

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Механика материалов и детали машин»

## МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь  
в качестве учебного пособия для студентов  
учреждений высшего образования  
по специальностям направления «Агроинженерия»*

Минск  
БГАТУ  
2013

УДК 539.3/6(07)  
ББК 30.121я7  
М55

*Авторы:*

кандидат технических наук, доцент *О. И. Мисуно*,  
кандидат технических наук, доцент *Д. Н. Колоско*,  
кандидат технических наук, доцент *А. П. Буховец*,  
старший преподаватель *С. А. Легенький*

*Рецензенты:*

доктор технических наук, профессор кафедры  
инженерной графики БГУИР *В. М. Сурин*;  
заведующий кафедрой сопротивления материалов  
и теоретической механики БрГТУ,  
кандидат технических наук, доцент *В. М. Хвусевич*

**Механика материалов** : учеб. пособие / О. И. Мисуно [и др.].  
М55 – Минск : БГАТУ, 2013. – 252 с.  
ISBN 978-985-519-578-9.

Учебное пособие состоит из отдельных учебных модулей и обеспечивает комплексную реализацию основных этапов учебно-воспитательного процесса в соответствии с модульной технологией обучения. Приведены структурно взаимосвязанные и взаимодополняющие модули курса, учебно-методические материалы к лабораторным работам и практическим занятиям, задания по управляемой самостоятельной работе студентов, рекомендации по их выполнению и образцы, примеры разноуровневых заданий для контроля результатов изучения содержания модулей.

Предназначено для студентов вузов дневной формы обучения.

УДК 539.3/6(07)  
ББК 30.121я7

ISBN 978-985-519-578-9

© БГАТУ, 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

Модуль 0. ВВЕДЕНИЕ В ДИСЦИПЛИНУ .....	7
Модуль 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ .....	12
1.1. План, научно-теоретическое содержание модуля 1 .....	15
1.1.1. Вопросы для самоконтроля .....	18
1.2. Учебно-методические материалы к лабораторным работам .....	23
1.3. Учебно-методические материалы к практическим занятиям.....	23
1.3.1. Построение эпюр $Q$ , $M$ и $N$ для рам.....	23
1.3.2. Исследование напряженного состояния в точке. Обобщенный закон Гука.....	38
1.4. Задания по управляемой самостоятельной работе студентов и рекомендации по их выполнению .....	55
1.4.1. Определение внутренних силовых факторов .....	55
1.4.2. Прямой поперечный изгиб .....	55
1.5. Пример разноуровневого задания для контроля результатов изучения содержания модуля .....	72
1.6. Вопросы для контроля результатов изучения содержания модуля 1 (уровень III).....	73
Модуль 2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ, ИЗГИБ, КРУЧЕНИЕ, СДВИГ .....	76

2.1. План, научно-теоретическое содержание модуля 2 .....	77
2.1.1. Вопросы для самоконтроля .....	79
2.2. Учебно-методические материалы к лабораторным работам.....	82
2.3. Учебно-методические материалы к практическим занятиям.....	82
2.3.1. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении и сжатии.....	82
2.3.2. Статически неопределимые задачи при растяжении (сжатии).....	91
2.3.3. Расчеты на прочность при изгибе .....	99
2.4. Задания по управляемой самостоятельной работе студентов и рекомендации по их выполнению .....	110
2.4.1. Прямой поперечный изгиб .....	110
2.5. Пример разноуровневого задания для контроля результатов изучения содержания модуля .....	124
2.6. Вопросы для контроля результатов изучения содержания модуля 2 (уровень III) .....	125
Модуль 3. СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В УПРУГОЙ СИСТЕМЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ .....	127
3.1. План, научно-теоретическое содержание модуля 3 .....	129
3.1.1. Вопросы для самоконтроля .....	131
3.2. Учебно-методические материалы к практическим занятиям.....	133
3.2.1. Внецентренное растяжение (сжатие): определение положения нейтральной линии, расчеты на прочность.....	134

3.2.2. Изгиб с кручением: расчеты на прочность круглого вала .....	144
3.2.3. Определение перемещений в упругих системах способом Верещагина .....	153
3.2.4. Раскрытие статической неопределимости стержневых систем (балок) методом сил.....	163
3.3. Задания по управляемой самостоятельной работе студентов и рекомендации по их выполнению .....	170
3.3.1. Косой изгиб.....	170
3.3.2. Расчет статически неопределимых систем методом сил .....	185
3.4. Пример разноуровневого задания для контроля результатов изучения содержания модуля .....	196
3.5. Вопросы для контроля результатов изучения содержания модуля 3 (уровень III) .....	197
<b>Модуль 4. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ. ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ. ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЖЕНИЯ. ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ БРУСЬЯ.....</b>	<b>199</b>
4.1. План, научно-теоретическое содержание модуля 4 .....	200
4.1.1. Вопросы для самоконтроля .....	203
4.2. Учебно-методические материалы к практическим занятиям.....	205
4.2.1. Расчеты сжатых стержней на устойчивость .....	205
4.2.2. Расчет на выносливость при линейном напряженном состоянии, чистом сдвиге, плоском напряженном состоянии.....	216
4.2.3. Определение напряжений и перемещений, расчеты на прочность упругих систем, испытывающих удар .....	229

4.3. Задания по управляемой самостоятельной работе студентов и рекомендации по их выполнению .....	238
4.3.1. Устойчивость сжатых стержней .....	238
4.4. Пример разноуровневого задания для контроля результатов изучения содержания модуля 4.....	246
4.5. Вопросы для контроля результатов изучения содержания модуля 4 (уровень III) .....	247
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>249</b>

## Модуль 0. ВВЕДЕНИЕ В ДИСЦИПЛИНУ

---

Механика материалов – наука, занимающаяся разработкой методов расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость. Она является основой технического образования в вузе, развивая у специалиста широкое инженерное мышление и творческую инициативу.

Правильное и рациональное выполнение расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций, используемых в сложных эксплуатационных условиях под действием как статических, так и динамических нагрузок, учет температурных воздействий и процессов, связанных с длительностью эксплуатации, является необходимым условием надежности и долговечности машин, механизмов и оборудования при одновременном снижении их материалоемкости. Для усвоения дисциплины «Механика материалов» требуются знания, полученные при изучении разделов математики, физики, материаловедения, технологии конструкционных материалов, теоретической механики: элементы линейной и векторной алгебры, введение в математический анализ, дифференциальные и интегральные исчисления, физические основы классической механики, элементы механики сплошных сред, углеродистые и легированные стали, цветные металлы и сплавы, статика твердого тела, пространственная и плоская системы сил, кинематика точки и твердого тела, общие теоремы динамики, элементы аналитической механики.

Цель дисциплины – формирование у студентов фундаментальных основ инженерных знаний для проведения расчетов на прочность, жесткость, устойчивость элементов конструкций, развитие инженерного мышления; подготовка студентов к использованию полученных знаний в будущей профессиональной деятельности.

Задачи дисциплины – овладение теоретическими основами и практическими методами расчетов на прочность, жесткость

и устойчивость элементов конструкций, формирование фундамента инженерных знаний на основе изучения достижений мировой и отечественной науки и техники.

Изучение дисциплины будет содействовать формированию у студентов следующих компетенций:

*академических:*

- владение базовыми научно-теоретическими знаниями, исследовательскими навыками, системным и сравнительным анализом и применение их для решения теоретических и практических задач;
- умение работать самостоятельно, быть способным порождать новые идеи, повышать свою квалификацию в течение всей жизни;
- владение навыками, связанными с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером;

*социально-личностных:*

- чувство ответственности за порученное дело;
- высокая гражданственность;
- способность к принятию нестандартных решений, к социальному взаимодействию и межличностным коммуникациям;

*профессиональных:*

- владение информационными технологиями проектирования машин, сборочных единиц и технологических процессов;
- способность к выполнению изобретательских и рационализаторских работ, проектированию новой сельскохозяйственной техники и ремонтно-технологического оборудования;
- устойчивый профессиональный интерес к новейшим достижениям науки и передовой практики на протяжении всего активного периода трудовой деятельности.

В результате изучения дисциплины студент *должен знать:*

- механические характеристики материалов и методы их определения;
- основные виды нагружения элементов конструкций;
- экспериментальные методы определения напряжений, деформаций, нагрузок;
- основы теорий напряженного и деформированного состояний, теории прочности;
- особенности расчета статически неопределимых систем;

– основные направления повышения усталостной прочности, надежности и долговечности элементов конструкций;

– особенности расчета элементов конструкций при динамических нагрузках;

*уметь:*

– производить выбор расчетной модели (расчетной схемы);  
– рационально подбирать материал для изготовления элементов конструкции;

– выполнять расчеты стержней, брусьев, балок, валов, плоских стержневых систем на прочность, жесткость и устойчивость, определять их размеры, обеспечивающие надежную работу и наименьшую материалоемкость создаваемой конструкции.

Согласно образовательному стандарту и типовому учебному плану на изучение дисциплины отводится 256 часов, из них 120 – аудиторных занятий, в том числе лекций – 68, лабораторных занятий – 18, практических занятий – 34 часа.

Курс «Механика материалов» строится по модульно-рейтинговой системе, в которой предусматривается 4 модуля – по 2 модуля в каждом из двух семестров, соответственно с зачетом и итоговым экзаменом.

### Тематический план

№ и наименование модуля	Общее кол-во аудиторных часов на модуль	В том числе						УСРС (ч)
		Лекции (ч)		Лабораторные занятия (ч)		Практические занятия (ч)		
		Часы по плану	В том числе УСРС	Часы по плану	В том числе УСРС	Часы по плану	В том числе УСРС	
М-0. Введение в дисциплину	1	1						
М-1. Основные понятия и определения. Основы теории напряженного и деформированного состояния	31	13	2	10		8	4	6
М-2. Растяжение и сжатие, изгиб, кручение, сдвиг	32	16	4	8		8	2	6
М-3. Сложное нагружение. Перемещения в упругой системе при произвольной нагрузке. Расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил	28	18	4			10	2	6

№ и наименование модуля	Общее кол-во аудиторных часов на модуль	В том числе						УСРС (ч)
		Лекции (ч)		Лабораторные занятия (ч)		Практические занятия (ч)		
		Часы по плану	В том числе УСРС	Часы по плану	В том числе УСРС	Часы по плану	В том числе УСРС	
М-4. Продольный изгиб прямых стержней. Прочность при переменных напряжениях. Динамические нагружения. Плоские кривые бруска	28	20	2			8	2	4
Итого:	120	68	12	18		34	10	22

## Модуль 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

В результате изучения модуля студент должен:

*знать (описывать и формулировать)* цели и задачи дисциплины, основные понятия и определения, геометрические характеристики плоских сечений брусков, механические характеристики материалов, основы теории напряженного и деформированного состояния, теории прочности;

*уметь* составлять расчетные модели для реальных объектов, определять величины внутренних силовых факторов и строить их эпюры, механические характеристики материалов, определять геометрические характеристики простых и сложных сечений брусков, исследовать напряженное и деформированное состояние, оценивать прочность материала.

### Словарь основных понятий

Балка – брус, испытывающий изгиб.

Брус – элемент конструкции, один из размеров (длина) которого намного больше двух других размеров.

Главные напряжения – нормальные напряжения, действующие на главных площадках.

Главные площадки – площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения.

Главные центральные моменты инерции – осевые моменты инерции относительно главных центральных осей инерции.

Главные центральные оси инерции – оси, проходящие через центр тяжести сечения, относительно которых центробежный

момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции достигают экстремальных значений.

Жесткость – способность элементов инженерных конструкций при действии внешних нагрузок сопротивляться изменению первоначальных размеров и формы.

Конструкция – любое материальное образование, способное воспринимать внешнее воздействие без разрушения.

Коэффициент Пуассона – абсолютная величина отношения относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации, физическая постоянная материала, характеризующая его упругие свойства.

Кручение – вид нагружения, при котором в поперечных сечениях элемента конструкции возникает только крутящий момент.

Линейное (одноосное) напряженное состояние – одно главное напряжение не равно нулю, а два других равны нулю.

Массивное тело – элемент конструкции, все размеры которого сопоставимы (примерно одинаковы).

Модуль упругости (модуль Юнга) – отношение напряжения к деформации, физическая постоянная, характеризующая жесткость материала.

Напряжение – мера интенсивности внутренних сил в точке.

Напряженное состояние в точке – совокупность напряжений для всех площадок, проходящих через данную точку.

Оболочка – элемент конструкции, один из размеров (толщина) которого намного меньше двух других размеров.

Объемное (трехосное) напряженное состояние – все три главных напряжения не равны нулю.

Относительная линейная деформация (относительное удлинение) в точке – предел отношения приращения расстояния между точками тела к первоначальному расстоянию, если последнее стремится к нулю.

Пластина – оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость.

Плоское (двухосное) напряженное состояние – два главных напряжения не равны нулю, а третье равно нулю.

Предел пропорциональности – наибольшее напряжение, до которого материал подчиняется закону Гука.

Предел прочности – отношение наибольшей нагрузки, которую способен выдержать образец, к первоначальной площади его поперечного сечения.

Предел текучести – напряжение, при котором происходит полный переход материала к пластической деформации.

Предельное напряженное состояние – напряженное состояние, характеризующееся появлением у пластичных материалов заметных остаточных деформаций, а у хрупких – образованием местных трещин, свидетельствующих о начале разрушения.

Прочность – способность элементов инженерных конструкций воспринимать внешние нагрузки без разрушения.

Растяжение (сжатие) – вид нагружения, при котором в поперечных сечениях элемента конструкции возникает только продольная (нормальная) сила.

Расчетная модель (расчетная схема) – реальный объект, схематизированный и освобожденный от несущественных факторов.

Сдвиг – вид нагружения, при котором в поперечных сечениях элемента конструкции возникает только поперечная сила.

Стержень – брус с прямолинейной осью.

Чистый изгиб – вид нагружения, при котором в поперечных сечениях элемента конструкции возникает только изгибающий момент.

Устойчивость – способность конструкции сохранять под нагрузкой первоначальную форму равновесия.

Эквивалентное напряженное состояние – линейное напряженное состояние при растяжении, равноопасное с заданным напряженным состоянием.

Эквивалентное напряжение – напряжение, действующее в эквивалентном напряженном состоянии.

Эпюра внутреннего силового фактора – график изменения внутреннего силового фактора вдоль оси бруса.

### 1.1. План, научно-теоретическое содержание модуля 1

Название тем и изучаемых вопросов	Научно-теоретическое содержание	Прим. и т. д.
<p><b>Основные понятия и определения</b></p> <p><i>Лекция 1</i></p> <p>1. Реальный объект и расчетная схема (модель). 2. Внутренние силы. Метод сечений. 3. Внутренние силовые факторы. Их определение через внешние силы. Виды нагружений.</p> <p><i>Лекция 2</i></p> <p>1. Соотношения между внешними нагрузками, поперечной силой и изгибающим моментом. 2. Выводы, вытекающие из соотношений между <math>p</math>, <math>Q</math> и <math>M</math>, их использование при проверке эпюр <math>Q</math>, <math>M</math>. 3. Напряжения. Зависимости между внутренними силовыми факторами и напряжениями. 4. Понятие о перемещениях и деформациях, их определение.</p>	<p>[1, с. 9–13]</p> <p>[1, с. 14]</p> <p>[1, с. 14–18]</p> <p>[1, с. 19–24]</p> <p>[1, с. 25–27]</p> <p>[1, с. 58–61]</p> <p>[1, с. 61–65]</p>	<p>Лекция – 3 часа</p>
<p><b>Механические характеристики материалов</b></p> <p>1. Механические характеристики материалов. Диаграммы растяжения для пластичных и хрупких материалов. 2. Допускаемые напряжения. Понятие о коэффициенте безопасности.</p>	<p>[1, с. 119–131]</p> <p>[1, с. 145–147]</p>	<p>Изучается самостоятельно</p>

Название тем и изучаемых вопросов	Научно-теоретическое содержание	Прим. и т. д.
<p><b>Геометрические характеристики плоских сечений</b></p> <p>1. Статические моменты сечений, их изменение при параллельном переносе осей. Центр тяжести сечения. 2. Моменты инерции сечения (осевой, центробежный, полярный), их свойства. 3. Изменение осевых и центробежного моментов инерции при параллельном переносе осей. 4. Изменение осевых и центробежного моментов инерции при повороте осей. 5. Главные оси инерции и главные моменты инерции сечения. 6. Порядок определения главных центральных осей инерции и главных моментов инерции сложного сечения. Свойства симметричных сечений. 7. Вывод осевых моментов инерции для прямоугольника, осевого и полярного моментов инерции для круга и кольца.</p>	<p>[1, с. 166–180]</p> <p>[1, с. 166–170]</p> <p>[1, с. 178–180]</p> <p>[1, с. 180–182]</p> <p>[1, с. 182–190]</p> <p>[1, с. 191–197]</p> <p>[1, с. 168–179]</p>	<p>Изучается самостоятельно</p>
<p><b>Основы теории напряженного и деформированного состояния</b></p> <p><i>Лекция 3</i></p> <p>1. Напряженное состояние в точке: определение, компоненты, типы, закон парности касательных напряжений.</p>	<p>[1, с. 74–77]</p>	<p>Лекция – 6 часов</p>

Название тем и изучаемых вопросов	Научно-теоретическое содержание	Прим. и т. д.
2. Исследование напряженного состояния в точке: нормальные и касательные напряжения на наклонных площадках. 3. Положение главных площадок, главные напряжения.	[1, с. 79–81]  [1, с. 81–85]	
<i>Лекция 4</i>		
1. Определение максимальных касательных напряжений и положения площадок, на которых они действуют.	[1, с. 85–87]	
2. Обзор различных видов напряженных состояний.	[1, с. 87–92]	
3. Деформированное состояние в точке: определение, компоненты, типы. Объемная деформация.	[1, с. 108–109]	
4. Закон Гука при растяжении и сжатии. Модуль упругости (модуль Юнга), его физический смысл.	[1, с. 99–100]	
<i>Лекция 5</i>		
1. Коэффициент Пуассона, физический смысл.	[1, с. 100–102]	
2. Закон Гука при сдвиге. Модуль сдвига, его физический смысл.	[1, с. 106–108]	
3. Обобщенный закон Гука.	[1, с. 103–106]	
4. Потенциальная энергия деформации в общем случае напряженного состояния. Удельные потенциальные энергии изменения объема и изменения формы.	[1, с. 109–113]	

Название тем и изучаемых вопросов	Научно-теоретическое содержание	Прим. и т. д.
<b>Теории прочности</b>		
<i>Лекция 6</i>		
1. Назначение и сущность теорий прочности. Эквивалентное напряженное состояние и эквивалентное напряжение.	[1, с. 153–156]	Лекция – 2 часа
2. Классические теории прочности (теория наибольших нормальных напряжений, теория наибольших относительных удлинений, теория наибольших касательных напряжений, энергетическая теория). Вывод эквивалентных напряжений, условия прочности.	[1, с. 156–160]	
3. Теория прочности Мора и ее практическое применение.	[1, с. 160–166]	

### 1.1.1. Вопросы для самоконтроля

#### *Основные понятия и определения*

Дайте определение прочности.

Дайте определение жесткости.

Дайте определение устойчивости.

Что составляет содержание курса «Механика материалов»?

Чем занимается наука «Механика материалов»?

Что такое расчетная модель (расчетная схема)?

Какие модели включает расчетная модель?

В механике материалов материал конструкции считается однородным и сплошным. Что это значит?

В механике материалов материал конструкции считается изотропным. Что это значит?

В механике материалов считается, что материал конструкции обладает идеальной упругостью. Что это значит?

Что называется брусом?

Что называется оболочкой?

Что называется пластиной?

Что называется массивным телом?

По каким признакам и как классифицируются внешние нагрузки?

В чем состоит сущность принципа независимости действия сил?

В чем состоит сущность принципа начальных размеров?

В чем состоит сущность принципа Сен-Венана?

Дать определение внутренним силам.

Перечислите внутренние силовые факторы.

Какой вид нагружения называется простым?

Какой вид нагружения называется сложным?

Назовите простые виды нагружения.

Какой вид нагружения называется растяжением и сжатием?

Какой вид нагружения называется кручением?

Какой вид нагружения называется чистым изгибом?

Какой вид нагружения называется сдвигом?

Чему равна продольная (нормальная) сила в произвольном поперечном сечении бруса?

Чему равен крутящий момент в произвольном поперечном сечении вала?

Чему равен изгибающий момент относительно оси  $y$  в произвольном поперечном сечении бруса?

Чему равна поперечная сила  $Q_y$  в произвольном поперечном сечении бруса?

В чем заключается сущность правила знаков для продольной силы?

В чем заключается сущность правила знаков для крутящего момента?

В чем заключается сущность правила знаков для изгибающего момента  $M_z$ ?

В чем заключается сущность правила знаков для поперечной силы  $Q_y$ ?

Запишите соотношения между интенсивностью распределенной нагрузки, поперечной силой и изгибающим моментом при изгибе балок.

Какой вид будут иметь эпюры поперечных сил и изгибающих моментов на участках балок, не нагруженных равномерно распределенной нагрузкой?

Какой вид будут иметь эпюры поперечных сил и изгибающих моментов на участках балок нагруженных равномерно распределенной нагрузкой?

Что следует ожидать на эпюрах поперечных сил и изгибающих моментов в поперечных сечениях балок, где приложена перпендикулярно оси сосредоточенная сила?

Что называется напряжением?

Какова зависимость между полным, нормальным и касательным напряжениями в исследуемой точке заданного сечения?

Что называется вектором полного перемещения точки?

Что называется относительной линейной деформацией в точке по заданному направлению?

Что называется относительным сдвигом, или углом сдвига в точке заданной плоскости?

### *Механические характеристики материалов*

Что называется диаграммой растяжения?

Чем отличаются диаграммы растяжения для пластичных и хрупких материалов?

Назовите характеристики прочности материала.

Назовите характеристики пластичности материала.

Как определяются пределы текучести, пропорциональности, прочности, относительное остаточное удлинение и сужение, удельная работа по разрыву образца?

### *Геометрические характеристики плоских сечений*

Что называется статическим моментом площади сечения относительно оси  $y$ , и в каких единицах он измеряется?

Что называется статическим моментом площади сечения относительно оси  $z$ , и в каких единицах он измеряется?

Что называется моментом инерции сечения относительно оси  $y$ , и в каких единицах он измеряется?

Что называется моментом инерции сечения относительно оси  $z$ , и в каких единицах он измеряется?

Что называется полярным моментом инерции сечения, и в каких единицах он измеряется?

Что называется центробежным моментом инерции сечения, и в каких единицах он измеряется?

Какая ось называется центральной осью сечения?

Что называется центром тяжести сечения?

Запишите формулы для определения координат центра тяжести сечения.

Как изменяются статические моменты площади сечения при параллельном переносе осей от центра тяжести?

Как изменяются осевые моменты инерции сечения при параллельном переносе осей от центра тяжести?

Как изменяется центробежный момент инерции сечения при параллельном переносе осей от центра тяжести?

Дайте определение главных центральных осей инерции сечения.

Дайте определение главных центральных моментов инерции сечения.

Как определить положение главных центральных осей инерции сечения?

Как определить величины главных центральных моментов инерции сечения?

### ***Основы теории напряженного и деформированного состояния***

Дайте определение напряженному состоянию в точке.

В чем заключается сущность правил знаков для нормальных и касательных напряжений?

Назовите виды напряженных состояний в точке.

Какие напряжения называются главными?

Сформулируйте и запишите закон парности касательных напряжений.

Какие площадки называются главными?

Какое напряженное состояние называется одноосным, или линейным?

Какое напряженное состояние называется двухосным, или плоским?

Какое напряженное состояние называется трехосным, или объемным?

По какой формуле определяются нормальные напряжения на наклонной площадке параллельной оси  $z$  (главная ось напряженного состояния)?

По какой формуле определяются касательные напряжения на наклонной площадке параллельной оси  $z$  (главная ось напряженного состояния)?

По какой формуле определяется положение главных площадок параллельных оси  $z$  (главная ось напряженного состояния)?

Как найти наибольшие касательные напряжения на площадках параллельных оси  $z$  (главная ось напряженного состояния)?

Дайте определение деформированному состоянию в точке.

Какие координатные оси называются главными осями деформированного состояния?

Какие деформации называются главными?

Сформулируйте и запишите закон Гука при растяжении и сжатии.

Какая величина называется коэффициентом Пуассона?

Сформулируйте и запишите закон Гука при сдвиге.

Как связаны между собой относительное изменение объема с относительными линейными деформациями в точке?

Опираясь на обобщенный закон Гука, запишите выражение, по которому определяется относительная линейная деформация в точке в направлении оси  $x$ .

Опираясь на обобщенный закон Гука, запишите выражение, по которому определяется наибольшая главная деформация в точке.

Опираясь на обобщенный закон Гука, запишите выражение, по которому определяется наименьшая главная деформация в точке.

Дайте определение потенциальной энергии деформации.

### ***Теории прочности***

Что такое эквивалентное напряжение?

Запишите условие прочности согласно энергетической теории.

Запишите условие прочности согласно теории наибольших нормальных напряжений.

Запишите условие прочности согласно теории наибольших относительных удлинений.

Запишите условие прочности согласно теории наибольших касательных напряжений.

Запишите условие прочности согласно теории Мора.

### 1.2. Учебно-методические материалы к лабораторным работам

Название лабораторной работы	Учебно-методические материалы
1. Геометрические характеристики плоских сечений	[5, с. 98–107]
2. Испытание материалов на растяжение	[6, с. 14–26]
3. Определение коэффициента Пуассона для стали	[6, с. 27–44]
4. Определение модуля упругости для стали	[6, с. 45–49]

### 1.3. Учебно-методические материалы к практическим занятиям

#### 1.3.1. Построение эпюр $Q$ , $M$ и $N$ для рам

##### *Рекомендуемая методика построения эпюр внутренних силовых факторов $Q$ , $M$ и $N$ для рам*

1. Изобразить заданную расчетную схему рамы.
2. Приложить все заданные внешние силы и неизвестные реакции связей.
3. Составить уравнения равновесия тела (конструкции) под действием приложенной системы сил.

4. Решить полученную систему уравнений и определить неизвестные реакции опор. Проверить правильность определения реакций.

5. Разбить расчетную схему на участки. Границами участков являются сечения, в которых меняется характер нагрузки, размеры поперечного сечения, а также узлы рам.

6. Написать, используя метод сечений, на каждом участке рамы уравнения для внутренних силовых факторов  $Q$ ,  $M$  и  $N$ .

7. Вычислить на каждом участке значения внутренних силовых факторов и построить эпюры  $Q$ ,  $M$  и  $N$ . Проверить правильность построения эпюр.

#### *Теоретические предпосылки и примеры к практическому занятию*

Построение эпюр внутренних силовых факторов для рам вызывает определенные трудности. Необходимо вспомнить отдельные положения статики.

Свободное твердое тело в пространстве имеет 6 степеней свободы, то есть может совершать 6 независимых движений: 3 поступательных вдоль трех осей координат и 3 вращения вокруг этих осей.

Тела (твердые или гибкие), ограничивающие свободу перемещения рассматриваемого тела, называются связями. На тело может быть одновременно наложено несколько связей. Каждая связь отнимает у тела одну степень свободы или уменьшает на единицу возможное число независимых движений.

Сила, заменяющая действие связи на рассматриваемое тело, называется реакцией связи. В отличие от внутренних сил, характеризующих взаимодействия частиц (элементов) тела, силы реакций характеризуют взаимодействие данного тела с другими телами и являются внешними силами. Если физическое тело представляет балку, раму, колонну, передающие давление на опоры, то реакции связей называются опорными реакциями. В зависимости от расположения в пространстве элементов конструкции и действующих сил различают:

– *плоские системы*, у которых геометрические оси всех элементов и действующие внешние силы, включая реакции опор,

расположены в одной плоскости, являющейся главной центральной плоскостью инерции;

– *пространственные системы*, у которых геометрические оси элементов и действующие силы расположены в разных плоскостях.

На практике нередко при составлении расчетных схем пространственные в действительности системы заменяются плоскими. Например, составные балки, мостовые конструкции, рамы машин и т. д. Для соединения в плоской системе различных инженерных конструкций с основанием применяются следующие типы опор.

Односвязная, или шарнирно подвижная опора (рис. 1.1).

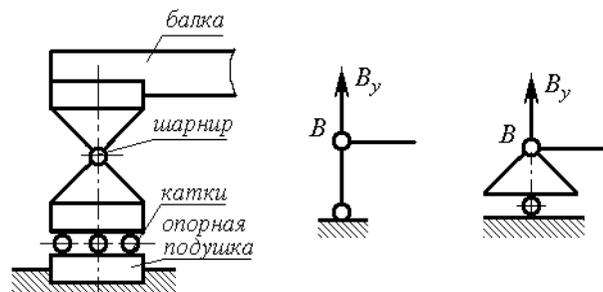


Рис. 1.1. Шарнирно подвижная опора

Эта опора накладывает на конструкцию одну связь: запрещает ее перемещение в вертикальном направлении. Реакция опоры будет приложена в центре шарнира и направлена вертикально, неизвестной является только ее величина.

Двухсвязная, или шарнирно неподвижная опора (рис. 1.2).

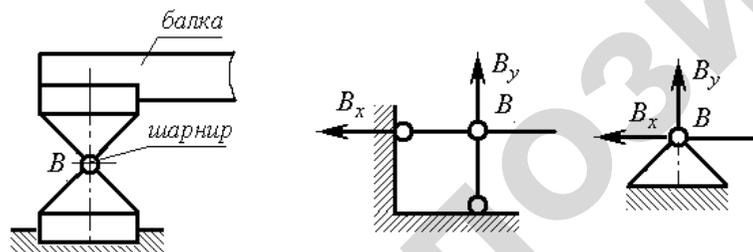


Рис. 1.2. Шарнирно неподвижная опора

Эта опора накладывает на конструкцию две связи – запрещает ее перемещение в горизонтальном и вертикальном направлениях. Реакция опоры будет определяться горизонтальной и вертикальной составляющими силами.

Трехсвязная неподвижная опора, или заделка (рис. 1.3).



Рис. 1.3. Заделка

Такая опора накладывает на конструкцию полное число связей (3 связи для плоской системы) – запрещает в плоскости любые ее перемещения. Реакция опоры будет определяться горизонтальной и вертикальной составляющими силами и опорными, или защемляющими, моментами.

Величины опорных реакций находятся из условия равновесия конструкции как свободного твердого тела. Составляющие (проекции) неизвестных реакций опор в общем случае удобно направлять по положительным направлениям осей координат. Если в результате решения составляющая окажется отрицательной, это значит, что сила в действительности направлена в противоположную сторону и ее направление нужно на схеме заменить на обратное. При составлении уравнений равновесия стремятся к тому, чтобы каждая неизвестная составляющая реакций определялась независимо от других из одного уравнения:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_z(F_i) = 0, \quad (1.1)$$

где  $x$  – ось, совпадающая с осью тела (элемента конструкции);  
 $y, z$  – главные центральные оси инерции поперечного сечения.

Первостепенное значение в задачах имеет правильное определение величин и направлений реакций опор и должно подвергаться обязательной проверке. Как правило, для выполнения проверки применяется не используемое уравнение равновесия (1.1).

Внутренние силовые факторы определяются с помощью метода сечений. Сущность этого метода заключается в том, что нагруженное тело (конструкция) рассекается плоскостью, перпендикулярной к оси, на две части. Одна из частей конструкции рассматривается в равновесии. Тогда внутренние силовые факторы в заданном поперечном сечении элемента будут получены из соответствующих уравнений равновесия, составленных для оставшейся части рамы:

$$N = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad Q_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad Q_z = \sum_{i=1}^n F_{iz};$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_y(F_i); \quad M_z = \sum_{i=1}^n m_z(F_i); \quad T = \sum_{i=1}^n m_x(F_i);$$

Таким образом:

– нормальная или продольная сила  $N$  в поперечном сечении равна алгебраической сумме проекций на ось  $x$  всех внешних сил, действующих на оставшуюся часть тела;

– поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$  в сечении соответственно равны алгебраической сумме проекций на оси  $y$  и  $z$ , расположенные в рассматриваемом сечении, всех внешних сил, действующих на оставшуюся часть тела;

– изгибающие моменты  $M_z$  и  $M_y$  в сечении соответственно равны алгебраической сумме моментов относительно осей  $z$  и  $y$  рассматриваемого сечения всех внешних сил, действующих на оставшуюся часть тела;

– крутящий момент  $T$  в поперечном сечении равен алгебраической сумме моментов относительно оси  $x$  всех внешних сил, действующих на оставшуюся часть тела.

Внутренние силовые факторы изменяются вдоль оси элемента (бруса). Для определения положения опасного сечения бруса строятся эпюры внутренних силовых факторов. При построении эпюр исходят из ряда положений (см. с. 58).

Построенные эпюры необходимо проверить. Для этого используются выводы о характере эпюр, вытекающие из соотношений между внешней нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом (см. с. 59). Для рам дополнительно проводится статическая проверка, заключающаяся в проверке равновесия каждого узла, вырезанного из нагруженной рамы (рис. 1.4).

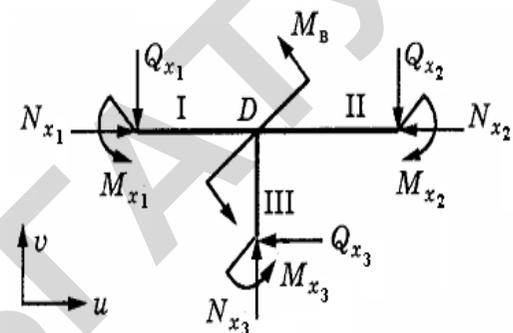


Рис. 1.4. Схема нагружения узла рамы

На рис. 1.4  $Q_{x1}$ ,  $Q_{x2}$ ,  $Q_{x3}$ ,  $N_{x1}$ ,  $N_{x2}$ ,  $N_{x3}$ ,  $M_{x1}$ ,  $M_{x2}$ ,  $M_{x3}$  представляют усилия и моменты, заменяющие действие на узел отброшенных стержней, принимаемые с учетом знаков из построенных эпюр.  $M_B$  – внешний момент, приложенный к узлу.

Уравнения равновесия узла запишем, проектируя все силы на вертикальную  $v$  и горизонтальную  $u$  оси и составляя уравнение моментов относительно точки  $D$ .

$$\sum v = N_{x3} - Q_{x1} - Q_{x2} = 0;$$

$$\sum u = N_{x1} - N_{x2} - Q_{x3} = 0;$$

$$\sum m_D = M_{x2} - M_{x3} - M_{x1} - M_B = 0.$$

Считается, что поперечные силы  $Q_{x1}$ ,  $Q_{x2}$ ,  $Q_{x3}$  проходят через точку  $D$  и их плечи относительно точки  $D$  равны нулю, поэтому они не входят в уравнение моментов. Если к узлу приложены внешние сосредоточенные силы или моменты, то они должны включаться в уравнения равновесия. Так как алгебраическая сумма моментов в узле равняется нулю, то изгибающий момент при переходе через узел, соединяющий два стержня, когда в узле не приложена внешняя пара сил (сосредоточенный момент), должен оставаться неизменным как по величине, так и по знаку.

*Пример 1.1.* Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и нормальных сил для рамы, нагруженной силой  $F = 20$  кН, равномерно-распределенной нагрузкой интенсивностью  $p = 15$  кН/м

и парой сил с моментом  $M = 28$  кН·м. Собственным весом пренебречь (рис. 1.5).

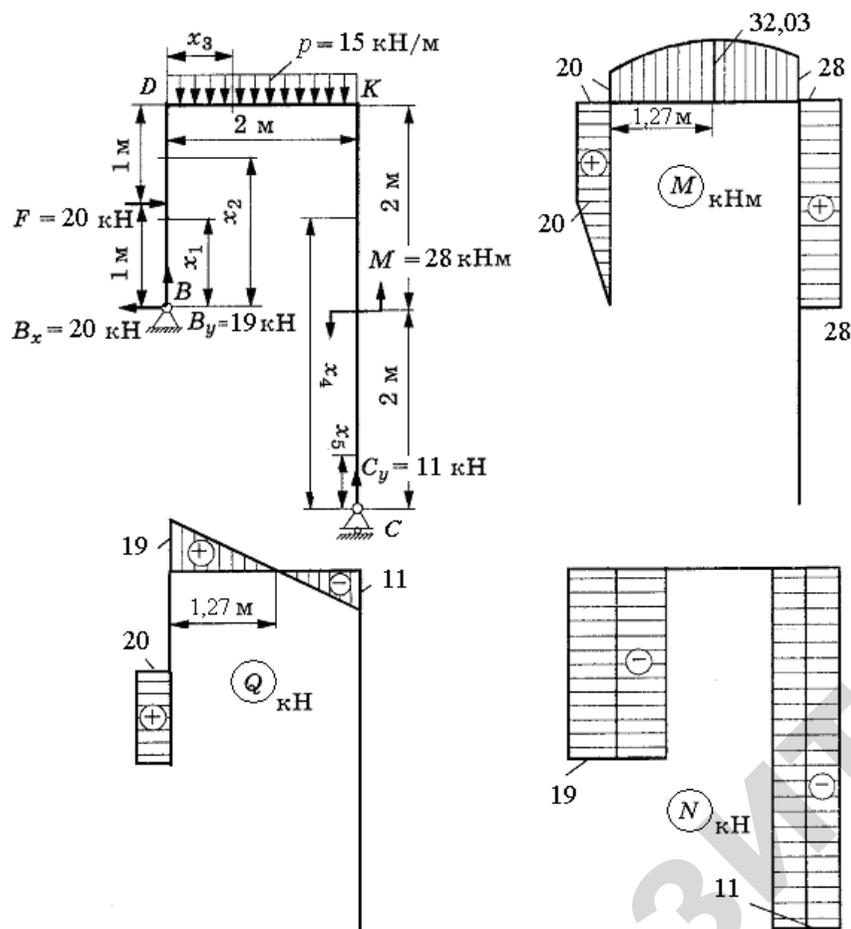


Рис. 1.5. Расчетная схема и эпюры внутренних силовых факторов в сечениях элементов рамы

**Решение.** Определяем опорные реакции. Реакцию опоры  $B$  представляем составляющими  $B_y$  и  $B_x$ , реакцию опоры  $C$  – составляющей  $C_y$ . На раму действует уравновешенная плоская система сил. Неизвестные силы  $B_y, B_x, C_y$  найдем, составляя уравнения равнове-

сия в виде суммы проекций сил на горизонтальную ось и суммы моментов относительно опор  $B$  и  $C$ :

$$\Sigma F_x = F - B_x = 0.$$

$$\Sigma m_B = C_y \cdot 2 + M - p \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 1 = 0.$$

$$\Sigma m_C = B_y \cdot 2 + F \cdot 3 - B_x \cdot 2 - p \cdot 2 \cdot 1 - M = 0.$$

Откуда получим:

$$B_x = F = 20 \text{ кН.}$$

$$C_y = \frac{p \cdot 2 \cdot 1 - M + F \cdot 1}{2} = \frac{15 \cdot 2 \cdot 1 - 28 + 20 \cdot 1}{2} = 11 \text{ кН.}$$

$$B_y = \frac{B_x \cdot 2 - F \cdot 3 + p \cdot 2 \cdot 1 + M}{2} = \frac{20 \cdot 2 - 20 \cdot 3 + 15 \cdot 2 \cdot 1 + 28}{2} = 19 \text{ кН.}$$

Для проверки правильности вычисления реакций составляем сумму проекций сил на вертикальную ось:

$$\Sigma F_y = 19 - 15 \cdot 2 + 11 = 0.$$

Рама имеет 5 участков. На каждом участке проводим сечение и, рассматривая силы, действующие на отсеченную часть, составляем уравнения для поперечных сил, изгибающих моментов и нормальных сил, соблюдая правило знаков.

Проводим сечение на первом участке на расстоянии  $x_1$  от опоры  $B$  и, рассматривая силы, действующие на отсеченную часть, составляем уравнения для  $Q_{x_1}, M_{x_1}, N_{x_1}$ .

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq 1$  м):

$$Q_{x_1} = B_x = 20 \text{ кН;}$$

$$M_{x_1} = B_x \cdot x_1 = 20 x_1;$$

$$N_{x_1} = -B_y = -19 \text{ кН.}$$

Из уравнений следует, что поперечная сила на участке имеет постоянное значение и положительна, так как сила  $B_x$  стремится вращать рассматриваемую часть рамы относительно сечения по часовой стрелке; изгибающий момент изменяется по линейному закону, для его определения достаточно вычислить ординаты

эпюры в начале и конце участка. Знак «+» в уравнении момента поставлен потому, что сила  $B_x$ , изгибая рассматриваемую часть рамы, вызывает сжатие наружных волокон рамы.

$$x_1 = 0: M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 1 \text{ м}: M_{x_1} = 20 \cdot 1 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Строим эпюры  $Q_{x_1}$ ,  $M_{x_1}$ ,  $N_{x_1}$ .

Проводим сечение  $x_2$  на втором расчетном участке от опоры  $B$  и составляем уравнения для  $Q_{x_2}$ ,  $M_{x_2}$ ,  $N_{x_2}$ , соблюдая правило знаков.

Участок II ( $1 \text{ м} \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$ ):

$$Q_{x_2} = B_x - F = 20 - 20 = 0;$$

$$M_{x_2} = B_x \cdot x_2 - F(x_2 - 1) = 20x_2 - 20(x_2 - 1);$$

$$N_{x_2} = -B_y = -19 \text{ кН}.$$

Так как  $M_{x_2}$  изменяется по линейному закону, вычисляем его значения на границах участка:

$$x_2 = 1 \text{ м}: M_{x_2} = 20 \cdot 1 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_2 = 2 \text{ м}: M_{x_2} = 20 \cdot 2 - 20(2 - 1) = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Строим эпюры на втором участке.

Аналогично проводим произвольное сечение  $x_3$  на третьем расчетном участке от узла  $D$  и, рассматривая силы, составляем уравнения для  $Q_{x_3}$ ,  $M_{x_3}$ ,  $N_{x_3}$ .

Участок III ( $0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м}$ ):

$$Q_{x_3} = B_y - px_3 = 19 - 15x_3;$$

$$M_{x_3} = B_x \cdot 2 - F \cdot 1 + B_y x_3 - p \cdot \frac{x_3^2}{2} = 20 \cdot 2 - 20 \cdot 1 + 19 \cdot x_3 - 15 \cdot \frac{x_3^2}{2} = 20 + 19x_3 - 15 \cdot \frac{x_3^2}{2};$$

$$N_{x_3} = B_x - F = 20 - 20 = 0.$$

Поперечная сила  $Q_{x_3}$  изменяется по линейному закону, поэтому для построения эпюры достаточно вычислить ее значения на границах участка:

$$x_3 = 0: Q_{x_3} = 19 \text{ кН}.$$

$$x_3 = 2 \text{ м}: Q_{x_3} = 19 - 15 \cdot 2 = -11 \text{ кН}.$$

Изгибающий момент представляет квадратичную функцию. Подставляя в уравнение  $M_{x_3}$  значения  $x_3$  в начале и в конце участка, получим:

$$x_3 = 0: M_{x_3} = 20 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_3 = 2 \text{ м}: M_{x_3} = 20 + 19 \cdot 2 - 15 \cdot \frac{2^2}{2} = 28 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По вычисленным величинам строим эпюры  $Q_{x_3}$  на третьем участке. Так как поперечная сила пересекает ось, то в сечении, где  $Q_{x_3} = 0$ , эпюра моментов должна иметь экстремальное значение.

Для нахождения  $M_{x_3}^{\text{эк}}$  необходимо приравнять к нулю выражение для поперечной силы на участке и найти координату  $x_3^{\text{эк}}$ . Подставив затем значение  $x_3^{\text{эк}}$  в уравнение моментов, вычислим величину искомого экстремального момента:

$$Q_{x_3} = 19 - 15x_3^{\text{эк}} = 0.$$

$$x_3^{\text{эк}} = \frac{19}{15} = 1,27 \text{ м}.$$

$$M_{x_3}^{\text{эк}} = 20 + 19 \cdot 1,27 - 15 \cdot \frac{1,27^2}{2} = 32,03 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По трем величинам изгибающего момента (трех точкам) строим эпюру  $M_{x_3}$  на третьем участке.

Проводим сечение на четвертом расчетном участке на расстоянии  $x_4$  от опоры  $C$  и составляем уравнения для  $Q_{x_4}$ ,  $M_{x_4}$ ,  $N_{x_4}$ .

Участок IV ( $2 \text{ м} \leq x_4 \leq 4 \text{ м}$ ):

$$\begin{aligned} Q_{x_4} &= 0; \\ M_{x_4} &= M = 28 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ N_{x_4} &= -C_y = -11 \text{ кН}. \end{aligned}$$

На четвертом участке изгибающий момент постоянный и положительный.

Проводим сечение  $x_5$  на пятом расчетном участке от опоры  $C$  и составляем уравнения для  $Q_{x_5}$ ,  $M_{x_5}$ ,  $N_{x_5}$ .

Участок V ( $0 \leq x_5 \leq 2 \text{ м}$ ):

$$\begin{aligned} Q_{x_5} &= 0; \\ M_{x_5} &= 0; \\ N_{x_5} &= -C_y = -11 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Пятый участок испытывает только сжатие.

Для данной рамы обязательным является проверка равновесия узлов  $D$  и  $K$  (рис. 1.6).

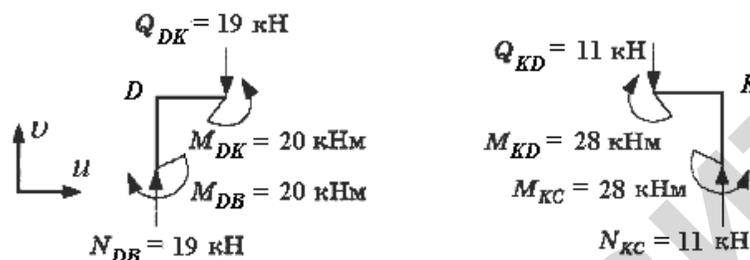


Рис. 1.6. Схема нагружения узлов  $D$  и  $K$

Уравнения равновесия для узлов  $D$  и  $K$  имеют следующий вид:

– узел  $D$ :

$$\begin{aligned} \Sigma U &= 0; \\ \Sigma v &= N_{DB} - Q_{DK} = 19 - 19 = 0. \\ \Sigma m_D &= M_{DB} - M_{DK} = 20 - 20 = 0; \end{aligned}$$

– узел  $K$ :

$$\begin{aligned} \Sigma U &= 0; \\ \Sigma v &= N_{KC} - Q_{KD} = 11 - 11 = 0. \\ \Sigma m_K &= M_{KD} - M_{KC} = 28 - 28 = 0. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия для узлов рамы удовлетворяются.

Проверка правильности построения эпюр с использованием выводов о характере эпюр, вытекающих из соотношений между внешней нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом, также позволяет заключить, что все эпюры построены верно.

Из эпюр следует, что максимальная по абсолютной величине нормальная сила  $N_{\max} = 19 \text{ кН}$ , максимальная поперечная сила  $Q_{\max} = 20 \text{ кН}$ ; максимальный изгибающий момент  $M_{\max} = 32,03 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

*Пример 1.2.* Построить эпюры внутренних силовых факторов для пространственного ломаного бруса (рис. 1.7, а).

Дано:  $F_1 = 40 \text{ кН}$ ;  $F_2 = 60 \text{ кН}$ ;  $a = 3 \text{ м}$ ;  $b = 2 \text{ м}$ ;  $c = 1 \text{ м}$ .

*Решение.* Рассматриваемый ломаный брус одним концом заземлен. В заземлении возникают реакции, которые находятся из уравнений равновесия. В данном случае построение эпюр внутренних силовых факторов удобно начинать со свободного конца, так как при этом отпадает необходимость в определении реакций.

Примем следующее положение. При переходе от одного элемента системы к другому ось  $x$  следует совмещать с геометрической осью рассматриваемого элемента, а положительные направления осей  $y$  и  $z$  необходимо выбирать согласно расположению элемента.

При построении эпюр для поперечных сил, крутящих моментов и нормальных сил сохраняются прежние правила знаков; эпюра изгибающих моментов строится на сжатых волокнах, соответственно берется знак изгибающего момента.

Проводим произвольное поперечное сечение в пределах первого расчетного участка на расстоянии  $x_1$  от свободного конца бруса и составим уравнения для внутренних силовых факторов, рассматривая приложенные к отсеченной части силы (рис. 1.7, а).

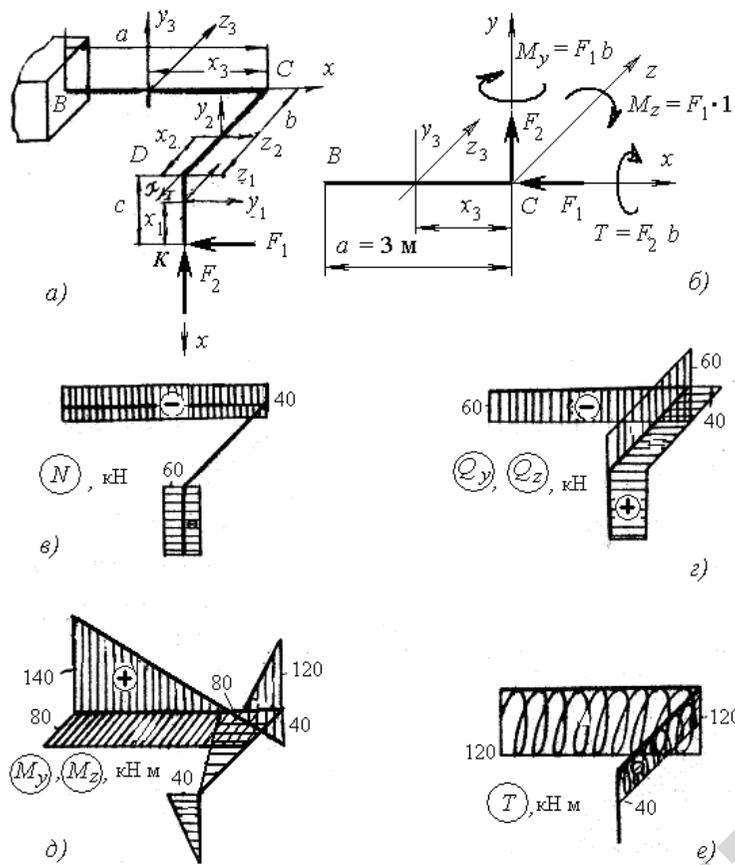


Рис. 1.7. Расчетная схема и эпюры внутренних силовых факторов в сечениях элементов рамы

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq 1$  м):

$$\begin{aligned}
 N_{x_1} &= -F_1 = -60 \text{ кН}; \\
 Q_{y_1} &= F_2 = 40 \text{ кН}; \\
 Q_{z_1} &= 0; \\
 M_{z_1} &= F_1 x_1 = 40 x_1; \\
 M_{y_1} &= 0; \\
 T_1 &= 0.
 \end{aligned}$$

Из уравнений следует, что на первом участке действуют постоянная сжимающая нормальная сила  $N_{x_1}$ , постоянная поперечная сила  $Q_{y_1}$  и изгибающий момент, меняющийся по линейному закону:

$$\begin{aligned}
 x_1 = 0: & \quad M_{z_1} = 0; \\
 x_1 = 1 \text{ м}: & \quad M_{z_1} = 40 \cdot 1 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}.
 \end{aligned}$$

Соответствующие эпюры построены на рис. 1.7, в, г, д, е. Плоскости эпюр  $N$  и  $T$  выбираются произвольно, плоскости эпюр  $Q$  совпадают с направлением поперечных сил  $Q_{y_1}$ ,  $Q_{z_1}$ , а эпюры  $M$  строятся в соответствующих плоскостях изгиба со стороны сжатых волокон. Когда одновременно в сечении действуют два момента, две поперечные силы, необходимо отдельно строить эпюры для каждого силового фактора.

Проводим сечение в пределах второго расчетного участка на расстоянии  $x_2$  от узла  $D$  и составляем уравнения для внутренних силовых факторов.

Участок II ( $0 \leq x_2 \leq 2$  м):

$$\begin{aligned}
 Q_{z_2} &= F_1 = 40 \text{ кН}; \\
 Q_{y_2} &= F_2 = 60 \text{ кН}; \\
 T_2 &= -F_1 c = -40 \\
 &= -40 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_{y_2} &= F_1 x_2 = 40 x_2; \\
 M_{z_2} &= F_2 x_2 = 60 x_2.
 \end{aligned}$$

На втором участке действуют постоянные поперечные силы  $Q_{z_2}$ ,  $Q_{y_2}$  и крутящий момент  $T_2$ , изгибающие моменты  $M_{y_2}$  и  $M_{z_2}$  меняются по линейному закону от  $x_2$ :

$$\begin{aligned}
 x_2 = 0: & \quad M_{y_2} = 0, \quad M_{z_2} = 0; \\
 x_2 = 2 \text{ м}: & \quad M_{y_2} = 40 \cdot 2 = 80 \text{ кН}\cdot\text{м}, \\
 & \quad M_{z_2} = 60 \cdot 2 = 120 \text{ кН}\cdot\text{м}.
 \end{aligned}$$

Строим эпюры по вычисленным значениям силовых факторов.

Проводим сечение на третьем расчетном участке на расстоянии  $x_3$  от узла  $C$  и составляем выражения для определения внутренних силовых факторов.

Участок III ( $0 \leq x_3 \leq 3$  м):

$$N_{x_3} = -F_1 = -40 \text{ кН};$$

$$Q_{y_3} = -F_2 = -60 \text{ кН};$$

$$Q_{z_3} = 0;$$

$$M_{z_3} = F_2 x_3 - F_1 \cdot 1 = 60 x_3 - 40;$$

$$M_{y_3} = F_1 b = 40 \cdot 2 = 80 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$T_3 = -F_2 b = -60 \cdot 2 = -120 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Таким образом, в сечении III–III стержень испытывает сжатие силой  $N_{x_3}$ , сдвиг вдоль оси  $y$ , изгиб в плоскости  $yx$ , изгиб в плоскости  $zx$  и кручение. Соответствующие эпюры сил построены на рис. 1.7 *в, з, д, е*.

$$x_3 = 0: M_{z_3} = 0, M_{y_3} = -40 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_3 = 3 \text{ м}: M_{z_3} = 60 \cdot 3 - 40 = 140 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

При построении эпюр внутренних силовых факторов для пространственных систем удобно рассматривать отдельно каждый стержень, входящий в систему, перенося в центр тяжести крайнего сечения все действующие силы.

В качестве примера построим эпюры внутренних силовых факторов для стержня  $CB$ . Отбросим часть ломаного бруса  $KDC$ , а все приложенные к нему силы приведем к центру тяжести крайнего сечения (точка  $C$  на рис. 1.7, *б*).

Проводим сечение на расстоянии  $x_3$  от свободного конца стержня (точки  $C$ ). Мысленно отбросим левую часть бруса и, рассматривая внешние силы, приложенные к оставшейся части бруса, составим выражение для внутренних силовых факторов, действующих на третьем участке.

Участок III ( $0 \leq x_3 \leq 3$  м):

$$N_{x_3} = -F_1 = -40 \text{ кН};$$

$$Q_{y_3} = -F_2 = -60 \text{ кН}; \quad Q_{z_3} = 0;$$

$$M_{z_3} = F_2 x_3 - F_1 \cdot 1 = 60 x_3 - 40;$$

$$M_{y_3} = F_1 b = 40 \cdot 2 = 80 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$T_3 = -F_2 b = -60 \cdot 2 = -120 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Получили тот же результат.

### 1.3.2. Исследование напряженного состояния в точке. Обобщенный закон Гука

#### *Рекомендуемая методика к исследованию напряженного состояния в точке*

1. В окрестности исследуемой точки нагруженного тела выделить бесконечно малый элемент в виде прямоугольного параллелепипеда. Грани этого элемента желательно расположить так, чтобы было проще определить действующие на них напряжения. Обычно одну грань элемента совмещают с главной площадкой.
2. Провести координатные оси  $x, y, z$  параллельно граням элемента.
3. Показать действующие на гранях элемента напряжения и присвоить им индексы в соответствии с координатными осями.
4. Определить положение главных площадок и показать их на схеме.
5. Вычислить величины напряжений и изобразить их на схеме.

#### *Теоретические предпосылки и примеры к практическому занятию*

В окрестности произвольной точки  $B$  нагруженного тела бесконечно близкими сечениями, параллельными координатным

плоскостям, выделен элементарный объем в виде прямоугольного параллелепипеда с размерами ребер  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 1.8).

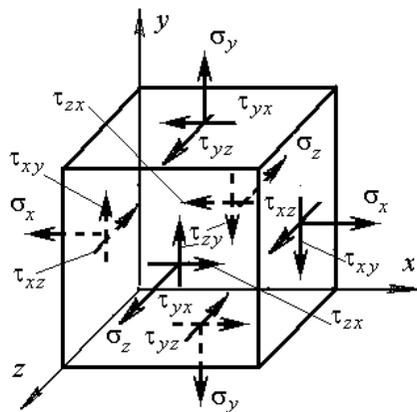


Рис. 1.8. Элементарный объем в виде прямоугольного параллелепипеда

В общем случае на гранях элемента будут действовать 3 нормальных и 6 касательных напряжений:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zy}$ , представляющих действие отброшенной части тела на выделенный элемент. Примем, что напряженное состояние в окрестности точки  $B$  однородное. Поэтому нормальные и касательные напряжения на невидимых гранях элемента будут такими же, но противоположно направленными.

Для касательных напряжений, действующих на гранях элемента (рис. 1.8), справедливы соотношения:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (1.2)$$

Равенства (1.2) называются законом парности касательных напряжений, согласно которому на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к общему ребру (линии пересечения площадок), равны по величине и направлены обе либо к ребру, либо от него.

Нормальные растягивающие напряжения считаются положительными, сжимающие – отрицательными. Касательные напряжения считаются положительными, когда изображающие их векторы стремятся вращать выделенный элемент по часовой стрелке, отрицательными – против часовой стрелки. Это правило знаков для

нормальных и касательных напряжений представлено схемой, показанной на рис. 1.9.



Рис. 1.9. Схема правил знаков для напряжений

Таким образом, напряженное состояние в точке характеризуется шестью независимыми величинами:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$  ( $\tau_{yx}$ ),  $\tau_{xz}$  ( $\tau_{zx}$ ),  $\tau_{yz}$  ( $\tau_{zy}$ ), которые называются компонентами напряжений в точке. Зная эти компоненты, можно определить напряжения на любой площадке, проходящей через данную точку. Если изменять положение элемента по отношению к осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ , то будут изменяться и напряжения, действующие на его гранях. При этом можно найти такое положение элемента, в котором на его гранях касательные напряжения равны нулю. Площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения, называются главными площадками. В каждой точке напряженного тела всегда существуют три взаимно перпендикулярные главные площадки. Нормальные напряжения, действующие на главных площадках, называются главными напряжениями и обозначаются  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  с учетом знаков.

Различают 3 вида напряженного состояния в точке:

- 1) если одно главное напряжение не равно нулю, а два других равны нулю, то напряженное состояние называется линейным;
- 2) если два главных напряжения не равны нулю, то напряженное состояние называется плоским;
- 3) если все три главных напряжения не равны нулю – объемным.

Как при объемном, так и при плоском напряженном состоянии всегда в исследуемой точке можно выделить элементарный параллелепипед так, чтобы одна его грань, предположим, перпендикулярная к оси  $z$ , являлась главной площадкой, на которой действует главное напряжение  $\sigma_z$  (рис. 1.10, а). Две другие главные площадки будут находиться в семействе площадок, параллельных оси  $z$ . На грани, перпендикулярной осей  $x$ , действуют положительные (нормальное  $\sigma_x$  и касательное  $\tau_{xy}$ ) напряжения; на грани, перпендикулярной к оси  $y$ , действуют положительное нормальное  $\sigma_y$  и отрицательное касательное напряжение  $\tau_{yx}$ .

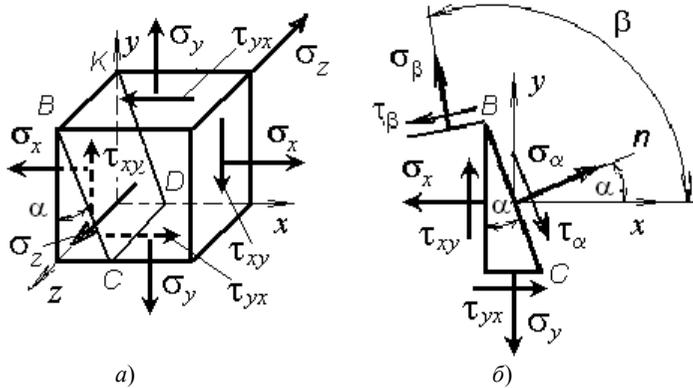


Рис. 1.10. Схемы к исследованию напряженного состояния в точке

Принимая за исходное положительное касательное напряжение  $\tau_{xy}$  на грани, перпендикулярной к оси  $x$ , и приравнявая, согласно закону парности касательных напряжений, величины  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , получим выражения для нормальных и касательных напряжений, возникающих на произвольной площадке, нормаль к которой составляет угол  $\alpha$  с осью  $x$  (рис. 1.10, б):

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha, \quad (1.3)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (1.4)$$

Если угол  $\alpha$  отсчитывается против часовой стрелки, то он принимается положительным, по часовой стрелке – отрицательным. Все величины, входящие в правые части выражений (1.3) и (1.4), подставляются со своими знаками.

Подставляя в формулы (1.3) и (1.4) вместо  $\alpha$  угол  $\beta = \alpha + 90^\circ$ , получим выражения для напряжений  $\sigma_\beta$  и  $\tau_\beta$ , возникающих в площадке, образующей угол  $90^\circ$  с наклонной площадкой (рис. 1.10, б):

$$\sigma_\beta = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha, \quad (1.5)$$

$$\tau_\beta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha = -\tau_\alpha. \quad (1.6)$$

Сумма нормальных напряжений  $\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_x + \sigma_y$  на взаимно перпендикулярных площадках всегда постоянна, а касательные напряжения равны и противоположны по направлению.

Как видно из формул (1.3) и (1.4), при изменении угла  $\alpha$  изменяются напряжения  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ . Положение главных площадок определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{\text{гл}} = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (1.7)$$

где  $\alpha_{\text{гл}}$  – угол между осью  $x$  и нормалью к главной площадке (рис. 1.10, б).

Величины главных напряжений определяются по формуле:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (1.8)$$

В формуле (1.8) верхний знак (+) относится к  $\sigma_{\max}$ , нижний (–) – к  $\sigma_{\min}$ . Вычислив  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  и зная  $\sigma_z$ , главным напряжениям присваивают с учетом знаков индексы  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Формула (1.7) определяет два взаимно перпендикулярных направления, составляющих с осью  $x$  углы  $\alpha_{\text{гл}_1} = \alpha_{\text{гл}}$  и  $\alpha_{\text{гл}_2} = \alpha_{\text{гл}} + 90^\circ$ . Одно направление относится к  $\sigma_{\max}$ , другое – к  $\sigma_{\min}$ . Если  $\sigma_x > \sigma_y$ , то положение нормали к площадке, на которой действует  $\sigma_{\max}$ , определяется углом  $\alpha_{\text{гл}_1} = \alpha_{\text{гл}}$ . Если  $\sigma_x < \sigma_y$ , то положение нормали к площадке, на которой действует  $\sigma_{\max}$ , определяется углом  $\alpha_{\text{гл}_2} = \alpha_{\text{гл}} + 90^\circ$ . Правильность определения положения главных площадок, на которых действуют  $\sigma_{\max}$ , можно проверить с помощью простого правила: направление  $\sigma_{\max}$  всегда располагается в тех двух четвертях системы координат  $ux$ , в которых касательные напряжения  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$  сходятся стрелками (рис. 1.11).

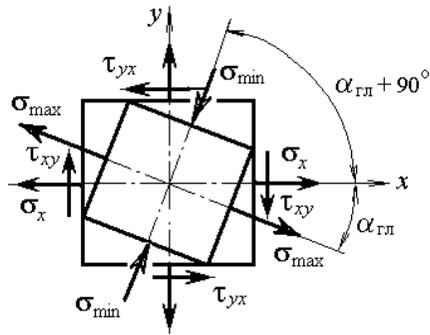


Рис. 1.11. Заданные и главные площадки и напряжения

Площадки, на которых действуют наибольшие касательные напряжения, располагаются по отношению к главным площадкам под углом  $45^\circ$  (рис. 1.12).

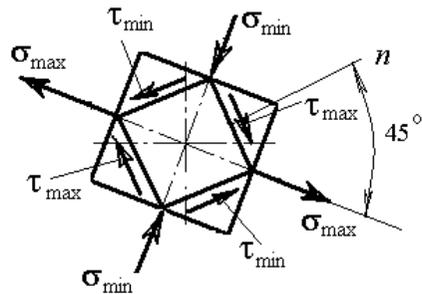


Рис. 1.12. Главные площадки и площадки сдвига

Наибольшие касательные напряжения определяются через главные напряжения по формуле:

$$\tau_{\max, \min} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (1.9)$$

На площадках с  $\tau_{\max}$  действуют и нормальные напряжения, равные

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}. \quad (1.10)$$

При линейном напряженном состоянии нормальные и касательные напряжения на площадке, наклоненной под углом  $\alpha$  к оси  $x$ , равны (рис. 1.13):

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha; \quad (1.11)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha, \quad (1.12)$$

где  $\sigma_x$  – нормальное напряжение, действующее вдоль оси  $x$ .

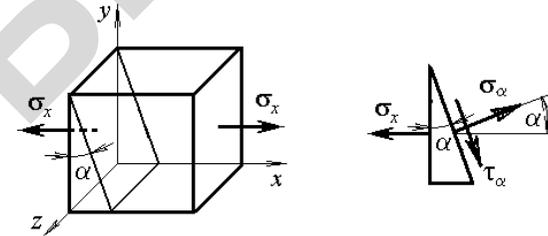


Рис. 1.13. Схемы к исследованию линейного напряженного состояния

Наибольшие касательные напряжения действуют на площадках, наклоненных к оси  $x$  под углом  $45^\circ$ . Анализ формул (1.11) и (1.12) показывает, что при растяжении (сжатии) стержня, в сечениях, параллельных геометрической оси  $x$ , нормальные и касательные напряжения равны нулю. Это значит, что между продольными волокнами стержня отсутствуют взаимные давления и сдвиги.

Компонентами деформированного состояния в точке являются относительные линейные деформации в направлении осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ( $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ ) и углы сдвига в плоскостях  $yz$ ,  $zx$ ,  $xy$  ( $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$ ,  $\gamma_{xy}$ ). Деформированное состояние обладает свойствами аналогичными свойствам напряженного состояния. Среди осей, которые могут быть проведены через данную точку, всегда существуют три ортогональные оси координат, в системе которых угловые деформации (углы сдвига) отсутствуют. Такие оси называются главными осями деформаций, а относительные линейные деформации в направлении главных осей называются главными деформациями и, соответственно, обозначаются  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$ .

Главные оси напряженного и деформированного состояний совпадают. Поэтому деформации элемента в направлении главных напряжений являются главными деформациями.

Наблюдения над растяжением и сжатием твердых тел показывают, что до определенного предела, зависящего от свойств материала, между напряжением и деформацией существует линейная зависимость:

$$\sigma = E \varepsilon. \quad (1.13)$$

Уравнение (1.13) называется законом Гука при растяжении и сжатии. Закон выражает свойства материала. Коэффициент пропорциональности  $E$ , называемый модулем упругости, является фундаментальным понятием и определяется экспериментально. Физически модуль упругости характеризует жесткость материала, то есть способность материала сопротивляться деформированию. Модуль упругости измеряется в тех же единицах, что и напряжение.

При растяжении стержня продольная деформация всегда сопровождается противоположной по знаку поперечной деформацией. В пределах упругих деформаций относительная поперечная деформация  $\varepsilon'$  пропорциональна относительной продольной деформации  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon' = -\mu \varepsilon. \quad (1.14)$$

Коэффициент  $\mu$ , равный абсолютной величине отношения относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации, называется коэффициентом Пуассона:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (1.15)$$

Коэффициент Пуассона – величина безразмерная, является физической константой материала, характеризующей его упругие свойства, и определяется экспериментально. Заменяя в (1.14) продольную деформацию  $\varepsilon$  по закону Гука (1.13), получим для относительной поперечной деформации выражение через растягивающее напряжение  $\sigma_x$ :

$$\varepsilon' = -\mu \cdot \frac{\sigma_x}{E}. \quad (1.16)$$

Числовые значения  $\mu$  при растяжении и сжатии материала считаются одинаковыми. Для всех металлов  $\mu$  находится в пределах 0,25–0,35, для стали  $\mu = 0,3$ .

При чистом сдвиге на гранях элементарного прямоугольного параллелепипеда возникают только касательные напряжения (рис. 1.14).

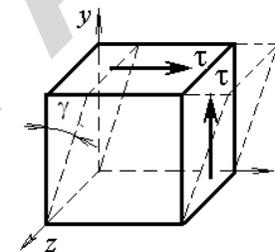


Рис. 1.14. Схема к чистому сдвигу

Под действием касательных напряжений прямые углы элемента в плоскости  $xu$  изменяются на величину  $\gamma$ , длина ребер элемента остается постоянной. Угол  $\gamma$  является мерой искажения формы элемента при сдвиге и называется углом сдвига. Между касательными напряжениями и углом сдвига (угловой деформацией) существует зависимость:

$$\tau = G \gamma, \quad (1.17)$$

где  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$  – модуль сдвига.

Выражение (1.17) носит название закона Гука при сдвиге. Модуль сдвига измеряется в единицах напряжения, является физической константой материала, характеризует жесткость материала при сдвиге и определяется экспериментально. В любой из координатных плоскостей угол сдвига определяется только соответствующими касательными напряжениями:

$$\gamma_{yx} = \frac{\tau_{yx}}{G}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \quad (1.18)$$

Деформации  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  в направлении главных осей при действии на элемент главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  согласно (1.13) и (1.16) будут равны:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].\end{aligned}\quad (1.19)$$

Уравнения (1.19) являются аналитическим выражением обобщенного закона Гука для изотропного материала. Обобщенный закон Гука устанавливает в пределах малых деформаций линейную зависимость между компонентами напряженного и деформированного состояний. Так как относительные линейные деформации не зависят от касательных напряжений, то уравнения (1.19) будут справедливы и для произвольных координатных осей  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)],\end{aligned}\quad (1.20)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  – нормальные напряжения на неглавных площадках, на которых действуют и касательные напряжения.

При деформации изменяется объем тела. Зависимость между относительным изменением объема  $\theta$  и напряжениями, действующими на гранях элементарного параллелепипеда, выражается уравнением:

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2\mu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).\quad (1.21)$$

Формула (1.21) выражает объемный закон Гука. Она справедлива и в случаях, когда напряжения не являются главными.

При деформации упругого тела в нем накапливается потенциальная энергия деформации. В объемном напряженном состоянии полная потенциальная энергия деформации, накопленная в единице объема тела при статическом нагружении, равна:

$$U_0 = \frac{1}{2E} \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2)).\quad (1.22)$$

Потенциальная энергия  $U_0$  включает энергию изменения объема  $U_{0\text{об}}$  и энергию изменения формы  $U_{0\text{ф}}$ :

$$U_0 = U_{0\text{об}} + U_{0\text{ф}}.$$

Энергия изменения объема определяется выражением:

$$U_{0\text{об}} = \frac{1-2\mu}{6E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.\quad (1.23)$$

Энергия изменения формы или энергия формоизменения равна:

$$U_{0\text{ф}} = \frac{1+\mu}{3E} \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_3\sigma_2).\quad (1.24)$$

Из выражений (1.22) и (1.24) следует, что полная удельная потенциальная энергия деформации, а также ее составляющие, пропорциональны квадратам нормальных напряжений и всегда положительны.

*Пример 1.3.* Для линейного напряженного состояния, представленного на рис. 1.15, а, определить нормальные и касательные напряжения в сечении I–I, если  $\sigma_x = 100$  МПа.

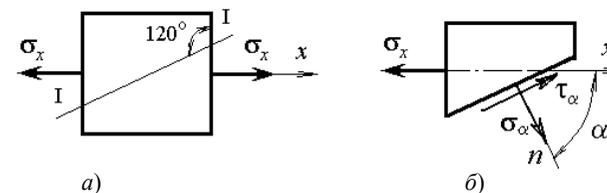


Рис. 1.15. Исходная (а) и расчетная (б) схемы линейного напряженного состояния (к примеру 1.3)

*Решение.* Нормальные и касательные напряжения на наклонной площадке при линейном напряженном состоянии определяются по формулам:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha; \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x}{2} \cdot \sin 2\alpha .$$

Для нахождения  $\sigma_{\alpha}$  и  $\tau_{\alpha}$  требуется знать величину угла  $\alpha$  как угла, заключенного между осью  $x$  и нормалью к площадке. Из рис. 1.15, б устанавливаем, что  $\alpha = -60^{\circ}$  (знак «минус» ставится потому, что угол  $\alpha$  отсчитывается от оси  $x$  по ходу часовой стрелки и считается отрицательным).

$$\text{Тогда } \sigma_{\alpha} = 100 \cos^2(-60^{\circ}) = 25 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{100}{2} \cdot \sin 2(-60^{\circ}) = 50 \cdot 2(-0,866) = -86,6 \text{ МПа}.$$

Направление  $\sigma_{\alpha}$  и  $\tau_{\alpha}$  показаны на рис. 1.15, б. Так как  $\sigma_{\alpha} > 0$ , оно направлено от сечения и вызывает растяжение материала в сечении;  $\tau_{\alpha} < 0$ , оно направлено так, чтобы вектор стремился вращать элемент против хода часовой стрелки.

*Пример 1.4.* Для напряженного состояния, представленного на рис. 1.16, а, определить нормальные и касательные напряжения в сечении I–I, если  $\sigma_x = 80$  МПа,  $\sigma_y = 50$  МПа,  $\tau_{xy} = 20$  МПа.

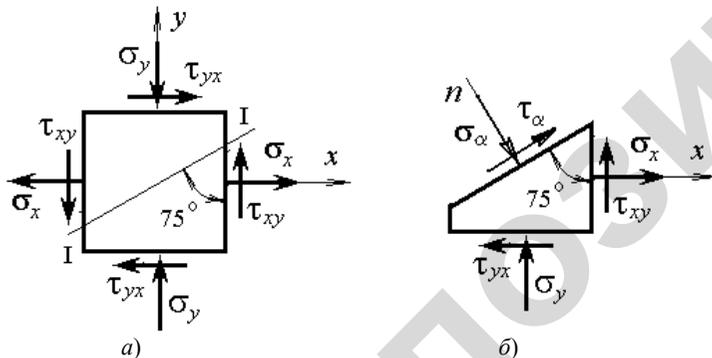


Рис. 1.16. Исходная (а) и расчетная (б) схемы плоского напряженного состояния (к примеру 1.4)

*Решение.* Заданное напряженное состояние является плоским, так как на площадке, перпендикулярной оси  $z$ , отсутствуют напряжения. Согласно правилу знаков, устанавливаем:  $\sigma_x = 80$  МПа,  $\sigma_y = -50$  МПа,  $\tau_{xy} = -20$  МПа.

При плоском напряженном состоянии нормальные и касательные напряжения на наклонной площадке определяются по формулам (1.3) и (1.4):

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha .$$

$$\text{Величина угла } \alpha = 90^{\circ} + 15^{\circ} = 105^{\circ}.$$

Тогда

$$\sigma_{\alpha} = 80 \cos^2 105^{\circ} - 50 \sin^2 105^{\circ} - (-20) \sin 2 \cdot 105^{\circ} = -51,29 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{80 - (-50)}{2} \cdot \sin 2 \cdot 105^{\circ} + (-20) \cos 2 \cdot 105^{\circ} = 15,18 \text{ МПа}.$$

В соответствии с правилом знаков для напряжений направление векторов, изображающих  $\sigma_{\alpha}$  и  $\tau_{\alpha}$ , показано на рис. 1.16, б.

*Пример 1.5.* На гранях выделенного элемента в виде прямоугольного параллелепипеда в окрестности точки  $B$  действуют напряжения:  $\sigma_x = -30$  МПа,  $\sigma_y = 70$  МПа,  $\sigma_z = 40$  МПа,  $\tau_{xy} = 20$  МПа. Требуется определить положение главных площадок, величины главных напряжений, а также максимальные касательные напряжения и площадки, на которых они приложены.

*Решение.* Для исследования напряженного состояния в точке  $B$  изобразим прямоугольный параллелепипед и действующие на его гранях напряжения (рис. 1.17, а). На площадке, перпендикулярной к оси  $z$ , нет касательных напряжений. Следовательно, эта площадка является главной, а  $\sigma_z$  – главным напряжением. Найдем положение двух других главных площадок, которые будут параллельны оси  $z$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{\text{гл}} = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 20}{-30 - 70} = 0,4;$$

$$\alpha_{\text{гл}} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} 2\alpha_{\text{гл}} = 10,9^{\circ}.$$

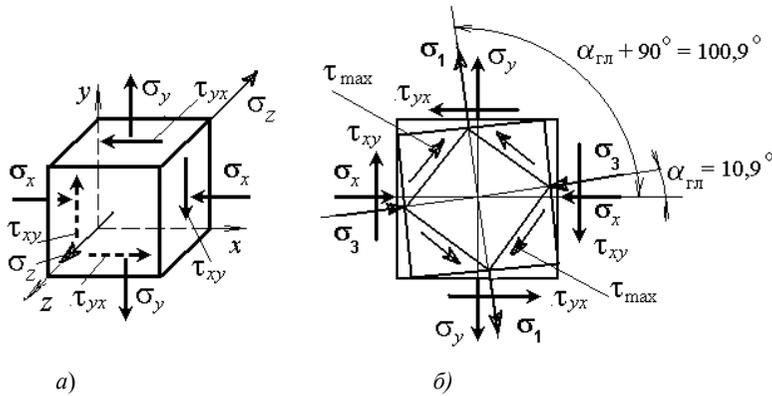


Рис. 1.17. Исходная (а) и расчетная (б) схемы объемного напряженного состояния (к примеру 1.5)

Углы, определяющие положение нормалей к главным площадкам, равны:

$$\alpha_{\text{гл}_1} = \alpha_{\text{гл}} = 10,9^\circ; \alpha_{\text{гл}_2} = \alpha_{\text{гл}} + 90^\circ = 10,9^\circ + 90^\circ = 100,9^\circ.$$

Положение главных площадок, перпендикулярных к нормальям, показано на рис. 1.17, б.

Главные напряжения, действующие на главных площадках, определяем по формуле (1.8):

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{max, min}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{-30 + 70}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-30 - 70)^2 + 4 \cdot 20^2} = (20 \pm 53,85) \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\sigma_{\text{max}} = 73,85 \text{ МПа}; \sigma_{\text{min}} = -33,85 \text{ МПа}.$$

Учитывая значения  $\sigma_z$ , присваиваем  $\sigma_{\text{max}}$ ,  $\sigma_{\text{min}}$  индексы главных напряжений:

$$\sigma_1 = 73,85 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 40 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = -33,85 \text{ МПа}.$$

Заданное напряжение  $\sigma_y$  в алгебраическом смысле больше напряжения  $\sigma_x$ , поэтому площадка, на которой действует напряжение  $\sigma_1$ , будет определяться углом  $\alpha_{\text{гл}_2} = 100,9^\circ$ . Тогда вектор напряжения  $\sigma_1$  будет проходить ближе к тому ребру элемента, у которого сходятся векторы касательных напряжений, что указывает на правильность определения направления главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  и положения главных площадок.

Максимальные касательные напряжения равны:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{73,85 - (-33,85)}{2} = 53,85 \text{ МПа}.$$

Площадки, на которых действуют  $\tau_{\text{max}}$ , располагаются под углом  $45^\circ$  к главным площадкам с напряжениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  (рис. 1.17, б).

*Пример 1.6.* Стальной элемент в форме куба, имеющего конечные размеры, равномерно сжимается напряжениями (рис. 1.18). В каком случае изменение объема будет больше: 1 – элемент расположен на гладкой плите; 2 – элемент плотно, без натяга, вставлен в паз; 3 – элемент плотно, без натяга, вставлен в квадратное гнездо? Материал плиты считать абсолютно жестким.

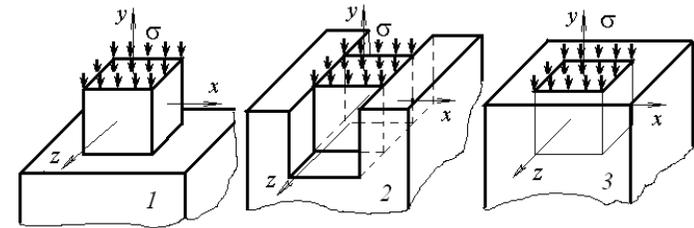


Рис. 1.18. Схемы нагружения и закрепления элемента

*Решение.* Во всех трех случаях нагружения применяется один и тот же элемент в виде куба. Поэтому решение задачи сводится к определению относительного изменения объема для каждого случая по формуле (1.21):

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Отсюда видно, что необходимо найти главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ . Выделим из куба элементарный прямоугольный параллелепипед, грани которого параллельны граням исходного куба, и покажем для каждого случая действующие напряжения (рис. 1.19).

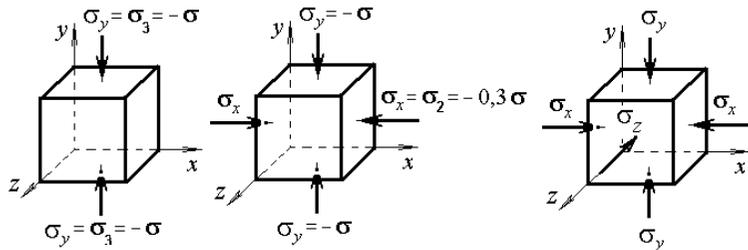


Рис. 1.19. Схемы напряженных состояний (к примеру 1.6)

По условию задачи, на верхней грани не действуют касательные напряжения. По закону парности касательных напряжений, они не будут действовать и на перпендикулярных площадках. Поэтому во всех случаях грани выделенного элемента будут главными площадками, а действующие на них напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  будут главными напряжениями. Определим для каждого случая величины главных напряжений:

- 1)  $\sigma_1 = 0$ ;  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -\sigma$ ;
- 2)  $\sigma_z = \sigma_1 = 0$ ;  $\sigma_x = \sigma_2 = -0,3\sigma$ ;  $\sigma_y = \sigma_3 = -\sigma$ ;
- 3)  $\sigma_x = \sigma_z = \sigma_1 = -0,429\sigma$ ;  $\sigma_y = \sigma_3 = -\sigma$ .

Напряжение  $\sigma_x$  (случай 2) найдем, используя выражение обобщенного закона Гука для относительной линейной деформации  $\varepsilon_x$ , которая по условию задачи равна нулю:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu\sigma_y) = 0.$$

Следовательно,  $\sigma_x = \mu\sigma_y$ .

Для стали коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ .

Тогда  $\sigma_x = -0,3\sigma$ .

Найдем напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_z$  (случай 3), для чего запишем выражения для  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_z$  и приравняем их к нулю:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0;$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)] = 0.$$

Деформации  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_z$  будут равны нулю, когда выражения в скобках обращаются в ноль.

$$\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z = 0;$$

$$\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y = 0.$$

Вычитая из первого выражения второе, приходим к равенству  $\sigma_x = \sigma_z$ . Подставляя его в первое уравнение, получим:

$$\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_x = 0;$$

$$\sigma_x = \sigma_y \cdot \frac{\mu}{1-\mu} = -\sigma \cdot \frac{0,3}{1-0,3} = -0,429\sigma = \sigma_z.$$

Главные напряжения равны:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0,429\sigma; \quad \sigma_3 = -\sigma.$$

Находим для каждого случая нагружения относительное изменение объема:

$$1) \theta = \frac{1-2 \cdot 0,3}{E} \cdot (-\sigma) = -\frac{0,4}{E} \cdot \sigma;$$

$$2) \theta = \frac{1-2 \cdot 0,3}{E} \cdot (-0,3\sigma - \sigma) = -\frac{0,52}{E} \cdot \sigma;$$

$$3) \theta = \frac{1-2 \cdot 0,3}{E} \cdot (-0,429\sigma - 0,429\sigma - \sigma) = -\frac{0,743}{E} \cdot \sigma.$$

Таким образом, изменение объема элемента в виде куба будет больше в третьем случае нагружения.

## 1.4. Задания по управляемой самостоятельной работе студентов и рекомендации по их выполнению

### 1.4.1. Определение внутренних силовых факторов

Самостоятельно изучить и законспектировать теоретический материал по теме: «Определение внутренних силовых факторов (поперечная сила, изгибающий момент, продольная сила, крутящий момент) и построение их эпюр».

Форма контроля – проверка конспектов.

#### Методические указания

Составленный конспект должен раскрывать содержание следующих вопросов (аспектов и пр.):

1. Продольная (нормальная) сила:
  - определение в произвольном поперечном сечении бруса (стержня);
  - правило знаков;
  - построение эпюры  $N$ .
2. Крутящий момент:
  - определение в произвольном поперечном сечении бруса (вала);
  - правило знаков;
  - построение эпюры  $T$ .
3. Поперечная сила и изгибающий момент:
  - определение в произвольном поперечном сечении бруса (балки);
  - правило знаков;
  - построение эпюр  $Q_y$  и  $M_z$ .

### 1.4.2. Прямой поперечный изгиб

Выполнить ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»: построить эпюры внутренних силовых факторов для заданных 3 балок и 2 рам [12, с. 34, п. 1].

Исходные данные для выполнения задания принимаются в соответствии с выданным преподавателем вариантом: номером

схем [12, рис. 1.20] и номером строки [12, табл. 1.2]. Пример исходных данных для варианта: номер схем (2) и строки (5) приводится, соответственно, на рис. 1.20 и в таблице.

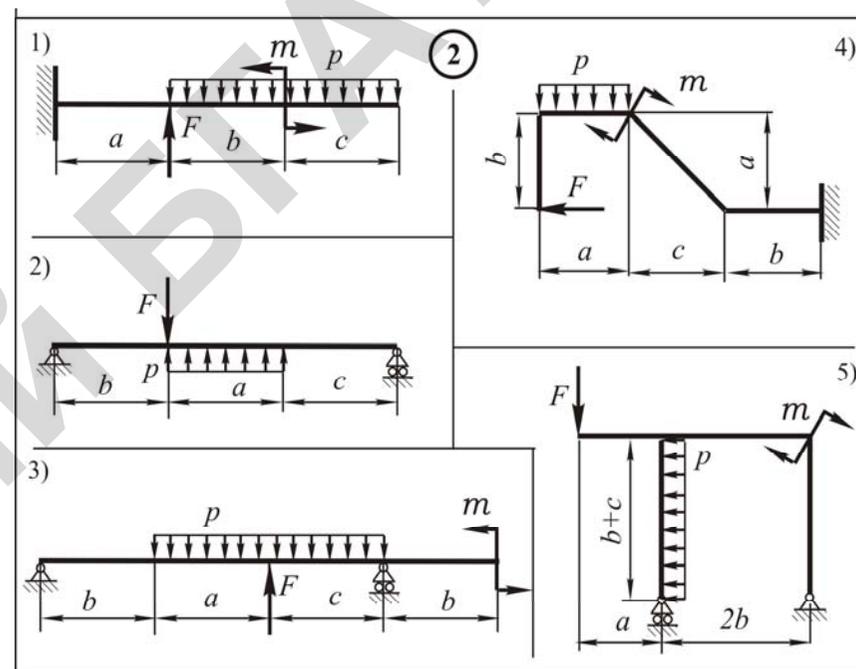


Рис. 1.20. Схемы номер 2 к ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

Таблица

Числовые данные к ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

№ строки	Размеры			Нагрузки		
	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$m$ , кН·м	$F$ , кН	$p$ , кН/м
5	1,5	1,1	1,4	14	22	13

Форма контроля – проверка письменно выполненного ИДЗ.

## Теоретические предпосылки к заданию

Внутренние силовые факторы – поперечная сила  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_z$ . Рассмотрим балку, нагруженную внешними силами, лежащими в плоскости  $uox$  (рис. 1.21). Применяя метод сечений, проведем секущую плоскость и, воспользовавшись уравнениями равновесия для оставшейся (левой) части балки, получим соотношения для определения  $Q_y$  и  $M_z$ :

$$Q_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad (1.25)$$

$$M_z = \sum_{i=1}^n m_z(F_i). \quad (1.26)$$

Поперечная сила  $Q_y$  и в поперечном сечении бруса (балки) равна алгебраической сумме проекций на ось  $y$  всех внешних сил, действующих на его оставшуюся часть.

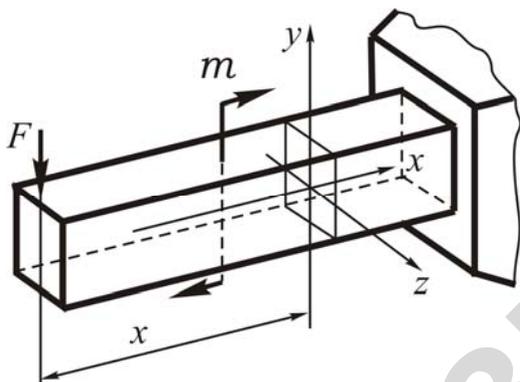


Рис. 1.21. Схема нагружения балки

При определении поперечной силы  $Q_y$  используют правило знаков: если внешняя сила стремится вращать оставшуюся часть бруса (балки) по направлению хода часовой стрелки, то она вызывает в рассматриваемом сечении положительную поперечную силу, против хода часовой стрелки – отрицательную поперечную силу (рис. 1.22).



Рис. 1.22. Схема правила знаков для  $Q_y$

Изгибающий момент  $M_z$  в поперечном сечении бруса (балки) равен алгебраической сумме моментов относительно оси  $z$  всех внешних сил, действующих на его оставшуюся часть.

При определении изгибающего момента  $M_z$  используют правило знаков: если внешний момент сжимает верхние волокна бруса (балки), то он вызывает в рассматриваемом сечении положительный изгибающий момент, если сжимает нижние волокна – отрицательный изгибающий момент (рис. 1.23).

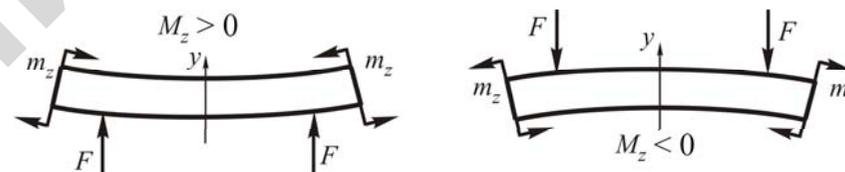


Рис. 1.23. Схема правила знаков для  $M_z$

По найденным значениям  $Q_y$  и  $M_z$  на каждом расчетном участке строятся их эпюры для всей конструкции. При построении эпюр внутренних силовых факторов будем исходить из того, что:

1. Ординаты эпюр откладываются в принятом масштабе перпендикулярно геометрической оси бруса.
2. Положительные ординаты эпюр поперечных сил и изгибающих моментов откладываются вверх от оси балки, отрицательные – вниз; у рам положительные ординаты эпюр откладываются с наружной стороны, отрицательные – с внутренней стороны элементов рамы.
3. Для стержней, расположенных внутри рамы, ординаты эпюр изгибающих моментов откладываются со стороны сжатых волокон, при этом знаки на эпюре не ставятся; положительные ординаты

эпюры поперечных сил откладываются с левой стороны, а отрицательные – с правой стороны стержней. Таким образом, эпюра изгибающих моментов всегда строится со стороны сжатых волокон.

4. Ординаты эпюры продольных сил откладываются симметрично по обе стороны от оси бруса с указанием знака.

Внешняя нагрузка, поперечная сила и изгибающий момент связаны между собой следующими дифференциальными соотношениями:

$$\frac{dQ}{dx} = p, \quad (1.27)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (1.28)$$

Соотношения (1.27) и (1.28) показывают, что производная от поперечной силы по длине бруса равна интенсивности распределенной нагрузки, а производная от изгибающего момента по длине бруса равна поперечной силе. Из этих соотношений вытекают следствия, используемые для контроля правильности построения эпюр  $Q_y$  и  $M_z$  для балок и прямолинейных элементов рам:

1. На участках, где отсутствует распределенная нагрузка, эпюра поперечных сил ограничена линией параллельной оси, а эпюра изгибающих моментов – наклонной прямой.

2. На участках, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой постоянной интенсивности, эпюра поперечных сил ограничена наклонной прямой линией, а эпюра изгибающих моментов – параболой.

3. На участках, где поперечная сила отсутствует, эпюра изгибающих моментов ограничена линией параллельной оси.

4. При перемещении вдоль оси сечения слева направо на участках, имеющих положительную поперечную силу, изгибающий момент алгебраически возрастает, а на участках, имеющих отрицательную поперечную силу, изгибающий момент алгебраически убывает.

5. Если в пределах расчетного участка эпюра поперечных сил пересекает нулевую линию, то в сечении, где  $Q = 0$ , изгибающий момент будет иметь экстремальное значение.

Для контроля правильности построения эпюр  $Q_y$  и  $M_z$  для балок и прямолинейных элементов рам используются также следствия, вытекающие из метода сечений:

1. В сечении, где приложена сосредоточенная сила, перпендикулярная к оси, на эпюре поперечных сил возникает скачок, равный по величине приложенной силе, а на эпюре изгибающих моментов получается излом.

2. В сечении, где приложена внешняя пара сил (сосредоточенный момент), на эпюре изгибающих моментов возникает скачок, равный по величине моменту приложенной пары.

3. Для рам обязательна статическая проверка, заключающаяся в проверке равновесия каждого узла, вырезанного из нагруженной рамы.

#### **Методические указания для выполнения задания**

1. Вычертить в масштабе схему балки (рамы), оставляя под ней место для эпюр внутренних силовых факторов.

2. Показать реакции опор и обозначить их.

3. Используя уравнения равновесия для балки (рамы) как плоской системы, определить величину реакций опор, а также выполнить проверку правильности их нахождения.

4. Установить количество расчетных участков. Расчетным участком называется часть длины балки, в пределах которой внутренний силовой фактор изменяется по одному и тому же закону. Тогда границами участков будут являться сечения, в которых изменяется характер действующей нагрузки.

5. Последовательно, для каждого расчетного участка схемы:

– провести перпендикулярно оси  $x$  секущую плоскость, разделяющую балку (раму) на две части. Расстояние до поперечного сечения, совпадающего с секущей плоскостью, отсчитывается от крайнего левого или правого сечения балки (для рамы это расстояние также может отсчитываться от крайнего верхнего или нижнего сечения) и обозначается  $x_i$  ( $i$  – порядковый номер расчетного участка);

– составить уравнение поперечной силы, произвести ее расчет и построить эпюру поперечных сил  $Q$ ;

– составить уравнение изгибающего момента, произвести его расчет и построить эпюру изгибающих моментов  $M$ ;

– составить уравнение продольной силы, произвести ее расчет и построить эпюру продольных сил  $N$ .

6. Проверить правильность построения эпюр  $Q$  и  $M$ , используя следствия, вытекающие из соотношений между нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом, сущности метода сечений. Для рам также проверить равновесие всех узлов.

### Образец выполнения задания для балок (схемы 1–3, рис. 1.20)

Для заданной балки (рис. 1.24) требуется построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Весом балки пренебречь.

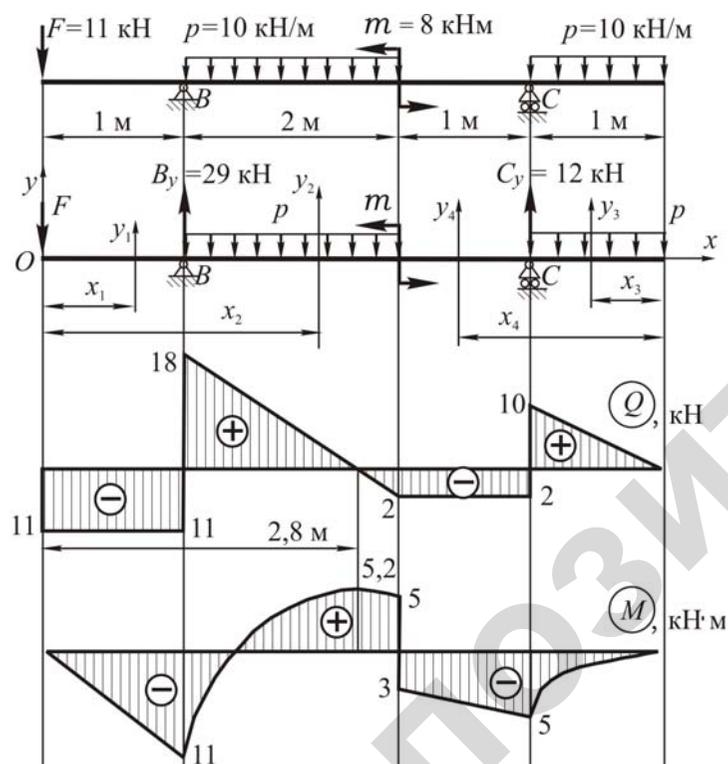


Рис. 1.24. Расчетные схемы, эпюры поперечных сил, изгибающих моментов в сечениях балки

*Решение.* Проводим координатные оси. При этом ось  $x$  совмещаем с осью балки, ось  $y$  проводим перпендикулярно оси  $x$  в точке  $B$ . Рассматриваем равновесие балки, для чего наложенные связи со стороны опор заменяем реакциями. Опора  $B$  – шарнирно-неподвижная. Реакцию опоры представляем составляющими  $B_y$  и  $B_x$ , проходящими через ось шарнира. Опора  $C$  – шарнирно-подвижная. Реакция такой опоры проходит через ось шарнира и направлена перпендикулярно оси балки.

Таким образом, на балку действует уравновешенная плоская система сил.

Для нахождения неизвестных  $B_y$ ,  $B_x$  и  $C_y$ , составляем уравнения равновесия:

$$\sum m_c(F_i) = -B_y \cdot 3 + F \cdot 4 + m + p \cdot 2 \cdot 2 - p \cdot 1 \cdot 0,5 = 0;$$

$$\sum m_B(F_i) = -C_y \cdot 3 - m + p \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 1 + p \cdot 1 \cdot 3,5 = 0;$$

$$\sum F_x = B_x = 0.$$

Последнее уравнение необходимо для определения составляющей  $B_x$ , которая в данной задаче равна нулю, поскольку к балке не приложены силы, проектируемые на ось  $x$ .

Решаем уравнения равновесия и находим реакции опор:

$$B_y = \frac{F \cdot 4 + m + p \cdot 2 \cdot 2 - p \cdot 0,5}{3} = \frac{11 \cdot 4 + 8 + 10 \cdot 2 \cdot 2 - 10 \cdot 0,5}{3} = 29 \text{ кН},$$

$$C_y = \frac{-m + p \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 1 + p \cdot 1 \cdot 3,5}{3} = \frac{-8 + 10 \cdot 2 - 11 + 10 \cdot 3,5}{3} = 12 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения реакций опор составим не использованное в этой задаче уравнение равновесия в виде суммы проекций сил на ось  $y$  и подставим их значения:

$$\sum F_y = B_y - p \cdot 2 - F + C_y - p \cdot 1 = 29 - 20 - 11 + 12 - 10 = 0.$$

В результате расчета получили  $\sum F_y = 0$ , что указывает на правильность определения реакций опор.

Разбиваем балку на четыре расчетных участка, принимая за их границы сечения, где приложены внешние сосредоточенные силы, момент, а также начало и конец распределенной нагрузки.

В пределах первого участка проводим произвольное поперечное сечение на расстоянии  $x_1$  от начала координат (точки  $O$ ). Мысленно отбрасываем правую часть балки и, учитывая правила знаков, составляем уравнения для  $Q_{x_1}$  и  $M_{x_1}$  на первом участке.

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq 1$  м):

$$Q_{x_1} = -F;$$

$$M_{x_1} = -F x_1.$$

Из уравнений следует, что на первом участке поперечная сила постоянная, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Задавая  $x_1$  значения, соответствующие границам участка, находим  $Q_{x_1}$  и  $M_{x_1}$ :

$$Q_{x_1} = \text{const} = -11 \text{ кН};$$

$$x_1 = 0: M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 1 \text{ м}: M_{x_1} = -11 \cdot 1 = -11 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Строим эпюры для первого участка, отмечая на них найденные значения  $Q_{x_1}$  и  $M_{x_1}$  (см. рис. 1.24).

Подобным образом проводим произвольное поперечное сечение в пределах второго расчетного участка на расстоянии  $x_2$  от крайней левой точки  $O$ . Отбрасывая мысленно правую часть балки и рассматривая силы, действующие на оставшуюся часть, составляем уравнения  $Q_{x_2}$  и  $M_{x_2}$  для второго участка.

Участок II ( $1 \text{ м} \leq x_2 \leq 3$  м):

$$Q_{x_2} = -F + B_y - p(x_2 - 1);$$

$$M_{x_2} = -F x_2 + B_y(x_2 - 1) - p \cdot \frac{(x_2 - 1)^2}{2}.$$

На втором участке поперечная сила представляет линейную функцию, а изгибающий момент изменяется по квадратичной функции. Задавая  $x_2$  значения, соответствующие границам участка, находим  $Q_{x_2}$  и  $M_{x_2}$ :

$$x_2 = 1 \text{ м}: Q_{x_2} = -11 + 29 = 18 \text{ кН};$$

$$x_2 = 3 \text{ м}: Q_{x_2} = -11 + 29 - 10 \cdot 2 = -2 \text{ кН};$$

$$x_2 = 1 \text{ м}: M_{x_2} = -11 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_2 = 3 \text{ м}: M_{x_2} = -11 \cdot 3 + 29 \cdot 2 - 10 \cdot \frac{(3-1)^2}{2} = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Так как на втором участке поперечная сила  $Q_{x_2}$  непрерывно убывает и происходит смена ее знака, то в сечении, где  $Q_{x_2} = 0$ , эпюра моментов  $M_{x_2}$  примет экстремальное значение, при вычислении которого воспользуемся дифференциальной зависимостью между  $Q_{x_2}$  и  $M_{x_2}$ . Приравнявая к нулю выражение поперечной силы  $Q_{x_2}$ , находим расстояние  $x_2$  до сечения с экстремальным значением изгибающего момента:

$$Q_{x_2} = -F + B_y - p(x_2 - 1) = 0,$$

$$x_2 = \frac{-F + B_y + p}{q} = \frac{-11 + 29 + 10}{10} = 2,8 \text{ м}.$$

Подставив полученное значение  $x_2$  в уравнение моментов  $M_{x_2}$ , находим величину экстремального изгибающего момента:

$$x_2 = 2,8 \text{ м};$$

$$M_{x_2} = -11 \cdot 2,8 + 29 \cdot (2,8 - 1) - 10 \cdot \frac{(2,8 - 1)^2}{2} = 5,2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Строим эпюры для второго участка и отмечаем на них найденные значения  $Q_{x_2}$  и  $M_{x_2}$  (см. рис. 1.24).

Проводим сечение в пределах третьего расчетного участка на расстоянии  $x_3$  от крайней правой точки балки. Рассматривая силы, действующие на правую часть балки, составляем уравнения  $Q_{x_3}$  и  $M_{x_3}$  для третьего участка:

Участок III ( $0 \leq x_3 \leq 1$  м):

$$Q_{x_3} = p x_3;$$

$$M_{x_3} = -p \cdot \frac{x_3^2}{2}.$$

На третьем участке поперечная сила представляет линейную функцию, а изгибающий момент изменяется по квадратичной функции. Задавая  $x_3$  значения, соответствующие границам участка, находим  $Q_{x_3}$  и  $M_{x_3}$ :

$$x_3 = 0: Q_{x_3} = 0;$$

$$x_3 = 1 \text{ м}: Q_{x_3} = 10 \text{ кН};$$

$$x_3 = 0: M_{x_3} = 0;$$

$$x_3 = 1 \text{ м}: M_{x_3} = -10 \cdot \frac{1^2}{2} = -5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По вычисленным значениям строим эпюры  $Q_{x_3}$  и  $M_{x_3}$  на третьем участке (см. рис. 1.24). Поскольку эпюра поперечных сил на этом участке не изменяет знак, то изгибающий момент не будет принимать экстремального значения.

Проводим сечение в пределах четвертого расчетного участка на расстоянии  $x_4$  от крайней правой точки балки. Рассматривая силы, действующие на правую часть балки, составляем уравнения  $Q_{x_4}$  и  $M_{x_4}$  для четвертого участка.

Участок IV ( $1 \text{ м} \leq x_4 \leq 2$  м):

$$Q_{x_4} = -C_y + p \cdot 1;$$

$$M_{x_4} = C_y (x_4 - 1) - p \cdot 1 (x_4 - 0,5).$$

Из уравнений следует, что на четвертом участке поперечная сила постоянная, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Подставляя числовые значения  $x_4$  на границах участка, находим  $Q_{x_4}$  и  $M_{x_4}$ :

$$Q_{x_4} = \text{const} = -12 + 10 = -2 \text{ кН};$$

$$x_4 = 1 \text{ м}: M_{x_4} = -10 (1 - 0,5) = -5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_4 = 2 \text{ м}: M_{x_4} = 12 \cdot 1 - 10 (2 - 0,5) = -3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным данным  $Q_{x_4}$  и  $M_{x_4}$  строим эпюры на четвертом участке (см. рис. 1.24).

Контроль правильности построения эпюр с использованием общих выводов, вытекающих из соотношений между нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом, сущности метода сечений показывает, что эпюры  $Q$  и  $M$  построены верно.

Из эпюр  $Q$  и  $M$  устанавливаем, что опасное сечение балки находится на расстоянии 1 м от крайнего левого сечения балки.

### Образец выполнения задания для рам (схемы 4, 5, рис. 1.20)

Построить эпюры внутренних силовых факторов для рамы, показанной на рис. 1.25. Подобрать размеры поперечного сечения элементов рамы, если оно имеет форму кольца (отношение внутреннего диаметра к наружному равно 0,8). Допускаемое напряжение принять равным  $[\sigma] = 160$  МПа. Собственным весом рамы пренебречь.

*Решение.* Определяем реакции жесткой заделки, представленные на рис. 1.30 составляющими  $B_y$  и  $B_x$ ,  $m_B$ . На раму действует уравновешенная плоская система сил. Неизвестные силовые факторы  $B_y$ ,  $B_x$ ,  $m_B$  найдем, составляя уравнения равновесия в виде суммы проекций сил на горизонтальную ось  $x$ , на вертикальную ось  $y$  и суммы моментов относительно точки  $B$ :

$$\Sigma F_x = F - B_x = 0;$$

$$\Sigma F_y = B_y - p \cdot 2 = 0;$$

$$\Sigma m_B (F_i) = -m_B + p \cdot 2 \cdot 3 - m - F \cdot 1,5 = 0.$$

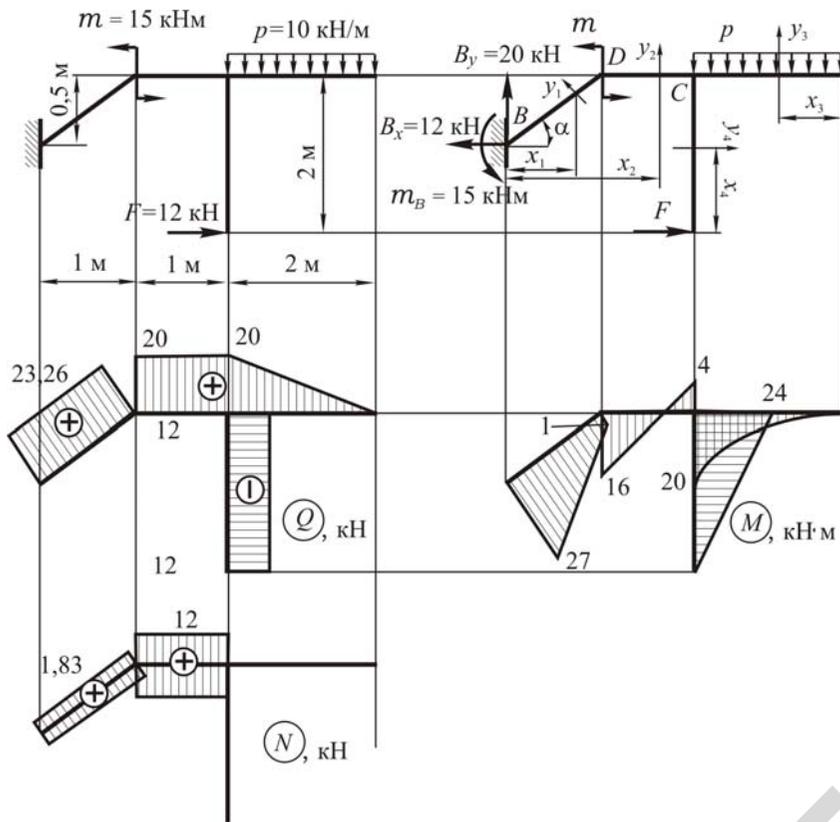


Рис. 1.25. Расчетная схема и эпюры внутренних силовых факторов рамы

Откуда

$$B_x = F = 20 \text{ кН};$$

$$B_y = p \cdot 2 = 20 \text{ кН};$$

$$m_B = p \cdot 6 - m - F \cdot 1,5 = 60 - 15 - 18 = 27 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для проверки правильности вычисления реакций заделки  $B$  составим уравнение равновесия в виде суммы моментов относительно точки  $C$  и подставим их значения:

$$\begin{aligned} \sum m_c(F_i) &= B_y \cdot 2 + B_x \cdot 0,5 - m_B - m - F \cdot 2 + \\ &+ p \cdot 2 \cdot 1 = 20 \cdot 2 + 12 \cdot 0,5 - 27 - 15 - 12 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

В результате расчета получили  $\sum m_c(F_i) = 0$ , что указывает на правильность определения реакций заделки  $B$ .

Рама имеет четыре расчетных участка. На каждом расчетном участке проводим сечение и, рассматривая силы, действующие на оставшуюся часть, составляем уравнения для поперечных сил, изгибающих моментов и продольных сил, соблюдая соответствующие правила знаков.

Проводим сечение на первом участке на расстоянии  $x_1$  от жесткой заделки  $B$  и составляем уравнения для  $Q_{x_1}$ ,  $M_{x_1}$ ,  $N_{x_1}$ .

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq 1$  м):

$$Q_{x_1} = B_y \cos \alpha + B_x \sin \alpha;$$

$$M_{x_1} = -m_B + B_y x_1 + B_x x_1 \operatorname{tg} \alpha;$$

$$N_{x_1} = -B_y \sin \alpha + B_x \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол, который составляет ось элемента с горизонтальной осью, величина которого равна:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{0,5}{1} = 26,6^\circ.$$

Из уравнений следует, что на первом участке поперечная сила и продольная сила постоянные, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Подставляя числовые значения  $x_1$  на границах участка, получаем:

$$Q_{x_1} = \operatorname{const} = 20 \cos 26,6^\circ + 12 \sin 26,6^\circ = 23,26 \text{ кН};$$

$$x_1 = 0: M_{x_1} = -27 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_1 = 1 \text{ м}: M_{x_1} = -27 + 20 \cdot 1 + 12 \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} 26,6^\circ = -1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$N_{x_1} = \operatorname{const} = -20 \sin 26,6^\circ + 12 \cos 26,6^\circ = 1,83 \text{ кН}.$$

Строим эпюры для первого участка, отмечая на них найденные значения  $Q_{x_1}$  и  $M_{x_1}$ ,  $N_{x_1}$  (см. рис. 1.25).

Проводим сечение на втором участке на расстоянии  $x_2$  от жесткой заделки  $B$  и составляем уравнения для  $Q_{x_2}$ ,  $M_{x_2}$ ,  $N_{x_2}$ .

Участок II ( $1 \text{ м} \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$ ):

$$Q_{x_2} = B_y;$$

$$M_{x_2} = -m_B - m + B_y x_2 + B_x \cdot 0,5;$$

$$N_{x_2} = B_x.$$

Из уравнений следует, что на втором участке поперечная сила и продольная сила постоянные, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Подставляя числовые значения  $x_2$  на границах участка, получаем:

$$Q_{x_2} = \text{const} = 20 \text{ кН};$$

$$x_2 = 1 \text{ м}: M_{x_2} = -27 - 15 + 20 \cdot 1 + 12 \cdot 0,5 = -16 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_2 = 2 \text{ м}: M_{x_2} = -27 - 15 + 20 \cdot 2 + 12 \cdot 0,5 = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$N_{x_2} = \text{const} = 12 \text{ кН}.$$

Строим эпюры для второго участка, отмечая на них найденные значения  $Q_{x_2}$  и  $M_{x_2}$ ,  $N_{x_2}$  (см. рис. 1.25).

Проводим сечение на третьем участке на расстоянии  $x_3$  от крайнего правого сечения и составляем уравнения для  $Q_{x_3}$ ,  $M_{x_3}$ ,  $N_{x_3}$ .

Участок III ( $0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м}$ ):

$$Q_{x_3} = p x_3;$$

$$M_{x_3} = -p \cdot \frac{x_3^2}{2};$$

$$N_{x_3} = 0.$$

Из уравнений следует, что на третьем участке поперечная сила представляет линейную функцию, изгибающий момент изменяется по квадратичной функции, а продольная сила

равна нулю. Подставляя числовые значения  $x_3$  на границах участка, получаем:

$$x_3 = 0: Q_{x_3} = 0;$$

$$x_3 = 2 \text{ м}: Q_{x_3} = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН};$$

$$x_3 = 0: M_{x_3} = 0;$$

$$x_3 = 2 \text{ м}: M_{x_3} = -10 \cdot \frac{2^2}{2} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$N_{x_3} = 0.$$

Строим эпюры для третьего участка, отмечая на них найденные значения  $Q_{x_3}$  и  $M_{x_3}$ ,  $N_{x_3}$  (см. рис. 1.25).

Проводим сечение на четвертом участке на расстоянии  $x_4$  от крайнего нижнего сечения и составляем уравнения для  $Q_{x_4}$ ,  $M_{x_4}$ ,  $N_{x_4}$ .

Участок IV ( $0 \leq x_4 \leq 2 \text{ м}$ ):

$$Q_{x_4} = -F;$$

$$M_{x_4} = F x_4;$$

$$N_{x_4} = 0.$$

Из уравнений следует, что на четвертом участке поперечная сила постоянная, изгибающий момент изменяется по линейному закону, а продольная сила равна нулю. Подставляя числовые значения  $x_4$  на границах участка, получаем:

$$Q_{x_4} = \text{const} = -12 \text{ кН};$$

$$x_2 = 0: M_{x_4} = 0;$$

$$x_2 = 2 \text{ м}: M_{x_4} = 12 \cdot 2 = 24 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$N_{x_4} = 0.$$

Строим эпюры для четвертого участка, отмечая на них найденные значения  $Q_{x_4}$  и  $M_{x_4}$ ,  $N_{x_4}$  (см. рис. 1.25).

Контроль правильности построения эпюр с использованием общих выводов, вытекающих из соотношений между нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом, сущности метода сечений показывает, что эпюры  $Q$  и  $M$  построены верно. Для рам является обязательной проверка равновесия узлов. Составляем уравнения равновесия для узла  $C$  (рис. 1.26):

$$\Sigma F_x = -20 + 20 = 0;$$

$$\Sigma F_y = 20 - 20 = 0;$$

$$\Sigma m_C(F_i) = 4 + 20 - 24 = 0.$$

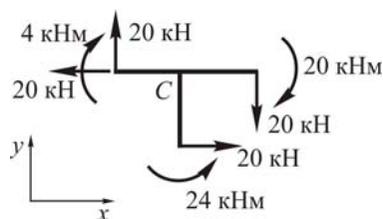


Рис. 1.26. Узел рамы  $C$

Составляем уравнения равновесия для узла  $D$  (рис. 1.27):

$$\Sigma F_x = -23,26 \sin 26,6^\circ - 1,83 \cos 26,6^\circ + 12 = 0;$$

$$\Sigma F_y = 23,26 \cos 26,6^\circ - 1,83 \sin 26,6^\circ - 20 = 0;$$

$$\Sigma m_D(F_i) = -1 - 15 + 16 = 0.$$

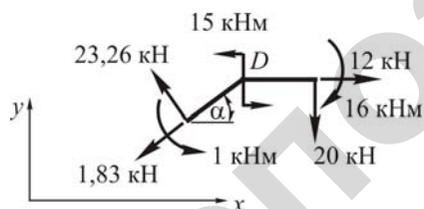


Рис. 1.27. Узел рамы  $D$

Уравнения равновесия для узлов  $C$  и  $D$  удовлетворяются. Выполненные проверки позволяют заключить, что все эпюры построены верно.

### 1.5. Пример разноуровневого задания для контроля результатов изучения содержания модуля

#### Уровень III

1. Соотношения между внешними нагрузками, поперечной силой и изгибающим моментом.

#### Уровень II

1. Для данной балки (рис. 1.28) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

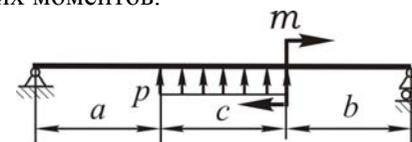


Рис. 1.28. Схема балки

2. Стальной стержень круглого поперечного сечения диаметром 30 мм растянут на разрывной машине силой 125 кН. С помощью тензметра на длине 50 мм измерено его удлинение, оказавшееся равным 0,43 мм. Определить модуль упругости для материала стержня.

#### Уровень I

1. По какой формуле определяются нормальные напряжения на наклонной площадке параллельной оси  $z$  (главная ось напряженного состояния)?
2. Какая ось называется центральной осью сечения?
3. Запишите условие прочности согласно теории Мора.

## 1.6. Вопросы для контроля результатов изучения содержания модуля 1 (уровень III)

### *Основные понятия и определения*

1. Предмет курса «Механика материалов», связь с общенаучными, инженерными и специальными дисциплинами.
2. Реальный объект и расчетная схема (модель). Внутренние силы.
3. Метод сечений. Внутренние силовые факторы. Их определение через внешние силы. Виды нагружений.
4. Продольная сила: определение, правило знаков, эпюра  $N$ , пример.
5. Крутящий момент: определение, правило знаков, эпюра  $T$ , пример.
6. Поперечная сила и изгибающий момент, их определение, правило знаков, пример.
7. Соотношения между внешними нагрузками, поперечной силой и изгибающим моментом.
8. Выводы, вытекающие из соотношений между  $p$ ,  $Q$  и  $M$ , их использование при проверке эпюр  $Q$  и  $M$ .
9. Напряжения. Зависимости между внутренними силовыми факторами и напряжениями.
10. Понятие о перемещениях и деформациях, их определение.

### *Механические характеристики материалов*

1. Механические характеристики материалов.
2. Диаграммы растяжения для пластичных и хрупких материалов.
3. Допускаемые напряжения. Понятие о коэффициенте безопасности.

### *Геометрические характеристики плоских сечений*

1. Статические моменты сечений, их изменение при параллельном переносе осей. Центр тяжести сечения.
2. Моменты инерции сечения, их свойства.
3. Изменение осевых и центробежного моментов инерции при параллельном переносе осей.

4. Изменение осевых и центробежного моментов инерции при повороте осей.
5. Главные оси инерции и главные моменты инерции.
6. Порядок определения главных центральных осей инерции и главных моментов инерции сложного сечения. Свойства симметричных сечений.
7. Вывод осевых моментов инерции для прямоугольника, осевого и полярного моментов инерции для круга и кольца.

### *Основы теории напряженного и деформированного состояний*

1. Напряженное состояние в точке: определение, компоненты, типы, закон парности касательных напряжений.
2. Исследование напряженного состояния в точке: нормальные и касательные напряжения на наклонных площадках.
3. Исследование напряженного состояния в точке: положение главных площадок, главные напряжения.
4. Определение максимальных касательных напряжений и положения площадок, на которых они действуют.
5. Обзор различных видов напряженных состояний.
6. Деформированное состояние в точке: определение, компоненты, типы. Объемная деформация.
7. Закон Гука при растяжении и сжатии.
8. Модуль упругости (модуль Юнга), его физический смысл, экспериментальное определение.
9. Коэффициент Пуассона, физический смысл и экспериментальное определение.
10. Закон Гука при сдвиге.
11. Модуль сдвига, его физический смысл, экспериментальное определение.
12. Обобщенный закон Гука.
13. Потенциальная энергия деформации в общем случае напряженного состояния.
14. Удельные потенциальные энергии изменения объема и изменения формы.

## Теории прочности

1. Назначение теорий прочности. Эквивалентное напряженное состояние и эквивалентное напряжение.

2. Классические теории прочности (теория наибольших нормальных напряжений, теория наибольших касательных напряжений). Вывод эквивалентных напряжений, условия прочности.

3. Классические теории прочности (теория наибольших относительных удлинений, энергетическая теория прочности). Вывод эквивалентных напряжений, условия прочности.

4. Теория прочности Мора и ее практическое применение.

## Модуль 2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ, ИЗГИБ, КРУЧЕНИЕ, СДВИГ

---

В результате изучения модуля студент должен:

– *знать* (описывать и формулировать) простые виды нагружения элементов конструкций (растяжение и сжатие, изгиб, кручение, сдвиг), условия прочности и жесткости при простых видах нагружения, виды инженерных расчетов, статически неопределимые системы при растяжении (сжатии) и кручении, перемещения поперечных сечений;

– *уметь* выполнять расчеты элементов конструкций на прочность и жесткость при простых видах нагружения, рационально подбирать материал и форму поперечного сечения, находить перемещения в элементах конструкции, раскрывать статическую неопределимость систем при растяжении (сжатии) и кручении.

### Словарь основных понятий

Жесткость поперечного сечения балки при изгибе – произведение модуля упругости и осевого момента инерции.

Жесткость поперечного сечения круглого вала при кручении – произведение модуля сдвига и полярного момента инерции.

Жесткость поперечного сечения стержня при растяжении (сжатии) – произведение модуля упругости и площади.

Нейтральная линия – линия пересечения нейтрального слоя и поперечного сечения.

Нейтральный слой – слой волокон, не изменяющий своей длины при нагружении.

Прогиб балки – расстояние, на которое перемещается центр тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к оси балки в ненагруженном состоянии.

Статически неопределимая система (СНС) – это система, у которой для определения неизвестных реакций и внутренних силовых факторов недостаточно уравнений равновесия.

Упругая линия (изогнутая ось) – ось балки в нагруженном состоянии.

Угол поворота – угол, на который поворачивается сечение по отношению к своему первоначальному положению.

### 2.1. План, научно-теоретическое содержание модуля 2

Название тем и изучаемых вопросов	Научно-теоретическое содержание	Прим. и т. д.
<p><b>Растяжение и сжатие</b></p> <p><i>Лекция 1</i></p> <p>1. Напряжения в поперечных сечениях стержня. 2. Осевые перемещения поперечных сечений стержня. Жесткость при растяжении и сжатии. 3. Условие прочности и жесткости. 4. Три вида инженерных расчетов (проверочный, проектировочный, определение допускаемой нагрузки).</p> <p><i>Лекция 2</i></p> <p>1. Статически неопределимые системы (СНС) при растяжении (сжатии). 2. Порядок расчета СНС. Составление уравнений перемещений. 3. Начальные (монтажные) и температурные напряжения. Свойства СНС.</p>	<p>[1, с. 198–200]</p> <p>[1, с. 200–202]</p> <p>[1, с. 202–203]</p> <p>[1, с. 203–204]</p> <p>[1, с. 249]</p> <p>[1, с. 250–259]</p> <p>[1, с. 259–272]</p>	<p>Лекции – 4 часа</p>

Название тем и изучаемых вопросов	Научно-теоретическое содержание	Прим. и т. д.
<p><b>Изгиб</b></p> <p><i>Лекция 3</i></p> <p>1. Виды изгибов. 2. Напряжения в поперечных сечениях балки при чистом изгибе. 3. Нормальные и касательные напряжения в поперечных сечениях балки при поперечном изгибе.</p> <p><i>Лекция 4</i></p> <p>1. Расчет балок на прочность при изгибе. 2. Условие прочности. 3. Материалы и рациональные формы поперечных сечений балок при изгибе.</p> <p><i>Лекция 5</i></p> <p>1. Перемещения при изгибе. 2. Дифференциальное уравнение упругой линии балки. 3. Метод начальных параметров. Пример.</p>	<p>[1, с. 296–297]</p> <p>[1, с. 297–302]</p> <p>[1, с. 302–311]</p> <p>[1, с. 315–316]</p> <p>[1, с. 317–318]</p> <p>[1, с. 328–332]</p> <p>[1, с. 342–343]</p> <p>[1, с. 344–349]</p> <p>[1, с. 349–359]</p>	<p>Лекции – 6 часов</p>
<p><b>Кручение</b></p> <p><i>Лекция 6</i></p> <p>1. Напряжения в поперечных сечениях прямого круглого вала, углы закручивания. 2. Жесткость при кручении. 3. Главные напряжения, разрушение круглых образцов из пластичных, хрупких материалов и дерева. Допускаемые напряжения.</p>	<p>[1, с. 231–235]</p> <p>[1, с. 235–236]</p> <p>[1, с. 236–237]</p>	<p>Лекции – 2 часа</p>

Название тем и изучаемых вопросов	Научно-теоретическое содержание	Прим. и т. д.
4. Условия прочности и жесткости при кручении.	[1, с. 238–239]	
<b>Сдвиг</b>		Изучается самостоятельно
Практические расчеты на срез и смятие	[1, с. 273–286]	

### 2.1.1. Вопросы для самоконтроля

#### *Растяжение и сжатие*

Какой вид нагружения называется растяжением и сжатием?

Как определяются напряжения в поперечном сечении бруса при растяжении и сжатии?

Как распределяются напряжения в поперечном сечении бруса при растяжении и сжатии?

Как определить перемещение поперечного сечения бруса при растяжении и сжатии?

Запишите условие прочности при растяжении и сжатии.

Запишите условие жесткости при растяжении и сжатии.

В чем заключается сущность проверочного расчета?

В чем заключается сущность конструкторского или проектного расчета?

В чем заключается сущность расчета грузоподъемности или несущей способности?

Какие системы называются статически неопределимыми?

Что называется степенью статической неопределимости системы?

Как составляются дополнительные уравнения перемещений?

#### *Изгиб*

Перечислите виды изгибов.

Какой вид нагружения называется чистым изгибом?

Какой вид нагружения называется поперечным изгибом?

Какой вид нагружения называется прямым изгибом?

Какой вид нагружения называется косым изгибом?

Какой слой продольных волокон бруса, испытывающего изгиб, называют нейтральным слоем?

Что такое нейтральная линия?

Как определяется кривизна оси балки?

Запишите формулу для определения нормальных напряжений в поперечном сечении бруса при чистом изгибе.

Как изменяются нормальные напряжения по высоте поперечного сечения при чистом изгибе?

Где располагаются опасные точки в поперечном сечении бруса при чистом изгибе?

В каких точках поперечного сечения бруса при чистом изгибе возникают наибольшие нормальные напряжения?

Запишите формулу для определения кривизны нейтрального слоя при изгибе.

Запишите формулу для определения касательных напряжений в сечении бруса при поперечном изгибе (формула Журавского).

В каких точках сечения бруса при поперечном изгибе возникают наибольшие касательные напряжения?

Что называется осевым моментом сопротивления поперечного сечения?

Чему равен осевой момент сопротивления для прямоугольного поперечного сечения?

Чему равен осевой момент сопротивления для круглого поперечного сечения?

Чему равен осевой момент сопротивления для поперечного сечения в виде кольца?

Запишите условие прочности при изгибе.

Какая форма поперечного сечения будет рациональной для балки, изготовленной из пластичного материала?

Какая форма поперечного сечения будет рациональной для балки, изготовленной из хрупкого материала?

Каким критерием характеризуется рациональность поперечного сечения бруса при изгибе?

Что такое «прогиб сечения балки»?

Что такое «угол поворота сечения балки»?

В каком случае прогиб сечения балки считается положительным, а в каком – отрицательным?

В каком случае угол поворота сечения балки считается положительным, а в каком – отрицательным?

Запишите приближенное дифференциальное уравнение упругой линии балки.

Где располагается начало координат при определении перемещений в балке по методу начальных параметров?

Запишите уравнение углов поворота сечений балки.

Запишите уравнение упругой линии или уравнение прогибов сечений балки.

### **Кручение**

Какой вид нагружения называется кручением?

Чему равны касательные напряжения в поперечном сечении круглого вала?

Как распределяются касательные напряжения в круглом поперечном сечении вала при кручении?

Где располагаются опасные точки в круглом поперечном сечении вала при кручении?

В каких точках круглого поперечного сечения вала при кручении возникают наибольшие касательные напряжения?

Как определяется угол закручивания сечений круглого вала?

Запишите условие прочности при кручении круглого вала.

Запишите условие жесткости при кручении круглого вала.

Что называется полярным моментом сопротивления круглого поперечного сечения?

Чему равен полярный момент сопротивления для круглого поперечного сечения?

Чему равен полярный момент сопротивления для поперечного сечения в виде кольца?

Как определить крутящий момент в сечениях вала, если известна передаваемая мощность и частота вращения?

## **2.2. Учебно-методические материалы к лабораторным работам**

Название лабораторной работы	Учебно-методические материалы
1. Определение главных деформаций и главных напряжений при изгибе	[6, с. 57–68]
2. Определение модуля упругости стали методом изгиба балки	[5, с. 63–67]
3. Определение модуля сдвига для стали	[6, с. 50–56]
4. Определение главных деформаций и главных напряжений при кручении	[5, с. 123–127]

## **2.3. Учебно-методические материалы к практическим занятиям**

### **2.3.1. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении и сжатии**

#### ***Теоретические предпосылки и примеры к практическому занятию***

*Напряжения в поперечных сечениях стержня.* Приложение внешней нагрузки к стержню может осуществляться различными способами (рис. 2.1, а, б, в). Однако во всех случаях равнодействующая внешних сил, приложенных к стержню, будет направлена вдоль его оси, и расчетная схема для всех способов будет одинаковой (рис. 2.1, г). Продольная сила  $N$  определяется при помощи метода сечений и в любом сечении стержня будет равна силе  $F$ .

Сжатие отличается от растяжения формально только знаком силы  $N$ . При растяжении продольная сила  $N$  направлена от сечения и считается положительной (рис. 2.2, а), при сжатии продольная сила  $N$  направлена к сечению и считается отрицательной (рис. 2.2, б).

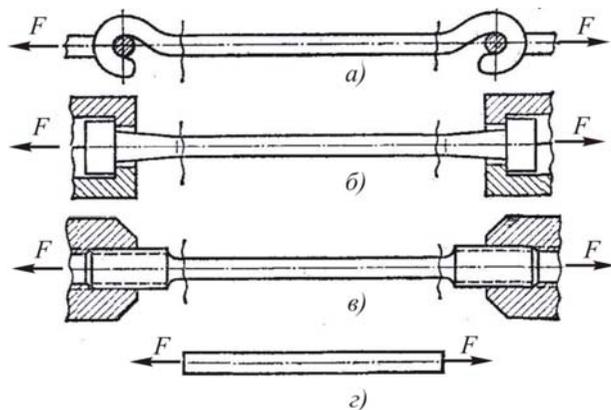


Рис. 2.1. Некоторые способы передачи усилия к стержню

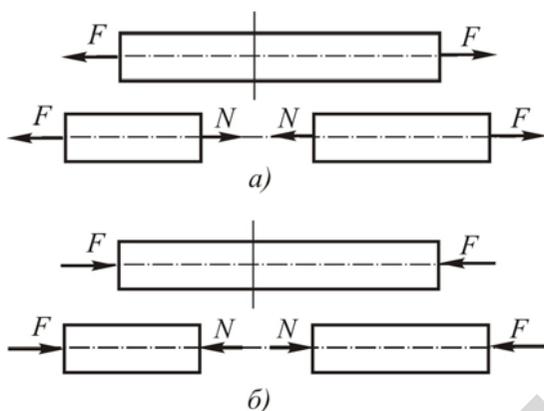


Рис. 2.2. Направление продольной силы при растяжении и сжатии

При анализе внутренних сил сохраняется одинаковый подход при растяжении и сжатии. Вместе с тем между этими типами нагружения могут возникать и качественные различия, например:

- при изучении процессов разрушения материалов;
- при исследовании поведения длинных и тонких стержней, для которых сжатие сопровождается, как правило, изгибом.

Продольная сила  $N$  является равнодействующей внутренних сил в сечении (рис. 2.3, а).

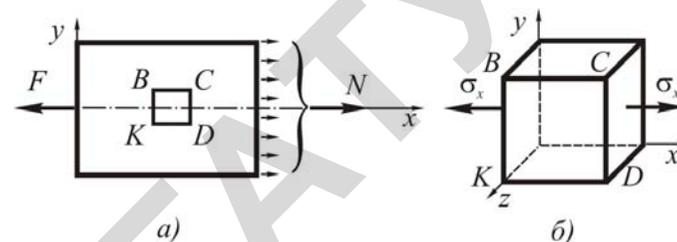


Рис. 2.3. Равнодействующая внутренних сил и напряжения в поперечном сечении стержня

Естественно предположить, что для однородного стержня внутренние силы распределены по сечению равномерно. Тогда нормальное напряжение для всех точек сечения будет одинаковым и равным:

$$\sigma_x = \sigma = \frac{N}{A}, \quad (2.1)$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения стержня.

В частном случае, когда стержень растягивается одинаковыми силами  $F$ , приложенными к концам стержня,  $N = F$ , и формулу (2.1) можно записать в виде:

$$\sigma_x = \sigma = \frac{F}{A}. \quad (2.2)$$

При растяжении нормальные напряжения считаются положительными, при сжатии – отрицательными. В формулу (2.1) продольная сила должна подставляться со своим знаком.

Если из растянутого стержня выделить сечениями, параллельными и перпендикулярными оси, элемент  $BCDE$  (рис. 2.3, б), так как на гранях, перпендикулярных к оси, действуют только нормальные напряжения, а на гранях, параллельных оси, напряжения отсутствуют, то грани элемента будут главными площадками, а напряжение  $\sigma_x$  – главным напряжением. Следовательно, материал при растяжении (сжатии) испытывает линейное напряженное состояние.

Нормальные и касательные напряжения на площадках, наклоненных к оси стержня, определяются по формулам (1.11), (1.12) для линейного напряженного состояния. Сечение, в котором действует максимальное напряжение, называется опасным. Для стержня постоянного поперечного сечения опасным будет сечение, в котором возникает наибольшая продольная сила.

*Перемещения сечений стержня.* Выделим из стержня переменного сечения, нагруженного силой  $F$  (рис. 2.4, а), бесконечно малый элемент длиной  $dx$  (рис. 2.4, б). На его торцевых сечениях будут действовать одинаковые нормальные силы  $N_x$ , от которых элемент удлинится на величину  $\Delta dx$ .

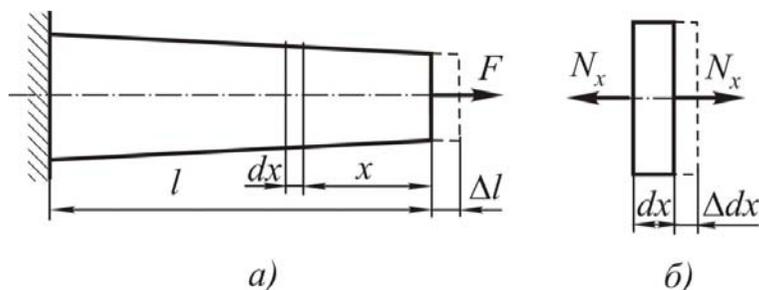


Рис. 2.4. Растяжение стержня переменного сечения

Относительная продольная деформация элемента равна

$$\varepsilon_x = \Delta dx / dx. \quad (2.3)$$

Абсолютное удлинение стержня (перемещение конечного сечения) на длине  $l$  будет равно:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_x}{EA_x} dx, \quad (2.4)$$

где  $E$  – модуль продольной упругости материала;

$N_x$  – нормальная сила в сечении  $x$ ;

$A_x$  – площадь поперечного сечения стержня в сечении  $x$ , являющаяся функцией координаты  $x$ .

При постоянных значениях  $N$  и  $A$  формула (2.4) принимает вид:

$$\Delta l = \frac{N l}{E A}. \quad (2.5)$$

Если стержень растягивается единственной силой  $F$ , приложенной к торцевому сечению стержня, то  $N = F$  и формулу (2.5) можно представить в виде:

$$\Delta l = \frac{F l}{E A}. \quad (2.6)$$

Из формулы (2.6) следует, что при постоянных нагрузке  $F$  и длине  $l$  удлинение стержня обратно пропорционально произведению  $EA$ . Чем это произведение больше, тем удлинение будет меньше, и наоборот. Поэтому произведение  $EA$  называется жесткостью поперечного сечения стержня при растяжении (сжатии).

Удлинение ступенчатых стержней, а также приложение внешних сил в разных точках продольной оси стержня, определяется как сумма удлинений отдельных участков:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i}. \quad (2.7)$$

где  $N_i$ ,  $l_i$ ,  $E_i$ ,  $A_i$  – соответственно продольная сила, длина, модуль упругости и площадь поперечного сечения  $i$ -го участка.

*Условие прочности и жесткости при растяжении и сжатии.* Условие прочности стержня заключается в том, что максимальное расчетное напряжение в стержне не должно превышать значения допускаемого напряжения, и записывается в виде следующего неравенства:

$$\sigma_{x \max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma], \quad (2.8)$$

где  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение для заданного материала.

Условие жесткости стержня заключается в том, что расчетное удлинение стержня не должно превышать допускаемого удлинения, и записывается в виде неравенства:

$$\Delta l_{\max} \leq [\Delta l], \quad (2.9)$$

или

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i l}{E_i A_i} \leq [\Delta l], \quad (2.10)$$

где  $[\Delta l]$  – допускаемое удлинение, задаваемое техническими условиями.

Условия прочности и жесткости позволяют выполнять три вида инженерных расчетов.

*Конструкторский, или проектный расчет.* Сущность конструкторского расчета заключается в том, что при известных значениях внешней нагрузки, длины стержня и механических характеристик материала  $E$ ,  $[\sigma]$ ,  $[\Delta l]$  требуется подобрать размеры поперечного сечения:

$$A = \frac{N_{\max}}{[\sigma]}; \quad (2.11)$$

$$A = \frac{N_{\max} l}{E[\Delta l]}. \quad (2.12)$$

Из двух значений площади поперечного сечения стержня, полученных по формулам (2.11) и (2.12), выбирается большее.

*Проверочный расчет.* Сущность проверочного расчета заключается в том, что при известных величинах, входящих в формулы (2.8) и (2.10), требуется проверить выполнение условий прочности и жесткости. В этом расчете допускается перегрузка до 5 %.

*Расчет грузоподъемности, или несущей способности.* Сущность расчета грузоподъемности заключается в том, что при известных

геометрических размерах стержня, характеристиках материала требуется определить допускаемую нагрузку:

$$F_{\max} \leq A[\sigma]; \quad (2.13)$$

$$F_{\max} \leq \frac{EA[\Delta l]}{l}. \quad (2.14)$$

Из двух значений допускаемой нагрузки, найденных по формулам (2.13) и (2.14), принимается меньшее.

На практике, в зависимости от решаемой задачи, расчеты могут проводиться только по условию прочности или по условию жесткости.

*Пример 2.1.* Конструкция, состоящая из шарнирно соединенных стального  $BD$  и алюминиевого  $CD$  стержней, нагружена силой  $F$ , как показано на рис. 2.5, а. Принимая  $F = 50$  кН,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $[\sigma]_{\text{ст}} = 160$  МПа,  $[\sigma]_{\text{ал}} = 60$  МПа,  $E_{\text{ст}} = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $E_{\text{ал}} = 0,7 \cdot 10^5$  МПа, определить диаметры стального  $d_{\text{ст}}$  и алюминиевого  $d_{\text{ал}}$  стержней.

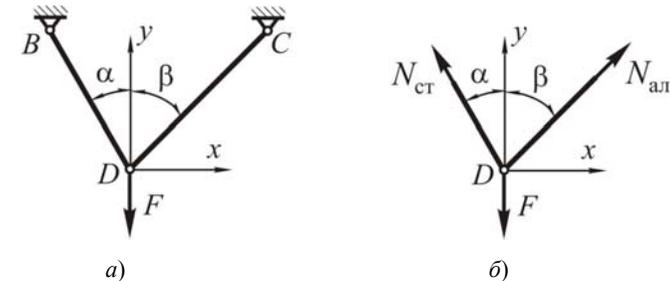


Рис. 2.5. Расчетная схема конструкции и узла D

*Решение.* Элементы этой конструкции при нагружении испытывают растяжение. Используя условие прочности при растяжении, можно получить формулы для нахождения диаметров стального  $d_{\text{ст}}$  и алюминиевого  $d_{\text{ал}}$  стержней:

$$d_{\text{ст}} = \sqrt{\frac{4N_{\text{ст}}}{\pi[\sigma]_{\text{ст}}}}; \quad d_{\text{ал}} = \sqrt{\frac{4N_{\text{ал}}}{\pi[\sigma]_{\text{ал}}}},$$

где  $N_{\text{ст}}$ ,  $N_{\text{ал}}$  – продольные силы в поперечных сечениях, соответственно, стального и алюминиевого стержней.

Для нахождения продольных сил  $N_{ст}$  и  $N_{ал}$  вырезаем из конструкции узел  $D$  (рис. 2.5, б) и составляем уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0. \quad -N_{ст}\sin\alpha + N_{ал}\sin\beta = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \quad -N_{ст}\cos\alpha + N_{ал}\cos\beta - F = 0.$$

Решаем полученные уравнения относительно нормальных сил  $N_{ст}$  и  $N_{ал}$ :

$$N_{ал} = \frac{F}{\frac{\sin\beta \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha} = \frac{50}{0,707 \cdot 0,866 + 0,5} = 25,9 \text{ кН};$$

$$N_{ст} = N_{ал} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 25,9 \cdot \frac{0,707}{0,5} = 36,6 \text{ кН}.$$

Определяем диаметры стержней:

$$d_{ст} = \sqrt{\frac{4 \cdot 36000}{3,14 \cdot 160}} = 17 \text{ мм};$$

$$d_{ал} = \sqrt{\frac{4 \cdot 25900}{3,14 \cdot 160}} = 23 \text{ мм}.$$

*Пример 2.2.* Стальной стержень нагружен силами  $F_1, F_2, F_3$ , как показано на рис. 2.6, а. Проверить прочность стержня и найти его абсолютное удлинение, если площадь поперечного сечения равна  $300 \text{ мм}^2$ .

*Решение.* Стержень испытывает растяжение (сжатие), так как внешние силы приложены вдоль оси. Для проверки прочности стержня воспользуемся условием:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma].$$

Строим для заданного стержня эпюру продольных сил, из которой примем значение  $N_{\max}$ . Используя уравнение равновесия  $\sum F_{ix} = 0$ , определяем реакцию в жесткой заделке  $B_x$ :

$$-F_1 + F_2 + F_3 - B_x = 0.$$

Отсюда

$$B_x = 15 \text{ кН}.$$

В пределах каждого расчетного участка стержня проводим сечущие плоскости, записываем уравнение продольной силы, находим ее и показываем на эпюре (рис. 2.6, б).

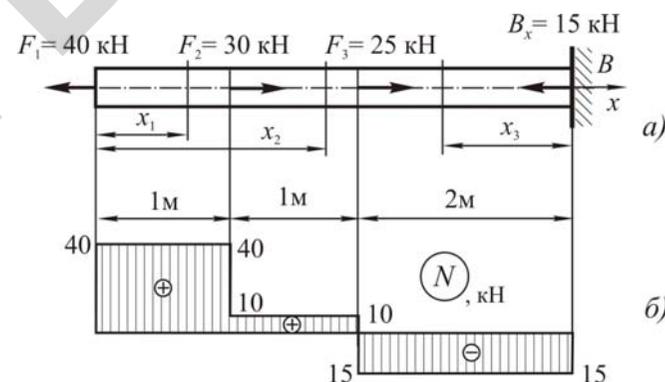


Рис. 2.6. Схема нагружения стержня и эпюра продольных сил

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}$ ):

$$N_{x1} = F_1 = \text{const} = 40 \text{ кН}.$$

Участок II ( $1 \text{ м} \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$ ):

$$N_{x2} = F_1 - F_2 = \text{const} = 40 - 30 = 10 \text{ кН}.$$

Участок III ( $0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м}$ ):

$$N_{x3} = -B_x = \text{const} = -15 \text{ кН}.$$

Из построенной эпюры продольных сил принимаем  $N_{\max} = 40$  кН и проверяем прочность стержня:

$$\sigma_{\max} = \frac{40000}{300} = 133,3 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Следовательно, прочность стержня обеспечена.

Определяем абсолютное удлинение стержня по формуле:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i} = \\ &= \frac{40000 \cdot 1000 + 10000 \cdot 1000 + (-15000) \cdot 2000}{2 \cdot 10^5 \cdot 300} = 0,33 \text{ мм}. \end{aligned}$$

### 2.3.2. Статически неопределимые задачи при растяжении (сжатии)

#### *Рекомендуемая методика решения статически неопределимых задач при растяжении (сжатии)*

1. Уточнить расчетную схему, то есть показать все действующие силы, включая и реакции опор.
2. Составить для системы все возможные независимые уравнения равновесия.
3. Найти степень статической неопределимости системы как разность между числом неизвестных сил и числом составленных уравнений равновесия (по п. 2).
4. Составить дополнительно к уравнениям равновесия уравнения перемещений, используя принцип совместности деформаций всех элементов системы или всех частей элемента конструкции.
5. Представить, используя закон Гука, уравнения перемещений в уравнения между силовыми факторами.
6. Решить полученную систему уравнений (п. 2 и п. 5), определив неизвестные силы.
7. Выполнить требуемый условием задачи расчет как для статически определимой системы.

### *Теоретические предпосылки и примеры к практическому занятию*

*Расчет статически неопределимых систем.* У статически неопределимой системы (СНС) количество наложенных связей больше числа независимых уравнений равновесия. Разность между числом наложенных на систему связей и числом независимых уравнений равновесия называется степенью статической неопределимости системы.

Практически степень статической неопределимости указывает количество недостающих уравнений. Система может быть сколько угодно раз статически неопределимой. Для решения таких систем или для раскрытия статической неопределимости необходимо составлять дополнительные уравнения, называемые уравнениями перемещений, или уравнениями совместности деформаций.

При сборке СНС из-за неточности изготовления элементов в них возникают монтажные напряжения. Иногда эти напряжения создаются специально, чтобы повысить прочностные характеристики детали из материала, который по-разному сопротивляется растяжению и сжатию. Так, в строительстве широко применяют предварительно напряженный бетон. Стальная арматура растягивается с определенным усилием и в таком состоянии заливается бетоном. После затвердевания бетона арматура разгружается, и в бетоне возникают напряжения сжатия. Несущая способность конструкций, испытывающих растяжение, увеличивается до 30 %.

Начальные напряжения зависят от размеров поперечных сечений элементов, свойств материалов и величины неувязки в размерах. Начальные или монтажные напряжения возникают только в статически неопределимых системах.

При определении усилий и напряжений в элементах стержневых систем часто необходимо учитывать деформации, связанные с температурным воздействием. Из курса физики известно, что при изменении температуры длина стержней изменяется: при повышении температуры увеличивается, при понижении – уменьшается. Температурные удлинения стержней, если им препятствуют реакции, будут вызывать возникновение внутренних сил, а следовательно, и напряжений, связанных с температурным воздействием.

В общем случае температурные напряжения определяются не только свойствами материала и разностью температур, но существенно зависят от размеров и площади поперечного сечения стержней, при этом, в зависимости от геометрических размеров, напряжения в стержнях могут менять знак.

Температурные напряжения могут достигать больших значений, однако для оценки их опасности важна не величина предела прочности, а деформация материала при разрушении. Поэтому температурные напряжения наиболее опасны для хрупких материалов, разрушение которых происходит при малых деформациях. У стали деформации при разрушении очень велики, поэтому температурные напряжения для стальных конструкций не опасны. У такого хрупкого материала, как стекло, деформация при разрыве незначительна, поэтому стекло очень чувствительно к резкому изменению температуры, так как температурные удлинения могут легко достигнуть значения предельных деформаций при разрыве.

**Пример 2.3.** Стержень, показанный на рис. 2.7, а, нагружается силой  $F$ . Принимая  $a = 400$  мм,  $A = 2000$  мм<sup>2</sup>,  $F = 250$  кН,  $\Delta = 0,2$  мм, построить для стержня эпюры продольных сил  $N$ , напряжений  $\sigma$  и перемещений  $\Delta l$ .

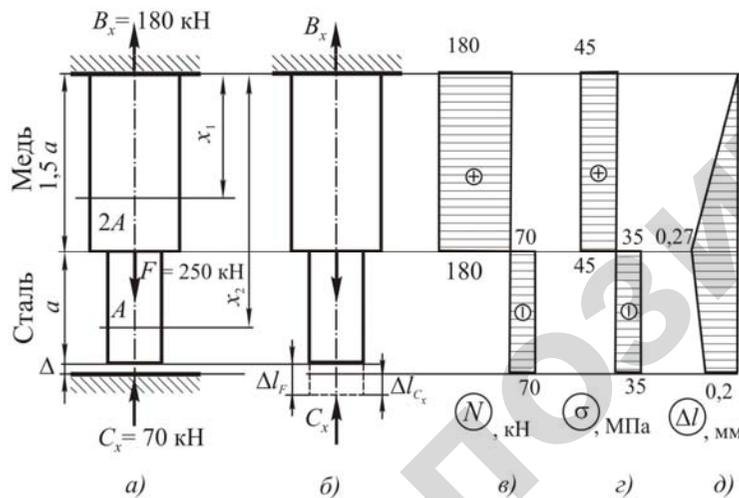


Рис. 2.7. Расчетная схема стержня и эпюры продольных сил, напряжений и перемещений

**Решение.** Представим, что под действием силы  $F$  в результате удлинения стержня зазор  $\Delta$  будет выбран (нижнее сечение стержня дойдет до опоры  $C$ ) и в опоре  $C$  возникнет реакция  $C_x$ . Составим для стержня уравнение равновесия:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0. \quad C_x - F + B_x = 0.$$

Отбросим опору  $C$ , покажем составляющие перемещения нижнего сечения стержня и составим уравнение перемещений. Как показывает расчетная схема, перемещение нижнего сечения стержня  $\Delta l_C$  должно быть равно зазору  $\Delta$ :

$$\Delta l_C = \Delta l_F + \Delta l_{C_x} = \Delta,$$

где  $\Delta l_F$  – перемещение под действием силы  $F$ ;

$\Delta l_{C_x}$  – перемещение под действием силы  $C_x$ .

Используя закон Гука, раскрываем в последнем уравнении составляющие перемещений и получим:

$$\frac{F \cdot 1,5a}{E_M \cdot 2A} + \left( -\frac{C_x a}{E_C A} - \frac{C_x \cdot 1,5a}{E_M \cdot 2A} \right) = \Delta.$$

Выражаем отсюда неизвестную силу – реакцию  $C_x$  и находим ее значение:

$$C_x = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{Fa}{E_M A} - \Delta}{a \left( \frac{3}{4E_M A} + \frac{1}{E_C A} \right)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{250 \cdot 000 \cdot 400}{10^5 \cdot 2 \cdot 000} - 0,2}{400 \left( \frac{3}{4 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 000} + \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 000} \right)} = 70 \text{ кН}.$$

Из уравнения равновесия находим реакцию  $B_x$ :

$$B_x = F - C_x = 250 - 70 = 180 \text{ кН}.$$

Строим для стержня эпюру продольных сил. В пределах каждого расчетного участка стержня проводим секущие плоскости, записываем уравнение продольной силы, находим ее и показываем на эпюре (рис. 2.7, в).

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq a$ ):

$$N_{x1} = B_x = \text{const} = 180 \text{ кН.}$$

Участок II ( $a \leq x_2 \leq 1,5 a$ ):

$$N_{x2} = B_x - F = \text{const} = 180 - 250 = -70 \text{ кН.}$$

Находим в поперечных сечениях стержня на каждом участке нормальные напряжения и показываем их на эпюре (рис. 2.7, з).

$$\sigma_I = \frac{N_I}{2A} = \frac{180000}{2 \cdot 2000} = 45 \text{ МПа. } \sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A} = \frac{70000}{2000} = 35 \text{ МПа.}$$

Строим для стержня эпюру перемещений. Используя проведенные в пределах каждого расчетного участка стержня секущие плоскости, записываем уравнения перемещений, находим перемещения и показываем их на эпюре (рис. 2.7, д).

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq 1,5a$ ):

$$\Delta l_{x1} = \frac{N_{x1} x_1}{E_M \cdot 2A};$$

$$x_1 = 0; \quad \Delta l_{x1} = 0;$$

$$x_1 = 1,5a = 600 \text{ мм}; \quad \Delta l_{x1} = \frac{180000 \cdot 600}{10^5 \cdot 2 \cdot 2000} = 0,27 \text{ мм.}$$

Участок II ( $1,5a \leq x_2 \leq 2,5 a$ ):

$$\Delta l_{x2} = 0,27 + \frac{N_{x2}(x_2 - 1,5a)}{E_c A};$$

$$x_2 = 1,5a = 600 \text{ мм}; \quad \Delta l_{x2} = 0,27 \text{ мм};$$

$$x_2 = 2,5a = 1000 \text{ мм}; \quad \Delta l_{x2} = 0,27 + \frac{-70000(1000 - 600)}{2 \cdot 10^5 \cdot 2000} = 0,2 \text{ мм.}$$

Перемещение нижнего сечения стержня оказалось равным величине зазора в 0,2 мм, что указывает на правильность выполненных расчетов.

*Пример 2.4.* Конструкция состоит из трех стержней с одинаковой жесткостью поперечных сечений  $EA$  и нагружена силой  $F$  (рис. 2.8). Определить усилия в стержнях 1, 2, 3.

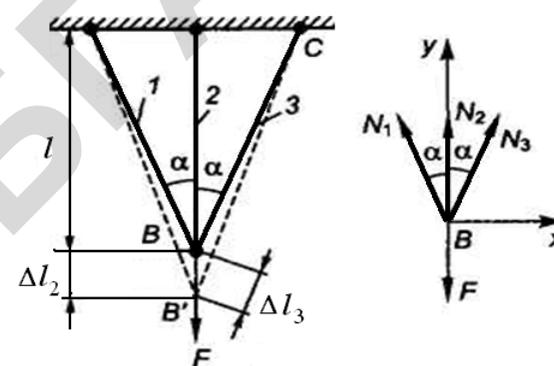


Рис. 2.8. Трехстержневая конструкция

*Решение.* Мысленно вырежем узел  $B$ , введем внутренние силы  $N_1, N_2, N_3$  и составим уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0. \quad -N_1 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha = 0;$$

отсюда  $N_1 = N_3$ ;

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \quad 2N_3 \cos \alpha + N_2 - F = 0. \quad (1a)$$

Система один раз статически неопределима. Для решения необходимо составить дополнительно одно уравнение перемещений. Под действием силы  $F$  узел  $B$  переместится вниз и займет положение  $B'$ . Тогда отрезок  $BB'$  является полным удлинением  $\Delta l_2$  стержня 2. Удлинение стержня 3 получим, проведя дугу окружности из центра  $C$  радиусом, равным длине стержня 3. Так как удли-

нения весьма малы, дугу можно заменить перпендикуляром, опущенным из  $B$  на прямую  $CB'$ , а также принять, что угол изменился незначительно. Тогда

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 \cos \alpha. \quad (16)$$

Это выражение представляет уравнение перемещений, отражающее условие, что при деформации системы длины стержней должны измениться так, чтобы стержни не разрушились и не разъединились в узловой точке  $B$ .

Выразим удлинение стержней через усилия по закону Гука:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA}; \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l}{EA \cos \alpha}. \quad (1в)$$

Подставив (1в) в (16), получим:

$$N_3 = N_2 \cos^2 \alpha. \quad (1г)$$

Решая (1г) совместно с уравнениями равновесия (1а), найдем усилия в стержнях заданной конструкции:

$$N_1 = N_3 = \frac{F \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}; \quad N_2 = \frac{F}{1 + 2 \cos^3 \alpha}.$$

**Пример 2.5.** Стержень, показанный на рис. 2.9, а, нагревается на  $50^\circ\text{C}$ . Принимая  $a = 0,2$  м,  $A = 1000$  мм<sup>2</sup>, определить напряжения в поперечных сечениях медной  $\sigma_m$  и стальной  $\sigma_c$  частей стержня.

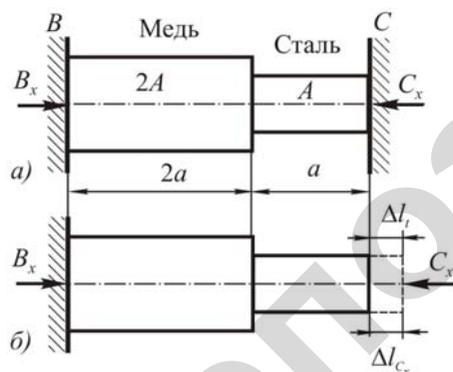


Рис. 2.9. Расчетная схема составного ступенчатого стержня

**Решение.** В результате повышения температуры длина стержня будет стремиться увеличиться, и в заделках  $B$  и  $C$  возникнут реакции  $B_x$  и  $C_x$ . Составляем для стержня уравнение равновесия:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0. \quad B_x - C_x = 0.$$

Отбросим опору  $C$ , покажем составляющие перемещения правого сечения стержня (рис. 2.9, б) и составим уравнение перемещений. Из расчетной схемы видно, что перемещение этого сечения стержня  $\Delta l_C$  должно быть равно 0:

$$\Delta l_C = \Delta l_t + \Delta l_{C_x} = \Delta,$$

где  $\Delta l_t$  – перемещение в результате повышения температуры;

$\Delta l_{C_x}$  – перемещение под действием силы  $C_x$ .

Раскрываем в этом уравнении составляющие перемещений и получим:

$$2\alpha_m \Delta t + a\alpha_c \Delta t + \left( -\frac{C_x a}{E_c A} - \frac{C_x \cdot 2a}{E_m \cdot 2A} \right) = 0,$$

где  $\alpha_m$ ,  $\alpha_c$  – коэффициент линейного расширения, соответственно, для меди и стали ( $\alpha_m = 17 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ ;  $\alpha_c = 12,5 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ ).

Реакция опоры  $C$  будет равна:

$$C_x = \frac{(2\alpha_m + \alpha_c)\Delta t E_c E_m A}{E_m + E_c} = \frac{(2 \cdot 17 \cdot 10^{-6} + 12,5 \cdot 10^{-6}) \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^5 \cdot 1000}{10^5 + 2 \cdot 10^5} = 155\,000 \text{ Н.}$$

Продольная сила в поперечных сечениях стержня равна:

$$N = B_x = C_x = 155\,000 \text{ Н.}$$

Определяем напряжения в поперечных сечениях медной и стальной частей стержня:

$$\sigma_m = \frac{N}{2A} = \frac{155000}{2 \cdot 1000} = 77,5 \text{ МПа}; \quad \sigma_c = \frac{N}{A} = \frac{155000}{1000} = 150 \text{ МПа}.$$

### 2.3.3. Расчеты на прочность при изгибе

#### Теоретические предпосылки и примеры к практическому занятию

*Напряжения в поперечных сечениях балки при чистом изгибе.*  
Примем балку, имеющую продольную плоскость симметрии, в которой действуют все внешние силы. В этом случае балка будет работать в условиях плоского изгиба, то есть без коробления или скручивания. Представим наиболее простой случай изгиба – чистый изгиб (рис. 2.10). В поперечных сечениях балки действует только изгибающий момент, причем одинаковой величины, равной  $m$ .

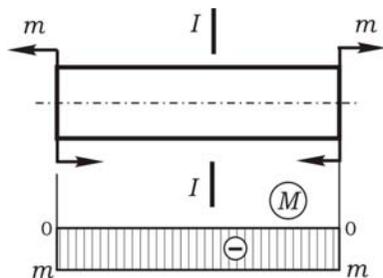


Рис. 2.10. Чистый изгиб бруса

Воспользуемся методом сечений, проведем секущую плоскость  $I-I$  и представим оставшуюся левую часть балки (рис. 2.11). Проведем в правом торцевом сечении координатные оси:  $y$  – в продольной плоскости симметрии балки;  $x$  – вдоль нейтрального слоя в продольной плоскости симметрии балки (слой продольных волокон, который не изменяет своей длины при нагружении, называется нейтральным слоем);  $z$  – совпадает с нейтральной линией (линия,

образованная от пересечения нейтрального слоя с поперечным сечением). При чистом изгибе оси  $y$  и  $z$  являются главными центральными осями инерции поперечного сечения. В окрестности произвольной точки  $B$  с координатами  $z$  и  $y$  выделим элементарную площадку  $dA$ , в пределах которой действует сила, равная  $dN = \sigma dA$ .

При чистом изгибе нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения бруса, расположенной на расстоянии  $y$  от нейтральной оси, определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y, \quad (2.15)$$

где  $M_z$  – изгибающий момент в поперечном сечении бруса относительно оси  $z$ ;

$I_z$  – момент инерции сечения относительно оси  $z$ .

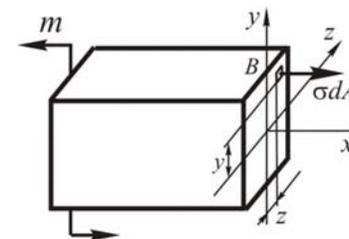


Рис. 2.11. Оставшаяся левая часть балки

Анализ формулы (2.15) показывает:

– напряжение в произвольной точке поперечного сечения балки прямо пропорционально расстоянию от нейтральной оси до этой точки;

– напряжения, изменяясь по высоте сечения, остаются постоянными по его ширине.

Эпюра нормальных напряжений, возникающих в поперечном сечении балки при чистом изгибе, представлена на рис. 2.12, из которого видно, что, максимальные напряжения при изгибе возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_{\max}. \quad (2.16)$$

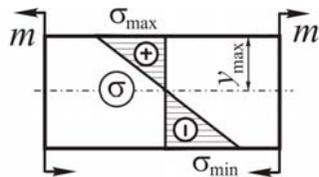


Рис. 2.12. Эпюра нормальных напряжений

Таким образом, наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в поперечном сечении балки возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси.

При чистом изгибе ось балки искривляется в продольной плоскости симметрии, перпендикулярной нейтральному слою. Зависимость кривизны оси балки от изгибающего момента представляется формулой:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (2.17)$$

Произведение  $EI_z$  называется жесткостью поперечного сечения балки при изгибе. При  $EI_z = \text{const}$  и  $M_z = \text{const}$  ось балки искривляется по дуге окружности радиусом  $\rho$ . Как видно из формулы (2.17), кривизна оси балки прямо пропорциональна изгибающему моменту  $M_z$  и обратно пропорциональна жесткости поперечного сечения балки  $EI_z$ .

*Примечание.* Формулы нормальных напряжений (2.16) и кривизны оси (2.17) для чистого изгиба балки будут давать точные значения и при поперечном изгибе. Если поперечная сила изменяется вдоль оси бруса, то формула (2.17) для нормальных напряжений дает незначительную погрешность, величина которой имеет порядок  $h/l$  по сравнению с 1 (где  $h$  – высота поперечного сечения,  $l$  – длина бруса).

*Касательные напряжения при поперечном изгибе.* Представим консольно закрепленную балку, испытывающую поперечный изгиб (рис. 2.13).

Рассмотрим некоторое сечение  $A-A$ . Полное касательное напряжение  $\tau$  вблизи контура направлено по касательной к контуру сечения. Касательное напряжение в каждой точке сечения можно разложить на две составляющие –  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$ . Методами теории упругости доказывается, что в большинстве случаев

составляющие  $\tau_{xz}$  оказывают на прочность значительно меньшее влияние, чем  $\tau_{xy}$ . Определим касательные напряжения при поперечном изгибе, предположив, что  $\tau \approx \tau_{xy}$ . Вычислить эти напряжения проще через парные им касательные напряжения, возникающие в продольных сечениях бруса.

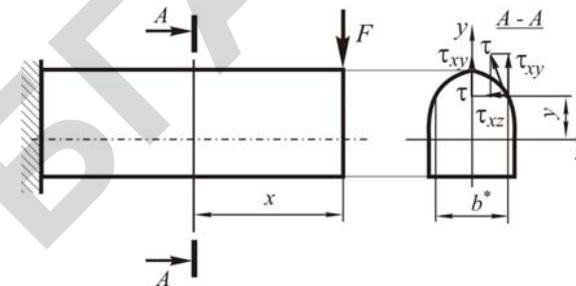


Рис. 2.13. Поперечный изгиб балки

Принимая в первом приближении равномерное распределение касательных напряжений по ширине сечения, представим формулу для их вычисления:

$$\tau = \frac{Q_y S_z^*}{I_z b^*}, \quad (2.18)$$

где  $S_z^*$  – статический момент относительно оси  $z$  части площади поперечного сечения бруса, расположенной выше или ниже уровня  $y$ , в точках которого вычисляются касательные напряжения;

$I_z$  – момент инерции относительно оси  $z$  площади всего поперечного сечения бруса;

$b^*$  – ширина поперечного сечения бруса на уровне  $y$ , в точках которого вычисляются касательные напряжения.

Формула для определения касательных напряжений (2.18) была выведена (и носит его имя) русским ученым и инженером Д. И. Журавским, который первым провел исследование касательных напряжений при поперечном изгибе.

Используя формулу Журавского, получаем формулу для вычисления касательных напряжений в балке прямоугольного поперечно-

го сечения (2.19) в точках, расположенных на расстоянии  $y$  от нейтральной оси, то есть от оси  $z$  (рис. 2.14).

$$\tau = \frac{6 Q_y}{b h^3} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (2.19)$$

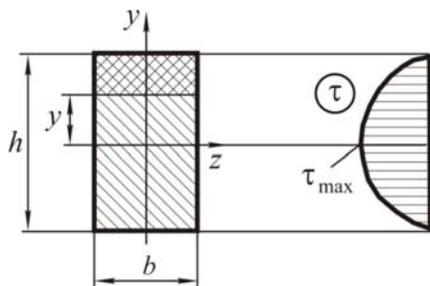


Рис. 2.14. Поперечное сечение балки и эпюра касательных напряжений

По формуле (2.19) построена эпюра касательных напряжений (рис. 2.14), из которой видно, что в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси ( $y = \frac{h}{2}$ ), касательное напряжение равно нулю, а в точках на нейтральной оси ( $y = 0$ ) касательное напряжение имеет максимальное значение, равное

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{b h}. \quad (2.20)$$

*Расчет элементов конструкций на прочность при изгибе.* При поперечном изгибе максимальные нормальные напряжения в поперечном сечении бруса существенно превышают максимальные касательные напряжения ( $\sigma_{\max}$  относится к  $\tau_{\max}$  примерно как длина бруса к высоте поперечного сечения). Также известно, что в точках поперечного сечения бруса, наиболее удаленных от нейтральной оси,  $\sigma = \sigma_{\max}$ ,  $\tau = 0$ , а на нейтральной оси —  $\tau = \tau_{\max}$ ,  $\sigma = 0$ . В этой связи расчет нетонкостенных балок на

прочность при поперечном изгибе производится по нормальным напряжениям. При выполнении этого расчета принимается во внимание, что опасными точками являются точки, наиболее удаленные от нейтральной оси, и находятся они в сечении балки, в котором действует максимальный изгибающий момент. Тогда условие прочности при изгибе имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} \cdot y_{\max} \leq [\sigma]. \quad (2.21)$$

Отношение  $\frac{I_z}{y_{\max}}$  обозначается через  $W_z$  и называется осевым моментом сопротивления. Тогда условие прочности при изгибе можно представить соотношением:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (2.22)$$

При использовании для балок хрупкого материала, который, как известно, при сжатии сопротивляется лучше, чем при растяжении ( $[\sigma_c] > [\sigma_p]$ ), поперечное сечение должно быть несимметричным относительно нейтральной оси, причем большая часть его площади располагается в растянутой зоне (рис. 2.15). Условие прочности в данном случае представиться двумя соотношениями:

$$\sigma_{\min} = \sigma_{(1)} = \frac{M_{\max}}{I_z} \cdot y_1 \leq [\sigma_c], \quad (2.23)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{(2)} = \frac{M_{\max}}{I_z} \cdot y_2 \leq [\sigma_p], \quad (2.24)$$

где  $\sigma_{(1)}$  и  $\sigma_{(2)}$  — нормальные напряжения в точках, соответственно, 1 и 2;  $[\sigma_p]$  и  $[\sigma_c]$  — допускаемое напряжение, соответственно, на растяжение и на сжатие.

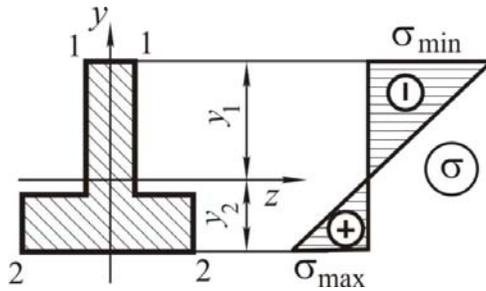


Рис. 2.15. Несимметричное поперечное сечение бруса

**Пример 2.6.** Балка трубчатого прямоугольного сечения пролетом  $l = 4$  м, шарнирно опертая по концам, несет равномерно распределенную нагрузку  $p = 30$  кН/м (рис. 2.16, а). Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и определить величину наибольших нормальных напряжений в опасном сечении балки, а также величину напряжений в точке  $D$  ( $y_D = 60$  мм) того же сечения, если размеры его равны  $h = 200$  мм;  $b = 120$  мм;  $t = 40$  мм.

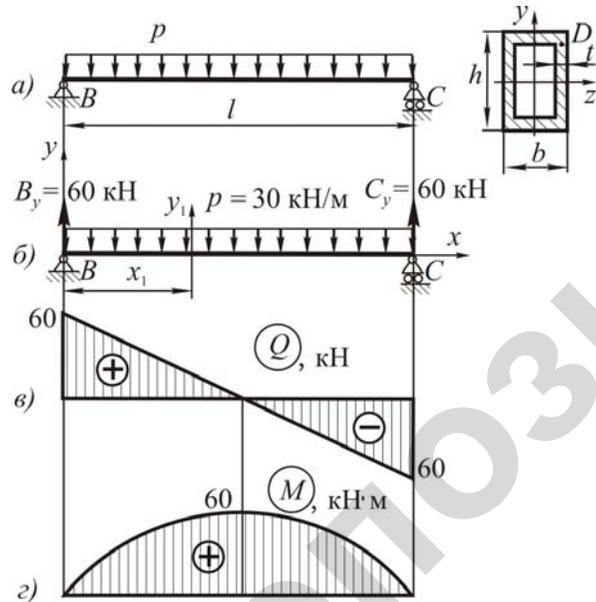


Рис. 2.16. Расчетная схема, поперечное сечение и эпюры  $Q$  и  $M$  для балки

**Решение.** Показываем вертикальные реакции в опорах (рис. 2.16, б). Они будут равны:

$$B_y = C_y = \frac{pl}{2} = \frac{30 \cdot 4}{2} = 60 \text{ кН.}$$

Проводим произвольное поперечное сечение в пределах расчетного участка на расстоянии  $x_1$  от крайней левой точки  $B$ . Отбрасывая мысленно правую часть балки и рассматривая силы, действующие на оставшуюся часть, составляем уравнения  $Q_{x_1}$  и  $M_{x_1}$  для участка  $0 \leq x_1 \leq 4$  м:

$$Q_{x_1} = B_y - p x_1;$$

$$M_{x_1} = B_y x_1 - p \cdot \frac{x_1^2}{2}.$$

На данном участке поперечная сила представляет линейную функцию, а изгибающий момент изменяется по квадратичной функции. Задавая  $x_1$  значения, соответствующие границам участка, находим  $Q_{x_1}$  и  $M_{x_1}$ :

$$x_1 = 0: Q_{x_1} = 60 \text{ кН}, M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 4 \text{ м}: Q_{x_1} = 60 - 30 \cdot 4 = -60 \text{ кН}, M_{x_1} = 0.$$

Экстремальное значение изгибающий момент принимает при

$$x_1 = 2 \text{ м}: M_{x_1} = 60 \cdot 2 - 30 \cdot \frac{2^2}{2} = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По вычисленным величинам строим для балки эпюры  $Q$  и  $M$  (рис. 2.16, в, г).

Величину наибольших нормальных напряжений в опасном сечении балки определяем по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} \cdot y_{\max}.$$

Найдем осевой момент инерции сечения  $I_z$ :

$$I_z = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b-2t)(h-2t)^3}{12} =$$

$$= \frac{120 \cdot 200^3}{12} - \frac{(120 - 2 \cdot 40)(200 - 2 \cdot 40)^3}{12} = 74\,240\,000 \text{ мм}^4.$$

Тогда

$$\sigma_{\max} = \frac{60 \cdot 10^6}{74\,240\,000} \cdot 100 = 80,8 \text{ МПа}.$$

Нормальные напряжения в точке  $D$  опасного сечения балки будут равны:

$$\sigma_D = \frac{60 \cdot 10^6}{74\,240\,000} \cdot 60 = 48,5 \text{ МПа}.$$

*Пример 2.7.* Балка таврового профиля длиной  $l = 1,4$  м, зашеченная одним концом, нагружена в вертикальной плоскости силой  $F$ , приложенной на другом конце (рис. 2.17). Определить величину силы  $F$ , значение минимальных нормальных напряжений  $\sigma_{\min}$ , если максимальные нормальные напряжения в опасном сечении  $\sigma_{\max} = 42,4$  МПа. Построить эпюру касательных напряжений по высоте поперечного сечения балки.

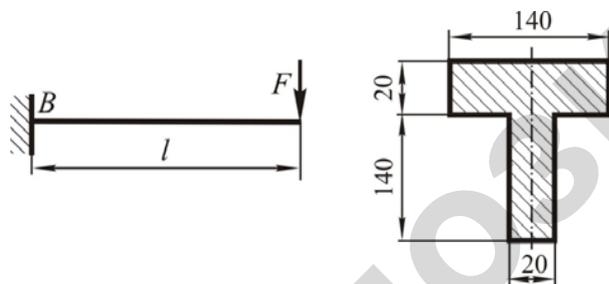


Рис. 2.17. Балка таврового профиля

*Решение.* Максимальные нормальные напряжения возникают в растянутой части опасного сечения балки в точках, удаленных от

нейтральной оси на расстояние  $y_{\max}$  (рис. 2.18, а), и определяются по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} \cdot y_{\max}.$$

Опасное сечение балки находится у заделки, в котором возникает наибольший изгибающий момент, равный  $M_{\max} = Fl$ .

При решении задачи потребуется найти момент инерции относительно главной центральной оси  $z$  ( $I_z$ ). Сначала установим положение центра тяжести заданного сечения, определив ординату  $y_c$  по отношению к вспомогательной оси  $z_0$  (рис. 2.18, а). Сечение представим в виде двух прямоугольников, площади которых равны  $A_1 = A_2 = 140 \cdot 20 = 2800 \text{ мм}^2$ .

$$y_c = \frac{S_{z_0}}{A} = \frac{\sum(A_i y_{ci})}{\sum A_i} = \frac{2800 \cdot 150 + 2800 \cdot 70}{2800 + 2800} = 110 \text{ мм}.$$

Определим моменты инерции выделенных прямоугольников относительно собственных главных центральных осей:

$$I_{z_1} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{140 \cdot 20^3}{12} = 93\,333 \text{ мм}^4;$$

$$I_{z_2} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{20 \cdot 140^3}{12} = 4\,573\,333 \text{ мм}^4.$$

Тогда

$$I_z = \sum(I_{zi} + A_i a_i^2) = 93\,333 + 2800 \cdot 40^2 + 4\,573\,333 + 2800 \cdot 40^2 = 13\,626\,666 \text{ мм}^4.$$

Используя формулу для  $\sigma_{\max}$ , выразим и определим величину силы  $F$ , приложенной к балке:

$$F = \frac{M_{\max}}{l} = \frac{\sigma_{\max} I_z}{l y_{\max}} = \frac{42,4 \cdot 13\,626\,666}{1400 \cdot 50} = 8254 \text{ Н}.$$

Минимальные нормальные напряжения возникают в сжатой части опасного сечения балки в точках, удаленных от нейтральной оси на расстояние  $y_{\min}$  (рис. 2.18, а), и определяются по формуле:

$$\sigma_{\min} = -\frac{M_{\max}}{I_z} \cdot y_{\min} = -\frac{8254 \cdot 1400}{13\,626\,666} \cdot 110 = -93,3 \text{ МПа.}$$

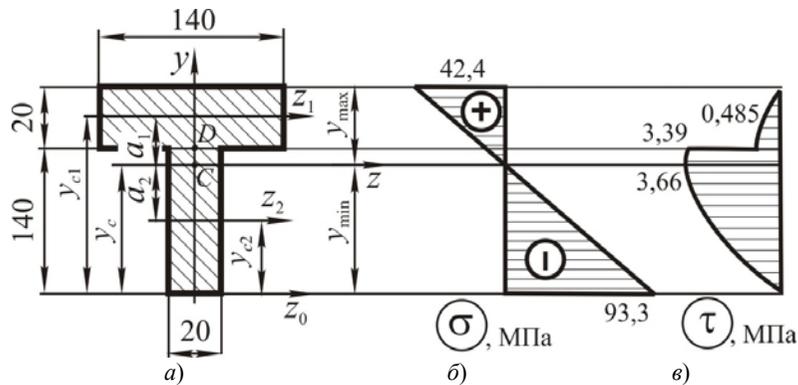


Рис. 2.18. Поперечное сечение балки и эпюры  $\sigma$  и  $\tau$

По значениям  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  строим эпюру нормальных напряжений по высоте сечения (рис. 2.18, б).

Для построения эпюры касательных напряжений определим значения  $\tau$  в характерных точках сечения, используя формулу Журавского. Касательные напряжения в точках, принадлежащих нейтральной оси  $\tau_c$ , зависят от статического момента относительно оси  $z$  части площади поперечного сечения, расположенной по одну сторону от этой оси (примем площадь ниже оси  $z$ ).

$$S_z^* = A^* y_c^* = 20 \cdot y_c \cdot \frac{y_c}{2} = 20 \cdot 110 \cdot \frac{110}{2} = 121\,000 \text{ мм}^3.$$

Тогда

$$\tau_c = \tau_{\max} = \frac{Q S_z^*}{I_z b^*} = \frac{8254 \cdot 121\,000}{13\,626\,666} = 3,66 \text{ МПа.}$$

Определим касательные напряжения в точках, бесконечно близко расположенных от точки  $D$  (рис. 2.18, а) ( $\tau_D'$  – в точке на ширине сечения  $b^* = 140$  мм;  $\tau_D''$  – в точке на ширине сечения  $b^* = 20$  мм). Статический момент относительно оси  $z$  части площади поперечного сечения, расположенной ниже уровня точки  $D$ .

$$S_z^* = A^* y_c^* = A^* a_2 = (20 \cdot 140) \cdot 40 = 112\,000 \text{ мм}^3.$$

$$\tau_D' = \frac{8254 \cdot 112\,000}{13\,626\,666 \cdot 140} = 0,485 \text{ МПа.}$$

$$\tau_D'' = \frac{8254 \cdot 112\,000}{13\,626\,666 \cdot 20} = 3,39 \text{ МПа.}$$

По полученным значениям  $\tau$  строим эпюру касательных напряжений по высоте сечения, которая будет ограничиваться параболами (рис. 2.18, в).

## 2.4. Задания по управляемой самостоятельной работе студентов и рекомендации по их выполнению

### 2.4.1. Прямой поперечный изгиб

Выполнить ИДЗ «Прямой поперечный изгиб» [12, с. 34, п. 2, 3], в котором:

– для заданных трех балок и двух рам подобрать размеры поперечного сечения;

– для первой и третьей балок определить прогибы на границах расчетных участков и построить приближенную изогнутую ось (упругую линию), для третьей балки определить углы поворота сечений на опорах.

Исходными данными для выполнения задания являются: выданный преподавателем вариант (номер схемы [12, рис. 1.20], номер строки [12, табл. 1.2]), построенные эпюры  $Q$  и  $M$  из п. 1.4.2.

Форма контроля – проверка письменно выполненного ИДЗ.

### Теоретические предпосылки к заданию

Подбор размеров поперечного сечения балок, элементов рам. Подбор размеров поперечных сечений элементов конструкций, испытывающих изгиб, производится с использованием соответствующего условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Осевой момент сопротивления  $W_z$  определяется как отношение осевого момента инерции к расстоянию от нейтральной оси до наиболее удаленной точки поперечного сечения:

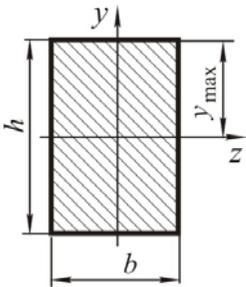
$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}.$$

Значения осевых моментов сопротивления для стандартных прокатных профилей принимаются из соответствующих таблиц сортамента.

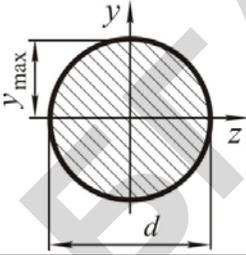
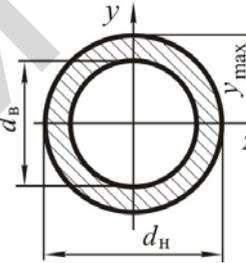
Осевой момент сопротивления для некоторых симметричных сечений определяется по формулам, представленным в таблице.

Таблица

Некоторые геометрические характеристики сечений

Форма и размеры поперечного сечения	Геометрические характеристики сечения
	$I_z = \frac{b h^3}{12},$ $y_{\max} = \frac{h}{2},$ $W_z = \frac{b h^2}{6}$

Продолжение таблицы

Форма и размеры поперечного сечения	Геометрические характеристики сечения
	$I_z = \frac{\pi d^4}{64},$ $y_{\max} = \frac{d}{2},$ $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$
	$I_z = \frac{\pi d_n^4}{64} \cdot (1 - c^4),$ $c = \frac{d_b}{d_n},$ $y_{\max} = \frac{d_n}{2},$ $W_z = \frac{\pi d_n^3}{32} \cdot (1 - c^4)$

**Метод начальных параметров.** Для определения перемещений в балках существует метод, не требующий непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси, который называется методом Коши–Крылова, или методом начальных параметров.

Под действием внешних сил, расположенных в продольной плоскости симметрии прямой балки, ее ось искривляется в этой же плоскости; при этом точки оси балки перемещаются.

Под перемещением, или прогибом, сечения ( $y$ ) понимается перемещение его центра тяжести по направлению, перпендикулярному к оси балки в ненагруженном состоянии, а под углом поворота сечения ( $\theta$ ) – углом, на который поворачивается сечение по отношению к своему положению в ненагруженном состоянии.

Прогиб считается положительным, если перемещение центра тяжести поперечного сечения при нагружении балки происходит вверх, отрицательным – если вниз. Угол поворота сечения считается положительным, если поперечное сечение поворачивается при нагружении балки против хода часовой стрелки, отрицательным – если по ходу часовой стрелки.

Представим левую часть балки длиной  $x$ , к которой приложены пара сил с моментом  $m$ , сосредоточенная сила  $F$  и распределенная нагрузка постоянной интенсивности  $p$  (рис. 2.19). Выберем начало координат в крайнем левом сечении балки, ось  $y$  направим вверх, ось  $x$  – вправо. Тогда прогиб и угол поворота сечения балки в начале координат будут обозначены соответственно  $y_0$  и  $\theta_0$ , а определяемые прогиб и угол поворота сечения на расстоянии  $x$  от начала координат – соответственно  $y_x$  и  $\theta_x$ .

В сечении балки на расстоянии  $x$  от начала координат действует изгибающий момент, равный:

$$M_{(x)} = m + F(x-b) + p \cdot \frac{(x-c)^2}{2}. \quad (2.25)$$

Тогда дифференциальное уравнение упругой линии балки представится в следующем виде:

$$EI_z \cdot \frac{d^2 y_x}{dx^2} = m + F(x-b) + p \cdot \frac{(x-c)^2}{2}. \quad (2.26)$$

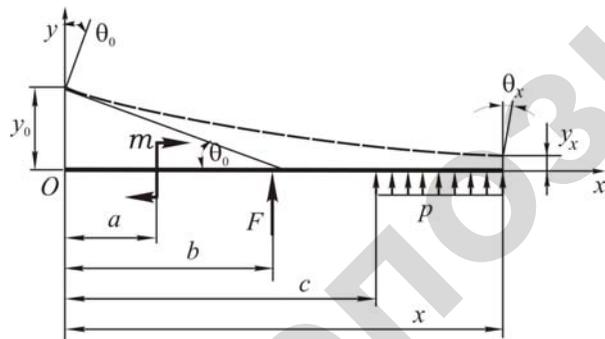


Рис. 2.19. Схема нагружения балки

Последовательно интегрируя уравнение (2.26) два раза и подставляя пределы интегрирования, получаем формулы для определения угла поворота (2.27) и прогиба (2.28) сечения балки, расположенного на расстоянии  $x$  от начала координат:

$$EI_z \theta_x = EI_z \theta_0 + m(x-a) + F \cdot \frac{(x-b)^2}{2} + p \cdot \frac{(x-c)^3}{6}. \quad (2.27)$$

$$EI_z y_x = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x + m \cdot \frac{(x-a)^2}{2} + F \cdot \frac{(x-b)^3}{6} + p \cdot \frac{(x-c)^4}{24}. \quad (2.28)$$

Если к балке слева от сечения, где определяется перемещение, приложено число  $n_i$  пар сил с моментами  $m_i$ , число  $n_j$  сосредоточенных сил  $F_j$  и число  $n_k$  распределенных нагрузок постоянной интенсивности  $q_k$ , то формулы для определения углов поворота  $\theta_x$  и прогибов  $y_x$  сечений балки, расположенных на расстоянии  $x$  от начала координат, соответственно можно записать в виде:

$$EI_z \theta_x = EI_z \theta_0 + \sum_{i=1}^{n_i} m_i \cdot (x-a_i) + \sum_{j=1}^{n_j} F_j \cdot \frac{(x-b_j)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n_k} p_k \cdot \frac{(x-c_k)^3}{6}. \quad (2.29)$$

$$EI_z y_x = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x + \sum_{i=1}^{n_i} m_i \cdot \frac{(x-a_i)^2}{2} + \sum_{j=1}^{n_j} F_j \cdot \frac{(x-b_j)^3}{6} + \sum_{k=1}^{n_k} p_k \cdot \frac{(x-c_k)^4}{24}, \quad (2.30)$$

где  $y_0, \theta_0$  – соответственно прогиб и угол поворота сечения в начале координат, или начальные параметры;

$a_i, b_j, c_k$  – расстояние от начала координат до, соответственно, пары сил с моментом  $m_i$ , сосредоточенной силы  $F_j$ , начала распределенной нагрузки интенсивностью  $p_k$ .

При нахождении перемещений с помощью метода начальных параметров, в котором используются формулы (2.29, 2.30), нужно иметь ввиду следующие обстоятельства:

– в формулы (2.29, 2.30) подставляются значения внешних нагрузок, расположенных только слева от сечения, в котором определяются перемещения;

– если распределенная нагрузка не доходит до сечения, в котором определяется перемещение (рис. 2.20, а), то ее необходимо продлить вправо до сечения и ввести компенсирующую распределенную нагрузку той же интенсивности, но противоположно направленную (рис. 2.20, б);

– в правой части формул (2.29, 2.30) знак перед каждым слагаемым, содержащим внешнюю нагрузку ( $m$ ,  $F$ ,  $p$ ), ставится таким же, как и знак изгибающего момента от соответствующей внешней нагрузки.

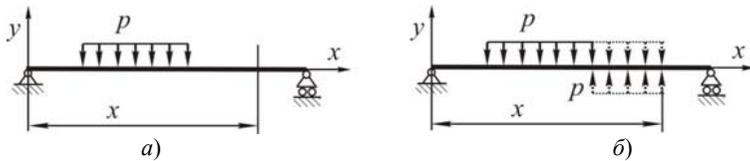


Рис. 2.20. Учет распределенной нагрузки

Начальные параметры  $y_0$  и  $\theta_0$  определяются из граничных условий, вытекающих из схемы закрепления балки, которую можно свести к одному из следующих случаев.

1. Балка жестко закреплена одним концом:

а) жесткая заделка слева (рис. 2.21) –  $y_0 = 0$  и  $\theta_0 = 0$ ;

б) жесткая заделка справа (рис. 2.22) –  $y_0 \neq 0$  и  $\theta_0 \neq 0$ . Если балку зеркально отобразить относительно жесткой заделки (рис. 2.23), то окажется, что  $y_0 = 0$  и  $\theta_0 = 0$ .

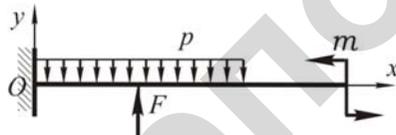


Рис. 2.21. Жесткая заделка слева

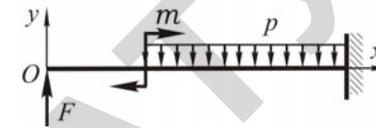


Рис. 2.22. Жесткая заделка справа

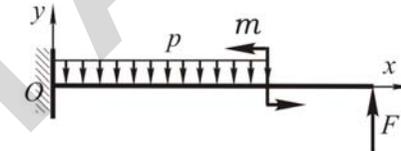


Рис. 2.23. Зеркальное отображение балки

2. Балка закреплена с помощью неподвижного и подвижного шарниров:

а) один из шарниров приходится на крайнее левое сечение балки (рис. 2.24) –  $y_0 = 0$  и  $\theta_0 \neq 0$ .

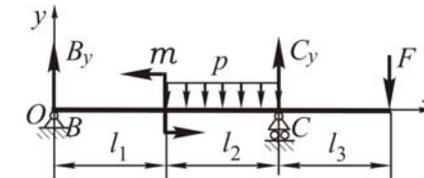


Рис. 2.24. Шарнир в крайнем левом сечении балки

Для определения начального параметра  $\theta_0$  используем граничное условие, вытекающее из расчетной схемы балки (рис. 2.24) – прогиб в сечении C равен нулю ( $y_C = 0$ ). Составляем уравнение прогиба для сечения C в виде:

$$EI_z y_C = EI_z \theta_0 x_C - m \cdot \frac{(x_C - l_1)^2}{2} + B_y \cdot \frac{(x_C)^3}{6} - p \cdot \frac{(x_C - l_1)^4}{24} = 0. \quad (2.40)$$

Подставляя в уравнение (2.40)  $x_C = l_1 + l_2$ , находим величину  $EI_z \theta_0$  и начальный параметр  $\theta_0$ ;

б) балка справа и слева имеет консоль (рис. 2.25) –  $y_0 \neq 0$  и  $\theta_0 \neq 0$ .

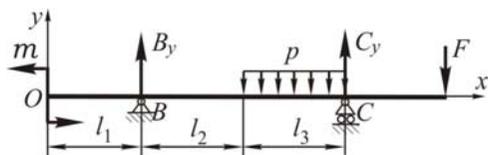


Рис. 2.25. Балка с консолями слева и справа

Для определения начальных параметров  $y_0$  и  $\theta_0$  используем граничные условия, вытекающие из расчетной схемы балки (рис. 2.25) – прогибы в сечениях  $B$  и  $C$  равны нулю ( $y_B = 0$ ;  $y_C = 0$ ). Составим уравнения прогибов для сечений  $B$  и  $C$  в виде:

$$EI_z y_B = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x_B - m \cdot \frac{x_B^2}{2} = 0, \quad (2.31)$$

$$EI_z y_C = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x_C - m \cdot \frac{x_C^2}{2} + B_y \cdot \frac{(x_C - l_1)^3}{6} - p \cdot \frac{(x_C - l_1 - l_2)^4}{24} = 0 \quad (2.32)$$

Подставляя  $x_B = l_1$  и  $x_C = (l_1 + l_2 + l_3)$  и решая систему уравнений (2.31), (2.32), находим величины  $EI_z y_0$  и  $EI_z \theta_0$ , а затем, если нужно, – начальные параметры  $y_0$  и  $\theta_0$ .

### Методические указания для выполнения задания

1. Вычертить в масштабе:
  - расчетную схему балки (рамы), указать ее размеры, величины внешних нагрузок, реакций опор;
  - эпюры внутренних силовых факторов эпюры  $Q$  и  $M$ , принимая их из п. 1.4.2.
2. Используя условие прочности при изгибе, в каждой задаче подобрать размеры поперечного сечения, исходя из заданной формы и соотношения размеров.

3. Применяя метод начальных параметров для первой и третьей балок, определить прогибы на границах расчетных участков и построить приближенную изогнутую ось (упругую линию), для третьей балки определить углы поворота сечений на опорах.

### Образец выполнения задания для балок (схемы 1–3 в ИДЗ)

Для заданной балки, схема которой и эпюры  $Q$  и  $M$  представлены на рис. 2.26, подобрать номер профиля стального двутавра при  $[\sigma] = 160$  МПа. Используя метод начальных параметров, определить прогибы в сечениях, приходящихся на границы расчетных участков, и углы поворота сечений, приходящихся на опоры, построить приближенную изогнутую ось (упругую линию) балки. Весом балки пренебречь.

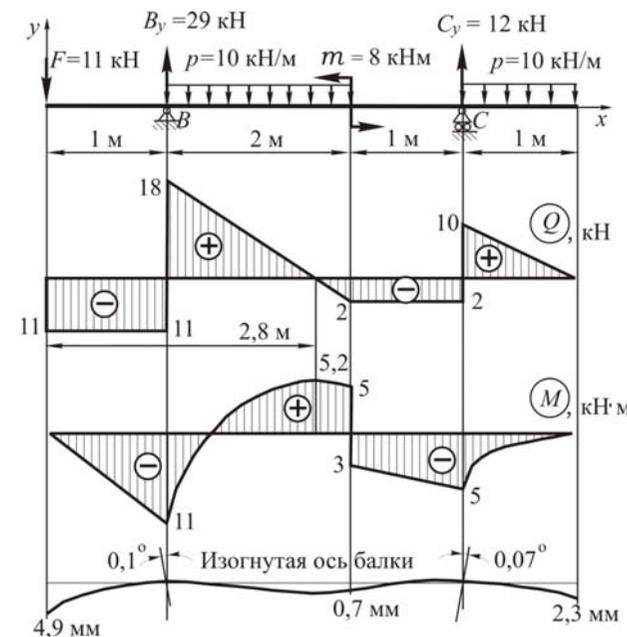


Рис. 2.26. Расчетные схемы, эпюры поперечных сил, изгибающих моментов в сечениях балки и изогнутая ось балки

*Решение.* Подбираем поперечное сечение для заданной балки в виде двутавра (рис. 2.27). Для этого из условия прочности при изгибе находим величину требуемого осевого момента сопротивления поперечного сечения:

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{11 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 6,88 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 68,8 \text{ см}^3.$$

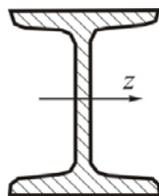


Рис. 2.27. Поперечное сечение балки – двутавр

По сортаменту прокатной стали (сталь горячекатаная, балки двутавровые, ГОСТ 8239–89) и  $W_z = 68,8 \text{ см}^3$  выбираем двутавр № 14, у которого  $W_z = 81,7 \text{ см}^3$ ,  $I_z = 572 \text{ см}^4$ .

Определяем перемещения, возникающие в сечениях балки. Для этого используем метод начальных параметров. Выберем начало координат в крайнем левом сечении балки, ось  $y$  направим вверх, ось  $x$  – вправо (см. рис. 2.26). Для определения начальных параметров  $y_0$  и  $\theta_0$  используем граничные условия, вытекающие из расчетной схемы балки, прогибы в сечениях  $B$  и  $C$  равны нулю ( $y_B = 0$ ;  $y_C = 0$ ). Принимая во внимание формулу (2.30), составим уравнения прогибов для сечений  $B$  и  $C$  в виде:

$$EI_z y_B = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x_B - F \cdot \frac{x_B^3}{6} = 0,$$

$$EI_z y_C = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x_C - m \cdot \frac{(x_C - 3)^2}{2} - F \cdot \frac{x_C^3}{6} + B_y \cdot \frac{(x_C - 1)^3}{6} - p \cdot \frac{(x_C - 1)^4}{24} + p \cdot \frac{(x_C - 3)^4}{24} = 0.$$

Подставляя в уравнения прогибов для сечений  $B$  и  $C$   $x_B = 1 \text{ м}$ ,  $x_C = 4 \text{ м}$  и значения внешних нагрузок, получаем:

$$EI_z y_B = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \cdot 1 - 11 \frac{1^3}{6} = 0,$$

$$EI_z y_C = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \cdot 4 - 8 \cdot \frac{(4-3)^2}{2} - 11 \cdot \frac{4^3}{6} + 29 \cdot \frac{(4-1)^3}{6} - 10 \cdot \frac{(4-1)^4}{24} + 10 \cdot \frac{(4-3)^4}{24} = 0.$$

После вычислений имеем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} EI_z y_B = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 - 1,183 = 0, \\ EI_z y_C = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \cdot 4 - 24,166 = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим величины  $EI_z y_0$ ,  $EI_z \theta_0$ , а затем и начальные параметры  $y_0$  и  $\theta_0$ :

$$EI_z y_0 = -5,611 \text{ кН} \cdot \text{м}^3,$$

$$EI_z \theta_0 = 7,444 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

$$y_0 = \frac{-5,611 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = -0,0049 \text{ м} = -4,9 \text{ мм},$$

$$\theta_0 = \frac{7,444 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 0,0065 \text{ рад} = 0,37^\circ.$$

Находим прогиб сечения балки на границе второго и третьего участков, когда  $x_D = 3 \text{ м}$ :

$$EI_z y_D = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x_D - F \cdot \frac{x_D^3}{6} + B_y \cdot \frac{(x_D - 1)^3}{6} - p \cdot \frac{(x_D - 1)^4}{24}.$$

$$EI_z y_D = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \cdot 3 - 11 \cdot \frac{3^3}{6} + 29 \cdot \frac{(3-1)^3}{6} - 10 \cdot \frac{(3-1)^4}{24} = -0,779 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

$$y_D = \frac{-0,779 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = -0,0007 \text{ м} = -0,7 \text{ мм}.$$

Находим прогиб правого концевого сечения балки для которого  $x_K = 5 \text{ м}$ :

$$EI_z y_K = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x_K - m \cdot \frac{(x_K - 2)^2}{2} - F \cdot \frac{x_K^3}{6} + B_y \cdot \frac{(x_K - 1)^3}{6} + C_y \cdot \frac{(x_K - 4)^3}{6} - p \cdot \frac{(x_K - 1)^4}{24} + p \cdot \frac{(x_K - 3)^4}{24}.$$

$$EI_z y_K = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \cdot 5 - 8 \cdot \frac{(5-3)^2}{2} - 11 \cdot \frac{5^3}{6} + 29 \cdot \frac{(5-1)^3}{6} + 12 \cdot \frac{(5-4)^3}{6} - 10 \cdot \frac{(5-1)^4}{24} + 10 \cdot \frac{(5-3)^4}{24} = -2,642 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

$$y_K = \frac{-2,642 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = -0,0023 \text{ м} = -2,3 \text{ мм}.$$

Используя формулу (1.21), определяем углы поворота сечений балки, приходящиеся на опоры, для которых  $x_B = 1 \text{ м}$  и  $x_C = 4 \text{ м}$ :

$$EI_z \theta_B = EI_z \theta_0 - F \cdot \frac{x_B^2}{2} = 7,444 - 11 \cdot \frac{1^2}{2} = 1,944 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

$$\theta_B = \frac{1,944 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 0,0017 \text{ рад} = 0,1^\circ.$$

$$EI_z \theta_C = EI_z \theta_0 - m(x_C - 3) - F \cdot \frac{x_C^2}{2} + B_y \cdot \frac{(x_C - 1)^2}{2} - p \cdot \frac{(x_C - 1)^3}{6} + p \cdot \frac{(x_C - 3)^3}{6}.$$

$$EI_z \theta_C = 7,444 - 8(4-3) - 11 \cdot \frac{4^2}{2} + 29 \cdot \frac{(4-1)^2}{2} - 10 \cdot \frac{(4-1)^3}{6} + 10 \cdot \frac{(4-3)^3}{6} = -1,389 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

$$\theta_C = \frac{-1,389 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = -0,0012 \text{ рад} = -0,07^\circ.$$

Принимая во внимание найденные прогибы и углы поворота сечений, строим приближенную упругую линию балки (см. рис. 2.26).

#### Образец выполнения задания для рам (схемы 4, 5 в ИДЗ)

Подобрать размеры поперечного сечения элементов рамы, схема которой и эпюры  $Q$ ,  $M$ ,  $N$  представлены на рис. 2.28, если оно имеет форму кольца (отношение внутреннего диаметра к наружному равно 0,8). Допускаемое напряжение принять равным  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Собственным весом рамы пренебречь.

*Решение.* Подбираем одинаковое поперечное сечение в виде кольца для всех элементов рамы. Для этого, из условия прочности при изгибе, находим величину требуемого осевого момента сопротивления поперечного сечения. Значение наибольшего изгибающего момента принимаем из эпюры (рис. 2.28)  $M_{\max} = 27 \text{ кНм}$ :

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{27 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,69 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

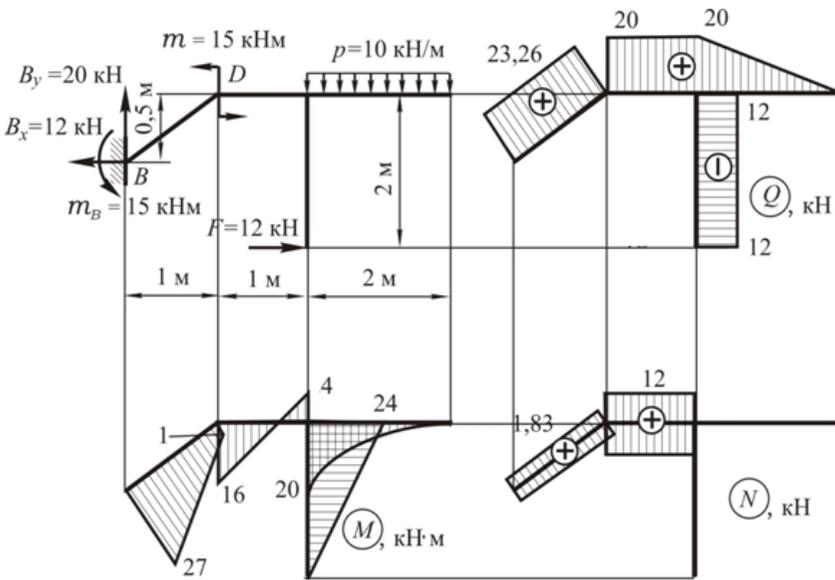


Рис. 2.28. Расчетная схема и эпюры внутренних силовых факторов рамы

Находим размеры поперечного сечения элементов рамы, имеющего форму кольца (рис. 2.29):

$$d_H = \sqrt[3]{\frac{32 W_z}{\pi(1-c^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 169 \cdot 10^{-4}}{3,14(1-0,8^4)}} = 0,079 \text{ м};$$

$$d_B = d_H c = 0,079 \cdot 0,8 = 0,063 \text{ м}.$$

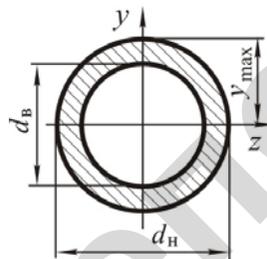


Рис. 2.29. Поперечное сечение элементов рамы – кольцо

В соответствии с нормальными линейными размерами (ГОСТ 6636–69 в ред. 1990 г.) принимаем  $d_H = 80 \text{ мм}$ ,  $d_B = 63 \text{ мм}$ .

## 2.5. Пример разноуровневого задания для контроля результатов изучения содержания модуля

### Уровень III

1. Растяжение и сжатие. Напряжения в поперечных сечениях стержня.

### Уровень II

1. Для данной балки (рис. 2.30) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, определить диаметр  $d$  круглого поперечного сечения, если  $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ .

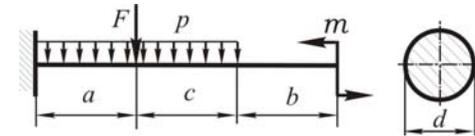


Рис. 2.30. Схема балки

2. Определить величину нормальных напряжений в точке 1 поперечного сечения балки, показанного на рис. 2.31, если в нем действует изгибающий момент  $M_z = 12 \text{ кНм}$ .

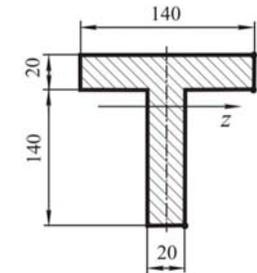


Рис. 2.31. Поперечное сечение балки

### *Уровень I*

1. В каких точках сечения бруса при поперечном изгибе возникают наибольшие касательные напряжения?
2. Чему равен полярный момент сопротивления для поперечного сечения в виде кольца?

### **2.6. Вопросы для контроля результатов изучения содержания модуля 2 (уровень III)**

#### *Растяжение и сжатие*

1. Растяжение и сжатие. Напряжения в поперечных сечениях стержня.
2. Перемещение сечений стержня при растяжении и сжатии.
3. Условие прочности и жесткости при растяжении и сжатии. Три вида расчетов.
4. Статически неопределимые системы при растяжении (сжатии), их расчет.
5. Начальные (монтажные) и температурные напряжения в статически неопределимых системах.

#### *Кручение*

1. Кручение. Напряжения в поперечных сечениях прямого круглого вала, углы закручивания.
2. Главные напряжения при кручении круглого вала. Допускаемые напряжения.
3. Условия прочности и жесткости при кручении круглого вала.
4. Полярный момент сопротивления для круга и кольца.
5. Статически неопределимые системы при кручении, их расчет.

#### *Изгиб*

1. Виды изгибов. Напряжения в поперечных сечениях балки при чистом изгибе.

2. Касательные напряжения при поперечном изгибе, пример.
3. Расчет балок на прочность при изгибе.
4. Рациональные формы поперечных сечений балок при изгибе. Перемещения при изгибе.
5. Дифференциальное уравнение упругой линии балки.
6. Метод начальных параметров.

### Модуль 3. СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В УПРУГОЙ СИСТЕМЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

---

В результате изучения модуля студент должен:

– *знать* (описывать и формулировать) сложные виды нагружения: кривой изгиб, внецентренное растяжение и сжатие, изгиб с кручением круглого вала; уравнение нейтральной линии, положение опасных точек, условие прочности; порядок расчетов на срез и смятие; теоремы о взаимности работ и перемещений; основные и эквивалентные системы статически неопределимых систем; сущность метода сил;

– *уметь* выполнять расчеты на прочность при сложных видах нагружения; рассчитать параметры цилиндрических винтовых пружин; произвести расчет на срез и смятие; раскрыть статическую неопределимость стержневых систем методом сил, определять перемещения интегралами Максвелла–Мора и способом Верещагина.

#### Словарь основных понятий

Внецентренное растяжение и сжатие – вид сложного нагружения, когда в поперечном сечении бруса возникают продольная сила и изгибающий момент.

Изгиб с кручением – вид сложного нагружения, когда в поперечных сечениях бруса одновременно возникают изгибающий и крутящий моменты.

Канонические уравнения – уравнения, которые составляются по определенному закону (канону) и выражают равенство

нулю суммарных перемещений по направлению каждой отброшенной связи.

Кривой изгиб – вид изгиба, когда плоскость действия изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных центральных осей инерции сечения.

Метод сил – способ расчета СНС, когда статически неопределимая система освобождается от дополнительных связей, действия которых заменяются неизвестными силами и моментами.

Нейтральная ось (линия) – линия в поперечном сечении, в точках которой нормальные напряжения и деформации равны нулю.

Основная система – статически определимая, кинематически неизменяемая система, полученная из заданной системы в результате освобождения ее от дополнительных, «лишних», связей и внешних нагрузок.

Сложное нагружение – такой вид нагружения, когда в поперечных сечениях элемента конструкции возникают два и более внутренних силовых фактора.

Статически неопределимая система (СНС) – система, в которой опорные реакции и внутренние силовые факторы в поперечных сечениях стержней не могут быть найдены с помощью уравнений равновесия и метода сечений.

Степень статической неопределимости – число дополнительных, «лишних», связей, наложенных сверх необходимых.

Эквивалентная система – основная система, в которой приложены все внешние нагрузки и неизвестные силы, заменяющие «лишние» связи.

Ядро сечения – область вокруг центра тяжести сечения, обладающая тем свойством, что равнодействующая продольных сил, приложенная в любой точке ядра, вызывает во всем сечении нормальное напряжение одного знака.

### 3.1. План, научно-теоретическое содержание модуля 3

Название тем и изучаемых вопросов	Научно-теоретическое содержание	Прим. и т. д.
<b>Сложное нагружение</b>		
<i>Лекция 1</i>		
1. Особенности расчетов задач на сложное нагружение. Косой изгиб, определение.	[1, с. 404–405]	Лекция – 6 часов
2. Определение нормальных напряжений при косом изгибе. Вывод расчетной формулы и условия прочности.	[1, с. 406–408]	
3. Определение положения нейтральной линии при косом изгибе и особенности подбора сечений и определения полных перемещений при косом изгибе.	[1, с. 409–415]	
<i>Лекция 2</i>		
1. Определение нормальных напряжений при внецентренном растяжении или сжатии.	[1, с. 443–444]	Лекция – 6 часов
2. Уравнение нейтральной линии. Определение положения опасных точек. Условие прочности при внецентренном растяжении или сжатии.	[1, с. 445–446]	
3. Ядро сечения. Особенности расчета элементов конструкций из хрупких материалов.	[1, с. 447–450]	
<i>Лекция 3</i>		
1. Определение крутящего момента и окружного усилия на валу шкива ременной передачи, положения опасного сечения и опасных точек при изгибе с кручением.	[1, с. 424–426]	Лекция – 6 часов
2. Главные напряжения при изгибе с кручением и использование теорий прочности. Вывод условий прочности по III и IV теориям прочности.	[1, с. 427–428]	

Название тем и изучаемых вопросов	Научно-теоретическое содержание	Прим. и т. д.
<b>Перемещения в упругой системе при произвольной нагрузке</b>		
<i>Лекция 4</i>		
1. Потенциальная энергия деформации бруса в общем случае нагружения.	[1, с. 361–367]	Лекция – 4 часа
2. Теоремы о взаимности работ и перемещений. Интегралы Максвелла–Мора.	[1, с. 482–484]	
3. Порядок определения перемещений с помощью интегралов Максвелла–Мора.	[1, с. 373–382]	
<i>Лекция 5</i>		
1. Ограничения для применения способа Верещагина. Вывод формулы для определения перемещений способом Верещагина.	[1, с. 382–384]	Лекция – 4 часа
2. Порядок определения перемещений способом Верещагина.	[1, с. 384–385]	
3. Примеры перемножения эпюр.	[1, с. 386–390]	
<b>Расчет статически неопределимых систем методом сил</b>		
<i>Лекция 6</i>		
1. Понятие о статически неопределимых системах, степень статической неопределимости.	[1, с. 474–479]	Лекция – 4 часа
2. Метод сил.	[1, с. 480–481]	
3. Основная и эквивалентная системы.	[1, с. 481–482]	
<i>Лекция 7</i>		
1. Канонические уравнения метода сил.	[1, с. 484–486]	Лекция – 4 часа
2. Особенности расчета симметричных статически неопределимых систем.	[1, с. 490–494]	
3. Пример расчета СНС методом сил.	[1, с. 495–508]	

### 3.1.1. Вопросы для самоконтроля

#### *Сложное нагружение*

Какой вид нагружения называется сложным?

Какой вид нагружения называется косым изгибом?

Как определяются нормальные напряжения в поперечном сечении бруса при косом изгибе?

Как определяются знаки нормальных напряжений в поперечном сечении балки при косом изгибе?

Как распределяются нормальные напряжения в поперечном сечении бруса при косом изгибе?

Назовите формы поперечных сечений, при которых балка не может испытывать косой изгиб?

Как определяется положение нейтральной оси при косом изгибе?

Где располагаются опасные точки поперечного сечения бруса при косом изгибе?

Как определить перемещение точек оси балки при косом изгибе?

Запишите условие прочности при косом изгибе.

Какой вид нагружения называется внецентренным растяжением, или сжатием?

Как определяются нормальные напряжения в поперечном сечении бруса при внецентренном растяжении (сжатии)?

Как определяются знаки нормальных напряжений в поперечном сечении бруса при внецентренном растяжении (сжатии)?

Как распределяются нормальные напряжения в поперечном сечении бруса при внецентренном растяжении (сжатии)?

Запишите уравнение нейтральной линии при внецентренном растяжении (сжатии)?

Назовите свойства нейтральной линии при внецентренном растяжении (сжатии)?

Где располагаются опасные точки в поперечном сечении бруса при внецентренном растяжении (сжатии)?

Запишите условие прочности при внецентренном растяжении (сжатии).

Какой вид нагружения называется изгибом с кручением?

Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого вала при изгибе с кручением?

Как находится опасное сечение круглого вала при изгибе с кручением?

Как находится приведенный (эквивалентный) момент по третьей теории прочности в поперечном сечении круглого вала при изгибе с кручением?

Как находится приведенный (эквивалентный) момент по четвертой теории прочности в поперечном сечении круглого вала при изгибе с кручением?

Запишите условие прочности по третьей теории для круглого вала при изгибе с кручением.

Запишите условие прочности по четвертой теории для круглого вала при изгибе с кручением.

#### *Перемещения в упругой системе при произвольной нагрузке*

Чему равна работа статически приложенной к конструкции внешней силы? Сформулируйте теорему о взаимности работ.

Сформулируйте теорему о взаимности перемещений.

Запишите формулу Максвелла–Мора для плоской системы.

Запишите формулу Верещагина для конструкции, испытывающей в основном изгиб.

#### *Расчет статически неопределимых систем методом сил*

Какие системы называются статически неопределимыми?

Что называется степенью статической неопределимости системы?

Как находится степень статической неопределимости плоской системы?

Дайте определение основной системы при раскрытии статической неопределимости методом сил.

Дайте определение эквивалентной системы при раскрытии статической неопределимости методом сил.

В чем заключается сущность метода сил?

Запишите канонические уравнения метода сил для системы, имеющей две дополнительные связи.

Какой физический смысл имеет главный коэффициент канонического уравнения метода сил  $\delta_{11}$ ?

Какой физический смысл имеет побочный коэффициент канонического уравнения метода сил  $\delta_{12}$ ?

Какой физический смысл имеет свободное слагаемое канонического уравнения метода сил  $\Delta_{1F}$ ?

В чем заключается сущность деформационной проверки правильности раскрытия статической неопределимости системы методом сил?

В чем заключается особенность раскрытия статической неопределимости симметричной системы методом сил?

### 3.2. Учебно-методические материалы к практическим занятиям

Ранее рассматривались задачи, когда стержни конструкции испытывали одно из простейших нагружений: осевое растяжение или сжатие, кручение, плоский изгиб. На практике большинство элементов конструкций и машин подвергается действиям сил, вызывающих различные комбинации простых нагружений. Такие случаи сопротивления стержней называются сложным сопротивлением. При сложном нагружении в поперечных сечениях бруса одновременно могут возникать несколько внутренних силовых факторов.

Решение такого типа задач проводится на основе принципа независимости действия сил.

#### *Рекомендуемая методика решения задач по сложному сопротивлению*

1. Построить эпюры действующих внутренних силовых факторов.
2. Определить положение опасного сечения.
3. Определить опасное напряженное состояние путем суммирования напряженных состояний, создаваемых каждым в отдельности типом простого нагружения.
4. Исследовать напряженное состояние в характерных точках, определить главные напряжения.

5. По соответствующей теории прочности произвести проверку прочности или определить размеры поперечного сечения.

#### 3.2.1. Внецентренное растяжение (сжатие): определение положения нейтральной линии, расчеты на прочность

##### *Теоретические предпосылки и примеры к практическому занятию*

Этот вид нагружения возникает, когда равнодействующая внешних сил смещена относительно центра тяжести поперечного сечения и направлена параллельно оси  $x$  бруса (рис. 3.1).

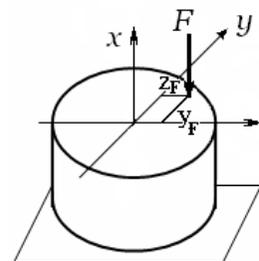


Рис. 3.1. Внецентренное растяжение (сжатие)

Координаты  $z_F$  и  $y_F$  точки приложения силы называются эксцентриситетами этой силы, сама точка – полюсом или центром давления. Приведем силу  $F$  к центру тяжести сечения (рис. 3.2).

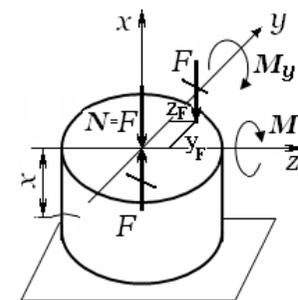


Рис. 3.2. Внутренние силовые факторы при внецентренном растяжении (сжатии)

Сила, приложенная в центре тяжести, является продольной; перерезанные силы создают чистый кривой изгиб, который заменяется двумя прямыми изгибами  $M_z$  и  $M_y$ :

$$M_z = Fy_F, \quad M_y = Fz_F. \quad (3.1)$$

Любое сечение по высоте бруса является опасным, потому что численные значения внутренних силовых факторов  $N$ ,  $M_z$  и  $M_y$  постоянны в любом сечении по высоте сечения и не зависят от величины  $x$ .

Нормальные напряжения в произвольной точке первой четверти с координатами  $y$  и  $z$  на основании принципа независимости действия сил будут равны алгебраической сумме напряжений от каждого из внутренних силовых факторов:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y}. \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_N &= -\frac{N}{A} = -\frac{F}{A}, \\ \sigma_{M_z} &= -\frac{M_z y}{I_z} = -\frac{F y_F y}{I_z}, \\ \sigma_{M_y} &= -\frac{M_y z}{I_y} = -\frac{F z_F z}{I_y}, \end{aligned}$$

где знаки «-» потому, что в первой четверти происходит сжатие от действия всех внутренних силовых факторов.

$$\sigma = -\frac{F}{A} - \frac{F y_F y}{I_z} - \frac{F z_F z}{I_y} = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y}{I_z} + \frac{z_F z}{I_y} \right),$$

где отношение  $\frac{I_z}{A} = i_z^2$  – квадрат радиуса инерции.

Напряжения будут равны:

$$\sigma = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y}{i_z^2} + \frac{z_F z}{i_y^2} \right). \quad (3.3)$$

С помощью формулы (3.3) можно определить напряжения в любой точке поперечного сечения, следует лишь координаты этой точки относительно главных центральных осей подставить со своими знаками. Из этой формулы также следует, что нормальные напряжения в сечении при внецентренном растяжении (сжатии) изменяются по линейному закону, эпюра напряжений представляет собой плоскость. Максимальные напряжения будут возникать в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии, уравнение которой получается, если приравнять к нулю выражение (3.3):

$$1 + \frac{y_F y}{i_z^2} + \frac{z_F z}{i_y^2} = 0. \quad (3.4)$$

Из выражения (3.4) следует, что нейтральная линия представляет собой прямую, не проходящую через начало координат (при  $y = 0 \quad z \neq 0$ ). Уравнение таких прямых удобнее задавать отрезками, отсекаемыми на координатных осях. Если в уравнении (3.4) при  $z = 0$  обозначить  $y = a_y$ , при  $y = 0 \quad z = a_z$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} a_y &= -\frac{i_z^2}{y_F} \\ a_z &= -\frac{i_y^2}{z_F} \end{aligned} \right\} \text{– уравнение нейтральной линии в отрезках.} \quad (3.5)$$

Из уравнения нейтральной линии в отрезках следует, что:

- 1) положение нейтральной линии при внецентренном растяжении (сжатии) не зависит от величины и знака приложенной силы;
- 2) знак «-» означает, что нейтральная линия и полюс располагаются по разные стороны от центра тяжести сечения;
- 3) чем дальше от начала координат расположен полюс, тем ближе к центру тяжести сечения проходит нейтральная линия (и наоборот);
- 4) нейтральная линия может пересекать сечение и может располагаться за его пределами;
- 5) если полюс расположен на одной из главных центральных осей, то нейтральная линия перпендикулярна этой оси.

Наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии. Для их определения необходимо построить нейтральную линию и параллельно ей провести касательные к контуру сечения (рис. 3.3).

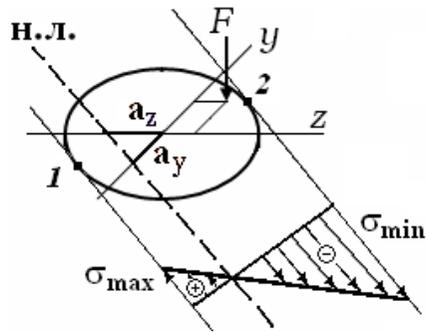


Рис. 3.3. Определение опасных точек при внецентренном растяжении (сжатии)

Условия прочности для опасных точек 1 и 2 имеют вид:

$$\sigma_{\max}^p = -\frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F y_1}{i_z^2} + \frac{z_F z_1}{i_y^2} \right) \leq [\sigma_p]; \quad (3.6)$$

$$\sigma_{\max}^c = -\frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F y_2}{i_z^2} + \frac{z_F z_2}{i_y^2} \right) \leq [\sigma_c], \quad (3.7)$$

где  $y_1, y_2, z_1, z_2$  – координаты опасных точек относительно главных центральных осей;

$[\sigma_p], [\sigma_c]$  – допускаемые напряжения при растяжении или сжатии.

Для пластичных материалов, которые одинаково сопротивляются растяжению и сжатию, условие прочности примет вид:

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F y_1}{i_z^2} + \frac{z_F z_1}{i_y^2} \right) \leq [\sigma]. \quad (3.8)$$

Для сечений, имеющих две оси симметрии, опасные точки которых наиболее удалены от осей симметрии, условие прочности удобно записывать в виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (3.9)$$

*Пример 3.1.* Определить значение допускаемой нагрузки  $[F]$  по заданным размерам поперечного сечения бруса  $b = 90$  мм,  $h = 150$  мм, если допускаемые напряжения: на растяжение  $[\sigma_p] = 30$  МПа, на сжатие  $[\sigma_c] = 100$  МПа (рис. 3.4).

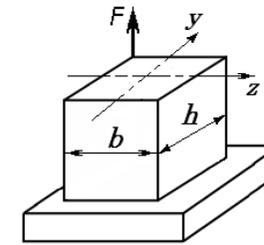


Рис. 3.4. Схема нагружения (к примеру 3.1)

*Решение.* От действия приложенной силы в поперечном сечении бруса возникают три внутренних силовых фактора:

$$N = F; \quad M_z = F \frac{h}{2}; \quad M_y = F \frac{b}{2}.$$

Знаки нормальных напряжений от действия каждого из этих внутренних силовых факторов в угловых точках сечения показаны на рис. 3.5.

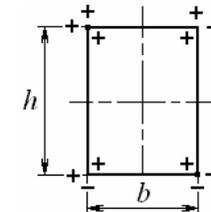


Рис. 3.5. Нормальные напряжения от действия  $N, M_z, M_y$

Максимальные растягивающие напряжения возникнут в точке приложения силы, минимальные сжимающие – в противоположном углу поперечного сечения бруса. В соответствии с формулой (3.9) напряжения в опасных точках определяются:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y};$$

$$\sigma_{\min} = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{W_z} - \frac{M_y}{W_y}.$$

Площадь поперечного сечения для прямоугольника  $A = bh$ , осевые моменты сопротивления  $W_z = \frac{bh^2}{6}$ ,  $W_y = \frac{b^2h}{6}$ . С учетом выражений изгибающих моментов, через действующую силу  $F$  получаем:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{bh} + \frac{Fh}{2} \cdot \frac{6}{bh^2} + \frac{Fb}{2} \cdot \frac{6}{b^2h} = \frac{F}{bh} + \frac{3F}{bh} + \frac{3F}{bh} = \frac{7F}{bh};$$

$$\sigma_{\min} = \frac{F}{bh} - \frac{Fh}{2} \cdot \frac{6}{bh^2} - \frac{Fb}{2} \cdot \frac{6}{b^2h} = \frac{F}{bh} - \frac{3F}{bh} - \frac{3F}{bh} = -\frac{5F}{bh}.$$

Выражение для максимальных напряжений приравнивается к допускаемым напряжениям на растяжение  $[\sigma_p]$ , для минимальных – к допускаемым напряжениям на сжатие  $[\sigma_c]$ . Определяются значения допускаемых сил:

$$\sigma_{\max} = \frac{7[F]}{bh} = [\sigma_p] \Rightarrow [F] = \frac{bh[\sigma_p]}{7} = 57\,857 \text{ Н} \approx 57,8 \text{ кН},$$

$$\sigma_{\min} = \frac{5[F]}{bh} = [\sigma_c] \Rightarrow [F] = \frac{bh[\sigma_c]}{5} = 270\,000 \text{ Н} = 270 \text{ кН}.$$

Из двух полученных значений принимаем меньшее, следовательно, допускаемая нагрузка будет равна  $[F] = 57,86 \text{ кН}$ .

*Пример 3.2.* Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 3.6, сжимается силой  $F$ , параллельной оси  $x$ , приложенной в точке  $B$ . Требуется: определить положение нейтральной линии и найти опасные точки сечения; вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении; найти допускаемую нагрузку  $[F]$  при заданных размерах сечения:  $a = 80 \text{ мм}$ ,  $b = 50 \text{ мм}$  и допускаемых напряжениях для чугуна: на сжатие  $[\sigma_c] = 110 \text{ МПа}$ ; и растяжение  $[\sigma_p] = 29 \text{ МПа}$ .

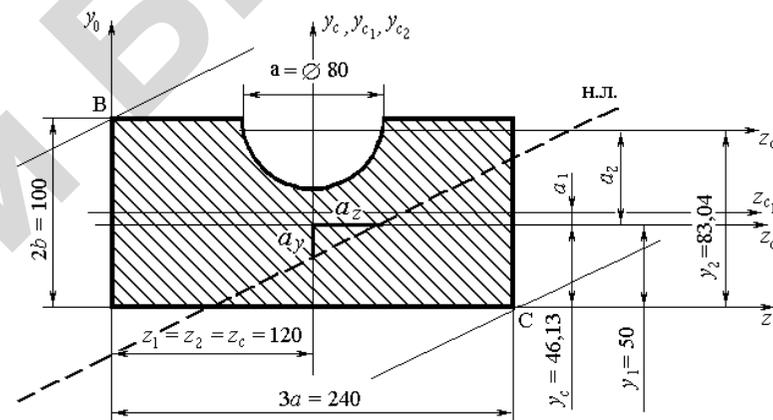


Рис. 3.6. Схема поперечного сечения

*Решение.* Вычерчиваем сечение в выбранном масштабе (рис. 3.6).

Для определения положения центра тяжести сложного сечения разбиваем его на простейшие элементы: прямоугольник 1 (рис. 3.7) и полукруг 2 (рис. 3.8).

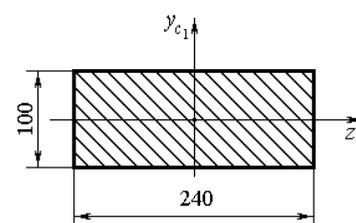


Рис. 3.7. Прямоугольник 1

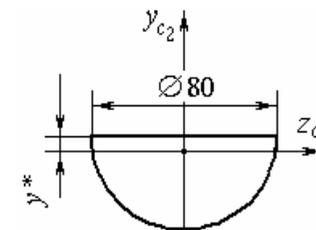


Рис. 3.8. Полукруг 2

Рассчитываем геометрические характеристики каждого элемента: площадь  $A$ , осевые моменты инерции  $I_z$  и  $I_y$ . Геометрические характеристики для второго пустого элемента отрицательны.

$$A_1 = 240 \cdot 100 = 2,4 \cdot 10^4 \text{ мм}^2;$$

$$I_{z_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{240 \cdot 100^3}{12} = 2 \cdot 10^7 \text{ мм}^4;$$

$$I_{y_1} = \frac{b^3h}{12} = \frac{240^3 \cdot 100}{12} = 11,52 \cdot 10^7 \text{ мм}^4.$$

$$A_2 = -\frac{\pi d^2}{8} = -\frac{3,14 \cdot 80^2}{8} = -2512 \text{ мм}^2;$$

$$y^* = 0,212d = 0,212 \cdot 80 = 16,96 \text{ мм};$$

$$I_{z_2} = -0,00686d^4 = -0,0068 \cdot 80^4 = -2,8 \cdot 10^5 \text{ мм}^4;$$

$$I_{y_2} = -\frac{\pi d^4}{128} = -\frac{3,14 \cdot 80^4}{128} = -1,0048 \cdot 10^6 \text{ мм}^4.$$

Проводим на чертеже вспомогательные оси  $y_0$  и  $z_0$  таким образом, чтобы они касались контура сечения, а само сечение располагалось в первой четверти. Обозначаем координаты центров тяжести прямоугольника и полукруга  $y_1, z_1$  и  $y_2, z_2$  относительно вспомогательных осей. Так как оси  $y_{c_1}$  и  $y_{c_2}$  совпадают, для определения положения центра тяжести сечения достаточно найти координату  $y_c$ :

$$y_c = \frac{\sum S_{z_0}}{\sum A} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{50 \cdot 24\,000 - 83,04 \cdot 2512}{24\,000 - 2512} = 46,13 \text{ мм}.$$

Обозначаем на чертеже координату  $y_c$  и находим общий центр тяжести сечения. Так как сечение имеет одну ось симметрии, то главными центральными будут сама ось симметрии  $y_c$  и ось ей перпендикулярная, проходящая через центр тяжести сечения  $z_c$ .

Рассчитываем моменты инерции сечения относительно главных центральных осей, используя формулу изменения моментов инерции при параллельном переносе осей:

$$I_{z_c} = I_{z_1} + a_1^2 A_1 + I_{z_2} + a_2^2 A_2 = 2 \cdot 10^7 + 3,87^2 \cdot 24\,000 - 2,8 \cdot 10^5 - 36,91^2 \cdot 2512 = 16\,657\,227,17 \text{ мм}^4 = 16,657 \cdot 10^6 \text{ мм}^4,$$

где  $a_1$  и  $a_2$  – смещения между главными центральными осями всего сечения и собственными осями каждой фигуры:

$$a_1 = y_1 - y_c = 50 - 46,13 = 3,87 \text{ мм};$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 83,04 - 46,13 = 36,91 \text{ мм}.$$

Относительно оси  $y_c$  смещение осей  $y_{c_1}$  и  $y_{c_2}$  не происходит, поэтому для определения осевого момента инерции всего сечения суммируются  $I_{y_1}$  и  $I_{y_2}$ :

$$I_{y_c} = I_{y_1} - I_{y_2} = 11,52 \cdot 10^7 - 1,0048 \cdot 10^6 = 11,42 \cdot 10^7 \text{ мм}^4.$$

Находим квадраты радиусов инерции:

$$i_z^2 = \frac{I_{z_c}}{A} = \frac{16,657 \cdot 10^6}{24\,000 - 2512} = 775,19 \text{ мм}^2,$$

$$i_y^2 = \frac{I_{y_c}}{A} = \frac{11,42 \cdot 10^7}{24\,000 - 2512} = 5314,59 \text{ мм}^2.$$

Рассчитываем отрезки, отсекаемые нейтральной линией на главных центральных осях по формуле (3.5):

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_F} = -\frac{5\,314,59}{-120} = 44,29 \text{ мм},$$

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F} = -\frac{775,19}{53,87} = -14,39 \text{ мм},$$

где  $z_F = -120$  мм и  $y_F = 100 - 46,13 = 53,87$  мм – координаты точки  $B$  приложения силы относительно главных центральных осей  $z_c$  и  $y_c$ .

Откладываем отрезки  $a_z$  и  $a_y$  на чертеже с учетом знаков и проводим нейтральную линию штриховой жирной линией.

Опасными являются точки, в которых возникают максимальные напряжения, наиболее удаленные от нейтральной линии. Для их нахождения необходимо провести касательные к контуру сечения, параллельные нейтральной линии. В рассматриваемом примере опасными будут точки  $B$  и  $C$ . Наибольшие сжимающие напряжения возникают в точке  $B$ , а в точке  $C$  – наибольшие растягивающие.

Выражаем наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения через неизвестную силу  $F$  и геометрические характеристики поперечного сечения:

$$\sigma_B = -\frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F y_B}{i_z^2} + \frac{z_F z_B}{i_y^2} \right) = -\frac{F}{21488} \cdot \left( 1 + \frac{53,87 \cdot 53,87}{775,19} + \frac{120 \cdot 120}{5314,59} \right) =$$

$$= -\frac{F}{21488} \cdot (1 + 3,74 + 2,71) = -F \cdot 3,467 \cdot 10^{-4},$$

$$\sigma_C = \frac{F}{A} \cdot \left( -1 + \frac{y_F y_C}{i_z^2} + \frac{z_F z_C}{i_y^2} \right) = \frac{F}{21488} \cdot \left( -1 + \frac{53,87 \cdot 46,13}{775,19} + \frac{120 \cdot 120}{5314,59} \right) =$$

$$= \frac{F}{21488} \cdot (-1 + 3,206 + 2,71) = F \cdot 2,288 \cdot 10^{-4},$$

где  $y_B = 100 - 46,13 = 53,87$  мм и  $z_B = 120$  мм – координаты точки  $B$  относительно осей  $y_c$  и  $z_c$ , совпадающие с  $y_F$  и  $z_F$ ;

$y_C = 46,13$  мм и  $z_C = 120$  мм – координаты точки  $C$  относительно тех же осей.

Полученное выражение наибольших сжимающих напряжений в точке  $B$  приравниваем к допускаемым напряжениям на сжатие, а наибольших растягивающих напряжений в точке  $C$  – к допускаемым напряжениям на растяжение.

$$\sigma_B = -F \cdot 3,467 \cdot 10^{-4} = -110 \Rightarrow F = \frac{110}{3,467 \cdot 10^{-4}} = 311\,728 \text{ Н},$$

$$\sigma_C = F \cdot 2,288 \cdot 10^{-4} = 29 \Rightarrow F = \frac{29}{2,288 \cdot 10^{-4}} = 126\,748 \text{ Н}.$$

Из двух полученных значений допускаемой нагрузки необходимо выбрать меньшее, чтобы оно удовлетворяло условию прочности, как на сжатие, так и на растяжение. Окончательно принимаем  $[F] = 126,8$  кН.

### 3.2.2. Изгиб с кручением: расчеты на прочность круглого вала

#### *Рекомендуемая методика решения задач по изгибу с кручением*

1. Определить скручивающие моменты  $m$  и построить эпюру крутящих моментов  $T$ .
2. Спроектировать силы, действующие на балку, на главные центральные плоскости инерции, составить схемы нагружения в этих плоскостях, построить эпюры изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_y$ .
3. Построить результирующую эпюру изгибающих моментов и определить опасное сечение вала.
4. Определить в опасном сечении опасные точки построением эпюр нормальных напряжений  $\sigma$  от действия изгибающего момента  $M$  и касательных напряжений  $\tau$  от крутящего момента  $T$ .
5. Рассчитать главные напряжения в опасных точках.
6. По соответствующей теории прочности произвести проверку прочности или определить размеры поперечного сечения.

### Теоретические предпосылки и примеры к практическому занятию

На изгиб с кручением работают валы редукторов, коробок передач и т. д. Силы, передаваемые валу шкивами и зубчатыми колесами, всегда вызывают изгиб и кручение вала.

Рассмотрим закрепленный на валу шкив ременной передачи (рис. 3.9). Обозначим натяжение ведущей ветви ремня  $2t$ , ведомой –  $t$ , передаваемую мощность –  $P$  (кВт), частоту вращения вала –  $n$  (об/мин).

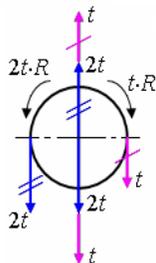


Рис. 3.9. Шкив ременной передачи

Приведем силы  $2t$  и  $t$  к центру тяжести сечения. Перечеркнутые силы создают скручивающие моменты, суммарный скручивающий момент будет равен:

$$m = tR. \quad (3.10)$$

Зная передаваемую мощность и частоту вращения вала, можно определить скручивающий момент  $m$ :

$$m = \frac{P}{\omega} = \frac{P \cdot 30}{\pi n} = \frac{P \cdot 1000 \cdot 30}{3,14n} = 9554 \cdot \frac{P}{n}, \quad (3.11)$$

тогда усилие в ведомой ветви ременной передачи будет равно:

$$t = \frac{m}{R} = \frac{2m}{d}. \quad (3.12)$$

Неперечеркнутые силы  $3t$  будут вызывать изгиб.

Аналогичные результаты будут получены при рассмотрении посаженного на вал колеса зубчатой передачи.

Для построения эпюр внутренних силовых факторов нужно спроектировать силы, действующие на балку, на главные центральные плоскости инерции. Составить схемы нагружения в этих плоскостях, определить опорные реакции и по известным ранее примерам построить эпюры крутящего  $T$  и изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_y$ .

По эпюрам внутренних силовых факторов находят опасное сечение вала. Для определения в опасном сечении опасных точек строят эпюры распределения нормальных напряжений  $\sigma_u$  от действия полного изгибающего момента  $M$  и касательных напряжений  $\tau_k$  от действия крутящего момента  $T$  (рис. 3.10).

Наибольшие нормальные растягивающие напряжения будут возникать в точке  $B$ , где след плоскости действия полного момента (СПДМ) пересекает контур сечения, наибольшие сжимающие напряжения будут действовать в точке  $C$ . Максимальные касательные напряжения от действия крутящего момента действуют на контуре сечения.

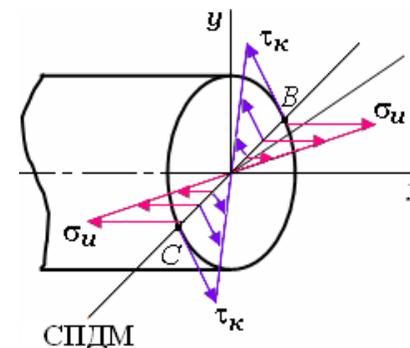


Рис. 3.10. Эпюры нормальных и касательных напряжений при изгибе с кручением

Выделим в опасной точке  $B$  элементарный кубик и проанализируем напряженное состояние (рис. 3.11). Обозначим действующие напряжения. Вертикальные грани кубика свободны от напряжений, следовательно, в опасной точке имеет место плоское (сложное) напряженное состояние.

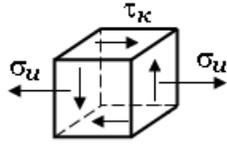


Рис. 3.11. Анализ напряженного состояния при изгибе с кручением

Для проверки прочности материала в сложном напряженном состоянии необходимо использовать теории прочности. Как правило, валы изготавливают из пластичных материалов, поэтому расчеты производятся по третьей или четвертой теориям прочности, условия прочности для которых имеют вид:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (3.13)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma] \quad (3.14)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные напряжения, которые при плоском напряженном состоянии определяются по формуле:

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (3.15)$$

Из рис. 3.11 следует, что:  $\sigma_x = \sigma_u, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_k$ .

$$\text{Тогда } \sigma_{\text{max}}^{\text{min}} = \frac{\sigma_u}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_u^2 + 4\tau_k^2}.$$

Главные напряжения будут равны:

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{max}} = \frac{\sigma_u}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_u^2 + 4\tau_k^2},$$

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \sigma_{\text{min}} = \frac{\sigma_u}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_u^2 + 4\tau_k^2}.$$

Подставляя значения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  в формулы (3.13) и (3.14), получим условия прочности при изгибе с кручением для любого поперечного сечения вала:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_u^2 + 4\tau_k^2} \leq [\sigma]; \quad (3.16)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_u^2 + 3\tau_k^2} \leq [\sigma]. \quad (3.17)$$

Учитывая, что напряжения определяются следующим образом:

$$\sigma_u = \frac{M_u}{W_z} \quad \text{и} \quad \tau_k = \frac{T}{W_p},$$

для круглого поперечного сечения моменты сопротивления равны:

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32};$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 2W_z.$$

Условие прочности по третьей теории прочности запишется:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\left(\frac{M}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{2W_z}\right)^2} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W_z}. \quad (3.18)$$

С учетом, что полный изгибающий момент равен:

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}, \quad (3.19)$$

получим условие при изгибе с кручением прочности для круглого вала по третьей теории прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2 + T^2}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (3.20)$$

Расчет по четвертой теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\left(\frac{M}{W_z}\right)^2 + 3\left(\frac{T}{2W_z}\right)^2} = \frac{\sqrt{M^2 + 0,75T^2}}{W_z};$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2 + 0,75T^2}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (3.21)$$

Иногда формулы (3.18) и (3.19) объединяют в одну, и условие прочности записывается так:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{прив}}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (3.22)$$

где  $M_{\text{прив}}$  – приведенный момент.

**Пример 3.3.** Определить диаметр вала (рис. 3.12, а) по третьей теории прочности, если допустимое напряжение  $[\sigma] = 80$  МПа. Ведущий шкив  $D_1 = 0,8$  м передает мощность  $P_1 = 15$  кВт, ведомые шкивы  $D_2 = 0,6$  м и  $D_3 = 1,0$  м передают мощности  $P_2 = 5$  кВт и  $P_3 = 10$  кВт соответственно, при частоте вращения  $n = 1200$  мин<sup>-1</sup>. Ветви ремней параллельны и образуют с горизонтом: угол  $\alpha_1 = 45^\circ$  на ведущем шкиве и угол  $\alpha_2 = 60^\circ$  на ведомых шкивах. Натяжение ведущей ветви ремня в 2 раза больше натяжения в ведомой ветви.

**Решение.** Определяем скручивающие моменты, приложенные к шкивам, по формуле (3.11):

$$m_1 = \frac{P_1}{\omega} = 9554 \cdot \frac{P_1}{n} = 9554 \cdot \frac{15}{1200} = 119,4 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$m_2 = 9554 \cdot \frac{P_2}{n} = 9554 \cdot \frac{5}{1200} = 39,8 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$m_3 = 9554 \cdot \frac{P_3}{n} = 9554 \cdot \frac{10}{1200} = 79,6 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

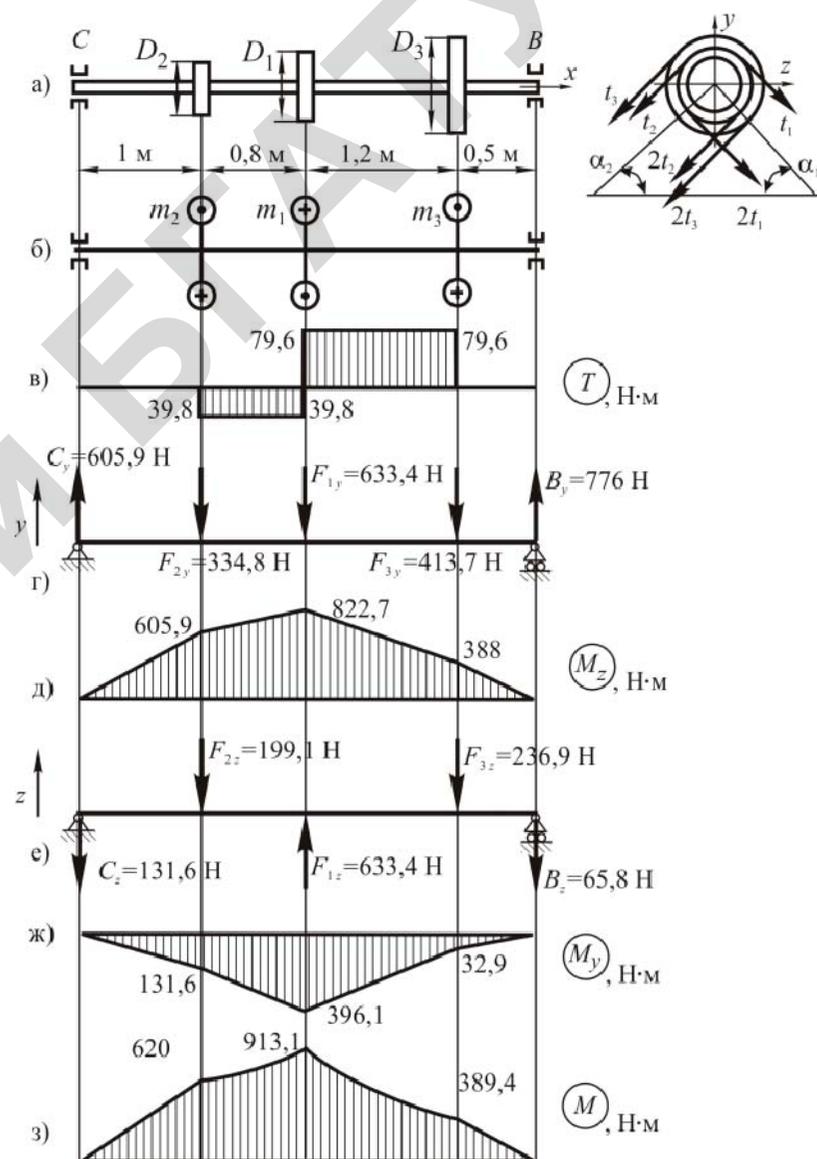


Рис. 3.12. Расчетные схемы нагружения, эпюры крутящих и изгибающих моментов в сечениях вала

Составляем расчетную схему вала, нагруженного скручивающими моментами (рис. 3.12, б), и строим эпюру крутящих моментов  $T$  (рис. 3.12, в).

Определяем окружные усилия  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ , действующие на шкивы, по формуле (3.12):

$$t_1 = \frac{2m_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 119,4}{0,8} = 298,6 \text{ Н};$$

$$t_2 = \frac{2m_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 39,8}{0,6} = 132,7 \text{ Н};$$

$$t_3 = \frac{2m_3}{D_3} = \frac{2 \cdot 79,6}{1} = 159,2 \text{ Н}.$$

Определяем усилия, действующие на вал:

$$F_1 = 3 \cdot t_1 = 3 \cdot 298,6 = 895,84 \text{ Н};$$

$$F_2 = 3 \cdot t_2 = 3 \cdot 132,7 = 398,1 \text{ Н};$$

$$F_3 = 3 \cdot t_3 = 3 \cdot 159,2 = 477,6 \text{ Н}.$$

Проектируем силы, действующие на вал, в плоскость  $yx$ :

$$F_{1y} = F_1 \sin \alpha_1 = 895,7 \cdot \sin 45^\circ = 633,4 \text{ Н};$$

$$F_{2y} = F_2 \sin \alpha_2 = 398,1 \cdot \sin 60^\circ = 344,8 \text{ Н};$$

$$F_{3y} = F_3 \sin \alpha_3 = 477,7 \cdot \sin 60^\circ = 413,7 \text{ Н}.$$

Составляем расчетную схему вала, нагруженного силами в плоскости  $yx$  (рис. 3.10, з), и определяем реакции в опорах:

$$\sum M_B = F_{1y} \cdot 1,7 + F_{2y} \cdot 2,5 + F_{3y} \cdot 0,5 - C_y \cdot 3,5 = 0;$$

$$\sum M_B = 633,4 \cdot 1,7 + 344,8 \cdot 2,5 + 413,7 \cdot 0,5 - C_y \cdot 3,5 = 0.$$

Откуда  $C_y = 605,9 \text{ Н}$ ;

$$\sum M_C = F_{1y} \cdot 1,8 + F_{2y} \cdot 1,0 + F_{3y} \cdot 3,0 - B_y \cdot 3,5 = 0;$$

$$\sum M_C = 633,4 \cdot 1,8 + 344,8 \cdot 1,0 + 413,7 \cdot 3,0 - B_y \cdot 3,5 = 0.$$

Откуда  $B_y = 776 \text{ Н}$ .

Проверка:

$$\sum F_{iy} = -F_{1y} - F_{2y} - F_{3y} + B_y + C_y = 0;$$

$$\sum F_{iy} = -633,4 - 344,8 - 413,7 + 605,9 + 776 = 0.$$

Реакции в опорах  $B_y$  и  $C_y$  определены верно.

Строим эпюру изгибающих моментов  $M_z$  (рис. 3.12, д).

Проектируем силы, действующие на вал, в плоскость  $xz$ :

$$F_{1z} = F_1 \cos \alpha_1 = 895,7 \cdot \cos 45^\circ = 633,4 \text{ Н};$$

$$F_{2z} = F_2 \cos \alpha_2 = 398,1 \cdot \cos 60^\circ = 199,1 \text{ Н};$$

$$F_{3z} = F_3 \cos \alpha_3 = 477,7 \cdot \cos 60^\circ = 236,9 \text{ Н}.$$

Составляем расчетную схему вала, нагруженного силами в плоскости  $xz$  (рис. 3.10, е), и определяем реакции в опорах:

$$\sum M_B = F_{1z} \cdot 1,7 - F_{2z} \cdot 2,5 - F_{3z} \cdot 0,5 - C_z \cdot 3,5 = 0;$$

$$\sum M_B = 633,4 \cdot 1,7 - 199,1 \cdot 2,5 - 236,9 \cdot 0,5 - C_z \cdot 3,5 = 0.$$

Откуда  $C_z = 131,6 \text{ Н}$ ;

$$\sum M_C = F_{1z} \cdot 1,8 - F_{2z} \cdot 1,0 - F_{3z} \cdot 3,0 + B_z \cdot 3,5 = 0;$$

$$\sum M_C = 633,4 \cdot 1,8 - 199,1 \cdot 1,0 - 236,9 \cdot 3,0 - B_z \cdot 3,5 = 0.$$

Отсюда  $B_z = 65,84 \text{ Н}$ .

Проверка:

$$\sum F_{iz} = F_{1z} - F_{2z} - F_{3z} - B_z - C_z = 0;$$

$$\sum F_{iz} = 633,4 - 199,1 - 236,9 - 65,8 - 131,6 = 0.$$

Реакции в опорах  $B_z$  и  $C_z$  определены верно.

Строим эпюру изгибающих моментов  $M_y$  (рис. 3.12, ж).

Строим эпюру полных изгибающих моментов в сечениях вала (рис. 3.12, з), используя формулу (3.19):

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}.$$

Определяем положение опасного сечения вала. Из эпюр  $M$  и  $T$  следует, что опасное сечение вала находится в месте крепления первого шкива ( $D_1$ ).

Из формулы (3.18) осевой момент сопротивления можно выразить:

$$W_z = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{[\sigma]} = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Откуда определится диаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{M^2 + T^2}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{(79,6 \cdot 10^3)^2 + (913,1 \cdot 10^3)^2}}{3,14 \cdot 80}} = 48,8 \text{ мм} \approx 50 \text{ мм}.$$

### 3.2.3. Определение перемещений в упругих системах способом Верещагина

#### Рекомендуемая методика решения задач по определению перемещений способом Верещагина

1. Построить эпюру изгибающих моментов (или других внутренних силовых факторов) от действия внешних сил  $M_F$ .

2. По направлению определяемого перемещения приложить единичную безразмерную силу (если определяется линейное перемещение) или единичный безразмерный момент (если определяется угловое перемещение) и построить единичную эпюру  $M_1$ .

3. Определить площадь  $\Omega_F$  грузовой эпюры  $M_F$  и ее центр тяжести.

4. Под центром тяжести грузовой эпюры  $M_F$  на единичной эпюре  $M_1$  определить ординату  $M_1^C$ .

5. Полученные значения подставить в формулу определения перемещений способом Верещагина.

#### Теоретические предпосылки и примеры к практическому занятию

Вычисление интегралов Максвелла–Мора представляет определенные затруднения. Студентом Московского института инженеров транспорта Верещагиным А.Н. в 1925 г. был предложен способ замены интегрирования перемножением эпюр. Это возможно, когда:

- 1) одна из эпюр ( $M_F$  или  $M_1$ ) прямолинейна;
- 2) жесткость системы постоянна или изменяется скачкообразно.

Формула для определения перемещений по способу Верещагина при изгибе имеет вид:

$$\Delta_{1F} = \sum \frac{\Omega_F M_1^C}{EI_Z}, \quad (3.23)$$

где  $\Delta_{1F}$  – перемещение по направлению единичной силы, вызванное внешними силами;

$\Omega_F$  – площадь эпюры изгибающих моментов от действия внешних сил;

$M_1^C$  – ордината из единичной эпюры  $M_1$ , взятая под центром тяжести грузовой эпюры  $M_F$ ;

$EI_Z$  – жесткость сечения при изгибе.

Перемещение равно произведению площади эпюры изгибающих моментов от заданной внешней нагрузки на величину ординаты эпюры изгибающих моментов от единичной силы, расположенной под центром тяжести грузовой эпюры, деленному на жесткость сечения балки.

В случае растяжения (сжатия) формула перемещений имеет вид:

$$\Delta_{1F} = \sum \frac{\Omega_F M_1^C}{EA}, \quad (3.24)$$

где  $EA$  – жесткость при растяжении (сжатии).

При кручении круглого вала формула перемещений:

$$\Delta_{1F} = \sum \frac{\Omega_F M_1^C}{GI_p}, \quad (3.25)$$

где  $GI_p$  – жесткость при кручении вала круглого поперечного сечения.

Если в результате перемножения эпюр полученное перемещение положительно по знаку  $\Delta_{1F} > 0$ , это означает, что направление действительных перемещений совпадает с направлением единичной силы; если  $\Delta_{1F} < 0$  – направление действительных перемещений противоположно направлению единичной силы.

Правило знаков при перемножении эпюр: однозначные эпюры при перемножении дают знак «+», разнозначные – знак «-».

Рассмотрим в общем виде некоторые случаи перемножения эпюр.

1. Эпюры  $M_F$  и  $M_1$  – прямолинейные (рис. 3.13).

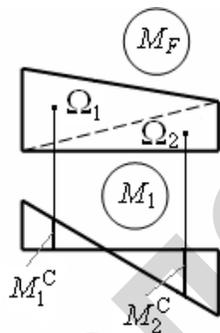


Рис. 3.13. Пример перемножения прямолинейных эпюр

Трапеция разделяется на два треугольника. Центр тяжести треугольника находится на расстоянии  $\frac{2}{3}l$  длины от вершины (рис. 3.14).

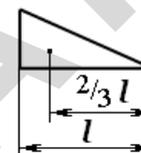


Рис. 3.14. Положение центра тяжести треугольника

Числитель формулы перемещений запишется:

$$\Omega_F M^C = \Omega_1 M_1^C - \Omega_2 M_2^C.$$

2. Эпюры  $M_F$  и  $M_1$  – ломаные (рис. 3.15).

При перемножении эпюры следует разделить на участки так, чтобы пределах каждого участка эпюры  $M_F$  и  $M_1$  были прямолинейны.

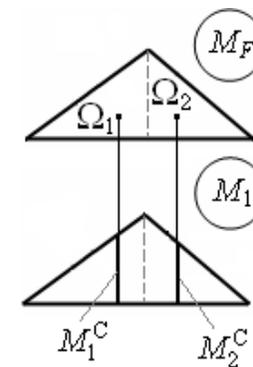


Рис. 3.15. Пример перемножения ломаных эпюр

Числитель формулы перемещений:

$$\Omega_F M^C = \Omega_1 M_1^C + \Omega_2 M_2^C.$$

3. Одна из эпюр представляет собой параболу (рис. 3.16).

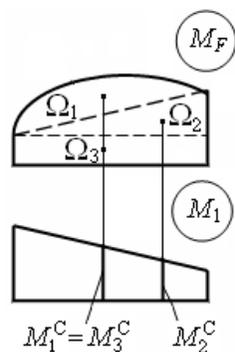


Рис. 3.16. Пример перемножения параболической и прямолинейной эпюр

Грузовая эпюра разделяется на три площади – прямоугольник, треугольник и параболический сектор. Центр тяжести параболического сектора находится посередине длины (рис. 3.17).

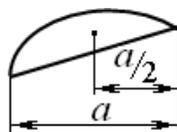


Рис. 3.17. Положение центра тяжести параболы

Площадь параболы определяется по формуле:

$$\Omega = \frac{pa^3}{12},$$

где  $p$  – заданная на схеме нагружения распределенная нагрузка.

Числитель формулы перемещений в этом случае:

$$\Omega_F M^C = \Omega_1 M_1^C + \Omega_2 M_2^C + \Omega_3 M_3^C.$$

*Пример 3.4.* Определить прогиб посередине пролета и угол поворота сечения на левой опоре.

*Решение.* Опорные реакции в силу симметричности конструкции будут равны между собой и в сумме должны быть равны силе  $F$ . Обозначаем опорные реакции на схеме нагружения (рис. 3.18, а), строим грузовую эпюру изгибающих моментов от действия внешней силы (рис. 3.18, б).

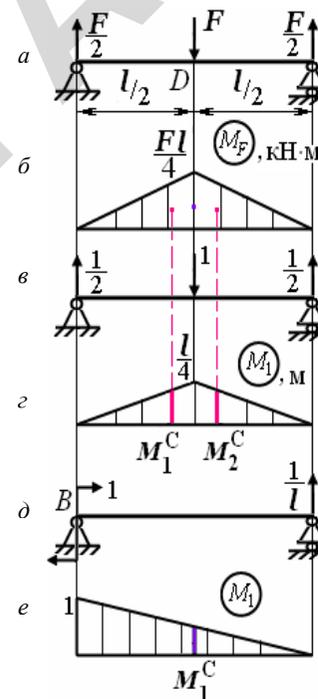


Рис. 3.18. Определение прогиба посередине пролета и угла поворота сечения на левой опоре

Посередине пролета прикладываем единичную безразмерную силу, пересчитываем опорные реакции (рис. 3.18, в); строим единичную эпюру изгибающих моментов от действия этой силы (рис. 3.18, г). От действия безразмерной силы возникают безразмерные опорные реакции, поэтому размерностью этой единичной эпюры будут метры.

Обе эпюры представляют собой ломаные линии. Разделяем их на два симметричных участка, результат перемножения эпюр в формуле перемещений будет удваиваться.

Ордината единичной эпюры под центром тяжести на грузовой эпюре будет равна:

$$M_1^C = M_2^C = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} = \frac{l}{6}.$$

Определим площадь одного треугольника:

$$\Omega_F = \frac{1}{2} \cdot \frac{Fl}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Fl^2}{16}.$$

Максимальный прогиб балки посередине пролета будет равен:

$$\Delta_{1F} = y_{\max} = \sum \frac{\Omega_F M_1^C}{EI_Z} = \frac{2}{EI_Z} \cdot \left( \frac{Fl^2}{16} \cdot \frac{l}{6} \right) = \frac{Fl^3}{48EI_Z}.$$

Для определения угла поворота сечения прикладываем на левой опоре единичный безразмерный момент, пересчитываем опорные реакции (рис. 3.18, д) и строим единичную эпюру (рис. 3.18, е).

От действия безразмерного момента возникают опорные реакции, измеряемые в  $\frac{1}{M}$ , поэтому сама единичная эпюра будет безразмерной. Единичная эпюра линейна, поэтому можно определить площадь всего треугольника на грузовой эпюре:

$$\Omega_F = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{Fl}{4} = \frac{Fl^2}{8}.$$

Центр тяжести этого треугольника находится посередине длины. Ордината на единичной эпюре под ним будет равна:

$$M_1^C = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Угол поворота сечения на левой опоре  $B$  определится:

$$\Delta_{1F} = \theta_B = \sum \frac{\Omega_F M_1^C}{EI_Z} = \frac{1}{EI_Z} \cdot \left( \frac{Fl^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{Fl^2}{16}.$$

Пример 3.5. Определить прогиб балки двутаврового поперечного сечения № 14 длиной  $l=1,5$  м, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой  $p=7$  кН/м, в сечении  $D$  (рис. 3.19, а).

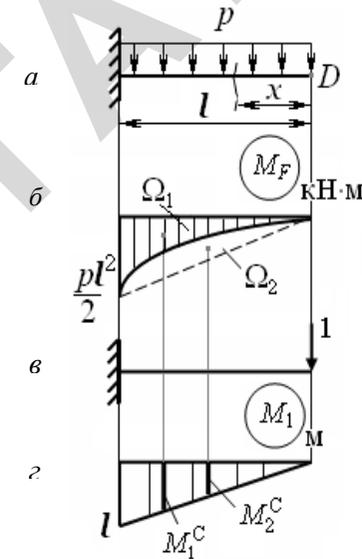


Рис. 3.19. Определение прогиба в точке  $D$

Решение. Строим эпюру изгибающих моментов от действия равномерно распределенной нагрузки  $M_F$ :

$$0 \leq x \leq l,$$

$$M_x = -\frac{px^2}{2};$$

$$x=0: M_x = 0;$$

$$x=l: M_x = -\frac{pl^2}{2}.$$

Соединяем штриховой линией крайние точки эпюры (рис. 3.19, б). Полученная фигура представляет собой прямоугольный треугольник с удаленным параболическим сектором.

Площадь треугольника:

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{pl^2}{2} = \frac{pl^3}{4},$$

площадь пустого параболического сектора:

$$\Omega_2 = -\frac{pl^3}{12}.$$

Прикладываем в точке  $D$  единичную безразмерную силу (рис. 3.19, в), строим единичную эпюру  $M_1$  (рис. 3.19, з). Ординаты под центром тяжести треугольника  $M_1^C = \frac{2}{3} \cdot l$ , под центром тяжести параболы  $M_2^C = \frac{1}{2} \cdot l$ .

Прогиб в сечении  $D$  определится:

$$\Delta_{1F} = y_D = \sum \frac{\Omega_F M_1^C}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{pl^3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot l - \frac{pl^3}{12} \cdot \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{pl^4}{6} - \frac{pl^4}{24} \right) = \frac{pl^4}{8EI}.$$

Для определения численного значения прогиба необходимо найти в таблице сортамента значение осевого момента инерции двутавра № 14  $I_z = 572 \text{ см}^4$  и выполнить перевод единиц измерения в Н и мм. Подставляем численные значения в полученное выражение с переводом единиц измерения:

$$y_D = \frac{pl^4}{8EI_z} = \frac{7 \cdot 1,5^4 \cdot 10^{12}}{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 572 \cdot 10^4} = \frac{7 \cdot 5,0625 \cdot 10^3}{16 \cdot 572} = 3,87 \text{ мм}.$$

**Пример 3.6.** Определить горизонтальное перемещение сечения  $C$  в раме, нагруженной силой  $F$  (рис. 3.20, а).

**Решение.** Строим эпюру изгибающих моментов от действия силы  $F$  (рис. 3.20, б).

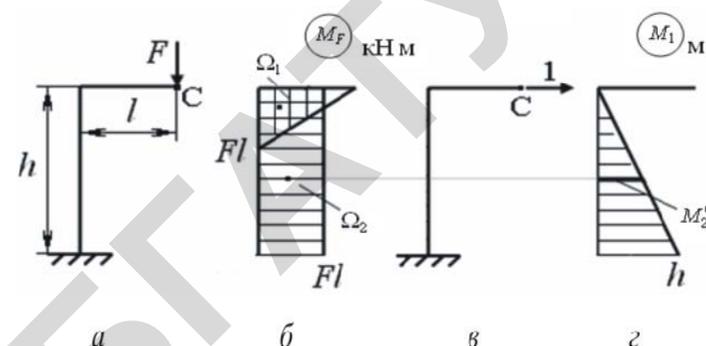


Рис. 3.20. Определение горизонтального перемещения в раме

На горизонтальном участке рамы эпюра представляет собой треугольник площадью

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot Fl = \frac{Fl^2}{2},$$

на вертикальном участке – прямоугольник площадью

$$\Omega_2 = Flh.$$

Для определения горизонтального перемещения прикладываем в точке  $C$  единичную безразмерную силу в горизонтальном направлении (рис. 3.20, в). Строим единичную эпюру от действия этой силы (рис. 3.20, г). Ордината под центром тяжести площади  $\Omega_1$  равна 0, под центром тяжести площади  $\Omega_2$  (переход с грузовой эпюры на единичную перпендикулярно оси участка)  $M_2^C = \frac{1}{2} \cdot h$ .

Горизонтальное перемещение в сечении  $C$  определится:

$$\Delta_{1F} = x_B = \frac{1}{EI_z} \cdot \left( \Omega_1 \cdot 0 + Flh \cdot \frac{h}{2} \right) = \frac{Flh^2}{2EI_z}.$$

### 3.2.4. Раскрытие статической неопределенности стержневых систем (балок) методом сил

#### Рекомендуемая методика решения статически неопределимых систем методом сил

1. Определить степень статической неопределенности системы.
2. Выбрать основную систему.
3. Построить эквивалентную систему.
4. Составить для эквивалентной системы канонические уравнения метода сил.
5. Построить в основной системе эпюру изгибающих моментов (или других внутренних силовых факторов) от действия внешних сил.
6. Построить в основной системе эпюры изгибающих моментов (или других внутренних силовых факторов) от действия единичных сил.
7. Определить коэффициенты канонических уравнений способом Верещагина.
8. Подставить значения коэффициентов в канонические уравнения и определить неизвестные силы.
9. Построить эпюру изгибающих моментов (и других внутренних силовых факторов).
10. Произвести статическую и деформационную проверки.
11. Подобрать поперечное сечение.

#### Теоретические предпосылки и примеры к практическому занятию

Статически неопределимые системы позволяют за счет более рационального распределения усилий по элементам конструкции достигать значительной экономии материала. Дополнительные связи увеличивают жесткость конструкции и предохраняют ее от разрушения при нарушении любой связи.

Для определения числа дополнительных связей с помощью кинематического анализа необходимо вычесть из общего числа

степеней свободы системы число внешних опорных и внутренних связей, налагаемых на движение элементов системы.

Число степеней свободы для плоской системы равно:

$$H = 3D - C_0 - C_B ; \quad (3.26)$$

где  $D$  – число стержней, образующих систему;

$C_B$  – число внутренних связей;

$C_0$  – число внешних, опорных связей.

Возможны три варианта:

- 1)  $H > 0$  – система кинематически изменяема и не применяется в качестве инженерного сооружения;
- 2)  $H = 0$  – система статически определима;
- 3)  $H < 0$  – система статически неопределима, имеет дополнительные (лишние) связи.

При расчете  $C_B$  следует учитывать, что каждый шарнир, соединяющий два элемента, накладывает две внутренние связи. Добавление стержня в шарнирный узел увеличивает число внутренних связей на две (рис. 3.21).

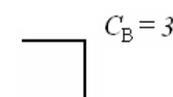
Неподвижное соединение двух элементов в узле эквивалентно трем внутренним связям (рис. 3.22).

$$C_B = 2$$


Рис. 3.21. Шарнирное соединение стержней

$$C_B = 4$$


Рис. 3.22. Неподвижное соединение стержней

$$C_B = 3$$


Между стержнями-элементами связей нет (рис. 3.23).

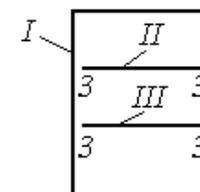


Рис. 3.23. Деление конструкции на элемент

В данном случае система разделяется на три элемента. Первый элемент представляет собой изогнутый стержень. Число внутренних связей равно 12.

В плоской системе шарнирно-подвижная опора налагает одну внешнюю связь, шарнирно-неподвижная опора – две внешние связи, заделка – три.

Суть метода сил заключается в том, что статически неопределимая система путем освобождения от дополнительных (лишних) связей превращается в статически определимую, геометрически неизменяемую. Действие отброшенных связей заменяется неизвестными силами и моментами. Их величины подбираются так, чтобы перемещения в системе оставались такими же, что и при наличии дополнительных связей. Таким образом, неизвестными при этом способе являются силы, откуда и происходит название «метод сил».

Расчет начинается с выбора основной системы. Основной системой является статически определимая, кинематически неизменяемая система, получаемая из заданной в результате освобождения ее от дополнительных связей. Основная система, к которой приложены все внешние нагрузки и неизвестные силы, заменяющие отброшенные связи, называется эквивалентной.

При рассмотрении перемещений в эквивалентной системе составляются уравнения перемещений, которые называются каноническими уравнениями метода сил. При  $H = -2$  они имеют вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Канонические уравнения выражают условия равенства нулю суммарных перемещений по направлению каждой из отброшенных связей. Их можно составить столько, сколько раз статически неопределима система.

Коэффициенты при неизвестных силах представляют собой перемещения в основной системе, вызванные единичными силами, заменяющими неизвестные силы. Перемещения с одинаковыми индексами  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$  называются главными коэффициентами канонических уравнений. Они всегда положительны и не равны нулю. Перемещения с разными индексами называются побочными коэффициентами канонических уравнений и могут быть положи-

тельными, отрицательными и равными нулю. Чем больше этих коэффициентов равно нулю, тем рациональнее выбрана основная система. Согласно теореме о взаимности перемещений эти коэффициенты попарно равны, то есть  $\delta_{12} = \delta_{21}$ .

Свободные члены уравнений, обозначенные буквой  $\Delta$ , представляют перемещения в основной системе под действием заданных внешних сил.

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений определяются с помощью интегралов Максвелла–Мора или способа Верещагина путем перемножения эпюр. Индексы указывают, какие эпюры должны быть перемножены. После их определения решается система канонических уравнений, и определяются неизвестные силы.

К основной системе с учетом знаков прикладываются найденные силы и заданные нагрузки. Обычным способом, как для статически определимой рамы, строятся суммарные эпюры внутренних силовых факторов  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .

После построения суммарной эпюры изгибающих моментов проводятся проверки:

1) статическая, которая заключается в проверке равновесия каждого вырезанного из рамы узла под действием внешних сил и внутренних силовых факторов;

2) деформационная, которая заключается в определении перемещений в системе по направлению лишних связей. Так как в эквивалентной системе перемещение по направлению лишней связи должно отсутствовать, то произведение окончательной эпюры изгибающих моментов на каждую из единичных эпюр должно равняться нулю.

Для определения погрешности вычислений необходимо найти суммы положительных и отрицательных членов. Разность этих сумм (в процентах) от меньшей из них не должна превышать 2 %.

По наибольшему значению изгибающего момента на эпюре находится опасное сечение. Для него, по условию прочности при изгибе:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \Rightarrow W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]}. \quad (3.28)$$

подбираются размеры поперечного сечения или номер прокатного профиля.

В рамах в поперечном сечении кроме изгибающего момента действует продольная сила, которая вызывает в сечении нормальные напряжения. Поэтому необходимо выполнить проверку с учетом продольной силы:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} + \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (3.29)$$

где  $N$  – продольная сила в опасном сечении.

Если  $\sigma_{\max}$  отличается от  $[\sigma]$  не более чем на 5 %, расчет считается законченным.

*Пример 3.7.* Для заданной балки построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  (рис. 3.24, а).

*Решение.* Определяем степень статической неопределимости, учитывая, что стрележь один, внутренние связи отсутствуют, внешних связей четыре (три опорные реакции – в заделке и одна в шарнирно-подвижной опоре):

$$H = 3D - C_0 - C_B = 3 \cdot 1 - 4 - 0 = -1.$$

Следовательно, система один раз статически неопределима и имеет одну лишнюю наложенную связь.

Выбираем основную систему, отбрасываем шарнирно-подвижную опору, система становится статически определимой (рис. 3.24, б).

Построим эквивалентную систему, приложив к основной системе заданную нагрузку  $p$  и неизвестное усилие  $X_1$ , заменяющее отброшенную опору (рис. 3.24, в).

Составляем каноническое уравнение метода сил, так как система один раз статически неопределима, уравнение будет одно:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Составляем схему нагружения в основной системе внешними силами (рис. 3.24, з) и строим грузовую эпюру от действия равномерно распределенной нагрузки  $p$  (рис. 3.24, д).

Прикладываем в основной системе неизвестную силу  $X_1$ , равную 1 (рис. 3.24, е), строим единичную эпюру от действия этой силы (рис. 3.24, ж).

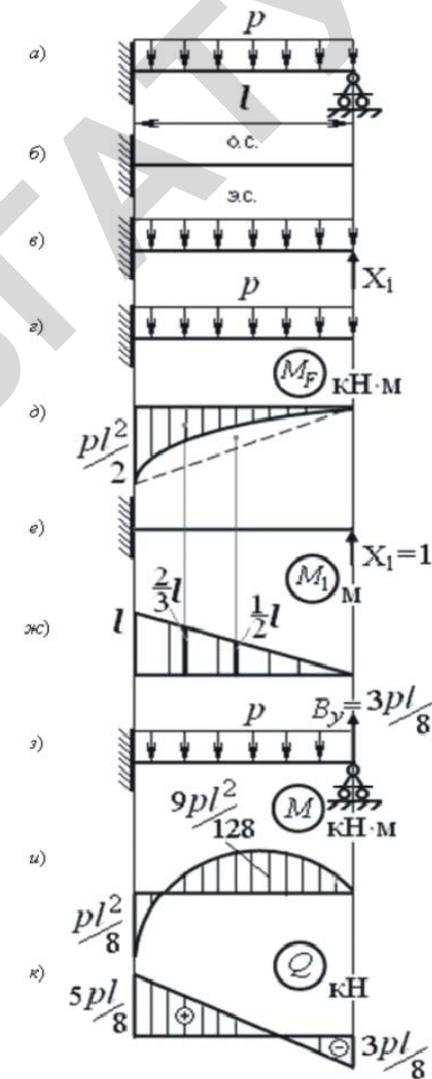


Рис. 3.24. Расчетные схемы, эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для статически неопределимой балки

Определяем коэффициент и свободный член канонического уравнения, перемножая эпюры способом Верещагина. Для определения главно-

го коэффициента  $\delta_{11}$  необходимо единичную эпюру умножить на саму себя:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right) = \frac{l^3}{3EI}.$$

Для определения свободного члена  $\Delta_{1F}$  перемножаем грузовую и единичную эпюры (подробно такое перемножение рассмотрено в примере 3.5). В нашем случае треугольники на эпюрах разнозначные, поэтому их перемножение по знаку отрицательное:

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{pl^2}{2} \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot l - \left( -\frac{pl^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \right) \right] = -\frac{pl^4}{8EI}.$$

Подставляем полученные значения в каноническое уравнение, определяем неизвестную силу:

$$\frac{l^3}{3EI} \cdot X_1 - \frac{pl^4}{8EI} = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{3}{8} \cdot pl = B_y.$$

Эта сила является опорной реакцией  $B_y$  в шарнирно-подвижной опоре. Статическая неопределимость системы раскрыта.

Составляем схему нагружения с учетом найденной опорной реакции (рис. 3.24, з) и строим эпюры изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$  (рис. 3.24, у, к):

$$0 \leq x \leq l;$$

$$M_x = B_y \cdot x - \frac{px^2}{2};$$

$$x = 0: M_x = 0;$$

$$x = l: M_x = \frac{3}{8} \cdot pl - \frac{pl^2}{2} = -\frac{pl^2}{8}.$$

Выполняем проверку на экстремум, для чего записываем уравнение поперечных сил и приравниваем его к нулю:

$$Q_x = -B_y + px = 0 \Rightarrow x = \frac{B_y}{p} = \frac{3}{8} \cdot l;$$

при  $x = \frac{3}{8} \cdot l$ :

$$M_{\text{экстр}} = \frac{3}{8} \cdot pl \cdot \frac{3}{8} \cdot l - \frac{p \cdot 9 \cdot l^2}{2 \cdot 64} = \frac{9}{64} \cdot pl^3 - \frac{9}{128} \cdot pl^3 = \frac{9pl^3}{128}.$$

Выполняем деформационную проверку, перемножая эпюру  $M$  на единичную эпюру:

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI_Z} \cdot \left( \frac{pl^3}{12} \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{pl^2}{8} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right) = \frac{1}{EI_Z} \cdot \left( \frac{pl^4}{24} - \frac{pl^4}{24} \right) = 0.$$

Строим эпюру поперечных сил:

$$Q_x = -B_y + px;$$

$$x = 0: Q_x = -B_y = -\frac{3}{8} \cdot pl;$$

$$x = l: Q_x = -B_y + pl = -\frac{3}{8} \cdot pl + pl = \frac{5}{8} \cdot pl.$$

### 3.3. Задания по управляемой самостоятельной работе студентов и рекомендации по их выполнению

#### 3.3.1. Косой изгиб

Изучить по конспекту теоретический материал и выполнить ИДЗ по теме «Косой изгиб»: подобрать размеры поперечного сечения  $h$  и  $b$  при известном допуске напряжении  $[\sigma]$  и соотношении  $h/b$ ; определить положение опасного сечения; провести в опасном сечении нейтральную ось и построить для этого сечения эпюру нормальных напряжений в аксонометрии [12, с. 52, п. 1].

Исходные данные для выполнения задания принимаются в соответствии с выданным преподавателем вариантом: номером схем [12, рис. 2.9] и номером строки [12, табл. 2.1]. Пример исходных данных для варианта: номер схемы (2) и строки (5) приводится, соответственно, в табл. 3.1 и на рис. 3.25.

Форма контроля – проверка письменно выполненного ИДЗ.

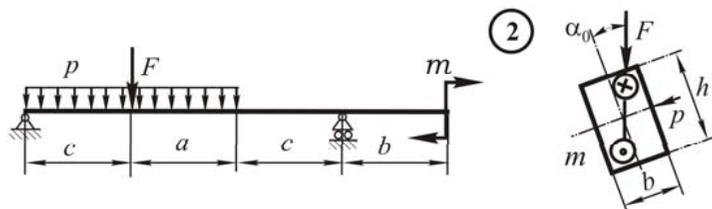


Рис. 3.25. Схема (2) к ИДЗ «Косой изгиб»

Таблица 3.1

Числовые данные к ИДЗ «Косой изгиб»

№ строки	Размеры			Нагрузки			Форма и размеры поперечного сечения						
	a, м	b, м	c, м	m, кН·м	F, кН	p, кН/м	Прямоугольник		№ двутавр проф	№ швеллер проф	Труба прямоугольная		
							h, м	b, м			h, м	b, м	t, м
5	1,8	1	1,2	9	17	14	0,22	0,16	24а	24	0,28	0,16	0,02

### Теоретические предпосылки к заданию

Косым изгибом называется такой вид сложного сопротивления, когда в поперечном сечении бруса одновременно возникают два изгибающих момента  $M_z$  и  $M_y$ .

Косой изгиб может быть плоским и пространственным.

Плоский косой изгиб имеет место, когда все внешние силы действуют в одной плоскости, проходящей через ось бруса и образующей постоянный угол с его главной центральной плоскостью (рис. 3.26). В этом случае упругая линия (изогнутая ось) представляет собой плоскую кривую.

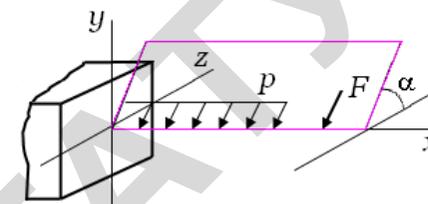


Рис. 3.26. Плоский косой изгиб

При пространственном изгибе внешние нагрузки располагаются в разных плоскостях, проходящих через ось бруса (рис. 3.27). В этом случае упругая линия будет представлять собой пространственную кривую.

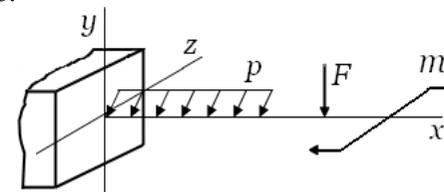


Рис. 3.27. Пространственный косой изгиб

В общем случае при косом изгибе в поперечных сечениях действуют четыре внутренних силовых фактора:  $M_z$  и  $Q_y$ ,  $M_y$  и  $Q_z$ . Влиянием касательных напряжений от действия поперечных сил пренебрегают и рассматривают действие только изгибающих моментов. Расчет на прочность производится по нормальным напряжениям, как при одноосном напряженном состоянии, поэтому теории прочности при таком расчете не используются. Касательные напряжения при косом изгибе от каждой из поперечных сил могут быть определены по формуле Журавского.

Нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения, согласно принципу независимости действия сил, будут равны алгебраической сумме напряжений от изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_y$ .

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{I_z} \cdot y \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot z = M \left( \pm \frac{\cos \alpha \cdot y}{I_z} \pm \frac{\sin \alpha \cdot z}{I_y} \right). \quad (3.30)$$

В формуле (3.30) перед первой дробью ставится знак «+», когда момент  $M_z$  вызывает растяжение в точках сечения с положительными координатами  $y$ , перед второй дробью – когда момент  $M_y$  вызывает растяжение в точках с положительными координатами  $z$ .

Из формулы (3.30) следует вывод, что нормальные напряжения при косом изгибе изменяются по линейному закону. Максимальные напряжения возникают в точках нейтральной оси, уравнение которой можно получить, приравняв (3.30) к нулю:

$$y = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} \cdot z = \operatorname{tg} \beta \cdot z, \quad (3.31)$$

где  $\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{I_z}{I_y}$  – угловой коэффициент нейтральной линии,

где  $\alpha$  – угол между следом плоскости действия изгибающего момента (СПДМ) и осью  $z$ .

Из выражения (3.31) следует:

1) нейтральная линия является прямой, проходящей через центр тяжести сечения (поэтому применим термин «нейтральная ось»);

2) при пространственном косом изгибе положение нейтральной линии по длине балки изменяется в соответствии с изменением от-

ношения изгибающих моментов  $\frac{M_y}{M_z} = \operatorname{ctg} \alpha$ ;

3) при плоском косом изгибе положение нейтральной линии по длине балки остается постоянным;

4) нейтральная ось не перпендикулярна плоскости действия изгибающего момента, в отличие от прямого изгиба.

Она будет перпендикулярна этой плоскости только при равенстве  $I_z = I_y$  для таких сечений, как круг, квадрат. Но для сечений, имеющих более двух осей симметрии, любые центральные оси инерции сечения являются главными, следовательно, косой изгиб в этом случае невозможен.

Для определения положения опасных точек сечения необходимо провести нейтральную ось и касательные к контуру сечения, ей параллельные (рис. 3.26). В нашем случае опасными бу-

дут точки 1 и 3. Нейтральная ось делит сечение на две части: в одной возникают растягивающие напряжения, в другой – сжимающие.

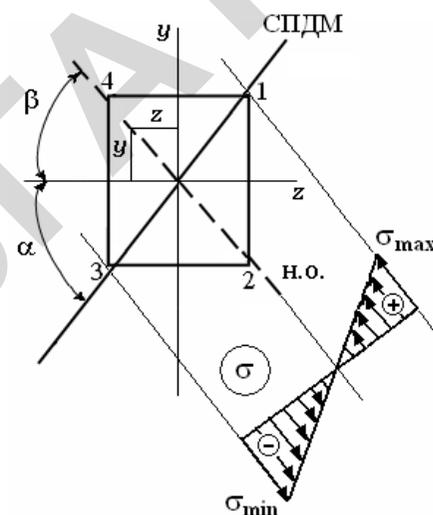


Рис. 3.28. Определение положения опасных точек при косом изгибе и эпюра нормальных напряжений

В одной опасной точке будет действовать наибольшее растягивающее, в другой – наибольшее сжимающее напряжение. Условия прочности для опасных точек имеют вид:

$$\sigma_{\max}^p = \sigma_1 = \frac{M_z y_1}{I_z} + \frac{M_y z_1}{I_y} \leq [\sigma_p], \quad (3.32)$$

$$\sigma_{\max}^c = \sigma_3 = \left| \frac{M_z y_3}{I_z} + \frac{M_y z_3}{I_y} \right| \leq [\sigma_c], \quad (3.33)$$

где  $y_1, y_3, z_1, z_3$  – координаты опасных точек относительно главных центральных осей;

$[\sigma_p], [\sigma_c]$  – допускаемые напряжения на растяжение и сжатие.

При плоском косом изгибе оба момента  $M_z$  и  $M_y$  часто имеют наибольшее значение в одном поперечном сечении, которое является опасным. В этом случае условие прочности запишется:

$$\sigma_{\max} = M_{\max} \left( \frac{\cos \alpha \cdot y_1}{I_z} + \frac{\sin \alpha \cdot z_1}{I_y} \right) \leq [\sigma]. \quad (3.34)$$

При пространственном косом изгибе моменты  $M_z$  и  $M_y$  имеют наибольшее значение в разных сечениях, поэтому расчет требуется проводить для двух или более предположительно опасных сечений (рис. 3.29).

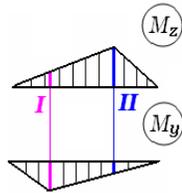


Рис. 3.29. Предположительно опасные сечения при косом изгибе

Если сечение таково, что опасная точка имеет координаты  $y = y_{\max}$  и  $z = z_{\max}$ , учитывая, что  $\frac{I_z}{y_{\max}} = W_z$  и  $\frac{I_y}{z_{\max}} = W_y$ , условие прочности

можно выразить через моменты сопротивления. Для сечений с двумя осями симметрии, угловые точки которых наиболее удалены от обеих главных центральных осей (прямоугольник, двутавр), условие прочности можно записать в виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (3.35)$$

Подбор сечений при косом изгибе осложняется наличием в условиях прочности одновременно двух неизвестных моментов инерции или моментов сопротивления. Поэтому сначала задается их отношение, а затем производят проверку выбранного сечения.

Задается отношение  $c = \frac{W_z}{W_y}$  и определяется осевой момент сопротивления:

$$W_z = \frac{M_z + cM_y}{[\sigma]}. \quad (3.36)$$

Для прямоугольного сечения шириной  $b$  и высотой  $h$  величина  $c$  равна отношению сторон  $\frac{h}{b}$ ; для двутавровых сечений величина  $c$  изменяется в пределах  $5 \div 14$ , в расчетах в качестве первой пробы принимают  $c = 8$ ; для швеллеров принимают  $c = 6$ .

Расчет круглых и кольцевых сечений проводят по общему изгибающему моменту как при прямом изгибе:

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}. \quad (3.37)$$

При косом изгибе прогибы и углы поворота сечений определяются отдельно в каждой главной плоскости теми же методами, что и при прямом изгибе.

Полный прогиб находится как геометрическая сумма составляющих прогибов (рис. 3.30):

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}. \quad (3.38)$$

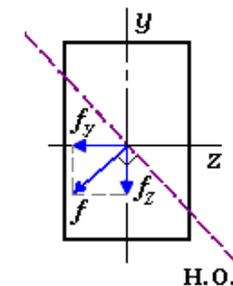


Рис. 3.30. Определение полного прогиба при косом изгибе

Аналогично угол поворота поперечного сечения равен геометрической сумме углов поворота  $\theta_y$  и  $\theta_z$  этого сечения относительно главных центральных осей:

$$\theta = \sqrt{\theta_y^2 + \theta_z^2}. \quad (3.39)$$

Полный прогиб происходит в плоскости, перпендикулярной нейтральной оси, а полный угол поворота сечения происходит вокруг нее.

При косом изгибе наиболее рациональными являются коробчатые тонкостенные сечения. Косой изгиб может быть весьма опасен с точки зрения значения напряжений и прогибов, особенно для сечений с резко отличающимися моментами инерции  $I_z$  и  $I_y$  (узких и высоких).

### Образец выполнения задания

Заданная деревянная балка прямоугольного поперечного сечения нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $p = 10$  кН/м и моментом в виде пары сил  $m = 12$  кНм (рис. 3.31, а). В опорах балки возникают реакции, действующие в главных центральных плоскостях инерции. Подобрать размеры поперечного сечения  $h$  и  $b$  при допуске напряжении  $[\sigma] = 10$  МПа, если соотношение  $h/b = 1,2$ , провести в опасном сечении нейтральную ось и построить для этого сечения эпюру нормальных напряжений в аксонометрии.

*Решение.* Проведем для поперечных сечений балки главные центральные оси инерции  $y, z$ , а ось  $x$  совместим с осью балки (рис. 3.31, а). Спроектируем силы, действующие на балку, в главную центральную плоскость инерции  $yx$ :

$$m_z = m \cdot \cos \alpha_m = 12 \cdot \cos 20^\circ = 11,276 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Составляем расчетную схему балки, нагруженной внешними силами в плоскости  $yx$ , и соответственно изгибающими ее относительно оси  $z$  (рис. 3.31, б). Для нахождения неизвестных опорных реакций  $B_y$  и  $C_y$  составим уравнения равновесия.

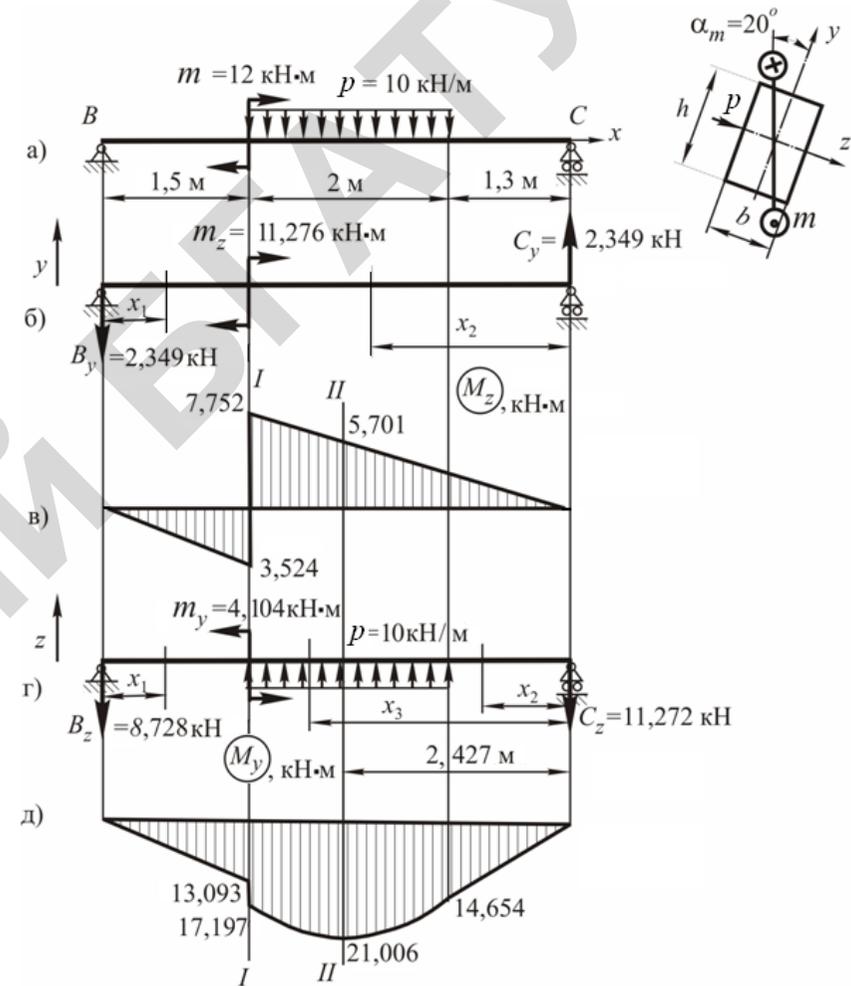


Рис. 3.31. Расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов

Составляющая опорной реакции в шарнире  $B$  равна нулю, так как силы, действующие на балку, перпендикулярны оси  $x$ :

$$\sum m_c (F_i) = -B_y \cdot 4,8 + m_z = 0;$$

$$\sum m_B (F_i) = -C_y \cdot 4,8 + m_z = 0.$$

Решая уравнения равновесия, находим опорные реакции:

$$B_y = \frac{m_z}{4,8} = \frac{11,276}{4,8} = 2,349 \text{ кН},$$

$$C_y = \frac{m_z}{4,8} = \frac{11,276}{4,8} = 2,349 \text{ кН}.$$

Проверим правильность определения опорных реакций, используя уравнение равновесия в виде суммы проекций сил на ось  $y$ .

$$\Sigma F_y = -B_y + C_y = -2,349 + 2,349 = 0.$$

Опорные реакции  $B_y$  и  $C_y$  определены верно.

Разбиваем балку на два расчетных участка и находим значения изгибающего момента  $M_z$ .

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq 1,5$  м):

$$M_{x_1} = -B_y x_1;$$

$$x_1 = 0: M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 1,5 \text{ м}: M_{x_1} = -2,349 \cdot 1,5 = -3,524 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок II ( $0 \leq x_2 \leq 3,3$  м):

$$M_{x_2} = C_y x_2;$$

$$x_2 = 0: M_{x_2} = 0;$$

$$x_2 = 3,3 \text{ м}: M_{x_2} = 2,349 \cdot 3,3 = 7,752 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По найденным значениям изгибающего момента строим эпюру  $M_z$  (рис. 3.31, в).

Спроектируем силы, действующие на балку, в главную центральную плоскость инерции  $xz$ :

$$m_y = m \cdot \sin \alpha_m = 12 \cdot \sin 20^\circ = 4,104 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Составляем расчетную схему балки, нагруженной внешними силами в плоскости  $xz$ , и соответственно изгибающими ее относительно оси  $y$  (рис. 3.31, з).

Для нахождения неизвестных опорных реакции  $B_z$  и  $C_z$  составим уравнения равновесия. Составляющая опорной реакции в шарнире  $B$  равна нулю, так как силы, действующие на балку, перпендикулярны оси  $x$ :

$$\Sigma m_c(F_i) = -B_z \cdot 4,8 - m_y + p \cdot 2 \cdot 2,3 = 0;$$

$$\Sigma m_B(F_i) = -C_z \cdot 4,8 + m_y + p \cdot 2 \cdot 2,5 = 0.$$

Решая уравнения равновесия, находим опорные реакции:

$$B_z = \frac{-m_y + p \cdot 2 \cdot 2,3}{4,8} = \frac{-4,104 + 10 \cdot 2 \cdot 2,3}{4,8} = 8,728 \text{ кН},$$

$$C_z = \frac{m_y + p \cdot 2 \cdot 2,5}{4,8} = \frac{4,104 + 10 \cdot 2 \cdot 2,5}{4,8} = 11,272 \text{ кН}.$$

Проверим правильности определения опорных реакций, используя уравнение равновесия в виде суммы проекций сил на ось  $z$ :

$$\Sigma F_z = -B_z + p \cdot 2 - C_z = -8,728 + 20 - 11,272 = 0.$$

Значит, опорные реакции  $B_z$  и  $C_z$  определены верно.

Разбиваем балку на два расчетных участка и находим значения изгибающего момента относительно оси  $y$  ( $M_y$ ).

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq 1,5$  м):

$$M_{x_1} = -B_z x_1;$$

$$x_1 = 0: M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 1,5 \text{ м}: M_{x_1} = -8,728 \cdot 1,5 = -13,093 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок II ( $0 \leq x_2 \leq 1,3$  м):

$$M_{x_2} = -C_z x_2;$$

$$x_2 = 0: M_{x_2} = 0;$$

$$x_2 = 1,3 \text{ м}: M_{x_2} = -11,272 \cdot 1,3 = 14,654 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок III ( $1,3 \text{ м} \leq x_3 \leq 3,3 \text{ м}$ ):

$$M_{x_3} = -C_z x_3 + p \cdot \frac{(x_3 - 1,3)^2}{2};$$

$$x_3 = 1,3 \text{ м}: M_{x_3} = -11,272 \cdot 1,3 = 14,654 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_3 = 3,3 \text{ м}: M_{x_3} = -11,272 \cdot 3,3 + 10 \cdot \frac{(3,3 - 1,3)^2}{2} = 17,197 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На третьем расчетном участке изгибающий момент  $M_y$  имеет экстремальное значение. Для его определения составим и приравняем к нулю выражение поперечной силы  $Q_{x_3}$ , а также найдем расстояние  $x_3$  до сечения с экстремальным значением изгибающего момента:

$$Q_{x_3} = C_z - p \cdot (x_3 - 1,3) = 0,$$

откуда

$$x_3 = \frac{11,272 + 1,3 \cdot 10}{10} = 2,427 \text{ м}.$$

Подставив полученное значение  $x_3$  в уравнение моментов  $M_{x_3}$ , найдем величину искомого экстремального момента:

$$M_{x_3} = -11,272 \cdot 2,427 + 10 \cdot \frac{(2,427 - 1,3)^2}{2} = -21,006 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По найденным значениям изгибающего момента строим эпюру  $M_y$  (рис. 3.31, д).

Находим положение опасного сечения балки. Как показывают эпюры изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_y$ , опасное сечение может располагаться на расстоянии 1,5 м от точки  $B$  ( $M_z^{\max} = 7,752 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $M_y = 17,197 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ) или на расстоянии 2,427 м от точки  $C$  ( $M_z = 2,349 \times 2,427 = 5,701 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $M_y^{\max} = 21,006 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ).

Определим величину максимальных напряжений в этих сечениях по формуле (3.36):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y},$$

где  $W_z$  и  $W_y$  – моменты сопротивления поперечного сечения относительно осей  $z$  и  $y$ .

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(1,2b)^2}{6} = 0,24b^3;$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{1,2b \cdot b^2}{6} = 0,2b^3.$$

Тогда

$$\sigma_{\max}^I = \frac{7,752}{0,24b^3} + \frac{17,197}{0,2b^3} = \frac{118,285}{b^3};$$

$$\sigma_{\max}^{II} = \frac{5,701}{0,24b^3} + \frac{21,006}{0,2b^3} = \frac{128,784}{b^3}.$$

Значит, опасным сечением является сечение II, так как  $\sigma_{\max}^{II} > \sigma_{\max}^I$ .

Определяем в опасном сечении балки положение нейтральной оси:

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{I_z}{I_y} = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} = -\frac{21,006}{5,701} \cdot \frac{b(1,2b)^3 \cdot 12}{1,2b \cdot b^3 \cdot 12} = 5,306.$$

$$\beta = \operatorname{arctg} 5,306 = 79,3^\circ.$$

Откладываем от оси  $z$  против хода часовой стрелки угол  $\beta$  и проводим нейтральную ось (рис. 3.32). Опасными точками будут точки опасного поперечного сечения, наиболее удаленные от нейтральной оси, то есть точки I и 3.

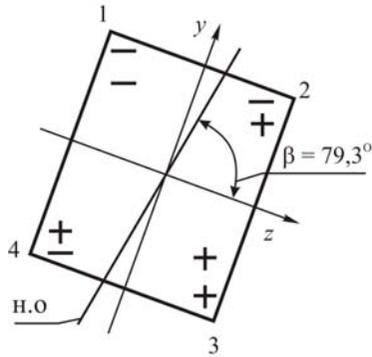


Рис. 3.32. Опасное сечение балки

Определяем ширину поперечного сечения балки из условия:

$$\sigma_{\max}^{\text{п}} = \frac{128,784}{b^3} \leq [\sigma].$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{128,784 \cdot 10^6}{10}} = 235 \text{ мм.}$$

Тогда высота поперечного сечения будет равна:

$$h = 1,2 \cdot b = 1,2 \cdot 235 = 282 \text{ мм.}$$

Найдем величины осевых моментов сопротивления поперечного сечения:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{235 \cdot 282^2}{6} = 3\,114\,690 \text{ мм}^3;$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{282 \cdot 235^2}{6} = 2\,595\,575 \text{ мм}^3.$$

Для построения эпюры нормальных напряжений определим напряжения в выступающих угловых точках (1, 2, 3, 4) опасного поперечного сечения (см. рис. 3.32) по формуле:

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y}.$$

При выполнении расчетов величины изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_y$  принимаем по модулю, а знаки перед каждым слагаемым ставим с учетом характера деформации в точке (при растяжении – «+», при сжатии – «-»).

$$\sigma_{(1)} = -\frac{5,701 \cdot 10^6}{3\,114\,690} - \frac{21,006 \cdot 10^6}{2\,595\,575} = -9,923 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = -\frac{5,701 \cdot 10^6}{3\,114\,690} + \frac{21,006 \cdot 10^6}{2\,595\,575} = 6,263 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{5,701 \cdot 10^6}{3\,114\,690} + \frac{21,006 \cdot 10^6}{2\,595\,575} = 9,923 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(4)} = \frac{5,701 \cdot 10^6}{3\,114\,690} - \frac{21,006 \cdot 10^6}{2\,595\,575} = -6,263 \text{ МПа}.$$

По найденным значениям строим в аксонометрии эпюры нормальных напряжений, действующих по граням опасного сечения балки (рис. 3.33).

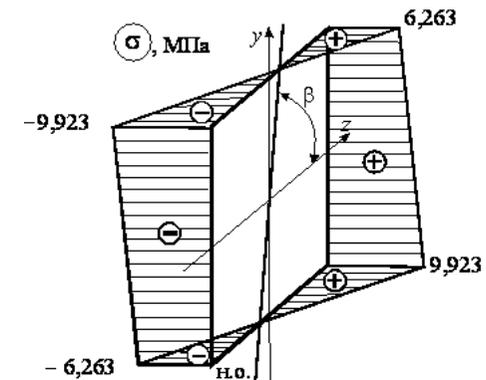


Рис. 3.33. Эпюры нормальных напряжений, действующих по граням опасного сечения балки при косом изгибе

Из эпюр видно, что в точках, в которых нейтральная ось пересекает контур сечения, нормальные напряжения равны нулю.

### 3.3.2. Расчет статически неопределимых систем методом сил

Изучить по конспекту теоретический материал и выполнить ИДЗ по теме «Расчет статически неопределимых систем методом сил» – для заданной рамы построить эпюры внутренних силовых факторов и подобрать размеры поперечного сечения прямоугольника [12, с. 85, п. 1].

Исходные данные для выполнения задания принимаются в соответствии с выданным преподавателем вариантом: номером схем [12, рис. 3.8] и номером строки [12, табл. 3.1]. Пример исходных данных для варианта: номер схем (1) и (2) и строки (2) приводится, соответственно, в табл. 3.2 и на рис. 3.34.

Форма контроля – проверка письменно выполненного ИДЗ.

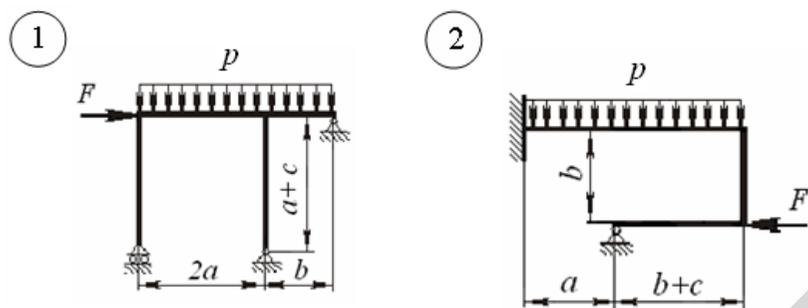


Рис. 3.34. Схемы (1) и (2) к ИДЗ

«Расчет статически неопределимых систем методом сил»

Таблица 3.2

Числовые данные к ИДЗ

«Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил»

№ строки	Размеры, м			Нагрузки		
	a	b	c	m, кН·м	F, кН	p, кН/м
2	1,2	1,5	1,0	10	6	8

### Образец выполнения задания

Для заданной рамы (рис. 3.35) построить эпюры внутренних силовых факторов и подобрать размеры поперечного сечения прямоугольника, если отношение высоты к ширине равно 2. Принять  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ ,  $b = 1 \text{ м}$ ,  $c = 1,8 \text{ м}$ ,  $F = 15 \text{ кН}$ ,  $p = 10 \text{ кН/м}$ .

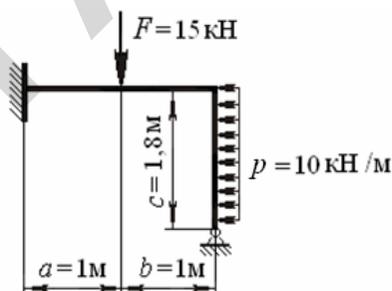


Рис. 3.35. Расчетная схема рамы

*Решение.* Вычерчиваем в масштабе схему рамы и прикладываем к ней внешние нагрузки (рис. 3.36, а).

Система состоит из одного элемента – изогнутого стержня, поэтому внутренние связи отсутствуют. В заделке возникают три опорные реакции, в шарнирно-неподвижной опоре – две. Определяем степень статической неопределимости:

$$H = 3D - C_0 - C_B = 3 \cdot 1 - 5 - 0 = -2.$$

Следовательно, система дважды статически неопределимая. В ней можно отбросить две дополнительные связи (опорные реакции шарнирно-неподвижной опоры), обозначив их  $X_1$  и  $X_2$ . Для данной системы можно составить два канонических уравнения, построить две единичные эпюры.

Выбираем основную и эквивалентную системы (рис. 3.36, б, в).

Составляем канонические уравнения метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

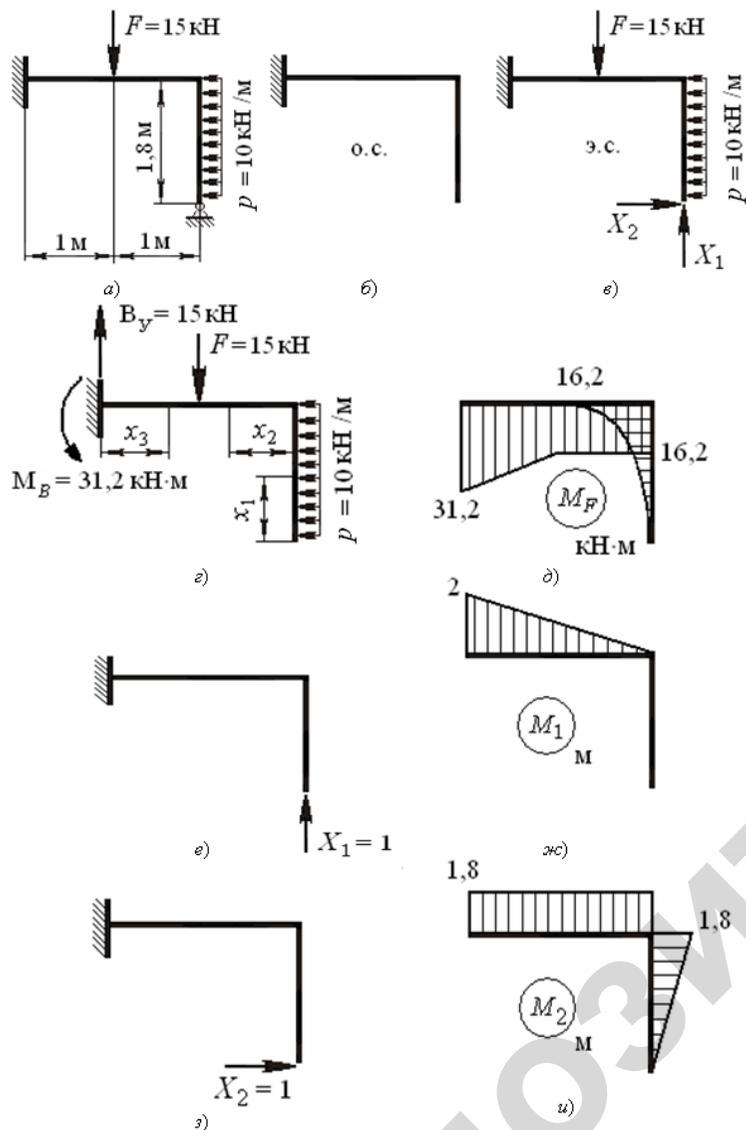


Рис. 3.36. Расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов для статически неопределимой рамы

Прикладываем к основной системе заданные нагрузки (рис. 3.36, з) и определяем опорные реакции с помощью уравнений статики:

$$\sum F_x = 0; \quad B_x - p \cdot 1,8 = 0; \quad B_x = 18 \text{ кН.}$$

$$\sum F_y = 0; \quad B_y - F = 0; \quad B_y = 15 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0; \quad M_B - F \cdot 1 - p \cdot 1,8 \cdot 0,9 = 0;$$

$$M_B = 15 + 10 \cdot 1,8 \cdot 0,9 = 31,2 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Разбиваем раму на участки и записываем уравнения изгибающих моментов на каждом из них.

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq 1,8 \text{ м}$ ):

$$M_{X_1} = -\frac{px^2}{2};$$

$$x_1 = 0: \quad M_{X_1} = 0;$$

$$x_1 = 1,8 \text{ м}: \quad M_{X_1} = -\frac{10 \cdot 1,8^2}{2} = -16,2 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Участок II ( $0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м}$ ):

$$M_{X_2} = -q \cdot 1,8 \cdot 0,9 = -16,2 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Участок III ( $0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м}$ ):

$$M_{X_3} = -M_B + B_y x_3;$$

$$x_3 = 0: \quad M_{X_3} = -31,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_3 = 1 \text{ м}: \quad M_{X_3} = -31,2 + 15 \cdot 1 = -16,2 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

По найденным значениям изгибающих моментов строим грузовую эпюру  $M_F$  (рис. 3.36, д).

Прикладываем к основной системе силу  $X_1 = 1$  (рис. 3.36, е) и строим единичную эпюру  $M_1$  (рис. 3.36, ж).

Прикладываем к основной системе силу  $X_2 = 1$  (рис. 3.36, з) и строим единичную эпюру  $M_2$  (рис. 3.36, и).

Определяем коэффициенты канонических уравнений путем перемножения эпюр способом Верещагина. Численные значения определяем с точностью три знака после запятой:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_z} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{8}{3EI_z} = \frac{2,667}{EI_z};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_z} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1,8 \cdot 1,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,8 + 1,8 \cdot 2 \cdot 1,8 \right) = \frac{1,944 + 6,48}{EI_z} = \frac{8,424}{EI_z};$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI_z} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1,8 \right) = \frac{3,6}{EI_z};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI_z} \cdot \left( -16,2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 1 \cdot \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \right) = \frac{-32,4 - 12,5}{EI_z} = -\frac{44,9}{EI_z};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI_z} \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot 1,8 \cdot 16,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,8 + \frac{10 \cdot 1,8^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,8 - 16,2 \times \right. \\ \left. \times 2 \cdot 1,8 - \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 1 \cdot 1,8 \right) = \frac{-17,496 + 4,374 - 58,32 - 13,5}{EI_z} = -\frac{84,942}{EI_z}.$$

Можно провести проверку правильности вычисления коэффициентов канонических уравнений. Для этого нужно построить в основной системе суммарную единичную эпюру моментов  $M_S$  (рис. 3.37) и умножить ее на саму себя:

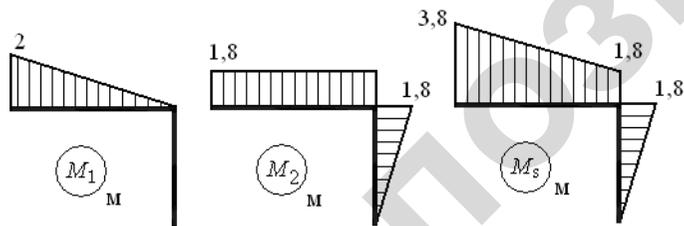


Рис. 3.37. Единичные эпюры

$$\delta_{SS} = \frac{1}{EI_z} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1,8 \cdot 1,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,8 + 1,8 \cdot 2 \cdot \frac{(3,8 + 1,8)}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \times \right. \\ \left. \times 2 \left( \frac{2}{3} \cdot 3,8 + \frac{1}{3} \cdot 1,8 \right) \right) = \frac{1,944 + 10,08 + 6,267}{EI_z} = \frac{18,291}{EI_z}.$$

Результат перемножения должен быть равен сумме коэффициентов при неизвестных всех членов в канонических уравнениях. Просуммировав коэффициенты всех членов уравнений, получим ту же величину:

$$\delta_{\Sigma} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = \\ = \frac{2,667}{EI_z} + 2 \cdot \frac{3,6}{EI_z} + \frac{8,424}{EI_z} = \frac{18,291}{EI_z}.$$

При перемножении грузовой эпюры на суммарную единичную (рис. 3.38) должна быть получена сумма свободных членов канонических уравнений:

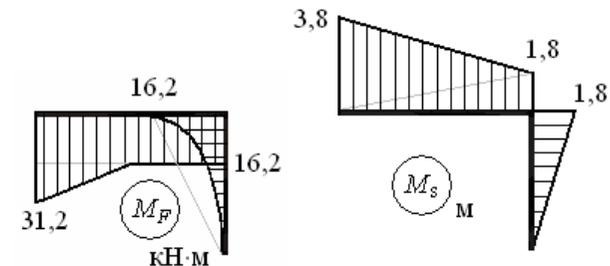


Рис. 3.38. Грузовая и суммарная единичная эпюры

$$\Delta_{SF} = \frac{1}{EI_z} \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot 16,2 \cdot 1,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,8 + \frac{10 \cdot 1,8^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,8 - 16,2 \cdot 2 \cdot \frac{(3,8 + 1,8)}{2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 1 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 3,8 + \frac{1}{3} \cdot \frac{(3,8 + 1,8)}{2} \right) \right) = \\ = \frac{1}{EI_z} \cdot (-17,496 + 4,374 - 90,72 - 25,998) = -\frac{129,843}{EI_z};$$

$$\Delta_{\Sigma} = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} = -\frac{44,9}{EI_z} - \frac{84,942}{EI_z} = -\frac{129,842}{EI_z}.$$

$$129,843 - 129,842 = 0,001.$$

Погрешность 0,001 допустима.

Подставляем полученные значения коэффициентов в канонические уравнения и находим неизвестные  $X_1$  и  $X_2$ :

$$\begin{cases} \frac{2,667}{EI_z} \cdot X_1 + \frac{3,6}{EI_z} \cdot X_2 - \frac{44,9}{EI_z} = 0 \\ \frac{3,6}{EI_z} \cdot X_1 + \frac{8,424}{EI_z} \cdot X_2 - \frac{84,942}{EI_z} = 0. \end{cases}$$

После упрощения уравнений:

$$\begin{cases} 2,667X_1 + 3,6X_2 - 44,9 = 0 \\ 3,6X_1 + 8,424X_2 - 84,942 = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим:  $X_1 = 7,619$  кН и  $X_2 = 6,826$  кН. Положительные значения сил показывают, что их направления совпадают с направлениями единичных сил. Прикладываем найденные силы и рассматриваем их как внешние силы, приложенные к основной системе (рис. 3.39, а).

Определяем опорные реакции:

$$\sum F_x = 0; \quad B_x + X_2 - p \cdot 1,8 = 0; \quad B_x = 11,174 \text{ кН.}$$

$$\sum F_y = 0; \quad B_y - F + X_1 = 0; \quad B_y = 7,381 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$M_B - F \cdot 1 - p \cdot 1,8 \cdot 0,9 + X_1 \cdot 2 + X_2 \cdot 1,8 = 0;$$

$$M_B = 3,675 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Строим эпюру изгибающих моментов (рис. 3.39, б):

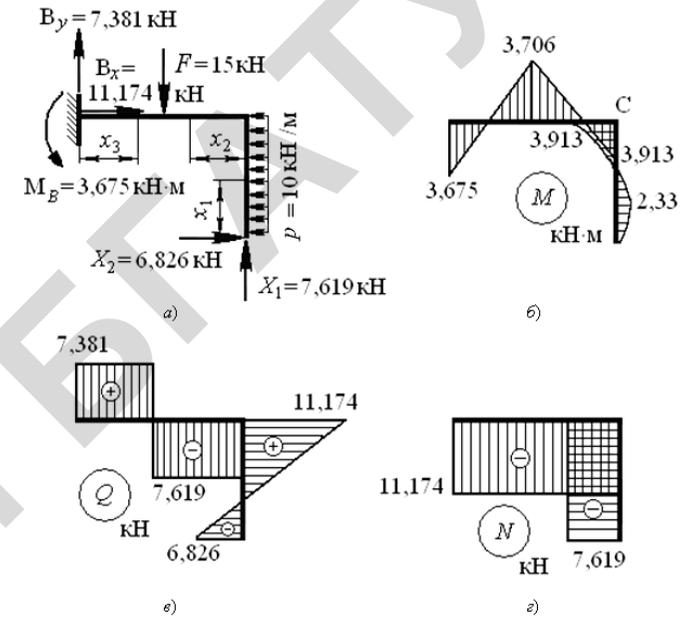


Рис. 3.39. Расчетная схема и эпюры внутренних силовых факторов для статически неопределимой рамы

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq 1,8$  м):

$$M_{x_1} = X_2 \cdot x_1 - \frac{px^2}{2};$$

$$x_1 = 0: \quad M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 1,8 \text{ м:} \quad M_{x_1} = 6,826 \cdot 1,8 - \frac{10 \cdot 1,8^2}{2} = -3,913 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Проверяем наличие экстремума:

$$Q_{x_1} = \frac{dM_{x_1}}{dx_1} = X_2 - px_1 = 0 \Rightarrow \quad x_1 = \frac{X_2}{p} = \frac{6,826}{10} = 0,683 \text{ м;}$$

$$x_1 = 0,683 \text{ м:} \quad M_{x_1} = 6,826 \cdot 0,683 - \frac{10 \cdot 0,683^2}{2} = 2,332 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Участок II ( $0 \leq x_2 \leq 1$  м):

$$M_{X_2} = X_2 \cdot 1,8 + X_1 x_2 - p \cdot 1,8 \cdot 0,9;$$

$$x_2 = 0: M_{X_2} = -3,913 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_2 = 1 \text{ м}: M_{X_2} = 3,706 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок III ( $0 \leq x_3 \leq 1$  м):

$$M_{X_3} = -M_B + B_y x_3;$$

$$x_3 = 0: M_{X_3} = -3,675 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_3 = 1 \text{ м}: M_{X_3} = -3,675 + 7,381 \cdot 1 = 3,706 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Выполняем проверки:

1) статическая – проверяем равновесие вырезанного из рамы узла C под действием внешних сил и внутренних силовых факторов (рис. 3.40).

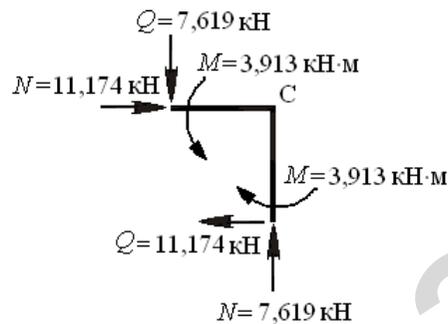


Рис. 3.40. Статическая проверка равновесия узла рамы

2) деформационная – определяем перемещения в системе по направлению лишних связей, перемножая поочередно суммарную эпюру изгибающих моментов на единичные эпюры (рис. 3.41):

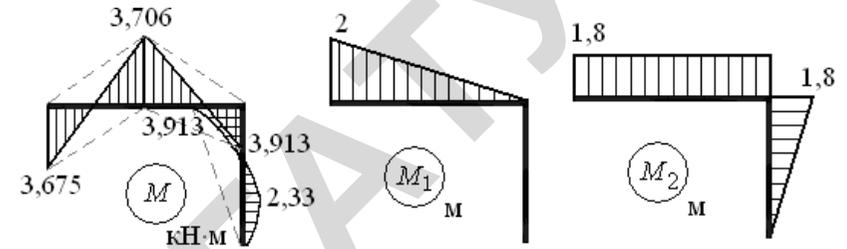


Рис. 3.41. Суммарная эпюра изгибающих моментов и единичные эпюры

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI_z} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 3,706 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3,913 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3,706 \cdot \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot 3,675 \cdot 1 \cdot \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \right) =$$

$$= \frac{1,235 - 0,652 + 2,471 - 3,0625}{EI_z} = \frac{3,706 - 3,7145}{EI_z} = -\frac{0,0085}{EI_z}.$$

Определяем погрешность вычислений:

$$\frac{0,0085}{3,706} \cdot 100 \% = 0,23 \% < [2 \%].$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI_z} \cdot \left( \frac{10 \cdot 1,8^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,8 - \frac{1}{2} \cdot 3,913 \cdot 1,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,8 + \frac{1}{2} \cdot 3,706 \cdot 1 \cdot 1,8 - \frac{1}{2} \cdot 3,913 \cdot 1 \cdot 1,8 + \frac{1}{2} \cdot 3,706 \cdot 1 \cdot 1,8 - \frac{1}{2} \cdot 3,675 \cdot 1 \cdot 1,8 \right) =$$

$$= \frac{4,374 - 4,226 + 3,335 - 3,522 + 3,335 - 3,307}{EI_z} = \frac{11,045 - 11,056}{EI_z} = -\frac{0,011}{EI_z}.$$

Определяем погрешность вычислений:

$$\frac{0,011}{11,045} \cdot 100 \% = 0,09 \% < [2 \%].$$

Следовательно, неизвестные силы определены верно, и эпюра M построена правильно.

Строим эпюру поперечных сил (см. рис. 3.39, в):

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq 1,8$  м):

$$Q_{x_1} = -X_2 + px_1;$$

$$x_1 = 0: Q_{x_1} = -6,826 \text{ кН};$$

$$x_1 = 1,8 \text{ м}: Q_{x_1} = -6,826 + 10 \cdot 1,8 = 11,174 \text{ кН}.$$

Участок II ( $0 \leq x_2 \leq 1$  м):

$$Q_{x_2} = -X_1 = -7,619 \text{ кН}.$$

Участок III ( $0 \leq x_3 \leq 1$  м):

$$Q_{x_3} = B_y = 7,381 \text{ кН}.$$

Строим эпюру продольных сил (см. рис. 3.39, з):

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq 1,8$  м):

$$N_{x_1} = -X_1 = -7,619 \text{ кН}.$$

Участок II ( $0 \leq x_2 \leq 1$  м):

$$N_{x_2} = X_2 - p \cdot 1,8 = 6,826 - 18 = -11,174 \text{ кН}.$$

Участок III ( $0 \leq x_3 \leq 1$  м):

$$N_{x_3} = -B_x = -11,174 \text{ кН}.$$

Подбираем поперечное сечение. Из эпюры изгибающих моментов следует, что  $M_{\max} = 3,913 \text{ кН}\cdot\text{м}$  в узле C. В этом же сечении возникает продольная сила  $N = -11,174 \text{ кН}$ . Определяем размеры поперечного сечения по условию прочности при изгибе без учета продольной силы:

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3};$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3M_{\max}}{2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 3,913 \cdot 10^6}{2 \cdot 160}} = 100 \sqrt[3]{0,0367} = 33,5 \text{ мм}.$$

Принимаем  $b = 33,5$  мм и  $h = 67$  мм.

Производим проверку прочности выбранного сечения с учетом продольной силы:

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N}{A} + \frac{M_{\max}}{W_z} \right| = \left| \frac{11,174 \cdot 10^3}{33,5 \cdot 67} - \frac{3,913 \cdot 10^6}{\frac{33,5 \cdot 67^2}{6}} \right| = 4,98 + 156,13 = 161,11 \text{ МПа}.$$

Процент перегрузки  $\frac{161,11 - 160}{160} \cdot 100\% = 0,7\% < [5\%]$ , что допустимо.

### 3.4. Пример разноуровневого задания для контроля результатов изучения содержания модуля

#### Уровень III

1. Изгиб с кручением. Определение диаметра вала с использованием III-й классической теории прочности.

#### Уровень II

1. Подобрать номер профиля швеллера для изготовления рамы, показанной на рис. 3.42, если:  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ;  $F = 10 \text{ кН}$ ;  $m = 8 \text{ кНм}$ ;  $a = 1 \text{ м}$ ;  $b = 2 \text{ м}$ ;  $h = 3 \text{ м}$ .

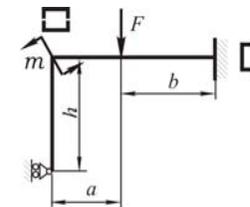


Рис. 3.42. Схема рамы

2. Для заданного поперечного сечения балки (рис. 3.43) определить величину угла (в градусах), заключенного между осью  $z$  и следом плоскости результирующего изгибающего момента, если  $M_z = -12$  кНм,  $M_y = 15$  кНм.

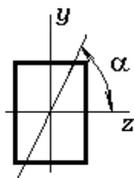


Рис. 3.43. Сечение балки

### Уровень I

1. Какие системы называются статически неопределимыми?
2. Запишите условие прочности при внецентренном растяжении (сжатии).

### 3.5. Вопросы для контроля результатов изучения содержания модуля 3 (уровень III)

#### Сложное нагружение

1. Косой изгиб, нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса.
2. Косой изгиб, определение положения нейтральной оси, опасных точек в сечении.
3. Условие прочности бруса при косом изгибе и его использование при определении размеров поперечного сечения.
4. Перемещения в балках при косом изгибе.
5. Внецентренное растяжение (сжатие). Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня.
6. Уравнение нейтральной линии при внецентренном растяжении (сжатии), ее свойства.
7. Определение положения опасных точек при внецентренном растяжении (сжатии). Условие прочности.

8. Изгиб с кручением. Определение диаметра вала с использованием III-й классической теории прочности.

9. Изгиб с кручением. Определение диаметра вала с использованием IV-й классической теории прочности.

#### Перемещения в упругой системе при произвольной нагрузке

1. Потенциальная энергия деформации бруса в общем случае нагружения, выраженная через внутренние силовые факторы.
2. Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений.
3. Интегралы Максвелла–Мора.
4. Порядок определения перемещений с помощью интегралов Максвелла–Мора.
5. Способ Верещагина для определения перемещений в упругих системах. Формула Верещагина.
6. Порядок определения перемещений в упругих системах с помощью способа Верещагина.

#### Расчет статически неопределимых систем методом сил

1. Статически неопределимые системы. Понятие о рамах и фермах.
2. Степень статической неопределимости.
3. Метод сил, его сущность. Выбор основной и эквивалентной систем.
4. Канонические уравнения метода сил.
5. Порядок раскрытия статической неопределимости систем методом сил.
6. Проверка правильности раскрытия статической неопределимости систем.
7. Особенности раскрытия статической неопределимости симметричных систем.

**Модуль 4 . ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ.  
ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ.  
ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЖЕНИЯ.  
ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ БРУСЬЯ**

В результате изучения модуля студент должен:

– *знать* (описывать) и формулировать понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия упругих тел, формулу Эйлера для определения критической силы сжатого стержня и пределы ее применения, формулу Ясинского, условие устойчивости сжатых стержней, механизм усталостного разрушения, типы циклов напряжений и их характеристики, предел выносливости, диаграмму усталостной прочности и ее рабочую область, факторы, влияющие на сопротивление усталости, виды динамических нагрузок, динамический коэффициент, плоские кривые брусья;

– *уметь* определять критическую силу и критические напряжения сжатого стержня, решать, используя условие устойчивости, три типа задач, рационально выбирать форму поперечного сечения и материал для сжатых стержней, выполнять расчет на выносливость при линейном напряженном состоянии, чистом сдвиге, плоском напряженном состоянии, определять динамические нагрузки, напряжения, перемещения, находить напряжения в брусьях большой кривизны.

**Словарь основных понятий**

База испытаний – число циклов, до которого ведется испытание на усталость.

Выносливость – свойство материала воспринимать многократное действие переменных напряжений.

Динамическое нагружение – такой вид нагружения, при котором приложенные к элементу конструкции внешние нагрузки значительно изменяются за малые промежутки времени.

Кривой брус – брус, у которого ось искривлена.

Коэффициент безопасности по устойчивости – отношение критической силы к действующей нагрузке.

Предел выносливости – наибольшая величина максимального напряжения цикла, при котором еще не происходит усталостного разрушения до базы испытания.

Продольный изгиб – потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня при действии осевой сжимающей силы.

Ударная нагрузка – нагрузка, при которой происходит резкое изменение скоростей соприкоснувшихся тел за очень малый промежуток времени.

Усталость – процесс постепенного накопления повреждений в материале при действии переменных напряжений, приводящий к образованию трещин, их развитию и разрушению элемента конструкции.

Устойчивость – способность конструкции сохранять первоначальную форму равновесия под нагрузкой.

**4.1. План, научно-теоретическое содержание модуля 4**

Название тем и изучаемых вопросов	Научно-теоретическое содержание	Прим. и т.д.
<b>Продольный изгиб прямых стержней</b>		
<i>Лекция 1</i>		
1. Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия упругих тел.	[1, с. 598–599]	Лекция – 4 часа
2. Устойчивость прямолинейной формы сжатых стержней. Критическая сила.	[1, с. 599–600]	
3. Формула Эйлера для определения критической силы сжатого стержня.	[1, с. 600–605]	
4. Влияние закрепления концов стержня на величину критической силы.	[1, с. 605–607]	

Название тем и изучаемых вопросов	Научно-теоретическое содержание	Прим. и т.д.
<i>Лекция 2</i> 1. Пределы применимости формулы Эйлера. Формула Ясинского. 2. Расчет на устойчивость по коэффициенту снижения допускаемых напряжений. Условие устойчивости сжатых стержней. 3. Выбор материалов и рациональной формы поперечных сечений для сжатых стержней.	[1, с. 607–610] [1, с. 611–613] [1, с. 613–614]	
<b>Прочность при переменных напряжениях</b> <i>Лекция 3</i> 1. Современные представления о прочности материалов при напряжениях, изменяющихся во времени. Механизм усталостного разрушения. 2. Типы циклов напряжений и их характеристики. 3. Кривая усталости. Предел выносливости. 4. Диаграмма усталостной прочности, ее рабочая область. <i>Лекция 4</i> 1. Схематизация диаграммы усталостной прочности. 2. Влияние на сопротивление усталости концентрации напряжений, абсолютных размеров, качества обработки поверхности, технологических методов упрочнения поверхности. 3. Расчет на выносливость при линейном напряженном состоянии, чистом сдвиге, плоском напряженном состоянии.	[1, с. 529–535] [1, с. 535–537] [1, с. 537–540] [1, с. 545–547] [1, с. 547–548] [1, с. 540–545] [1, с. 548–553]	Лекции – 4 часа

Название тем и изучаемых вопросов	Научно-теоретическое содержание	Прим. и т.д.
<b>Динамические нагрузки</b> <i>Лекция 5</i> 1. Общие понятия. Виды динамических нагрузок. 2. Динамические нагрузки, вызывающие движение тела с ускорением. Силы инерции. Принцип Даламбера. <i>Лекция 6</i> 1. Ударная нагрузка. 2. Анализ формулы динамического коэффициента. 3. Вычисление коэффициента приведения массы. <i>Лекция 7</i> 1. Условие прочности при ударе. 2. Рекомендации по проектированию элементов конструкций, испытывающих удар.	[1, с. 575] [1, с. 575–578], [1, с. 594–596] [1, с. 578–583] [1, с. 587–591] [1, с. 583–587] [1, с. 592–593] [1, с. 596–598]	Лекция – 6 часов
<b>Плоские кривые брусья</b> <i>Лекция 8</i> 1. Плоские кривые брусья. Общие понятия. 2. Напряжения в поперечных сечениях бруса большой кривизны при чистом изгибе. 3. Радиус кривизны нейтрального слоя. <i>Лекция 9</i> 1. Нормальные напряжения в поперечных сечениях брусьев большой и малой кривизны при изгибе с растяжением (сжатием). 2. Условие прочности.	[1, с. 458–459] [1, с. 459–462] [1, с. 462–464] [1, с. 465–467] [1, с. 470–473]	Лекция – 4 часа

#### 4.1.1. Вопросы для самоконтроля

##### *Продольный изгиб прямых стержней*

Что называется устойчивостью?

Что такое продольный изгиб?

Что называется критической силой?

Запишите формулу Эйлера для сжатого стержня, шарнирно закрепленного по концам.

Запишите обобщенную формулу Эйлера для сжатого стержня.

Запишите формулу Эйлера для определения критических напряжений в сжатом стержне.

Как определяется гибкость стержня?

Как определяется предельная гибкость стержня?

При каком условии для сжатого стержня можно применять формулу Эйлера?

При каком условии для сжатого стержня должна применяться формула Ясинского?

Запишите формулу Ясинского для определения критических напряжений в сжатом стержне.

Что представляет собой уравнение изогнутой оси стержня, потерявшего устойчивость?

Запишите условие устойчивости сжатого стержня.

В каких пределах может изменяться коэффициент продольного изгиба?

Как определить коэффициент безопасности по устойчивости?

Как на практике устанавливается величина коэффициента продольного изгиба?

##### *Прочность при переменных напряжениях*

Что такое усталость?

Какие напряжения называются переменными?

Что называется циклом напряжений?

Перечислите основные характеристики циклов напряжений.

Как определяется амплитудное напряжение цикла?

Как определяется среднее напряжение цикла?

Как определяется коэффициент асимметрии цикла напряжений?

Какие циклы напряжений называются подобными?

Какие характеристики имеет симметричный цикл напряжений?

Какие характеристики имеет отнулевой или пульсирующий цикл напряжений?

Постройте кривую Велера для черных металлов.

Что такое «база испытаний»?

Что такое «предел выносливости»?

Что такое «концентрация напряжений»?

Как в расчетах на усталостную прочность учитывается влияние концентрации напряжений?

Как в расчетах на усталостную прочность учитывается влияние размеров детали?

Как в расчетах на усталостную прочность учитывается влияние качества обработки поверхности детали?

Как в расчетах на усталостную прочность учитывается влияние технологических методов поверхностного упрочнения деталей?

Запишите, как определяется общий коэффициент снижения предела выносливости при симметричном цикле напряжений.

Изобразите диаграмму усталостной прочности.

Изобразите схематизированную диаграмму усталостной прочности Серенсена–Кинасошвили.

Как определяется коэффициент безопасности по усталостной прочности при линейном напряженном состоянии?

Как определяется коэффициент безопасности по усталостной прочности при плоском напряженном состоянии?

Как определяется коэффициент безопасности по текучести материала при линейном напряженном состоянии?

Как определяется коэффициент безопасности по текучести материала при плоском напряженном состоянии?

##### *Динамические нагрузки*

Какой вид нагружения называется динамическим?

В чем заключается сущность принципа Д'Аламбера?

Какое направление имеет сила инерции?

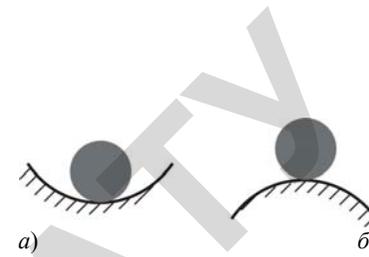


Рис. 4.1. Устойчивое и неустойчивое состояния системы

В реальных условиях эксплуатации конструкции всегда существуют какие-либо причины, из-за которых может произойти отклонение, даже самое незначительное, от исходного состояния равновесия. Следовательно, в неустойчивой системе всегда реализуется возможность перехода в новое состояние равновесия, то есть происходит потеря устойчивости, что в подавляющем большинстве случаев сопровождается значительными перемещениями, возникновением пластических деформаций или полным разрушением. Явление потери устойчивости для упругих тел можно наблюдать на целом ряде примеров. Наиболее простыми и распространенными случаями являются потеря устойчивости при центральном сжатии длинных (по сравнению с поперечными размерами) стержней, тонкостенных труб, прокатных профилей и т.д.

Проследим явление потери устойчивости стержня, нагруженного центрально приложенной сжимающей силой  $F$ , которая постепенно возрастает (рис. 4.2, а).

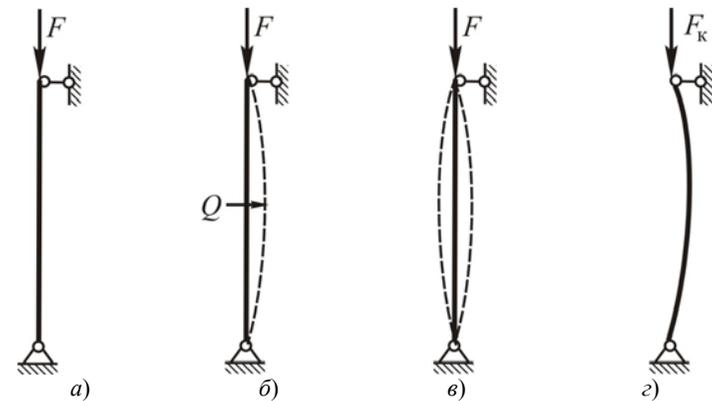


Рис. 4.2. Нагружение и потеря устойчивости сжатого стержня

Чему равна динамическая сила?

Какая нагрузка называется ударной?

В чем состоит сущность гипотез, принимаемых при расчете на ударную нагрузку?

Что показывает коэффициент приведения массы, используемый при расчете на ударную нагрузку?

Как определяется кинетическая энергия?

Что называется динамическим коэффициентом при ударе?

Запишите формулу для определения динамического коэффициента при наклонном ударе.

Запишите формулу для определения динамического коэффициента при горизонтальном ударе.

Запишите формулу для определения динамического коэффициента при вертикальном ударе.

За счет каких технических решений можно снизить динамические напряжения в конструкции при ударе?

Запишите условие прочности при ударе.

Как определяются напряжения и перемещения в конструкции при ударе?

## 4.2. Учебно-методические материалы к практическим занятиям

### 4.2.1. Расчеты сжатых стержней на устойчивость

#### Теоретические предпосылки и примеры к практическому занятию

Под устойчивостью понимается способность упругой системы сохранять под нагрузкой свою первоначальную форму равновесия. Если система этой способностью не обладает, то она называется неустойчивой, а ее состояние является неустойчивым. Например, если шарик находится на дне лунки (рис. 4.1, а), то его состояние устойчивое, а если шарик располагается на вершине выпуклости (рис. 4.1, б), то его состояние неустойчивое.

Пока сила  $F$  мала, стержень, выведенный из равновесия какой-либо незначительной кратковременно действующей силой  $Q$  (рис. 4.2, б), совершив, возможно, несколько колебаний (рис. 4.2, в), вернется в исходное прямолинейное состояние. По мере роста силы  $F$  стержень будет медленнее и медленнее возвращаться в исходное состояние. И, наконец, при некотором значении силы  $F$ , стержень, выведенный из равновесия силой  $Q$ , останется в искривленном состоянии (рис. 4.2, з). Значит, произошла потеря устойчивости.

Наименьшая сжимающая осевая сила, при которой прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой, называется критической силой и обозначается  $F_k$ .

Потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня под действием осевой сжимающей нагрузки называется продольным изгибом. В этом случае в сечениях стержня наряду с продольной силой действует и изгибающий момент, интенсивно возрастающий при увеличении нагрузки сверх критической. Изгибающий момент вызывает резкое увеличение напряжений и часто является причиной разрушения конструкции.

Критическая сила вызывает в стержне критические напряжения, которые являются опасными:

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A}. \quad (4.1)$$

Надежная работа сжатого стержня будет обеспечена, если выполняются условия:  
прочности:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{нетто}}} \leq [\sigma_c], \quad (4.2)$$

устойчивости:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{брутто}}} \leq [\sigma_y], \quad (4.3)$$

где  $A_{\text{нетто}}$ ,  $A_{\text{брутто}}$  – площадь поперечного сечения стержня, соответственно, с учетом и без учета местных ослаблений;

$[\sigma_c]$  – допускаемое напряжение на сжатие для материала стержня;

$[\sigma_y]$  – допускаемое напряжение на устойчивость, равное

$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{[n_y]},$$

где  $[n_y]$  – нормативный коэффициент безопасности по устойчивости.

Коэффициент безопасности по устойчивости всегда принимается несколько больше коэффициента безопасности на прочность. Это делается потому, что для центрально сжатых стержней ряд обстоятельств почти неизбежны на практике (эксцентриситете приложения, неоднородность материала) и способствуют продольному изгибу, в то время как при других видах нагружения эти обстоятельства почти не влияют на прочность. Коэффициент безопасности по устойчивости принимают в пределах: для сталей  $[n_y] = 1,8 \div 3,0$ ; для чугуна  $[n_y] = 5,0 \div 5,5$ ; для дерева  $[n_y] = 2,8 \div 3,2$ .

Впервые задачу о равновесии стержня, сжатого центральными силами, поставил и решил Леонард Эйлер в середине XVIII в. Формула Эйлера для определения критической силы сжатого стержня имеет вид:

$$F_k = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (4.4)$$

где  $I_{\min}$  – минимальный момент инерции поперечного сечения стержня;

$\mu$  – коэффициент приведения длины, величина которого зависит от способов закрепления концов стержня;

$l$  – длина стержня.

Коэффициент приведения длины показывает, во сколько раз необходимо изменить длину шарнирно закрепленного и сжатого центральными силами стержня по концам, чтобы его критическая сила была равна критической силе стержня длиной  $l$  при заданном способе закрепления и нагружения. Для наиболее часто встречающихся на практике случаев закрепления и нагружения стержня коэффициент  $\mu$  имеет значения, представленные в табл. 4.1.

Напряжения, возникающие в поперечном сечении стержня при  $F = F_k$ , называются критическими и определяются по формуле:

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (4.5)$$

где  $E$  – модуль продольной упругости материала стержня;

$A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} \text{ – гибкость стержня,}$$

где  $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$  – минимальный радиус инерции сечения.

Формула Эйлера применима, когда критические напряжения в стержне  $\sigma_k$  не превышают предела пропорциональности  $\sigma_{\Pi}$ , то есть:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\Pi}. \quad (4.6)$$

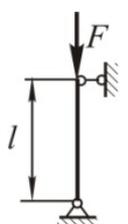
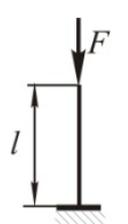
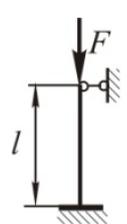
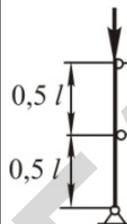
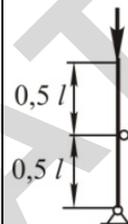
Наименьшая гибкость стержня, при которой еще применима формула Эйлера, называется предельной гибкостью и определяется по формуле:

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\Pi}}}. \quad (4.7)$$

Предельная гибкость стержня зависит от физико-механических свойств материала. Примерные значения предельной гибкости: для стали Ст2 и Ст3  $\lambda_{\text{пред}} \approx 100$ , для стали Ст5  $\lambda_{\text{пред}} \approx 90$ , для чугуна  $\lambda_{\text{пред}} \approx 80$ , для дерева (сосны)  $\lambda_{\text{пред}} \approx 70$ , для некоторых марок легированной стали  $\lambda_{\text{пред}} \approx 60 \div 70$ .

Формула Эйлера применима к расчету стержней, для которых гибкость больше или равна предельной гибкости  $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$ . Такие стержни называются стержнями большой гибкости.

Значения коэффициента приведения длины стержня ( $\mu$ ) при различных схемах закрепления и нагружения

Способ закрепления стержня	Оба конца шарнирно закреплены	Один конец жестко зашечлен	Один конец зашечлен, другой – шарнирно зашечлен	Оба конца зашечлены	Оба конца шарнирно зашечлены, Посередине – шарнир	Один конец шарнирно зашечлен, Посередине – шарнир
Схема закрепления и нагружения стержня						
Коэффициент приведения длины $\mu$	1	2	0,7	0,5	0,5	1,35

Стержни, для которых  $\lambda_{\text{пред}} > \lambda \geq \lambda_0$ , относятся к стержням средней гибкости ( $\lambda_0$  – значение гибкости, при котором критические напряжения у стержней из пластичных материалов достигают предела текучести, из хрупких материалов – предела прочности). Расчет стержней средней гибкости ведется с использованием формулы Ясинского:

$$\sigma_k = a - b\lambda, \quad (4.8)$$

где  $a, b$  – опытные коэффициенты, зависящие от свойств материала и имеющие размерность напряжения.

Стержни, для которых  $\lambda < \lambda_0$ , относятся к стержням малой гибкости. Расчет ведется на прочность, поскольку в этом случае потери устойчивости практически не происходит.

Критическая сила в этом случае вычисляется по формуле:

$$F_k = \sigma_k A_{\text{брутто}}. \quad (4.9)$$

Допускаемая величина сжимающей силы определяется по формуле:

$$[F] = \frac{F_k}{[n_y]}. \quad (4.10)$$

Расчет стержней на устойчивость ведется аналогично расчету на простое сжатие коротких стержней по допускаемым напряжениям  $[\sigma_y] = \varphi [\sigma_c]$ , уменьшенным по сравнению с  $[\sigma_c]$ . Тогда условие устойчивости сжатого стержня представится выражением:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{брутто}}} \leq \varphi [\sigma_c], \quad (4.11)$$

где  $\varphi$  – коэффициент снижения допускаемого напряжения, или коэффициент продольного изгиба (значения коэффициента  $\varphi$  изменяются в пределах от 0 до 1).

*Пример 4.1.* Произвести проверочный расчет и определить коэффициент безопасности для стержня, показанного на рис. 4.3.

Поперечное сечение трубчатое:  $d_n = 50$  мм,  $d_b = 40$  мм. Материал стержня – сталь Ст3:  $\sigma_{\text{п}} = 200$  МПа;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $[\sigma_c] = 160$  МПа.

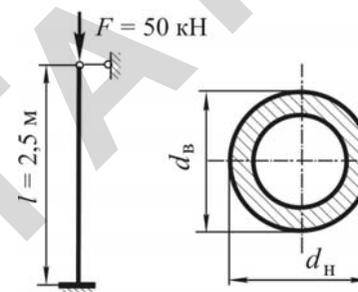


Рис. 4.3. Схема нагружения и форма поперечного сечения стержня

*Решение.* Проверочный расчет производим, используя условие устойчивости:

$$\sigma = \frac{F_k}{A_{\text{брутто}}} \leq \varphi [\sigma_c].$$

Находим площадь поперечного сечения стержня:

$$A_{\text{брутто}} = \frac{\pi d_n^2}{4} (1 - c^2),$$

$$\text{где } c = \frac{d_n}{d_b} = \frac{40}{50} = 0,8.$$

$$A_{\text{брутто}} = \frac{3,14 \cdot 50^2}{4} (1 - 0,8^2) = 707 \text{ мм}^2.$$

Радиус инерции сечения равен:

$$\begin{aligned} i_{\min} = i_{\max} &= \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_{\text{брутто}}}} = \sqrt{\frac{\pi d_n^4 (1 - c^4)}{64} \cdot \frac{4}{\pi d_n^2 (1 - c^2)}} = \\ &= \frac{d_n}{4} \sqrt{1 + c^2} = \frac{50}{4} \sqrt{1 + 0,8^2} = 16 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Находим гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2500}{16} = 109.$$

Пользуясь справочной таблицей, в зависимости от материала и гибкости стержня, методом интерполяции устанавливаем величину коэффициента продольного изгиба:

$$\lambda = 100; \quad \varphi = 0,60;$$

$$\lambda = 110; \quad \varphi = 0,52;$$

$$\varphi = 0,60 - \frac{0,60 - 0,52}{110 - 100} (109 - 100) = 0,528.$$

Находим допускаемое напряжение на устойчивость:

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma_c] = 0,528 \cdot 160 = 84,5 \text{ МПа}.$$

Действительное напряжение в стержне равно:

$$\sigma = \frac{F_k}{A_{\text{брутто}}} = \frac{50000}{707} = 70,7 \text{ МПа}.$$

Сопоставляя действительное и допускаемое напряжение на устойчивость  $\sigma = 70,7 \text{ МПа} < [\sigma_y] = 84,5 \text{ МПа}$ , делаем вывод о том, что устойчивость стержня обеспечена.

Коэффициент безопасности по устойчивости находим из соотношения:

$$n_y = \frac{F_k}{F}.$$

Чтобы установить формулу для нахождения критической силы, определим предельную гибкость:

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{п}}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 100.$$

Сопоставим действительную и предельную гибкость стержня:  $\lambda = 109 > \lambda_{\text{пред}} = 100$ .

Следовательно, критическую силу сжатого стержня определяем по формуле Эйлера:

$$F_k = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 50^4 (1 - 0,8^4)}{(0,7 \cdot 2500)^2} = 116\,570 \text{ Н}.$$

Коэффициент безопасности по устойчивости для заданного стержня будет равен:

$$n_y = \frac{116\,570}{50\,000} = 2,33.$$

*Пример 4.2.* Определить размеры поперечного сечения в виде квадрата для заданного стержня (рис. 4.4), изготовленного из дерева (сосна:  $\sigma_{\text{п}} = 15 \text{ МПа}$ ;  $E = 10^4 \text{ МПа}$ ), длиной  $l = 2 \text{ м}$ , шарнирно закрепленного по концам, нагруженного силой  $F = 40 \text{ кН}$ . Коэффициент безопасности по устойчивости  $[n_y] = 3$ .

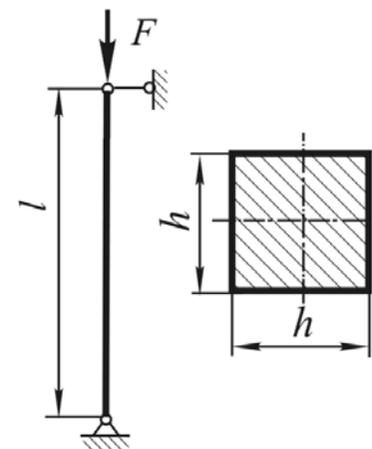


Рис. 4.4. Схема нагружения и форма поперечного сечения стержня

*Решение.* Определяем критическую силу для заданного стержня:

$$F_k = F [n_y] = 40 \cdot 3 = 120 \text{ кН.}$$

Воспользуемся формулой Эйлера, выразив из нее минимальный момент инерции поперечного сечения:

$$I_{\min} = \frac{F_k (\mu l)^2}{\pi^2 E} = \frac{120\,000 (1 \cdot 2000)^2}{3,14^2 \cdot 10^4} = 4\,868\,352 \text{ мм}^4.$$

Для квадратного сечения  $I_{\min} = \frac{h^4}{12}$ .

Тогда сторона квадрата будет равна:

$$h = \sqrt[4]{12 I_{\min}} = \sqrt[4]{12 \cdot 4\,868\,352} = 87,5 \text{ мм.}$$

Проверим, можно ли было использовать формулу Эйлера. Для этого определяем действительную и предельную гибкость стержня.

Радиус инерции сечения равен:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{h^4}{12 \cdot h^2}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{87,5}{\sqrt{12}} = 25,2 \text{ мм.}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2000}{25,2} = 79,4.$$

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{п}}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 10^4}{15}} = 81.$$

Так как  $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$ , то формула Эйлера для определения критической силы стержня неприменима. Поэтому воспользуемся в расчете формулой Ясинского:

$$F_k = (a - b\lambda)A.$$

По справочнику принимаем для дерева (сосна):  $a = 29,3 \text{ МПа}$ ;  $b = 0,194 \text{ МПа}$ :

$$F_k = (a - b \cdot \frac{\sqrt{12} \mu l}{h}) h^2.$$

После преобразований получим квадратное уравнение:

$$ah^2 - \sqrt{12} b \mu l h - F_k = 0.$$

В результате решения этого уравнения находим действительный корень, размер поперечного сечения стержня – сторону квадрата  $h = 91 \text{ мм}$ .

#### 4.2.2. Расчет на выносливость при линейном напряженном состоянии, чистом сдвиге, плоском напряженном состоянии

##### *Теоретические предпосылки и примеры к практическому занятию*

*Понятие об усталостном разрушении.* Многие элементы конструкций в процессе работы испытывают напряжения, циклически изменяющиеся во времени. Например, валы редукторов, шестерни, оси вагонов при вращении подвергаются действию периодически меняющихся сил, детали ходовых систем автомобилей и тракторов подвергаются переменным воздействиям от неровностей дорог, изменений свойств почвы и т. д.

Процесс постепенного накопления повреждений в материале при действии переменных напряжений, приводящий к образованию трещин, их развитию и разрушению детали, называется усталостью, а соответствующее разрушение – усталостным разрушением.

Значительное количество эксплуатационных поломок деталей машин в различных отраслях машиностроения связано с усталостным разрушением. Как показывает опыт, при действии переменных напряжений разрушение наступает при напряжениях значительно меньших, чем пределы прочности и текучести.

Механизм усталостного разрушения металлов объясняется их структурной неоднородностью, выражающейся в произвольном расположении, случайных размерах и анизотропии механических свойств составляющих кристаллитов (зерен), в наличии неметаллических включений, пористости, дефектов кристаллической решетки и т. д. При действии переменных напряжений в наиболее слабых и неблагоприятно расположенных зернах на некоторой стадии деформирования возникают линии скольжения, имеющие определенную кристаллографическую ориентацию. Постепенно число линий скольжения увеличивается, они переходят на другие зерна, образуя микроскопические трещины по плоскостям скольжения. В дальнейшем, по мере увеличения числа циклов напряжений, длина этих трещин растет, происходит их объединение в макроскопическую видимую трещину, под которой понимается трещина протяженностью 0,1–0,5 мм. У основания этой трещины возникает объемное напряженное состояние, ускоряющее ее развитие и придающее разрушению хрупкий характер.

*Типы циклов напряжений и их параметры.* Совокупность всех значений, принимаемых переменными напряжениями за один период их изменения, называется циклом напряжений, а напряжения – циклическими. Решающая роль в усталостном разрушении принадлежит максимальному и минимальному значениям напряжений цикла и общему количеству циклов. Цикл напряжений в общем случае характеризуется следующими параметрами: максимальным  $\sigma_{\max}$  и минимальным  $\sigma_{\min}$  напряжениями, за которые принимаются наибольшее и наименьшее по алгебраической величине напряжение цикла, средним напряжением  $\sigma_m$  и амплитудой  $\sigma_a$  цикла, коэффициентом асимметрии  $r$  цикла (отношение минимального напряжения  $\sigma_{\min}$  к максимальному  $\sigma_{\max}$ , взятое с учетом знаков напряжений):

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}, \quad (4.12)$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (4.13)$$

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \quad (4.14)$$

Коэффициент асимметрии  $r$  изменяется от  $-\infty < r < +\infty$ . Для постоянного напряжения  $r = 1$ . Циклы с одинаковыми коэффициентами асимметрии называются подобными.

Циклы напряжений разделяются на симметричные и асимметричные. Если максимальное и минимальное напряжения цикла равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку:  $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$ , цикл называется симметричным. Если максимальное и минимальное напряжения по абсолютной величине различны, циклы называются асимметричными. Асимметричные циклы бывают знакопеременными и знакопостоянными. Среди асимметричных циклов выделяют отнулевые или пульсирующие циклы, для которых характерно равенство нулю максимального или минимального напряжения цикла.

Все рассмотренные параметры и формулы справедливы и для циклов изменения касательных напряжений, если в них  $\sigma$  заменить на  $\tau$ .

*Предел выносливости и предел ограниченной выносливости.* Свойство материала воспринимать многократное действие переменных напряжений, то есть способность материала противостоять усталостному разрушению, называется выносливостью. Расчет элементов конструкции, испытывающих действие переменных напряжений на прочность, называется расчетом на выносливость, или расчетом на усталость. Под сопротивлением усталости элементов конструкций понимается их способность не разрушаться под действием переменных напряжений в течение заданного числа циклов.

Испытания на усталость показывают, что для каждого материала существует такое максимальное напряжение, при котором он выдерживает, не разрушаясь, заданное число циклов. Число циклов, до которого ведется испытание на усталость, называется базой испытания и обозначается  $N_0$ . Для черных металлов база испытаний принимается  $N_0 = 10^7$  циклов. Считается, что если образец из черного металла не разрушился до базового числа циклов, то он не разрушится и при действии неограниченного числа циклов на том же уровне напряжений. Для цветных металлов и их сплавов, а также материалов база испытаний увеличивается до  $10^8$  циклов.

Наибольшая величина максимального напряжения цикла, при котором еще не происходит усталостного разрушения до базы испытания  $N_0$ , называется пределом выносливости. Предел выносливости обозначается через  $\sigma_r$ . Так,  $\sigma_{-1}$  – предел выносливости при симметричном цикле,  $\sigma_0$  – предел выносливости при пульсирующем цикле и т. д.

Предел выносливости не является, подобно модулю упругости, коэффициенту Пуассона, механической характеристикой материала. Он представляет собой характеристику сопротивления усталости образца специальной формы и качества обработки, изготовленного из данного материала. Поэтому при расчете на сопротивление усталости деталей машин необходимо дополнительно учитывать влияние на предел выносливости детали:

- концентрации напряжений;
- размеров детали;
- качества обработки поверхности;
- эксплуатационных факторов (коррозии, повышения или понижения температуры, агрессивности среды и т. д.);
- технологических методов поверхностного упрочнения деталей (обработка поверхности роликами, дробью, азотирование, цементация, поверхностная закалка и т. д.).

Влияние указанных факторов может быть настолько значительным, что пределы выносливости деталей, изготовленных из одного материала, могут отличаться в несколько раз.

*Расчеты на выносливость.* Расчет элементов конструкций на выносливость, как правило, носит проверочный характер, так как ряд используемых коэффициентов зависят от размеров детали и заранее не известны. Прочность детали обеспечена, если коэффициент безопасности  $n$  не меньше нормативного коэффициента безопасности  $[n]$ . Если элемент конструкции испытывает действие переменных напряжений и изготовлен из пластичного материала, то фактический коэффициент безопасности  $n$  выбирается меньшим из коэффициентов безопасности по усталостному разрушению  $n_r$  и по текучести материала  $n_T$ .

Коэффициент безопасности по усталостному разрушению определяется по схематизированной диаграмме усталостной прочности С. В. Серенсена и Р. С. Кинашвили:

– при линейном напряженном состоянии:

$$n_{r\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a K_{\sigma_d} + \psi_\sigma \sigma_m}; \quad (4.15)$$

– при чистом сдвиге:

$$n_{r\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a K_{\tau_d} + \psi_\tau \tau_m}; \quad (4.16)$$

где  $\psi_\sigma, \psi_\tau$  – коэффициент чувствительности материала к асимметрии цикла, соответственно, нормальных и касательных напряжений;

$K_{\sigma_d}, K_{\tau_d}$  – общий коэффициент снижения предела выносливости при симметричном цикле, соответственно, нормальных и касательных напряжений:

$$K_{\sigma_d} = \frac{K_\sigma}{\varepsilon_m \varepsilon_n} \cdot \frac{1}{\beta_{упр}}, \quad (4.17)$$

$$K_{\tau_d} = \frac{K_\tau}{\varepsilon_m \varepsilon_n} \cdot \frac{1}{\beta_{упр}}. \quad (4.18)$$

В последнее время (на основе обобщения экспериментальных данных) коэффициенты  $K_{\sigma_d}$  и  $K_{\tau_d}$  рекомендуется определять по формулам:

$$K_{\sigma_d} = \left( \frac{K_\sigma}{\varepsilon_m} + \frac{1}{\varepsilon_n} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\beta_{упр}}, \quad (4.19)$$

$$K_{\tau_d} = \left( \frac{K_\tau}{\varepsilon_m} + \frac{1}{\varepsilon_n} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\beta_{упр}}, \quad (4.20)$$

где  $K_\sigma, K_\tau$  – эффективный коэффициент концентрации, соответственно, для циклов нормальных и касательных напряжений (значения эффективных коэффициентов концентрации приводятся

в справочниках в виде таблиц или графиков для каждого вида концентратора напряжений; если в рассматриваемом сечении детали имеется несколько концентраторов, то в расчетах следует принимать только одно большее значение эффективного коэффициента концентрации);

$\varepsilon_{\text{м}\sigma}$ ,  $\varepsilon_{\text{м}\tau}$  – масштабный коэффициент, соответственно, для циклов нормальных и касательных напряжений (значения масштабного коэффициента приводятся в справочниках в виде таблиц, обычно  $\varepsilon_{\text{м}\sigma} = \varepsilon_{\text{м}\tau}$ );

$\varepsilon_{\text{п}\sigma}$ ,  $\varepsilon_{\text{п}\tau}$  – коэффициент качества поверхности, соответственно, для циклов нормальных и касательных напряжений (значения коэффициента качества поверхности принимают в зависимости от вида механической обработки или шероховатости поверхности по справочникам);

$\beta_{\text{упр}}$  – коэффициент упрочнения поверхности детали (значения коэффициента упрочнения приводятся в справочниках).

Многие детали машин в условиях эксплуатации подвергаются атмосферной коррозии, изменению температуры, действию агрессивных сред. Под воздействием коррозионной среды возникает явление, называемое коррозионной усталостью, заключающееся в резком накоплении усталостных повреждений. В расчетах на усталостную прочность влияние коррозии учитывается коэффициентом коррозии  $\beta_{\text{кор}}$ , который зависит от времени выдержки образцов в условиях коррозии. Экспериментальные данные показывают, что предел выносливости в условиях коррозии не зависит от предела прочности стали. Поэтому нельзя считать обоснованным предложение о замене углеродистой стали на легированные в сельскохозяйственных, строительно-дорожных, подъемно-транспортных и других машинах, работающих в условиях атмосферной коррозии. На практике влияние коэффициента коррозии на усталостную прочность учитывается его использованием вместо коэффициента качества поверхности  $\varepsilon_{\text{п}\sigma}$  ( $\varepsilon_{\text{п}\tau}$ ). Его значения можно принять по справочным данным.

Повышение температуры уменьшает предел выносливости. Так, при нагревании стали до 150 °С предел выносливости уменьшается на 10 %; при нагревании до 260 °С – на 70 %.

Коэффициент безопасности по текучести материала определяется: – при линейном напряженном состоянии:

$$n_{\sigma\tau} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma_m + \sigma_a}; \quad (4.21)$$

– чистом сдвиге:

$$n_{\tau\tau} = \frac{\tau_{\tau}}{\tau_{\text{max}}} = \frac{\tau_{\tau}}{\tau_m + \tau_a}, \quad (4.22)$$

где  $\sigma_{\tau}$ ,  $\tau_{\tau}$  – предел текучести материала, соответственно, при растяжении (сжатии) и сдвиге.

В качестве фактического коэффициента безопасности  $n$  принимается меньшее значение из найденных по формулам: для линейного напряженного состояния – (4.15) и (4.21); для чистого сдвига – (4.16) и (4.22).

При плоском напряженном состоянии коэффициент безопасности по усталостному разрушению определяется из общепринятой эмпирической формулы Гафа и Полларда:

$$n_r = \frac{n_{r\sigma} n_{r\tau}}{\sqrt{n_{r\sigma}^2 + n_{r\tau}^2}}. \quad (4.23)$$

Коэффициенты  $n_{r\sigma}$ ,  $n_{r\tau}$  определяются по формулам, соответственно, (4.15) и (4.16).

Коэффициент безопасности по текучести материала при плоском напряженном состоянии определяется по формуле:

$$n_{\tau} = \frac{n_{\tau\sigma} n_{\tau\tau}}{\sqrt{n_{\tau\sigma}^2 + n_{\tau\tau}^2}}. \quad (4.24)$$

Коэффициенты  $n_{\tau\sigma}$ ,  $n_{\tau\tau}$  определяются по формулам, соответственно, (4.21) и (4.22).

В качестве фактического коэффициента безопасности  $n$  при плоском напряженном состоянии принимается меньшее значение из найденных по формулам (4.23) и (4.24).

### Рекомендации по повышению сопротивления усталости деталей и элементов конструкций

1. Тщательная обработка деталей из качественных высокопрочных материалов таким образом, чтобы на поверхности не было царапин, рисок, вмятин и т. п.

2. Выбор геометрической формы деталей такой, чтобы концентрация напряжений отсутствовала или была минимальной.

3. Предохранение деталей и конструкции в целом от коррозии путем покраски, смазывания и т. д.

4. Использование технологических приемов, повышающих сопротивление усталости.

5. При конструировании узлов отрицательное влияние концентраторов напряжений необходимо уменьшать путем перемещения их в менее нагруженные зоны.

*Пример 4.3.* Проверить прочность двутавровой балки № 24, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $p = 10$  кН/м и переменной силой  $F$ , величина которой изменяется от 20 кН до  $-30$  кН (рис. 4.5, а). Допускаемый коэффициент безопасности  $[n] = 1,4$ . Материал – сталь ( $\sigma_b = 450$  МПа,  $\sigma_t = 250$  МПа,  $\sigma_{-1} = 200$  МПа). Эффективный коэффициент концентрации в сечении, где приложена сила, принять равным  $K_\sigma = 1,2$ .

*Решение.* Балка испытывает изгиб. Раздельно строим эпюры изгибающих моментов от постоянной распределенной нагрузки интенсивностью  $p$  (рис. 4.5, б), от силы  $F = 20$  кН (рис. 4.5, в), от силы  $F = -30$  кН (рис. 4.5, г). Анализ построенных эпюр показывает, что опасным является сечение посередине длины балки.

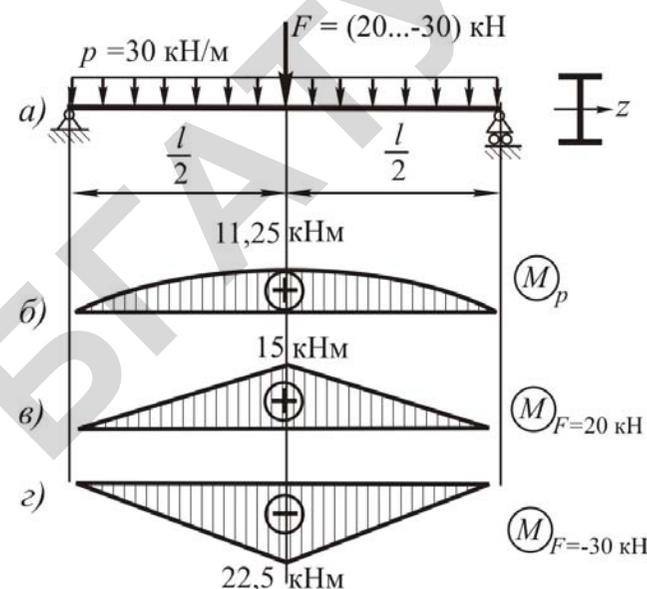


Рис. 4.5. Расчетная схема и эпюры изгибающих моментов балки

Находим характеристики цикла нормальных напряжений:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{(11,25 + 15) \cdot 10^6}{289 \cdot 10^3} = 90,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M_{\min}}{W_z} = \frac{(11,25 - 22,5) \cdot 10^6}{289 \cdot 10^3} = -38,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{90,8 - (-38,9)}{2} = 64,85 \text{ МПа};$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{90,8 + (-38,9)}{2} = 25,95 \text{ МПа};$$

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{-38,9}{90,8} = -0,43.$$

Принимаем:  $\varepsilon_{\text{м}\sigma} = 0,63$  [13, табл. 4.9];  $\varepsilon_{\text{н}\sigma} = 0,75$  [13, рис. 4.1];  $\beta_{\text{упр}} = 1,1$  [13, табл. 4.11];  $\psi_{\sigma} = 0,05$  [13, табл. 4.8]. Общий коэффициент снижения предела выносливости при симметричном цикле нормальных напряжений будет равен:

$$K_{\sigma\text{д}} = \left( \frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{\text{м}}} + \frac{1}{\varepsilon_{\text{н}}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\beta_{\text{упр}}} = \left( \frac{1,2}{0,63} + \frac{1}{0,75} - 1 \right) \cdot \frac{1}{1,1} = 2,03.$$

Определяем коэффициент безопасности по усталостному разрушению:

$$n_{r\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a K_{\sigma\text{д}} + \psi_{\sigma} \sigma_m} = \frac{200}{64,85 \cdot 2,03 + 25,95 \cdot 0,05} = 1,5.$$

Находим коэффициент безопасности по текучести материала:

$$n_{\sigma\tau} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{250}{64,85 + 25,95} = 2,75.$$

Фактический коэффициент безопасности балки принимаем равным  $n = n_{r\sigma} = 1,5$ , что больше  $[n] = 1,4$ . Следовательно, прочность балки обеспечена.

*Пример 4.4.* Ступенчатый вал с диаметрами  $d = 50$  мм и  $D = 60$  мм имеет в месте перехода галтель радиусом  $r = 4$  мм (рис. 4.5). Вал подвергается переменному изгибу с кручением. Нормальные напряжения при изгибе изменяются от  $\sigma_{\text{min}} = -60$  МПа до  $\sigma_{\text{max}} = 60$  МПа, касательные напряжения при кручении изменяются от  $\tau_{\text{min}} = 0$  до  $\tau_{\text{max}} = 50$  МПа. Материал вала – сталь 45 для которой  $\sigma_{\text{в}} = 600$  МПа,  $\sigma_{\tau} = 420$  МПа,  $\sigma_{-1} = 250$  МПа,  $\tau_{\tau} = 220$  МПа,  $\tau_{-1} = 160$  МПа. Качество поверхности вала соответствует обработке резцом. Определить величину коэффициента безопасности.

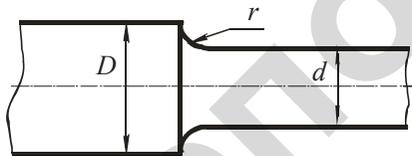


Рис. 4.6. Схема ступенчатого вала

*Решение.* Материал вала в опасных точках испытывает плоское напряженное состояние и действие переменных напряжений. Тогда коэффициент безопасности по усталостному разрушению определяется по формуле:

$$n_r = \frac{n_{r\sigma} n_{r\tau}}{\sqrt{n_{r\sigma}^2 + n_{r\tau}^2}}.$$

Коэффициент безопасности по усталостному разрушению для циклов нормальных напряжений определяется по формуле:

$$n_{r\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a K_{\sigma\text{д}} + \psi_{\sigma} \sigma_m}.$$

Находим амплитудное и среднее напряжения цикла нормальных напряжений:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}}}{2} = \frac{60 - (-60)}{2} = 60 \text{ МПа};$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\text{max}} + \sigma_{\text{min}}}{2} = \frac{60 + (-60)}{2} = 0.$$

Для определения общего коэффициента снижения предела выносливости при симметричном цикле нормальных напряжений  $K_{\sigma\text{д}}$  устанавливаем по справочнику значения эффективного коэффициента концентрации  $K_{\sigma}$ , масштабного коэффициента  $\varepsilon_{\text{м}\sigma}$ , коэффициента качества поверхности  $\varepsilon_{\text{н}\sigma}$ , коэффициента упрочнения поверхности детали  $\beta_{\text{упр}}$ :

$$K_{\sigma} = 1,5 \text{ при } D/d = 1,2 \text{ и } r/d = 0,08 \text{ [13, табл. 4.4];}$$

$$\varepsilon_{\text{м}\sigma} = 0,78 \text{ [13, табл. 4.9];}$$

$$\varepsilon_{\text{н}\sigma} = 0,93 \text{ [13, рис. 4.1];}$$

$\beta_{\text{упр}} = 1$ , вал не подвергался поверхностному упрочнению.

$$K_{\sigma_d} = \left( \frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{\text{м}}} + \frac{1}{\varepsilon_{\text{п}}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\beta_{\text{упр}}} = \left( \frac{1,5}{0,78} + \frac{1}{0,93} - 1 \right) \cdot \frac{1}{1} = 2.$$

Тогда

$$n_{r\sigma} = \frac{250}{60 \cdot 2} = 2,13.$$

Коэффициент безопасности по усталостному разрушению для циклов касательных напряжений определяется по формуле:

$$n_{r\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a K_{\tau_d} + \psi_{\tau} \tau_m}.$$

Находим амплитудное и среднее напряжения цикла касательных напряжений:

$$\tau_a = \frac{\tau_{\text{max}} - \tau_{\text{min}}}{2} = \frac{50 - 0}{2} = 25 \text{ МПа};$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{\text{max}} + \tau_{\text{min}}}{2} = \frac{50 + 0}{2} = 25 \text{ МПа}.$$

Для определения общего коэффициента снижения предела выносливости при симметричном цикле касательных напряжений  $K_{\tau_d}$  устанавливаем по справочнику значения эффективного коэффициента концентрации  $K_{\tau}$ , масштабного коэффициента  $\varepsilon_{\text{м}\tau}$ , коэффициента качества поверхности  $\varepsilon_{\text{п}\tau}$ , коэффициента упрочнения поверхности детали  $\beta_{\text{упр}}$ :

$$K_{\tau} = 1,23 \text{ при } D/d = 1,2 \text{ и } r/d = 0,08 \text{ [13, табл. 4.4];}$$

$$\varepsilon_{\text{м}\tau} = 0,78 \text{ [13, табл. 4.9];}$$

$$\varepsilon_{\text{п}\tau} = 0,93 \text{ [13, рис. 4.1];}$$

$\beta_{\text{упр}} = 1$ , вал не подвергался поверхностному упрочнению.

$$K_{\tau_d} = \left( \frac{K_{\tau}}{\varepsilon_{\text{м}}} + \frac{1}{\varepsilon_{\text{п}}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\beta_{\text{упр}}} = \left( \frac{1,23}{0,78} + \frac{1}{0,93} - 1 \right) \cdot \frac{1}{1} = 1,65.$$

Принимаем значение коэффициента чувствительности материала к асимметрии цикла нормальных напряжений  $\psi_{\tau} = 0,05$  [13, табл. 4.8].

Тогда

$$n_{r\tau} = \frac{160}{25 \cdot 1,65 + 0,05 \cdot 25} = 3,76.$$

Коэффициент безопасности по усталостному разрушению будет равен:

$$n_r = \frac{2,13 \cdot 3,76}{\sqrt{2,13^2 + 3,76^2}} = 1,85.$$

Находим коэффициент безопасности по текучести материала для нормальных и касательных напряжений:

$$n_{\sigma\tau} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{420}{60} = 7;$$

$$n_{\tau\tau} = \frac{\tau_{\tau}}{\tau_{\text{max}}} = \frac{220}{50} = 4,4.$$

Определяем коэффициент безопасности по текучести материала при плоском напряженном состоянии:

$$n_{\tau} = \frac{n_{\tau\sigma} n_{\tau\tau}}{\sqrt{n_{\tau\sigma}^2 + n_{\tau\tau}^2}} = \frac{7 \cdot 4,4}{\sqrt{7^2 + 4,4^2}} = 3,73.$$

Фактический коэффициент безопасности вала принимаем равным  $n = 1,85$ .

### 4.2.3. Определение напряжений и перемещений, расчеты на прочность упругих систем, испытывающих удар

#### Теоретические предпосылки и примеры к практическому занятию

**Ударные нагрузки.** Ударной называется нагрузка, при которой за очень малый промежуток времени происходит резкое изменение скоростей соприкоснувшихся тел. Расчет конструкций на ударную нагрузку содержит большие экспериментальные трудности, поэтому на практике пользуются приближенными методами, основанными на ряде упрощающих гипотез:

1) при ударе в теле возникают только упругие деформации, а материал в процессе удара подчиняется закону Гука.

2) удар считается совершенно неупругим, то есть после удара скорости соприкоснувшихся тел одинаковые (тела не отделяются одно от другого).

Приближенные методы расчета, не обеспечивая высокой точности, позволяют правильно оценить порядок перемещений, ударных нагрузок и напряжений.

При ударе возникают большие ударные нагрузки, чаще всего превосходящие соответствующие статические нагрузки. Элементы конструкции при ударе могут испытывать различные виды нагружения: растяжение и сжатие, изгиб, кручение и их комбинации. Динамические задачи при ударе можно решать как статические, умножая конечный результат на динамический коэффициент  $K_d$ , который показывает, во сколько раз перемещение при ударе больше перемещения, возникающего при статическом приложении нагрузки. Соответственно, прикладываемая к конструкции динамическая сила  $F_d$  и возникающие динамические перемещения  $\Delta_d$  и напряжения  $\sigma_d$  при ударной нагрузке определяются по формулам:

$$F_d = F K_d ; \quad (4.25)$$

$$\Delta_d = \Delta_{ст} K_d ; \quad (4.26)$$

$$\sigma_d = \sigma_{ст} K_d , \quad (4.27)$$

где  $F$ ,  $\Delta_{ст}$ ,  $\sigma_{ст}$  – соответственно, статическая сила, перемещение, напряжение.

Динамический коэффициент  $K_d$  при наклонном ударе определяется по формуле

$$K_d = \sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{v^2}{\Delta_{ст} g (1 + \eta \frac{Q}{F})}} , \quad (4.28)$$

где  $\alpha$  – угол между горизонтальной плоскостью и направлением удара;

$v$  – скорость ударяющего груза в момент соприкосновения с конструкцией;

$\Delta_{ст}$  – перемещение в месте удара по направлению удара, вызванное статическим действием силы тяжести ударяющего груза, приложенной в направлении удара;

$\eta$  – коэффициент приведения массы ударяемой конструкции к точке удара;

$Q$  – сила тяжести конструкции (ударяемого тела).

Если груз падает на конструкцию с высоты  $h$ , причем его скорость в начальный момент времени равна нулю ( $v_0 = 0$ ), то, подставив в формулу (4.28)  $v = \sqrt{2gh}$ , получим выражение для нахождения динамического коэффициента в виде:

$$K_d = \sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{2h}{\Delta_{ст} (1 + \eta \frac{Q}{F})}} . \quad (4.29)$$

В случае, когда  $\alpha = \pi/2$ , имеет место вертикальный удар, для которого динамический коэффициент будет равен:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст} (1 + \eta \frac{Q}{F})}} . \quad (4.30)$$

Если  $\alpha = 0$ , то удар является горизонтальным, для которого динамический коэффициент будет равен:

$$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{\Delta_{ст} g (1 + \eta \frac{Q}{F})}}. \quad (4.31)$$

Когда масса ударяющего груза намного больше массы конструкции, отношение  $\frac{Q}{F}$  стремится к нулю, и выражение  $(1 + \eta \cdot \frac{Q}{F})$  в формулах (4.28)–(4.31) может быть принято равным единице. Такое упрощение, когда не учитывается масса конструкции, идет в запас ее прочности.

Для учета массы системы, подверженной действию ударных нагрузок, воспользуемся приближенным методом, предложенным Рэлеем. Приближенность метода заключается в том, что при его применении принимается допущение относительно эпюры перемещений системы при ударе.

С достаточной для практических расчетов точностью можно принять, что эпюра перемещений от груза при ударе с учетом и без учета массы упругой системы в любой момент времени подобна эпюре перемещений от того же груза, приложенного статически. Согласно этому допущению, для любой ударяемой системы (рис. 4.7) будет справедливо отношение:

$$\frac{\Delta_{xд}}{\Delta_d} = \frac{\Delta_{xст}}{\Delta_{ст}} = \text{const} = \frac{v_{xд}}{v_d}, \quad (4.32)$$

где  $\Delta_{xд}$  и  $\Delta_d$  – соответственно динамические перемещения при ударе в сечении  $x$  и под грузом  $F$ ;

$\Delta_{xст}$  и  $\Delta_{ст}$  – соответственно статические перемещения в тех же сечениях при статическом приложении груза  $F$ ;

$v_{xд}$  и  $v_d$  — скорость системы при ударе в сечении  $x$  и под грузом  $F$ .

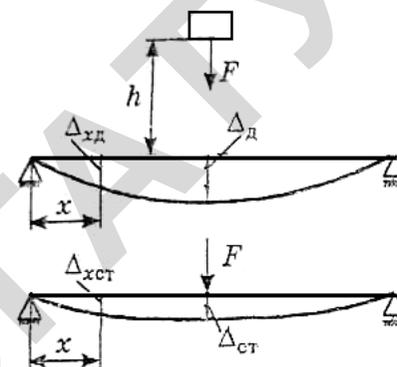


Рис. 4.7. Эпюры динамических и статических прогибов балки

Тогда коэффициент приведения массы ударяемой конструкции к точке удара можно определить по формуле:

$$\eta = \frac{\int \frac{v_{xд}^2}{v_d^2} dQ}{Q} = \frac{\int \left( \frac{\Delta_{xст}}{\Delta_{ст}} \right)^2 dQ}{Q}. \quad (4.33)$$

При постоянном поперечном сечении элемента коэффициент приведения массы ударяемой конструкции к точке удара определяется по формуле:

$$\eta = \frac{1}{l} \int \left( \frac{\Delta_{xст}}{\Delta_{ст}} \right)^2 dx, \quad (4.34)$$

где  $l$  – длина элемента конструкции.

*Пример 4.5.* На стальной стержень (рис. 4.8) с площадью поперечного сечения  $A = 500 \text{ мм}^2$  и длиной  $l = 1 \text{ м}$  падает с высоты  $h = 0,2 \text{ м}$  груз  $F = 400 \text{ Н}$ . Считая стержень устойчивым, определить наибольшие напряжения в его поперечном сечении, возникающие при ударе. Расчет выполнить без учета и с учетом веса стержня, принимая удельный вес материала  $\gamma = 78 \text{ 500 Н/м}^3$ .

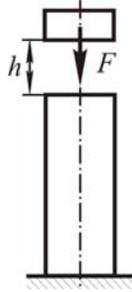


Рис. 4.8. Схема стержня, испытывающего удар

*Решение.* Наибольшие напряжения в поперечном сечении стержня, возникающие при ударе, определим по формуле:

$$\sigma_d = \sigma_{ст} K_d.$$

Стержень испытывает продольный удар. Наибольшие статические напряжения будут равны:

$$\sigma_{ст} = \frac{F}{A} = \frac{400}{500} = 0,8 \text{ МПа}.$$

Находим перемещение в месте удара по направлению удара, вызванное статическим действием силы тяжести ударяющего груза:

$$\Delta_{ст} = \frac{F l}{E A} = \frac{400 \cdot 1000}{2 \cdot 10^5 \cdot 500} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

Вес стержня будет равен:

$$Q = A l \gamma = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 78500 = 39,25 \text{ Н}.$$

Вес стержня  $Q = 39,25 \text{ Н}$  намного меньше веса ударяющего груза  $F = 400 \text{ Н}$ .

Определяем динамический коэффициент без учета массы стержня по формуле:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 200}{4 \cdot 10^{-3}}} = 317.$$

Динамическое напряжение в поперечном сечении стержня будет равно:

$$\sigma_d = 0,8 \cdot 317 = 253,6 \text{ МПа}.$$

Найдем динамический коэффициент с учетом массы стержня:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст} \left(1 + \eta \frac{Q}{F}\right)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 200}{4 \cdot 10^{-3} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{39,25}{400}\right)}} = 312.$$

Тогда динамическое напряжение в поперечном сечении стержня будет равно:

$$\sigma_d = 0,8 \cdot 312 = 249,6 \text{ МПа}.$$

В данном примере учет массы ударяемой конструкции (стержня) не оказывает существенного влияния на динамическое напряжение.

*Пример 4.6.* Двутавровая балка № 24 ( $W_z = 289 \text{ см}^3$ ;  $I_z = 3460 \text{ см}^4$ ;  $q = 273 \text{ Н/м}$ ) длиной  $l = 2 \text{ м}$  шарнирно закреплена по концам. Определить наибольшие нормальные напряжения и наибольший прогиб, возникающие в балке в результате удара при падении на нее посередине пролета груза  $F = 5 \text{ кН}$  с высоты  $h = 18 \text{ мм}$ . Задачу решить для следующих условий:

- 1) опоры балки абсолютно жесткие (рис. 4.9, а);
- 2) правый конец балки опирается на пружину, жесткость которой равна  $c = 0,5 \text{ кН/мм}$  (рис. 4.10, а);
- 3) опоры балки абсолютно жесткие, и в месте падения груза на балке установлен буферный груз  $Q = 5 \text{ кН}$  (рис. 4.11).

*Решение.* Наибольшие нормальные напряжения и наибольший прогиб в балке, возникающие при ударе, определим, соответственно, по формулам:

$$\sigma_{\max д} = \sigma_{\max ст} K_d,$$

$$\Delta_{\max д} = \Delta_{\max ст} K_d.$$

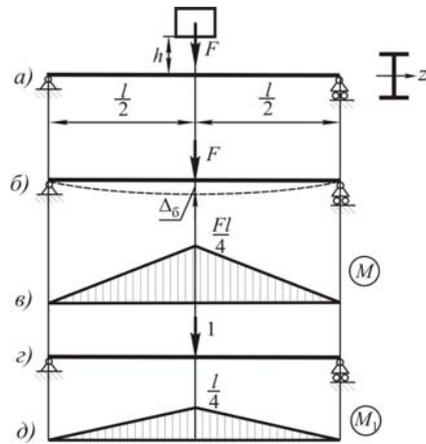


Рис. 4.9. Расчетные схемы балки с абсолютно жесткими опорами и эпюры изгибающих моментов

Балка испытывает изгибающий удар. Наибольшие нормальные напряжения, возникающие в балке при статическом нагружении грузом  $F$  (рис. 4.9, б) определяются по формуле:

$$\sigma_{\max \text{ ст}} = \frac{M_{\max}}{W_z}$$

Для нахождения максимального изгибающего момента строим эпюру  $M$  (рис. 4.9, в), из которой принимаем  $M_{\max}$ . Тогда

$$\sigma_{\max \text{ ст}} = \frac{Fl}{4W_z} = \frac{5000 \cdot 200}{4 \cdot 289} = 865 \text{ Н/см}^2 = 8,65 \text{ МПа.}$$

Сила тяжести балки почти на порядок меньше силы тяжести груза  $F$ . Динамический коэффициент определим по формуле:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}$$

Перемещение в месте удара по направлению удара, вызванное статическим действием силы тяжести ударяющего груза, приложенной в направлении удара  $\Delta_{\text{ст}}$ , находим по способу Верещагина. Для этого

к балке в месте удара прикладываем вертикально единичную безразмерную силу (рис. 4.9, з), строим от нее эпюру изгибающих моментов  $M_1$  (рис. 4.9, д). В результате перемножения эпюр  $M$  и  $M_1$  получим прогиб балки  $\Delta_{\text{б}}$ :

$$\Delta_{\text{б}} = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{Fl}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} \right) \cdot 2 = \frac{Fl^3}{48EI_z} = \frac{5000 \cdot 2000^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^4} = 0,12 \text{ мм.}$$

1. Если опоры балки абсолютно жесткие, то  $\Delta_{\text{ст}} = \Delta_{\text{б}}$ .

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 18}{0,12}} = 18,35$$

Возникающие в результате удара наибольшие нормальные напряжения и наибольший прогиб в балке с абсолютно жесткими опорами будут равны:

$$\sigma_{\max \text{ д}} = 8,65 \cdot 18,35 = 158,7 \text{ МПа,}$$

$$\Delta_{\max \text{ д}} = 0,12 \cdot 18,35 = 2,2 \text{ мм.}$$

2. Если один конец балки находится на жесткой опоре, а другой – опирается на пружину (рис. 4.10, а), то перемещение  $\Delta_{\text{ст}}$  будет определяться прогибом балки  $\Delta_{\text{б}}$  и перемещением, вызванным осадкой пружины  $\Delta_{\text{пр}}$  (рис. 4.10, б):

$$\Delta_{\text{ст}} = \Delta_{\text{б}} + \Delta_{\text{пр}} = \Delta_{\text{б}} + \lambda \cdot \frac{1}{2} = \Delta_{\text{б}} + \frac{F}{2c} \cdot \frac{1}{2} = 0,12 + \frac{5}{2 \cdot 0,5} \cdot \frac{1}{2} = 2,62 \text{ мм.}$$

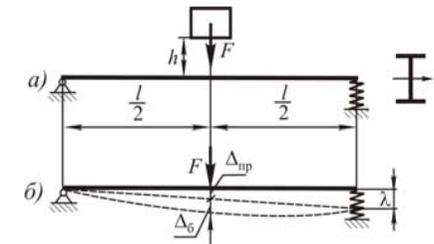


Рис. 4.10. Расчетные схемы балки, правый конец которой опирается на пружину

Тогда динамический коэффициент будет равен:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 18}{2,62}} = 4,84.$$

Возникающие в результате удара наибольшие нормальные напряжения и наибольший прогиб в балке, показанной на рис. 4.10, будут равны:

$$\sigma_{\max д} = 8,65 \cdot 4,84 = 41,87 \text{ МПа},$$

$$\Delta_{\max д} = 0,12 \cdot 4,84 = 0,58 \text{ мм}.$$

3. Если опоры балки абсолютно жесткие и в месте падения груза на балку установлен буферный груз (рис. 4.11), то  $\Delta_{ст} = \Delta_б$ , а динамический коэффициент определим по формуле:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст} \left(1 + \eta \frac{Q}{F}\right)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 18}{0,12 \left(1 + 1 \cdot \frac{5000}{5000}\right)}} = 13,29.$$

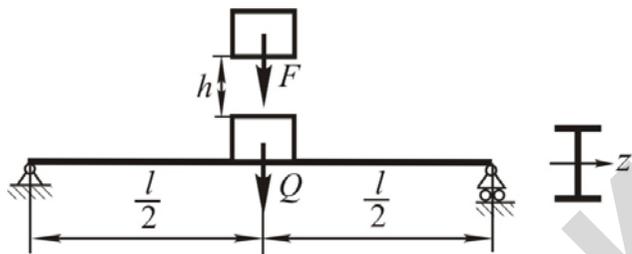


Рис. 4.11. Расчетная схема балки с дополнительным грузом

Возникающие в результате удара наибольшие нормальные напряжения и наибольший прогиб в балке, показанной на рис. 4.11, будут равны:

$$\sigma_{\max д} = 8,65 \cdot 13,29 = 115 \text{ МПа},$$

$$\Delta_{\max д} = 0,12 \cdot 13,29 = 1,6 \text{ мм}.$$

Наибольшие нормальные напряжения, возникающие в балке при ударе, определяются как сумма напряжений:

$$\sigma_{\max д} = \sigma_{\max ст}^{(Q)} + \sigma_{\max д}^{(F)},$$

где  $\sigma_{\max ст}^{(Q)}$  и  $\sigma_{\max д}^{(F)}$  – наибольшие нормальные напряжения в балке, вызванные, соответственно, статическим действием груза  $Q$  и динамическим действием груза  $F$ .

$$\sigma_{\max ст}^{(Q)} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{Ql}{4W_z} = \frac{5000 \cdot 200}{4 \cdot 289} = 865 \text{ Н/см}^2 = 8,65 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{\max д} = 8,65 + 115 = 123,7 \text{ МПа}.$$

Таким образом, установка на балке дополнительного груза, замена одной жесткой опоры пружиной позволяют снизить возникающие в балке напряжения и перемещения.

#### 4.3. Задания по управляемой самостоятельной работе студентов и рекомендации по их выполнению

##### 4.3.1. Устойчивость сжатых стержней

Выполнить ИДЗ «Устойчивость сжатых стержней» [12, с. 34], в котором для заданного стержня, нагруженного сосредоточенной силой  $F$ , требуется:

- 1) определить размеры поперечного сечения;
- 2) определить критическую силу для заданной стойки и вычислить коэффициент безопасности на устойчивость.

Исходными данными для выполнения задания являются: выданный преподавателем вариант (номер схемы [12, рис. 4.4], номер строки [12, табл. 4.2]). Пример исходных данных для варианта: номер схемы (4) и строки (5) приводится, соответственно, в табл. 4.2 и на рис. 4.12.

Форма контроля – проверка письменно выполненного ИДЗ.

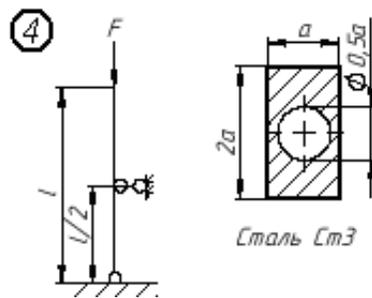


Рис. 4.12. Схемы № 4 к ИДЗ «Устойчивость сжатых стержней»

Таблица 4.2

Числовые данные к ИДЗ «Устойчивость сжатых стержней»

№	$l$ , м	$F$ , кН
5	3,2	160

### Теоретические предпосылки к заданию

Как известно, условие устойчивости сжатого стержня имеет вид:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{брутто}}} \leq \varphi[\sigma_c].$$

Коэффициент снижения допускаемого напряжения или коэффициент продольного изгиба равен:

$$\varphi = \frac{\sigma_k n_o}{\sigma_o n_y} \quad \varphi = \frac{\sigma_k \cdot n_{\varphi}}{\sigma_{\varphi} \cdot n_{\varphi}}$$

где  $\sigma_o, n_o$  – соответственно, опасное напряжение и коэффициент безопасности при расчетах на прочность.

При выполнении практических расчетов значения коэффициентов продольного изгиба приводятся в справочниках обычно в виде таблиц и принимаются в зависимости от материала и гиб-

кости стержня. Для наиболее часто используемых материалов значения коэффициента  $\varphi$  приведены в табл. 4.3.

На основе использования условия устойчивости можно выполнять проекторочный или конструкторский расчет сжатых стержней, имеющий целью определение размеров поперечного сечения.

### Методические указания для выполнения задания

1. Вычертить в масштабе схему и поперечное сечение стержня.
2. В поперечном сечении стержня провести главные центральные оси инерции.
3. Выразить, используя соотношение размеров сечения  $a$ , следующие геометрические характеристики (площадь  $A$ , минимальный осевой момент инерции  $I_{\min}$ , минимальный радиус инерции  $i_{\min}$ ), а также, принимая во внимание расчетную схему, – гибкость стержня  $\lambda$ .
4. Для решения задачи использовать метод последовательных приближений, задаваясь коэффициентом продольного изгиба ( $\varphi$ ); в первом приближении принять  $\varphi_1 = 0,5$  и последовательно определить  $A, a, I_{\min}, i_{\min}, \lambda$ .
5. Принять по таблице действительное значение коэффициента продольного изгиба  $\varphi_1^*$ .
6. Если  $\varphi_1^*$  и  $\varphi_1$  значительно (более 5 %) отличаются один от другого, а значит, в такой же мере будут отличаться и напряжения, возникающие в поперечном сечении стержня, от допускаемых напряжений на устойчивость, то в расчете следует предпринять следующую попытку, приняв:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2}.$$

Обычно бывает достаточным выполнение в расчете трех попыток.

Таблица 4.3

Коэффициент продольного изгиба  $\varphi$ 

Гибкость стержня $\lambda$	Сталь Ст4,3, 2	Сталь Ст5	Бетон		Дюралюминий Д16Т	Чугун СЧ 15-30 СЧ 15-18 СЧ 15-36 СЧ 21-40	Дерево (сосна)
			тяжелый	легкий			
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	1,00	1,00	0,999	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,96	0,96	0,998	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,90	0,86	0,835	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,84	0,73	0,700	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,76	0,68	0,568	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,70	0,59	0,455	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,63	0,52	0,353	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,57	0,46	0,269	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,51	—	0,212	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,45	—	0,172	0,16	0,31
110	0,52	0,43	—	—	0,142	—	0,25
120	0,45	0,36	—	—	0,119	—	0,22
130	0,40	0,33	—	—	0,101	—	0,18
140	0,36	0,29	—	—	0,087	—	0,16
150	0,32	0,26	—	—	0,076	—	0,14
160	0,29	0,24	—	—	—	—	0,12
170	0,26	0,21	—	—	—	—	0,11
180	0,23	0,19	—	—	—	—	0,10
190	0,21	0,17	—	—	—	—	0,09
200	0,19	0,16	—	—	—	—	0,08

7. По соответствующей формуле (в зависимости от фактической и предельной гибкостей) определить критическую силу или критическое напряжение для заданного стержня и вычислить коэффициент безопасности по устойчивости.

**Образец выполнения задания**

Определить размеры поперечного сечения и коэффициент безопасности по устойчивости деревянного стержня, показанного на рис. 4.13, если  $l = 2,5$  м;  $F = 22$  кН;  $[\sigma] = 8$  МПа.

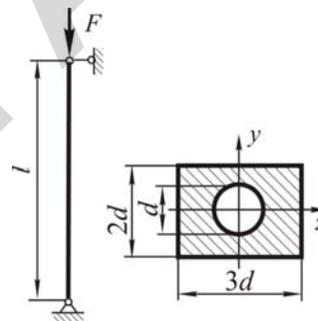


Рис. 4.13. Схема стойки и поперечного сечения

Решение. Условие устойчивости сжатого стержня имеет вид:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{бр}}} \leq \varphi [\sigma].$$

Отсюда выражаем площадь поперечного сечения стержня:

$$A_{\text{бр}} = \frac{F}{\varphi [\sigma]}.$$

Пользуясь заданной формой и соотношением размеров поперечного сечения стержня, составляем выражения для определения площади поперечного сечения  $A_{\text{бр}}$ , размера  $d$ , минимального момента инерции  $I_{\text{min}}$ , минимального радиуса инерции  $i_{\text{min}}$ , гибкости стержня  $\lambda$ :

$$A_{\text{бр}} = 3d \cdot 2d - \frac{\pi d^2}{4} = 5,215d^2;$$

$$d = \sqrt{\frac{A_{\text{бр}}}{5,215}};$$

$$I_{\text{min}} = I_z = \frac{3d(2d)^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = 1,95d^4;$$

$$i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{I_{\text{min}}}{A_{\text{бр}}}} = \sqrt{\frac{1,95d^4}{5,215d^2}} = 0,612d;$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}} = \frac{1 \cdot 2500}{0,612d} = \frac{4085}{d}.$$

Подбор сечения производится методом последовательных приближений. В первом приближении принимаем коэффициент продольного изгиба  $\varphi_1 = 0,5$  и находим численные значения:

$$A_{\text{бр}1} = \frac{22000}{0,5 \cdot 8} = 5500 \text{ мм}^2;$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{5500}{5,215}} = 32 \text{ мм};$$

$$\lambda_1 = \frac{4085}{32} = 127.$$

Из справочной таблицы принимаем значения  $\varphi$  при гибкости стержня:

$$\lambda = 120: \quad \varphi = 0,22;$$

$$\lambda = 130: \quad \varphi = 0,18.$$

Интерполируя, находим действительное значение коэффициента продольного изгиба при гибкости стержня  $\lambda = 127$ :

$$\varphi_1^* = 0,22 - \frac{0,22 - 0,18}{130 - 120} \cdot (127 - 120) = 0,19.$$

Так как  $\varphi_1$  и  $\varphi_1^*$  отличаются значительно (более 5%), то принимаем другое приближение и повторяем расчет:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2} = \frac{0,5 + 0,19}{2} = 0,35;$$

$$A_{\text{бр}2} = \frac{22000}{0,35 \cdot 8} = 7857 \text{ мм}^2;$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{7857}{5,215}} = 39 \text{ мм};$$

$$\lambda_2 = \frac{4085}{39} = 105.$$

Из справочной таблицы принимаем значения  $\varphi$  при гибкости стержня:

$$\lambda = 100: \quad \varphi = 0,31;$$

$$\lambda = 110: \quad \varphi = 0,25.$$

Интерполируя, находим действительное значение коэффициента продольного изгиба при гибкости стержня  $\lambda = 105$ :

$$\varphi_2^* = 0,31 - \frac{0,31 - 0,25}{110 - 100} (105 - 100) = 0,28.$$

Так как  $\varphi_2^*$  и  $\varphi_2$  отличаются значительно (более 5%), то принимаем третье приближение и повторяем расчет:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2^*}{2} = \frac{0,35 + 0,28}{2} = 0,32;$$

$$A_{\text{бр}3} = \frac{22000}{0,32 \cdot 8} = 8594 \text{ мм}^2;$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{8594}{5,215}} = 41 \text{ мм};$$

$$\lambda_3 = \frac{4085}{41} = 100.$$

Из справочной таблицы принимаем действительное значение коэффициента продольного изгиба при гибкости стержня  $\lambda = 100$ :  $\varphi_3^* = 0,31$ .

Так как  $\varphi_3$  и  $\varphi_3^*$  отличаются незначительно (менее 5%), то проверяем выполнение условия устойчивости при  $\varphi_3^* = 0,31$ .

Определяем напряжение в материале стойки:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{брз}}} = \frac{22000}{8594} = 2,56 \text{ МПа}.$$

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma_y] = \varphi_3^* [\sigma] = 0,31 \cdot 8 = 2,48 \text{ МПа}.$$

Перегрузка равна:

$$\frac{\sigma - [\sigma_y]}{[\sigma_y]} \cdot 100\% = \frac{2,56 - 2,48}{2,48} \cdot 100\% = 3,2\% < [5\%].$$

Перенапряжение допустимо.

Определяем предельную гибкость по формуле:

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{п}}}},$$

где  $E$  – модуль упругости материала (для дерева  $E = 10^4$  МПа);  
 $\sigma_{\text{п}}$  – предел пропорциональности материала (для дерева  $\sigma_{\text{п}} = 20$  МПа).

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 10^4}{20}} = 70,2.$$

Так как фактическая гибкость стержня  $\lambda = \lambda_3 = 100 > \lambda_{\text{пред}} = 70,2$ , то критическую силу определяем по формуле Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E I_{\text{min}}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 0,8 \cdot 10^4 \cdot 1,95 \cdot 41^4}{(1 \cdot 2500)^2} = 69412 \text{ Н}.$$

Коэффициент безопасности стержня по устойчивости равен:

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{69412}{22000} = 3,2.$$

#### 4.4. Пример разноуровневого задания для контроля результатов изучения содержания модуля

##### Уровень III

1. Формула Эйлера для определения критической силы сжатого стержня с шарнирно закрепленными концами.

##### Уровень II

1. На двутавровую балку № 18 (рис. 4.14), лежащую свободно на двух опорах, одна из которых – упругий элемент (резиновый кубик), с высоты  $h = 0,2$  м падает груз  $F = 1$  кН. Определить наибольшие нормальные напряжения и наибольший прогиб балки при ударе. Принять модуль упругости резины  $E = 8$  МПа.

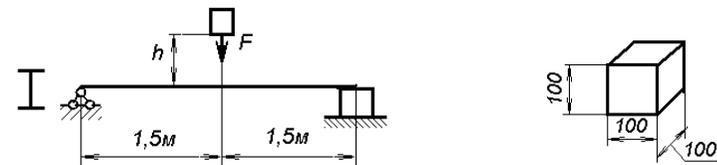


Рис. 4.14. Схема стойки и поперечного сечения

2. Заданный цикл напряжений характеризуется  $\sigma_{\max} = 140$  МПа,  $\sigma_{\min} = -100$  МПа. Материал вала имеет характеристики:  $\sigma_{-1} = 200$  МПа,  $\sigma_0 = 280$  МПа,  $\sigma_r = 240$  МПа,  $\sigma_b = 320$  МПа. Общий коэффициент снижения предела выносливости при симметричном цикле принять равным 1. Определить фактический коэффициент безопасности.

### **Уровень I**

1. При каком условии для сжатого стержня должна применяться формула Ясинского?
2. В чем заключается сущность принципа Д'Аламбера?

### **4.5. Вопросы для контроля результатов изучения содержания модуля 4 (уровень III)**

#### ***Продольный изгиб прямых стержней***

1. Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия систем.
2. Устойчивость прямолинейной формы сжатого стержня. Критическая сила.
3. Формула Эйлера для определения критической силы сжатого стержня с шарнирно закрепленными концами.
4. Обобщенная формула Эйлера для определения критической силы сжатого стержня, критические напряжения.
5. Пределы применимости формулы Эйлера. Формула Ясинского для определения критических напряжений сжатого стержня. Стержни большой, средней и малой гибкости.
6. Практические расчеты на устойчивость. Условие устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого стержня.
7. Типы инженерных задач, вытекающих из условия устойчивости, и порядок их решения.
8. Рациональные формы поперечных сечений и материалы сжатых стержней.

#### ***Прочность при переменных напряжениях***

1. Понятие об усталостном разрушении. Типы циклов напряжений и их характеристики.
2. Построение кривой усталости или кривой Велера. База испытаний для черных и цветных металлов.
3. Предел выносливости, предел ограниченной выносливости, использование этих характеристик при расчетах на выносливость.
4. Диаграмма усталостной прочности, или диаграмма Хейга, или диаграмма предельных амплитуд и ее построение. Области диаграммы усталостной прочности. Коэффициент безопасности.
5. Схематизация диаграммы усталостной прочности.
6. Факторы, влияющие на усталостную прочность, и как они учитываются в расчетах на сопротивление усталости (на выносливость).
7. Определение коэффициента безопасности по усталостному разрушению при линейном напряженном состоянии.
8. Определение коэффициента безопасности по усталостному разрушению при чистом сдвиге.
9. Определение коэффициента безопасности по усталостному разрушению при плоском напряженном состоянии (совместном действии изгиба и кручения, растяжения и кручения).

#### ***Динамические нагрузки***

1. Динамические нагрузки. Основные понятия. Динамические нагрузки, вызывающие движение тела с ускорением. Условие прочности.
2. Ударные нагрузки. Динамический коэффициент при наклонном, вертикальном, горизонтальном ударах.
3. Определение напряжений, перемещений в конструкциях, испытывающих удар, и способы их снижения. Условие прочности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

### *Основная*

1. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов : учебник / М. Д. Подскребко. – Минск : Выш. школа, 2007. – 797 с.
2. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 620 с.

### *Дополнительная*

3. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов. Практикум по решению задач : учеб. пособие / М. Д. Подскребко. – Минск : Выш. школа, 2009. – 633 с.
4. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов / М. Д. Подскребко. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 552 с.
5. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов : лаб. практикум : учеб. пособие / М. Д. Подскребко, О. И. Мисуно, С. А. Легенький. – Минск : Амалфея, 2001. – 272 с.
6. Механика материалов : лаб. практикум / сост. : О. И. Мисуно, Д. Н. Колоско, С. А. Легенький. – Минск : БГАТУ, 2010. – 108 с.
7. Лихарев, К. К. Сборник задач по курсу «Сопротивление материалов» : учеб. пособие для машиностроит. вузов / К. К. Лихарев, Н. А. Сухова. – М. : Машиностроение, 1980. – 224 с.
8. Дарков, А. В. Сопротивление материалов : учеб. для техн. вузов / А. В. Дарков. – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. школа, 1989. – 624 с.
9. Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров [и др.]. – Мн. : Наука и техника, 1988. – 464 с.
10. Сопротивление материалов. Руководство к решению задач : учеб.-метод. пособие / БГАТУ ; кафедра сопротивления

материалов и деталей машин ; сост. : М. Д. Подскребко, О. И. Мисуно, С. А. Легенький. – Минск : БГАТУ, 2004. – 80 с.

11. Сопротивление материалов. Методическое пособие для самостоятельной работы студентов второго и третьего курсов / БГАТУ ; кафедра сопротивления материалов и деталей машин ; сост. : А. Е. Тетеркин, Д. Н. Колоско. – Минск : БГАТУ, 2002. – 126 с.

12. Механика материалов : учеб.-метод. пособие и задания к расчетно-графическим работам для студентов дневной формы обучения / БГАТУ ; кафедра сопротивления материалов и деталей машин ; сост. : О. И. Мисуно, Д. Н. Колоско, С. А. Легенький. – Минск : БГАТУ, 2008. – 120 с.

13. Механика материалов : справочник / сост.: О. И. Мисуно, Д. Н. Колоско, С. А. Легенький. – Минск : БГАТУ, 2011. – 48 с.

14. Задачи по сопротивлению материалов (из сборника задач под ред. В. К. Качурина) / БИМСХ ; кафедра сопротивления материалов и деталей машин ; сост. : А. Е. Тетеркин. – Мн. : БИМСХ, 1988. – 80 с.

15. Сопротивление материалов : тестовые задания / БГАТУ ; кафедра сопротивления материалов и деталей машин ; сост. : О. И. Мисуно, Д. Н. Колоско. – Минск : БГАТУ, 2003. – 114 с.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

**Мисуно** Олег Иосифович,  
**Колоско** Дина Николаевна,  
**Буховец** Александр Петрович,  
**Легенький** Сергей Александрович

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

*Учебное пособие*

Ответственный за выпуск *В. Н. Основин*  
Корректор *Т. В. Каркоцкая*  
Компьютерная верстка *А. О. Лабун*

Подписано в печать 12.04.2013. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 14,65. Уч.-изд. л. 11,45. Тираж 100 экз. Заказ 343.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
учреждение образования  
«Белорусский государственный аграрный технический университет».  
ЛИ № 02330/0552984 от 14.04.2010.  
ЛП № 02330/0552743 от 02.02.2010.  
Пр-т Независимости, 99–2, 220023, Минск.

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Механика материалов и детали машин»

## **МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ**

Минск  
БГАТУ  
2013