35. N. Yoshikane und I. Morita. *1.14 b/s/Hz Spectrally Efficient  $50 \times 85.4$ -Gb/s Transmission Over 300 km Using Copolarized RZ-DQPSK Signals*. Journal of Lightwave Technology, **23**, (1), 108-114 Januar 2005.
36. S. Bhandare, D. Sandel, B. Milivojevic, A. Hidayat, A. Fauzi, H. Zhang, S. K. Ibrahim, F. Wüst und R. Noé. *5.94 Tbit/s, 1.49 bit/s/Hz ( $40 \times 2 \times 2 \times 40$  Gbit/s) RZ-DQPSK polarization division multiplex C-band transmission over 324 km*. IEEE Photonics Technology Letters, **17**, (4) 914-916, April 2005.
37. H. G. Weber, S. Ferber, M. Kroh, C. Schmidt-Langhorst, R. Ludwig, V. Marembert, C. Boerner, F. Futami, S. Watanabe und C. Schubert *Single channel 1.28 Tbit/s and 2.56 Tbit/s DQPSK transmission* Electron. Lett. **42** (3) 728, Februar 2006.
38. Heinrich-Herz-Institut, <http://www.fraunhofer.de>. *Weltrekord im Glasfasernetz* Pressemitteilung des Heinrich-Herz-Institutes vom Mai 2006 (2,56 TBit/s über 160 km). <http://www.fraunhofer.de/fhg/press/pi/2006/03/Mediendienst32006Thema2.jsp>
39. Nippon Telegraph and Telephone Corporation, <http://www.ntt.co.jp>. *14 Tbps over a Single Optical Fiber: Successful Demonstration of World's Largest Capacity* Pressemitteilung der Nippon Telegraph and Telephone Corporation vom September 2006 (14 TBit/s über 160 km). <http://www.ntt.co.jp/news/news06e/0609/060929a.html>
40. Alcatel-Lucent, <http://www.alcatel-lucent.com> *Alcatel-Lucent achieves a world record 25.6 Terabit/s optical transmission* Pressemitteilung von Alcatel-Lucent vom März 2006 (25.6 TBit/s über 240 km). [http://www.alcatel-lucent.com/wps/portal!/ut/p/kcxml/04\\_Sj9SPykssy0xPLMnMz0vM0Y\\_QjzKLd4w3cQ7SL8h2VAQAu32oaA!?!?LMSG\\_CABINET=Docs\\_and\\_Resource\\_Ctr&LMSG\\_CONTENT\\_FILE=News\\_Releases\\_2007/News\\_Article\\_000199](http://www.alcatel-lucent.com/wps/portal!/ut/p/kcxml/04_Sj9SPykssy0xPLMnMz0vM0Y_QjzKLd4w3cQ7SL8h2VAQAu32oaA!?!?LMSG_CABINET=Docs_and_Resource_Ctr&LMSG_CONTENT_FILE=News_Releases_2007/News_Article_000199)
41. A. H. Gnauck, G. Charlet, P. Tan, P. J. Winzer, C. R. Doerr, J. C. Centanni, E. C. Burrows, T. Kawanishi, T. Sakamoto und K. Higuma. *25.6-Tb/s WDM Transmission of Polarization-Multiplexed RZ-DQPSK Signals*. Journal of Lightwave Technology, **26**, (1), 79-84 Januar 2008.

# Danksagung

Zum Gelingen der Arbeit haben zahlreiche Personen beigetragen. Ihnen allen möchte ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank zum Ausdruck bringen. Insbesondere danke ich ...

- ... Prof. Fedor Mitschke dafür, dass er mir die Habilitation in seiner Arbeitsgruppe unter seiner kompetenten und fachkundigen Anleitung ermöglicht hat. Mit seinen zahlreichen Ideen hat er mich in jeder Phase der Arbeit zügig vorangebracht und hatte zu jeder Zeit ein offenes Ohr.
- ... Haldor Hartwig für die verschiedenen Messungen, die wir zusammen durchgeführt haben. Durch die vielen Diskussionen und sein hartnäckiges Nachfragen habe ich viele Denkanstöße bekommen. Besonders danke ich ihm für die sorgfältigen Simulationen.
- ... Alexander Hause für die experimentellen und theoretischen Untersuchungen des Solitonenmoleküls.
- ... Toralf Ziems für die fortwährende Unterstützung in verschiedenen Bereichen, insbesondere für die Messungen im Zusammenhang mit dem Solitonengas.
- ... allen weiteren Doktoranden der Arbeitsgruppe: Peter Keller, Martin Stratmann, Tom-Michael Voigt.
- ... allen Diplomanden der Arbeitsgruppe: Felix Bremerkamp, Sebastian Knitter, Christoph Mahnke, Tino Pagel, Philipp Rohrman, Gunnar Schulz.
- ... allen weiteren Mitarbeitern der Arbeitsgruppe Optik am Institut für Physik der Universität Rostock: Dr. Wolfhart Göcke und Hartmuth Reichwagen.
- ... allen fleißigen Damen im Sekretariat: Anja Gloede, Helga Harder und Madlen Henkert
- ... allen Technikern, die zum Gelingen der Arbeit beitrugen: insbesondere Artur Busse, Falk Tofaute und seinen Mitarbeitern.
- ... allen Studenten, die ich betreuen durfte. Auch ihre vielen Fragen haben mich in meiner Entwicklung weitergebracht.
- ... meiner Familie, die mich fortwährend unterstützte.
- ... allen Beachhoppern. Ihnen verdanke ich eine schöne Zeit in Rostock und den wertvollen Ausgleich zum Studium.



# Veröffentlichungsliste

## Begutachtete Veröffentlichungen

- [V1] S. Spälter, M. Böhm, M. Burk, B. Mikulla, R. Fluck, I. D. Jung, G. Zhang, U. Keller, A. Sizmann und G. Leuchs, *Self-starting soliton modelocked femtosecond Cr<sup>4+</sup>-YAG laser using an anitresonant Fabry-Pérot saturable absorber*, Appl. Phys. B, **65**(3): 335-338 (1997)
- [V2] S. Spälter, M. Burk, U. Strößner, M. Böhm, A. Sizmann und G. Leuchs, *Photon number squeezing of spectrally filtered sub-picosecond optical solitons*, Europhys. Lett., **38**(5): 335-340 (1997)
- [V3] F. Mitschke und M. Böhm, *Solitonen in Glasfasern*, Phys. Bl., **56**(2): 25-30 (2000)
- [V4] M. Stratmann, M. Böhm und F. Mitschke, *Stable propagation of dark solitons in dispersion managed maps of either sign of path-average dispersion*, Electron. Lett., **37**(19): 1182-1183 (2001)
- [V5] M. Böhm, *Einfluß der Dispersion auf die nichtlineare Ausbreitung von Lichtimpulsen*, Dissertation, Universität Rostock (2003)
- [V6] M. Böhm und F. Mitschke, *Soliton propagation in a dispersion map with deviation from periodicity*, Appl. Phys. B, **81**(7): 983-987 (2005)
- [V7] M. Böhm und F. Mitschke, *Soliton-radiation beat analysis*, Phys. Rev. E, **73**, 066615 (2006)
- [V8] M. Böhm und F. Mitschke, *Soliton content of arbitrarily shaped light pulses in fibers analysed using a soliton-radiation beat pattern*, Appl. Phys. B, **86**(3) 407 (2007)
- [V9] A. Hause, H. Hartwig, B. Seifert, H. Stolz, M. Böhm und F. Mitschke. *Phase structure of soliton molecules*, Phys. Rev. A, **75**, 06383 (2007)
- [V10] M. Böhm und F. Mitschke, *Solitons in Lossy Fibers*, Phys. Rev. A **76**, 063822 (2007)
- [V11] A. Hause, H. Hartwig, M. Böhm und F. Mitschke, *Binding mechanism of temporal soliton molecules*, Phys. Rev. A **78**, 063817 (2008)
- [V12] M. Böhm, M. Tasche, B. Seifert und F. Mitschke *Trim-to-Coherence Fourier Transform* J. of Comput. Phys. **228** 2906-2917 (2009)

## Begutachtete Konferenzbeiträge

- [K1] S. Spälter, M. Böhm, B. Mikulla, A. Sizmann, G. Leuchs, R. Fluck, I. D. Jung, G. Zhang und U. Keller, *Self-starting soliton modelocked femtosecond Chromium-YAG laser using an anitresonant Fabry-Pérot saturable absorber*, European Conf. on Lasers and Electro-Optics (CPD 2.11, **post deadline** paper), Hamburg, Deutschland (1996)

- [K2] S. Spälter, P. van Look, M. Böhm, B. Mikulla, A. Sizmann und G. Leuchs, *Efficiency of a quantum non-demolition measurement using optical solitons*, Workshop on Quantum Nondemolition Measurements (Poster), Reichenau (Lake Constance), (26.-30. Mar. 1996)
- [K3] S. Spälter, P. van Look, M. Böhm, B. Mikulla, A. Sizmann und G. Leuchs, *Modelocked Chromium-YAG laser for quantum measurements in optical fibers*, Poster, German-Russian Laser Symposium (GRLS) 1996 (Poster), Bonn, Deutschland, (30. Apr. - 4. May 1996)
- [K4] A. Sizmann, S. Spälter, P. van Look, M. Böhm, B. Mikulla und G. Leuchs, *Quantum non-demolition measurement using sub-picosecond solitons in optical fibers*, Quantum Optics Meeting, Cairns, Queensland, Australien, (8.-9. July 1996)
- [K5] M. Stratmann, M. Böhm, F. Mitschke, *Stable dark solitons in dispersion-managed fibers*, International Quantum Electronics Conference (IQEC), Moscow, Russland (2002)
- [K6] M. Böhm und F. Mitschke, *Soliton-radiation beat analysis*, International Workshop on Dissipative Solitons (Poster), MIPPKS Dresden, Deutschland (23. - 29. 1. 2006)
- [K7] M. Böhm und F. Mitschke, *Soliton-radiation beat analysis*, Conference on Quantum Electronics and Laser Science (QELS), (JThC12, Poster), Long Beach, USA, (22. - 26. 5. 2006)
- [K8] M. Böhm und F. Mitschke, *Beat notes between solitons and radiative background contain useful information*, 12th Conference on Laser Optics (WeR3-25, **invited**), St. Petersburg, Russland, (26. - 30. 6. 2006)
- [K9] A. Hause, H. Hartwig, M. Böhm und F. Mitschke, *Temporal soliton molecules: Experimentally determined phase profiles*, Conference on Quantum Electronics and Laser Science (QELS), (QWB2), Baltimore, USA (2007)
- [K10] A. Hause, H. Hartwig, M. Böhm und F. Mitschke, *Temporal soliton molecules: experimentally determined phase profiles* 18th International Congress on Photonics in Europe (IE6-5-THU), München, Deutschland (17. - 22. 6. 2007)
- [K11] M. Böhm und F. Mitschke, *Soliton content of pulses in lossy fibers*, 18th International Congress on Photonics in Europe (IE-7-TUE, Poster), München, Deutschland (17. - 22. 6. 2007)
- [K12] H. Hartwig, A. Hause, M. Böhm und F. Mitschke, *Measurement of the amplitude and phase profile of temporal soliton molecules*, Nonlinear Photonics, Quebec, Kanada (2007)
- [K13] M. Böhm und F. Mitschke, *What is the exact soliton content of pulses in lossy fibers? An uncertainty relation for solitons*, Nonlinear Photonics, Quebec, Kanada (2007)
- [K14] T. Ziems, K. V. Adarsh, M. Böhm, A. Demircan und F. Mitschke, *Self-organized supercontinuum generation from a nonlinear fiber resonator*, Nonlinear Photonics (**post deadline** talk), Quebec, Kanada (2007)
- [K15] A. Hause, H. Hartwig, M. Böhm und F. Mitschke, *Soliton molecules: Phase profiles and binding mechanism*, Quantum Electronics and Laser Science (QMK2), San Jose, USA (2008)
- [K16] M. Böhm und F. Mitschke, *An uncertainty principle for solitons*, Quantum Electronics and Laser Science (QMK3), San Jose, USA (2008)
- [K17] M. Böhm und F. Mitschke, *Solitons in Lossy Fibers: New Method, new insight*, Laser Optics 2008 (WeW3-13, **invited**), St. Petersburg, Russland, (22. - 28. 6. 2008)

## Sonstige Konferenzbeiträge und Vorträge

- [S1] M. Burk, S. Spälter, M. Böhm, P. van Loock, A. Sizmann und G. Leuchs, *Dynamik von Sub-Pikosekunden-Solitonen in optischen Glasfasern*, Verhandlungen; Frühjahrstagung der DPG, (VI) 32, 307 (Q 1.2), Mainz, Deutschland (1997)
- [S2] M. Böhm, Spälter, R. Fluck, I. D. Jung, G. Zhang, A. Sizmann, U. Keller und G. Leuchs, *Realisierung eines Femtosekunden-Cr(4+):YAG-Solitonlasers*, Verhandlungen; Frühjahrstagung der DPG (VI) 32, 345 (Q 35.3), Mainz, Deutschland (1997)
- [S3] M. Böhm und F. Mitschke, *Solitonen in Fasern mit nichtperiodisch alternierender Dispersion*, Verhandlungen; Frühjahrstagung der DPG, (VI) 34, 381 (Q 4.4), Heidelberg, Deutschland (1999)
- [S4] M. Böhm und F. Mitschke, *Solitonen höherer Ordnung in Glasfasern mit „dispersion management“*, Verhandlungen; Frühjahrstagung der DPG, (VI) 35, 1082 (Q 32.7), Bonn, Deutschland (2000)
- [S5] M. Böhm und F. Mitschke, *Ausbreitung von Lichtimpulsen in nichtperiodischen Dispersionsstrukturen*. Verhandlungen; Frühjahrstagung der DPG 39, (Q 16.5), München, Deutschland (2004)
- [S6] M. Böhm, M. Stratmann, F. Juretko und F. Mitschke, *Dispersionsmessung an optischen Komponenten*, Verhandlungen; Frühjahrstagung der DPG, 39, (Q 20.2, Poster), München, Deutschland (2004)
- [S7] M. Böhm, H. Hartwig und F. Mitschke, *Präparation von mit Flüssigkeiten gefüllten mikrostrukturierten Glasfasern*, Verhandlungen; Frühjahrstagung der DPG, (VI) 40, 161 (Q 29.2), Berlin, Deutschland (2005)
- [S8] M. Böhm, *Soliton interaction*, Institut für Optik, Information und Photonik; Max-Planck-Forschungsgruppe; Universität Erlangen-Nürnberg, Deutschland, (3. 3. 2006)
- [S9] M. Böhm und F. Mitschke, *Bestimmung des Solitonengehaltes aus Schwebungsstrukturen*, Verhandlungen; Frühjahrstagung der DPG, (VI) 41, (Q 12.4), Frankfurt, Deutschland (2006)
- [S10] M. Böhm und F. Mitschke, *Dotierte photonische Fasern in Wechselwirkung mit kohärentem Licht*, Sonderforschungsbereich SFB-652 Workshop, Dorf Mecklenburg, Deutschland, (21. - 22. 4. 2006)
- [S11] M. Böhm und F. Mitschke, *Soliton-radiation beat analysis*, Workshop: Nonlinear Dynamics in Modelocked Lasers and Optical Fibers, Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin, Deutschland, (13. - 14. Juli 2006)
- [S12] A. Hause, H. Hartwig, M. Böhm und F. Mitschke, *Solitonmoleküle in dispersionsalternierenden Glasfasern: Phasensensitive Charakterisierung*, Verhandlungen; Frühjahrstagung der DPG, (VI) 42/3 (Q 58.1), Düsseldorf, Deutschland, (2007)
- [S13] M. Böhm und F. Mitschke, *Bestimmung des Solitonengehaltes von Lichtimpulsen in verlustbehafteten Glasfasern*, Verhandlungen; Frühjahrstagung der DPG, (VI) 42/3 (Q 58.2), Düsseldorf, Deutschland (2007)
- [S14] M. Böhm und F. Mitschke, *Eine Unschärferelation für Solitonen*, Verhandlungen; Frühjahrstagung der DPG, (VI) 43 (Q 16.4), Darmstadt, Deutschland (2008)

- [S15] T. Ziem, K. V. Adarsh, M. Böhm und F. Mitschke, *Selbstorganisierte Erzeugung von Superkontinuum in einem passiven, nichtlinearen Faser-Ring-Resonator* Verhandlungen; Frühjahrstagung der DPG, (VI) 43 (Q 16.5), Darmstadt, Deutschland (2008)



# Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich ein Verfahren zur Erlangung des hier angestrebten akademischen Grades bisher an keiner wissenschaftlichen Einrichtung beantragt habe. Die vorgelegte Habilitationsschrift wurde weder im Ausland noch im Inland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt. Ich erkläre, dass ich die eingereichte Habilitationsschrift selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst, keine anderen als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Rostock im Januar 2009

Michael Böhm



# Ausgewählte Publikationen

Die nachfolgenden, ausgewählten Veröffentlichungen des Autors gehören thematisch direkt zur vorliegenden Arbeit. Die ersten drei bilden das Grundgerüst zur Bestimmung des Solitonengehaltes. Die nächsten behandeln untersuchte Multisolitonenzustände. Die letzte angehängte Veröffentlichung behandelt ein verbessertes Verfahren zur Datenauswertung. Die Veröffentlichungen sind in folgender Reihenfolge angehängt:

„soliton-radiation beat analysis“:

- M. Böhm und F. Mitschke, *Soliton-radiation beat analysis*, Phys. Rev. E, **73**, 066615 (2006)
- M. Böhm und F. Mitschke, *Soliton content of arbitrarily shaped light pulses in fibers analysed using a soliton-radiation beat pattern*, Appl. Phys. B, **86**(3) 407 (2007)
- M. Böhm und F. Mitschke, *Solitons in Lossy Fibers*, Phys. Rev. A **76**, 063822 (2007)

Solitonmolekül:

- A. Hause, H. Hartwig, B. Seifert, H. Stolz, M. Böhm und F. Mitschke. *Phase structure of soliton molecules*, Phys. Rev. A, **75**, 06383 (2007)
- A. Hause, H. Hartwig, M. Böhm und F. Mitschke, *Binding mechanism of temporal soliton molecules*, Phys. Rev. A **78**, 063817 (2008)

Solitonenaufspaltung in Glasfasern mit nichtperiodisch alternierender Dispersion:

- M. Böhm und F. Mitschke, *Soliton propagation in a dispersion map with deviation from periodicity*, Appl. Phys. B, **81**(7): 983-987 (2005)

Modifizierte Fourier-Transformation:

- M. Böhm, M. Tasche, B. Seifert und F. Mitschke *Trim-to-Coherence Fourier Transform J. of Comput. Phys.* **228** 2906-2917 (2009)



## Soliton-radiation beat analysis

M. Böhm\* and F. Mitschke

*Universität Rostock, Institut für Physik, Rostock, Germany*

(Received 17 March 2006; published 15 June 2006)

A technique is introduced which allows us to extract information on the solitonic content from a nonlinear wave. Its applicability is not as narrowly restricted as that of inverse scattering theory; therefore, it works in situations that could not be studied before. As an example we identify and demonstrate a higher order dispersion-managed soliton.

DOI: 10.1103/PhysRevE.73.066615

PACS number(s): 42.81.Dp, 42.65.Tg

### INTRODUCTION

Solitons and solitary waves are the result of a stable balance between dispersive (or diffractive) and nonlinear effects. The fascination of solitons stems from their property to be “unavoidable.” In any system that can support solitons at all, an initial condition that does not possess quite the right shape of a soliton will excite one nevertheless; even when during propagation the soliton is perturbed, it will heal out once the perturbation ends. This self-adjusting property works not only in simplified mathematical models but equally well in many real-world situations [1]—hence the considerable appeal for applications. Some of the initial energy may not go into the soliton but may be radiated off. In most cases, therefore, a nonlinear wave will contain a solitonic part and radiative background.

We here address the special case of solitons in optical fiber which take the form of picosecond light pulses traveling down the fiber [2,4]. Fiber-optic solitons now find entry into commercial optical telecommunication systems. In this context the radiative part is usually considered as something of a nuisance and has not been studied in much detail (but see [5]). The established method to tell radiative background and one or possibly several solitons apart is the inverse scattering theory (IST) [6]. Since its inception IST has led to many groundbreaking insights into nonlinear waves. IST is an analytical theory, but direct scattering transform, an important step in IST to find the soliton content, can be performed numerically for arbitrary initial conditions [7]. Note, however, that IST is valid only in integrable systems.

Here we introduce a quite different technique serving the same purpose. It is based entirely on numerical procedures. This has the obvious drawback that a single run can only analyze the situation at a particular parameter set, while an analytical result has the undeniable advantage that it immediately provides information on the scaling of results with variation of parameters. This consideration is outweighed, however, by the fact that our method demonstrably works well in many situations in which IST utterly fails: It is applicable much more generally, and in many interesting cases it is the only viable method. Indeed, any situation for which propagation can be modeled numerically seems to be accessible to our method.

The crucial insight at the core of our technique is this: The evolution of a nonlinear wave, unless it happens to be a pure soliton, looks very complicated due to interference between the solitonic content and the radiative background. The interference pattern by necessity contains information on both constituents, but so far it has never been described how this wealth of information can be decoded and utilized. This is exactly what our method accomplishes.

To introduce our method, we first describe its application to a very simple case which can also be treated analytically. This allows us to compare the results of our method with known analytical results. Finally we will proceed to apply the method to a situation which so far has not been accessible at all: In dispersion-managed fibers the dispersion is made to alternate between positive and negative; such fibers are now commercially deployed as a matter of routine. IST is not applicable to dispersion-managed fibers, but we apply our method successfully and thus demonstrate its power. Specifically, we are going to identify a dispersion-managed ( $N=2$ )-soliton, the existence of which so far has been more or less a matter of conjecture.

### THE FUNDAMENTAL SCHRÖDINGER SOLITON: ANALYTICALLY KNOWN RESULTS

To start with a simple case which can also be solved analytically, we choose here the well known nonlinear Schrödinger equation (NLSE) without any additional higher order terms, which describes the change of the pulse field envelope  $A(T, z)$  during propagation in a fiber:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + i\gamma|A|^2 A. \quad (1)$$

Here,  $z$  is the distance along the fiber, and  $T$  time in the comoving frame. The group velocity dispersion parameter  $\beta_2$  and the nonlinearity coefficient  $\gamma$  are constant fiber parameters [2]. This equation has, among others, the well-known solution of the fundamental soliton for  $\beta_2 < 0$ ,

$$A(T, z) = \sqrt{\hat{P}} \operatorname{sech}\left(\frac{T}{T_0}\right) \exp\left(\frac{i}{2}\gamma\hat{P}z\right) \quad (2)$$

where  $A$  is related to the peak power  $\hat{P} = |A(0, 0)|^2$ . Since for a soliton a dynamic equilibrium between dispersive and nonlinear effects is needed, a constraint links  $T_0$  and  $\hat{P}$ ; it can be

\*Electronic address: michael.boehm@uni-rostock.de

written as the “condition of constant action:”

$$T_0^2 \hat{P} = \frac{|\beta_2|}{\gamma} = \text{const.} \quad (3)$$

whereas the energy is

$$E = 2T_0 \hat{P}. \quad (4)$$

To better deal with multiple solitons and various launch conditions, we now introduce a specific terminology: For all quantities  $A$ ,  $E$ ,  $T$  and  $\hat{P}$  we introduce double indices, e.g.,  $T_{jN}$ , etc. The first index denotes the  $j$ th soliton ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) because below we will consider the simultaneous occurrence of several solitons.  $N$  has been called the “soliton order” [8]; it is a positive real number and serves to scale the initial condition with respect to the fundamental soliton. Thus, in the following  $T_0 \rightarrow T_{11}$ ,  $A$  and  $\hat{P}$  from Eq. (2) become  $A_{11}$  and  $\hat{P}_{11}$ , respectively, and  $E$  in Eq. (4) becomes  $E_{11}$ .

Now we choose a simple initial condition, a sech-shaped unchirped pulse to be launched into the fiber:

$$A_{1N}(T, 0) = N \sqrt{\hat{P}_{11}} \operatorname{sech}\left(\frac{T}{T_{11}}\right). \quad (5)$$

It has the total energy

$$E_{\text{tot}} = 2N^2 T_{11} \hat{P}_{11}. \quad (6)$$

Launching this pulse will result in the formation of solitons, each of which must obey Eq. (3):

$$T_{jN}^2 \hat{P}_{jN} = \frac{|\beta_2|}{\gamma} = \text{const.} \quad (7)$$

According to IST the first soliton will be generated above the threshold value of  $N = \frac{1}{2}$  [8] and will have the energy

$$E_{1N} = 2T_{1N} \hat{P}_{1N} = (2N - 1)E_{11}. \quad (8)$$

Therefore, the duration and peak power, which have to fulfill the conditions (7) and (8), are given by

$$T_{1N} = \frac{1}{2N - 1} T_{11} \quad \text{and} \quad \hat{P}_{1N} = (2N - 1)^2 \hat{P}_{11}. \quad (9)$$

The propagation of the first soliton can, therefore, be described by

$$A_{1N}(T, z) = (2N - 1) \sqrt{\hat{P}_{11}} \operatorname{sech}\left((2N - 1) \frac{T}{T_{11}}\right) \times \exp\left(i \frac{1}{2} \gamma (2N - 1)^2 \hat{P}_{11} z\right). \quad (10)$$

### PHASE DYNAMICS AND BEAT NOTES

Since we are interested in interference phenomena, the phase dynamics is most important here. We note from Eq. (10) that the phase of a soliton evolves at a time-independent rate proportional to the peak power.

In contrast, the phase evolution of linear (low power non-solitonic) waves is quite different. Such low-power waves are created from the energy that is shed by solitons in the course of shape readjustment. Their phase is time dependent: They have a parabolic dispersion relation. Therefore, they disperse away from the soliton in the course of time. In the soliton community these waves are, therefore, called radiation.

Typically, solitonic plus radiative waves will exist in a fiber simultaneously. They will therefore beat with each other. The beat pattern is determined chiefly by the phase evolution of both parts. In a more general case, there can be a vast variety of soliton-soliton and soliton-radiation interference terms. Therefore, we will use bracketed upper indices for quantities resulting from interference, like a phase difference  $\Delta\phi^{(ab)}$ , where  $a$  and  $b$  are either zero when denoting radiation, or the  $j$  value of the involved soliton.

Let us first focus on the interference pattern between the first soliton and the radiation. The interference pattern should repeat after a distance  $L^{(10)}$  if the phase difference of the two components

$$\begin{aligned} \Delta\phi^{(10)} &= \Delta\phi_{1N} - \Delta\phi_{\text{rad}} \\ &= [\phi(z + L^{(10)}) - \phi(z)] \\ &\quad - [\phi_{\text{rad}}(z + L^{(10)}) - \phi_{\text{rad}}(z)] \end{aligned} \quad (11)$$

equals  $2\pi$ . Fortunately only the strictly comoving part of the radiative wave is relevant for the long term interference; its phase is independent of  $z$ , and can be set to zero without loss of generality. Then, using Eqs. (2) and (10),

$$\begin{aligned} \Delta\phi^{(10)} &= \phi(z + L^{(10)}) - \phi(z) = \frac{\gamma}{2} \hat{P}_{1N} (z + L^{(10)}) - \frac{\gamma}{2} \hat{P}_{1N} z \\ &= \frac{\gamma}{2} \hat{P}_{1N} L^{(10)} = \frac{\gamma}{2} (2N - 1)^2 \hat{P}_{11} L^{(10)} \stackrel{!}{=} 2\pi. \end{aligned} \quad (12)$$

Now we consider the spatial frequencies of the beat notes, which are of the type

$$Z = \frac{1}{L}; \quad (13)$$

we prefer to denote them by capital  $Z$  rather than the more conventional  $k$  because we define them as inverse lengths without a factor of  $2\pi$ .

Specifically, from Eq. (12) we see that here

$$Z^{(10)} = \frac{1}{L^{(10)}} = (2N - 1)^2 \frac{\gamma \hat{P}_{11}}{4\pi} = (2N - 1)^2 Z_{\text{sol}}. \quad (14)$$

Here we introduce the spatial frequency of the fundamental soliton  $Z_{\text{sol}}$ :

$$Z_{\text{sol}} = \frac{\gamma \hat{P}_{11}}{4\pi} = \frac{1}{8z_0}. \quad (15)$$

It is equal to the inverse spatial period of the soliton; the customary definition of the soliton period  $z_0$  [2] refers to one eighth of that distance.

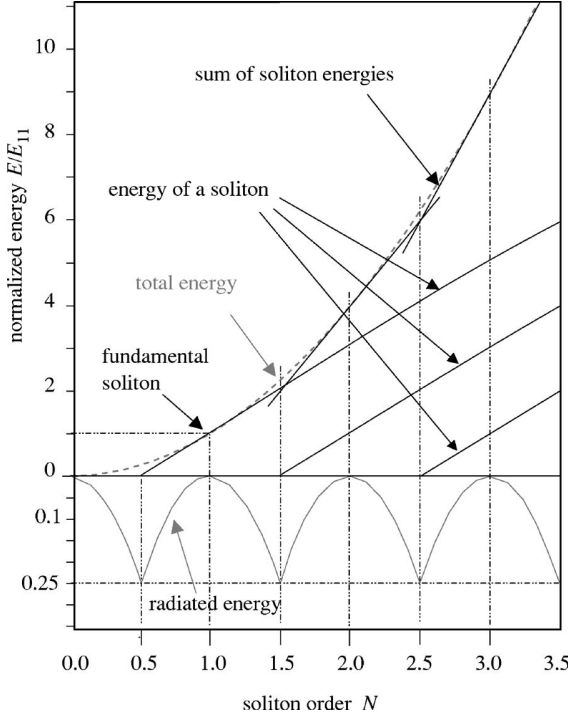


FIG. 1. Soliton content of the input pulse  $A(T,0)$  [Eq. (5)]. Upper part: The energy content of each soliton rises linearly beyond its threshold at half-integer  $N$  (three parallel slanted lines). The sum is piecewise-linear and approximates the parabola  $E_{\text{tot}} \propto N^2$  (dashed). Lower part: The difference between piecewise-linear function and parabola is the radiative energy, shown on an expanded scale. It vanishes at integer  $N$  values and has maxima at half-integer points.

Expressing  $N$  through pulse energy, Eq. (14) yields a spatial frequency of the beat between the radiation and the first soliton

$$Z^{(10)} = \frac{\gamma \hat{P}_{11}}{4\pi} \left( 2 \sqrt{\frac{E_{\text{tot}}}{E_{11}}} - 1 \right)^2 \quad (16)$$

or alternatively,

$$Z^{(10)} = \frac{T_{11}^2}{4\pi |\beta_2|} \left( 2 \sqrt{\frac{\gamma T_{11} E_{\text{tot}}}{2|\beta_2|}} - 1 \right)^2. \quad (17)$$

These expressions describe the beat spatial frequency in terms of fiber parameters ( $\gamma, \beta_2$ ) and initial pulse parameters ( $E_{\text{tot}}$  and either  $T_{11}$  or  $\hat{P}_{11}$ ). Keep in mind that this is valid only for  $N > \frac{1}{2}$  or equivalently  $E_{\text{tot}} > \frac{2|\beta_2|}{\gamma T_{11}}$ .

### EXTENSION TO MULTIPLE SOLITONS

When the input energy is increased beyond what is required for the first soliton, the fractional energy which goes into the radiative background will grow. If it reaches a sufficient amount, it can form another soliton.

We illustrate the situation with Fig. 1. Consider  $N$  as the variable to be increased from zero. As soon as  $N = \frac{1}{2}$  is

reached, a first soliton is generated; its energy increases linearly with  $N$  from then on. Once  $N = \frac{3}{2}$  is reached, another soliton is created; again, its energy increases linearly. The same repeats at every half-integer  $N$ . The solitonic energies thus scale as  $E_{1N} \propto (2N-1)$ ,  $E_{2N} \propto (2N-3)$ , etc.

The sum of the solitonic energies is given by a piecewise-linear function which is tangent to the parabola  $E_{\text{tot}} \propto N^2$  [see Eq. (6)] whenever  $N$  is integer. The difference between the piecewise-linear solitonic energy and the parabola (total energy) is the radiative energy, and is shown on an expanded scale in the lower part of the figure. For integer  $N$  (at the tangent points) the radiative energy vanishes, and all of the initial energy is invested in solitons.

The figure graphically illustrates the solitonic and radiative content for any  $N$ . For example, at  $N=2$  there are two fundamental solitons with energies  $E_{11}$  and  $3E_{11}$ .

In correspondence with Eq. (10) we can now write expressions for the isolated second soliton

$$A_{2N}(T, z) = (2N-3) \sqrt{\hat{P}_{11}} \operatorname{sech} \left( (2N-3) \frac{T}{T_{11}} \right) \times \exp \left( i \frac{1}{2} \gamma (2N-3)^2 \hat{P}_{11} z \right), \quad (18)$$

the third soliton

$$A_{3N}(T, z) = (2N-5) \sqrt{\hat{P}_{11}} \operatorname{sech} \left( (2N-5) \frac{T}{T_{11}} \right) \times \exp \left( i \frac{1}{2} \gamma (2N-5)^2 \hat{P}_{11} z \right), \quad (19)$$

etc. Again, in correspondence with Eq. (16) the beat notes with the radiative background have spatial beat frequencies

$$Z^{(20)} = Z_{\text{sol}} \left( 2 \sqrt{\frac{E_{\text{tot}}}{E_{11}}} - 3 \right)^2 \quad (20)$$

$$Z^{(30)} = Z_{\text{sol}} \left( 2 \sqrt{\frac{E_{\text{tot}}}{E_{11}}} - 5 \right)^2, \quad (21)$$

etc. Since the interference of soliton and radiation is a non-linear superposition, the interference pattern is not strictly sinusoidal. Therefore, higher harmonics of the different  $Z^{(j0)}$  occur at frequencies  $lZ^{(j0)}$  with  $l$  integer. The first three frequencies and their harmonics up to fifth order are plotted in Fig. 2.

So far we have discussed beat notes between solitons and radiative background. However, as soon as there is more than one soliton, we also need to consider beat notes between the solitons. The spatial beat frequency between the first and second soliton can be calculated from Eqs. (16) and (20) as follows:

$$\begin{aligned} Z^{(12)} &= Z^{(10)} - Z^{(20)} \\ &= Z_{\text{sol}} \left( 2 \sqrt{\frac{E_{\text{tot}}}{E_{11}}} - 1 \right)^2 - Z_{\text{sol}} \left( 2 \sqrt{\frac{E_{\text{tot}}}{E_{11}}} - 3 \right)^2 \\ &= Z_{\text{sol}} 8 \left( \sqrt{\frac{E_{\text{tot}}}{E_{11}}} - 1 \right) = 8 Z_{\text{sol}} (N-1) \end{aligned} \quad (22)$$

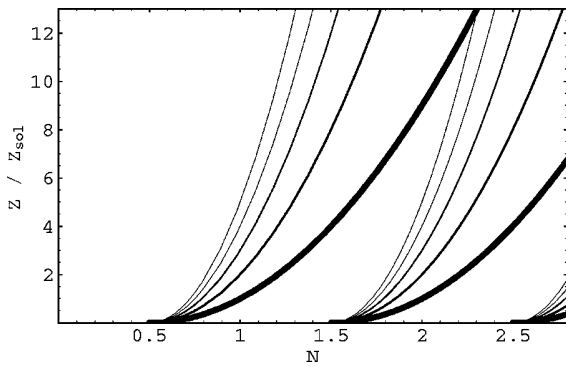


FIG. 2. Dependence of the spatial frequencies  $Z^{(j)}$  of the initial parameter  $N$ . At every half-integer  $N$  a set of traces for the corresponding soliton begins, describing the spatial frequency for the corresponding spectral peak, and its harmonics up to fifth order.

The spatial frequency  $Z^{(12)}$  exists for  $N > \frac{3}{2}$ . At  $N=2$  we recover the well-known soliton frequency  $Z^{(12)} = 8Z_{\text{sol}} = 1/z_0$  [compare Eq. (15)].

Figure 3 is an extension of Fig. 2, in that a selection of beat frequencies between solitons has been included. In particular, note the straight line that branches off from the fundamental trace of the first soliton at  $N=1.5$ ,  $Z/Z_{\text{sol}}=4$ . It represents the difference between the fundamental of the first soliton and the fundamental of the second soliton,  $Z^{(12)} = Z^{(10)} - Z^{(20)}$ . Also note the curves that bend down: They represent  $Z^{(10)} - 2Z^{(20)}$ ,  $Z^{(10)} - 3Z^{(20)}$ , etc.

So far we have rephrased well-known facts in a particular terminology. In the following paragraph we will benefit from this terminology when we introduce our method.

**NUMERICAL BEAT ANALYSIS: THE PROCEDURE**

Propagation of an arbitrary light pulse in optical fiber can be numerically computed using established methods. In general one obtains a complicated interference pattern between solitons and radiation. Figure 4 shows an example of a com-

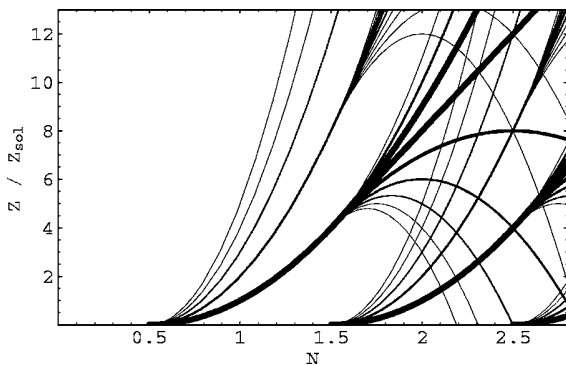


FIG. 3. Further traces have been added to the analytical beat note chart of Fig. 2. Here, combination tones between first, second, and third soliton are shown; in particular, the beat note between the fundamental frequencies of the first and second soliton is highlighted by a bold line. Traces bending down represent difference frequencies between one soliton and overtones of the next.

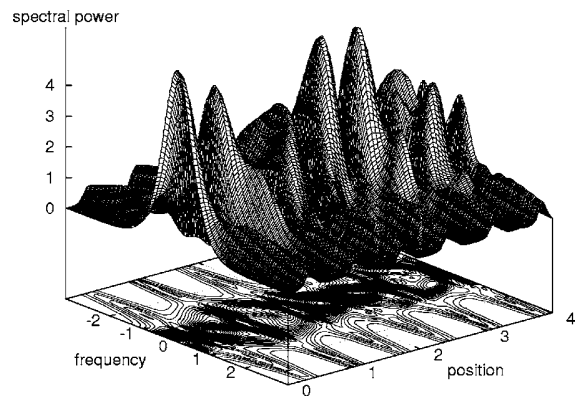
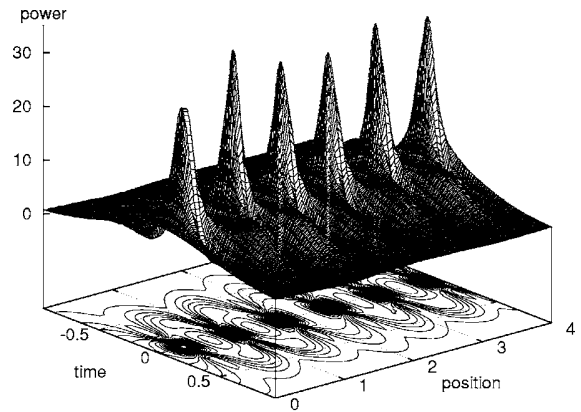


FIG. 4. Example of a complicated beat pattern in both temporal (top) and spectral (bottom) domain. Here the initial condition  $A(T, 0)$  of Eq. (5) with  $N=2.43$  was used.

puted propagation, performed using the split-step Fourier method [9]. This pattern is the result of beating between soliton content and radiative waves and must therefore contain information on both. Can useful information on the soliton content be extracted? The answer is in the affirmative.

Treatment of the problem can be simplified if we drastically reduce the amount of data in the beat pattern to a scalar evolution series of single quantity. For this quantity several choices are possible: Peak power, pulse duration, spectral peak power, or spectral width immediately come to mind. While any of these is viable, the spectral peak power will provide the best results. The reason is that as the radiation disperses away from the soliton in the time domain, the overlap between soliton and radiation is reduced. Therefore, the amplitude of the temporal beat note is soon diminished (see Fig. 5). On the other hand, in the spectral domain the soliton as well as the radiation regarded independently will not change their power spectrum, which leads to a persistent beat pattern. Therefore, we pick the spectral power at center frequency  $|\tilde{A}(0, z)|^2$  as the scalar quantity.

The next step is to take the Fourier transform of this quantity to identify the spatial frequency content in the beat pattern. It is sufficient to use only the power spectrum, and therefore we ignore the phase spectrum. Figure 6 shows the resulting power spectrum. It contains a multitude of frequencies, which become visible only when the Fourier transform yields sufficient dynamic range. For this reason we find it



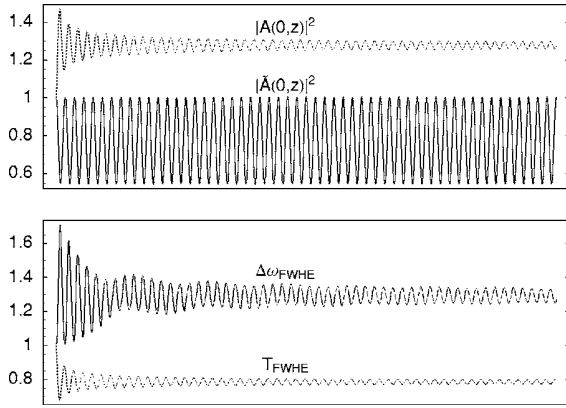


FIG. 5. Comparison of the evolution of peak power  $|A(0,z)|^2$ , spectral peak power  $|\tilde{A}(0,z)|^2$ , full width at half energy  $T_{FWHE}(z)$ , and spectral full width at half energy  $\Delta\omega(z)$ . The graph shows the propagation for  $N=1.15$  over 256 soliton periods. All traces are normalized to their initial values.

absolutely mandatory here to use a suitable windowing function for data apodization. The perfect windowing function would ensure narrow spectral peaks and good suppression of spurious responses at the same time; in reality there is always a trade-off [10]. We were successful with either a Blackman-Harris windowing function

$$f(m) = 0.35875 - 0.48829 \cos\left(\frac{2\pi m}{M}\right) + 0.14128 \cos\left(\frac{4\pi m}{M}\right) - 0.01168 \cos\left(\frac{6\pi m}{M}\right) \quad (23)$$

or a Gaussian

$$f(m) = \exp\left[-\left(\frac{m - \frac{M}{2}}{cM}\right)^2\right]. \quad (24)$$

In either case, there are  $M$  data points, and  $1 \leq m \leq M$ . The Gaussian has the advantage that the windowing strength can be easily modified by variation of the parameter  $c$  according

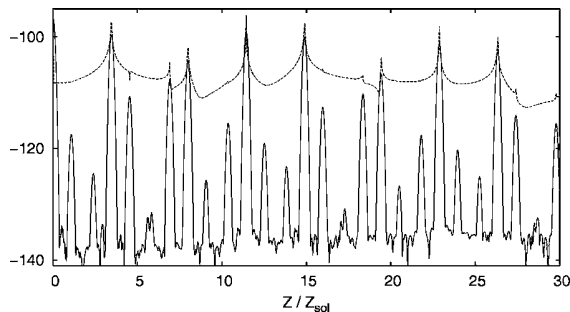


FIG. 6. Fourier transform of the spectral peak power  $|\tilde{A}(0,z)|^2$  obtained from  $z=0$  to  $z=256z_0$  at  $N=2.43$ . Dashed line: Transform without apodization (rectangular window), solid line: With apodization by a Gaussian with  $c=0.12$ .

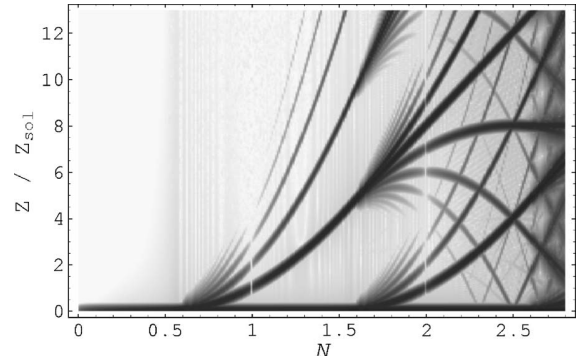


FIG. 7. Numerically evaluated beat note chart for standard fiber. Horizontal coordinate is soliton order, vertical scale is normalized spatial frequency. Each vertical line represents one power spectrum of numerical data. This figure can be directly compared to Fig. 3. Note the narrow vertical white stripes at integer  $N$ .

to the situation at hand. Typically,  $0.05 \leq c \leq 0.25$ , and  $c=0.12$  is something of a best compromise where the Gaussian acts with similar strength as the Blackman-Harris function.

Certainly, the spectrum in Fig. 6 is complicated and seems difficult to decode. The trick is to extend the picture by an additional dimension. Consider how a complicated molecular spectrum is studied by scanning a magnetic field; this causes Zeeman states to move in characteristic ways so that they can be identified. Here we scan the initial pulse parameter  $N$ . The retrieved spectra are stacked together in Fig. 7, where the spectral power is represented as gray scale. All spectral peaks evolve in characteristic ways with  $N$ ; the way they depend on  $N$  indicates their nature, and we can identify them. The reader will notice the close similarity to Fig. 3, which was based on analytical arguments: There is only a continuum below  $N=0.5$ . At every half-integer  $N$  a set of curves begins. Each set consists of a fundamental spatial frequency trace and its overtone traces (compare Fig. 2). With increasing  $N$  most spatial frequencies grow.

In contrast to Fig. 3 the traces are interrupted at integer  $N$ . This can be explained easily: The amplitude of a beat note is proportional to the product of the amplitudes of the two participating waves. In the case of a pure radiationless soliton the radiative wave vanishes (see Fig. 1), and a null in the corresponding beat amplitude results. Those traces that are punctuated by nulls can, therefore, be identified as soliton-radiation beats, the others as soliton-soliton beats. Incidentally, among all beat notes those between the solitons have the highest amplitude.

As a check on the quantitative consistency between the analytical results in Fig. 3 and the numerical data in Fig. 7 we rescale the latter so that one would expect the trace for the fundamental soliton to become a straight line through the origin. Therefore, in Fig. 8 the horizontal axis is rescaled from  $N$  to  $(2N-1)^2$  [see Eq. (14)]. The result confirms the consistency (correct threshold and scaling exponent) and facilitates identification of the ‘‘overtone’’ of the fundamental soliton trace.

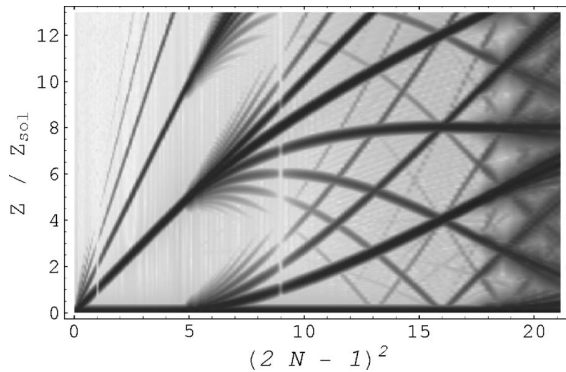


FIG. 8. Beat note chart as in Fig. 7, but rescaled to make the first soliton trace and its overtones straight. The bright stripes now appear at  $(2N-1)^2=1$  and 9, respectively.

#### APPLICATION TO MORE REALISTIC CASES

It is straightforward to apply the technique to more complex cases in which corrective terms have been added to the nonlinear Schrödinger equation like, e.g., higher-order dispersion, loss, or Raman terms. Indeed, the procedure remains exactly the same, since it makes no assumptions about integrability. When losses become appreciable over the finite time interval used for the Fourier transform, the transform will return broadened spectral lines. For exceedingly strong losses the Fourier transform does no longer yield meaningful spectral features. However, that is not a flaw of our method, but the result of an ill-posed question.

To demonstrate the power of our method, we now proceed to apply it to a case which can not be treated with conventional methods. A case of considerable current interest is pulse propagation in a dispersion-managed fiber.

To make a dispersion-managed fiber one typically concatenates fibers with different dispersion values so that the dispersion parameter  $\beta_2$  periodically alternates between a positive and a negative value. Therefore, the nonlinear Schrödinger equation [Eq. (1)] must be modified by replacing  $\beta_2 \rightarrow \beta_2(z)$ . Such a fiber is characterized by the path-average dispersion  $\beta_{\text{ave}}$ , the period length  $L_{\text{map}}=L^++L^-$ , and the map strength [3]

$$S = \frac{|\beta_2^+ - \beta_{\text{ave}}|L^+ + |\beta_2^- - \beta_{\text{ave}}|L^-}{\tau^2} \quad (25)$$

where  $\tau$  is the pulse duration (full width at half maximum).  $S=0$  recovers the homogenous case.

After the original idea of dispersion management [11] attempts have been made to mathematically describe the propagation [12] or the shape [13,14] of the soliton. IST fails in this situation:  $\beta_2$  is a function of  $z$  but cannot be replaced—not even approximately—by  $\beta_{\text{ave}}$ . Whether a viable adaptation of IST will ultimately be found or not, our method avoids such difficulties because it relies on numerical propagation which is straightforward.

In real systems it may be difficult to create the required pulse shape and chirp at the chosen launch point to generate an ideal dispersion managed soliton. As an initial condition we here choose a chirp free Gaussian-shaped pulse which is

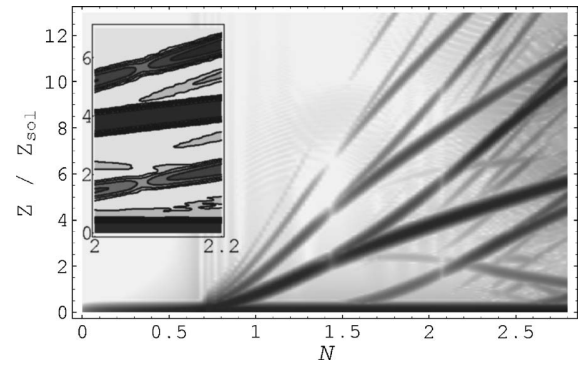


FIG. 9. Fourier-transform of the numerical data: The power spectrum is plotted as a function of the normalized spatial frequency and the soliton order  $N$  for a dispersion managed fiber with  $S \approx 1.42$ . Inset: Enlarged view of traces near  $N=2$ , rendered as shaded contour plot. This makes it easier to read the coordinates of the minima in two of the traces near  $N=2.075$ .

closer to the DM soliton than a sech-shaped pulse [14]:

$$A(T,0) = NA(0,0)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{T}{T_{11}}\right)^2\right). \quad (26)$$

$A(0,0)$  is the square root of the peak power of a soliton with  $S=0$ . We launch this pulse at a chirp-free point of the dispersion map [15] and use  $S=1.424$  and  $N \approx 1.40$ . Most of the power is incorporated into the soliton; only  $10^{-5}$  of the total launched energy ends up as radiation. Therefore, Eq. (26) provides a remarkably good approximation to the DM soliton shape. The spatial beat note diagram for this case is shown in Fig. 9.

The first observation is about the onset of the first soliton. It is difficult to read precise threshold values because the traces have a certain width and, at the branching point, are tangent to each other. In any event, the first soliton branch in Fig. 9 is shifted to higher  $N$  values in comparison to Fig. 7. Also, the characteristic nulls in the traces, indicative of a pure soliton, occur not at  $N=1$  but at  $N \approx 1.45$ . This behavior is well known and is referred to as power enhancement [16–18].

Figure 9 also shows clearly that at  $N \approx 1.5$  a second soliton sets in. Similar as above, the spectral peak  $Z^{(2)}$  then becomes the most prominent one. A remarkable observation concerns  $N \approx 2.075$ : The amplitude of each soliton-radiation beat note  $Z^{(j)}$  goes through a deep minimum, while the soliton-soliton beats do not. This is a clear signature of a nearly pure second-order soliton. It has been uncertain to date whether a second order dispersion managed soliton (“ $N=2$  DM soliton”) exists, but our method can easily reveal its existence and determine its parameters. From Fig. 9 we obtain  $Z/Z_{\text{sol}}=5.68$  and 1.73, respectively, at  $N=2.075$ . Making use of the fact that the nonlinear phase evolution as described by the phase term in Eq. (2) is not affected by dispersive effects, this translates into a ratio of peak powers of the two individual solitons of 3.3 : 1 (compare the homogenous case with 9 : 1). With this information we plot the pure  $N=2$  DM soliton in Fig. 10.

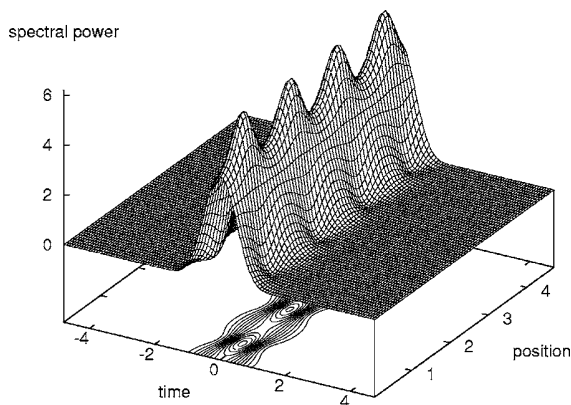


FIG. 10. A pure second-order dispersion managed soliton discovered with the new method. Parameters can be read from inset of Fig. 9; see text.

### DISCUSSION

We introduce a technique that permits the evaluation of the soliton content in a complex nonlinear wave. Since the starting point of the method is a numerical simulation it is nearly universally applicable.

However, it requires a certain finite sample length as a basis for the Fourier transform. A long sample affords better spectral resolution, which may be desirable for elevated  $N$  values where a multitude of beat notes becomes increasingly difficult to identify. The use of extended samples is uncritical for a stationary case. In contrast, in the presence of gradual

changes of soliton content, e.g., due to energy loss, choice of sample length involves a trade-off between conflicting requirements: A long sample suffers more from the gradual change, and one must balance uncertainties in position and spatial frequency.

IST makes stationarity a precondition, and thus there is no such spatial uncertainty. As a result, IST immediately provides soliton parameters for all  $z$  up to  $\infty$ . Our method is not subject to such preconditions. The price to pay is that (1) information obtained is only valid for the finite spatial interval under consideration (but this is a consequence of the nonstationarity of the problem, not of the technique), and (2) the user must make a meaningful choice of the sample length. It is a matter of future considerations whether in critical cases wavelet transforms may provide improvements.

IST also provides velocity of the solitons. We found an extension of the method presented here that allows the same information to be extracted; however, a discussion must be the subject of a forthcoming publication.

Our technique is most valuable in situations where there are no other techniques available. As an example, we have identified a dispersion-managed higher-order soliton; even the existence of this soliton was uncertain before. It is probable that our technique can also be extended to other nonlinear wave equations, like Korteweg-de Vries, etc.

### ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported in the framework of DIP 6.6 (Deutsch-Israelische Projektpartnerschaft).

- 
- [1] C. R. Menyuk, *Phys. Rev. A* **33**, 4367 (1986).
  - [2] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic, San Diego, 1995).
  - [3] A. Hasegawa and M. Matsumoto, *Optical Solitons in Fibers* (Springer, Berlin, 2003).
  - [4] L. F. Mollenauer and J. P. Gordon, *Solitons in Optical Fibers: Fundamentals and Applications* (Elsevier Academic Press, Burlington, MA, 2006).
  - [5] J. P. Gordon, *J. Opt. Soc. Am. A* **9**, 91 (1992).
  - [6] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, *Sov. Phys. JETP* **34**, 62 (1971).
  - [7] G. Boffeta and A. R. Osborne, *J. Comput. Phys.* **102**, 252 (1992).
  - [8] J. Satsuma and N. Yajima, *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **55**, 284 (1974).
  - [9] R. H. Hardin and F. D. Tappert, *SIAM Rev.* **15**, 423 (1973).
  - [10] F. J. Harris, *Proc. IEEE* **66**, 51 (1978).
  - [11] M. Suzuki, I. Morita, N. Edagawa, S. Yamamoto, H. Taga, and S. Akiba, *Electron. Lett.* **31**, 2027 (1995).
  - [12] I. R. Gabitov and S. K. Turitsyn, *Opt. Lett.* **21**, 327 (1996).
  - [13] P. M. Lushnikov, *Opt. Lett.* **26**, 1535 (2001).
  - [14] I. Gabitov, E. G. Shapiro, and S. K. Turitsyn, *Phys. Rev. E* **55**, 3624 (1997).
  - [15] M. Matsumoto, *Opt. Lett.* **22**, 1238 (1997).
  - [16] N. J. Smith, F. M. Knox, N. J. Doran, K. J. Blow, and I. Bennion, *Electron. Lett.* **32**, 54 (1996).
  - [17] N. J. Smith, N. J. Doran, F. M. Knox, and W. Forsyiaik, *Opt. Lett.* **21**, 1981 (1996).
  - [18] T.-S. Yang and W. L. Kath, *Opt. Lett.* **22**, 985 (1997).



M. BÖHM<sup>✉</sup>  
F. MITSCHKE

# Soliton content of arbitrarily shaped light pulses in fibers analysed using a soliton-radiation beat pattern

Universität Rostock, Institut für Physik, Universitätsplatz 3, 18055 Rostock, Germany

Received: 31 July 2006

Published online: 6 December 2006 • © Springer-Verlag 2006

**ABSTRACT** Arbitrarily shaped light pulses propagating down a fiber may contain one or several solitons and a radiative background. A novel computer-assisted method is introduced to identify the composition. This technique does not suffer from restrictions of applicability to integrable systems. As an example we identify the soliton content in a chirped Gaussian pulse.

PACS 42.81.Dp; 42.65.Tg

## 1 Introduction

A short pulse of light, launched into a fiber, will arrange its shape such that eventually a soliton emerges provided the parameters of the launch pulse are not too far off from the soliton solution. In the process, some excess energy is shed and forms what in the soliton community is called ‘radiation’; radiation typically moves away gradually from the pulse due to dispersion. This conventional wisdom is derived from inverse scattering theory (IST) [1], a powerful mathematical method that can decompose a propagating light signal into soliton and radiation, and determine parameters of both. The method also shows that for an initial pulse to form a soliton, a power threshold applies: for too low power, no soliton is created, while for too much power for exciting a single soliton, multiple solitons are formed.

IST is defined for integrable systems and stationary conditions. It is therefore not very useful for many realistic situations which may involve loss, or varying parameters. Dispersion-managed fibers [2], with their periodic (or even non periodic [3]) alternation of the sign of the dispersion term, present such a case for which IST is not applicable.

We describe here a novel method which makes no special assumptions on the physical situation. It has already been shown that the method functions with varying parameters, as in dispersion-managed fiber [4]. The price to pay is that more data is needed: for IST-based techniques a momentary status of the system suffices to uniquely define the soliton content [1], and there are established ways to evaluate it

numerically [5]. Our method requires propagation data (i.e. the evolution of the status over some length of fiber). This data can be generated numerically by well-established techniques, however, and so this penalty should be outweighed in many instances by the tremendously wider range of applicability.

In a fiber, one or several solitons may or may not be formed; also, radiation may or may not be generated. The basic physical insight at the core of our new method is this: the constituents of the signal, one or several solitons plus radiation, to the extent that they exist, will create a beat pattern among them. This beat pattern is plainly visible in the propagation data; in principle the beat pattern contains all relevant information about the constituents. However, so far no effort had been undertaken to decode the beat pattern. This is precisely what our method does.

We proceed to describe the method in a particularly simple case, chosen because it provides optimal transparency of the argument because all results are known from IST and can be checked directly. After that we present an application of the new method to a nontrivial situation.

## 2 Solitons of the nonlinear Schrödinger equation

Pulse propagation in optical fiber is governed by the nonlinear Schrödinger equation

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + i\gamma |A|^2 A, \quad (1)$$

in which  $A$  is the field envelope,  $z$  denotes the distance along the fiber, and  $T$  denotes time in the co-moving frame. The group velocity dispersion parameter  $\beta_2$  and the nonlinearity coefficient  $\gamma$  are constant fiber parameters. Depending on the situation, this equation may be extended by adding terms for loss, higher order dispersion, etc. [6].

We will deal here with  $\beta_2 < 0$ , where the simplest (bright) soliton is given by

$$A(T, z) = \sqrt{\hat{P}} \operatorname{sech}\left(\frac{T}{T_0}\right) \exp\left(\frac{i}{2}\gamma \hat{P} z\right). \quad (2)$$

The peak power  $\hat{P} = |A(0, 0)|^2$  and the pulse duration  $T_0$  cannot be chosen independently; rather, they are linked by the

✉ Fax: +49 381 498 6822, E-mail: michael.boehm@uni-rostock.de



‘condition of constant action’:

$$T_0^2 \hat{P} = \frac{|\beta_2|}{\gamma} = \text{const.} \quad (3)$$

To generate such a soliton, one has to launch a ‘suitable’ pulse into the fiber. If the initial pulse parameters deviate from that of the soliton, radiation and/or additional solitons are generated. Such deviations can be either in functional form (chirped pulse, Gaussian, etc.), or in a scale factor  $N$  [7], the ‘soliton order’.

To keep track of possible components, we denote all amplitudes, energies, durations and peak powers with double indices:  $A_{jN}$  will denote the amplitude of the  $j$ -th soliton with order  $N$ , etc.  $N$  is a positive real number,  $j$  is a positive integer. In keeping with this systematic terminology, we will from now on rewrite quantities in (2) and (3) as  $A \rightarrow A_{11}$ ,  $\hat{P} \rightarrow \hat{P}_{11}$ , and  $T_0 \rightarrow T_{11}$ .

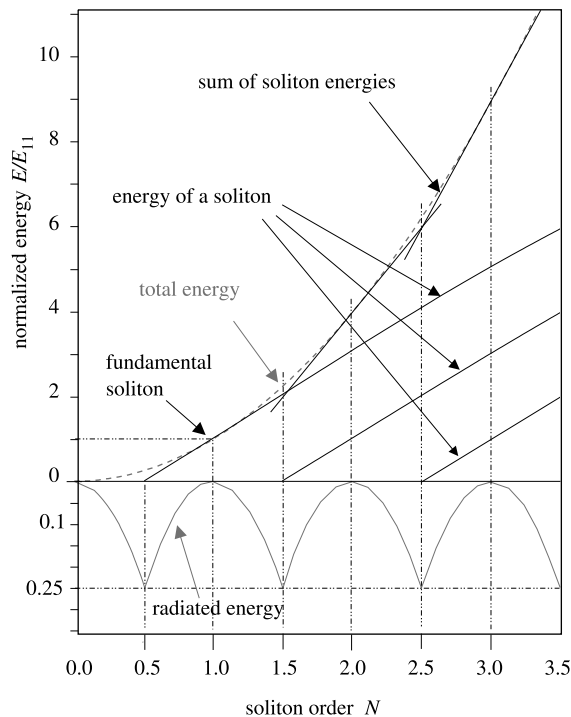
Consider now the simple case of launching a sech-shaped unchirped pulse into a fiber. The initial pulse is

$$A_{1N}(T, 0) = N\sqrt{\hat{P}_{11}} \operatorname{sech}\left(\frac{T}{T_{11}}\right). \quad (4)$$

It has the total energy

$$E_{\text{tot}} = 2N^2 T_{11} \hat{P}_{11} = N^2 E_{11}. \quad (5)$$

Figure 1 illustrates which combinations of solitons and radiation occur for various  $N$  values. As long as  $N < \frac{1}{2}$ , no soliton



**FIGURE 1** Soliton content of the sech-shaped input pulse  $A(T, 0)$  from (4). *Upper part:* soliton energies are represented by rising straight lines beginning at half-integer  $N$  values. Their sum is a piecewise-linear function; it approximates the parabola  $E_{\text{tot}} = N^2 E_{11}$  (dashed). The difference between both curves represents the radiative energy; the latter vanishes where the piecewise-linear function is tangent to the parabola, i.e. at integer  $N$  values. *Lower part:* the radiative energy, shown on an expanded scale

is formed, and all energy goes into radiation. At the threshold  $N = \frac{1}{2}$ , a first soliton is formed. Beyond the threshold, the energy of the soliton increases linearly, and the balance still goes into radiation. At the integer value of  $N = 1$  the soliton takes all of the energy, and none is left to radiation. In this situation a pure soliton as in (2) is formed. Beyond  $N = 1$ , however, there is again some radiation. Once  $N = \frac{3}{2}$  is reached, a second soliton is created; again, its energy increases linearly. In repetition of the same, at every half-integer  $N$  a new soliton is created, its energy rises linearly beyond, and at integer  $N$  values there are only pure solitons and no radiation.

It has been shown [4] that the first three solitons, considered as isolated entities, can be formulated as

$$A_{1N}(T, z) = (2N - 1)\sqrt{\hat{P}_{11}} \operatorname{sech}\left((2N - 1)\frac{T}{T_{11}}\right) \times \exp\left(\frac{i}{2}\gamma(2N - 1)^2 \hat{P}_{11} z\right), \quad (6)$$

$$A_{2N}(T, z) = (2N - 3)\sqrt{\hat{P}_{11}} \operatorname{sech}\left((2N - 3)\frac{T}{T_{11}}\right) \times \exp\left(\frac{i}{2}\gamma(2N - 3)^2 \hat{P}_{11} z\right), \quad (7)$$

$$A_{3N}(T, z) = (2N - 5)\sqrt{\hat{P}_{11}} \operatorname{sech}\left((2N - 5)\frac{T}{T_{11}}\right) \times \exp\left(\frac{i}{2}\gamma(2N - 5)^2 \hat{P}_{11} z\right). \quad (8)$$

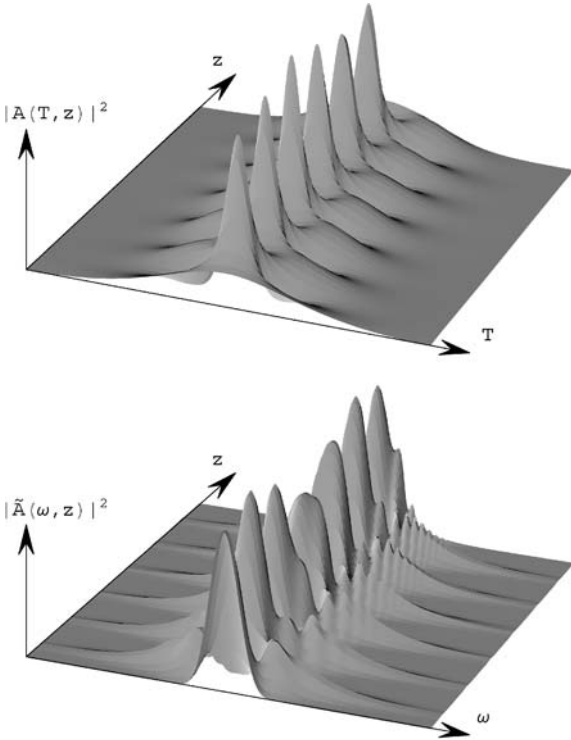
The sum of the solitonic energies is given by a piecewise-linear function which approximates the parabola  $E_{\text{tot}} = N^2 E_{11}$  (see (5)) and shares a tangent point with it whenever  $N$  is integer. The balance of total energy minus the sum of solitonic energies is the radiative energy, which is shown on an expanded scale in the lower part of the figure. One can easily read soliton and radiative energies at any  $N$  from the figure. For example, at  $N = 3$  there are three solitons with energies  $E_{11}$ ,  $3E_{11}$  and  $5E_{11}$  which adds up to  $9E_{11}$ . Since  $N^2 E_{11} = 9E_{11}$  also, no energy is left for radiation.

### 3 Beats between solitons and radiation

Figure 2 shows an example of a computed propagation, performed using the split-step Fourier method [8]. Both temporal and spectral powers go up and down without discernible periodicity (all maxima are of unequal heights). In the interest of correspondence with data below, Fig. 2 shows the case of a chirped Gaussian input pulse, but for a sech pulse according to (4) there is similar irregularity.

It is important to understand that there is no randomness involved in the irregularity; the process is entirely deterministic. Of course, the pattern results from a superposition of a finite (indeed, typically quite low) number of periodic components and is therefore quasiperiodic. What we see is thus a complicated beat pattern: Every beat note derives from one pair of constituents, and all pairs will contribute. We need to distinguish between soliton-soliton beats, and soliton-radiation beats.

Equations (6)–(8) specify the soliton’s phase evolution; the radiation’s phase is trivial. Now one can find all beat frequencies [4]. A beat period of a particular pair of constituents is determined by the distance over which their phase difference changes by  $2\pi$ . We will call the inverse of this spatial



**FIGURE 2** Example of a complicated beat pattern. Shown are time domain data ( $|A(T, z)|^2$ ) and spectral domain data ( $|\tilde{A}(\omega, z)|^2$ ). Here a chirped Gaussian pulse at  $N = 2.4$  was used as an initial condition. The picture shows the propagation over four soliton periods ( $0 \leq z \leq 4z_0$ )

period the spatial frequency  $Z = 1/z$  of their beat note<sup>1</sup> and use upper indices for the two constituents: The solitons are again numbered by  $j$ , and a ‘0’ stands for radiation. Then, the spatial frequencies of the beats of the first three solitons with radiation are given by

$$Z^{(10)} = (2N - 1)^2 \frac{\gamma \hat{P}_{11}}{4\pi} = (2N - 1)^2 Z_{\text{sol}}, \quad (9)$$

$$Z^{(20)} = (2N - 3)^2 Z_{\text{sol}}, \quad (10)$$

$$Z^{(30)} = (2N - 5)^2 Z_{\text{sol}}, \quad (11)$$

where we conveniently introduced

$$Z_{\text{sol}} = \frac{\gamma \hat{P}_{11}}{4\pi} = \frac{1}{8z_0}, \quad (12)$$

which is equal to the inverse of 8 times the soliton period  $z_0$  in its conventional definition (see, e.g., [6]).

As soon as there is more than one soliton, we also need to consider soliton-soliton beat notes. For example, the spatial beat frequency between the first and second soliton is

$$Z^{(12)} = Z^{(10)} - Z^{(20)} = 8(N - 1)Z_{\text{sol}} \quad \text{when} \quad N > \frac{3}{2}, \quad (13)$$

which for  $N = 2$  recovers  $Z^{(12)} = 8Z_{\text{sol}} = 1/z_0$  (compare (12)).

<sup>1</sup> We consistently use  $Z = 1/z$ , not  $2\pi/z$ , which is why we avoid using the symbol  $k$  for the spatial frequency.

Figure 3 graphically displays the various beat notes. The first three solitons, each beginning at a half-integer  $N$ , are shown. Since the interference of soliton and radiation is a non-linear superposition, the interference pattern is not strictly sinusoidal. Therefore higher harmonics of the different  $Z^{(j0)}$  occur at frequencies  $lZ^{(j0)}$  with  $l$  integer and are also plotted up to the fifth order.

Figure 3 also shows traces from soliton-soliton beats. In particular, note the straight line that branches off from the fundamental trace of the first soliton at  $N = 1.5$ ,  $Z/Z_{\text{sol}} = 4$ . It represents the difference between the fundamental of the first soliton and the fundamental of the second soliton,  $Z^{(12)}$ . Curves that bend down represent  $Z^{(10)} - 2Z^{(20)}$ ,  $Z^{(10)} - 3Z^{(20)}$ , etc.

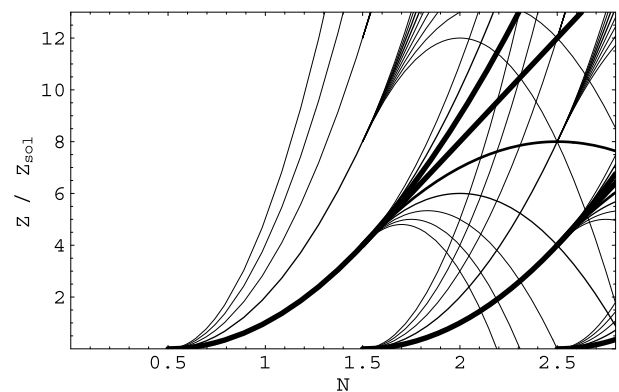
We have so far rephrased known facts in a more systematic terminology. The advantages of this terminology will become plain when we now proceed to use our method; first, on a simple case, then, in a nontrivial situation.

#### 4 Numerical beat analysis: the procedure

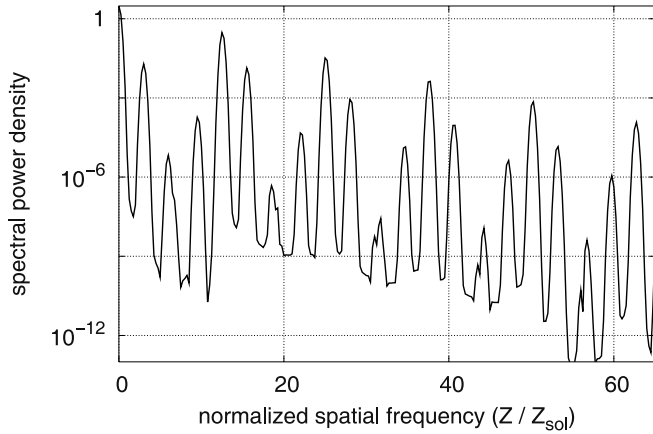
To characterize the quasiperiodic beat pattern in propagation data like those shown in Fig. 2, one might choose a time series of  $|A(0, z)|^2$  (the evolution of power at pulse center). However, radiation gradually disperses away from the solitons, and the beat amplitudes gradually diminish. In the spectral domain, there is no such diminution, and it is therefore better to use the evolution of the spectral power in the center,  $|\tilde{A}(0, z)|^2$ .

We then Fourier-transform this data series to obtain its spectral content. To obtain a good dynamic range, we find suitable apodization [9] to be critically important, and for the data shown here we employed a Gaussian apodization

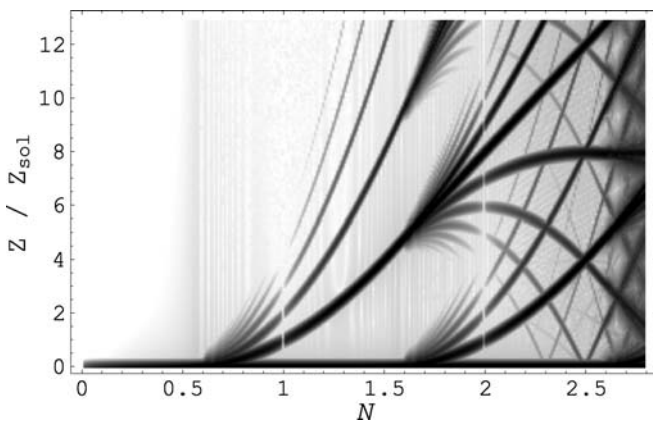
$$f(m) = \exp \left[ - \left( \frac{m - \frac{M}{2}}{cM} \right)^2 \right] \quad (14)$$



**FIGURE 3** Analytical beat note chart for a sech pulse according to (4). Three solitons, each beginning at a half-integer  $N$  value, beat with radiation, and the beat note is represented by an upward-curving branch. There are also ‘overtones’ for each such branch. All soliton-radiation beat notes have amplitude minima at integer  $N$  because radiation vanishes for pure solitons. Moreover, there are combination tones between the first, second, and third soliton. In particular, the beat note between the fundamental frequencies of the first and second soliton is a straight line beginning at  $N = 1.5$ ,  $Z/Z_{\text{sol}} = 4$ . Traces bending down represent difference frequencies between one soliton and overtones of the next



**FIGURE 4** Fourier transform of the spectral peak power  $|\tilde{A}(0, z)|^2$  of the data presented in Fig. 2, obtained from  $z = 0$  to  $z = 32z_0$  at  $N = 2.4$



**FIGURE 5** Numerically evaluated beat note chart for unchirped sech-shaped launch pulse. The horizontal coordinate is the soliton order, the vertical scale is the normalised spatial frequency. Each vertical line represents one power spectrum of numerical data in grey scale. This figure can be directly compared to Fig. 3. Note the narrow vertical white stripes at integer  $N$ , indicative of vanishing radiation amplitude. This figure was calculated for propagation over  $256z_0$ ; the spectra were calculated using  $c = 0.12$

for data points numbered  $1 \leq m \leq M$ , and with  $c$  an adjustable parameter (typically,  $c \approx 0.2$ ).

The resulting multiline spectrum (see Fig. 4) can be decoded if similar spectra are computed for different  $N$  values. The way spectral lines move with  $N$  gives away their origin. Many spectra are stacked together in Fig. 5; the spectral power is represented as gray scale. The reader will notice the close similarity to Fig. 3, which was based on analytical arguments. Below  $N = 0.5$  there is only a continuum as expected. At every half-integer  $N$  a set of curves begins. Each set consists of a fundamental spatial frequency trace and its overtone traces (compare Fig. 3). With increasing  $N$  most spatial frequencies grow.

At integer  $N$  values, some of the traces in Fig. 5 are pinched: the amplitude of the beat goes through a notch-like minimum. This identifies the trace as a soliton-radiation beat. The amplitude of a beat note is governed by the product of the amplitudes of the two constituents; in particular, the beat note amplitude will vanish whenever one of the constituents vanishes. For a pure soliton, the radiation amplitude dips down all the way to zero.

## 5 Application to chirped pulses

It is straightforward to apply the technique to more complex cases. Corrective terms may be added to the nonlinear Schrödinger equation, such as higher-order dispersion, higher-order nonlinearity, or loss terms. Also, we have complete liberty in the form of the initial condition. Indeed, the procedure remains exactly the same, since it makes no assumptions about integrability.

To demonstrate the power of our method, we now proceed to apply it to the propagation of a pulse with different initial shape. By conventional methods, even a mild change of initial conditions is a challenge. In [10] a theoretical treatment of soliton formation from chirped sech pulses in the unmodified Schrödinger equation (1) was given. Several functional forms of chirp were discussed, chosen mostly for solvability since only very special cases can be treated in closed form by IST. It was shown that with increasing chirp the soliton content is reduced; for an  $N = 2$  pulse there is a critical chirp strength beyond which a pulse can split into two separate pulses.

We will now consider a chirped Gaussian as an initial pulse. The resulting propagation is shown above in Fig. 2. This case has, to our knowledge, not been treated analytically before, even though it is quite common for a variety of lasers or optical parametric oscillators to emit chirped, more or less Gaussian-shaped pulses.

The initial pulse shape is

$$A(T, 0) = N\kappa\sqrt{\hat{P}_{11}} \exp\left(-\frac{1+iC}{2}\left(\frac{T}{T_{11}}\right)^2\right), \quad (15)$$

with  $C$  the chirp parameter. If we maintain  $\hat{P}_{11}$  and  $T_{11}$  from (4), the correction factor  $\kappa$  is required so that this pulse has the same energy as in (5). It takes the value

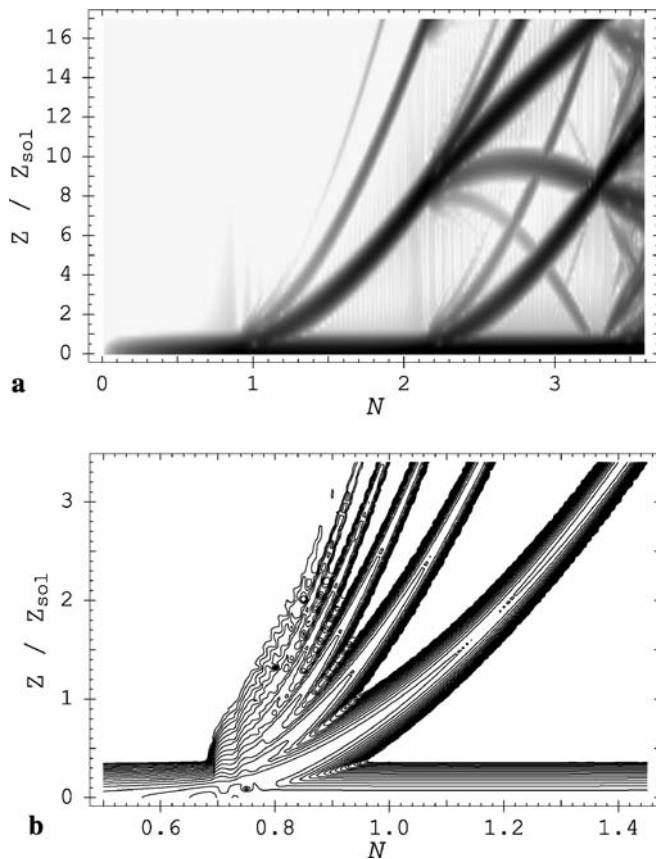
$$\kappa = 2\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\ln(2)}{\pi}}}{\text{arcosh}(3)}} \approx 1.032.$$

We have simulated the propagation of the input pulse (15) using  $C = 0.4$  over  $32z_0$ , calculated the Fourier transform of the spectral peak powers with  $c = 0.24$  (see (14)), and prepared a beat note chart from the results, which is presented in Fig. 6a. A higher-resolution magnification of a partial region, obtained with  $256z_0$  with  $c = 0.12$ , is shown in Fig. 6b. The first observation is that the threshold for the formation of the first soliton has risen in comparison to Fig. 5. To obtain precise numbers is made difficult by the flat beginning of the curve, combined with the width of the ‘zero’ peak in the spectra. From extrapolation in the magnification we obtain a rise (from previously  $N = 0.50 \pm 0.05$ ) to  $N = 0.60 \pm 0.05$ . Similarly, we find the second soliton onset at  $N = 1.8 \pm 0.1$  rather than  $N = 1.5$ .

For comparison, we have treated the same initial condition with the IST-based algorithm of [5]. We obtain thresholds at  $N = 0.60 \pm 0.01$ , and  $1.75 \pm 0.03$ . This is in perfect agreement with results of our method.

Remarkably, close-up comparison with Fig. 5 reveals that just beyond the threshold, the traces actually rise faster than





**FIGURE 6** Beat note chart for a chirped Gaussian input pulse (a). This figure contains the data of Fig. 4 at  $N = 2.4$ . The enlarged, higher-resolution segment (b) shown as a contour plot both the beginning of the first soliton-radiation beat trace at  $N = 0.6$  and its first amplitude minimum at  $N = 1.16$

for the unchirped case. This is partially explained by the later onset of the  $(j + 1)$ -th soliton which leaves some extra energy at the disposal of the  $j$ -th soliton.

There is a minimum in beat note amplitude of the first soliton with radiation. Here, the minimum is wide, and the amplitude only goes down by less than an order of magnitude (depending on choice of the reference point), not to zero. Such shallow minimum is hardly visible in the logarithmic gray scale of Fig. 6a but shows up clearly in the magnification in Fig. 6b. From this picture the minimum can be located at  $N = 1.16$ ,  $Z/Z_{\text{sol}} = 1.7$ . The shallowness of the minimum indicates that a sizeable amount of radiative energy is always present. For comparison, the best approximation to a pure first soliton, according to the method of [5], occurs at  $N = 1.15 \pm 0.05$ , in perfect agreement with our result.

## 6 Discussion

Assessment of the soliton content in a light pulse propagating in an optical fiber has been done before, but analytical approaches are limited to certain idealised pulse shapes. We present a method that is much more universally applicable. It is computer-assisted in the sense that it takes propagation data as its input, then makes use of a Fourier transform to provide a graphical display from which information can be extracted. While the total computing time amounts to considerable CPU time, the algorithms involved are in no way special and are easily implemented. After a tutorial explanation of the method we presented its application to a nontrivial case.

We claim that our method works with both arbitrary initial conditions and (almost) arbitrary propagation conditions. In [4] we demonstrated the latter point by identifying an  $N = 2$  soliton in dispersion-managed fiber, a case for which no other method exists. To address the former point, we chose here the propagation of a chirped Gaussian pulse. As simple as this case may appear from an experimental point of view, mathematically it represents a highly nontrivial situation which is just within reach of existing methods. We show that our method fully reproduces and corroborates results from the IST-based method.

It is conceivable that our method can also be applied to experimental data directly: one needs to have access to pulse data in regular intervals along the propagation distance. This might apply to soliton-forming laser resonators where pulse shape information can be obtained once per round trip at the output coupler. Shot-by-shot measurement of the spectral power at the center frequency would come very close to the type of data used above.

**ACKNOWLEDGEMENTS** This work was supported in the framework of DIP 6.6 (Deutsch-Israelische Projektpartnerschaft).

## REFERENCES

- 1 V.E. Zakharov, A.B. Shabat, *Sov. Phys. JETP* **34**, 62 (1971)
- 2 L.F. Mollenauer, J.P. Gordon, *Solitons in Optical Fibers: Fundamentals and Applications* (Elsevier Academic Press, Burlington MA, 2006)
- 3 M. Böhm, F. Mitschke, *Appl. Phys. B* **81**, 983 (2005)
- 4 M. Böhm, F. Mitschke, *Phys. Rev. E* **73**, 066615 (2006)
- 5 G. Boffeta, A.R. Osborne, *J. Comput. Phys.* **102**, 252 (1992)
- 6 G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, San Diego, 1995)
- 7 J. Satsuma, N. Yajima, *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **55**, 284 (1974)
- 8 R.H. Hardin, F.D. Tappert, *SIAM review, Chronicle* **15**, 423 (1973)
- 9 F.J. Harris, *Proc. IEEE* **66**, 51 (1978)
- 10 M. Desaix, L. Helczynski, D. Anderson, M. Lisak, *Phys. Rev. E* **65**, 056602 (2002)



**Solitons in lossy fibers**

M. Böhm\* and F. Mitschke

*Institut für Physik, Universität Rostock, Rostock, Germany*

(Received 29 August 2007; published 28 December 2007)

We consider the evolution of fiber-optic solitons in the presence of dissipation. Even very low loss ultimately leads to their decay. We derive an explicit expression for the limit of adiabaticity, and discuss the evolution beyond this limit. In determining the soliton content of the optical pulse, we contrast earlier approaches using inverse scattering with a soliton-radiation beat method. It turns out that the evolution beyond adiabaticity is governed by uncertainty, which earlier published studies had missed. Somewhat in analogy to the uncertainty principle of quantum mechanics, we derive a soliton uncertainty relation. We also give simple relations for the evolution of the pulse width which reproduce numerical studies very well.

DOI: [10.1103/PhysRevA.76.063822](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.063822)

PACS number(s): 42.81.Dp, 42.65.Tg

**I. INTRODUCTION**

Picosecond or femtosecond pulses of light propagating down an optical fiber are subject to a variety of linear and nonlinear effects, all of which tend to modify the temporal and/or spectral pulse shape. In the simplest, but sometimes justified, approximation one takes the group velocity dispersion and the optical Kerr effect (intensity dependence of the refractive index) into account, and neglects all other effects. This leads to the nonlinear Schrödinger equation (NLSE) given below as Eq. (1). It has the remarkable property of admitting solutions in which both effects form a dynamic equilibrium so that a pulse of stable shape is created: a soliton. The analytical tool to find the soliton solutions is the inverse scattering transform (IST) method, originally described for a different equation by Gardner *et al.* [1], improved by Lax [2], and first applied to the NLSE by Zakharov and Shabat [3]. In its framework, solitons are described through certain discrete eigenvalues; in general, linear radiation is also produced, which corresponds to the continuous part of the spectrum. It is of central importance to note, however, that the IST relies on the integrability of the equation.

In many cases it is more realistic to include further effects like power loss, higher-order dispersion, the Raman effect, etc., by including corresponding terms into the NLSE. These additional terms can be grouped into Hamiltonian (those that keep integrability intact) and non-Hamiltonian [4]. As long as integrability is maintained, the IST remains applicable, and one can find the eigenvalues, and thus the soliton and radiation content. Eigenvalues are integrals of motion; these are preserved even when the pulse shape evolves during its propagation. Hence the considerable importance of the IST for soliton physics, even though they are not represented by any directly observable quantities. It is precisely their robustness which led to the suggestion of eigenvalue communication [5].

Numerous efforts have been made to extend the validity of the IST to more realistic situations in which integrability is compromised. Our interest here is dissipation, i.e., power

loss, and its impact on the evolution of a single soliton. Strictly speaking, any fiber is lossy, and in practice one never deals with an integrable system. In today's fibers, Rayleigh scattering is the leading loss mechanism. Mass-produced fibers routinely reach  $\leq 0.2$  dB/km, certainly a very small number. Further reduction is challenging, though: It took 16 years to bring down the long-standing low-loss record from 1986 of 0.154 dB/km by just a minimal amount to 0.1484 dB/km [6]. In any event, the loss is and will always be non-zero; in the long haul, it will destroy any soliton.

One can still stick with the IST and treat very small loss approximately with adiabatic perturbation theory [7,8]. There are also powerful variational techniques (see, e.g., [9]) which, however, presuppose the existence of a soliton and are therefore ill suited to describe the disappearance of a soliton or the further evolution of the light pulse thereafter.

In certain cases the equation for lossy propagation can be transformed into an integrable one, and the IST can be used again [10]. Even when the fiber's own loss factor is not extremely small, periodic amplification in the fiber link is a means to reduce the power loss to zero *on average*. It has been shown that solitons can survive a periodic cycle of loss and amplification under certain conditions [11,12], but application of the IST remains approximate here. Only recently have special fibers been demonstrated in which through a clever scheme the loss is compensated by distributed gain such that the power fluctuation is minimal [13]. Apart from this latter exceptional case, the rule is that to single out solitons from a mixture of solitons and radiation, the IST is not applicable in a lossy fiber.

Since the IST, the best tool to describe solitons, fails in the lossy case, it may be not too surprising that little is known about the way in which solitons are eventually destroyed by loss. Very recently a different analysis technique was introduced, which is not impeded by loss. Soliton-radiation beat analysis has been shown to work in a case where the IST does not: It succeeded in finding soliton solutions in a dispersion-managed fiber [14]. It also works for pulses of arbitrary shape [15]. Here we apply the same technique to the case of fibers with noticeable and realistic loss, and address one of the most fundamental issues of fiber soliton physics: What exactly happens when energy is drained away from the pulse? Eventually the soliton disappears. This raises a question about the precise location of the disappear-

\*michael.boehm@uni-rostock.de

ance; however, this question turns out to be ill posed. As the soliton disappears, it becomes delocalized. We derive a special version of an uncertainty relation governing the soliton decay.

This paper is organized as follows. In Sec. II we repeat some well-known results and conclusions from soliton physics for the sake of a self-contained discussion. Then we briefly outline the method of soliton-radiation beat analysis in Sec. III. In Sec. IV we specifically address the lossy case. After reproducing a procedure described in the literature, we describe our approach and compare the two. In Sec. V the uncertainty relation alluded to above is derived and interpreted. In Sec. VI we then discuss previous numerical results in light of the insight obtained from our work. Section VII is a conclusion.

## II. SOLITONS OF THE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

Propagation of short light pulses in optical fibers is affected by several processes. Usually, the most important ones are group velocity dispersion and self-phase-modulation. Taking only these into account, the pulse propagation is described by the nonlinear Schrödinger equation

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + i\gamma|A|^2 A. \quad (1)$$

The field envelope  $A$  is a function of the distance along the fiber,  $z$ , and the time in the comoving frame,  $T$ . The group velocity dispersion parameter  $\beta_2$  and the nonlinearity coefficient  $\gamma$  are fiber parameters which are typically constant (dispersion-managed fibers present a notable exception). Depending on the situation, this equation may be extended by adding terms for loss, higher-order dispersion, higher-order nonlinearities, etc. [16].

A standard fiber has  $\gamma > 0$ , and over much of the wavelength range used for telecommunication,  $\beta_2 < 0$  (anomalous dispersion). In this case the simplest stable solution is the bright soliton

$$A(T, z) = \sqrt{\hat{P}} \operatorname{sech}\left(\frac{T}{T_0}\right) \exp\left(\frac{i}{2}\gamma\hat{P}z\right). \quad (2)$$

Here  $\hat{P} = |A(T=0)|^2$  denotes the peak power, and  $T_0$  the duration (related to the full width at half maximum of the power profile through  $\tau = \operatorname{arcosh}(3)T_0 \approx 1.763T_0$ ). The energy of this solution is given by

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |A(T)|^2 dT = 2\hat{P}T_0. \quad (3)$$

Since a soliton constitutes a dynamic equilibrium of dispersion and nonlinearity, it is useful to compare the relative strengths of the effects involved. This is best done by expressing each through its characteristic length scale:  $L_D = T_0^2/|\beta_2|$  is the dispersion length, and  $L_{NL} = 1/(\gamma\hat{P})$  the nonlinear length. For the fundamental soliton, a balance between dispersion and nonlinearity is obtained when  $L_D = L_{NL}$ . Inserting the definitions for both lengths and sorting terms for

fiber and pulse parameters, one obtains the ‘‘constraint of constant action’’

$$\hat{P}T_0^2 = \frac{|\beta_2|}{\gamma} = \text{const.} \quad (4)$$

Incidentally, this action, which is basically the time integral of energy, is also the square of the McCall-Hahn pulse area [17,18] commonly used to describe solitons in two-level atomic media [19]. Equation (4) asserts that the peak power  $\hat{P}$  and the pulse duration  $T_0$  cannot be chosen independently. The action is fixed by the ratio of the strengths of dispersion and nonlinearity, as measured by  $\beta_2$  and  $\gamma$ , respectively.

In the presence of loss, there is an exponential decay of total energy: At any  $z$ ,

$$E(z) = E(0)e^{-\alpha z}, \quad (5)$$

which for  $\alpha=0$  represents the conservation of energy, of course. Taken together, the constraints Eqs. (4) and (5) define the duration of the pulse and its peak power for each energy. To generate a pure soliton, one needs to launch a Fourier-limited pulse of the correct shape, width, and height according to Eqs. (2) and (4). If the peak power or width deviates from this condition, one has  $N \neq 1$ , where  $N = \sqrt{L_D/L_{NL}}$  is the soliton order [16,20]. As long as  $1/2 < N < 3/2$ , a soliton is still excited, but some radiation is also generated. Of the total energy  $N^2E$ , a fraction  $(2N-1)E$  is invested in the soliton, the remainder in radiation. For  $N < 1/2$  there is not enough nonlinearity for a soliton, and for  $N > 3/2$  more than one soliton is created.

## III. SOLITON CONTENT ANALYSIS

If a nonpure soliton propagates in a fiber, one sees a pulse with undulating duration and peak power. This undulation is the result of beating between the soliton and the radiation. From inspecting time domain information, it is hard to determine how much of the total energy resides in the soliton, and how much in the radiative background.

As pointed out above, the established method is by use of inverse scattering [3]. An extension introduced in [21] can even be used for any arbitrary input pulse shape. However, as soon as additional terms describing loss mechanisms need to be added to Eq. (1), none of these methods is applicable. In this situation one can still use soliton-radiation beat analysis (SRBA) [14], a technique which decodes the information contained in the beat note. This method is free of many of the assumptions implicit in use of inverse scattering:

There is no need for an analytical closed description of the pulse shape: it was shown to work with an arbitrary input pulse shape [15] just as in [21]. There is also no need for constancy of parameters: it was shown to work for a dispersion-managed fiber [14]. And, as we are going to demonstrate below, energy conservation is not a requirement for SRBA: We pursue the ultimate fate of a soliton in a lossy fiber here. The case of lossy fibers is of tremendous practical import. We will show that it also provides an interesting conceptual insight.

The core idea of the soliton-radiation beat analysis is to decode the information contained in the beating signal be-

tween a soliton and the radiative part of a pulse or additional solitons. This is feasible because the soliton's phase shift is known [see Eq. (2)], whereas the phase of the radiation, being a linear wave, is zero for the center frequency. One might argue that two solitons with identical phase evolution would not beat with each other and thus would go undetected. However, since the NLSE is nonlinear, two solitons with identical parameters cannot exist in the same place, and the objection is unfounded.

To calculate the soliton content from SRBA, the initial pulse  $A(T, z=0)$  is first propagated with some numerical method such as, e.g., the split-step Fourier method [16,22]. From the  $A(T, z)$  thus obtained one extracts a certain scalar variable  $x(z)$ . A good choice is the power at the center frequency,  $\tilde{P}(\omega_0, z)$ . This quantity is then Fourier transformed

$x(z) \xrightarrow{\text{FFT}} \tilde{x}(Z)$  to obtain its spatial frequency spectrum. The peaks in this spectrum at  $Z_i$  represent soliton-radiation beat frequencies. Identification reveals that in the event of multiple solitons there are contributions representing their fundamental frequencies  $\{Z_1, Z_2, Z_3, \dots\}$ , their harmonics  $\{2Z_1, 3Z_1, \dots\}$ , and combination tones  $\{Z_1+Z_2, Z_1-Z_2, \dots\}$ . Overtones and combination tones do nothing to help the interpretation, but the fundamentals are the beating frequencies between a fundamental soliton and radiation. The frequencies are

$$Z_{\text{sol}} = \frac{\gamma \hat{P}}{4\pi} = \frac{1}{z_{\text{sol}}} = \frac{1}{8z_0}, \quad (6)$$

where  $z_0 = (\pi/2)L_D$  is usually called the soliton period [16,23], or the lowest common beat frequency between two solitons [20,24]. The soliton content in terms of peak power  $\{\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3, \dots\}$  or energy  $\{E_1, E_2, E_3, \dots\}$  can be obtained from this information.

#### IV. SOLITON EVOLUTION IN A LOSSY FIBER

For all fibers there is some amount of loss, even though it may be small in comparison to any other material. The pulse propagation in the lossy case can be described by [16]

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + i\gamma|A|^2 A - \frac{\alpha}{2}A, \quad (7)$$

with the loss coefficient  $\alpha$ . Associated with it is the characteristic loss length  $L_\alpha = 1/\alpha$ .

The loss may be considered small if the associated characteristic length is much larger than other characteristic lengths:

$$L_\alpha \gg L_D, L_{\text{NL}}. \quad (8)$$

It is this low-loss regime in which most soliton transmission schemes—both experimental and technical—operate. Whenever the energy of the signal pulse changes slightly, the soliton adapts its shape to the shifting conditions. Therefore, both  $\hat{P}$  and  $T_0$  become  $z$  dependent:

$$E(z) = 2\hat{P}(z)T_0(z) = E(0)e^{-\alpha z}. \quad (9)$$

Equations (4) and (9) together prescribe that a gradual loss of energy  $E \rightarrow rE$  with  $r < 1$  is accommodated by a reduction of peak power by a factor  $r^2$ , accompanied by a mild pulse broadening by a factor  $1/r$ . However, this hinges on the change being gradual: A sudden change of power—at a lossy splice, say—so that suddenly  $N < \frac{1}{2}$  will result in the immediate destruction of the soliton.

We therefore have to specify when a change is gradual enough. In other words: What is the condition for the energy loss to be adiabatic? The important aspect to consider here is this. As the signal loses energy in the lossy fiber, it rearranges its shape.  $T_0$  becomes  $T_0(z)$  and increases with  $z$ , and so does  $L_D(z) = T_0^2(z)/|\beta_2|$ . The soliton does maintain  $L_D(z) = L_{\text{NL}}(z)$ , however.  $L_\alpha$  meanwhile remains constant. We now postulate that the condition for the loss being adiabatic is given by the requirement

$$L_\alpha \gg L_D(z) = L_{\text{NL}}(z). \quad (10)$$

In other words, the loss will be small over the distance of one characteristic length. Similar statements have also been proposed in [24] and in [25] but here we will specifically venture to the regime outside this condition.

The point where this condition is violated occurs at  $z = z_a$  such that  $L_\alpha = L_D(z_a)$ , or

$$L_\alpha = \frac{T_0^2(z_a)}{|\beta_2|} = \frac{T_0^2(0)\exp(2\alpha z_a)}{|\beta_2|} = L_D(0)\exp(2\alpha z_a),$$

which leads to

$$z_a = \frac{L_\alpha}{2} \ln \frac{L_\alpha}{L_D(0)}. \quad (11)$$

As a numerical example, consider a  $\tau = 1$  ps pulse in a fiber with  $\beta_2 = -20$  ps<sup>2</sup>/km. The dispersion length at the launch point is  $L_D(0) = 16.1$  m. Let us assume fiber loss of 0.2 dB/km, implying that at  $z = 15$  km the pulse has lost half of its energy. After 15 km,  $\hat{P}$  is reduced to one-quarter of its initial value, while  $T_0$  has doubled. Therefore  $L_D(15 \text{ km}) = 64.4$  m.

Using  $L_\alpha = 21.7$  km, the condition (10) becomes an equality at  $z_a = 78.3$  km, and at this point adiabaticity is lost. From here on there is a strong-loss situation, and it becomes more difficult to predict the further fate of the soliton.

#### A. Inverse scattering used for an approximation

Attempts have been made to follow the soliton during its adiabatic reshaping with the IST at least approximately, by employing the following procedure (see, e.g., [8,26]). First one propagates the input pulse with numerical methods (e.g., the split-step Fourier method), including all required effects, up to some distance  $z_s$  down the fiber. Then, one implicitly assumes that at  $z_s$  a lossless fiber is attached to the first fiber so that the soliton content can be determined from the pulse shape at  $z_s$  with direct numerical scattering in an integrable situation [21]. By repeating the procedure for many values of  $z_s$  one can map out the soliton's evolution in the lossy fiber [26].



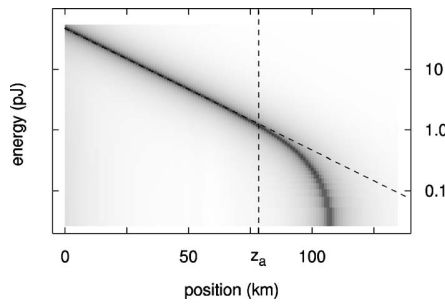


FIG. 1. Logarithm of the absolute values of the scattering coefficient shown in gray scale as a function of the position and the energy. Fiber loss of 0.2 dB/km is assumed; the natural energy decay  $\exp(-\alpha z)$  is shown for reference as the slanted dashed line. Initially the soliton contains almost all the energy; its decay follows an exponential trend. Beyond the vertical marker at  $z_a$  [see Eq. (11)], adiabaticity is lost. From here on the soliton energy decays much more quickly than the total energy: soliton energy is converted into radiation.

The IST returns a scattering coefficient  $a(\zeta)$  which in the lossless case is independent of position  $z$ . The complex parameter  $\zeta$  consists of a real part  $\text{Re}(\zeta)$  proportional to frequency, and an imaginary part  $\text{Im}(\zeta)$  proportional to energy. If  $a(\zeta)=0$ , there is a soliton. In the procedure in [8,26],  $a(\zeta)$  becomes position dependent as  $a(\zeta, z_s)$ . To demonstrate the procedure for the sake of comparison, we plot  $|a(\zeta, z_s)|^2$  at  $\text{Re}(\zeta)=0$  in gray scale in Fig. 1. The horizontal axis represents  $z_s$ , the vertical, energy as obtained from  $\text{Im}(\zeta)$ . For this figure we chose a sech-shaped pulse of  $\tau=1$  ps with  $N=1.4$ . A quick calculation shows that in this case a soliton of energy  $E_{\text{sol}}=51$  pJ is generated, while  $E_{\text{rad}}=4.5$  pJ goes into radiation. Loss was set to 0.2 dB/km,  $\beta_2=-20$  ps<sup>2</sup>/km, and  $\gamma=2.5 \times 10^{-3}$  W<sup>-1</sup> m<sup>-1</sup>. The deepest black corresponds to zero; we chose gray scale to indicate not just the position of the zero but also the fact that it is at the bottom of a relatively narrow “valley.” We will return to this observation below.

From the zero in the scattering coefficient one can see that the energy of the soliton initially decreases exponentially, at the same rate as the total energy. However, near  $z_a$  (78.3 km in this case), the soliton energy begins to decay faster, and the curve bends down. The soliton energy plummets to zero at  $z \approx 1.4z_a$ . This certainly creates the impression that here the soliton disappears. It is not obvious, however, whether the results thus obtained in a situation where the loss is turned to zero at  $z_s$  bear any relevance to the continued lossy fiber case. Replacing the fiber under consideration with an ideal fiber from  $z_s$  on amounts to changing the system. In the strong-loss regime in particular, this might be misleading. Nonetheless, this line of reasoning has been the best available so far. We will now present a procedure that does not invoke such a questionable step.

### B. Soliton decay in a lossy fiber analyzed with the soliton-radiation beat method

For comparison with the previous example using the IST, we use the same propagation parameters for soliton-radiation

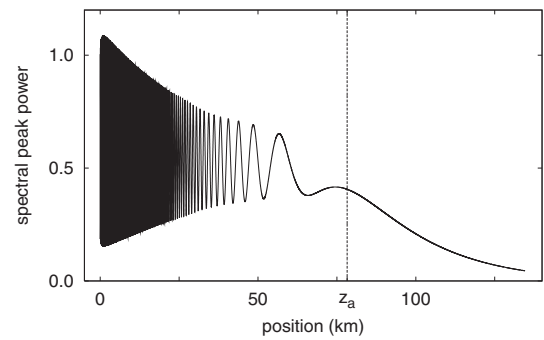


FIG. 2. Spectral power at the center frequency of a pulse in a lossy fiber. The characteristic oscillations are evaluated in a soliton-radiation beat analysis.

beat analysis. First, the pulse is numerically propagated through the fiber; here we use a conventional split-step Fourier transform method. The spectral power at the center frequency is extracted, and these data (shown in Fig. 2) will be used for further investigation. One sees that the undulation of the spectral pulse shape is rapid at first, but gradually gets slower until near  $z_a$  the eye loses the oscillation. In other words, the beat frequency chirps down.

To explicitly obtain the beat frequency as a function of position, a transform from the spatial to the spatial-frequency domain is required. This can be done with a sliding window Fourier transform. We apply a Gaussian apodization window [27] of the form

$$f(j) = \exp \left[ - \left( \frac{j-p}{\Delta p} \right)^2 \right] \quad (12)$$

for data points numbered  $1 \leq j \leq M$ . The position index  $p$  is incremented from 1 to  $M$ , corresponding to moving the physical position  $z$  from the launch point at  $z=0$  to the fiber end at  $z=z_{\text{max}}$ . At each position the function is evaluated with a positional uncertainty (standard deviation) of  $\Delta p/\sqrt{2}$ . The result is shown in Fig. 3 where the spectral power, represented in gray scale, is shown as a function of the position. For easier comparison with Fig. 1, we rescale the spatial frequency to the corresponding energy: With Eqs. (3), (4), and (6) one obtains for the adiabatic regime

$$E = 4 \sqrt{\pi \frac{|\beta_2|}{\gamma^2} Z}. \quad (13)$$

Three versions of this picture are provided, for three different window widths and thus relative positional uncertainties. From top to bottom,  $\Delta p/M=0.002$ , 0.01, and 0.06, respectively. This corresponds to positional uncertainties of  $\Delta z=190$  m, 952 m, and 5.71 km, respectively. Inspection of the top panel reveals the expected exponential decay of the beat frequency. A few higher harmonics of the beat frequency are also resolved. Unfortunately, the traces are soon swamped by the broad dark band in the figure’s lower part. It arises when one full cycle of the oscillation has about the same width as the window. It amounts to a minimum energy below which

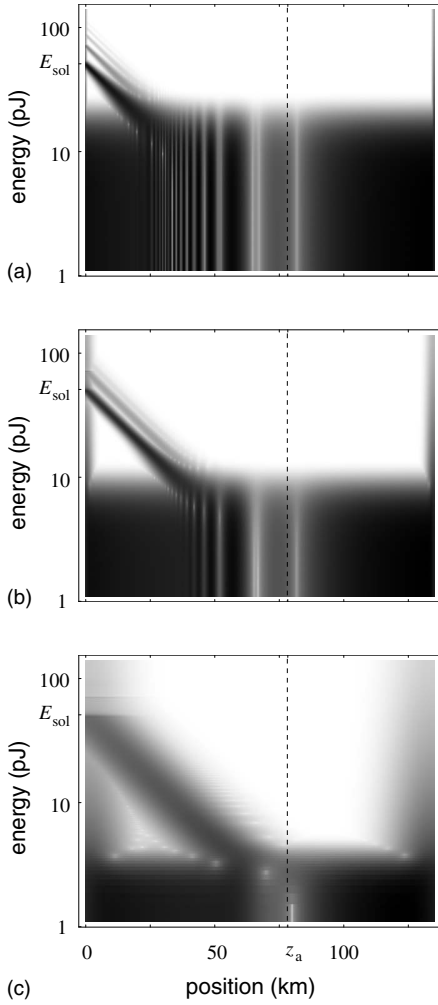


FIG. 3. Soliton-radiation beat charts as a function of the position in the fiber. Both input pulse and fiber parameters (including loss) are the same as in Fig. 2. The uncertainty in position is 190 m, 952 m, and 5.71 km for the top, middle, and bottom curves, respectively. The initial soliton energy  $E_{\text{sol}}$  and the adiabaticity limit  $z_a$  are highlighted.

no signal can be identified. The limit is reached at  $z \approx 25$  km.

This detection limit is postponed by using a wider transform window. [The width of the dark band can be calculated from Eq. (17) below. Visual inspection overestimates the width about 1.5-fold due to the logarithmic gray scale.] Unfortunately, a wider transform window renders the traces more fuzzy because more frequency variation is enclosed. In the second panel, overtones are barely resolved, but at least the trace can be followed up to  $z \approx 40$  km. In the third panel, the trace is even wider, but can be followed up to  $z \approx 60$  km. This still falls short of  $z_a$ .

A few peculiarities in Fig. 3 warrant a comment. Note from Eq. (12) that near the beginning and the end of the data set, the apodization window extends beyond the data set. This creates edge effects: The dark stripes on either edge have a width indicative of  $\Delta z$ . Also, since the trace in Fig. 2 begins at  $z=0$ , there is no oscillation for  $z < 0$ , and in par-

ticular no oscillation with a frequency higher than that at  $z=0$ . This nonexistence of higher frequencies spills over to positive  $z$  due to the  $\Delta z$  uncertainty and creates the apparent sharp cutoff at the initial soliton energy  $E_{\text{sol}}=51$  pJ, clearly visible in the bottom panel.

## V. AN UNCERTAINTY PRINCIPLE FOR SOLITONS

We now address the question whether the trade-off between uncertainties in position and energy has its cause in the analysis method employed, or whether it is fundamentally rooted in soliton physics itself.

The characteristic phase evolution of a soliton can only be discerned when a sufficiently long distance is considered. Therefore, from inspection of the pulse propagation one cannot distinguish between a linear pulse (not affected by dispersion or nonlinearity) and a soliton, as long as the propagation distance is shorter than the characteristic lengths involved.

We will present a version of the uncertainty relation which is formulated in a way analogous to the famous version in quantum mechanics. To emphasize the closeness of the analogy, we remind the reader that the Schrödinger equation of quantum mechanics,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi, \quad (14)$$

describes the propagation of the probability function  $\psi$  for a particle.  $\hbar$  is Planck's constant, and  $m$  is the particle's mass. Equation (14) can support stationary states

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \exp(-i\omega t) = \psi(\vec{r}) \exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right) \quad (15)$$

with a phase evolution proportional to the energy  $E$ . Fourier analysis of such states results in the uncertainty relation  $\Delta\omega \Delta t \geq 1/2$ . Inserting Einstein's relation  $E=\hbar\omega$  yields the well-known time-energy uncertainty relation of quantum mechanics [28]:  $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$ .

In our case, the nonlinear Schrödinger equation given in Eq. (1) supports stationary states, too. These are the solitons of Eq. (2), which we rephrase using Eqs. (6) and (13) as

$$A(T, z) = A_0(T) \exp(i2\pi Zz) = A_0(T) \exp\left(i\frac{E^2 z}{\hbar}\right). \quad (16)$$

Here we introduced the constant  $\hbar = 8|\beta_2|/\gamma^2$  for convenience. Again, Fourier transform leads to an uncertainty relation, which here reads  $(2\pi \Delta Z)\Delta z \geq 1/2$ . Equation (13) indicates that the soliton has to satisfy  $E^2 = 2\pi\hbar Z$ . Combining both conditions, we find an uncertainty relation for solitons as follows:

$$\Delta E^2 \Delta z \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (17)$$

$\hbar$  appears here in correspondence to the Planck quantum of action  $\hbar$ , but does not have the same dimension (time integral of energy) and is therefore not proportional to the action in Eq. (4). Its value is fixed as long as the soliton's environ-

ment, defined here through  $\beta_2/\gamma^2$ , containing the strengths of the linear and nonlinear effects, is constant.

To interpret the uncertainty relation, consider the best possible resolution which is obtained when Eq. (17) is an equality. Then, observe the soliton's evolution within a fixed length  $\Delta z$ . Obviously,  $\Delta E$  is constant. On the other hand,  $E$  decays exponentially, so that the *relative* uncertainty  $\Delta E/E \propto \exp(\alpha z)$ . Inevitably, the relative uncertainty will eventually become  $\Delta E/E=1$ .

A reasonable choice for  $\Delta z$  can be  $L_\alpha$ , the distance over which the deformation of the soliton becomes appreciable. One can easily verify that, for this choice, the point at which  $\Delta E/E=1$  is  $z=z_a$ . In other words, once the soliton enters the nonadiabatic phase, it is also shrouded in uncertainty. If one prefers  $\Delta z$  smaller, say a fraction of  $L_\alpha$ , the uncertainty limit is reached sooner. Figure 3 illustrates these considerations: For better positional certainty, the uncertainty horizon is reached earlier. The three panels correspond to  $\Delta z$  values of (a)  $0.0088L_\alpha$ , (b)  $0.044L_\alpha$ , and (c)  $0.26L_\alpha$ , respectively.

One concludes that the fuzzy traces in Fig. 3 are a more faithful rendering of the soliton dynamics than the relatively sharp traces in Fig. 1 (for  $z>z_a$  in particular). The sharp traces are more a result of the method, not of the object under study. Thus, the apparent sharp termination of the soliton at  $z \approx 1.4z_a$  in Fig. 1 is more illusion than fact.

## VI. DISCUSSION

In real-world fiber-optic systems, integrability is the exception, not the rule. Therefore, an analysis of pulse evolution with the time-proven method of inverse scattering is often not possible. It has therefore been unclear up to now in what way solitons decay and disappear in lossy fibers as energy is drained away from them. Indeed, it was stated in 2007 that the “question whether solitons can be ... destroyed by linear loss is a difficult one” [25].

Blow and Doran [29] tried to address this situation in 1985 by numerically following the broadening of the pulse width, but they did not explicitly distinguish between the soliton and the radiation content. They found that, after some initial stages, there is eventually a constant rate of broadening. This asymptotic rate is less than that obtained when the pulse broadens due to linear dispersion from the beginning. Their findings are now easy to understand, and can be expressed much more concisely. As long as the soliton reshapes adiabatically, its width increases according to

$$T_0(z) = T_0(0)\exp(\alpha z). \quad (18)$$

At  $z=z_a$ , one finds

$$L_D(z_a) = L_\alpha \Rightarrow T_0(z_a) = \sqrt{\frac{|\beta_2|}{\alpha}}. \quad (19)$$

Since the soliton is chirp-free, this automatically implies a corresponding narrowing of the spectrum.

Beyond  $z=z_a$ , nonlinearity no longer contributes significantly. Therefore the spectral width tends to a constant, and the temporal width is governed by linear dispersion. Numerics show that in this regime the pulse shape morphs from

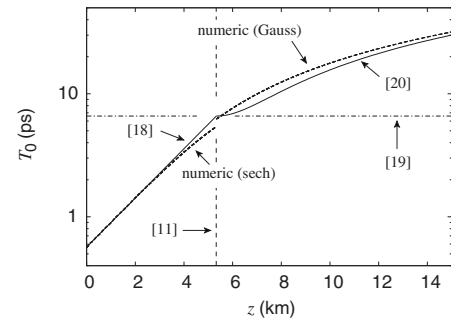


FIG. 4. Analytical approximations of the pulse width in a lossy fiber [solid lines from Eqs. (18) and (20)], compared to a numerical simulation (dashed line). The vertical marker indicates  $z_a=5.3$  km [Eq. (11)] and the horizontal marker gives  $T_0(z_a)$  [Eq. (19)]. The pulse width was determined as full width at half energy, then converted to  $T_0$ . For  $z < z_a$ , a  $\text{sech}^2$  shape was assumed for the conversion; for  $z > z_a$ , a Gaussian; hence the discontinuity at  $z=z_a$ .

nearly  $\text{sech}^2$  to more nearly Gaussian. Therefore we can describe the dispersive broadening by

$$T_0(z > z_a) = T_0(z_a) \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_a}{L_D(z_a)}\right)^2}. \quad (20)$$

The asymptotic spreading rate is then

$$\left. \frac{dT_0(z > z_a)}{dz} \right|_{z \gg z_a} = \alpha T_0(z_a) = \sqrt{\alpha |\beta_2|}. \quad (21)$$

Figure 4 shows a comparison of the predictions of Eqs. (11) and (18)–(20) with a numerical solution which basically repeats that in Ref. [29]. Here we launched an  $N=1$  soliton in a fiber with 2 dB/km loss. Obviously, the expressions derived here reproduce the numerical results very well.

## VII. CONCLUSION

We have addressed the lossy-fiber issue to discuss how a soliton eventually disappears. Solitons survive perturbations and loss, but as they adapt adiabatically to their dwindling energy, the same loss *in absolute terms* increases *in relative units* until it can no longer be considered adiabatic. We derived an expression for the transition from adiabatic to nonadiabatic loss.

Up to this transition point one can localize fairly precisely where the pulse is. To venture beyond, some authors resort to replacing the lossy fiber with a loss-free fiber at the point of interest just so that inverse scattering becomes applicable. We demonstrate that this method misleadingly produces false precision, i.e., creates the illusion of a well-defined position, where in fact positional uncertainty dominates and the solitonic character can no longer be certified—in other words where further tracing of the soliton becomes meaningless. By using an alternate procedure, the method of soliton-radiation beat analysis, we avoid this problem and arrive at a formulation which does justice to this uncertainty.

After loss of adiabaticity the soliton is quickly delocalized, as the uncertainty relation Eq. (17) asserts. To decide



whether the delocalized pulse is still a soliton would require a test over a certain propagation distance which, however, diverges, so that the test becomes inapplicable. The uncertainty in the soliton's location increases (diverges) as its energy decays (goes to zero). Note that this is not a property of any particular method of analysis, but of the soliton concept itself. This renders the question "At which point exactly does the soliton disappear?" meaningless.

On the somewhat less ambitious question about the evolution of the width of a light pulse beyond adiabaticity, we give explicit expressions which elegantly reproduce results found in earlier numerical studies.

The constant  $b$  involved in the soliton uncertainty relation Eq. (17) is not a fundamental constant of nature like  $\hbar$ ; rather, it is defined through a combination of fiber parameters and essentially gives the ratio of the strengths of linear vs

nonlinear pulse shaping effects. It is inspiring to consider, though, that within the framework of the approximations used here,  $b$  specifies the "universe the soliton lives in." The other difference between Heisenberg's uncertainty relation and Eq. (17) is that the square of the energy appears here for the soliton version, rendering it nonlinear: We find it remarkable that quantum mechanics, a linear theory, has a linear uncertainty relation, whereas the soliton, a nonlinear entity, is related to a nonlinear version thereof. This seems to be an expression of the fact that soliton physics is deeply rooted in nonlinearity.

#### ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported in the framework of DIP 6.6 (Deutsch-Israelische Projektpartnerschaft).

- 
- [1] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1095 (1967).
- [2] P. D. Lax, *Commun. Pure Appl. Math.* **21**, 467 (1968).
- [3] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, *Sov. Phys. JETP* **34**, 62 (1971).
- [4] C. R. Menyuk, *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 1585 (1993).
- [5] A. Hasegawa and T. Nyu, *J. Lightwave Technol.* **11**, 395 (1993).
- [6] K. Nagayama, M. Kakui, M. Matsui, T. Saitoh, and Y. Chigusa, *Electron. Lett.* **38**, 1168 (2002).
- [7] Y. S. Kivshar and B. A. Malomed, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 763 (1989), and references therein.
- [8] A. Hasegawa and Y. Kodama, *Solitons in Optical Communications*, Oxford Series in Optical and Imaging Sciences Vol. 7 (Oxford University Press, Oxford, 1995).
- [9] B. A. Malomed, *Prog. Opt.* **43**, 69 (2002), and references therein.
- [10] M. N. Vinoj, V. C. Kuriakose, and K. Porsezian, *Chaos, Solitons Fractals* **12**, 2569 (2001).
- [11] L. F. Mollenauer, S. G. Evangelides, and H. A. Haus, *J. Lightwave Technol.* **9**, 194 (1991).
- [12] A. Hasegawa and Y. Kodama, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 161 (1991).
- [13] J. D. Ania-Castañón, T. J. Ellingham, R. Ibbotson, X. Chen, L. Zhang, and S. K. Turitsyn, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 023902 (2006).
- [14] M. Böhm and F. Mitschke, *Phys. Rev. E* **73**, 066615 (2006).
- [15] M. Böhm and F. Mitschke, *Appl. Phys. B: Lasers Opt.* **86**, 407 (2007).
- [16] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, San Diego, 2001).
- [17] S. L. McCall and E. L. Hahn, *Phys. Rev. A* **2**, 861 (1970).
- [18] L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms* (Dover, New York, 1985).
- [19] M. Nakazawa, E. Yamada, and H. Kubota, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2625 (1991).
- [20] J. Satsuma and N. Yajima, *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **55**, 284 (1974).
- [21] G. Boffeta and A. R. Osborne, *J. Comput. Phys.* **102**, 252 (1992).
- [22] R. H. Hardin and F. D. Tappert, *SIAM Rev.* **15**, 423 (1973).
- [23] L. F. Mollenauer and J. P. Gordon, *Solitons in Optical Fibers: Fundamentals and Applications* (Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2006).
- [24] Y. Kodama, A. Maruta, and A. Hasegawa, *Quantum Opt.* **6**, 463 (1994).
- [25] J. E. Prilepsky and S. A. Derevyanko, *Phys. Rev. E* **75**, 036616 (2007).
- [26] J. E. Prilepsky, S. A. Derevyanko, and S. K. Turitsyn, *J. Opt. Soc. Am. B* **24**, 1254 (2007).
- [27] F. J. Harris, *Proc. IEEE* **66**, 51 (1978).
- [28] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **43**, 172 (1927).
- [29] K. J. Blow and N. J. Doran, *Opt. Commun.* **52**, 367 (1985).



**Phase structure of soliton molecules**

A. Hause, H. Hartwig, B. Seifert, H. Stolz, M. Böhm, and F. Mitschke\*

*Universität Rostock, Institut für Physik, Rostock, Germany*

(Received 7 March 2007; published 29 June 2007)

Temporal optical soliton molecules were recently demonstrated; they potentially allow further increase of data rates in optical telecommunication. Their binding mechanism relies on the internal phases, but these have not been experimentally accessible so far. Conventional frequency-resolved optical gating techniques are not suited for measurement of their phase profile: Their algorithms fail to converge due to zeros both in their temporal and their spectral profile. We show that the VAMPIRE (very advanced method of phase and intensity retrieval of  $E$ -fields) method performs reliably. With VAMPIRE the phase profile of soliton molecules has been measured, and further insight into the mechanism is obtained.

DOI: [10.1103/PhysRevA.75.063836](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.75.063836)

PACS number(s): 42.81.Dp, 42.65.Tg, 42.30.Rx

**INTRODUCTION**

Today's advanced fiber-optic transmission lines make increasing use of so-called dispersion-managed fibers, i.e., fibers in which segments of positive and negative group velocity dispersion alternate periodically. Typically, data are coded in a return to zero (RZ) format in which a short light pulse sits in a time slot several times wider than its width so that neighboring pulse interaction is avoided. Soliton pulses are particularly interesting because they are robust in the presence of perturbations by exploiting the Kerr nonlinearity to balance the fiber's group velocity dispersion. We demonstrated recently both numerically and experimentally that at a certain close spacing two such soliton pulses can form a stable bound state provided they are in antiphase. This compound has been called a soliton molecule [1]. Soliton molecules hold potential for further increasing the data-carrying capacity of fibers by either allowing a much denser packing of signal pulses down to the equilibrium distance of the molecule, or by using nonbinary coding (no pulse=0, single soliton=1, molecule=2, etc.). Note that soliton molecules, being nonlinear entities which have inherited stability from standard solitons, hold the promise to be more robust in the presence of perturbations than other nonbinary but basically linear schemes like quaternary phase shift keying which are currently hotly debated. The potential usefulness of soliton molecules warrants a more detailed study of their properties in general, and their binding mechanism in particular.

As we conducted systematic experiments to further characterize the range of existence and the stability properties of these soliton molecules, it became evident that the core reason for the binding mechanism resides in the phase dynamics inside the pulse. Relative phase is well known to mediate attractive or repulsive interaction between solitons [2,3]. Inspired by the discovery of soliton molecules in [1], Moltenauer and Gordon formulated an analytical model [4] in which the pulse's chirp plays the central role and which confirms the prediction of a stable bond at a particular distance.

To get experimental access to phase information, we ventured to measure the full profile (amplitude and phase) of

these compounds. In previous art no direct phase information was accessible. Established techniques for amplitude and phase characterization like FROG [5] and its numerous variations [6,7] turn out to be inadequate for assessment of these relatively weak pulses with complex shapes: They not only suffer from ambiguities; the algorithms often tend to stagnate if the temporal and spectral power profiles are highly structured as in this case. The power profile of soliton molecules has a central  $\pi$  phase jump and therefore a central zero; by necessity, the power spectrum then also has zeros.

Interferometric methods like spectral phase interferometry for direct electric-field reconstruction (SPIDER) [8] do not present a viable alternative here because the spectral zeros in the power profile of the soliton molecules are an impediment for this technique, too. SPIDER's phase reconstruction procedure involves a step referred to as "concatenation" [8,9], basically a numerical integration of the derivative of the spectral phase. Since the spectral phase is not defined at zero spectral power points, SPIDER is prone to suffer from undetermined spectral phase jumps, and hence ambiguous temporal profiles. Note that the numerical integration step also used in techniques like measurement of electric field by interferometric spectral trace observation (MEFISTO) [10] and blind MEFISTO [11] causes the same problems.

We present a successful experimental characterization of amplitude and phase profiles of a soliton molecule in an optical fiber by application of the VAMPIRE method (very advanced method of phase and intensity retrieval of  $E$  fields) invented by Seifert *et al.* [12]. More detail about this method is given below, but first we describe the experimental setup.

**SOLITON MOLECULE: EXPERIMENTAL SETUP**

As a light source we use an optical parametric oscillator (Mira OPO advanced linear CTA, APE GmbH, Berlin), pumped by a mode-locked Ti:sapphire laser (Mira 900-F, Coherent Inc., Santa Clara). This system was modified for an increased temporal pulse width. The pulse shape is nearly Gaussian with a mild linear chirp, as in  $\exp[-(1+iC)t^2/T_0^2]$ . The temporal width is  $\tau_{\text{FWHM}} \approx 1.763 T_0 = 250$  fs, and  $C \approx 0.41$ . The center wavelength is 1595 nm, and the repetition rate is 56 MHz.

\*Electronic address: [fedor.mitschke@uni-rostock.de](mailto:fedor.mitschke@uni-rostock.de); URL: [www.physik.uni-rostock.de/optik](http://www.physik.uni-rostock.de/optik)

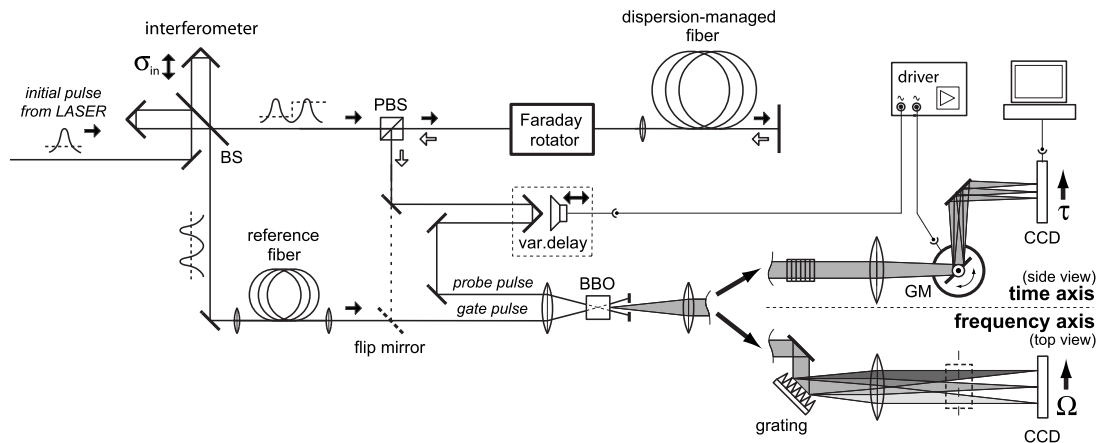


FIG. 1. Experimental setup. BS: beam splitter; PBS: polarizing beam splitter; BBO: nonlinear crystal; GM: galvanometer scanner. The initial pulse is split, delayed, and recombined in the interferometer to generate the double pulse with the desired relative phase and separation. The probe pulse propagates through the dispersion-managed fiber, while the gate pulse propagates through the reference fiber. The BBO crystal generates the cross-correlation signal, and a diffraction grating spectrally disperses it. The spectra are focused on an electronic camera (CCD). The delay axis is swept by a mirror mounted on a galvanometer scanner actuated synchronously with the variable delay of the probe pulse.

The light pulses are sent through a variable attenuator consisting of a half wave plate and polarizing beam splitter to set the desired power level. By way of a Mach-Zehnder interferometer the pulses are split, delayed, and then recombined to form a pulse pair of adjustable temporal separation  $\sigma_{in}$  (see Fig. 1).  $\sigma_{in}$  is precisely known from the path length difference which is a better criterion than distance between maxima, in particular for small distances. A piezoceramic transducer allows us to fine tune the path length difference, and thus both  $\sigma_{in}$  and the relative phase of the pulse pairs. The double pulses taken from one of the interferometer outputs are launched into the dispersion-managed fiber line. (The other output remains unused at this point, but becomes important below.)

In the fiber line segments of normally and anomalously dispersive fiber alternate; the segment lengths are  $L^+$  and  $L^-$ , and the line begins and ends with a half-segment of anomalously dispersive fiber. Second order dispersion is not fully compensated so as to give a negative path average dispersion of  $\bar{\beta}_2 = -2.3 \text{ ps}^2/\text{km}$  to support soliton formation. Third order dispersion is nearly compensated by appropriate choice of fiber. The map strength is  $S=3.8$  based on the definition

$$S = \frac{|\beta_2^+ - \bar{\beta}_2|L^+ + |\beta_2^- - \bar{\beta}_2|L^-}{\tau_{FWHM}^2}. \quad (1)$$

Here  $\beta_2^+$  and  $\beta_2^-$  are the second order dispersion parameters for normally and anomalously dispersive fiber, respectively.

Since the fibers in the line with different dispersion also have different modal area, there are splice losses which limit the useful number of dispersion periods. While in Ref. [1] just three periods were used, we now double this number by using the fiber in a double-pass configuration: At the end of the fiber line, the pulses are reflected back by a mirror so as to pass through it once again in reverse direction. A Faraday rotator before the fiber line rotates the plane of polarization

by  $\pi/4$ , and once again after the second pass. Thus the counterpropagating pulses are orthogonally polarized with respect to the launched pulses and can be coupled out by a polarizing beam splitter.

Six dispersion periods per double-pass correspond to  $4.2L_D$ , where  $L_D = T_0^2/|\beta_2|$  is the characteristic dispersion length. This is not a very high value but an improvement over the first demonstration in [1].

Data acquisition involves a spectrometer (not shown in Fig. 1) which provides measurement of spectral power profiles, and a replacement of the autocorrelator used in the first experiment [1], configured in order to allow phase retrieval as described below.

## PHASE RETRIEVAL: CHOICES

A variety of techniques exist for full assessment of pulse profiles. FROG is possibly the best-known representative [5], and there are different variations of FROG [6]. The central idea is to measure temporal and spectral information simultaneously in some combined fashion, and then reconstruct the amplitude and phase profiles from the raw data by way of a suitable algorithm. Quite generally all existing techniques show the best results by analysis of more or less simple pulse shapes, such as the output pulses from lasers. More complex amplitude profiles remain problematic for all variations of FROG, in particular when there are zeros or well separated parts in the temporal or spectral domain [7]. In such cases, iterative FROG algorithms [6,13] often do not converge and give meaningless and simply wrong output. Therefore, a reliable full field reconstruction of arbitrary pulse shapes could not be guaranteed by conventional FROG methods.

Of all FROG methods, SHG FROG seems to be the most widely used. Its name is derived from the fact that it uses autocorrelation involving second harmonic generation, its popularity seems to stem from its relative simplicity.

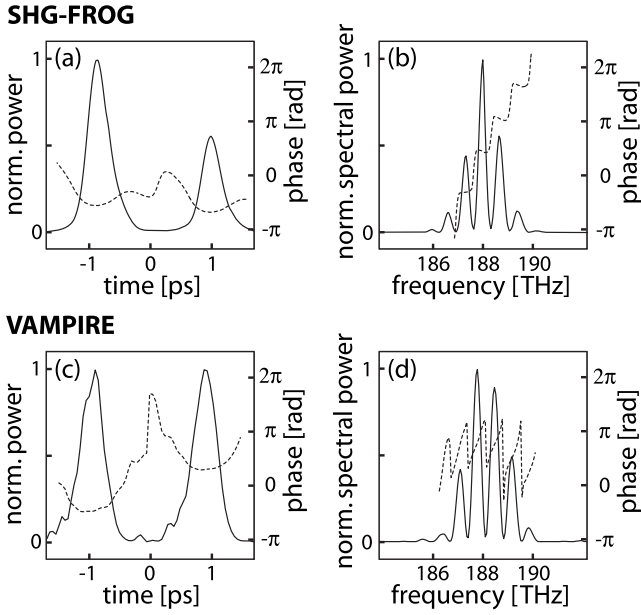


FIG. 2. Reconstructed power profiles and spectra (solid lines), temporal, and spectral phase functions (dashed lines) of an antiphase double pulse. All panels refer to the same experimental conditions. (a) Temporal profile obtained from SHG FROG with conventional reconstruction algorithm. Note that this fails to show a phase jump of  $\pi$ . (b) The complex spectrum retrieved as in (a). This erroneously suggests an in-phase double pulse. (c) Temporal profile obtained from VAMPIRE. This yields the correct pulse shape and temporal phase function. (d) The complex spectrum corresponding to (c), phase retrieved from VAMPIRE, and power profile as measured directly.

Initially we attempted to measure the phase profiles of soliton molecules with SHG FROG. With some minor modifications or extra steps, ambiguities regarding time direction could be avoided, but serious problems arose from the zeros in the spectral profile [7] of the soliton molecules and the concomitant stagnation behavior of the used standard commercial algorithm [14]. A typical reconstruction result from SHG FROG is shown in Fig. 2.

In principle, these problems might be overcome by using a FROG variety based on cross-correlation, known as XFROG [6,15]. However, XFROG requires full and detailed knowledge of the reference pulse. Any errors in the assessment of the reference will propagate into the final result. It is not obvious how one would obtain, and how one could verify, such a reference pulse. Therefore, the use of XFROG is not practical here. Moreover, there is no guarantee that this technique solves the stagnation problem of the reconstruction algorithm.

Then there is blind FROG [6,13]. This is another cross-correlation technique which—as the name suggests—does not require any advance knowledge of the shape of either the pulse to be measured or the reference pulse. It can operate with arbitrary fields  $E_1(t)$  and  $E_2(t)$ . In practical terms, blind FROG has a huge advantage over XFROG in that no exact knowledge of the reference pulse shape is necessary. Nevertheless, there is no general guarantee that a unique field reconstruction is possible. This remains true even when one

employs the additional information about the spectral intensities of both pulses,  $|\tilde{E}_1(\omega)|^2$  and  $|\tilde{E}_2(\omega)|^2$ , obtained from independent measurements [12].

We therefore turned to a technique based on [12] called VAMPIRE. VAMPIRE is derived from blind FROG and is based on cross-correlation of the signal under study with some well chosen but not completely characterized reference pulse. This absence of full specification of the reference pulse is one of the differences between VAMPIRE and techniques like XFROG.

We turn to a brief description of the VAMPIRE technique. The two signals to be cross-correlated, i.e., signal and reference, are also known as probe pulse and gate pulse. The measured VAMPIRE spectrogram (somewhat of a misnomer, perhaps, since not just a spectrum is plotted, but the term is commonly used nevertheless [7,16]) can be expressed as

$$I(\Omega, \tau) \propto \left| \int_{-\infty}^{\infty} E_{\text{gate}}(t) E_{\text{probe}}(t - \tau) e^{i\Omega t} dt \right|^2 \\ \propto \left| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_{\text{probe}}(\omega) \tilde{E}_{\text{gate}}(\Omega - \omega) e^{i\omega\tau} d\omega \right|^2, \quad (2)$$

where  $E$  and  $\tilde{E}$  denote the complex temporal and spectral field, respectively.  $\Omega$  defines the spectral axis and  $\tau$  is the delay.

The reason why VAMPIRE can guarantee the uniqueness of full field reconstruction is that  $E_{\text{gate}}(t)$  can be chosen such that  $I(\Omega, \tau)$  does not suffer from nontrivial ambiguities. Ideally, this would be achieved by a well-separated double pulse structure with an asymmetry in duration, peak power, and chirp of the individual pulses [12]. A sufficient asymmetry is required, but detailed knowledge of the structure is definitely not. For example, a suitable gate pulse could easily be generated by splitting a laser pulse into a pair by means of a Mach-Zehnder interferometer with a dispersive element in one of its arms. This way the VAMPIRE spectrogram would contain two spectrally dispersed signals from the cross-correlations of the probe pulse with the two different components of the gate pulse so that the required noncentrosymmetric spectrogram is obtained [12]. In comparison to other pulse retrieval techniques, the asymmetry thus provided in the cross-correlation contains just that extra amount of information which guarantees a unique relation between the cross-correlated pulses and the spectrogram.

Beyond this procedure to enhance the information content of the spectrogram, there is a different reconstruction algorithm for VAMPIRE which exploits this information to obtain a unique reconstruction. Stagnation is a persisting problem of conventional iterative FROG algorithms [6,13] but is avoided by VAMPIRE [12] in a special way.

The evaluation of the spectrogram begins with a single row of the spectrogram. For a fixed parameter  $\Omega$  this row can be expressed by

$$I_{\Omega}(\tau) \propto |\mathcal{F}_{\omega \rightarrow \tau}[G_{\Omega}(\omega) \exp\{i\phi_{\Omega}(\omega)\}]|^2, \quad (3)$$

where



$$G_{\Omega}(\omega) = |\tilde{E}_{\text{probe}}(\omega)| |\tilde{E}_{\text{gate}}(\Omega - \omega)| \quad (4)$$

and

$$\phi_{\Omega}(\omega) = \phi_{\text{probe}}(\omega) + \phi_{\text{gate}}(\Omega - \omega). \quad (5)$$

The choice of this first row is arbitrary; one can therefore pick the one with the best signal-to-noise ratio and asymmetry to minimize the risk of stagnation. From this row one finds its spectral phase function  $\phi_{\Omega}(\omega)$  with an additional constant  $C_{\Omega}$  by using a Gerchberg-Saxton algorithm [17] or equivalent method. The power spectra  $|\tilde{E}_{\text{gate}}(\omega)|^2$  and  $|\tilde{E}_{\text{probe}}(\omega)|^2$  are easily obtained by an independent measurement.

Next, one proceeds with a neighboring row and repeats the Gerchberg-Saxton iteration, this time using the phase function from the first row as an initial guess. Then one continues until all rows are covered. This procedure is different from commonly used iterative algorithms in that VAMPIRE treats the spectrogram locally, not globally. This provides the means to check every single row for stagnating behavior: In every Gerchberg-Saxton loop, the error between the intermediate result and the measured data is calculated. After several iterations, rows with a low error are kept, while those with a higher error may be discarded. Discarding questionable data is no big loss since spectrograms are overdetermined. By this procedure, VAMPIRE is not only guaranteed to converge, but the convergence time is reduced drastically with respect to the commonly used PCGP algorithm [6,13]. At this point one arrives at an array of complex values  $G(\Omega, \omega) \exp\{i[\phi(\Omega, \omega) + C(\Omega)]\}$ . In a second step one can retrieve the spectral phase functions  $\phi_{\text{gate}}(\omega)$  and  $\phi_{\text{probe}}(\omega)$  from this array. This step has been proven to yield unambiguous, unique results [12]. The arbitrary phases  $C(\Omega)$  can be eliminated in this step; only constant and linear phase terms (corresponding to absolute phase and time) trivially remain undetermined. Finally, the complex temporal structure is obtained in a straightforward fashion by Fourier transform.

The key feature of VAMPIRE is that it is not thwarted by zeros in the temporal or spectral power profile. This sets it apart from previous art and makes it the natural choice for situations as described here.

### PHASE RETRIEVAL: IMPLEMENTATION

We successfully use a gate pulse which is derived from the unused output of the Mach-Zehnder pulse-splitting interferometer mentioned above. At this secondary output we have a double pulse, and whenever the first output provides antiphase pulse pairs, the secondary output gives in-phase pulse pairs. We send the signal from the secondary output through an auxiliary fiber which serves the double purpose of conditioning filter and delay line. As a delay line, the auxiliary fiber ensures that the signals to be cross-correlated arrive simultaneously. For pulse shaping, it is composed of one segment of fiber with positive  $\beta_2$  followed by one segment of fiber with negative  $\beta_2$ . A full compensation of dispersion to zero is not desired; rather, a well-chosen undercompensation

imparts a particular amplitude and phase profile characterized by a weakly chirped central main peak and strongly chirped adjacent peaks. This power profile serves the purpose of generating a noncentrosymmetric VAMPIRE spectrogram as required.

Both gate and probe pulses are noncollinearly focused into a nonlinear crystal [beta-barium borate, (BBO)], which is part of the cross-correlator setup. There is a variable temporal delay, provided by a retroreflector mounted on the periodically moving membrane of a loudspeaker. The cross-correlation signal is spectrally dispersed with a blazed grating (1200 lines/mm) and focused onto the light-sensitive element of an Apogee AP7 camera. This camera has a cooled CCD chip of  $512 \times 512$  square pixels of  $24 \mu\text{m}$  pitch. We adjust so that the spectral direction of the VAMPIRE spectrogram is imaged along pixel rows. We then disperse the temporal direction along pixel columns by deflecting the beam with a mirror mounted on a galvanometer scanner (G115, General Scanning, Inc.) which is driven in synchronism with the loudspeaker. It turned out to be difficult to have the images from forward and backward scanning fall onto each other with precision, so we blocked the beam during the backward scan with a mechanical shutter (not shown in Fig. 1).

Different delays between the gate and probe pulses produce characteristic spectra on different rows of the CCD. In the interest of scan linearity, we overdrive the scan range so as to overfill the CCD; this way only the central portion of the sinusoidal motion is used. A complete scan (of which  $\approx 30$  are taken in a second) maps out a complete 2D image, the VAMPIRE spectrogram as discussed above. The complete information about the complex structure of both probe and gate pulses (signal and reference) is contained in the VAMPIRE spectrogram, waiting to be properly decoded.

For the sake of fair comparison we also recorded conventional SHG FROG signals with the same setup after converting from cross-correlation as described here to autocorrelation, basically by flipping a beam-steering mirror (see Fig. 1).

Projecting all image data onto the temporal axis or frequency axis produces the time or spectral marginal, respectively; these can be useful for calibration and checks. It is necessary to conduct a precise calibration of the spectrogram. A calibration of the spectral axis was done by recording a double pulse SHG FROG spectrogram and adjusting the positional offset and scale factor of its frequency marginal to that of the self-convolution of the independently measured probe pulse spectrum. (If the two do not compare well, the particular data set is discarded). For a calibration of the delay axis a stack of thin glass plates is used, mounted together like a stair so as to provide a stepped thickness. Upon its insertion, a series of equidistant replicas of some test pulse is produced on the camera. This series allows an assessment of scale and nonlinearity of the axis, and based on this information, remaining temporal nonlinearity is removed. Finally, the calibrated image needs to be clipped to  $512 \times 512$  pixels again so that the digitization steps in temporal and spectral domain ( $\Delta\tau$  and  $\Delta\Omega$ , respectively) fulfill the constraint of  $\Delta\tau = 2\pi / (512\Delta\Omega)$ .

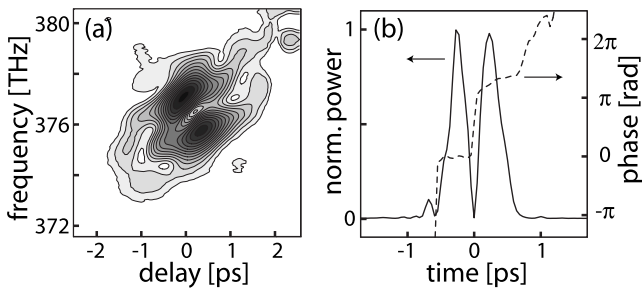


FIG. 3. Example of a characterization of soliton molecules using VAMPIRE. (a) Measured VAMPIRE spectrogram after calibration and linearization as described in the text. (b) Power and phase profile reconstructed from (a). The double-peaked structure with a phase jump of  $\pi$  at the central zero power point, characteristic for a soliton molecule, is clearly evident.

### COMPARISON OF SHG-FROG AND VAMPIRE

We recorded a number of spectrograms for each SHG FROG and VAMPIRE. SHG FROG spectrograms were evaluated with a standard commercial reconstruction algorithm [14] and VAMPIRE spectrograms as described above.

SHG FROG was less than successful: The algorithm tended to stagnate due to inherent nontrivial ambiguities [12]. When SHG FROG provided a reconstruction, it was often demonstrably misleading. A typical example is shown in Figs. 2(a) and 2(b). From the independently recorded spectrum we know that there ought to be a central zero, whereas SHG FROG in this case provides a central maximum. Similarly, the temporal profile is just wrong because it does not at all show the central phase jump.

In contrast, phase retrieval using VAMPIRE consistently produced the correct result. Figures 2(c) and 2(d) show the result for the same experimental situation as in Figs. 2(a) and 2(b). It is evident that both the phase jump and the correct position of zeros are reproduced well. Also, the parabolic phase around the power maxima comes out much clearer.

### INFORMATION OBTAINED ON SOLITON MOLECULES

In Fig. 3, a measured VAMPIRE spectrogram is shown together with the temporal power and phase profile reconstructed from it. The initial pulse parameters have been chosen so that soliton molecule formation is possible: An antiphase double pulse (initial separation  $\sigma_{in}=530$  fs, pulse pair energy 142 pJ) was launched into the fiber line. The data shown represent an average over 10 s exposure time in order to ensure a good signal-to-noise ratio. Care was taken to ensure that parameters were held constant during measurement.

In order to investigate the molecule's stability with respect to parameter variations, and to obtain further insight into the binding mechanism, we varied the initial launch separation  $\sigma_{in}$  from 0.5 ps to 1.5 ps corresponding to 2–6 pulse widths. Phase and power profiles were extracted for each case. Selected results are shown in Fig. 4.

Two vertical dashed lines in the figure denote the soliton molecule's equilibrium separation  $\sigma_{out}=0.55$  ps. This separa-

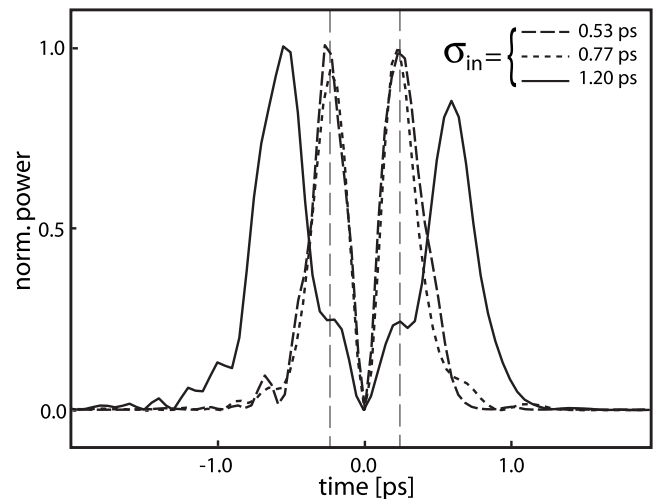


FIG. 4. Typical pulse shapes as reconstructed with VAMPIRE at the end of the fiber line. For values of  $\sigma_{in}$  in the range of 0.53 ps and 0.77 ps, the pulse shapes at the end of the fiber are nearly the same;  $\sigma_{out} \approx 0.55$  ps (dashed vertical lines). If  $\sigma_{in}$  is larger (1.20 ps), the main peaks remain at a larger spacing. Note, however, that secondary peaks appear at  $\sigma_{out} \approx 0.55$  ps instead.

tion is found after propagation if  $\sigma_{in}$  is within a certain range, as exemplified by the traces for  $\sigma_{in}=0.53$  ps and  $\sigma_{in}=0.77$  ps. This is indicative of the stability of the equilibrium separation in the molecule. A pulse pair with a significantly larger initial separation of  $\sigma_{in}=1.20$  ps, however, falls outside the capture range for soliton molecule formation. Note that in this case (solid trace) secondary peaks, or at least shoulders, appear at the point of the soliton molecule's equilibrium distance; these have not been predicted or reported before. We will argue that they are indeed to be expected, and that they provide direct insight into the phase structure of the soliton molecules.

### CHIRP PRODUCES SECONDARY PEAKS

Chirp is easy to describe in very simple cases: In constant-dispersion fiber, solitons are unchirped. In dispersion-managed fiber, their chirp oscillates periodically around zero, with a chirp-free point located at every half-segment [18]. A similar statement holds for soliton molecules. Here, however, we do not restrict ourselves to such simple cases. Rather, propagation of solitons and soliton molecules is subject to splice loss, deviation in pulse shape, mild initial chirp, and different peak powers. At the end of the fiber line we therefore consistently find a considerable chirp in the pulses.

It is a very good approximation to consider dispersion-managed solitons as linearly chirped Gaussian pulses [19,20]. Indeed, we confirmed, in independent measurements not described in detail here but following the same procedures as spelled out above, that individual pulses both from the laser and after fiber propagation are well described by a linearly chirped Gaussian pulse. It is therefore appropriate to treat our double pulses as a superposition of two such Gaussian pulses as shown in Fig. 5. The situation of unchirped

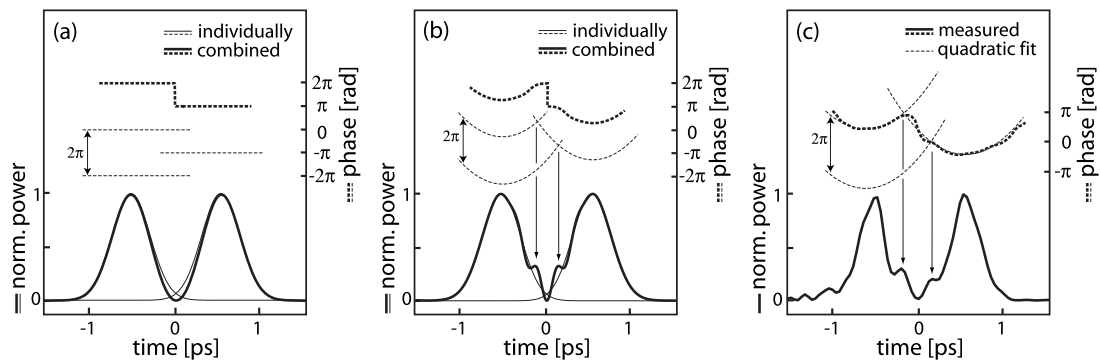


FIG. 5. Comparison of schematic representation and measurement for double pulses generated from superposition of two equal Gaussian pulses. Shown are power (solid) and phase (dashed) profiles. (a) Sketch for the case of two unchirped pulses. Thin lines represent pulses individually; heavy lines represent superposition. Note the constant phases and their resultant (shifted away vertically for clarity). This gives a power profile featuring a central zero with a phase jump of  $\pi$ . (b) Sketch as in (a) but now the pulses are linearly chirped. The phase profiles are parabolic as indicated. Since phase is determined only modulo  $2\pi$ , one of the parabolas is repeated with a shift of  $2\pi$ . Constructive interference occurs where parabolas intersect; destructive interference occurs halfway between. Secondary peaks form in the power profile at the locations of constructive interference. (c) Actual measurement, reconstructed with VAMPIRE and to be compared with (b). Quadratic phase functions have been fitted (thin dashed lines) to the reconstructed phase function (heavy dashed line); one of the fits was duplicated with a shift of  $2\pi$ . The fit is very satisfactory. Secondary peaks appear at the points of constructive interference as described in (b).

pulses [Fig. 5(a)] is particularly easy to understand, but Fig. 5(b) shows that for linearly chirped pulses one expects additional structure in the region of overlap: Constructive interference leads to a local increase of power which takes the form of secondary maxima.

This is exactly what we find in our measurements: Figure 5(c) shows another pulse shape reconstructed with VAMPIRE where the launch separation was several times larger than the equilibrium distance ( $\sigma_{in} \approx 4\tau_{FWHM}$ ). Both the position and the height of the secondary peaks agree with the prediction from this model. This strongly suggests that the concept shown in Fig. 5(b) is adequate.

### INTERPRETATION

Since the prediction [2] and first observation [3] of interaction forces between solitons, the case of unchirped pulses in fibers with constant dispersion is well understood. The interactive force depends on the relative phase because constructive (destructive) interference produces an intensity enhancement (reduction) which implies an increase (decrease) in local index perturbation by the Kerr effect. Weighting by power at each location in the interaction regime, one obtains as a result that in-phase structures attract, and out-of-phase structures repel, while the overall magnitude of the effect decays with separation of the pulses exponentially, like the power decay in the pulse tails.

We can now apply the same concept to chirped pulses by looking at the phase relation locally. For each position within the pulse pair one gets an interacting force; the overall net effect is found by integration over the whole structure. The net effect can be expected to depend on the pulse pair separation, the pulse width, and the actual chirp. Mollenauer and Gordon have performed this calculation [4] and find that there is net repulsion (attraction) for separations smaller

(larger) than a certain equilibrium distance. This implies a stable equilibrium value. Of course, both the values of all forces and the position of this equilibrium oscillate during propagation in the dispersion map, but another integration provides the path average. Indeed they find a path average pulse separation at which there is a stable equilibrium. This corroborates our numerical and experimental results in [1]. Obviously, this simple model has all necessary ingredients to explain the existence of an equilibrium separation, and thus a stable bond between solitons.

However, in our present context the situation is more involved. In the presence of losses, the oscillation of pulse shapes (width, chirp) is not necessarily periodic with the map period. We numerically find situations in which the position of the chirp-free point is not fixed at midsegment, but gradually walks through the map period. Obviously, the configuration of the best stability of the soliton molecule would be obtained when this does not happen; in other words, when the molecule is stroboscopically invariant.

We also know from numerical studies that the chirp in the stroboscopically invariant case is not sufficient to produce the secondary maxima described above. We therefore conclude that longer fiber lines (with loss compensation) would be required to truly differentiate between the fully stable case and the nearly stable situations which appear to be stable in the relatively short fiber line used here.

### CONCLUSIONS

It is highly nontrivial to measure the full amplitude and phase profile of complex pulse shapes, in particular when they contain zeros in either temporal or spectral profile, or—as in our case—both. We have shown that conventional SHG FROG does not provide a correct reconstruction; at the same time we could demonstrate that the technique called VAMPIRE is successful.



With VAMPIRE the phase profiles of double peaked pulse shapes were consistently retrieved with success, and gave us useful, previously inaccessible phase information about soliton molecules. At the same time, soliton molecules present a challenge to reconstruction techniques, and VAMPIRE was shown to be successful. Very recently, a mathematical theory was put forward from which the power and phase profiles of soliton molecules can be calculated [21]. This model predicts the existence of a second stable position. We suspect that this

finding may be related to the secondary maxima we find in the power profiles. Further research along this line is under way.

#### ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported in the framework of DIP 6.6 (Deutsch-Israelische Projektpartnerschaft). We also acknowledge partial support by Deutsche Forschungsgemeinschaft.

- 
- [1] M. Stratmann, T. Pagel, and F. Mitschke, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 143902 (2005).
  - [2] J. P. Gordon, *Opt. Lett.* **8**, 596 (1983).
  - [3] F. Mitschke and L. F. Mollenauer, *Opt. Lett.* **12**, 355 (1987).
  - [4] L. F. Mollenauer and J. P. Gordon (private communication).
  - [5] R. Trebino and D. J. Kane, *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, 1101 (1993).
  - [6] R. Trebino, *Frequency-Resolved Optical Gating: The Measurement of Ultrashort Laser Pulses* (Kluwer Academic Publishers, Boston, 2002).
  - [7] D. Keusters, H.-S. Tan, P. O'Shea, E. Zeek, R. Trebino, and W. S. Warren, *J. Opt. Soc. Am. B* **20**, 2226 (2003).
  - [8] C. Iaconis and I. A. Walmsley, *Opt. Lett.* **23**, 792 (1998).
  - [9] C. Iaconis and I. A. Walmsley, *IEEE J. Quantum Electron.* **35**, 501 (1999).
  - [10] I. Amat-Roldan, I. G. Cormack, and P. Loza-Alvarez, *Opt. Lett.* **30**, 1063 (2005).
  - [11] I. Amat-Roldan, D. Artigas, I. G. Cormack, and P. Loza-Alvarez, *Opt. Express* **14**, 4538 (2006).
  - [12] B. Seifert, H. Stolz, and M. Tasche, *J. Opt. Soc. Am. B* **21**, 1089 (2004).
  - [13] D. J. Kane, *IEEE J. Quantum Electron.* **35**, 421 (1999).
  - [14] Femtosoftware Technologies, Oakland, CA, USA, FROG program v. 3.0.2.
  - [15] S. Linden, H. Giessen, and J. Kuhl, *Phys. Status Solidi B* **206**, 119 (1998).
  - [16] Ch. Dorrer and I. A. Walmsley, *EURASIP J. Appl. Signal Processing* **2005**, 1541 (2005).
  - [17] R. W. Gerchberg and W. O. Saxton, *Optik (Stuttgart)* **35**, 237 (1972).
  - [18] G. P. Agrawal, *Applications of Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, New York, 2001).
  - [19] P. M. Lushnikov, *Opt. Lett.* **26**, 1535 (2001).
  - [20] L. F. Mollenauer and J. P. Gordon, *Solitons in Optical Fibers: Fundamentals and Applications* (Academic Press, New York, 2006).
  - [21] I. Gabitov, R. Indik, L. Mollenauer, M. Shkarayev, M. Stepanov, and P. M. Lushnikov, *Opt. Lett.* **32**, 605 (2007).



**Binding mechanism of temporal soliton molecules**

A. Hause, H. Hartwig, M. Böhm, and F. Mitschke\*

*Universität Rostock, Institut für Physik, 18051 Rostock, Germany*

(Received 9 September 2008; published 10 December 2008)

Temporal optical soliton molecules were recently demonstrated; they potentially allow a further increase of data rates in optical telecommunication. We present a theoretical study aimed at an explanation of the mechanism responsible for the binding force. To this end we use a perturbation treatment in several variants. We find that the well-known soliton interaction as mediated by the optical Kerr effect, when suitably modified for chirped pulses, captures essential features like the existence of a stable equilibrium separation and small-scale oscillations around this point. Predictions of these models are compared to numerical simulations.

DOI: [10.1103/PhysRevA.78.063817](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.063817)

PACS number(s): 42.81.Dp, 42.65.Tg, 42.79.Sz

**I. INTRODUCTION**

Today's telephone, telefax, and internet communication relies on the capability of optical fibers to transmit massive and ever-increasing amounts of information in the form of signaling light pulses. However, there is a fundamental limit to how much data a fiber can transmit per second. The limit is basically given by Shannon's channel capacity [1]

$$C = B \log_2(n),$$

where  $B$  is the usable bandwidth and  $n$  denotes the number of distinguishable values in each time slot. Taking into account the fiber's nonlinearity leads to some, but not to a major, correction to this result [2–4].  $B$  is set by the spectral range of the low-loss transmission of silica fiber and cannot be extended. Only the logarithmic factor describing the coding format allows some design freedom. In an analog format  $n = 1 + S/N$ , where  $S$  is the signal power and  $N$  the noise power. For binary digital systems,  $n = 2$ —a trade of the capacity for robustness in the face of technical detriments.

The way for future commercial systems is paved by cutting-edge laboratory experiments which are always ahead in their data-carrying ability. The best experiments reported so far [5] are now within one order of magnitude of the Shannon limit for binary encoded data. In order to keep up with society's growing demand in the future, new concepts must be discussed and tested now.

Some recent experiments have successfully exploited coding schemes adopted from radio technology, such as quaternary phase shift keying and coherent detection, sometimes combined with polarization multiplexing [6,7]. However, in these concepts the fiber's inherent Kerr nonlinearity (absent in the transmission path of radio signals) is treated more as a nuisance. Arguably, an ultimately more elegant approach—which, however, is limited to a single bit per time slot as it stands now—embraces the fiber's nonlinearity to create solitons—i.e., light pulses which have the remarkable property that after perturbation they can readjust their shape. Solitons, or solitonlike pulses, can be transmitted even in dispersion-managed fiber [8]—i.e., fibers consisting of a periodic alternation of segments of fibers with opposite sign of

the group velocity dispersion so that the resulting path-average dispersion is small. The suppression of four-wave mixing inherent in the dispersion management scheme minimizes neighboring-channel interference, and the natural robustness of solitons (their ability to self-heal after perturbations) makes this format particularly attractive. Indeed, a few commercial systems of this kind have been deployed recently.

A limitation of this technique is that neighboring solitons must not be located too close to each other to avoid the Kerr-mediated interaction [9,10]. Even though this effect is reduced in dispersion-managed fibers [11], it is still common practice to use soliton pulses several times narrower than the time slot because the interaction drops exponentially with increasing pulse separation. Like all other NRZ (no return to zero) schemes, this approach does not fully use the time axis, but rather reserves a sizable fraction of the time for safety distance; it also uses the spectral domain less than optimally because a pulse much shorter than the time slot will generate Fourier components at frequencies much higher than the clock rate, thereby enforcing a greater spectral distance to a neighboring channel. Therefore, this otherwise very robust and advantageous scheme will not be able to actually reach the Shannon limit.

We have recently demonstrated that compound states of solitons exist in dispersion-managed fiber. In [12] we showed that bound states involving two bright pulses exist: if two solitons are brought close to each other but with opposite phase, the attractive interaction turns repulsive at a particular separation which is of the same order as the pulse width, so that a stable equilibrium is created. Such double pulses were also found in numerical [13] and variational [14,15] computations. We showed by experiment and corresponding numerical simulation that these bound states survive in severely nonideal circumstances. Due to their ability to reconstitute their equilibrium separation after perturbation, we called these entities *soliton molecules*.

Soliton molecules might offer a solution to the overhead problem described above. Either one could use nonbinary coding within the time slot by picking symbols from the alphabet “no pulse,” “single pulse,” “double pulse.” This scheme would unfold its full advantage if molecules of more than two pulses also existed. Both Ref. [13] and our own preliminary tests suggest that stable molecules of three bright pulses exist, but the stability of these and larger molecules

\*fedor.mitschke@uni-rostock.de

needs to be established by a thorough investigation. Note that this concept would be very different from using intensity-modulated pulses which could have any desired amount of different intensities up to a limit set by the signal-to-noise ratio, but would suffer from all perturbations that plague analog systems. Soliton molecules, instead, inherit their self-healing property from fundamental solitons. Alternatively, and closer to current practice, one could exploit the existence of an equilibrium separation to pack conventional solitons much more closely than before—i.e., such that the time slot width coincides with the equilibrium separation. Interaction of the neighboring “bits” in the stream might then be virtually eliminated (but again, this needs to be thoroughly investigated and verified for all possible bit patterns).

Gabitov *et al.* [16] have presented a variational approach to find the shape of soliton molecules. Their results confirm the existence of an equilibrium separation, and even predict a secondary such equilibrium separation, which still awaits experimental confirmation. What has been missing so far from all discussions of soliton molecules was a comprehensible physical explanation for the mechanism providing the binding force.

We here present a perturbative treatment of the interaction of two solitons. For the record, Gordon formulated a linear perturbation treatment in close collaboration with Mollenauer in 2006 [17]. This approach indeed shows the existence of a stable equilibrium distance, and it does so in a very transparent way with intuitive appeal. Unfortunately, the position of the equilibrium point is not predicted with good quantitative precision.

In this paper we expand on the Gordon-Mollenauer approach in two ways: We extract information on the small-scale oscillations around this equilibrium, as they were observed before. More importantly, we extend the perturbation treatment beyond linear order, in order to determine whether higher-order terms give a noticeable contribution (they do) and whether an extended model can give better quantitative agreement (it cannot).

We will therefore show that quantitative agreement with numerical results remains less than perfect, whichever way the perturbation approach is pursued. The lack of quantitative agreement appears to be an inherent limitation of the perturbation approach. Nonetheless, it still has the undeniable advantage of conceptual clarity in showing the essential effects. This paper is organized as follows: In Sec. II the problem is stated, and since Gordon and Mollenauer did not publish their results, we begin by outlining their approach. Then, both the linear version and two variants of the perturbative approach are used to derive the interaction force, and hence the position of the stable equilibrium. In Sec. III we use the Gaussian pulse shape approximation to obtain specific values for the force. The resulting net effect is then obtained and compared to simulation results in Sec. IV. In Sec. V we turn to small-scale oscillations around that position and discuss the oscillation frequency.

## II. FORMULATING THE INTERACTION FORCES

It is clear enough that the phases of the optical fields are of central importance for the binding mechanism, yet ideas

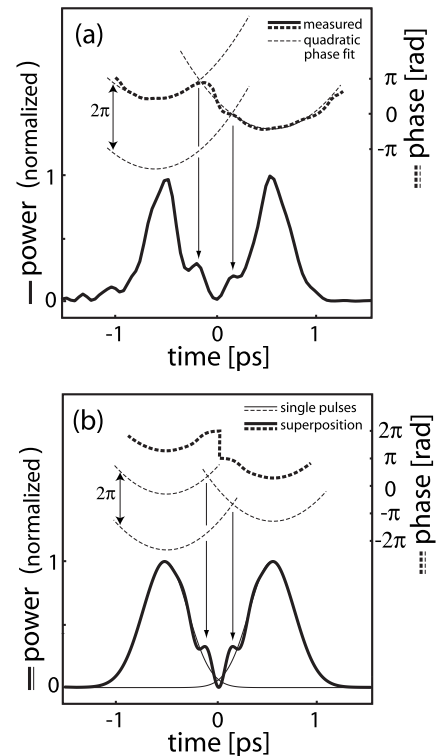


FIG. 1. (a) Reconstructed field of a double pulse, after [18]. The temporal pulse shape (solid line) and the temporal phase function (bold, dashed line) is shown. The fitted quadratic phase functions (thin, dashed line) for the single pulses show intersection points where constructive interference takes place and secondary peaks appear. (b) Superposition (bold, solid line) of two linearly chirped Gaussian pulses (thin, solid line). The intersection points of the single temporal phase functions denote the same positions of the secondary peaks.

about how exactly the binding happens remained diffuse. A detailed analysis in [18] produced a full experimental characterization of both amplitude and phase structure of soliton molecules. The same publication also mentioned a very simple-minded concept of the interaction: Dispersion-managed solitons are well described by chirped Gaussian pulses [19–21]. A superposition of two such pulses at some temporal separation from each other can be constructed by adding the complex fields. Depending on chirp and separation, the resulting shape may exhibit extra structure in its power profile. The interaction force can be obtained as the net effect of all infinitesimal temporal slices across the resultant shape—i.e., an integral over the “local” force. Figure 1 demonstrates that this simple concept [shown in (b)] captures reality [as measured in (a)] amazingly well, which is encouragement to put this concept on a firm footing.

In a lossless fiber, the propagation of an optical pulse is described by the nonlinear Schrödinger equation, here given in its normalized, dimensionless form

$$-i w_{\zeta} = \pm \frac{1}{2} w_{\tau\tau} + |w|^2 w, \quad (1)$$

where  $w$  denotes the pulse envelope. Time  $\tau$  is normalized to the  $1/e$  half width of the launched pulse,  $T_0$ .  $\zeta$  is the propa-

gation distance, scaled by the dispersion length  $L_D = T_0^2/|\beta_2|$ , where  $\beta_2$  describes the dispersion.

Let  $w = u + v$  be a superposition of two optical pulses. Inserting this into Eq. (1) and considering  $v$  as a small perturbation of  $u$  and vice versa, we obtain a symmetric pair of perturbed equations for the pulses  $u$  and  $v$ :

$$-iu_\zeta = \pm \frac{1}{2}u_{\tau\tau} + |u|^2u + 2|u|^2v + u^2v^*, \quad (2)$$

$$-iv_\zeta = \pm \frac{1}{2}v_{\tau\tau} + |v|^2v + 2|v|^2u + v^2u^*. \quad (3)$$

We are seeking conditions under which the relative positions of the two pulses change. This can only happen through a change of the average soliton frequency  $\langle\omega\rangle$ : Due to dispersion, the frequency change translates into motion with respect to the frame of reference. The average frequency  $\langle\omega\rangle$  can be expressed as [21,22]

$$\langle\omega\rangle = \frac{1}{W} \int_{-\infty}^{\infty} (-iu_\tau^*)u d\tau, \quad (4)$$

with the soliton energy  $W = \int_{-\infty}^{\infty} u^*u d\tau$ . The quantity relevant for our study is the acceleration which is proportional to  $d\langle\omega\rangle/d\zeta$ .

Using the fact that for an unperturbed soliton  $\langle\omega\rangle = \text{const}$  and  $W = \text{const}$  and truncating perturbation terms of higher than linear order one finds

$$\left. \frac{d}{d\zeta} \langle\omega\rangle \right|_{\text{lin pert}} = \frac{1}{W} \int_{-\infty}^{\infty} [u_\tau^*u(2u^*v + uv^*)] d\tau + \text{c.c.} \quad (5)$$

We will metaphorically refer to this as the ‘‘force,’’ here written for linear perturbation on  $u$ . It is rearranged as

$$\left. \frac{d}{d\zeta} \langle\omega\rangle \right|_{\text{lin pert}} = \frac{1}{W} \int_{-\infty}^{\infty} [6 \text{Re}(u_\tau^*u)\text{Re}(u^*v) - 2 \text{Im}(u_\tau^*u)\text{Im}(u^*v)] d\tau. \quad (6)$$

In order to check whether higher-order corrections to this linear approach are negligible, we carry all higher-order perturbations of  $v$  on  $u$  and rewrite Eq. (2):

$$-iu_\zeta = \pm \frac{1}{2}u_{\tau\tau} + |u|^2u + 2|u|^2v + 2|v|^2u + u^2v^* + u^*v^2. \quad (7)$$

Then additional terms appear in Eq. (6):

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\zeta} \langle\omega\rangle \right|_{\text{full pert}} &= \frac{1}{W} \int_{-\infty}^{\infty} [6 \text{Re}(u_\tau^*u)\text{Re}(u^*v) \\ &\quad - 2 \text{Im}(u_\tau^*u)\text{Im}(u^*v) + 4 \text{Re}(u_\tau^*u)|v|^2 \\ &\quad + 2 \text{Re}(u_\tau^*)\text{Re}(u^*v^2) \\ &\quad - 2 \text{Im}(u_\tau^*)\text{Im}(u^*v^2)] d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Both the linear and full perturbation treatments will be evaluated below, together with an alternative, in which one pulse

moves in a modified potential, generated by the overlap of both pulses.

That variant is based on the following rationale: The soliton molecule has a symmetrical pulse shape, and one can consider each individual pulse in the pair as a replica of the other except for a time shift and a difference in phase (a possibly nonzero relative phase). Both modifications can be combined into some  $a(\tau)$  so that the superposition of both pulses takes the form  $w = u[1 + a(\tau)]$ . Now we get

$$-iu_\zeta = \pm \frac{1}{2}u_{\tau\tau} + |u|^2u + |u|^2u[2 \text{Re}[a(\tau)] + |a(\tau)|^2], \quad (9)$$

and the force can then be expressed by

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\zeta} \langle\omega\rangle \right|_{\text{potential}} &= \frac{2}{W} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}(u_\tau^*u)|u|^2\{2 \text{Re}[a(\tau)] \\ &\quad + |a(\tau)|^2\} d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Still another route (which, however, leads to the same result; see below) would be to derive an equivalent force from the intensity envelope of the double pulse. Therefore we now use a generic ansatz for the optical pulse in the time domain:  $u(\zeta, \tau) = |u(\zeta, \tau)| \exp\{i\phi(\zeta, \tau)\}$ . The change of  $\langle\omega\rangle$  is an effect of changing pulse shapes due to interference effects during propagation. This mixing of both pulses together with their nonlinear interaction is responsible for the change of the center frequency of a single pulse. Self-phase modulation (SPM) itself generates no change of the pulse envelope. The SPM-induced development of an arbitrary pulse in the temporal domain can be described by the evolution of the temporal phase function depending on the pulses intensity. In an approximation we now consider the case of a single perturbed pulse in a potential provided by the superposition of two pulses:

$$u(\zeta, \tau) = u(\zeta_0, \tau) e^{i|u+v|^2\zeta}. \quad (11)$$

From this point of view only the temporal phase function changes with  $\zeta$ . With  $\partial|u|/\partial\zeta = 0$ , we have

$$\frac{d}{d\zeta} \left\{ -i \left( \frac{\partial u^*}{\partial \tau} \right) u \right\} = -|u|^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \phi_{\text{nl}}}{\partial \zeta} \right). \quad (12)$$

With  $\partial\phi_{\text{nl}}/\partial\zeta = |u+v|^2$  we obtain for the change of  $\langle\omega\rangle$  the form

$$\left. \frac{d}{d\zeta} \langle\omega\rangle \right|_{\text{envelope}} = -\frac{1}{W} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 \frac{\partial}{\partial \tau} (|u+v|^2) d\tau, \quad (13)$$

basically the temporal derivative of the intensity shape of the superposition, weighted with the single-pulse intensity.

### III. EVALUATION AND COMPARISON

We have so far formulated the force in several approximations. Now we proceed to check for equilibrium positions in the soliton molecule. To this end we solve for the force-vs-separation behavior for all approximations and compare the results.

Specifically, we consider a superposition of two linear chirped Gaussian pulses  $u$  and  $v$  with temporal separation  $T$ ,

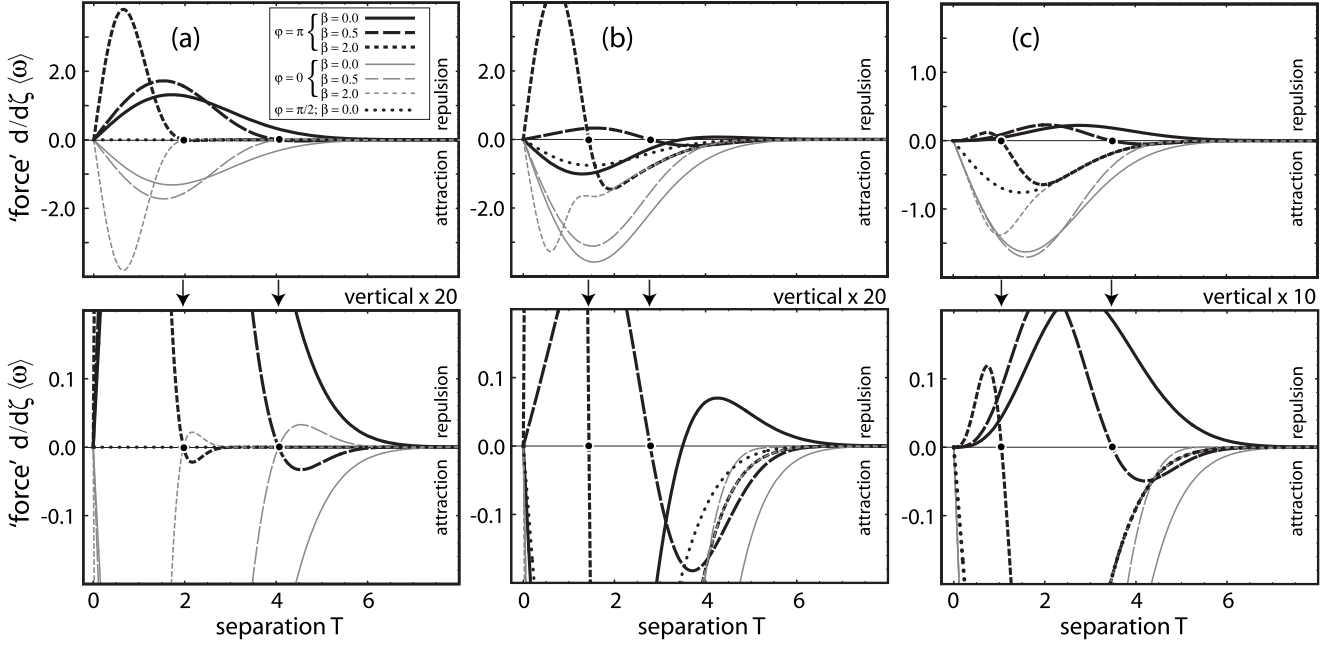


FIG. 2. Force acting on the single pulse  $u$  according to (a) first-order perturbation theory, (b) higher-order perturbation theory, and (c) the modified potential model. Here the force  $d/d\zeta\langle\omega\rangle$  is given in units of  $W(\eta/\pi)$ . The lower figures are on an expanded vertical scale to show more detail. Seven cases are shown: opposite phase ( $\varphi = \pi$ ) for three chirp values, in phase for the same chirp values, and quadrature phase, unchirped. The pulse width parameter is  $\eta = 0.454$ . Points on the horizontal axis, highlighted by arrows, mark stable equilibria. Positive (negative) values of the force imply repulsion (attraction) in the case of anomalous dispersion.

pulse width parameter  $\eta$ , linear temporal chirp parameter  $\beta$ , and relative phase  $\varphi$ . The center of  $u$  is at  $\tau = 0$ :

$$u = \sqrt{W} \left( \frac{\eta}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{(\eta + i\beta)}{2} \tau^2 \right\},$$

$$v = \sqrt{W} \left( \frac{\eta}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{(\eta + i\beta)}{2} (\tau - T)^2 + i\varphi \right\}. \quad (14)$$

The prefactor there is  $\sqrt{W}(\eta/\pi)^{1/4} = N$ ; the soliton order  $N$  is given in real-world units as  $N^2 = P_0 T_0^2 \gamma / |\beta_2|$ .

With this we can find the force acting on  $u$  at some particular position in the fiber; to obtain the net force for the soliton molecule, we will below integrate this local force over a whole dispersion period. Using the substitutions  $A = -\eta(\tau^2 - \tau T + \frac{1}{2}T^2)$  and  $B = -\beta(-\tau T + \frac{1}{2}T^2) + \varphi$ , we obtain for the linear perturbation treatment

$$\left. \frac{d}{d\zeta} \langle \omega \rangle \right|_{\text{lin pert}} = -W \left( \frac{\eta}{\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \{ \tau \exp(A - \eta\tau^2) \times [6\eta \cos B + 2\beta \sin B] \} d\tau. \quad (15)$$

If full perturbation terms are kept, this is described by

$$\left. \frac{d}{d\zeta} \langle \omega \rangle \right|_{\text{full pert}} = -W \left( \frac{\eta}{\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \{ \tau \exp(A - \eta\tau^2) \times [6\eta \cos B + 2\beta \sin B] + 2\tau \exp(2A) \times [2\eta + \eta \cos(\frac{1}{2}\beta\tau^2 + 2B) + \beta \sin(\frac{1}{2}\beta\tau^2 - 2B)] \} d\tau. \quad (16)$$

In Fig. 2 we show a comparison of the linear and full perturbation treatments. In panel (a), Eq. (15) is plotted; in (b), Eq. (16). In either case, the initial separation of the two individual pulses is varied. For in-phase and opposite-phase situations, three different chirp values are shown. Also shown is the case of unchirped quadrature-phase pulses.

Not surprisingly, for large separations of the pulses ( $T > 6.5$  or so), there is no appreciable difference between the cases because the force vanishes anyway. However, in the more interesting case of the pulses approaching each other closely, the linear and full perturbative treatments show considerable differences. For linear perturbation [Fig. 2(a)] we distinguish the cases as follows.

*Opposite phase.* There is attraction which crosses over to repulsion as the separation is reduced; the zero-crossing point constitutes a stable equilibrium. For increasing chirp, this point moves inwards (towards smaller separation).

*In phase.* The figure is mirror symmetric to the opposite-phase case: Equilibria remain at the same positions, but stability is reversed.

*quadrature phase.* The force remains zero at all separations.

In contrast, for all-order perturbation [Fig. 2(b)], we find for the corresponding cases the following.

*Opposite phase.* While there are similarities, there is also an unstable equilibrium for the unchirped case.

*In phase.* Mirror symmetry is lost; now there is attraction everywhere.

*Quadrature phase.* There is attraction everywhere.

Quite generally it can be considered a test for the validity of linear perturbation when higher-order terms contribute



only negligibly. This is not the case here, and we have to accept that the perturbative treatment may remain quantitatively unprecise.

In view of this difficulty, we consider whether a modified perturbative approach might provide more accurate answers. We exploit the fact that in a lossless fiber, when only second-order dispersion and self-phase modulation are relevant effects, the soliton molecule is temporally fully symmetric. Therefore we now use a superposition of two linearly chirped Gaussian pulses  $u$  and  $u'$ , similar to Eq. (14), but symmetrically displaced from the origin of the temporal frame of reference:

$$u = \sqrt{W} \left( \frac{\eta}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left\{ - \frac{(\eta + i\beta)}{2} \left( \tau + \frac{1}{2}T \right)^2 - i \frac{\varphi}{2} \right\}, \quad (17)$$

$$u' = \sqrt{W} \left( \frac{\eta}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left\{ - \frac{(\eta + i\beta)}{2} \left( \tau - \frac{1}{2}T \right)^2 + i \frac{\varphi}{2} \right\}. \quad (18)$$

Then,  $u' = u \exp\{-(\eta + i\beta)\tau T + i\varphi\}$ . Now we need to make some approximations concerning the pulse envelope. We consider the change of the power profile as slowly varying and therefore treat it as constant over short distances  $\Delta\zeta$ . Then we find the force as

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\zeta} \langle \omega \rangle \right|_{\text{potential}} &= -W \left( \frac{\eta}{\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} 2 \exp \left\{ - \eta \left( 2\tau^2 + \frac{1}{2}T^2 \right) \right\} \\ &\times \left[ \eta \left( \frac{1}{2}T - \tau \right) \right] [2 \exp(\eta\tau T) \\ &\times \cos(\varphi - \beta\tau T) + 1] d\tau. \end{aligned} \quad (19)$$

It can be shown that this result would also have been obtained if one had started with a modified and more symmetrical version of Eq. (7) as follows:

$$-iu_{\zeta} = \pm \frac{1}{2} u_{\tau\tau} + |u|^2 u + |v|^2 u + (uv^* + u^*v)u. \quad (20)$$

Results from this approach are shown in Fig. 2(c). Again, at large separation nothing much happens. In the relevant regime we again distinguish the following cases.

*Opposite phase.* There are stable equilibrium points provided there is at least some chirp.

*In phase.* As before there is attraction everywhere.

*Quadrature phase.* As in full perturbation treatment, there is attraction everywhere.

While this is qualitatively similar to the cases treated above, there are differences in quantitative terms again.

To obtain the force from the intensity envelope, we use a superposition of two chirped Gaussian pulses  $|u+v|^2$  and obtain after some straightforward calculation

$$\begin{aligned} |u+v|^2 &= W \left( \frac{\eta}{\pi} \right)^{1/2} \left[ \exp \left\{ - \eta \left( \tau + \frac{1}{2}T \right)^2 \right\} \right. \\ &+ \exp \left\{ - \eta \left( \tau - \frac{1}{2}T \right)^2 \right\} \\ &+ 2 \exp \left\{ - \eta \left( \tau^2 + \frac{1}{4}T^2 \right) \right\} \cos(\beta\tau T - \varphi) \left. \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

With the abbreviations  $\tilde{A} = \eta\tau T$  and  $\tilde{B} = \varphi - \beta\tau T$  and Eq. (13) we now get for the force

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\zeta} \langle \omega \rangle \right|_{\text{envelope}} &= W \left( \frac{\eta}{\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - 2\eta \left( \tau^2 + \frac{1}{4}T^2 \right) \right\} \\ &\times [ \eta(T - 2\tau)(\exp(2\tilde{A}) - 1) \\ &- 2 \exp \tilde{A} (2\eta\tau \cos \tilde{B} + \beta T \sin \tilde{B}) ] d\tau. \end{aligned} \quad (22)$$

However, it turns out that this ansatz yields curves identical to those in Fig. 2(c). In other words, Eqs. (19) and (22) are equivalent. For unchirped pulses ( $\beta=0$ ) the integrals of Eqs. (19) and (22) can be solved analytically and the force becomes

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\zeta} \langle \omega \rangle \right|_{\text{envelope}} &= -W \left( \frac{\eta}{2\pi} \right)^{1/2} \eta T \left[ \exp \left( - \frac{1}{2}T^2 \eta \right) \right. \\ &+ \left. \exp \left( - \frac{3}{8}T^2 \eta \right) \cos \varphi \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

#### IV. COMPARISON WITH NUMERICAL SIMULATIONS

We will now compare the predictions of the various versions of perturbation treatment with “real-world” numbers—i.e., the net effect of the force as found in numerical simulations. Comparison with experimental data is not meaningful for the following reason: It was shown in [12] that a full simulation including subtle effects like higher-order dispersion, splice loss, etc., comes remarkably close to the experimental values. Any theoretical model involves approximations, and in our treatment these extra complications are not considered. They can be turned off in numerics, but not in the experiment.

As a first step, we find the cumulative frequency shift  $\Delta\langle\omega\rangle$  as the integral of the local “force” over one dispersion map period  $\zeta_{\text{map}}$ . In doing so it is essential to take into account the dynamic variation of the force as pulse durations, separations, peak powers, etc., evolve over the span of  $\zeta_{\text{map}}$ . In particular, the sign of the force will reverse where the sign of dispersion switches. The frequency change is accumulated as

$$\Delta\langle\omega\rangle = \int_{\zeta_{\text{map}}} \left. \frac{d\langle\omega\rangle}{d\zeta'} \right|_{\zeta'} d\zeta. \quad (24)$$

The net force, averaged over one dispersion map, is then given by  $\Delta\langle\omega\rangle/\zeta_{\text{map}}$ . By virtue of the fiber’s dispersion, this

TABLE I. Parameters used for the simulation.

|   |   |
|---|---|
| $\tau_{\text{FWHM}}=310$ fs                             |   |
| $E=65.55$ pJ  |   |
| $P_0=198.73$ W  |   |
| $\beta_2^+=-26$ ps <sup>2</sup> km <sup>-1</sup>        | $\beta_2^- = 62$ ps <sup>2</sup> km <sup>-1</sup>   |
| $\gamma^+=0.902$ W <sup>-1</sup> km <sup>-1</sup>       | $\gamma^- = 2.819$ W <sup>-1</sup> km <sup>-1</sup> |
| $L^+=4.97$ m  | $L^- = 1.83$ m                                      |
| $\bar{\beta}_2 = -2.3$ ps <sup>2</sup> km <sup>-1</sup> |   |
| $\bar{\gamma} = 1.4$ W <sup>-1</sup> km <sup>-1</sup>   |   |
| $S = 3.77$  |   |

frequency shift effects a positional shift which can be directly compared to numerical results.

For the numerical simulation we use a standard symmetrized split-step Fourier algorithm [23]. First, a single soliton was propagated to obtain the dynamic variation required for performing the integration in Eq. (24) (analytical expressions for this are not available). Parameter values were chosen to correspond to those in the first experiment [12] on soliton molecules. The dispersion values of the SSMF and IDF fibers (standard single-mode fiber and inverse dispersion fiber, respectively) are denoted by  $\beta_2^\pm$ ;  $\bar{\beta}_2$  is the path average value.  $\gamma^\pm$  stand for the two nonlinearity parameters,  $L^\pm$  for the lengths of the respective fiber segments.  $L_{\text{map}}=L^++L^-$  is the length of a dispersion map in correspondence to the dimensionless  $\zeta_{\text{map}}$  above, and  $S$  is the map strength according to the definition

$$S = \frac{|\beta_2^+ - \bar{\beta}_2|L^+ + |\beta_2^- - \bar{\beta}_2|L^-}{\tau_{\text{FWHM}}^2}. \quad (25)$$

Here we use the pulse's full temporal width at half maximum,  $\tau_{\text{FWHM}}=2\sqrt{\ln 2}T_0$ , for Gaussian pulses. All parameter values are shown in Table I. The map strength used here corresponds to a case where the pulse shape of a dispersion-managed (DM) soliton is Gaussian to a very good approximation. We use real-world units from here on.

We start with a pulse shape which is close to the asymptotic shape. This can be obtained from propagation; the method of Nijhof *et al.* [24] speeds up convergence considerably. Then we perform a simulation of propagation over a single map period  $L_{\text{map}}$ . In order to obtain  $P_0(z)$  and  $T_0(z)$  from the propagation data, we fit Gaussians to the actual shape. From a polynomial fit to the phase we also obtain the linear chirp parameter  $\beta$  (the quadratic chirp parameter is also obtained, but used only for consistency checks). Figure 3 shows the evolution of  $\beta(z)$  and  $T_0(z)$  over  $L_{\text{map}}$ . Strong breathing of the pulse shape and perfect recurrence after one dispersion map are plainly visible.

We have now obtained detailed information about the evolution of a single pulse and can proceed to constructing a pulse pair of two identical pulses, placed at a mutual separation  $\sigma$  (the real world unit version of  $T$  above). As the pair propagates, we can obtain the effective force for each position  $z$  (see below). This force will set the two pulses into opposite relative motion. One should realize, however, that

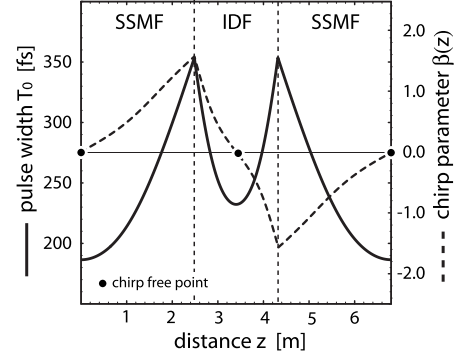


FIG. 3. Pulse width  $T_0$  during propagation (solid line) and linear chirp parameter  $\beta(z)$  (dashed line) as a function of distance  $z$  over one period of the dispersion map. The dashed vertical lines mark the joints between fiber segments. The chirp-free points in the middle of each fiber segment are indicated by points. SSMF: standard single-mode fiber. IDF: inverse dispersion fiber.

(due to the frequency change involved) the relative phase remains constant in this motion. It turns out that the positional change is small and can be neglected (see below).

Let us mention three subtle technical points about the propagation simulation of the pulse pair: In the presence of the dynamical evolution of pulse width and chirp, we obtain a periodic change of the total energy of the pulse pair by construction. To correct for this artifact, the total energy (which is, of course, preserved) is normalized to the initial value at all positions  $z$ . This yields a corrected peak power  $P'(z)$ , which is used for the calculation of the force. Since the pulse width varies during propagation, the definition of the dispersion length  $L_D=T_0^2/|\beta_2|$  requires a remark. Group velocity dispersion is an entirely linear process and as such cannot produce spectral changes: it will affect only the temporal pulse shape. Therefore it is reasonable to refer  $L_D$  to some characteristic width, to render it a constant. A good choice is the width at the chirp-free point (see Fig. 3) where the pulses are unchirped and a single pulse would be Fourier limited. Thus we specify  $L_D$  using the value of  $T_0$  at the chirp-free point in the respective fiber segment. In contrast, we treat the nonlinear length  $L_{\text{NL}}=1/(\gamma P')=1/[\gamma P'(z)]$  as a function of  $z$ .

We calculate the force for every distance  $z$  by converting Eq. (22) to its equivalent in real-world units:

$$\left. \frac{d\langle \omega \rangle}{dz} \right|_{\text{envelope}} = -\gamma P' \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2T_0^2}\right) \times \left[ \frac{\sigma}{\sqrt{2}T_0^2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}T_0^3} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t) dt \right], \quad (26)$$

where  $\Theta(t)$  is an abbreviation for

$$\Theta(t) = \exp\left(-\frac{2t^2 + t\sigma}{T_0^2}\right) [2t \cos \alpha + \beta \sigma \sin \alpha]; \quad (27)$$

$\alpha$  expresses the linear chirp-induced field oscillations of adjacent Gaussian pulses due to interference effects, and is given by



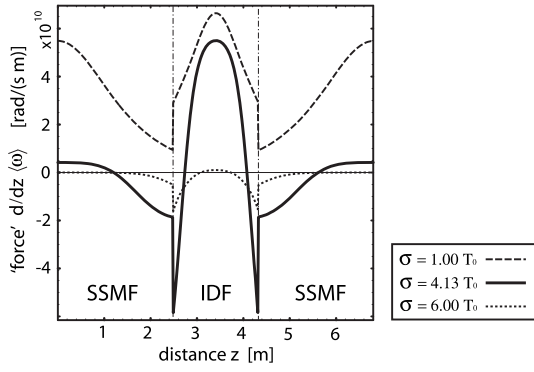


FIG. 4. Evolution of  $d\langle\omega\rangle/dz$  in a single dispersion period. The behavior of double pulses with an initial separation of  $\sigma=T_{0,z=0}$  (dashed),  $\sigma=4.13T_{0,z=0}$  (solid line) and  $\sigma=6T_{0,z=0}$  (dotted line) is shown.

$$\alpha = \frac{\beta\sigma}{T_0^2}t - \varphi. \quad (28)$$

The frequency shift of Eq. (26) defines the force at any position in the fiber. Its variation with  $z$  is shown in Fig. 4 for three different separations. If the separation is quite large (dotted curve), the pulses have minimal overlap and an appreciable interaction occurs only near the splice points where the pulse width is maximum. If, on the other hand, the pulses are very close (dashed curve), the leading pulse is blueshifted and thus advanced everywhere (anomalous path average dispersion), whereas by symmetry the trailing pulse is retarded. As a net effect, there is repulsion.

To find the net force we consider the net frequency shift  $\Delta\langle\omega\rangle$  during propagation over  $L_{\text{map}}$ . Here we need to integrate the local effect over the distance. This integration, of course, is done numerically. In between the cases just discussed there is a situation in which the net force vanishes (solid line). This defines the soliton molecule's equilibrium separation; for the parameters used here, we locate it at

$$\sigma_{\text{eq}} \approx 4.13T_{0,z=0}. \quad (29)$$

Above we have neglected the positional change of the pulses. This can now find its justification: A second integration of the force over distance yields the temporal shift which comes out as a few femtoseconds, when the separation is several picoseconds. This  $10^{-3}$  change can indeed be neglected.

Let us quantitatively compare predictions from the three versions of the perturbation treatment. In Fig. 5 the net force of antiphase DM solitons is plotted as a function of initial separation. In all three cases, a stable equilibrium is predicted, but at slightly different positions at  $3.31T_0$  ( $\approx 615$  fs),  $4.13T_0$  ( $\approx 770$  fs), and  $4.68T_0$  ( $\approx 870$  fs). This needs to be compared to the experimental and numerical result of 440 fs, which translates here to  $2.37T_0$ . We have to note that perturbation treatment in all variants overestimates the equilibrium position.

A peculiarity of the full perturbation treatment is the prediction of an unstable equilibrium point at somewhat smaller separation; there is no experimental evidence to the existence

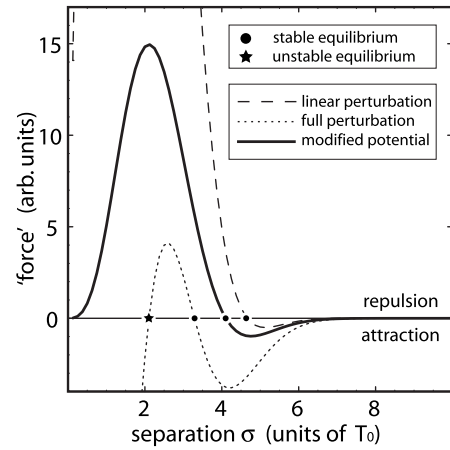


FIG. 5. Overview of the “forces” as obtained from the three models (linear perturbation, full perturbation, modified potential). The extended perturbation model shows an additional attraction of opposite phase DM solitons at very close separations. There is also an unstable equilibrium separation.

of such a point. The linear perturbation treatment has a different peculiarity: It alone predicts that forces always reverse sign when the relative phase is inverted, while both other approaches predict the existence of a regime where there is attraction for any value of the relative phase. With a full numerical simulation shown in Fig. 6 we demonstrate that such a situation does in fact exist. The figure compares the power profiles before (solid line) and after (dashed line) propagation through a long fiber (50 map periods) for in-phase, quadrature, and opposite-phase pulse pairs. One can clearly see that the pulses move toward each other in all cases. We verified that the same conclusion is found when one allows the net force found above for one map period to modify the initial values of  $\sigma$  and  $\langle\omega\rangle$  for the next period and so on.

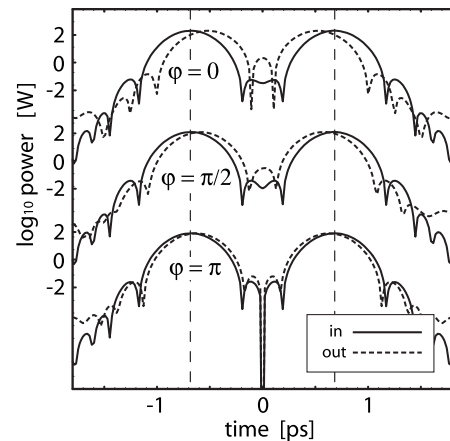


FIG. 6. Attraction of two DM solitons in dependence of their relative phase. The temporal profile is shown on a logarithmic power scale. A superposition of two solitons with parameters according to Table I was propagated over 50 dispersion periods. Soliton pairs have the strongest attraction when they are in phase and the weakest when they have opposite phase.

## V. OSCILLATIONS NEAR THE EQUILIBRIUM

Numerical simulations show that soliton molecules, when perturbed away from their equilibrium separation, oscillate around that point. From the treatment of the forces given above, we can now also find the restoring force near the equilibrium point and, hence, the oscillation period.

The net force  $\Delta\langle\omega\rangle/L_{\text{map}}$  describes the net frequency change per distance in  $(\text{rad s}^{-1})/\text{m}$ . Then,

$$\frac{\Delta\langle\omega\rangle}{L_{\text{map}}}\bar{\beta}_2 = \frac{d^2}{dz^2}t_0, \quad (30)$$

where the temporal center of a single pulse is elongated from its equilibrium position by  $t_0 = (\sigma - \sigma_{\text{eq}})/2$ . For small excursions from equilibrium we may treat the molecule as a harmonic oscillator:

$$\frac{d^2}{dz^2}(\sigma - \sigma_{\text{eq}}) + \Omega^2(\sigma - \sigma_{\text{eq}}) = 0, \quad (31)$$

where  $\Omega$  represents the frequency of the spatial oscillation around equilibrium. The spatial period in meters is then  $2\pi/\Omega$ . Note that  $\Omega^2$  is equal to twice the slope of the curves in Fig. 5 at equilibrium because by virtue of symmetry both pulses contribute equally. Using Eq. (26) to calculate the ‘‘acceleration’’ of  $u$  near the equilibrium distance with the parameters given above, we find a spatial oscillation period of  $z_{\text{osc}} \approx 286.6$  m corresponding to  $z_{\text{osc}} \approx 42.1L_{\text{map}}$ . Numerical simulations yield  $z_{\text{osc}} \approx 10L_{\text{map}}$  dispersion periods. Of course, given the quantitative inaccuracies noted above, quantitative precision was not to be expected.

## VI. CONCLUSIONS

As noted above, we here used pulse shapes obtained with the help of the method of Nijhof *et al.* [24]. As an alternative, we already mentioned the method of Gabitov *et al.* [16], which is based on the Gabitov-Turitsyn-model of DM solitons [25]. Its basic idea is to average the evolution of the spectral phase function over an entire dispersion map. The spectrum is treated as slowly varying, which is justified if  $L_{\text{NL}} \gg L_{\text{map}}$ . The method aims at finding all sets of DM fibers for which the same stable solution of soliton molecules exists. It involves a reduction of all parameters to a single quantity called  $\bar{d}_0$ . An iterative procedure yields stable solu-

tions for  $\bar{d}_0$  from which the parameters of both the fiber line and the pulse shape fulfilling this solution can be calculated. This method is potentially very powerful, yet numerically demanding.

In our case the fiber parameters are already known so that the method of Gabitov *et al.* provided no advantage. Moreover, here  $L_{\text{NL}} \approx L_{\text{map}}$  so that a condition of validity for the method of Gabitov *et al.* is violated. Therefore we did not use that method. Let us emphasize again that our interest was not to find the exact pulse shape: our intention was to understand the mechanism behind the binding force. The perturbation treatment is indeed successful in bringing it out in great clarity.

In summary we have investigated the adjacent soliton interaction in dispersion-managed fiber lines to identify the essential effects responsible for the binding mechanism of soliton molecules. We chose a perturbation approach because it has the advantage of being physically intuitive.

Linear perturbation turns out not to be fully satisfactory; therefore, we employ two refined versions thereof. The general behavior is captured very well by all versions, but the quantitative agreement with direct numerical simulations remains less than perfect.

The basic binding mechanism of soliton molecules emerges as follows: As is well established, pulses overlapping in constructive interference produce an enhanced power which, by way of the optical Kerr effect, causes an attraction. Similarly, destructive interference leads to repulsion. Here we deal with chirped pulses in a DM fiber. All pulse characteristics, including width and chirp, are oscillating, and the phase varies across the pulse. In the resulting oscillating interference condition different time slots within the pulses may have constructive; others, destructive interference. What counts is the resulting net effect for the interaction force. The perturbation treatment corroborates that there is indeed a stable equilibrium at a particular value of the pulse’s mutual separation.

## ACKNOWLEDGMENTS

We are indebted to James P. Gordon and Linn F. Mollenauer who made their unpublished work available to us. We built on that, and we enjoyed fruitful discussions with them. This work was supported in the framework of DIP 6.6 (Deutsch-Israelische Projektpartnerschaft).

- 
- [1] C. E. Shannon, *Bell Syst. Tech. J.* **27**, 379 (1948); **27**, 623 (1948).  
 [2] P. P. Mitra and J. B. Stark, *Nature (London)* **411**, 1027 (2001).  
 [3] K.-P. Ho and J. M. Kahn, Channel capacity of WDM systems using constant-intensity modulation formats, in *Proceedings of the Optical Fiber Communications Conference*, edited by A. Sawchuk (Optical Society of America, OSA Trends in Optics and Photonics, 2002) Vol. 30, paper ThGG85.  
 [4] J. Tang, *J. Lightwave Technol.* **24**, 2070 (2006).  
 [5] A. H. Gnauck, G. Charlet, P. Tran, P. Winzer, C. Doerr, J.

- Centanni, E. Burrows, T. Kawanishi, T. Sakamoto, and K. Higuma, *J. Lightwave Technol.* **26**, 79 (2008).  
 [6] J. M. Kahn and K.-P. Ho, *IEEE J. Quantum Electron.* **10**, 259 (2004).  
 [7] P. J. Winzer and R. J. Essiambre, in *Optical Fiber Telecommunications V*, edited by I. P. Kaminow, T. Li, and A. E. Willner (Academic Press, San Diego, 2008).  
 [8] J. H. B. Nijhof, N. J. Doran, W. Forsyiaak, and F. M. Knox, *Electron. Lett.* **33**, 1726 (1997).  
 [9] J. P. Gordon, *Opt. Lett.* **8**, 596 (1983).

- [10] F. M. Mitschke and L. F. Mollenauer, *Opt. Lett.* **12**, 355 (1987).
- [11] P. V. Mamyshev and N. A. Mamysheva, *Opt. Lett.* **24**, 1454 (1999).
- [12] M. Stratmann, T. Pagel, and F. Mitschke, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 143902 (2005).
- [13] A. Maruta, T. Inoue, Y. Nonaka, and Y. Yoshika, *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* **8**, 640 (2002).
- [14] C. Paré and P.-A. Bélanger, *Opt. Commun.* **168**, 103 (1999).
- [15] B.-F. Feng and B.-A. Malomed, *Opt. Commun.* **229**, 173 (2004).
- [16] I. Gabitov, R. Indik, L. Mollenauer, M. Shkarayev, M. Stepanov, and P. M. Lushnikov, *Opt. Lett.* **32**, 605 (2007).
- [17] J. P. Gordon and L. F. Mollenauer (private communication).
- [18] A. Hause, H. Hartwig, B. Seifert, H. Stolz, M. Böhm, and F. Mitschke, *Phys. Rev. A* **75**, 063836 (2007).
- [19] N. J. Smith, F. M. Knox, N. J. Doran, K. J. Blow, and I. Bennion, *Electron. Lett.* **32**, 54 (1996).
- [20] S. Turitsyn, E. Shapiro, S. Medvedev, M. P. Fedoruk, and V. Mezentssev, *C. R. Phys.* **4**, 145 (2003).
- [21] L. F. Mollenauer and J. P. Gordon, *Solitons in Optical Fibers: Fundamentals and Applications* (Academic Press, San Diego, 2006).
- [22] L. F. Mollenauer, J. P. Gordon, and S. G. Evangelides, *Opt. Lett.* **17**, 1575 (1992).
- [23] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 4th ed. (Academic Press, San Diego, 2007).
- [24] J. H. B. Nijhof, W. Forysiak, and N. J. Doran, *IEEE J. Quantum Electron.* **6**, 330 (2000).
- [25] I. R. Gabitov and S. K. Turitsyn, *Opt. Lett.* **21**, 327 (1996).



M. BÖHM  
F. MITSCHKE<sup>✉</sup>

# Soliton propagation in a dispersion map with deviation from periodicity

Physics Department, Universität Rostock, Rostock, Germany

Received: 18 May 2005/Revised: 26 August 2005  
© Springer-Verlag 2005

**ABSTRACT** Solitons in dispersion-managed fibers are a particular case of a periodically perturbed nonlinear system. Since in practice random deviations from strict periodicity of the dispersion alternation are unavoidable, we consider such deviations and study their impact on the soliton's stability with a view to optical telecommunications. We find a range over which solitons remain stable in a specified sense; this range is sufficient for technical application.

PACS 42.65.Tg; 42.81.Dp

## 1 Introduction

Nonlinear dynamic systems subject to periodic perturbations constitute a particularly interesting and rich topical area. If the perturbation occurs in the temporal domain, this encompasses the kicked rotator or the driven pendulum and gives rise to synchronization phenomena, and sometimes generation of chaos. Typically, small variations of the period, or small deviations from precise periodicity, have strong consequences. Examples of spatially periodic perturbations run the gamut from the wiggler in free-electron lasers to vehicles moving on corrugated surfaces, like ships at sea. In the realm of optics, periodically poled nonlinear crystals have generated a lot of excitement in recent years because they open an avenue to tailor-made material properties that are not available from any homogeneous materials, and are often far superior for applications.

An important quantity to consider is the scale of the periodic perturbation as compared to the scale of the optical wave. In the case of Bragg gratings, the periodicity is of the order of the wavelength. For periodically poled crystals it may be quite a bit longer than the wavelength, but still is within the coherence length. We will here discuss a spatially periodic system in which the period may even exceed the coherence length. Specifically, we will consider optical solitons traveling down a fiber the dispersion of which is switched between positive and negative in an almost, but not quite, periodic fashion ('dispersion-managed fiber'). We will ask whether pulse

propagation in this system is stable, but in doing so we will have to carefully consider what we mean by 'stable'.

In mathematical context, stability refers to bounded behavior when some distance goes to the limit of infinity. In a finite world, however, the limit of infinity provides a needlessly strict criterion: it fully suffices when, say, for a system bounded by the surface of the planet, there is no divergence when the distance goes towards the planet's circumference.

## 2 Solitons in data transmission

Communication by light pulses sent over optical fibers has become so common today that in everyday life it is hardly noticed; without it, however, most long-distance communication and almost all internet traffic would quickly break down. Light pulses propagating in fibers are subject to the simultaneous effects of group-velocity dispersion, measured by the parameter  $\beta_2$ , and Kerr nonlinearity (i.e. power dependence of the refractive index), measured by the nonlinearity coefficient  $\gamma$ , which, in typical silica fibers, takes values around  $1 \text{ W}^{-1} \text{ km}^{-1}$ . The interplay of these effects is captured in the nonlinear Schrödinger equation [1] that describes the propagation of the envelope of light pulses  $A(T, z)$ :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + i\gamma |A|^2 A. \quad (1)$$

Here  $z$  is the coordinate in the propagation direction and  $T$  is time in the comoving frame. Higher-order perturbations like attenuation, Raman scattering, higher-order dispersion, etc., are not included in this equation, but for our present purposes where we consider many-ps pulses, this is justified.

For  $\beta_2 < 0$  a particular solution of this equation is the soliton

$$A(T, z) = \sqrt{\hat{P}} \operatorname{sech} \left( \frac{T}{T_0} \right) \exp \left( i \frac{1}{2} \frac{z}{L_D} \right).$$

Here  $T_0$  is the pulse width and  $L_D = T_0^2 / |\beta_2|$  is a characteristic length scale over which the phase of the pulse evolves. The peak power is  $\hat{P} = 1 / (\gamma L_D)$ . Solitons are nonlinear pulses that are able to maintain a stable balance between dispersion and Kerr nonlinearity and therefore do not change their shape. Even when the inevitable power losses in real-world systems are taken into account, solitons remain a useful concept; amplifiers can offset the loss at least on average.

✉ Fax: +49 381 498 6822, E-mail: fedor.mitschke@uni-rostock.de

We note in passing that for  $\beta_2 > 0$  dark solitons, i.e. dark pulses on a bright background, exist. While these are physically entirely viable, they seem to be of less applicability to telecommunications; therefore, we restrict our present discussion to bright solitons.

### 2.1 Dispersion management

Recently, it has become quite common in optical telecommunications that fiber lines are composed of segments of opposite-sign dispersion, concatenated in an alternating fashion. This creates a periodic dispersion structure. The path-average dispersion

$$\beta_2 \rightarrow \beta_2(z) \quad \text{with} \quad \beta_2^{\text{ave}} = \frac{L^+ \beta_2^+ + L^- \beta_2^-}{L^+ + L^-} \quad (2)$$

can be set as desired by choosing the lengths  $L^\pm$  and individual dispersion values  $\beta_2^\pm$  appropriately. Such fibers, called dispersion-managed fibers, have advantages over homogeneous fibers: there is suppression of channel crosstalk caused by four-wave mixing due to the high local dispersion [2], and there is reduction of the Gordon–Haus effect [3] because of the low average dispersion.

Even in dispersion-managed fibers, solitons exist, if with properties somewhat different from their counterparts in homogeneous (constant-dispersion) fibers [4]: the shape is different, and the power is different (‘power enhancement’). The most prominent difference, however, is that the pulse shape is no longer constant: the soliton ‘breathes’ over a dispersion period, and thus reshapes after each map period  $L_{\text{map}} = L^+ + L^-$ . Its shape is therefore stable in a stroboscopic sense. In technical systems deployed today  $L_{\text{map}}$  is of the order of several kilometers and therefore exceeds the coherence length of the light pulses. However, it may be of a similar order as  $L_D$ , if the latter is defined using  $\beta_2^{\text{ave}}$ .

### 2.2 Random perturbation

With few exceptions, theoretical descriptions of dispersion-managed systems (such as, for example, Ref. [5]) take for granted that the structure is precisely periodic. However, this assumption is only fulfilled in closed-loop systems, such as fiber lasers, where the same pieces of fiber are revisited on every round trip. In the world of optical telecommunications this is not a realistic assumption: in a fiber span connecting one point to a distant other, exact periodicity of fiber segments cannot be obtained; deviations are expected at least of the order of the precision with which individual segments of fiber can be prepared for concatenation. This applies to submarine systems; in terrestrial systems additional constraints lead to even greater variability in lengths. It turns out that there has been no previous full systematic study of the effects of deviation from periodicity.

We here consider the case of small deviations of the segment length from precise periodicity. Note that this is different from the situation where the individual same-length segments have slightly different  $\beta_2$  values [6, 7]. Deviations of dispersion are a realistic possibility because in real fibers  $\beta_2$  fluctuates along the fiber due to fabrication tolerances [8]. Effects of such fluctuations on propagation in a homogeneous fiber were

discussed in Refs. [9, 10]; for a dispersion-managed fiber these was studied in Ref. [11]. Nonetheless, we will not consider dispersion fluctuations here but will restrict ourselves to random length deviations for clarity.

Deviations from the mean fiber lengths were already considered theoretically in Ref. [12], where the individual fiber segments were attributed a length which was uniformly distributed in a  $\pm 80\%$  interval around the mean value. We reproduce the result that the solitons suffer from energy loss. However, in part by way of the ansatz used, and in part due to the assumed zero dispersion, break-up (splitting) of solitons went undetected. Also, Abdullaev and Baizakov [6] and Ablowitz and Moeser [7] considered random perturbations and noted deterioration of solitons but did not describe pulse splitting. In this work we report that splitting up of solitons is indeed the leading degradation mechanism.

In this communication we concentrate on the case of small random length deviations as they are likely encountered when equal segment lengths are intended, as in submarine long-distance cables. We treat the amplitude of the random deviation – the width of the interval over which the actual lengths scatter – as a continuous variable which we can increase from zero. In this way we have the limiting case of strict periodicity as a benchmark reference, and – other than in Refs. [7, 12] – see the continuous transition from a periodic to a randomized map, and can define thresholds beyond which data integrity is jeopardized.

## 3 Method

To study the propagation of the envelope of light pulses  $A(T, z)$  through fibers we solve (1) by the usual split-step Fourier method [1]. We use the common safeguards against numerical inaccuracy, like monitoring preserved quantities (e.g. energy).

We restrict ourselves to a nominally symmetric dispersion map with  $L^+ = L^-$ . An important measure of a dispersion-managed fiber is the map strength

$$S = \frac{|\beta_2^+ L^+ - \beta_2^- L^-|}{\tau^2}, \quad (3)$$

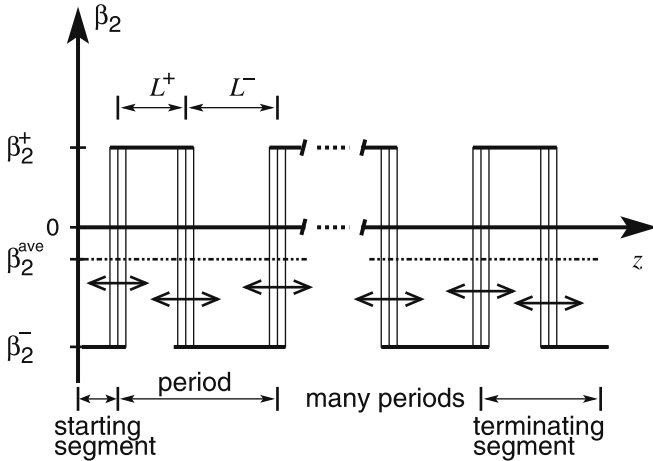
with  $\tau$  the full pulse width at half maximum (FWHM).  $S$  is zero in the homogeneous (i.e. constant-dispersion) case; appreciable dispersion management begins at  $S \approx 1$ , and  $S \gg 1$  is commonly called strong dispersion management.

To introduce random length variations, we replace

$$L_i \rightarrow L_i(1 + j\zeta_i), \quad (4)$$

where each individual fiber segment  $L_i$  is modified by a term  $j\zeta$ .  $j$  is the amplitude of the length deviation (the ‘jitter’ amplitude on top of the periodicity) (see Fig. 1), and  $\zeta_i$  is a random number taken from a uniform distribution in the interval  $[-1, +1]$ . For its good suppression of spurious correlations, we used the Marsaglia–Zaman random number generation method [13] as implemented in the Mathematica computer algebra program [14]. Note that in the split-step Fourier algorithm the terms  $jL_i\zeta_i$  are rounded to integer multiples of the step size.





**FIGURE 1** Schematic representation of a dispersion-managed fiber. It consists of alternating segments with positive and negative dispersion. Segments are concatenated either in a periodic fashion or – in this work – with random deviations from strict periodicity (*arrows*)

A rectangular distribution is not necessarily the best description of the length variations intended here; a Gaussian might be a better approximation. However, the exponential wings of a Gaussian could render some lengths negative, which does not make sense; one would have to use a truncated Gaussian anyway. In any event, we believe that details of the distribution are unlikely to have a major influence given that the fiber lengths usually span no more than a few hundred map periods. Indeed, to improve statistics and to safeguard against pathological effects from particular choices of random numbers, we routinely repeat calculations with several sets of independently generated random numbers, to better identify the specific effect of the randomness.

We need to introduce a further constraint on the sets of random numbers: we want to distinguish the true effect of the jitter from the accompanying shift of the path-average dispersion because both  $L^+$  and  $L^-$  enter in (2). For each fiber segment ( $\beta_2^+, L^+$ ) a corresponding segment with the same length but the opposite dispersion  $\beta_2^-$  was generated. The order in which the segments are spliced together was then randomly rearranged. In this way we make sure that the path-average dispersion is kept constant when the degree of randomness is varied.

#### 4 Application to the non-random case

Since we introduced  $j$  as a continuously variable quantity, we can use  $j = 0$  as a natural point of reference. Increasing  $j$  from zero will then allow us to follow the effect of increasing randomness.

There is no closed-form solution for the pulse shape in dispersion-managed fibers. However, it is known that it resembles a Gaussian more closely than a  $\text{sech}^2$  shape. We therefore choose a chirp-free Gaussian-shaped pulse

$$A(T, 0) = NA(0, 0) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{T^2}{T_0^2}\right) \quad (5)$$

as a launching condition.  $A(0, 0)$  is the square root of the peak power of the fundamental soliton at  $S = 0$ .  $N$  is the soliton order; for the fundamental soliton in a homogeneous fiber

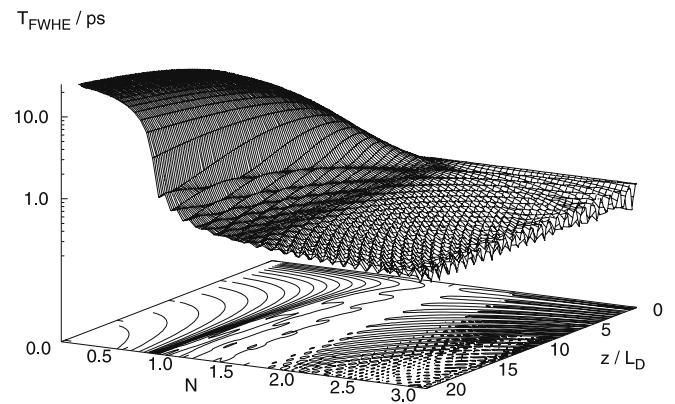
( $S = 0$ ),  $N = 1$ .  $N^2$  therefore denotes the pulse energy in units of the fundamental soliton energy.

We let the fiber begin with a half-segment of length  $L^-/2$ . This brings us close to the usual situation that the chirp-free points of the pulses is at the mid-segment positions. Since the initial pulse shape is not the asymptotic one, energy will be drained from the pulse during the early stages of propagation. We minimize this loss through judicious choice of  $S$ . It turns out that for  $S = 1.424$  the loss is minimal and amounts to only  $10^{-5}$  of the total power. We therefore pick this particular value of  $S$ ; we consider values around  $S = 1$  reasonable anyway because they describe appreciable, but not excessive, map strength. For this  $S$ , incidentally, the pulse energy is enhanced by a factor of  $N^2 = 1.97$ .

Changes in the functional form of the pulse shape render it non-trivial to find a characterization of its width that is unique and universally applicable. For example, the FWHM is easily fooled by wiggles due to interference effects. At the same time, the root-mean-square (rms) width is too sensitive to the far wings and background radiation to be of much usefulness. We settled for the full width at half energy (FWHE), i.e. the width of that temporal interval centered about the pulse center that contains 50% of the total energy. For simplicity we read pulse widths at mid-segment points, which are not necessarily identical to the minimum-chirp points; we may thus have slightly high readings. However, as will become clear below, this is irrelevant for our central point that pulses split up; splitting is detected unambiguously in spite of the simplification.

In principle we could vary many parameters, like the pulse width, the chirp, the pulse shape, etc. However, in a practical situation the only parameter that can be readily controlled is the launch energy. We therefore restrict ourselves to variations of the total energy (or  $N^2$ , equivalently) and keep all other parameters constant.

Figure 2 shows the evolution of the FWHE  $T_{\text{FWHE}}$  as a function of propagation distance  $z$  for different values of the soliton order parameter  $N$ . There are three different regions: for low energies there is too little energy to form a soliton, and the pulse just broadens due to dispersion. If



**FIGURE 2** Evolution of the pulse duration (FWHE) in a dispersion-managed fiber with  $S = 1.424$ . The fiber has 256 dispersion periods and is  $20.4L_D$  long. The position  $z$  is normalized to  $L_D$ . Gaussian pulses are launched; their energy is measured by  $N^2$ . Calculations were performed with 1024 split steps per dispersion segment

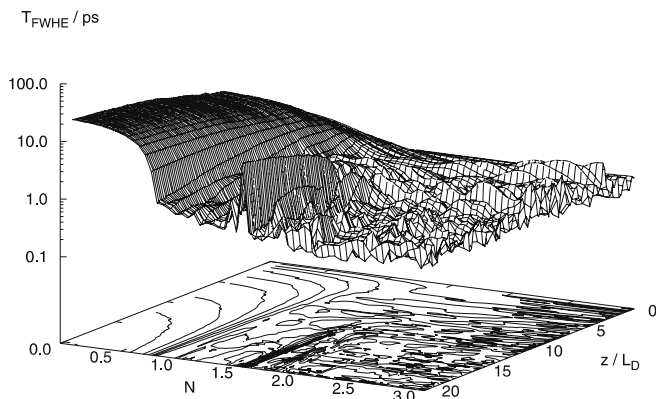
$N \approx 1.4$  ( $N^2 \approx 1.97$ ) a dispersion-managed soliton is generated. The contour lines show perhaps more clearly than the three-dimensional graph that the pulse width becomes independent of  $z$ . For higher energies one observes rapid variations in the pulse width. These are mainly caused by beating between the soliton and the radiated background; there are also contributions from beats between several solitons when at elevated power more than one is generated.

## 5 Application to the random case

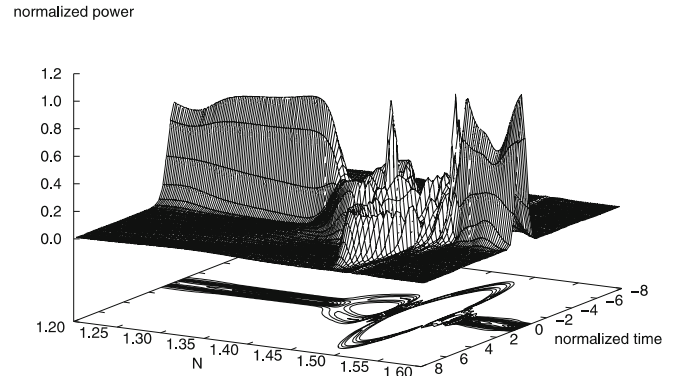
Now we let  $j \neq 0$  and thus introduce the random length deviations ('jitter') described above. For small jitter, there is no dramatic change: solitons may still propagate in the fiber, because they can rearrange e.g. their pulse width to fulfill the balance between dispersion and nonlinearity. In the process they shed some energy; this energy is converted into dispersive waves. A continued energy loss will eventually let the solitons decay. The distance over which the solitons survive may, however, be tremendous, and may be sufficient for all terrestrial purposes.

A typical behavior with a jitter amplitude of  $j = 0.074$  is shown in Fig. 3. Comparison with Fig. 2 reveals the following: the low-power dispersive broadening is hardly affected. The point of invariance at  $N = 1.4$  gives way to minimal variation somewhere between  $N = 1$  and  $N = 1.5$ , but is less clear than before. This will be shown with more clarity below. Above  $N = 1.5$  the randomness destroys the regular interference pattern and, notably, gives rise to an enormous growth of the FWHE at specific  $N$  values. This is understood as follows: Fig. 4 shows the pulse shape at the distal fiber end for  $1.20 \leq N \leq 1.60$ . At specific  $N$  values (here,  $N = 1.45$  and  $N = 1.50$ ) the pulse is split up into a pulse pair. If one measures pulse width as FWHE as we do here, in such a case one finds the pulse separation and not their individual widths. This explains the enormous growth of the FWHE.

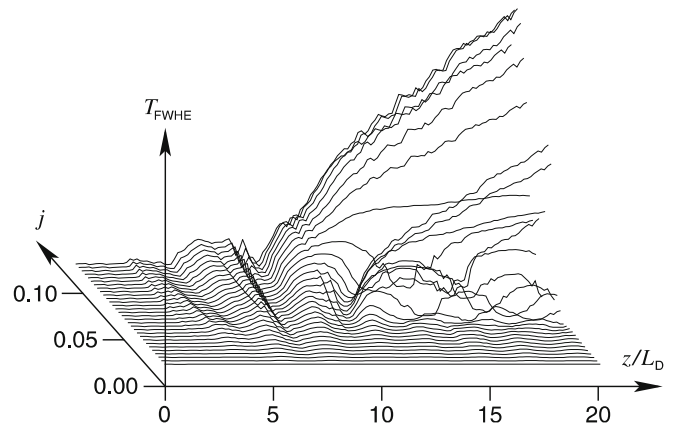
A question of great practical importance is: under which conditions and in which locations does the splitting happen? The question for the location is addressed by a graphical representation of the evolution of the FWHE over the distance with  $j$  as a parameter in Fig. 5. Again, for  $j \lesssim 0.05$  no dramatic events happen to the soliton. However, at  $j > 0.05$  a split can occur; here one sees clearly that it occurs in well-



**FIGURE 3** Same as in Fig. 2 but with random segment length deviations at  $j = 0.074$



**FIGURE 4** Pulse shape at the fiber end at  $z = 20.4L_D$  (compare Fig. 3). Note the 'bubbles' in the contours near  $N = 1.45$  and  $N = 1.50$ , indicative of pulse split-ups



**FIGURE 5** Evolution of the pulse duration (FWHE) along the fiber for different jitter amplitudes  $0 \leq j \leq 0.113$  with  $N = 1.45$ . The trace with  $j = 0.074$  corresponds to Figs. 3 and 4

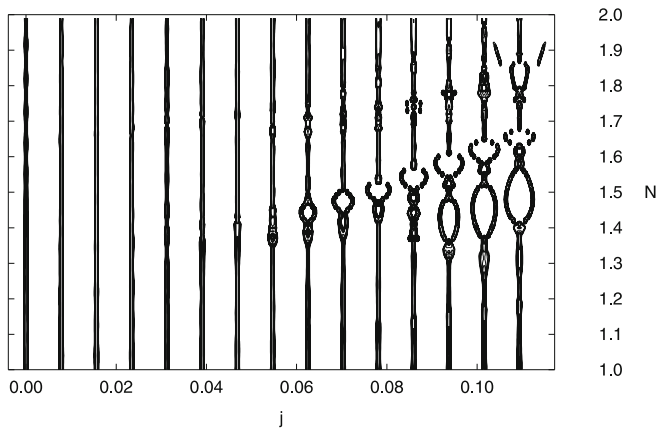
localized places (in this case,  $z = 7.5L_D$  at  $0.08 \leq j \leq 0.11$  and  $z = 11L_D$  at  $0.05 \leq j \leq 0.06$ ).

The next question is whether the underlying cause is also well localized, or whether it is some cumulative effect. We checked this by operating the same fiber, with the same randomization, in backwards direction (i.e. by launching pulses at the far end and propagating them towards the near end). It turns out that in the reverse direction there may be splits occurring in different positions, or none at all. This shows that the split-ups are dependent on direction: the cause is not strictly localized, and is not fully described by non-directional specifications like the histogram, power spectrum, etc., of the random jitter.

Instead, whatever is responsible apparently accumulates over some distance and prepares the pulses so that they become prone to splitting up. In this context we find it remarkable that the energy intervals for which split-ups occur are so narrow as to remind one of resonance phenomena. For example, in Fig. 4 break-ups occur for  $N = 1.45 \pm 0.02$  and for  $N = 1.50 \pm 0.02$  (and in other computational runs we encountered some resonances that were an order of magnitude narrower). One might suspect a resonance of the map period  $L_{\text{map}}$  with  $L_D$ ; both are indeed of the same order.

However, these 'resonances' are nonlinear phenomena: an alternative view of the pulse splitting, this time as a function of the jitter amplitude  $j$ , is presented in Fig. 6.  $j$  is increased





**FIGURE 6** Assembly of contour plots as in Fig. 4, for different random amplitudes  $j$ . For the individual plots,  $j$  was incremented from 0 in steps of  $1/128$ . Note that the ‘bubbles’ shift to larger  $N$  as  $j$  increases

in steps of  $1/128$ . Again we see that soliton split-ups occur in narrow energy intervals, but now we realize that the ‘resonant energies’ shift upwards as the jitter amplitude is increased. The ultimate reason for these ‘resonances’ must therefore be more complex. An observation of considerable practical import is that below the lowest ‘resonance’ there is no split-up, and the pulses remain intact. In many computational runs we never found any splitting for  $j \lesssim 0.05$ . On the other hand, for sufficient jitter amplitude we find in every single computational run that pulses split sooner or later along the fiber as long as the energy is varied in sufficiently small increments – it is easy to miss a narrow resonance when using coarse steps.

## 6 Conclusion

As soon as the dispersion map deviates from strict periodicity, we have to expect several modifications: (a) if resonances of the soliton dynamics with the dispersion period were a problem, randomization would tend to wash them out. (b) On the other hand, the soliton’s average phase will undergo a random walk, which, if it accumulates too much, may eventually lead to the soliton’s destruction. This could be corrected without affecting the previous item by local compensation of accumulated dispersion at one or both of the fiber end points, or even at some convenient points along the span. (c) A continued energy loss of the soliton as it travels through the randomized map is unavoidable. This effect is comparable to fiber loss in a non-dispersion-managed system. For excessive fiber loss solitons may split into two. An obvious fix would be to launch pulses such that they have the optimum energy not at the launch point, but at mid-span. In other words, one would deliberately make the launched power high by about one-half of the scattering loss. We caution, however, that this approach may actually provoke pulse split-ups.

How does all this affect the usefulness of dispersion-managed solitons? For fiber spans on this planet, its half-circumference of about 20 Mm should serve as a reasonable maximum distance. As long as degradation over this distance contributes little to the overall bit error rate, the scheme can be considered stable for all practical intents and purposes. Our data show that for all realizations of random numbers that we employed, jitter amplitudes up to a few percent never destroyed a soliton over a distance of  $20L_D$ ; in our calculations and assuming  $T_0 = 30$  ps,  $20L_D$  corresponds to 21 Mm.

This suggests the following conclusion: when the fiber segment lengths are measured with a 1% accuracy as is typically obtained with standard OTDR (optical time domain reflectometry) equipment, and for typical amounts of random fluctuation of local dispersion along the fiber due to manufacturing tolerances, the individual segments should have their accumulated dispersion matched to within less than about 2%. Even in 40 Gbit-per-second systems with pulse durations 10 ps and shorter, solitons will survive intact for US interstate (or European capital-to capital) distances without problem. It is also quite possible that with some care transoceanic distances can be spanned without significant error increase.

We finally note that we did not yet take into account the effect of optical amplifiers. At this point it remains an open question of how amplified systems are affected. Also, we have not yet considered the effect of channel interaction in wavelength-division multiplex systems. All dispersion-managed systems suffer from background radiation scattered off the solitons; so far this seems to be not too detrimental. However, with a randomized periodicity, the amount of scatter increases, and the problem is aggravated. Further research must show how the results presented here hold in the dense wavelength division multiplex case.

**ACKNOWLEDGEMENTS** We gratefully acknowledge the German–Israeli Project Cooperation (DIP) for financial support.

## REFERENCES

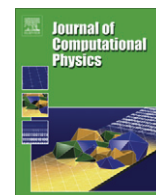
- 1 G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic, London 2001)
- 2 C. Kurtzke, *IEEE Photon. Tech. Lett.* **5**, 1250 (1993)
- 3 M. Suzuki, I. Morita, N. Edagawa, S. Yamamoto, H. Taga, S. Akiba, *Electron. Lett.* **31**, 2027 (1995)
- 4 N.J. Smith, F.M. Knox, N.J. Doran, K.J. Blow, I. Bennion, *Electron. Lett.* **32**, 54 (1996)
- 5 S.K. Turitsyn, E.G. Shapiro, S.B. Medvedev, M.P. Fedoruk, V.K. Mezentsev, *C.R. Physique* **4**, 145 (2000)
- 6 F.K. Abdullaev, B.B. Baizakov, *Opt. Lett.* **25**, 93 (2000)
- 7 M.J. Ablowitz, J.T. Moeser, *Opt. Lett.* **29**, 821 (2004)
- 8 J. Gripp, L.F. Mollenauer, *Opt. Lett.* **23**, 1603 (1998)
- 9 R. Ohhira, A. Hasegawa, Y. Kodama, *Opt. Lett.* **20**, 701 (1995)
- 10 M. Chertkov, Y. Chung, A. Dyachenko, I. Gabitov, I. Kolokolov, V. Lebedev, *Phys. Rev. E* **67**, 036615 (2003)
- 11 E. Poutrina, G.P. Agrawal, *J. Lightwave Technol.* **21**, 990 (2003)
- 12 B.A. Malomed, A. Berntson, *J. Opt. Soc. Am. B* **18**, 1243 (2001)
- 13 G. Marsaglia, A. Zaman, *Ann. Appl. Probab.* **1**, 462 (1991)
- 14 <http://www.wolfram.com>





Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Computational Physics

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/jcp](http://www.elsevier.com/locate/jcp)

## Trim-to-Coherence Fourier Transform

M. Böhm<sup>a</sup>, M. Tasche<sup>b</sup>, B. Seifert<sup>a,c</sup>, F. Mitschke<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup> Institut für Physik, Universität Rostock, 18051 Rostock, Germany

<sup>b</sup> Institut für Mathematik, Universität Rostock, 18051 Rostock, Germany

<sup>c</sup> Facultad de Física, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago 22, Chile

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 22 May 2008

Received in revised form 3 December 2008

Accepted 27 December 2008

Available online 12 January 2009

#### Keywords:

Fourier transform

Numerical methods

Scalloping error

### ABSTRACT

We introduce a discrete Fourier transform technique which extracts more spectral information from a given time series data set than conventional discrete Fourier transform (DFT). Valid information is obtained between the spectral bins of conventional DFT, scalloping error is greatly reduced, and amplitude and phase of Fourier components are more true to the process under study as with conventional DFT. We call the general idea Trim-to-Coherence Fourier Transform, and its particular embodiment 'Phase-Rotation Fourier Transform'. Treatment of the raw data is minimally invasive; e.g. there is no zero padding.

© 2009 Elsevier Inc. All rights reserved.

## 1. Introduction

Fourier transform of the temporal variation of physical quantities provides information on the spectral content which in many cases gives valuable insight into the mechanism creating the temporal variation. Examples are abundant and run the gamut from acoustics to civil engineering to wireless communications to physiology.

Consider a time-varying function  $s(t)$  (signal), sampled at the time instants  $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, (N-1)\Delta t$  where  $\Delta t$  is the constant sampling time chosen so that Nyquist's sampling condition is fulfilled. The samples are denoted by  $s_n = s(n\Delta t)$  ( $n = 0, \dots, N-1$ ). Each sample represents a time slot of duration  $\Delta t$ ; a record of  $N$  successive data points  $s = \{s_0, s_1, \dots, s_{N-1}\}$  (time series) is the discrete representation of a partial history of duration  $T = N\Delta t$  (time window) of the signal. This partial, discretized representation reflects the signal's properties only within certain bounds of accuracy. The question typically is to which precision the frequency, amplitude and phase of some oscillation in the signal can be retrieved from the time series. We present a variation on the established procedure which can, in some circumstances, provide improved accuracy on this count.

### 1.1. Continuation and edge effects

A Fourier transform on a finite time series results in a discrete spectrum. Since the phase of the resulting complex spectral values is  $2\pi$ -periodic and thus carries ambiguity, the Fourier transform can therefore be considered as a Fourier transform of a periodic continuation of the finite time series.

Consider as a first example that the time series represents a single harmonic oscillation of fixed frequency, amplitude and phase. Further assume for now that an integer number of oscillation periods fits precisely into the window length; this

\* Corresponding author. Tel.: +49 381 498 6820; fax: +49 381 498 6822.

E-mail addresses: [michael.boehm@uni-rostock.de](mailto:michael.boehm@uni-rostock.de) (M. Böhm), [fedor.mitschke@uni-rostock.de](mailto:fedor.mitschke@uni-rostock.de) (F. Mitschke).

URL: <http://www.physik.uni-rostock.de/optik> (M. Böhm).

coincidence is called *coherent sampling* or *synchronous sampling* [1]. Then the periodic continuation of the window transforms the finite-length, rectangularly truncated oscillation into a continuous, unperturbed oscillation. In the spectral domain, one particular bin will represent that frequency exactly. This is the most favorable case in which both amplitude and phase at the underlying frequency are obtained without error. Since  $N$  samples generate  $N/2$  different frequency bins, the frequency is certainly located to better than the separation to the neighboring bins. Specifically, if the window has  $N$  sample points and  $k$  such points constitute one period of oscillation ( $k$  divides  $N$  in the coherent case), then the signal is found in the  $N/k$ th bin. The distance of neighboring bins is equal to  $k/N$ . Note that this may be a small number; it constitutes an upper bound for the relative spectral half-width, but any finer subdivisions of the frequency domain are fictitious at this point.

Now consider the *non-coherent case*: the period of the oscillations is such that a non-integer number of periods is represented within the length of the time series. Periodic continuation now produces an oscillation in which phase jumps occur periodically (every  $N$  data points), as sketched in Fig. 1. The result is a broadened spectral line. Also, the frequency falls between two bins in the spectral domain, so that both neighboring bins will contain nonzero amplitude values; this gives rise to the *scalloping error*. It attains its maximum when the frequency falls halfway between two bins, where the frequency is off by one half the bin separation, and the amplitude by  $-3.92$  dB [2].

The usual strategy to reduce the frequency and amplitude inaccuracies is to subject the time series to an apodization [2], also referred to as a windowing function or tapering. Windowing eliminates the artifacts from convolution of the spectrum with that of the rectangular window (false spectral peaks) by smearing out the phase jumps from the continuation in the non-coherent case, and by way of broadening the spectral line it also reduces the amount of scalloping amplitude error.

To determine values between the bins one can use improved interpolation methods. Assuming that there is no additional information outside the measured range, one can apply the Whittaker–Shannon interpolation formula [3] for the spectral domain. This method works fine in the temporal domain, where the data set is always real, but in the frequency domain this interpolation formula is usually inapplicable. The results of the methods presented here are similar to the Whittaker–Shannon interpolation formula but are universally applicable.

## 2. A novel approach

To explain the core idea about the *Trim-to-Coherence Fourier Transform*, consider again the case of a simple harmonic oscillation of which only a very few periods are within the recorded time series. In our proposal, a synchronization of the signal and the measured window is used to evoke the error free coherent case. In particular, we introduce what we call *Phase-Rotation Fourier Transform* (PFT); the Appendix presents a full mathematical formulation.

Start with the available time series  $s$  with arbitrary but fixed sample length  $N$ . By DFT of length  $N$ , one obtains

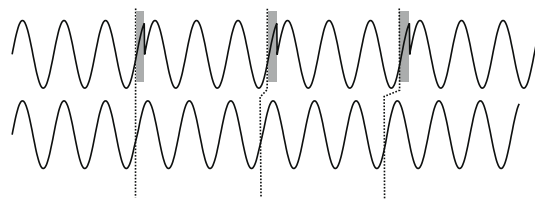
$$\tilde{s}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} nk\right) \quad (k = 0, \dots, N-1). \tag{1}$$

We now show how one can approach the coherence condition by, in effect, rescaling the frequency axis. To this end we shift the signal through a rotation of its phase. The data points  $s_n$  ( $n = 0, \dots, N-1$ ) are treated as complex values even if they are originally real. Each data point is rotated in phase by multiplication with a term of absolute value one:

$$s_n \rightarrow s_n^{(\delta)} = s_n e^{-i\varphi} = s_n \cdot \exp\left(-i\delta\pi\left(\frac{2n}{N} - 1\right)\right) \tag{2}$$

with the spectral resolution constant  $\delta$ . In principle, one could choose any  $\delta$  to access a certain frequency. To achieve equally spaced spectral information, one should choose  $\delta = \frac{1}{D}$  with a positive integer number of intermediate points  $D$ . The rotation angle starts with  $\varphi = -\delta\pi$  at  $n = 0$ , increases with  $n$ , and reaches its maximum of  $\varphi = \delta\pi\frac{N-2}{N}$  at  $n = N-1$ . In other words, the phase is linearly *ramped* across the time window. When this modified data set is Fourier-transformed, it has acquired a shift of the frequency scale according to the displacement law of Fourier transform

$$f_k = \frac{k}{N\Delta t} \rightarrow f_k^{(\delta)} = f_k + \delta \frac{1}{N\Delta t}. \tag{3}$$



**Fig. 1.** Top: Sine wave with phase disruptions, as it occurs from periodic continuation in the non-coherent case. Bottom: By truncation of the time series (discarding the part indicated by shading) such that the coherence condition is met, a smooth continuation is achieved. This is the core idea of our proposal, but coherence can also be attained without sacrificing data points.

The variable  $\delta$  defines the amount of spectral shift. At  $\delta = 0$  the spectrum is not shifted at all, and  $\delta = 1$  the spectrum is shifted by a full bin. Therefore, it is fully sufficient to use  $0 < \delta < 1$  to get information between bins. Specifically, if one wishes to achieve  $D$  intermediate values, one can choose  $\delta = 0/D, 1/D, \dots, (D - 1)/D$ , and perform a Fourier transform at each of these  $D$  steps.

The additional phase-rotation in effect rescales the frequency. As the frequency is increased, the underlying frequency and the given time window will eventually reach the coherence point within the precision given by the  $D$  discrete steps. Here the spectrum will reach a maximum amplitude. Plotting all spectral data  $\tilde{s}_k^{(\delta)}$  at the new frequencies  $f_k^{(\delta)}$  yields a high resolution spectrum.

2.0.1. Procedure for PFT

The procedure for PFT in compact form is this:

Input:  $N \geq 8, \Delta t > 0, D \in \mathbb{N}$  (one may conveniently choose  $N$  as a power of 2 and  $D \in \{4, 8, 16, \dots\}$ ).  $s_n = s(n\Delta t)$  ( $n = 0, \dots, N - 1$ ) sampled values of a sufficiently smooth, quasiperiodic function  $s(t)$ :

- For  $\delta = 0, \frac{1}{D}, \dots, \frac{D-1}{D}$  compute by DFT (or if possible by FFT) of length  $N$  for ( $k = 0, \dots, N - 1$ )

$$\tilde{s}_k^{(\delta)} := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n \exp\left(-i\delta\pi\left(\frac{2n}{N} - 1\right)\right) \cdot \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}nk\right). \tag{4}$$

- Determine from the PFT spectrum  $\left(\frac{k+\delta}{N\Delta t}, \tilde{s}_k^{(\delta)}\right)$  for  $\delta = 0, \frac{1}{D}, \dots, \frac{D-1}{D}$  and  $k = 0, \dots, N - 1$  the local maxima of the linear splines through the points  $\left(\frac{k+\delta}{N\Delta t}, |\tilde{s}_k^{(\delta)}|^2\right)$ .
- If the linear spline has at  $\frac{k'+\delta'}{N\Delta t}$  ( $\delta' \in \{0, \frac{1}{D}, \dots, \frac{D-1}{D}\}; k' \in \{0, \dots, N - 1\}$ ) a local maximum with significant value  $|\tilde{s}_{k'}^{(\delta')}|^2$ , then  $\frac{k'+\delta'}{N\Delta t}$  is the wanted frequency and  $\tilde{s}_{k'}^{(\delta')}$  is the corresponding complex amplitude.

Output:  $\frac{k'+\delta'}{N\Delta t}$  frequency of  $s(t)$ ,  $\tilde{s}_{k'}^{(\delta')}$  complex amplitude.

3. Demonstrations

We will now demonstrate that this technique is beneficial: amplitude, frequency and phase of the spectral maximum are located with improved precision. We go through several examples to illustrate the difference.

3.1. Simple harmonic oscillation

3.1.1. Fixed frequency

Consider as the simplest case a sinusoidal wave

$$s_n = \cos(2\pi f_1 n) \quad (n = 0, \dots, N - 1) \tag{5}$$

with the normalized frequency  $f_1 = f\Delta t$  sampled with  $N = 2^8$  and  $1/k = 0.06 = f_1$  (the latter implies that  $k \approx 16.7$  points constitute one cycle). The time series then represents  $N/k \approx 15.4$  periods of this oscillation. Fig. 2 compares conventional DFT (with no apodization used) and PFT. Frequency is here scaled to the Nyquist frequency which is half the sampling frequency. Only the low frequency part is shown for clarity. The lowest nonzero frequency is at  $1/N$ . In comparison, DFT produces sparse

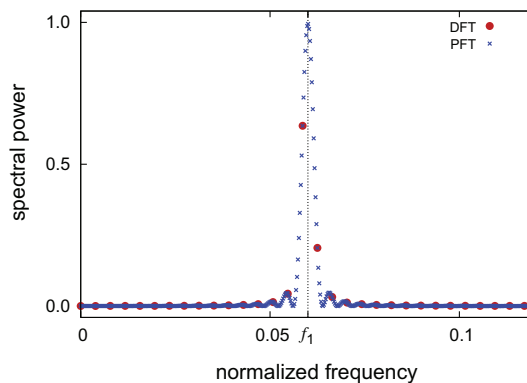


Fig. 2. The sinusoidal signal equation (5) with a normalized frequency of  $1/k = 0.06$  (see vertical dotted line), analyzed with DFT (large symbols) and PFT (small symbols). Frequency is scaled to the Nyquist frequency; the lowest frequency bin is at  $1/256$ .

data points from which it is hard to assess the spectral peak. It is evident that the signal is identified with much better precision when PFT is employed.

On close inspection, there are small secondary maxima in the power spectrum. These occur because off the position of the maximum, the coherence condition is not precisely met, and the continuation gives rise to phase jumps; therefore the square window is felt and convoluted into the spectrum.

To illustrate this last point, we present Fig. 3. It is based on the same data as in Fig. 2 but has a logarithmic vertical axis. In addition, it contains the result from a modified procedure in which a four-term Blackman–Harris apodization window was employed [2]. The apodization suppresses the background, which consists of ripples, by about eight orders of magnitude. This highly desirable modification comes at the price that the width of the spectral peak is increased by a factor of roughly 2, and the amplitude is also altered. The apodization affects both DFT and PFT in the same way, but PFT gives information between the original bins and therefore provides the peak position to a much better precision.

3.1.2. Variation of frequency

To obtain more precise statements about the achieved precision in the determination of frequency and amplitude, we consider simple harmonic oscillations at various frequencies  $f_1$ . Whenever the coherence condition is fulfilled by coincidence, even conventional DFT will return a precise frequency and amplitude value. For all other cases, however, the best

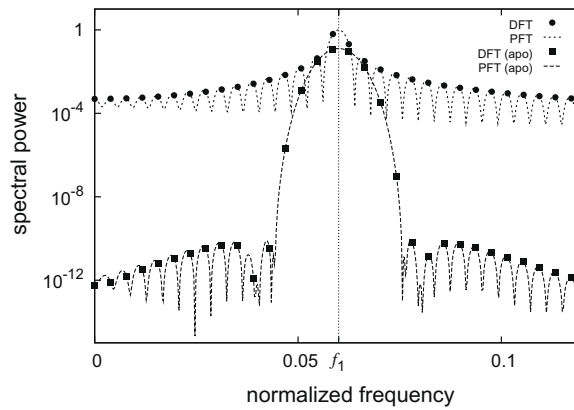


Fig. 3. Same as Fig. 2 but on a logarithmic scale. The spectral power retrieved by DFT and PFT is shown with and without apodization.

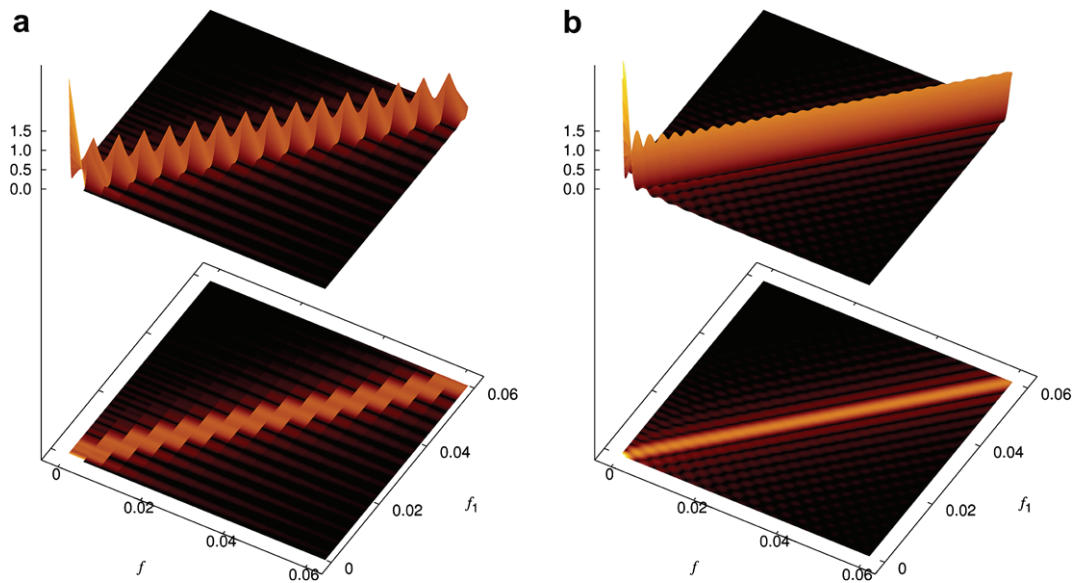


Fig. 4. Power spectra of a sinusoidal signal equation (5) calculated with DFT (a), and PFT (b). Shown are 3D representations (top) and contours in the  $f - f_1$  plane. The lowest nonzero frequency is at  $1/256$ . The underlying frequency  $f_1$  varies from 0 to 0.06. The scalloping error in frequency and amplitude can be seen.

value for frequency and amplitude is given by that data point that has the highest amplitude of all power spectra (compare Fig. 2). Due to the coarse steps in DFT, both frequency and amplitude have scalloping errors.

Fig. 4 displays the obtained power spectrum (modulus squared of the amplitude vs. frequency  $f$ ) when the true frequency  $f_1$  is varied (i.e.  $k$  is varied). Due to the coarse resolution of DFT, the spectral maximum moves in a stair-like fashion; a mild improvement can be had by apodization. For PFT, the result is much smoother immediately.

For a more immediate comparison of frequency and amplitude errors, see Figs. 5 and 6. The frequency error and the amplitude error are plotted for the total meaningful range of  $f_1$  for the considered example in Fig. 4. The frequency error alternates between plus/minus half a bin width for conventional DFT. PFT consistently keeps the error to one order of magnitude less than DFT. It shows relative weaknesses only at the lowest and highest few bins but still beats DFT everywhere. Part of the residual error stems from a phase dependent error described in Section 3.2. The remainder can be reduced by increased sampling rate.

The amplitude error (scalloping error) shows up in the DFT case as false dips by 60%, corresponding to  $-3.92$  dB. This can be reduced to  $-0.86$  dB with the best windowing functions [2]. PFT, in contrast, has much less deviation over most of the frequency range considered. For comparison we indicate the  $-0.86$  dB as a dotted line in Fig. 6.

### 3.2. Bichromatic oscillation

While for a monochromatic signal the coherence condition can always be met, for two noncommensurate frequencies it cannot be met for both components at the same time. However, Trim-to-Coherence Fourier Transform still provides an advantage.

As data sets we prepared the sum of two monochromatic signals with same amplitudes

$$s_n = \cos(2\pi f_1 n) + \cos(2\pi f_2 n) \quad (n = 0, \dots, N - 1), \quad (6)$$

and the frequencies vary as in Fig. 4. As an example we use  $f_2 = 0.06 - f_1$ . Fig. 7(a) shows that resolution is restricted in the case of DFT due to the coarse steps in frequency. In contrast, PFT (b) allows to follow both frequencies through their crossing. Obviously, at very close separation just adjacent to the crossing point PFT has an enormous advantage.

The secondary maxima explained above appear here, too. Note, however, that these artifacts may now interfere with the main peaks and create amplitude errors. These errors are not specifically created by PFT: they are always there, but in DFT they go unnoticed because they are swamped by coarse resolution. Just as above, the artifacts and the errors they create can be removed by apodization, but only at the price of reduced resolution.

For the case of a closely spaced doublet of oscillations, Fig. 8 shows how the two retrieved spectral lines depend on the relative phase of the oscillations. With DFT (a), the doublet is not quite resolved. Variation of the relative phase affects the

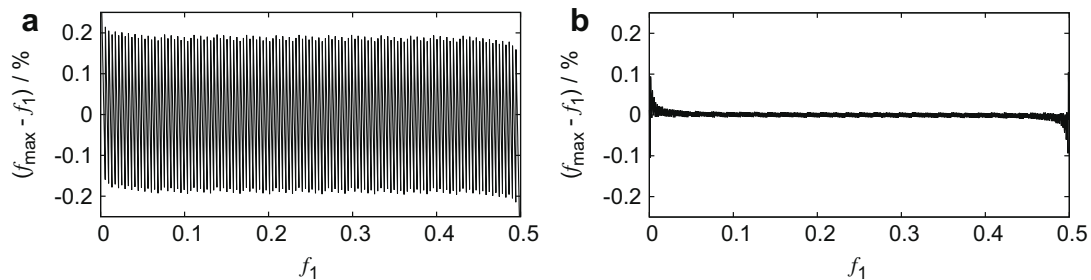


Fig. 5. Frequency error as function of frequency for conventional DFT (a) and PFT (b).

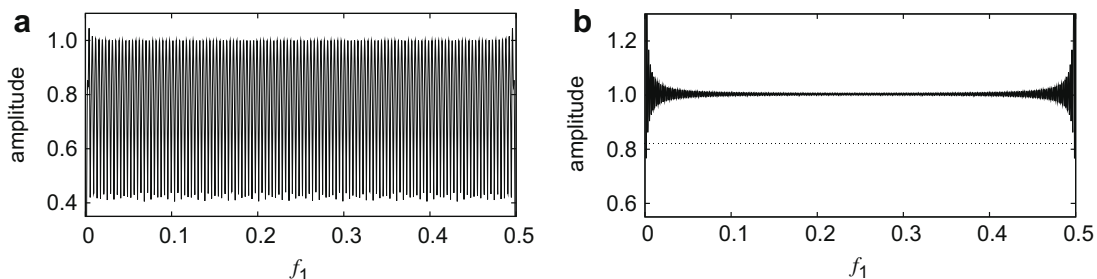


Fig. 6. Amplitude error (scalloping error) as a function of frequency for conventional DFT (a) and PFT (b). The dotted line indicates the most favorable case of windowed DFT, see text.



reconstructed amplitudes. With PFT (b), the doublet is fully resolved, and we see the same amplitude error arising again. In addition, an error becomes apparent in the assessment of the precise frequency difference. This error was swamped in the coarse resolution of DFT and went unnoticed; with the improved resolution of PFT it becomes visible.

3.3. Nontrivial chirp reconstruction: phase information

We turn to data representing a chirped Gaussian wave packet. Chirp refers to a non-constant value of the frequency of the wave over the duration of the envelope. Chirped pulses play a major role in radar technology, laser science, data transmission, etc. We here choose a linear spectral chirp, which means that the spectral phase is described by a parabola. The signal is given by [4]

$$s(T) = \exp\left(-\frac{1 + Ci}{2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^2\right) \cdot \cos\left(2\pi f_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)\right), \tag{7}$$

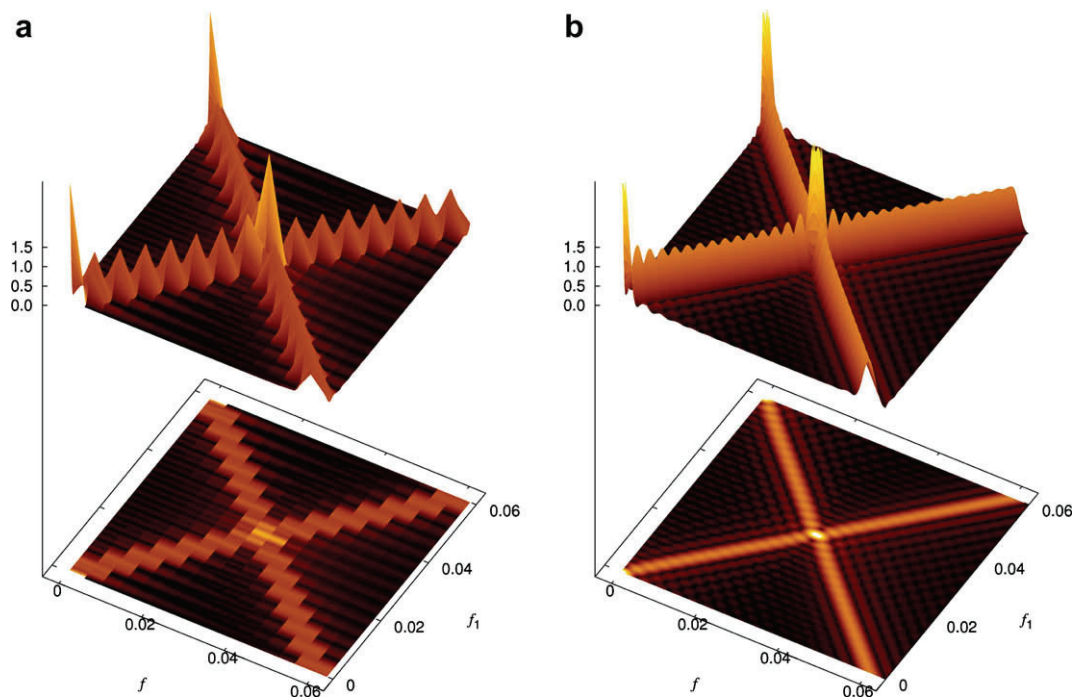


Fig. 7. Power spectra calculated with DFT (a) and PFT (b) of a doublet consisting of the sum equation (6) of two sinusoidal signals with the frequencies  $f_1$  and  $f_2 = (0.06 - f_1)$ , where  $f_1$  varies from 0 to 0.06. The lowest nonzero frequency is at 1/256. The scalloping error in frequency and amplitude can be seen.

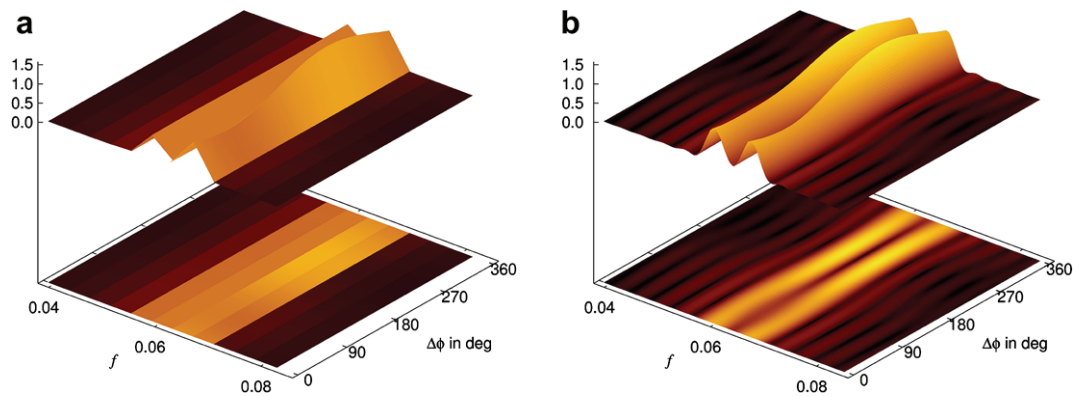


Fig. 8. Scalloping error of a doublet consisting of the sum Eq. (6) as a function of their phase difference  $\Delta\phi$ ; the lowest nonzero frequency is at 1/256. The underlying frequencies are 0.0600 and 0.0655. (a) DFT; (b) PFT.

which has the spectral function

$$\tilde{s}(f) = \sqrt{\frac{2\pi t_0}{1 + Ci}} \exp\left(-\frac{(2\pi(f - f_0))^2 t_0^2}{2(1 + Ci)}\right). \tag{8}$$

We restricted the example to  $N = 256$  sampling points  $t_n$  ( $t_n = 0, \dots, 255$ ). For convenience we use a centered wave packet which is shifted by 128. In the example we use a normalized duration of 80, which leads to the normalized time  $\tau_n = (t/t_0 - 128)/80$  instead of  $t_n = t/t_0$ . The chirp  $C$  is set to 0.5 and the normalized carrier frequency  $f_0$  to 6.2. The real part of this chirped wave packet is shown in Fig. 9.

By DFT and PFT we calculate power (Fig. 10) and phase (Fig. 11). The power spectrum shows the behavior described before. The advantage of DFT should speak for itself.

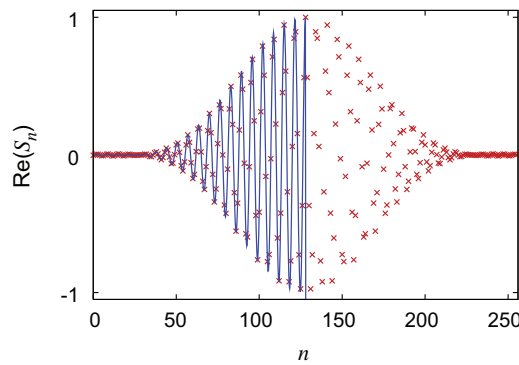


Fig. 9. Sampled chirped wave packet together with the function Eq. (7) which is shown for clarity only between 0 and 128.

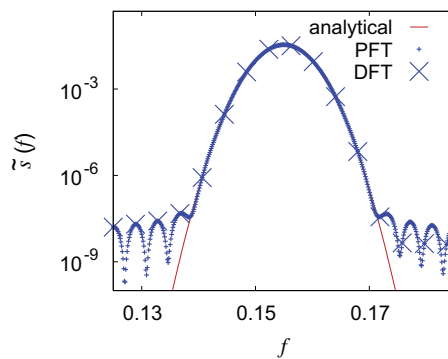


Fig. 10. PFT power spectrum of the wave packet shown in Fig. 9 together with the analytical expression Eq. (8) and a standard DFT.

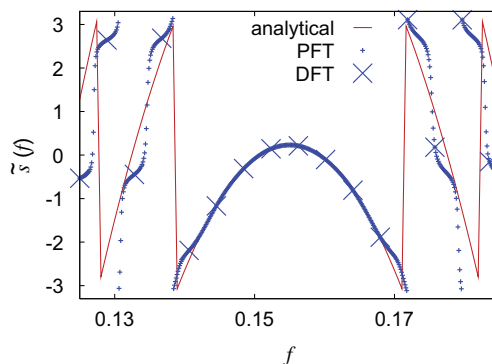


Fig. 11. PFT spectral phase of the wave packet shown in Fig. 9 together with the analytical expression Eq. (8) and a standard DFT.

## 4. Specifications

### 4.1. Resolution

With PFT the precision with which the exact frequency will be determined is no more given by the inverse of the time window length  $T$ . There is an improvement reflecting the intermediate frequencies between DFT bins. The constant  $\delta$  can be chosen for a compromise between computation time and resolution increase.

### 4.2. Computational cost and efficiency

DFT is particularly efficient when the number of data points fulfils certain conditions. Most frequently, one uses powers-of-two, and applies *fast Fourier transform* (FFT) [6] or a refinement thereof [7,8]. When the available data happen not to conform to this criterion, a recommended strategy is zero padding [11] to reach the next power-of-two. If done judiciously, this strategy has its merits, but ultimately it adds something to the data that was not there in the original signal. It does not remedy the phase jumps from the continuous continuation, and it adds information about the signal which is false. Zero padding is driven by an interest in computational efficiency, not in accuracy in the representation of the underlying signal! For another comment on zero padding see below.

Computation time for DFT of length  $N$  scales as  $N^2$ , for FFT as  $N \log(N)$ . Trim-to-Coherence Fourier Transform has a disadvantage here. For PFT we need  $D$  transforms in which FFT may or may not be applicable. In the worst case, therefore, the computation time for PFT scales as  $DN^2$ ; in more favorable circumstances, this is reduced to  $DN \log(N)$ .

In the example of 256 data points, the comparison would be  $256 \log_2(256) = 2^{11}$  for FFT,  $256^2 = 2^{16}$  for DFT, and  $D \cdot 256^2 = 16 \cdot 2^{16} = 2^{20}$  for PFT. These are considerable increases: 16-fold for PFT compared to DFT. However, even a standard desktop PC performs the PFT in well under one second. We therefore do not anticipate that PFT will be used where data need to be processed in real time. Rather, we see its domain of usefulness in those problems where one deals with unique data, i.e. data which stem either from a singular, non-repeatable incident, or are extremely difficult or costly to obtain. One then wants to extract as much information as possible, regardless of the size of the effort.

## 5. Example: sunspot cycle

Data sets which are hard or even impossible to be measured in more detail seem to be natural opportunities for PFT. Consider the historic data set of the number of sunspots, which is known to vary with a certain periodicity. In order to obtain the period with better precision, data acquisition for longer time (for more centuries) is not an option. Therefore methods like the one presented here are useful.

The number of sunspots has been counted and recorded on a daily basis for almost 260 years. It is well known that there is a variation with a period of about 11 years, known as the Schwabe cycle. More recent measurements, taking into account magnetic field data, indicate that magnetic polarity between northern and southern solar hemisphere alternates every other Schwabe cycle so that the true period really is twice as long (the Hale cycle). Longer periods such as  $\approx 80$  years (Gleissberg cycle) or  $\approx 200$  years have been reported by some researchers [12].

We used the monthly sunspot averages published in [13], considering  $N = 3111$  data points (from January 1749 to March 2008) (Fig. 12). The spectra obtained from DFT and PFT are shown in Fig. 13. In the DFT spectrum there is some indication of a maximum near 3 nHz, but data points are so sparse that statements about any detail are not possible. From PFT, one immediately sees the maximum at 2.88 nHz. This frequency corresponds to a period of 11.00 years.

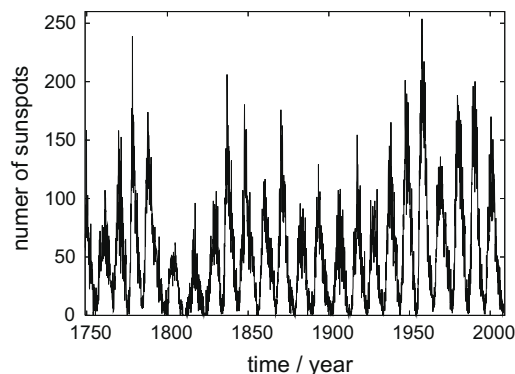


Fig. 12. Variation of the number of sunspots over the last centuries since beginning of systematic daily recordings.

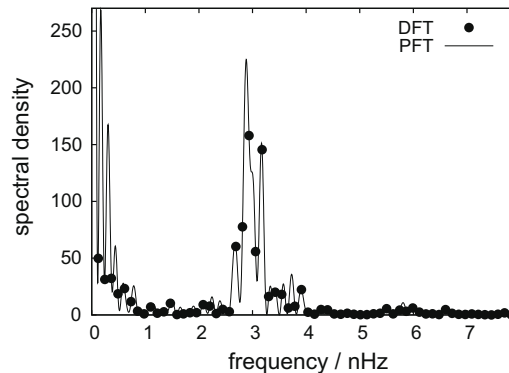


Fig. 13. Fourier transform of the time series shown in Fig. 12. Dots: DFT; line: PFT.

Other maxima can also be determined. The most prominent is at 3.17 nHz, which corresponds to 10.00 years. A closer examination of the involved frequencies, i.e. a PFT over a shorter time window, reveals that the frequency varies in time. Therefore, the fixed frequencies of 2.88 and 3.17 nHz are only an illusion, and the ‘integer’ number of years is purely coincidental. There is only one prominent frequency varying in the described range.

Then there is a weak overtone at twice the fundamental frequency, indicating that the sunspot variability is not a harmonic oscillation. Furthermore, there seems to be an indication of a subharmonic at one half the fundamental frequency which belongs to a period of 22 years, or the Hale cycle. Note that in the case of perfect symmetry of the two half-cycles in a Hale cycle the amplitude of this subharmonic would be zero. We conjecture that the nonzero value is more likely attributable to a statistical asymmetry, rather than an actual astrophysical asymmetry of the two hemispheres of the sun.

For extremely low frequencies there are some maxima, but at these frequencies the systematic errors are comparably large (compare with Fig. 6). Therefore, a prediction of sub-nHz frequencies corresponding to periods of more than 100 years is not meaningful.

## 6. Discussion

*Phase unwrapping.* In some cases conventional DFT is unable to reconstruct the spectral phase because phase variations from bin to neighboring bin reach or exceed the order of  $2\pi$ . Since the transform provides the phase only modulo  $2\pi$ , correct phase continuation is a severe problem which has already attracted quite some consideration [14]. Trim-to-Coherence Fourier Transform resolves many frequencies between the original DFT frequency bins; therefore the phase differences are reduced by a corresponding factor so that the continuation will, in most cases, cease to be a problem.

*Iterative frequency search.* With the additional knowledge that there is only one dominant frequency component in the signal, one can modify PFT to find this frequency in an iterative way. Instead of calculating  $D$  steps between each bin,  $\delta$  is used as a variable which bisects the interval. Now the interval can be reduced by choosing that interval, which contains the higher spectral power. This can be repeated until the desired precision is reached. This procedure considerably decrease the computational time.

*Another way to trim to coherence.* The central idea about our technique is to avoid the phase jumps in the continuous continuation; PFT achieves that by rescaling the frequency. Another way would be to simply chop data points of the time series until an integer number of oscillations is left (to within the step width). This was schematically shown in Fig. 1. We have systematically explored this variant and find that it has advantages over DFT similar to those of PFT. However, we feel that PFT should be preferred because removing data points discards valuable information.

*Zero padding.* In the same spirit, zero padding also adjusts the length of the data set: conventionally, one appends zeroes until the next power-of-two is reached. As commented above, this is driven by an argument about computational efficiency, not about signal structure. It is also unfortunate because zeroes are almost always false information about the underlying signal. And in contrast to our technique, zero padding does nothing about the phase jumps which are the root cause of most problems.

A variant would be to add many more zeroes so that at some point one again obtains the coherent case to within the grid resolution. We have even explored this variant of trimming to coherence, and find the following: a given signal frequency can be trimmed to coherence exactly if it is commensurate with the data set length. PFT accommodates both commensurate and incommensurate cases directly by appropriate choice of  $\delta$ . Whenever both happen to be commensurate, both approaches yield identical results. It is true that massive zero padding can approximate an irrational to any arbitrary precision when even more zeroes are appended, but then the computation time for zero padding diverges, whereas PFT can treat any incommensurate frequency in one go.

### 7. Conclusion

The method presented here provides spectral data points in between the frequency bins of standard DFT. According to conventional wisdom, the inverse of the bin separation equals the duration of the time series. It goes without saying that the increased number of data points in the spectrum from Trim-to-Coherence Fourier Transform in no way implies that after inverse transformation a longer piece of the temporal history can be reconstructed than was originally measured. If the data are truly stationary, such conclusion would be trivially true; if they are not, it would be wrong.

Several more tenets of conventional wisdom are disputed here:

- One should always strive to use FFT, and hence  $N = 2^n$ . If necessary, zeros can be padded. We have shown here that zero padding is not the only, and often not the best, way to reveal information about the signal.
- Apodization windowing is always beneficial. We have shown here that when the frequency of the spectral peak needs to be determined, apodization is not helpful. However, it can reduce spurious side peaks, if at the expense of reduced spectral resolution; this carries over to Trim-to-Coherence Fourier Transform.
- Spectral resolution is always limited by the total length of the time series.

We have shown (see Section 3.1.2) that the effective resolution can be improved by increasing the sampling rate beyond the minimum requirement of Nyquist’s sampling condition. This is a major reinterpretation of the sampling condition which states that the full information is present as long as the sampling frequency is at least twice that of the maximum frequency in the signal. In Trim-to-Coherence Fourier Transform a significant oversampling (many more than two points per period) plays out its benefit in terms of enhanced precision in frequency, amplitude and phase.

We envision that Trim-to-Coherence Fourier Transform can be applied to a multitude of situations. It will prove most beneficial where data sets contain only few oscillations, as may be the case whenever (a) one prefers to look only at short time series because the stationarity of the process is in question, e.g. through drift of parameters or when (b) a unique data set from a singular, non-repeatable incident is all one has to work with. Both conditions are met in the sunspot example above; the latter can include historic data, or data taken from rare or catastrophic events which cannot be repeated. Consider analysis of the audio record of an anonymous telephone call in crime investigation, etc.

### Appendix

Finally, we present a mathematical description of our method. For simplicity, we consider first a harmonic oscillation of fixed frequency. Then the exponential function  $s(t) = e^{2\pi i f_1 t}$  has the real frequency  $f_1$ . Instead of the function  $s(t)$ , only  $N + 1$  sampled values  $s(n\Delta t)$  ( $n = 0, \dots, N$ ) are given. Here  $\Delta t > 0$  is the grid spacing. Let  $T = N\Delta t$ . Assume that the Nyquist sampling condition  $|f_1| < 1/(2\Delta t)$  is fulfilled (see [15, p. 183]). It is our aim to determine the frequency  $f_1$  approximately.

First we compute the Fourier coefficients  $c_k^{(T)}(s)$  of  $s(t)$  with respect to the interval  $[0, T]$ . As usually,  $\mathbb{Z}$  denotes the set of all integers. If  $f_1 T \in \mathbb{Z}$ , then we obtain

$$c_k^{(T)}(s) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-2\pi i k t/T} dt = \delta(f_1 T - k) \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

where  $\delta(k)$  denotes the Kronecker symbol, i.e.,  $\delta(0) = 1$  and  $\delta(k) = 0$  for  $k \neq 0$ . But if  $f_1 T$  is not an integer, then

$$c_k^{(T)}(s) = e^{i\pi(f_1 T - k)} \text{sinc}(f_1 T - k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Here we use  $\text{sinc} t = \sin(\pi t)/(\pi t)$  for  $t \neq 0$  and  $\text{sinc} 0 = 1$ . The Fourier coefficient  $c_k^{(T)}(s)$  with index  $k$  closest to  $f_1 T$  will have the largest magnitude. Fourier coefficients with neighboring indices  $k$  (i.e.  $|f_1 T - k|$  is small) typically will have nonzero values. This is the phenomenon of *sidelobes*. The appearance of these sidelobes is a symptom of *leakage*. This leakage effect produces frequency components that are *not* present in the original function  $s(t)$ . Further, the Fourier coefficients oscillate and converge to zero like  $|f_1 T - k|^{-1}$  for  $|k| \rightarrow \infty$ .

The DFT has a similar property of leakage. By the trapezoidal rule, we can compute  $c_k^{(T)}(s)$  ( $k = -N/2 + 1, \dots, N/2$ ) via DFT of length  $N$ , where we set  $h(t) = e^{2\pi i(f_1 T - k)t/T}$ :

$$c_k^{(T)}(s) \approx \frac{1}{N} \left[ \frac{1}{2} h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n\Delta t) + \frac{1}{2} h(T) \right] = \tilde{s}_k^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n w_N^{nk} \quad (w_N = e^{-2\pi i/N}).$$

Using average value at endpoints, the input values  $s_n$  of DFT of length  $N$  are given by

$$s_n = \begin{cases} s(n\Delta t) & \text{for } n = 1, \dots, N - 1, \\ \frac{1}{2}(s(0) + s(T)) & \text{for } n = 0. \end{cases}$$

Now we calculate the values  $\tilde{s}_k^{(N)}$  ( $k = -N/2 + 1, \dots, N/2$ ) of the DFT of length  $N$  explicitly by the known summation formula

$$\sum_{n=1}^{N-1} e^{inx} = e^{iNx/2} \frac{\sin((N-1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

with  $x = 2\pi(f_1 T - k)/N$ . Note that from  $|f_1| < 1/(2\Delta t)$  and  $|k| \leq N/2$  it follows  $|x| < 2\pi$ . By simple calculation, we get for  $k = -N/2 + 1, \dots, N/2$

$$c_k^{(T)}(s) \approx \tilde{s}_k^{(N)} = e^{i\pi(f_1 T - k)} \frac{\cos(\pi(f_1 T - k)/N)}{\text{sinc}(\pi(f_1 T - k)/N)} \cdot \text{sinc}(f_1 T - k).$$

For the Phase-Rotation Fourier Transform, we multiply  $s(t)$  by  $e^{-2\pi i \delta t/T}$  ( $\delta \in [0, 1[$ ) and consider

$$s^{(\delta)}(t) = e^{2\pi i(f_1 T - \delta)t/T}.$$

Then the Fourier coefficients of  $s^{(\delta)}(t)$  with respect to the interval  $[0, T]$  read as follows:

$$c_k^{(T)}(s^{(\delta)}) = e^{i\pi(f_1 T - \delta - k)} \text{sinc}(f_1 T - k - \delta) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

By the trapezoidal rule, we can compute  $c_k^{(T)}(s^{(\delta)})$  approximately via DFT of length  $N$ . Let  $\tilde{s}_k^{(\delta)}$  ( $k = -N/2 + 1, \dots, N/2$ ) be the values of this DFT. Similarly as above, we obtain for  $k = -N/2 + 1, \dots, N/2$

$$c_k^{(T)}(s^{(\delta)}) \approx \tilde{s}_k^{(\delta)} = e^{i\pi(f_1 T - \delta - k)} \frac{\cos(\pi(f_1 T - k - \delta)/N)}{\text{sinc}(\pi(f_1 T - k - \delta)/N)} \cdot \text{sinc}(f_1 T - k - \delta).$$

Thus,  $\tilde{s}_k^{(\delta)}$  is an approximate value of the Fourier coefficient  $c_k^{(T)}(s^{(\delta)})$ . By

$$c_k^{(T)}(s^{(\delta)}) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-2\pi i t(k+\delta)/T} dt,$$

$c_k^{(T)}(s^{(\delta)})$  coincides with the  $k$ th Fourier coefficient of  $s(t)$  with respect to the rotated harmonic wave  $e^{2\pi i t(k+\delta)/T}$  with frequency  $f = (k + \delta)/T$ . Now we substitute  $f$  into  $\tilde{s}_k^{(\delta)}$  and obtain for  $k = -N/2 + 1, \dots, N/2$

$$\tilde{s}_k^{(\delta)} = e^{i\pi(f_1 - f)} \cdot \frac{\cos(\pi(f_1 - f)\Delta t)}{\text{sinc}(\pi(f_1 - f)\Delta t)} \cdot \text{sinc}T(f_1 - f),$$

such that the power spectrum reads as follows:

$$|\tilde{s}_k^{(\delta)}|^2 = \left( \frac{\cos(\pi(f_1 - f)\Delta t)}{\text{sinc}(\pi(f_1 - f)\Delta t)} \right)^2 \cdot (\text{sinc}T(f_1 - f))^2 \leq 1.$$

Note that the estimate  $x \leq \tan x$  for all  $x \in [0, \pi)$  provides

$$\left( \frac{\cos(\pi t)}{\text{sinc} t} \right)^2 \leq 1 \quad (t \in (-1, 1)).$$

The maximum value of the power spectrum is one at  $f = f_1$ . For  $T \gg 1$ , the power spectrum has a sharp peak at  $f = f_1$ . We choose  $k' \in \{-N/2 + 1, \dots, N/2\}$  and  $\delta' \in [0, 1[$  such that  $|\tilde{s}_{k'}^{(\delta')}|^2 \approx 1$ . Consequently, the wanted frequency  $f_1$  is approximately given by  $f = (k' + \delta')/T$ .

These results can be immediately extended to the general case of an exponential sum

$$s(t) = \sum_{j=1}^J a_j e^{2\pi i f_j t}$$

with complex coefficients  $a_j \neq 0$  and real frequencies  $f_j$  with a small integer  $J > 1$ . We know only the sampled values  $s(n\Delta t)$  ( $n = 0, \dots, N$ ). Let  $T = N\Delta t \gg 1$ . Assume that the Nyquist condition is fulfilled, i.e.

$$-1/(2\Delta t) < f_1 < \dots < f_j < 1/(2\Delta t).$$

Further we suppose that the frequencies  $f_j$  are significantly different, i.e.  $f_{j+1} - f_j \geq M/(\pi T \varepsilon)$  ( $j = 1, \dots, J - 1$ ), where  $\varepsilon > 0$  is a convenient accuracy bound and  $J\varepsilon \leq |a_j| \leq M$  ( $j = 1, \dots, J$ ). If we apply our method to the exponential sum  $s(t)$ , then we obtain for  $k = -N/2 + 1, \dots, N/2$ ,  $\delta \in [0, 1[$  and  $f = (k + \delta)/T$

$$\tilde{s}_k^{(\delta)} = \sum_{j=1}^J a_j e^{i\pi T(f_j - f)} \frac{\cos(\pi(f_j - f)\Delta t)}{\text{sinc}(\pi(f_j - f)\Delta t)} \cdot \text{sinc}(T(f_j - f)).$$

For each  $j \in \{1, \dots, J\}$ , there exist  $k' \in \{-N/2 + 1, \dots, N/2\}$  and  $\delta' \in [0, 1[$  with  $f_j \approx (k' + \delta')/T$ , where the power spectrum has a maximum at  $f_j$ . Moreover, we get  $\tilde{s}_{k'}^{(\delta')} \approx a_j$ . If  $|f_j - f|$  is very small, then the  $j$ th term

$$a_j e^{i\pi T(f_j - f)} \frac{\cos(\pi(f_j - f)\Delta t)}{\text{sinc}((f_j - f)\Delta t)} \cdot \text{sinc}(T(f_j - f))$$

dominates all the other terms of the sum  $\tilde{s}_k^{(\delta)}$ , since the magnitude of each other term is smaller than  $\varepsilon$  near  $f_j$ . By  $T \gg 1$ , in the power spectrum we can observe sharp peaks at  $f = f_j$  ( $j = 1, \dots, J$ ) of height  $|a_j|^2$ . In the power spectrum, we determine all maximum values at  $(f_j, |a_j|^2)$  ( $j = 1, \dots, J$ ) with  $|a_j| \geq J\varepsilon$  approximately.

## References

- [1] A. Ferrero, R. Ottoboni, High-accuracy Fourier analysis based on synchronous sampling techniques, *IEEE Trans. Instrum. Meas.* 41 (1992) 780–785.
- [2] F.J. Harris, On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform, *Proc. IEEE* 66 (1978) 51–83.
- [3] C.E. Shannon, Communication in the presence of noise, *Proc. IRE* 37 (1949) 10–21.
- [4] G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, San Diego, 1995.
- [6] J.W. Cooley, J.W. Tukey, An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, *Math. Comput.* 19 (1965) 297–301.
- [7] M. Frigo, S.G. Johnson, FFTW: an adaptive software architecture for the FFT, in: *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 3, 1998, pp. 1381–1384.
- [8] M. Frigo, S.G. Johnson, The design and implementation of FFTW3, *Proc. IEEE* 93 (2005) 216–231.
- [11] S.M. Kay, S.L. Marple Jr., Spectrum analysis: a modern perspective, *Proc. IEEE* 69 (1981) 1380–1419.
- [12] W. Gleissberg, A long-periodic fluctuation of the sun-spot numbers, *Observatory* 62 (1939) 158–159.
- [13] National Oceanic & Atmospheric Administration (NOAA), Washington, DC, USA. Data are taken from the website: <ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/STP/SOLAR\_DATA/SUNSPOT\_NUMBERS/MONTHLY.plt>.
- [14] J.M. Tribolet, A new phase unwrapping algorithm, *IEEE Trans. Acoust. Speech Sig. Process.* 25 (1977) 170–177.
- [15] W.L. Briggs, V.E. Henson, *The DFT: An Owner's Manual for the Discrete Fourier Transform*, SIAM, Philadelphia, 1995.