

# Polarisaation heikko mittaus: Optiselta vorteksilta Blochin pallolle

Pro gradu -tutkielma

Turun yliopisto

Fysiikan ja tähtitieteen laitos

Teoreettinen fysiikka

2016

Olli Siltanen

Tarkastajat:

dos. Tom Kuusela

prof. Kalle-Antti Suominen

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä.

TURUN YLIOPISTO

Fysiikan ja tähtitieteen laitos

SILTANEN, OLLI: Polarisaation heikko mittaus: Optiselta vorteksilta Blochin pallolle

Pro gradu -tutkielma, 74 s., 3 liites.

Teoreettinen fysiikka

Lokakuu 2016

---

Tavanomaista kvanttimekaanista mittausta voi tiettyssä mielessä luonnehtia epätäydelliseksi. Kvanttimekaaninen tila romahtaa mittaustulosta vastaavaksi ominaistilaksi, jolloin alkuperäisestä tilasta ei voi saada enempää informaatiota, ja eri suureparit rajoittavat toistensa mittaustarkkuutta. Koskaan ei voi tietää kaikkea. Mittaushäiriö on kuitenkin minimoitavissa niin sanotun heikon mittauksen keinoin. Siinä varsinaisen kiinnostuksen kohteena oleva tila kytketään heikosti yhteen jonkin aputilan kanssa, jonka siirtymä sitten mitataan. Tätä siirtymää kutsutaan heikoksi arvoksi, ja sen kautta on mahdollista päästä käsiksi itse mitattavaan tilaan.

Kvantti-informaation aikakautena tiedonkuljettajina käytetään yhä enenevässä määrin qubitteja eli tilojen  $|0\rangle$  ja  $|1\rangle$  superpositioita. Yksittäiseen qubittiin mahtuu paljon enemmän informaatiota kuin yksittäiseen bittiin (0 tai 1). Eräs fyysikaalinen esimerkki qubitista on valon polarisaatio eli sähkömagneettisen kentän värähtelysuunta. Kvanttilaskennassa voidaan tarvita juuri tietynlaisia qubitteja, jolloin niiden testaus niitä tuhoamatta on ensiarvoisen tärkeää. Japanilaistutkijat kehittivätkin tähän vuonna 2015 varsin hyvin toimivan, heikkoon mittaukseen perustuvan menetelmän, joka on tämän tutkielman pääosassa.

Intensiteetiltään gaussinen laservalo muunnetaan ensin Laguerren-Gaussin moodiksi, jota karakterisoi nollaintensiteettipiste eli optinen vorteksi. Tämän voi mieltää polarisaation heikoksi arvoksi, joten sen siirtymän mittaus vastaa polarisaation mittausta. Kuitenkin, varsinainen qubitti optisesta vorteksista saadaan vasta projisoimalla se stereograafisesti kompleksitasolta Blochin pallolle, kaksiulotteisten kvanttitilojen avaruuteen. Koejärjestelyn osoitetaan toimivan myös sekoitetuille tiloille eli statistikaltaan erilaisille qubittikombinaatioille. Kvanttilaskennan lisäksi tutkielmassa käsiteltävät asiat ovat sovellettavissa kvanttidynamiikassa ja -korrelaatioissa.

Asiasanoja: heikko mittaus, polarisaatio, optinen vorteksi, stereograafinen projektio, Blochin pallo, sekoitettu tila

## Sisällysluettelo

<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>1 Kvanttimekaaninen mittaus</b>	<b>3</b>
1.1 Vahva mittaus	3
1.2 Heikko mittaus ja heikko arvo	9
1.3 Heikko mittaus erilaisissa kokeissa	13
1.3.1 Hiukkasen spin	14
1.3.2 Kolikonheittokritiikki	15
1.3.3 Hiukkasen paikka	18
<b>2 Polarisaation heikko mittaus, teoreettinen tarkastelu</b>	<b>21</b>
2.1 Polarisaatio ja stereograafinen projektio	21
2.2 LG-moodit ja q-levykonfiguraatio	26
2.3 $LG_0^1$ -muunnoksen tekijät ja heikko vuorovaikutus	31
2.4 Koejärjestelyn esittely	36
<b>3 Polarisaation heikko mittaus, työselostus</b>	<b>42</b>
3.1 Komponentit	42
3.2 Testimittaukset	44
3.2.1 Laservalon polarisaatio	44
3.2.2 Q-levyn toiminta I	46
3.2.3 Q-levyn toiminta II	47
3.3 Polarisaation heikko mittaus	50
3.4 Lopputulokset ja virhetarkastelu	55
<b>4 Sekoitettu polarisaatiotila</b>	<b>59</b>
4.1 Sekoitetun tilan heikko arvo ja minimaalinen suure	59
4.2 Sekoitetun tilan tuottaminen ja heikko mittaus	64
<b>5 Yhteenveto</b>	<b>70</b>
<b>Lähdeluettelo</b>	<b>72</b>

**Liite A: Mittaustulokset post-valinnalla  $|H\rangle$**

**Liite B: Mittaustulokset post-valinnalla  $|D\rangle$**

**Liite C: LC-aaltolevyn retardaatio/jännite-kuvaaja**

## Johdanto

Schrödingerin kissa on samannimisessä ajatuskokeessa sekä elävä että kuollut, siis toisin sanoen näiden tilojen superpositiossa. Vasta kyseisen tilan mittausta eli havainnointia (ajatuskokeessa laatikon avaaminen) aiheuttaa jommankumman osatilan realisoidumisen. Elävää *ja* kuollutta kissaa ei voi nähdä samalla ajanhetkellä. Valon polarisaation voi mieltää eräänlaiseksi Schrödingerin kissaksi. Sen mittausta on perinteisesti edellyttänyt kuusi eri vaihetta, joista kukin yksinään romahduttaisi polarisaation itseään vastaavaksi ominaistilaksi, ja vasta mittaustulokset yhdistettyään voisi havaitsija rekonstruoida ennestään tuntemattoman polarisaation.

Tutkijat Kobayashi, Nonaka ja Shikano kehittivät Japanissa 2015 kuitenkin menetelmän, jolla päätellä tuntematon polarisaatio välittömästi yhden kuvan perusteella. Täten Schrödingerin kissan voisi nähdä yhtä aikaa elävänä ja kuolleena. Tämän pro gradu -tutkielman tarkoitus onkin avata yksityiskohtaisesti kyseisen kolmikron artikkeli *"Stereographical visualization of a polarization state using weak measurements with an optical-vortex beam"*, toistaa heidän puhtaita tiloja koskevat kokeensa sekä soveltaa kyseistä mittausta menetelmää sekoitettujen tilojen tapauksessa.

Tutkielma alkaa vahvan ja heikon kvanttimekaanisen mittausten esittelyllä ja erottelulla. Heikkoon mittaukseen liittyvien etujen lisäksi käsitellään myös hieman sen herättämää kritiikkiä. Ennen toista lukua ja polarisaation keskittymistä luodaan vielä pintapuolinen katsaus pariin muuhun heikkoa mittausta soveltaneeseen mittaustekniikkaan.

Toisen luvun aluksi avataan polarisaation käsitettä ja konstruoidaan kaksiulotteisten kvanttimekaanisten tilojen (eli esimerkiksi polarisaation) avaruus, Blochin pallo. Polarisaation heikossa mittaustapauksessa oleellinen LG-moodimuunnos taustoitetaan seikkaperäisesti ja tarkastellaan, miten tästä muunnoksesta aiheutuneesta nollaintensiteettipisteestä eli optisesta vorteksista pääsisi Blochin pallolle.

Kolmannessa luvussa raportoidaan vaihe vaiheelta puhtaisiin polarisaatiotiloihin liittyvät kokeet. Neljännessä luvussa heikko mittausteoria yleistetään koskemaan myös sekoitettuja tiloja tavalla, josta Kobayashi *et al.* artikkelissaan vain lyhyesti vihasivat. Voi hyvinkin olla, että tässä tutkielmassa esitetty tapa tuottaa sekoitettuja tiloja on ensimmäinen laatuaan. Viidennessä ja viimeisessä luvussa suoritetaan yhteenveto ja pohditaan, miten polarisaation heikko mittausta olisi kummassakin tapauksessa (puhdas/sekoitettu tila) sovellettavissa.

Vaikka Richard Feynman kerran kuuluisasti totesi: *"If you think you understand quantum mechanics, you don't understand quantum mechanics"*, edellytetään tämän pro gradu

-tutkielman lukijalta jonkinlaista kvanttimekaniikan perusteiden tuntemusta. Kvanttioptiikkaan liittyvissä laskuissa turvaudutaan erityisesti Jonesin matriisiformalismiin, mutta mittaustulosten huomataan olevan siirrettävissä Blochin pallolle pelkän lukiomatematiikan voimin.

## 1 Kvanttimekaaninen mittaus

Eräs fysiikan keskeisimpiä konsepteja on *mittaus*, sillä juuri sen kautta havaitsija saa tietoa ympäristöstään. Mutta mikä fysikaalinen suure sitten halutaankaan mitata, tulee mitattava systeemi väistämättä olemaan jonkinlaisessa *vuorovaikutuksessa* mittavälineen kanssa. Makroskooppisella tasolla tätä vuorovaikutusta ei tarvitse huomioida; Klassisen systeemin tila säilyy mittaushetkellä enemmän tai vähemmän muuttumattomana. Jos esimerkiksi mittanauhan pituudeksi saadaan yksi metri ajanhetkellä  $t$ , se tuskin oli ainakaan radikaalisti muuta ajanhetkellä  $t - dt$ . Tämän päättelyn lisäksi on makroskooppisella tasolla myös mahdollista mitata monta eri suuretta *samanaikaisesti ja hyvällä tarkkuudella*. Jos metrinen mittanauhamme on vaikkapa liikkeessä, voidaan pituuden lisäksi mitata liikkeen nopeus.

Kvanttimekaniikassa on toisin! Mittavälineen vuorovaikutus mitattavan systeemin kanssa on niin huomattavaa, että mittaushetkellä sen tila muuttuu peruuttamattomasti. Tilat ennen mittausta ja sen jälkeen ovat eri suuria, mikä kyseenalaistaa koko mittauksen mielekkyyden; Ajanhetkeen  $t - dt$  on mahdotonta päästä käsiksi. Toisin kuin klassisen mittauksen tapauksessa, estää kvanttimekaniikka myös tiettyjen suureparien samanaikaisen tarkan mittauksen. Ehkä tunnetuimmasta esimerkistä käy hiukkasen paikka ja liikemäärä. Toisen mittaustarkkuus on pois toisesta.

### 1.1 Vahva mittaus

Kun mitataan suuretta  $\hat{A}$ , voidaan kvanttimekaanista tilaa kuvata Erwin Schrödingerin kehittämän aaltomallin mukaisesti kaikki mahdolliset mittaustulosvaihtoehdot sisältävänä aaltofunktiona:

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^d c_i \psi_i(x) \quad (1.1.1)$$

tai Werner Heisenbergin matriisimallin mukaisena "ket"-vektorina:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d c_i |\psi_i\rangle, \quad (1.1.2)$$

missä  $d$  on Hilbertin avaruuden  $\mathcal{H}$  dimensio, funktiot  $\psi_i(x)$  (tai vektorit  $|\psi_i\rangle$ ) mitattavan suureen  $\hat{A}$  ominaistiloja ja kertoimet  $c_i \in \mathbb{C}$  niiden todennäköisyysamplitudeja. Aalto- ja matriisimallin on osoitettu tuottavan samat tulokset [1, s. 3–33], joilla kvanttimekaniikassa useimmiten tarkoitetaan tietynlaisia todennäköisyyksiä. Todennäköisyys saada mittaustulokseksi ominaistilaa  $\psi_j(x)$  (tai  $|\psi_j\rangle$ ) vastaava ominaisarvo on tunnetusti:

$$p(\psi_j) = |c_j|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} \psi_j^*(x) \psi(x) dx \right|^2 \equiv |\langle \psi_j | \psi \rangle|^2. \quad (1.1.3)$$



Tästä voidaan johtaa kuuluisa *Gleasonin teoreema* [2]:

$$\begin{aligned} p(\psi_j) &= |\langle \psi_j | \psi \rangle|^2 = \langle \psi_j | \psi \rangle \langle \psi | \psi_j \rangle \equiv \langle \psi_j | \rho | \psi_j \rangle \\ &= \text{tr}[\langle \psi_j | \rho | \psi_j \rangle] = \text{tr}[\rho | \psi_j \rangle \langle \psi_j |] \equiv \text{tr}[\rho E_j]. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Tilavektoreiden "ket-bra"-tulon  $|\psi\rangle\langle\psi|$  muodostamasta *tiheysmatriisista* on käytetty merkintää  $\rho$ . Vastaavasti, tarkasteltava mittaustulostila  $|\psi_j\rangle$  on jäljen sykliisyyden avulla saatu muotoon  $|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ , joka jäljen sisällä määritellään *efektiksi*  $E_j$ . Efektit ovat Hilbertin avaruuden "kyllä tai ei" -väittämien ekvivalenssiluokkia [3, s. 48]. Tässä tapauksessa väitettäisiin:

"Tilan  $\psi$  mittaus tuottaa lopputuloksen  $\psi_j$ ",

ja luku  $p(\psi_j) \in [0, 1]$  antaisi kyseisen väitteen todennäköisyyden. Gleasonin teoreemaan liittyy toki syvällisempääkin matematiikkaa, johon tässä tutkielmassa ei kuitenkaan ole tarpeellista tutustua.

Tarkastellaan vielä sivuhuomiona, mitä saataisiin, jos efekti  $E_j$  kaavassa (1.1.4) korvattaisiin suurella  $\hat{A}$ :

$$\begin{aligned} \text{tr}[\rho \hat{A}] &= \text{tr}[|\psi\rangle\langle\psi| \hat{A}] = \text{tr}[\langle\psi| \hat{A} |\psi\rangle] = \langle\psi| \hat{A} |\psi\rangle = \sum_{i,j}^d c_i^* c_j \langle\psi_i| \hat{A} |\psi_j\rangle \\ &= \sum_{i,j}^d c_i^* c_j \langle\psi_i| \lambda_j |\psi_j\rangle = \sum_{i,j}^d c_i^* c_j \lambda_j \delta_{i,j} = \sum_i^d |c_i|^2 \lambda_i = \sum_i^d p(\psi_i) \lambda_i. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Saatiin ominaisarvojen todennäköisyyksillä painotettu summa eli suureen  $\hat{A}$  odotusarvo  $\langle\hat{A}\rangle$ !

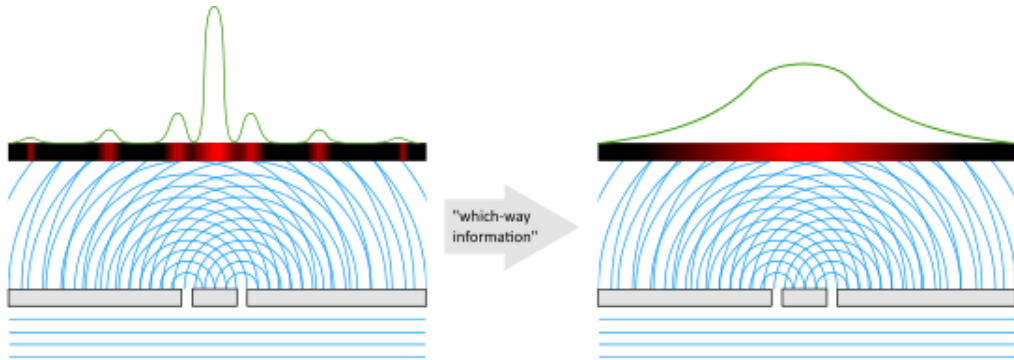
Yhtälöissä (1.1.3) ja (1.1.4) esitettyjen todennäköisyyksien perusteella ei tietenkään voi ennustaa yksittäisen mittauksen tulosta, mutta monen mittauksen jälkeen tulisi niiden näkyä tilastoissa. Kun mittaus on sen sijaan jo tehty ja tulokseksi saatu vaikka  $\psi_j$  (tai tarkemmin, sitä vastaava ominaisarvo), voidaan "jälkiviisaana" kirjoittaa muunnokset:

$$|c_j|^2 \rightarrow 1 \text{ ja } c_k \rightarrow 0 \text{ kun } k \neq j. \quad (1.1.6)$$

Alkuperäisen aaltofunktion sanotaan kööpenhaminalaisen tulkinnan mukaan *romahtaneen*. Romahtamisen takana piilevä fysiikka liittyy kvanttimekaniikan todennäköisyysluonteeseen. Mihin tilaan  $\psi_j$  alkuperäinen tila  $\psi$  päätyykään romahtamaan, on aidosti sattumanvaraista. Monia matemaattisia malleja ilmiön selittämiseksi on kuitenkin pyritty kehittämään [4].

Kenties kuuluisin esimerkki aaltofunktion romahtamisesta on sellainen kaksoisrakokoe, jossa hiukkasen kulkema reitti määritetään. Kokeen voi suorittaa muun muassa foton-, elektroni- tai neutronilähteen avulla. Aluksi hiukkasia ammutaan kohti kaksoisrakoa välittämättä siitä,

kummasta raosta ne kulkevat. Raot toimivat palloaaltolähteinä, ja kun nämä aallot interferoivat keskenään, syntyy vastakkaiselle varjostimelle interferenssikuvio. Kun hiukkasen reitti puolestaan määritetään, tulisi interferenssikuvion hävitä. Fotoneitten tapauksessa reitin määrittäminen onnistuu lomittuneita apufotoneita ja neljännesaaltolevyjä sopivasti käyttämällä [5].



**Kuva 1.** Kaksoisrakokoe kahdessa eri tilanteessa: Kun ei tiedetä, mistä raosta mikäkin hiukkanen kulki, ja kun se tiedetään ("which-way information"). Jälkimmäisessä tilanteessa interferenssikuvio häviää!

Interferenssikuvion häviäminen on helposti selitettävissä. Ensimmäisessä tapauksessa hiukasta karakterisoi kaavan (1.1.2) perusteella superpositiotila:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi(\mathbf{r}_1)\rangle + |\psi(\mathbf{r}_2)\rangle), \quad (1.1.7)$$

jota vastaava tiheysmatriisi voidaan kirjoittaa muotoon:

$$\begin{aligned} \varrho &\equiv |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(|\psi(\mathbf{r}_1)\rangle\langle\psi(\mathbf{r}_1)| + |\psi(\mathbf{r}_2)\rangle\langle\psi(\mathbf{r}_2)| + |\psi(\mathbf{r}_1)\rangle\langle\psi(\mathbf{r}_2)| + |\psi(\mathbf{r}_2)\rangle\langle\psi(\mathbf{r}_1)|) \\ &\equiv \frac{1}{2}(\varrho(\mathbf{r}_1) + \varrho(\mathbf{r}_2) + |\psi(\mathbf{r}_1)\rangle\langle\psi(\mathbf{r}_2)| + |\psi(\mathbf{r}_2)\rangle\langle\psi(\mathbf{r}_1)|), \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

missä *koherenssina* tunnetut ristitermit  $|\psi(\mathbf{r}_1)\rangle\langle\psi(\mathbf{r}_2)| + |\psi(\mathbf{r}_2)\rangle\langle\psi(\mathbf{r}_1)|$  aiheuttavat interferenssikuvion varjostimelle. Kun hiukkasen kulkema reitti sen sijaan tunnetaan, on sen tila  $|\psi\rangle = |\psi(\mathbf{r}_i)\rangle$  ja vastaava tiheysmatriisi  $\varrho(\mathbf{r}_i) \equiv |\psi(\mathbf{r}_i)\rangle\langle\psi(\mathbf{r}_i)|$ . Koherenssin häviämisen myötä myös interferenssi on hävinnyt!

Tietynlaisissa mittauksissa kvanttimekaaninen tila voi säilyä ennallaan, mutta kuten pian tullaan huomaamaan, ei tällaisista mittauksista saa minkäänlaista informaatiota. *Buschin teoreema* [6] sanoo lyhyesti ja ytimekkäästi: "Ei informaatiota ilman häiriötä." Kyseiseen teoreemaan

manifestoituu itse asiassa aaltofunktion romahtaminenkin, sillä häiriöllä siinä tarkoitetaan nimenomaan tilan muutosta. Todistaaksemme Buschin teoreeman tulee ensin tehdä muutama hyödyllinen määritelmä. Näissä määritelmissä seurataan hyvin läheisesti kirjaa [3].

*Asteikkosuure* on mitattavan suureen kanssa vahvasti korreloiva suure. Esimerkiksi elektronin spinin (mitattava suure) kanssa Stern-Gerlach -kokeessa korreloi sen lopullinen paikka (asteikkosuure). Asteikkosuureen lukeman perusteella saadaan siis mitattava suure. Vastaavasta tilasta käytetään nimitystä *luotaintila* [3, s. 223] tai suomalaisemmin *aputila*.

*Vuorovaikutuskanava*  $\mathcal{V}$  on mitattavan tilan ja aputilan välistä vuorovaikutusta kuvaava operaatio, jota vastaava lineaarikuvaus on jäljen säilyttävä ja (täys)positiivinen [3, s. 178, 223–224]. Pelkän *kanavan* yhteydessä täyspositiivisuudella tarkoitettaisiin, että yhdistetyn systeemin kuvauksessa  $(\mathcal{N} \otimes \mathbb{1})(\varrho \otimes \xi)$  argumentin positiivisuus säilyisi:

$$(\mathcal{N} \otimes \mathbb{1})(\varrho \otimes \xi) = \mathcal{N}(\varrho) \otimes \xi \geq 0^1. \quad (1.1.9)$$

Täyspositiivisuus vaaditaan, sillä muuten voitaisiin päätyä negatiivisiin todennäköisyyksiin ja siten epäfysikaalisiin tilanteisiin [3, s. 176].

Suureen  $\hat{A}$  *mittaussmalli* on mittaustapahtuman yksikäsitteisesti määrittävä kokoelma  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{K}, \xi, \mathcal{V}, \hat{F} \rangle$ , missä  $\mathcal{K}$  on aputilaan  $\xi$  liittyvä Hilbertin avaruus,  $\mathcal{V}$  vuorovaikutuskanava ja  $\hat{F}$  asteikkosuure. Aputilaa ja asteikkosuuretta käytettäessä tulee tietenkin päästä samoihin tuloksiin kuin suoraan tarkasteltavaa systeemiä mitattaessa, joten mittaussmallin tulee täyttää *todennäköisyyksien reproduointiehto* [3, s. 223]:

$$\text{tr}[\varrho \hat{A}(X)] = \text{tr} \left[ \mathcal{V}(\varrho \otimes \xi) \left( \mathbb{1} \otimes \hat{F}(X) \right) \right]^2. \quad (1.1.10)$$

Tietyn mittaussmallin  $\mathcal{M}$ , tulosjoukon  $X$  ja tilan  $\varrho$  *instrumentti*  $\mathcal{J}_X^{\mathcal{M}}(\varrho)$  kertoo, minkälainen *ehdollinen tila*  $\tilde{\varrho}_X$  mittauksen jälkeen jää jäljelle esimerkiksi toista mittausta varten [3, s. 226–231]:

$$\tilde{\varrho}_X = \frac{\mathcal{J}_X^{\mathcal{M}}(\varrho)}{\text{tr}[\mathcal{J}_X^{\mathcal{M}}(\varrho)]}, \text{ missä } \mathcal{J}_X^{\mathcal{M}}(\varrho) = \text{tr}_{\mathcal{K}} \left[ \mathcal{V}(\varrho \otimes \xi) \left( \mathbb{1} \otimes \hat{F}(X) \right) \right]. \quad (1.1.11)$$

$\text{tr}_{\mathcal{K}}[\cdot]$  on niin sanottu *osittaisjälki*, joka toteuttaa yhtälön:

$$\text{tr}[\text{tr}_{\mathcal{K}}[\hat{T}]\hat{E}] = \text{tr}[\hat{T}(\mathbb{1} \otimes \hat{E})] \quad (1.1.12)$$

<sup>1</sup> Vuorovaikutuskanavan argumentti olisi siis koko  $\varrho \otimes \xi$ !

<sup>2</sup> Kirjoitettuna  $\hat{A}(X)$  ( $\hat{F}(X)$ ) suure  $\hat{A}$  ( $\hat{F}$ ) voidaan mieltää efektiksi, jonka mukaan suureen  $\hat{A}$  ( $\hat{F}$ ) mittaus tuottaisi joukkoon  $X$  kuuluvan tuloksen [7, s. 9].

kaikilla jälkiluokkaoperaattoreilla  $\hat{T} \in \mathcal{T}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$  ja rajoitetuilla operaattoreilla  $\hat{E} \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$  [3, s. 100]. Lisäksi instrumentin on kanavan tavoin oltava lineaarinen ja täyspositiivinen, mutta jäljen ei tarvitse säilyä – sen riittää pysyä nollan ja yhden välillä,  $0 \leq \text{tr}[J_X^{\mathcal{M}}(\varrho)] \leq 1$ .

Nyt kykenemme todistamaan Buschin teoreeman. Oletetaan, että mittauksessa ei tapahdu minkäänlaista häiriötä, eli lähtötila säilyy muuttumattomana:

$$\tilde{\varrho}_X = \frac{J_X^{\mathcal{M}}(\varrho)}{\underbrace{\text{tr}[J_X^{\mathcal{M}}(\varrho)]}_{\equiv c_X(\varrho)}} = \varrho$$

$$\Leftrightarrow J_X^{\mathcal{M}}(\varrho) = c_X(\varrho)\varrho$$

Olkoon  $\varrho_1 \neq \varrho_2$ . Instrumentin lineaarisuuden vuoksi:

$$J_X^{\mathcal{M}}(\varrho_1 + \varrho_2) = \begin{cases} J_X^{\mathcal{M}}(\varrho_1) + J_X^{\mathcal{M}}(\varrho_2) = c_X(\varrho_1)\varrho_1 + c_X(\varrho_2)\varrho_2 \\ c_X(\varrho_1 + \varrho_2)(\varrho_1 + \varrho_2) = c_X(\varrho_1 + \varrho_2)\varrho_1 + c_X(\varrho_1 + \varrho_2)\varrho_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow c_X(\varrho_1) = c_X(\varrho_1 + \varrho_2) = c_X(\varrho_2)$$

$$\Leftrightarrow c_X(\varrho) = c_X \text{ (vakio)}$$

$$\Leftrightarrow J_X^{\mathcal{M}}(\varrho) = c_X\varrho$$

$$\Leftrightarrow \text{tr}[J_X^{\mathcal{M}}(\varrho)] = \text{tr}[c_X\varrho]$$

$$\Leftrightarrow \text{tr} \left[ \text{tr}_{\mathcal{K}} \left[ \mathcal{V}(\varrho \otimes \xi) \left( \mathbb{1} \otimes \hat{F}(X) \right) \right] \right] = c_X \text{tr}[\varrho]$$

$$\Leftrightarrow \text{tr} \left[ \mathcal{V}(\varrho \otimes \xi) \left( \mathbb{1} \otimes \hat{F}(X) \right) \right] = c_X$$

$$\Leftrightarrow \text{tr}[\varrho \hat{A}(X)] = c_X$$

$$\therefore \hat{A}(X) = c_X \mathbb{1}$$

Suureeksi (tai efektiksi)  $\hat{A}(X)$  saatiin triviaali suure  $c_X \mathbb{1}$ . Tämä ei anna tuntemattomasta tilasta  $\varrho$  minkäänlaista informaatiota, sillä Gleasonin teoreeman todennäköisyyskaavaa (1.1.4) käyttäen saadaan kaikille tiloille sama luku  $c_X$ , eikä niitä näin pysty mitenkään erottelemaan. Täten informaatiota ei saa ilman häiriötä. ■

Kaksoisrakokokeen yhteydessä sivuttiin jo hieman *Heisenbergin epätarkkuusperiaatetta*, erästä Buschin teoreeman tavoin fundamentaalisinta mittaushäiriöön liittyvää postulaattia; On olemassa sellaisia suurepareja, joista toista mittaamalla toisen epätarkkuus kasvaa. Kaksoisrakokokeessa nämä suureet olivat interferenssikuvion näkyvyys ja "which-way

information”. Johdetaan seuraavaksi yleinen alaraja kahden mielivaltaisen suureen mittaustuloshajonnoille. Lähdetään liikenteeseen arvioimalla suureiden  $\hat{A}$  ja  $\hat{B}$  (tilassa  $|\psi\rangle$ ) varianssien tuloa alaspäin:

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{A}}^2 \sigma_{\hat{B}}^2 &= \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle \langle (\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle)^2 \rangle = \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle) \psi | (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle) \psi \rangle \langle (\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle) \psi | (\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle) \psi \rangle \\ &\equiv \underbrace{\langle \varphi | \varphi \rangle \langle \phi | \phi \rangle}_{\text{Cauchy-Schwartz-epäyhtälö}} \geq |\langle \varphi | \phi \rangle|^2 = \Re e(\langle \varphi | \phi \rangle)^2 + \Im m(\langle \varphi | \phi \rangle)^2 \geq \Im m(\langle \varphi | \phi \rangle)^2 \\ &= \left[ \frac{1}{2i} (\langle \varphi | \phi \rangle - \langle \phi | \varphi \rangle) \right]^2 \\ &\Leftrightarrow \sigma_{\hat{A}}^2 \sigma_{\hat{B}}^2 \geq \left[ \frac{1}{2i} (\langle \varphi | \phi \rangle - \langle \phi | \varphi \rangle) \right]^2\end{aligned}\quad (1.1.13)$$

$$\begin{aligned}\langle \varphi | \phi \rangle &= \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle) \psi | (\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle) \psi \rangle = \langle \psi | (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle) (\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle) \psi \rangle \\ &= \langle \psi | (\hat{A}\hat{B} - \hat{A}\langle \hat{B} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \hat{B} + \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle) \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \hat{A}\hat{B} | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \langle \hat{B} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \psi | \hat{B} | \psi \rangle + \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle \langle \psi | \psi \rangle \\ &= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle + \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle = \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \varphi | \phi \rangle = \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle \\ \langle \phi | \varphi \rangle = \langle \hat{B}\hat{A} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle \end{cases}\end{aligned}\quad (1.1.14)$$

Sijoitetaan yhtälöt (1.1.14) yhtälöön (1.1.13):

$$\sigma_{\hat{A}}^2 \sigma_{\hat{B}}^2 \geq \left[ \frac{1}{2i} (\langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle \hat{B}\hat{A} \rangle) \right]^2 \equiv \left( \frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2. \quad (1.1.15)$$

Yhtälöstä (1.1.15) näkee helposti, että vain keskenään kommutoivat suureet voidaan mitata samanaikaisesti mielivaltaisella tarkkuudella. Tämä ei kuitenkaan tarkoita sitä, etteikö minkäänlaista häiriötä tapahtuisi. Buschin teoreema takaa tilan muuttumisen! Samanaikaisesti mitattavia suureita ovat esimerkiksi keskenään ortogonaaliset yksiulotteiset projektiot,  $\hat{A} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$  ja  $\hat{B} = |\beta\rangle\langle\beta|$  ( $\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\beta|\beta\rangle = 1$  ja  $\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle = 0$ ). Vastakkaisesta esimerkistä käy paikka- ja liikemääräsuureiden  $\hat{Q}$  ja  $\hat{P}$  muodostama pari:

$$\begin{cases} \hat{Q}\psi(x) = x\psi(x) \\ \hat{P}\psi(x) = -i\hbar\nabla\psi(x) \end{cases} \quad (1.1.16)$$

Kaikki tässä alaluvussa esitetty on kuvaillut *vahvaa mittausta*. Buschin teoreeman ja Heisenbergin epätarkkuusperiaatteen jälkeen onkin vain loogista lähteä tarkastelemaan, millaisella mittausmetodilla tuotettaisiin mahdollisimman vähän häiriötä, mutta saataisiin silti informaatiotakin. Intuition mukaan tällainen mittaus tulisi suorittaa mahdollisimman hellävaroin. Siksi sitä kutsutaan *heikoksi mittaukseksi*.

## 1.2 Heikko mittaus ja heikko arvo

Käsitteet heikko mittaus ja *heikko arvo* lanseerattiin vuonna 1988 Yakir Aharonovin *et al.* toimesta artikkelissa [8]. Heikolle ja vahvalle mittaukselle yhteistä on *pre-valinta* eli tilan preparointi: Mittaustapahtumaan kelpuutetaan ainoastaan tietyt kriteerit täyttävä kaikkien tilojen osajoukko. Vahvasta mittauksesta poiketen heikossa mittauksessa tehdään myös *post-valinta*, jonka Aharonov *et al.* esittivät terminä ensimmäistä kertaa vuonna 1964 artikkelissaan [9]. Inspiraation työhönsä tutkijat lienevät saaneen Satosi Watanaben ”kahden tilan vektoriformalismia” käsittelevästä artikkelista [10]. Kummankin artikkelin aihe oli kvanttimekaniikan aikasymmetrinen mittausteoria, jonka mukaan tulevaisuus vaikuttaisi yhtäläillä mittaussarjan keskimmäisiin tuloksiin kuin menneisyys. Aiheesta on kirjoitettu myös kansantajuisen ja varsin värikäs artikkeli Discover-lehden huhtikuuisessa numerossa 2010 [11].

Pre- ja etenkin post-valinta sekä aikasymmetrinen mittausteoria ovat heikon mittauksen kannalta niin oleellisia, että avataan niitä hieman enemmän. Pre- ja post-valinnan motivoi seuraava ajatuskoe. Kuvitellaan tutkivamme jonkinlaista hiukkassädettä sumukammiossa. Jotta tapahtumien tilastollinen arviointi jälkikäteen olisi ollenkaan mielekäästä, tulee näytteen aluksi tiettenkin päästä kammioon (pre-valinta). Toisaalta, tullakseen rekisteröidyksi pitää hiukkasten myös aktivoida kammion sensorit (post-valinta) [9].

Näytetään seuraavaksi, että tehtäessä monta peräkkäistä mittausta (jonomittaus, mittaussarja), voidaan pre- ja post-valinnoista riippuvia mittaustulostodennäköisyyksiä tarkastella miten päin tahansa (aikasymmetria). Päälähteenä toimii edelleen [9], joskin siinä esiintyvät laskut on pilkottu useampiin välivaiheisiin.

Kun suuretta  $\hat{A}$  on mitattu tilassa  $|\psi\rangle$ , tiedetään sen kaavojen (1.1.2) ja (1.1.6) perusteella romahtaneen joksikin ominaistilaksi  $|\psi_a\rangle$ . Yhden yksittäisen mittauksen sijasta tämä voisi aivan yhtä hyvin olla jonkin mittaussarjan viimeisin mittaus. Kun seuraavaksi mitataan jotakin toista suuretta  $\hat{B} \neq \hat{A}$ , saadaan sen tiettyä ominaistilaa  $|\psi_b\rangle$  vastaavaksi todennäköisyydeksi kaavojen (1.1.3) ja (1.1.4) perusteella:

$$|\langle\psi_a|\psi_b\rangle|^2 = \text{tr}[D_a D_b], \quad (1.2.1)$$

missä on käytetty notaatiota  $D_i \equiv |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$  alkuperäislähdettä [9] seuraten. Kun mittaussarjaa jatketaan mittaamalla esimerkiksi  $\hat{C}, \hat{D}, \dots, \hat{G}$ , saadaan tiettyjä ominaistiloja  $|\psi_c\rangle, |\psi_d\rangle, \dots, |\psi_g\rangle$  vastaaviksi todennäköisyyksiksi  $\text{tr}[D_a D_b] \text{tr}[D_b D_c] \dots \text{tr}[D_f D_g]$ . Tässä kohtaa lienee syytä tarkentaa, etteivät vektorit  $|\psi_i\rangle$  ja  $|\psi_j\rangle$  ( $i \neq j$ ) välttämättä kuulu samaan kantaan, vaikka niistä on käytetty samaa symbolia  $\psi$ . Kyseinen kirjoitusasu on valittu helpomman luettavuuden vuoksi.

On helposti osoitettavissa, että muotoa  $D_i \equiv |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$  oleville matriiseille pätee:

$$\text{tr}[D_a D_b] \text{tr}[D_b D_c] = \text{tr}[D_c D_b D_a D_b]. \quad (1.2.2)$$

Tätä kaavaa koko ketjulle  $\text{tr}[D_a D_b] \text{tr}[D_b D_c] \dots \text{tr}[D_f D_g]$  käyttämällä saadaan:

$$\text{tr}[D_a D_b] \text{tr}[D_b D_c] \dots \text{tr}[D_f D_g] = \text{tr}[D_g D_f \dots D_b D_a D_b \dots D_f]. \quad (1.2.3)$$

Reaaliluku  $\text{tr}[D_g D_f \dots D_b D_a D_b \dots D_f] \in [0, 1]$  kertoo siis sen todennäköisyyden, millä mittaussarja  $\hat{A}, \hat{B}, \dots, \hat{G}$  tuottaa tuloksiksi ominaistiloja  $|\psi_a\rangle, |\psi_b\rangle, \dots, |\psi_g\rangle$  vastaavat ominaisarvot.

Kiinnitetään sitten  $\hat{A}$  ja  $\hat{G}$  eli suoritetaan pre- ja post-valinta. Käytetään selkeyden vuoksi merkintöjä  $|\psi_a\rangle \equiv |A\rangle$ ,  $|\psi_g\rangle \equiv |G\rangle$ ,  $D_a \equiv A$  ja  $D_g \equiv G$ . Todennäköisyydeksi saada mittaustuloksiksi joitakin tiettyjä ominaisarvoja  $|\psi_b\rangle, |\psi_c\rangle, \dots, |\psi_f\rangle$  vastaavat ominaisarvot saadaan nyt:

$$p(|\psi_b\rangle, |\psi_c\rangle, \dots, |\psi_f\rangle | |A\rangle, |G\rangle) = \frac{\text{tr}[G D_f \dots D_b A D_b \dots D_f]}{\sum_{b', c', \dots, f'} \text{tr}[G D_{f'} \dots D_{b'} A D_{b'} \dots D_{f'}]}. \quad (1.2.4)$$

Tämä on selkeästi aikasymmetristä muotoa, sillä tekemälläkin mittaukset järjestyksessä  $\hat{G} \rightarrow \hat{A}$  päädytään todennäköisyyteen:

$$p(|\psi_f\rangle, |\psi_e\rangle, \dots, |\psi_b\rangle | |G\rangle, |A\rangle) = \frac{\text{tr}[A D_b \dots D_f G D_f \dots D_b]}{\sum_{f', e', \dots, b'} \text{tr}[A D_{b'} \dots D_{f'} G D_{f'} \dots D_{b'}]}, \quad (1.2.5)$$

joka jäljen syklisyyden nojalla on tismalleen sama kuin (1.2.4)!

On kvanttimekaanisten systeemien aikasymmetrisyys sitten pelkkä matemaattinen tempu tai oikeaa fysiikkaa, voidaan tällä pre- ja post-valinnan taustoituksella hyvin käydä käsiksi itse heikkoon mittaukseen. Heikko mittausta perustuu pre- ja post-valintojen välissä tapahtuvaan hyvin heikkoon vuorovaikutukseen mitattavan systeemin ja mittavälineen kanssa. Koska vuorovaikutusta kuitenkin on, pitäisi sekä pre- että post-valittu tila saada jotenkin kytkettyä yhteen aputilan kanssa. Kahden tiheysmatriisin  $\rho$  (mitattava tila) ja  $\xi$  (aputila) tapauksessa tämä onnistui yksinkertaisesti tensoritulon avulla. Uusi yhteistila oli  $\rho \otimes \xi$ . Mutta nyt yhteen kytkettäviä tiloja onkin kolme! Tällaista kytkentää varten voidaan hajoavien vektoreiden joukossa  $\{\psi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \mid \psi = \varphi \otimes \phi, \varphi \in \mathcal{H}, \phi \in \mathcal{K}\}$  määritellä *osittainen sisätulo*:

$$\begin{cases} \langle \varphi \otimes \phi | \eta \rangle_{\mathcal{H}} := \langle \varphi | \eta \rangle \phi, \text{ kun } \eta \in \mathcal{H} \\ \langle \varphi \otimes \phi | \mu \rangle_{\mathcal{K}} := \langle \phi | \mu \rangle \varphi, \text{ kun } \mu \in \mathcal{K} \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Erittäin yleisesti käytetty vuorovaikutuskanava on:

$$\mathcal{V}(\rho \otimes \xi) = \hat{U}_\lambda \rho \otimes \xi \hat{U}_\lambda^*, \quad (1.2.7)$$

missä *mittausteorian standardimallin* mukaisesti [7, s. 41]:

$$\hat{U}_\lambda = e^{i\lambda\hat{A}\otimes\hat{B}}. \quad (1.2.8)$$

Tässä  $\lambda$  on kytkentäparametri,  $\hat{A}$  mitattava suure ja  $\hat{B}$  asteikkosuure. Usein asteikkosuureksi osoittautuu hyödylliseksi valita liikemäärä. Merkitsemmekin jatkossa  $\hat{B} = \hat{P}$ .

Jos pre- ja post-valittujen tilojen sekä aputilan oletetaan olevan puhtaita, eli ne voidaan esittää jonain ket-vektorina, voidaan vuorovaikutuskanavan (1.2.7) toiminta esittää seuraavasti:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(|\varphi_{\text{POST}}\rangle\langle\varphi_{\text{POST}}| \otimes |\phi\rangle\langle\phi|) &= e^{i\lambda\hat{A}\otimes\hat{P}}|\varphi_{\text{POST}}\otimes\phi\rangle\langle\varphi_{\text{POST}}\otimes\phi|e^{-i\lambda\hat{A}\otimes\hat{P}} \\ &= |e^{i\lambda\hat{A}\otimes\hat{P}}(\varphi_{\text{POST}}\otimes\phi)\rangle\langle e^{i\lambda\hat{A}\otimes\hat{P}}(\varphi_{\text{POST}}\otimes\phi)| \\ &\Leftrightarrow \mathcal{V}(|\varphi_{\text{POST}}\rangle\langle\varphi_{\text{POST}}| \otimes |\phi\rangle\langle\phi|) \sim \hat{U}_\lambda(\varphi_{\text{POST}}\otimes\phi) \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Lähdetään sitten tarkastelemaan, miten aputilaa vastaava aaltofunktio  $\phi(x)$  lähtisi kehittymään kytkettynä pre- ja post-valittuihin tiloihin yhtälöiden (1.2.6) ja (1.2.9) mukaisesti:

$$\begin{aligned} \langle\hat{U}_\lambda(\varphi_{\text{POST}}\otimes\phi(x))|\eta_{\text{PRE}}\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle e^{i\lambda\hat{A}\otimes\hat{P}}(\varphi_{\text{POST}}\otimes\phi(x))|\eta_{\text{PRE}}\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle (\mathbb{1}_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{X}} + i\lambda\hat{A}\otimes\hat{P})(\varphi_{\text{POST}}\otimes\phi(x))|\eta_{\text{PRE}}\rangle_{\mathcal{H}} + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &\approx \langle\varphi_{\text{POST}}\otimes\phi(x)|\eta_{\text{PRE}}\rangle_{\mathcal{H}} + i\lambda\langle\hat{A}\varphi_{\text{POST}}\otimes\hat{P}\phi(x)|\eta_{\text{PRE}}\rangle \\ &= \langle\varphi_{\text{POST}}|\eta_{\text{PRE}}\rangle\phi(x) + i\lambda\langle\hat{A}\varphi_{\text{POST}}|\eta_{\text{PRE}}\rangle\hat{P}\phi(x) \\ &\approx \langle\varphi_{\text{POST}}|\eta_{\text{PRE}}\rangle \left[ \mathbb{1}_{\mathcal{X}} + i\lambda \frac{\langle\hat{A}\varphi_{\text{POST}}|\eta_{\text{PRE}}\rangle}{\langle\varphi_{\text{POST}}|\eta_{\text{PRE}}\rangle} \hat{P} + \tilde{\mathcal{O}}(\lambda^2) \right] \phi(x) \\ &= \langle\varphi_{\text{POST}}|\eta_{\text{PRE}}\rangle e^{i\lambda \frac{\langle\hat{A}\varphi_{\text{POST}}|\eta_{\text{PRE}}\rangle}{\langle\varphi_{\text{POST}}|\eta_{\text{PRE}}\rangle} \hat{P}} \phi(x) \\ &= \langle\varphi_{\text{POST}}|\eta_{\text{PRE}}\rangle e^{i\lambda \frac{\langle\varphi_{\text{POST}}|\hat{A}\eta_{\text{PRE}}\rangle}{\langle\varphi_{\text{POST}}|\eta_{\text{PRE}}\rangle} \hat{P}} \phi(x) \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Laskussa kyettiin ensin unohtamaan termit  $\mathcal{O}(\lambda^2)$  ja sitten lisäämään termit  $\tilde{\mathcal{O}}(\lambda^2)$ , koska kytkentäparametrin oletetaan heikon mittauksen takia olevan todella pieni,  $\lambda \ll 1$ . Aharonov *et al.* ovat postuloineet itse asiassa tarkemmankin, niin sanotun *heikon ehdon* [8]:

$$\sigma \ll \max_n \frac{|\langle\varphi_{\text{POST}}|\eta_{\text{PRE}}\rangle|}{|\langle\varphi_{\text{POST}}|\hat{A}^n\eta_{\text{PRE}}\rangle|^{1/n}}. \quad (1.2.11)$$

Tässä  $\sigma$  on pre-valitun aaltofunktion keskihajonta.



Viimeisessä vaiheessa suure  $\hat{A}$  pystyttiin siirtämään sisätulossa  $\langle \varphi_{\text{POST}} | \eta_{\text{PRE}} \rangle$  ket-vektorin puolelle sellaisenaan, sillä suureen reaalisuusvaatimuksen vuoksi sen on oltava itseadjungoitu,  $\hat{A} = \hat{A}^*$ . Näin tehtiin historiallisista syistä.

Laskua voi tuki jatkaa vielä pidemmällekin, mutta johdetaan sitä ennen eräs aputuloks. Näytetään, miten eksponenttioperaattori  $e^{ia\hat{P}}$  vaikuttaa aaltofunktioon  $\phi(x)$ . Kehitetään funktio  $\phi(x + a)$  Taylorin sarjaksi pisteen  $x$  suhteen:

$$\begin{aligned} \phi(x + a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(x)}{n!} a^n = \phi(x) + \phi'(x)a + \frac{1}{2} \phi''(x)a^2 + \dots = (1 + a\nabla + \dots)\phi(x) \\ &= \left(1 - \frac{a}{i\hbar}(-i\hbar\nabla) + \dots\right)\phi(x) \equiv \left(\mathbb{I} + \frac{ia}{\hbar}\hat{P} + \dots\right)\phi(x) = e^{ia\hat{P}}\phi(x)^3 \\ &\Leftrightarrow e^{ia\hat{P}}\phi(x) = \phi(x + a) \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Liikemäärän eksponenttioperaattori generoi siis aaltofunktion translaation! Käytetään saatua tulosta yhtälöön (1.2.10):

$$\langle \hat{U}_\lambda(\varphi_{\text{POST}} \otimes \phi(x)) | \eta_{\text{PRE}} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \varphi_{\text{POST}} | \eta_{\text{PRE}} \rangle \phi\left(x + \lambda \frac{\langle \varphi_{\text{POST}} | \hat{A} \eta_{\text{PRE}} \rangle}{\langle \varphi_{\text{POST}} | \eta_{\text{PRE}} \rangle}\right). \quad (1.2.13)$$

*Summa summarum*, kun puhdas aputila kytketään pre- ja post-valittuihin puhtaisiin tiloihin, ja vuorovaikutus tapahtuu mittausteorian standardimallin mukaisesti, siirtyy aputilaa vastaava aaltofunktio luvun  $\lambda \langle \varphi_{\text{POST}} | \hat{A} \eta_{\text{PRE}} \rangle / \langle \varphi_{\text{POST}} | \eta_{\text{PRE}} \rangle$  verran todennäköisyydellä  $|\langle \varphi_{\text{PRE}} | \eta_{\text{POST}} \rangle|^2$ . Koska varsinaisen mittaustilanteen kanssa korreloivan aaltofunktion  $\phi(x)$  tiedetään olevan puolikas todennäköisyysjakauma ( $|\phi(x)|^2$ :n ollessa kokonainen), on tämä siirtymä suoraan verrannollinen mitattavan tilan todennäköisyysjakauman siirtymään ja sitä kautta myös mitattavan suureen odotusarvoon<sup>4</sup>! Tästä syystä kyseistä siirtymää, kytkentäparametria  $\lambda$  lukuun ottamatta, kutsutaan *suureen  $\hat{A}$  heikoksi arvoksi*, ja siitä käytetään merkintää:

$$A_w \equiv \frac{\langle \varphi_{\text{POST}} | \hat{A} \eta_{\text{PRE}} \rangle}{\langle \varphi_{\text{POST}} | \eta_{\text{PRE}} \rangle}. \quad (1.2.14)$$

Koska heikko arvo saadaan aaltofunktion kokonaissiirtymästä jakamalla se pienellä kytkentäparametrilla  $\lambda \ll 1$ , voi  $A_w$  kasvaa helposti hyvinkin suureksi. Tyypillistä on, ettei  $A_w$  edes kuulu suureen  $\hat{A}$  ominaisarvoihin tai näistä pienimmän ja suurimman välille. Tilanteessa, jossa pre- ja post-valitut tilat ovat lähes ortogonaalisia, kutsutaan suurta heikkoa arvoa

<sup>3</sup>  $\hbar$  muunnettiin luonnolliseksi yksiköksi,  $\hbar = 1$ .

<sup>4</sup> Näin lasketusta odotusarvosta käytetään nimitystä *sumennos* [12, s. 45].

anomaaliseksi [13]. Heikko arvo voi olla myös kompleksinen. Tällöin sen reaali- ja imaginaariosat vastaavat joko yhden kaksiulotteisen tai kahden yksiulotteisen aaltofunktion siirtymiä.

Käytännössä heikkoja mittauksia tulee suorittaa monta, sillä häiriön ollessa pientä mittaustuloksiin liittyvä epävarmuus on valtavaa. Tulosten keskiarvoistamisen myötä kyseinen epävarmuus saadaan kuitenkin pienemmään ja luotettava  $A_w$  laskettua.

Suuruutensa vuoksi heikko arvo soveltuu pienten signaalien amplifikaatioon. Aihetta sivuttiin alun perin jo artikkelissa [8], mutta ensimmäisinä tämän kaltaisen kokeen tarkoitushakuisesti suorittivat 1990-luvun alussa Ritchie, Story ja Hulet tutkimalla gaussisen valonsäteiden käyttäytymistä kahtaistaittavassa kristallissa [14]. Tuoreemmasta esimerkistä käy Huangin ja Agarwalin työ atomisten "Schrödingerin kissa" -tilojen parissa [15]. Pääajatuksena heidän tutkimuksessaan oli erottaa lähekkäin olevat tilat paremmin toisistaan, mistä päästäänkin toiseen heikon mittauksen eduista, ideaaliseen *tilatomografiaan*.

Vaikuttaisi siltä, että tilatomografiassa (kvanttimekaanisen tilan kokeellisessa määrittämisessä) onnistutaan nykyään parhaiten kombinoimalla vahvoja ja heikkoja mittauksia juuri sopivassa suhteessa. Mittausta kutsutaan tällöin *suoraksi mittaukseksi* [16]. Sanavalinnalla korostetaan sitä, että aaltofunktiota karakterisoiva kompleksiluku saadaan suoraan heikkona arvona  $A_w$  sen sijaan, että reaali- ja imaginaariosa mitattaisiin erillisillä vahvoilla mittauksilla [17]. Äärimmäisenä tilatomografiana voitaisiin pitää fotonien liikeratojen mittaamista, ja onpa tässäkin onnistuttu heikon mittauksen keinoin [18].

Näennäisen ilmeisistä eduistaan huolimatta heikko mittausta ja heikko arvo ovat kohdanneet myös kritiikkiä. Viimeaikainen debatti on liittynyt muun muassa heikon mittauksen kvanttimekaaniseen luonteeseen eli siihen, voisivatko myös klassiset mittaukset tuottaa heikkoja arvoja [13]. Tähän palataan seuraavassa alaluvussa. Artikkelin [19] menee vielä pidemmälle ja ehdottaa, ettei heikkoa mittausta tulisi edes tulkita mittaukseksi.

### 1.3 Heikko mittausta erilaisissa kokeissa

Tässä alaluvussa käsitellään hieman yksityiskohtaisemmin paria heikkoon mittaukseen liittyvää koejärjestelyä; Mitattavan suureen amplifikaatioon ja aaltofunktion suoraan mittaukseen luodaan täsmällisempi katsaus. Näiden välissä tarkastellaan ensimmäiseen kohdistunutta kritiikkiä ja selvitetään, miten siihen on pyritty vastaamaan. Osoittautuu, että ainakin näiden vastausten perusteella heikot arvot vaikuttaisivat täysin kvanttimekaanisilta.

### 1.3.1 Hiukkasen spin

Hiukkasen spinistä voidaan mitata vain yksi komponentti. Aaltofunktion romahtamisen seurauksena tieto kahdesta muusta häviää. Havainnollistetaan tätä laskuesimerkin avulla. Kuvitellaan, että ensimmäinen mittaus antaa tuloksen  $\hat{\sigma}_x = 1$ , jolloin uusi tilavektori on  $|\sigma_x^+\rangle \equiv (1, 1)/\sqrt{2}$ . Kuvitellaan, että seuraavaksi halutaan mitata spinin z-komponentti. Operationaalisesti tätä vastaa Paulin spin-matriisi:

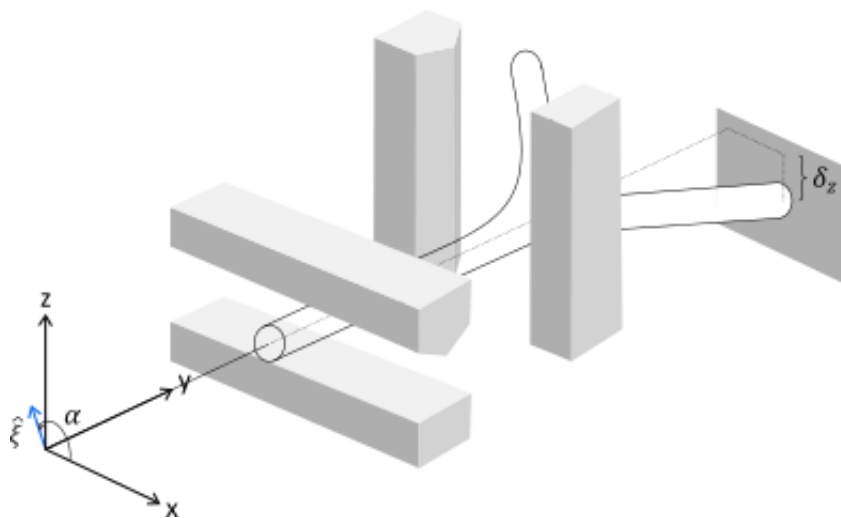
$$\hat{\sigma}_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.3.1)$$

Spinin z-komponentin odotusarvoksi saadaan nyt kaavan (1.1.5) avulla:

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle = \langle \sigma_x^+ | \hat{\sigma}_z | \sigma_x^+ \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (1.3.2)$$

eli tilastollisesti puolet spineistä osoittaa suuntaan  $\sigma_z^+$  ja puolet suuntaan  $\sigma_z^-$ . X-komponentin mittaus on siis tuhonnut alkuperäisen  $\sigma_z^\pm$ -jakauman tekemällä siitä täysin sattumanvaraisen, eikä z-komponentin mittaus x:n jälkeen siten kerro mitään tilanteesta ennen x:ää!

Jos spin-komponentteja haluaisi kuitenkin mitata samanaikaisesti, tulisi se suorittaa heikon mittauksen keinoin. Aharonov *et al.* ehdottivat artikkelissaan [8] seuraavanlaista proseduuria. Ammutaan liikemäärältään hyvin tunnettu hiukkassuihku kohti kahta Stern-Gerlach -laitteistoa. Ensimmäisessä vaikuttaa heikko magneettikenttä z-suunnassa ( $\partial B_z / \partial z \approx 0$ ), toisessa vahva magneettikenttä x-suunnassa. Hiukkasten spinit osoittavat alkutilanteessa yksikkövektorin  $\hat{\xi} = \cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j}$  suuntaan.



**Kuva 2.** Aharonovin *et al.* ehdottama koejärjestely spinin x- ja z-komponentin mittaamiseksi.

Pre-valintaa tässä kokeessa edustaa molemmat x-komponentit sisältävä tila:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\alpha}{2} |\sigma_x^+\rangle + \sin\frac{\alpha}{2} |\sigma_x^-\rangle, \quad (1.3.3)$$

ja toisen magneettikentän jälkeen post-valitaan  $|\sigma_x^+\rangle$ . Z-suuntaisen lokalisaation todennäköisyysamplitudi toimii puolestaan aputilana. Heikko ehto (1.2.11) saadaan toteutettua sijoittamalla levyilmaisin siten, että siirtymä  $\delta_z$  on isompi kuin epävarmuus  $\Delta z$ . Kytöntäparametrille  $\lambda$  pätee:

$$\lambda = \mu \frac{\partial B_z}{\partial z} z, \quad (1.3.4)$$

missä  $\mu$  on hiukkasten magneettinen momentti.

Nyt kykenemme laskemaan spinin z-komponentin heikon arvon kaavaa (1.2.14) käyttäen. Se on:

$$\sigma_{zw} \equiv \frac{\langle \sigma_x^+ | \hat{\sigma}_z | \psi \rangle}{\langle \sigma_x^+ | \psi \rangle} = \tan\frac{\alpha}{2}. \quad (1.3.5)$$

Saatu heikko arvo on suoraan verrannollinen lopulliseen siirtymään  $\delta_z$  levyilmaisimella. Artikkelin [8] otsikon ”How the Result of a Measurement of a Component of the Spin of a Spin- $\frac{1}{2}$  Particle Can Turn Out to be 100” mukainen arvo saavutetaan kulmalla  $\alpha \approx 178,9^\circ$ .

Kuten arvata saattaa, herätti artikkeli [8] aikoinaan kummastusta. Syytettiinpä sitä jopa virheelliseksi, kunnes Duck, Stevenson ja Sudarshan vahvistivat heikkojen arvojen olemassaolon [20]. Koe on jälkeinpäin toteutettu myös käytännössä, vaikkakin hieman modifioidusti [21].

### 1.3.2 Kolikonheittokritiikki

Vuonna 2014 New Mexicon yliopiston tutkijat Ferrie ja Combes pyrkivät osoittamaan artikkelissaan [13], kuinka heikkoon arvoon voitaisiin päätyä pelkkää klassista statistiikkaa manipuloimalla. Artikkelinsa aluksi he johtivat heikon arvon kvanttimekaanisesti, mutta tarkoitusperiään silmällä pitäen hieman Aharonovin *et al.* tavasta poiketen. He määrittelivät vuorovaikutuskanavan *Krausin operaattoreiden* [3, s. 189] avulla, ja (normalisoimattomaksi) ehdolliseksi tilaksi he laskivat *karkeistamalla* (engl. ”coarse graining”) [3, s. 164]:

$$\varepsilon_s \varrho = \frac{1}{2} \left[ \varrho + s \frac{\lambda'}{2} (\hat{A} \varrho + \varrho \hat{A}) \right], \quad (1.3.6)$$

missä  $s$  on joko  $+1$  tai  $-1$ , ja:

$$\lambda' = \frac{2\lambda}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}. \quad (1.3.7)$$

Suureen  $\hat{A}$  heikoksi arvoksi he saivat loppujen lopuksi, yksityiskohdat tässä tutkielmassa sivuuttaen, pre- ja post-valintojen ehdollistaman, muuttujan  $\frac{s}{\lambda'}$  odotusarvon.

Tarkastellaan sitten (anomaalisen) heikon arvon klassista vastinetta. Puhtaan tilan tapauksessa todennäköisyys jommallekummalle  $s$ :lle on:

$$p(s|\psi) = \text{tr}[\varepsilon_s |\psi\rangle\langle\psi|] = \frac{1}{2}(1 + s\lambda'\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle). \quad (1.3.8)$$

Kun pre-valitaan  $|\sigma_z^+\rangle \equiv (1, 0)$  ja suureksi  $\hat{A}$  valitaan  $\hat{\sigma}_z$ , muuntuu edellinen yhtälö yksinkertaisempaan muotoon:

$$p(s|\sigma_z^+) = \frac{1}{2}(1 + s\lambda'). \quad (1.3.9)$$

Tämän yhtälön kautta ei kuitenkaan pääse anomaalisiin heikkoihin arvoihin. Siitä puuttuu mittaushäiriö, jota Ferrie ja Combes simuloivat *bitinvaihtokanavalla*:

$$|\sigma_z^+\rangle\langle\sigma_z^+| \rightarrow (1-p)|\sigma_z^+\rangle\langle\sigma_z^+| + p|\sigma_z^-\rangle\langle\sigma_z^-|, \quad (1.3.10)$$

missä luku  $p$  on todennäköisyys bitin vaihtumiselle. Koska kyseisen todennäköisyyden on kvanttimekaanisen vastineensa vuoksi oltava todella pieni, määrittelevät Ferrie ja Combes sille yhtälön:

$$p = \frac{1+s\lambda'-\delta}{1+s\lambda'}, \quad (1.3.11)$$

missä he kutsuvat muuttujaa  $\delta$  *häiriöparametriksi* ( $0 \leq \delta \leq 1 - \lambda'$ ). Nyt, yhdistetyt todennäköisyydet tapauksille, joissa bitti säilyy tai vaihtuu ja saadaan jompikumpi  $s$ , ovat:

$$\begin{cases} p(\sigma_z^+, s|\sigma_z^+) = \frac{\delta}{2} \\ p(\sigma_z^-, s|\sigma_z^+) = \frac{1}{2}(1 + s\lambda' - \delta) \end{cases}. \quad (1.3.12)$$

Ja kun  $s$ :n arvolla ei ole väliä, summataan molemmat vaihtoehdot keskenään:

$$\begin{cases} p(\sigma_z^+|\sigma_z^+) = \delta \\ p(\sigma_z^-|\sigma_z^+) = 1 - \delta \end{cases}. \quad (1.3.13)$$

Kun post-valitaan tapaus, jossa bitti vaihtuu, saadaan heikoksi arvoksi:

$$A_w = \sum_{s=\pm 1} \frac{s}{\lambda'} \frac{p(\sigma_z^-, s|\sigma_z^+)}{p(\sigma_z^-|\sigma_z^+)} = \left[ \frac{1}{2\lambda'}(1 + \lambda' - \delta) - \frac{1}{2\lambda'}(1 - \lambda' - \delta) \right] \frac{1}{1-\delta} = \frac{1}{1-\delta}, \quad (1.3.14)$$

joka  $\delta$ :n määrittelyalueen vuoksi voi saada mielivaltaisia arvoja. Anomaalinen heikko arvo on saavutettu klassisesti!

Ferrien ja Combesin mukaan heidän laskunsa vastaisivat täysin seuraavanlaista kolikonheittoprotokollaa:

- 1) Alice heittää kolikkoa, saa tuloksen  $|\sigma_{z,PRE}^{\pm}\rangle$  ja antaa kolikon Bobille.
- 2) Bob kirjaa tuloksen  $s$  todennäköisyydellä  $(1 + s\lambda'\sigma_z^{\pm})/2$ .
- 3) Bob kääntää kolikon todennäköisyydellä  $(1 + s\lambda' - \delta)/(1 + s\lambda')$  ja antaa kolikon takaisin Alicelle.
- 4) Alice kirjaa tuloksen  $|\sigma_{z,POST}^{\pm}\rangle$ .

Syyksi kohdassa 2) mahdollisesti tapahtuvalle virheelle Ferrie ja Combes esittävät liian hätäistä mittausta tai likaisia silmälaseja. Kohdan 3) klassisen häiriön he selittävät liian triviaalilla luonteella antamalla sen erityisempää esimerkkiä. Lopuksi tutkijakaksikko toteaa, että koska klassinenkin anomaalinen heikko arvo voidaan saavuttaa vain sopivilla pre- ja post-valinnoilla, ei kyseessä voi olla puhtaasti kvanttimekaaninen ilmiö.

Kvanttimekaanisten heikkojen arvojen puolestapuhujat reagoivat nopeasti Ferrien ja Combesin artikkeliin [22–24]. Lev Vaidman toteaa heikon arvon mittaisten aaltofunktiosiiirtymien olevan olemassa statistiikasta riippumatta, ja että vain niiden havaitseminen vaatii tilastotieteellistä analyysiä [22]. Mikä tahansa tarpeeksi heikko kytkentä pre- ja post-valittujen tilojen ja mitattavan suureen välillä voisi tuottaa heikon arvon, mutta Vaidmanin mukaan Ferrie ja Combes saavat klassisen heikon arvonsa pelkästään omia määritelmiään muokkaamalla, funktionaalista kytkentää muodostamatta. Lisäksi koko heikon mittauksen voi ajatella pohjautuvan kvanttimekaanisten aaltojen interferenssille (vuorovaikutuskanava, osittainen sisätulo), ja tälle ei klassista analogiaa ole olemassa.

Aharonov ja Rohrlich huomauttavat puolestaan, ettei klassista vastinetta heikon mittauskytkenän aiheuttamalle epätarkkuudellekaan ole [23]. Mittaustarkkuuden heikentyminen kvanttimekaanisen tilan säilyessä mahdollisimman muuttumattomana kuuluu oleellisena osana kvanttimekaanisen mittausteorian luonteeseen. Sitä ei pitäisi pystyä keinotekoisesti jäljittelemään, kuten Ferrie ja Combes ovat bitinvaihtokanavallaan (1.3.10) kuitenkin koettaneet tehdä. Myös ortogonaalisten pre- ja post-tilojen valintaa kuvaillaan epäjohdonmukaiseksi. Kommenttinsa lopuksi Aharonov ja Rohrlich kyseenalaistavat ”Bobin” validiteetin mittalaitteena. Vain kaava (1.3.14) vaikuttaisi heistä anomaaliselta.

Kolmannen kommentin on kirjoittanut Aharon Brodutch [24]. Heikon mittauksen yhteys vahvaan mittaukseen Ferrien ja Combesin selittämänä on hänen mielestään epäselvä, sillä nämä käyttävät omaa kytkentäparametriaan (1.3.7), alkuperäisen kytkentäparametrin ja

keskihajonnan sekoitusta. Aharonovin ja Rohrlichin tavoin myös Brodutch ottaa kantaa bitinvaihtokanavan mielekkyyteen, sillä kaavoista (1.3.9)–(1.3.11) ei pääse takaisin ehdolliseen tilaan (1.3.6), ja vaikka pääsisikin, ei täysin sallittu muunnos:

$$\varepsilon_s \varrho \rightarrow \hat{U}_s \varepsilon_s \varrho \hat{U}_s^\dagger \quad (1.3.15)$$

(missä  $\hat{U}_s \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \hat{U}_s \hat{U}_s^\dagger = \hat{U}_s^\dagger \hat{U}_s = \mathbb{1}$ ) enää tuottaisi Ferrien ja Combesin heikkoa arvoa. Lisäksi, kaavasta (1.3.9) näkee helposti, että kytkentäparametri  $\lambda'$  riippuu pelkästä pre-valinnasta (ja muuttujasta  $s$ ), vaikka sen Brodutchin mukaan tulisi riippua myös post-valinnasta.

Lopuksi, vaikka Ferrie ja Combes vakuuttavat häiriöparametrinsa  $\delta$  olevan riippumaton  $\lambda'$ :sta [25], nähdään sen määrittelyalueesta asian olevan toisin: Kun  $\lambda' \rightarrow 1$ , niin  $\delta \rightarrow 0$ . Tämä heikentää klassisen heikon arvon uskottavuutta entisestään, joten vaikka sitä tietyissä olosuhteissa pystyttäisiinkin statistisesti mallintamaan, lienee perusteltua väittää kvanttimekaniikan soveltuvan paremmin sen selittämiseen.

### 1.3.3 Hiukkasen paikka

Jeff Lundeen *et al.* kehittivät vuonna 2011 menetelmän, jolla mitata suoraan yksi yksittäisen fotonin neljästä kokonaisaaltofunktion muodostavasta komponentista [17]. Nämä ovat polarisaatio, liikkeen suuntainen paikkajakauma ja liikettä vasten kohtisuorat kaksi paikkajakaumaa. Lundeenin *et al.* mittausta koski toista poikittaisjakaumaa. Siinä  $z$ -suuntaan liikkuvan fotonin  $x$ -suuntainen aaltofunktio (tai *spatialimoodi*) saadaan määritettyä suoraan mittaamalla ensin fotonin paikka  $\hat{Q}$  heikosti, sitten liikemäärä  $\hat{P}$  vahvasti. Jos kummatkin näistä kirjoitetaan projektiaina ( $\hat{Q} \equiv |x\rangle\langle x|$  ja  $\hat{P} \equiv |p_x\rangle\langle p_x|$ ), pre-valitaan tila  $|\Psi\rangle$  ja post-valitaan jonkin tietyn liikemäärän  $p'_x$  omaavat fotonit, on paikan heikko arvo:

$$Q_w \equiv \frac{\langle p'_x | x \rangle \langle x | \Psi \rangle}{\langle p'_x | \Psi \rangle} = \frac{\langle p'_x | x \rangle}{\Phi(p'_x)} \Psi(x). \quad (1.3.16)$$

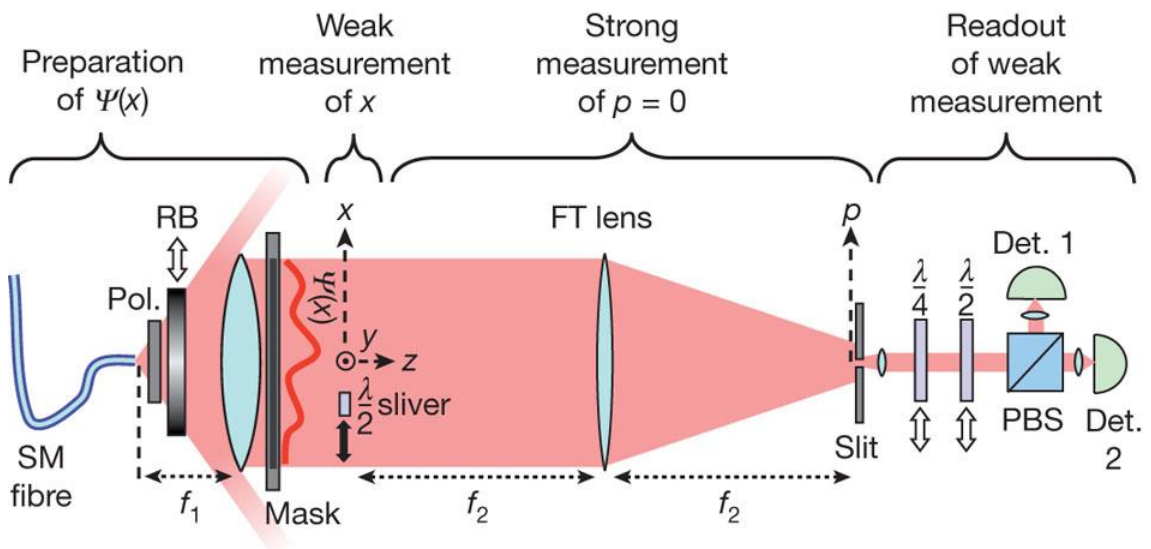
Tässä  $\Psi(x)$  ja sen Fourier-muunnos  $\Phi(p'_x)$  ovat paikan ja liikemäärän aaltofunktiot, vastaavasti.  $\langle p'_x | x \rangle$  on vakio, josta voi yksinkertaisuuden vuoksi hankkiutua eroon valitsemalla  $p'_x = 0$ . Myös tekijästä  $1/\Phi(0)$  voi lopuksi päästä eroon normalisoimalla  $\Psi(x)$ . Mikään ei estä aaltofunktiota saamasta kompleksisia arvoja. Tälle on kuitenkin varsin yksinkertainen fysikaalinen selitys: Mittari siirtyy arvon  $\Re \Psi(x)$  verran saatuaan liikemäärän  $\Im m \Psi(x)$ .

Aputilana kokeessa käytetään valon polarisaatiota. Fotonin paikan heikko mittausta onnistuu tällöin lineaarisen polarisaattorin ja puolialtolevyn palasen kanssa, kun taas liikemäärän

vahvassa mittauksessa kannattaa hyödyntää sekä puoli- että neljännesaaltolevyä. Tällöin päästään käsiksi sekä heikon arvon reaali- että imaginaariosaan.

Käytännössä koe etenee seuraavasti. Tutkittavat fotonit tuotetaan joko laserlähteessä tai parametrisella alaskonversiolla. Jotta kaikki näistä olisivat varmasti samassa tilassa  $|\Psi\rangle$ , ajetaan ne yksimoodikuidun läpi varsinaiseen koelaitteistoon. Kuidun jälkeen fotonit kohtaavat lineaarisen polarisaattorin, jota on kierretty vain vähän ( $\alpha = 20^\circ$ ). Täten paikan ja polarisaation välille saavutetaan tarpeeksi heikko kytkentä. Polarisaattorin läpäistyään fotonit kollimoidaan akromaattisen linssin avulla, ja sen edessä olevalla apertuurilla voidaan gaussiseksi oletettua moodia tyypistää entisestään. Puoliaaltolevyn palaseen apertuurin jälkeen osuvat fotonit kokevat suuren  $z$ -translaation ja vaihesiirtymän. Tämä vastaa fotonin paikan heikkoa mittausta, ja se suoritetaan koko säteen leveydeltä liikuttamalla puoliaaltolevyn palasta 1 millimetrin askelin.

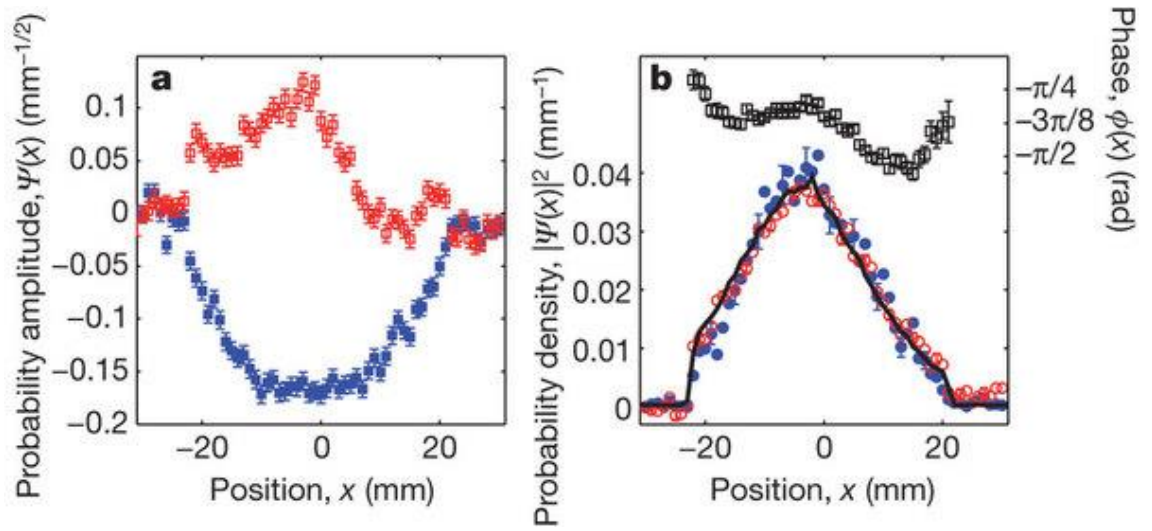
Heikon mittauksen jälkeen seuraa post-valinta ja vahva mittaus. Liikemäärän  $p'_x = 0$  valitseminen onnistuu Fourier-muunnoslinssin ja hyvin pienen raon (halkaisija =  $15 \mu\text{m}$ ) avulla. Lopuksi fotonit kulkevat joko puoli- tai neljännesaaltolevyn läpi ja heijastuvat polarisoivasta säteenjakajasta jompaankumpaan kahdesta fotodetektorista. Detektorien 1 ja 2 havaintojen suhde puoliaaltolevyn jälkeen vastaa  $\Psi(x)$ :n reaali-osaa, ja neljännesaaltolevyn jälkeen saadaan imaginaariosa.



**Kuva 3.** Lundeenin *et al.* koejärjestely fotonien  $x$ -suuntaisen aaltofunktion  $\Psi(x)$  suoraksi mittaamiseksi [17].

Kuvassa näkyvää mutta edellä esittelemätöntä komponenttia "RB" käytettiin erilaisten aaltofunktioiden preparointiin ja sitä kautta koko mittauksen validointiin.





**Kuva 4.** Lundeenin *et al.* kokeen lopputulokset [17]. Todennäköisyysamplitudit on esitetty vasemmalla, koko todennäköisyysjakauma  $|\Re\Psi(x) + i\Im\Psi(x)|^2$  oikealla. Sininen väri indikoi aaltofunktion reaaliosaa, punainen imaginaariosaa. Oikealla oleva musta käyrä on saatu suorittamalla skannaus puolialtolevyn palasen (" $\lambda/2$  sliver") sijaan fotodetektorilla. Siispä vahva ja heikko mittaus näyttäisivät tuottavan hyvin samanlaiset tulokset. Mustat neliöt oikealla kuvaavat puolialtolevyn palasen synnyttämiä vaihe-eroja fotonien kesken.

## 2 Polarisaation heikko mittaus, teoreettinen tarkastelu

Edellä mainittiin fotonin kokonaisaltofunktion koostuvan neljästä komponentista, joista yksi on sen polarisaatio. Lundeen *et al.* kytkivät fotonin paikan mittauksen polarisaatioon [17], mutta itse polarisaation mittausta ei sen tarkemmin avattu. Olisiko siis mahdollista toimia päinvastoin ja mitata polarisaatio heikosti, spatiaaliseen vapausasteeseen kytkettynä? Itse asiassa, kysymystä pohdittiin ensimmäisen kerran jo artikkelissa [20], jossa Aharonovin *et al.* spinmittaukselle [8] pohjustettiin optinen analogia (spin  $\rightarrow$  polarisaatio). Kyseisessä kokeessa onnistuttiin käytännössäkin vain paria vuotta myöhemmin [14], mutta polarisaatiotila jätettiin rekonstruoitumatta.

Vuonna 2013 valon polarisaatio saatiin karakterisoitua lähes täydellisesti [26], muttei aivan ideaalisesti. Kokeessa mitattiin polarisaatio ensin heikosti H/V-kannassa, sitten vahvasti D/A-kannassa. Näitä vastaavat Paulin spin-matriisit eivät kuitenkaan kommutoi, mikä johtaa yhtälön (1.1.15) määräämään mittauseräkkyyteen. Vuotta myöhemmin japanilaiskolmikko Kobayashi, Nonaka ja Shikano keksivät olettaa toisin, joskaan ei välttämättä ristiriitaisesti, kuin artikkeleissa [17, 26]. He tulkitsivat polarisaation heikon arvon reaali- ja imaginaariosan oikeiksi siirtymiksi x- ja y-suunnassa, ja kommutoiiviin paikkaoperaattoreihin perustuen he kehittivätkin koejärjestelyn, jolla mitata valon polarisaatiotila varsin helposti ja luotettavasti [27].

### 2.1 Polarisaatio ja stereograafinen projektio

Tämä luku on omistettu Kobayashin *et al.* mittausproseduurin [27] huolelliseen teoreettiseen taustoittamiseen. Ensiksi lienee syytä selvittää, mitä polarisaatiolla oikeastaan tarkoitetaan, ja miten se voidaan mitata vahvasti. Samassa yhteydessä motivoidaan sen heikko mittaus ja tarkastellaan, miten polarisaation heikko arvo olisi visualisoitavissa.

Polarisaatio tarkoittaa sähkömagneettisen aallon<sup>5</sup> amplitudin oskillaatiosuuntaa. Mikäli tämä oskillaatio tapahtuu aallon etenemissuunnan paikallaan pysyvässä tangenttitasossa, puhutaan *lineaarisesta polarisaatiosta*. Mikäli taas kyseinen taso kiertyy aaltorintaman edetessä, kutsutaan polarisaatiota *elliptiseksi polarisaatioksi*. Aaltoamplitudin suuruus saattaa siis riippua kiertokulmasta. Jos riippuvuutta ei kuitenkaan ole, eli amplitudi säilyy vakiona, on kyseessä elliptisen polarisaation erityistapaus, *ympyräpolarisaatio*.

Lineaarista polarisaatiota vastaa niin sanottu H/V-kanta (*horisontaalinen/vertikaalinen polarisaatio*), elliptistä polarisaatiota D/A-kanta (*diagonaalinen/antidiagonaalinen polarisaatio*)

---

<sup>5</sup> Valon klassinen tulkinta.

ja ympyräpolarisaatiota R/L-kanta (*oikea-/vasenkätinen ympyräpolarisaatio*). Matemaattisesti näitä mallinnetaan Paulin spin-vektoreilla, jotka kirjoitetaan yleensä H/V-kannassa:

$$\begin{cases} |H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ |D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ |A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Toki vektorit (2.1.1) voitaisiin valita toisinkin. Esimerkiksi Kobayashi *et al.* ovat määritelleet [27]:

$$|R\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

korostaen sitä, kuinka polarisaatio on myös yksittäisen fotonin<sup>6</sup> ominaisuus. Fotonin voi nimittäin ajatella olevan joko oikea- tai vasenkätisesti polarisoitunut. Ensimmäisessä tapauksessa fotonin sisäinen kiertoimpulssi eli *spin-kiertoimpulssi* (tai pelkkä spin) saa arvon  $-\hbar$ , toisessa  $+\hbar$  [28]. Tällaisen muunnoksen tekeminen johtaa luonnollisesti muihinkin muunnoksiin, joihin palataan kuitenkin myöhemmin.

Mikäli fotoneita on tarpeeksi, ja niistä voidaan yhdessä puhua ”valonsäteenä”, voi tämä säde olla myös *radiaalisesti* tai *azimutaalisesti* polarisoitunutta. Valo on radiaalisesti polarisoitunutta, jos missä tahansa säteen pisteessä polarisaatiovektori osoittaa kohti säteen keskipistettä. Valo on azimutaalisesti polarisoitunutta, jos sen jokainen polarisaatiovektori on poikkileikkaukseltaan ympyrämäisen (tai yleisemmin, elliptisen) valonsäteen tangentti.

Polarisaatio on erinomainen esimerkki kaksiulotteisesta tilasta. Kuten vektoreiden (2.1.1) perusteella voi päätellä, tarkoittaa kaksiulotteisuus sitä, että polarisaation voi määrittellä täysin kahdella kompleksiluvulla. Kaksiulotteisten kvanttimekaanisten tilojen käsittelyyn varsin hyödyllinen työkalu on niin sanottu *Blochin* tai *Poincarén pallo*. Ensimmäinen on yleisluontoisempi nimitys, jälkimmäinen spesifimpi optiikassa. Näytetään seuraavaksi, mistä tällainen pallo seuraa.

Minkä tahansa tilavektorin  $|\psi\rangle$  on toteutettava seuraavat ehdot, kun se kerrotaan bravastineellaan [3, s. 50]:

---

<sup>6</sup> Valon kvanttimekaaninen tulkinta.

- 1)  $|\psi\rangle\langle\psi| \equiv \rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) | \text{tr}[|T|] < \infty\}$ ,  
missä  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \exists t \geq 0: ||T\varphi| \leq t|\varphi| \forall \varphi \in \mathcal{H}$ .
- 2)  $|\psi\rangle\langle\psi| \equiv \rho \geq 0 \Leftrightarrow \langle\varphi|\rho\varphi\rangle \geq 0 \forall \varphi \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \rho$ :n kaikki ominaisarvot ovat positiivisia.
- 3)  $\text{tr}[|\psi\rangle\langle\psi|] = 1$ .

Ensimmäinen ehto määrää, että tiheysmatriisin  $\rho$  on sisällyttävä jälkiluokkaoperaattoreihin; Matriisin itseisarvon diagonaalialkioiden summan on oltava äärellinen. Toisen ehdon mukaan tilan on oltava positiivinen, eli sen vaikutus missä tahansa Hilbertin avaruuden vektorin sisätulossa itsensä kanssa ei ainakaan ole negatiivinen. Kolmas ja viimeinen ehto liittyy ensimmäiseen. Tiheysmatriisin jäljen on oltava 1. Jokainen näistä ehdoista on perusteltavissa kaavan (1.1.4) käyttökelpoisuudella.

Mielivaltaisesta kaksiulotteisesta vektorista  $|\psi\rangle = (a, b)$  saadaan muodostettua tiheysmatriisi:

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix}, \quad (2.1.3)$$

jolle ehdon (3) perusteella pätee  $|b|^2 = 1 - |a|^2$ . Yleisyyttä loukkaamatta voidaan luvut  $a$  ja  $b$  määrittellä siten, että:

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1 - r_z \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}), \quad (2.1.4)$$

missä  $\vec{r}$  on Blochin vektori ja  $\vec{\sigma}$  Paulin spin-matriisien kokoelma  $\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$ .

Toteutetaan sitten ehto (2) laskemalla esitysmuodon (2.1.4) ominaisarvot ja vaatimalla niiden olevan positiivisia:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} r_z - \lambda & \frac{1}{2} r_x - \frac{1}{2} ir_y \\ \frac{1}{2} r_x + \frac{1}{2} ir_y & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r_z - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} (1 - |\vec{r}|^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} (1 \pm |\vec{r}|^2) \geq 0 \Leftrightarrow |\vec{r}| \leq 1 \quad (2.1.5)$$

Normiltaan korkeintaan 1 oleva Blochin vektori piirtää siis kolmiulotteiseen avaruuteen yksikköpallon, jonka kaikki pisteet  $(r_x, r_y, r_z)$  määrittelevät yksikäsitteisesti jonkin tilan. Erityisesti, jos  $|\vec{r}| = 1$ , on kyseessä *puhdas tila*. Tämä seuraa puhtaan tilan määritelmästä [3, s. 53]:

$$\text{tr}[\rho^2] = 1. \quad (2.1.6)$$

Blochin (tai Poincarén) pallon sisällä olevat pisteet kuvaavat *sekoitettuja tiloja*, joiden tarkempi käsittely tässä tutkielmassa jätetään kuitenkin neljänteen lukuun. Siihen asti kaikkien polarisaatiotilojen oletetaan sijaitsevan Blochin pallon pinnalla.

Blochin pallon pohjois- ja etelänavasta käytetään notaatioita  $|0\rangle$  ja  $|1\rangle$ , jotka vastaavat kulloinkin käytössä olevia kantavektoreita. Esimerkiksi Kobayashin *et al.* työssä  $|0\rangle \equiv |L\rangle$  ja  $|1\rangle \equiv |R\rangle$  [27]. Mikä tahansa (puhdas) tila voidaan esittää pohjois- ja etelänavan lineaarikombinaationa:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \quad (2.1.7)$$

missä  $\theta \in [0, \pi]$  on kallistuskulma ja  $\phi \in [0, 2\pi)$  kiertokulma Blochin pallolla. Tämä esitysmuoto on yhteensopiva kaavan (2.1.4) kanssa, sillä siihen voi päästä takaisin laskemalla yksinkertaisesti tulo  $(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle)(\cos\frac{\theta}{2}\langle 0| + e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\langle 1|)$  ja huomioimalla tavanomaiset pallokoordinaattimuunnokset.

Toistaiseksi käytännöllisin tapa määrittää polarisaation tiheysmatriisi kokeellisesti on ollut mitata *Stokesin parametrit* [29]. Ne ovat:

$$\begin{cases} S_0 = P_{|0\rangle} + P_{|1\rangle} \\ S_1 = P_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)} - P_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)} \\ S_2 = P_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+i|1\rangle)} - P_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-i|1\rangle)} \\ S_3 = P_{|0\rangle} - P_{|1\rangle} \end{cases}, \quad (2.1.8)$$

missä luvut  $P_{|\psi\rangle}$  ovat todennäköisyyksiä saada polarisaation mittaustulokseksi tila  $|\psi\rangle$ . Määritelmän mukaan  $S_0 = 1$ . Koska todennäköisyydet ovat suoraan verrannollisia fotoneitten lukumäärään, ja fotoneitten lukumäärä on taas suoraan verrannollinen valon intensiteettiin, voidaan  $S_1$ ,  $S_2$  ja  $S_3$  kirjoittaa vaihtoehtoisesti:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{I_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)} - I_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)}}{I_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)} + I_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)}} \\ S_2 = \frac{I_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+i|1\rangle)} - I_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-i|1\rangle)}}{I_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+i|1\rangle)} + I_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-i|1\rangle)}} \\ S_3 = \frac{I_{|0\rangle} - I_{|1\rangle}}{I_{|0\rangle} + I_{|1\rangle}} \end{cases}. \quad (2.1.9)$$

Kaavassa (2.1.9) esiintyvät intensiteetit on helppo mitata erilaisia optisia komponentteja valonlähteen eteen sopivasti kombinoimalla ja näin ”pakottamalla” valo tiettyyn polarisaatioon. Matemaattisesti näiden komponenttien (lineaarinen polarisaattori, puolialtolevy ja neljännesaaltolevy) toimintaa voidaan mallintaa *Jonesin matriiseilla* [30], joista tämän tutkielman kannalta oleelliset on lueteltu seuraavassa taulukossa.

**Taulukko 1.** Erilaiset optiset komponentit, niiden Jonesin matriisit H/V-kannassa ja toiminta.

Komponentti	Jonesin matriisi	Toiminta
Lineaarinen polarisaattori 0 asteen kulmassa	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$ \psi\rangle \rightarrow  H\rangle$
Lineaarinen polarisaattori 90 asteen kulmassa	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$ \psi\rangle \rightarrow  V\rangle$
Puoliaaltolevy 22,5 asteen kulmassa	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{cases}  H\rangle \rightarrow  D\rangle \\  V\rangle \rightarrow  A\rangle \end{cases}$
Neljännesaaltolevy 45 asteen kulmassa	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{cases}  H\rangle \rightarrow  L\rangle \\  V\rangle \rightarrow  R\rangle \end{cases}$

Jos Stokesin parametrit tulkitaan vastaaviksi Blochin vektorin komponenteiksi ( $S_1 = r_x, \dots$ ), ja käytetään merkintää  $\sigma_0 \equiv \mathbb{1}$ , voidaan mittaustulosten perusteella konstruoida polarisaatiotilan tiheysmatriisi kaavaa:

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 S_i \sigma_i \quad (2.1.10)$$

käyttäen. Selvästi tämä on ekvivalentti kaavan (2.1.4) kanssa.

Stokesin parametrien avulla voidaan laskea myös niin sanottu *polarisaatioaste*, eli kuinka polarisoitunutta valo on. Tietenkin sähkömagneettisen aallon amplitudin oskillaatio on aina jotenkin orientoitunut, mutta sillä ”kuinka polarisoitunutta valo on”, tarkoitetaan tämän orientaation säilymistä ajassa ja paikassa. Termisen valon tapauksessa se voi esimerkiksi vaihdella nopeammin, kuin kyseiset muutokset kyetään havaitsemaan, jolloin valon sanotaan olevan heikosti polarisoitunutta tai jopa polarisoitumatonta [31, s. 33-2]. Polarisaatioaste  $\mathcal{V}$  on:

$$\mathcal{V} = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \|\vec{r}_{\text{Bloch}}\|^2. \quad (2.1.11)$$

Blochin pallon pinnalla valo on siis täysin polarisoitunutta, origossa täysin polarisoitumatonta. Täten origossa eli maksimaalisesti sekoitetussa tilassa valon polarisaatiota ei voi luotettavasti mitata, ainakaan vahvan mittauksen keinoin.

Koska Stokesin parametrien vahvassa mittauksessa vaadittavien komponenttien virittäminen vie usein aikaa, ja ne romahduttavat tutkittavan aaltofunktion eivätkä välttämättä ole tarkimpia mahdollisia, nousee heikko mittaus jälleen varteenotettavaksi vaihtoehdoksi. Polarisaationkin heikko arvo voi luonnollisesti olla kompleksinen, minkä havainnollistamiseksi Blochin pallolta olisi jotenkin päästävä kompleksitasolle. Tämä onnistuu *stereograafisen projektion* avulla [27].

Kuvitellaan Blochin pallon etelänavan  $|1\rangle$  toimivan origona kompleksitasolle  $\mathbb{C}$ . Kukin pohjoisnavasta eroava polarisaatiotila  $|\psi\rangle \neq |0\rangle$  voidaan nyt projisoida yksikäsitteiseksi kompleksiluvuksi piirtämällä suora viiva pohjoisnavalta kompleksitasolle polarisaatiotilan  $|\psi\rangle$  kautta. Itse pohjoisnapa venyisi kaikissa suunnissa äärettömän kauas.

Näytetään seuraavaksi, mille kompleksitason pisteelle päädytään, kun tunnetaan kaksi pistettä, pohjoisnapa  $(0, 0, 2)$  ja tilaa  $|\psi\rangle$  vastaava piste  $(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta + 1)$ . Näiden kautta kulkeva suora voidaan kirjoittaa parametrimuodossa:

$$\begin{cases} x = t \sin \theta \cos \phi \\ y = t \sin \theta \sin \phi \\ z = 2 + t(\cos \theta - 1) \end{cases} \quad (2.1.12)$$

Kompleksitasolla  $z = 0$ , mikä johtaa parametrin  $t$  arvoon  $2/(1 - \cos \theta)$ . Kun tämä sijoitetaan yhtälöön (2.1.12), saadaan:

$$\begin{cases} x = \frac{2 \sin \theta}{1 - \cos \theta} \cos \phi = 2 \cot \frac{\theta}{2} \cos \phi \\ y = \frac{2 \sin \theta}{1 - \cos \theta} \sin \phi = 2 \cot \frac{\theta}{2} \sin \phi \end{cases} \quad (2.1.13)$$

Kompleksiluku  $x + iy$  on siis  $2(\cos \phi + i \sin \phi) \cot \frac{\theta}{2} = 2e^{i\phi} \cot \frac{\theta}{2}$ . Tämä ei kuitenkaan välttämättä ole yhtä suuri kuin polarisaation heikko arvo! Siksi, polarisaation heikkoon arvoon  $\sigma_{x_w}$  ero tehden, otetaan käyttöön merkintä:

$$G\psi \equiv 2e^{i\phi} \cot \frac{\theta}{2}. \quad (2.1.14)$$

Polarisaatiota vastaavana operaattorina tässä tutkielmassa käytetään siis Paulin ensimmäistä spin-matriisia  $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , Kobayashin *et al.* valintaa kunnioittaen [27].

## 2.2 LG-moodit ja q-levykonfiguraatio

Kun polarisaatiotila on tuntematon, mutta heikko arvo tiedetään, voidaan toimia päinvastoin kuin äskeisessä alaluvussa – liikutaan stereograafisen projektion avulla kompleksitasolta Blochin pallolle. Näin heikko arvo on yhtenäistettävissä polarisaation kanssa, mutta herääkin kysymys: Miten mitata heikko arvo? Tapoja voisi tietenkin olla useita, mutta Kobayashi *et al.* ovat päättäneet soveltaa niin sanotun *LG-moodin* (Laguerren-Gaussin moodi) ominaisuuksia [27].

LG-moodit  $LG_p^l$  ovat aaltoyhtälön:

$$(\nabla^2 + k^2)E(x, y, z) \equiv (\nabla^2 + k^2)u(x, y, z)e^{-ikz} = 0 \quad (2.2.1)$$

ratkaisuja sylinterikoordinaatistossa, kun on tehty *paraksiaaliapproksimaatio* [32, s. 628]:

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2k \frac{\partial u}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|. \quad (2.2.2)$$

Approksimaation fysikaalinen selitys on, että sähkömagneettisen aallon voimakkuus muuttuu etenemissuunnassa ( $z$ ) paljon hitaammin kuin poikittais suunnissa ( $x$  ja  $y$ ). Kun suhteellisen kentänvoimakkuuden  $u$  toinen derivaatta muuttujan  $z$  suhteen jätetään tämän olettamuksen perusteella pois, saadaan alkuperäisestä aaltoyhtälöstä *paraksiaaliyhtälö*:

$$\nabla_{\perp}^2 u(r, \theta, z) = 2ik \frac{\partial u(r, \theta, z)}{\partial z}. \quad (2.2.3)$$

Tämän ratkaisut eli LG-moodit ovat muotoa [32, s. 647]:

$$u_{pl} = \sqrt{\frac{2p!}{(1 + \delta_{0,l})\pi(l+p)!}} \frac{\exp[i(2p+l+1)(\psi(z) - \psi_0)]}{w(z)} \\ \times \left( \frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right)^l L_p^l \left( \frac{2r^2}{w(z)^2} \right) \exp \left[ -ik \frac{r^2}{2\tilde{q}(z)} + il\theta \right], \quad (2.2.4)$$

missä:

- $p$  ja  $l$  ovat ratkaisun indeksoivia luonnollisia lukuja,
- $\delta_{0,l}$  on Kroneckerin delta,
- $\psi(z)$  ja  $\psi_0 = \psi(z_0)$  ovat *Gouyn vaiheensiirtotermejä*,
- $w(z)$  on *gaussisen säteen koko*,
- $L_p^l$  ovat Laguerren yleistettyjä polynomeja ja
- $\tilde{q}(z)$  on *kurvatuurin kompleksinen säde*, jolle pätee [32, s. 644, muokattu]:

$$\frac{1}{\tilde{q}(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{2}{k w(z)^2}. \quad (2.2.5)$$

Tässä  $R(z)$  on aaltorintamien kurvatuurin (reaalinen) säde pisteessä  $z$ .

Gouyn vaiheensiirtotermi seuraa paraksiaaliyhtälön poikittaisesta Laplace-operaattorista  $\nabla_{\perp}^2$ , ja se aiheuttaa sähkömagneettiselle aallolle vaihesiirtymän lasersäteen vyötärön seudulla. Aaltorintamien etäisyydet toisistaan ovat tällöin hieman suurempia, kuin mitä ne ideaalisessa aallossa olisivat [32, s. 683]. Kyseisen vaihesiirtymän  $\psi(z)$  voi näyttää noudattavan yhtälöä [32, s. 645, muokattu]:

$$\psi(z) \equiv \arctan \frac{\pi w^2(z)}{R(z)\lambda}. \quad (2.2.6)$$

Tasoaaltojen tapauksessa  $R(z)$  olisi ääretön ja  $\psi(z) = 0$ . *Tasoaaltoapproksimaatiota* ei tässä yhteydessä tarvitse kuitenkaan tehdä.



Gaussisen säteen koko  $w(z)$  on yksinkertaisesti gaussisen lasersäteen poikkileikkauksen säde. Jos yhtälön (2.2.5) muut tekijät tunnetaan, saadaan  $w(z)$  luonnollisesti siitä. Jos nämä ovat taas tuntemattomia, mutta tunnetaan  $w_0$  eli gaussisen säteen koko lasersäteen vyötäröllä, saadaan kaikkiaan  $w(z)$ ,  $R(z)$  ja  $\psi(z)$  seuraavasta yhtälöryhmästä [32, s. 665]:

$$\begin{cases} w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \\ R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \\ \psi(z) = \arctan \frac{z}{z_R} \end{cases} \quad (2.2.7)$$

Parametria  $z_R$  kutsutaan *Rayleigh'n pituudeksi*, ja sekin saadaan  $w_0$ :n avulla [32, s. 668]:

$$z_R \equiv \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (2.2.8)$$

Tässä yhteydessä  $\lambda$  on valon aallonpituus.

Yhtälö (2.2.4) kuvaa tavanomaista Gaussin jakaumaa, kun molemmat indeksit valitaan nolliksi. Käyttämällä yhtälöä (2.2.5) saadaan  $LG_0^0$ :aa vastaavaksi suhteelliseksi kentänvoimakkuudeksi:

$$u_{00} = \frac{1}{\sqrt{\pi}w(z)} \exp \left[ -i \left( \frac{kr^2}{2R(z)} - (\psi(z) - \psi_0) \right) \right] e^{-r^2/w(z)^2}. \quad (2.2.9)$$

Kun taas valitaan  $p = 0$  ja  $l = 1$ , saadaan lyhyehkön pyörittelyn jälkeen:

$$\begin{aligned} u_{01} &= \frac{2r}{\sqrt{\pi}w(z)^2} \exp \left[ -i \left( \frac{kr^2}{2R(z)} - 2(\psi(z) - \psi_0) - \theta \right) \right] e^{-r^2/w(z)^2} \\ &= \frac{2}{w(z)} r e^{i[(\psi(z) - \psi_0) + \theta]} u_{00} = \frac{2e^{i(\psi(z) - \psi_0)}}{w(z)} (x + iy) u_{00}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$LG_0^1$  ei ole enää separoituvaa muotoa, ja helposti näkee, että muunnoksen  $l = 0 \rightarrow l = 1$  seurauksesta sähkömagneettinen kenttä vaimenee täysin origossa  $((x, y) = (0, 0))$ . Origoa kutsutaankin tässä yhteydessä *nollaintensiteettipisteeksi* (engl. "zero intensity point" eli "ZIP") tai *optiseksi vorteksiksi*.

On osoitettu, että  $LG_0^1$ -moodia hieman liikuteltaessa voidaan polarisaation heikko arvo lokalisoida sen keskipisteeseen [33]. Muuttuja  $x$  yhtälöissä (2.2.9) ja (2.2.10) on tällöin korvattava uudella muuttujalla  $x - \sigma_{xw}$ .  $LG_0^1$ -moodin intensiteetissä tämä näkyy pienenä epäsymmetriana pyörähdettäessä optisen vorteksin ympäri:

$$I \propto |u_{01}|^2 = \frac{8r^2}{\pi w(z)^6} \times \left[ \left( x - \Re(\sigma_{xw}) \right)^2 + \left( y - \Im(\sigma_{xw}) \right)^2 \right] \times \exp \left( -\frac{2r^2}{w(z)^2} \right),$$

$$\text{missä } r^2 = |x - \sigma_{x_w}|^2 + y^2 = \left(x - \Re(\sigma_{x_w})\right)^2 + \Im(\sigma_{x_w})^2 + y^2. \quad (2.2.11)$$

Tavallista laservaloa vastaava moodi  $LG_0^0$  on siis jotenkin muunnettava moodiksi  $LG_0^1$  ilman, että sen polarisaatio muuttuu. Muutenhan tieto alkuperäisestä polarisaatiosta tuhoutuisi! Kobayashi *et al.* ovat onnistuneet tässä kahden neljännesaaltolevyn ja  $q$ -levyn avulla [27]. Tästä ” $q$ -levykonfiguraatiosta” käytetään jatkossa merkintää  $\left(\frac{\lambda}{4} - Q - \frac{\lambda}{4}\right)$ . Molemmat neljännesaaltolevyt on säädetty 45 asteen kulmaan. Vastakkaisesta suunnasta tarkasteltuna kulmat ovat tietenkin  $-45^\circ$ . Näitä vastaavat H/V-kannassa seuraavat Jonesin matriisit:

$$\left(\frac{\lambda}{4}(\pm 45^\circ)\right) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ \mp i & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.12)$$

$Q$ -levy, johon tutustutaan tarkemmin seuraavassa alaluvussa, vastaavat puolestaan:

$$Q^\pm := \begin{pmatrix} \cos \varphi & \pm \sin \varphi \\ \pm \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.2.13)$$

Merkin valinta riippuu niin ikään siitä, kummalta puolelta  $q$ -levy lähestytään.

Kobayashi *et al.* ovat käyttäneet artikkelissaan [27] kuitenkin R/L-kantaa, joten matriisit (2.2.12) ja (2.2.13) on muunnettava sitä vastaavaan muotoon. Muunnosmatriisit ovat:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \text{ ja } M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}. \quad (2.2.14)$$

Täten R/L-kannassa:

$$\left(\frac{\lambda}{4}(\pm 45^\circ)\right)_{R/L} := M^{-1} \left(\frac{\lambda}{4}(\pm 45^\circ)\right) M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \mp 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.15)$$

ja:

$$Q_{R/L}^\pm := M^{-1} Q^\pm M = \begin{pmatrix} 0 & e^{\pm i\varphi} \\ e^{\mp i\varphi} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.16)$$

Nyt voidaan osoittaa, että kun alkuperäinen tila  $|\psi\rangle$  jaetaan vertikaalisesti ja horisontaalisesti polarisoituihin komponentteihinsa, ja ne johdetaan  $\left(\frac{\lambda}{4} - Q - \frac{\lambda}{4}\right)$ :n läpi takaisin yhteen, säilyy kokonaispolarisaatio ennallaan, mutta  $LG_0^0$ -moodista saadaan  $LG_0^1$ -moodi.

Käytetään merkintöjä:

$$|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ja } |V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.17)$$

ja oletetaan, että neljännesaaltolevyt ovat  $+45$  asteen kulmassa tilaan  $|H\rangle$  nähden, ja että  $|H\rangle$  liikkuu  $q$ -levyn ”negatiiviseen” suuntaan.  $\left(\frac{\lambda}{4} - Q - \frac{\lambda}{4}\right)$ :n aiheuttama muunnos horisontaaliseen polarisaatioon voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$\begin{aligned} |H\rangle &\rightarrow \left(\frac{\lambda}{4}(45^\circ)\right)_{R/L} Q_{R/L}^- \left(\frac{\lambda}{4}(45^\circ)\right)_{R/L} |H\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{i\varphi} |H\rangle. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Toiseen suuntaan liikkuvalla vertikaalisella polarisaatiolla:

$$\begin{aligned} |V\rangle &\rightarrow \left(\frac{\lambda}{4}(-45^\circ)\right)_{R/L} Q_{R/L}^+ \left(\frac{\lambda}{4}(-45^\circ)\right)_{R/L} |V\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -e^{-i\varphi} |V\rangle. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Kun huomioidaan, että:

$$\begin{cases} |L\rangle \equiv |0\rangle = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle) \\ |R\rangle \equiv |1\rangle = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - |V\rangle) \end{cases}, \quad (2.2.20)$$

on alkuperäisen tilan  $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$  kokema kokonaismuunnos:

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos\frac{\theta}{2} (e^{i\varphi}|H\rangle - e^{-i\varphi}|V\rangle) + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} (e^{i\varphi}|H\rangle + e^{-i\varphi}|V\rangle) \right]. \quad (2.2.21)$$

Muunnoksen (2.2.21) fysikaalinen merkitys saattaa olla vielä hieman epäselvä. Siispä selvennetään sitä laskemalla aaltofunktiot ennen ja jälkeen muunnosta, kun post-valitaan 50 % todennäköisyydellä joko  $|L\rangle$  tai  $|R\rangle$  (eli  $|H\rangle$ ):

$$\Phi_1 \propto \frac{N_1}{\sqrt{2}} (\langle L| + \langle R|) |\psi\rangle = \frac{N_1}{\sqrt{2}} \left( \cos\frac{\theta}{2} + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \right), \quad (2.2.22)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &\propto \frac{N_2}{\sqrt{2}} (\langle L| + \langle R|) \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos\frac{\theta}{2} (e^{i\varphi}|H\rangle - e^{-i\varphi}|V\rangle) + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} (e^{i\varphi}|H\rangle + e^{-i\varphi}|V\rangle) \right] \\ &= N_2 \langle H| \left[ \cos\frac{\theta}{2} (e^{i\varphi}|H\rangle - e^{-i\varphi}|V\rangle) + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} (e^{i\varphi}|H\rangle + e^{-i\varphi}|V\rangle) \right] \\ &= N_2 e^{i\varphi} \left( \cos\frac{\theta}{2} + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Käyttämällä merkintöjä  $\frac{N_1}{\sqrt{2}} = N_2 = N$ , missä  $N$  on normalisointitekijä, voidaan aaltofunktiot  $\Phi_1$  ja  $\Phi_2$  kirjoittaa yksinkertaisesti:

$$\begin{cases} \Phi_1 \propto N \left( \cos \frac{\theta}{2} + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ \Phi_2 \propto N e^{i\phi} \left( \cos \frac{\theta}{2} + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{cases} \quad (2.2.24)$$

Koska alkuperäinen aaltofunktio saa  $\left(\frac{\lambda}{4} - Q - \frac{\lambda}{4}\right)$ -muunnoksessa eteensä vain vaihetekijän  $e^{i\phi}$ , säilyy polarisaatio vakiona. Samalla vaihetekijällä on kuitenkin kerrottava myös  $LG_0^0$ , jolloin saadaan normalisointitekijää  $\frac{2e^{i(\psi(z)-\psi_0)}}{w(z)}$  vaille  $LG_0^1$ . Optinen vorteksi ja heikko arvo on täten saavutettu ilman polarisaation muutosta.

Jos neljännesaaltolevyn ja q-levyn kulmat ovatkin erimerkkisiä kuin mitä oletettiin, tai  $|H\rangle$  ja  $|V\rangle$  liikkuvat päinvastaisiin suuntiin, on suurin mahdollinen muutos tuloksiin (2.2.18)–(2.2.24)  $e^{i\phi}$ :n kompleksikonjugoiminen, jolla toki on fyysikaalinen, mutta ei polarisaation tai heikon arvon kannalta merkittävä vaikutus. Tästä lisää seuraavassa alaluvussa.

### 2.3 $LG_0^1$ -muunnoksen tekijät ja heikko vuorovaikutus

Idea Kobayashin *et al.* työn [27] takana alkaa pikkuhiljaa hahmottua; Polarisaation mittaamiseksi muutetaan valonsäde ensin  $LG_0^1$ -moodiksi vaikuttamatta sen polarisaatioon ja mitataan sitten optisen vorteksin sijainti. Mutta miksi tutkittava valonsäde pitää jakaa  $|H\rangle$ - ja  $|V\rangle$ -komponentteihinsa ennen  $LG_0^1$ -muunnosta? Miksei tilaa  $|\psi\rangle$  voisi ajaa  $\left(\frac{\lambda}{4} - Q - \frac{\lambda}{4}\right)$ :n läpi sellaisenaan? Onhan näytettävissä, että aaltofunktiot (2.2.24) tai niiden kompleksikonjugaatit saataisiin yhtä lailla tällöin. Vastaus piilee eräässä heikon mittauksen tärkeässä tekijässä, nimittäin heikossa vuorovaikutuksessa, jonka mitta kytkentäparametri  $\lambda$  on. Jos  $|\psi\rangle$  ajettaisiin suoraan  $\left(\frac{\lambda}{4} - Q - \frac{\lambda}{4}\right)$ :ään, ei heikkoa vuorovaikutusta saavutettaisi, eikä heikko mitta olisi mahdollinen. Tämän vuoksi on syytä tutustua tarkemmin  $LG_0^1$ -muunnoksen tekijöihin, eli q-levyn lisäksi *polarisoivaan säteenjakajaan* ja *Sagnac-interferometriin*.

Kulkiessaan *anisotrooppisen väliaineen* läpi valonsäde voi *kahtaistaittua*. Tällöin sen komponentit siis taittavat eri kulmiin, liikkuvat eri nopeuksilla tai sekä että. Väliaineen jälkeen komponenttien välille on tästä syystä voinut syntyä vaihe-ero. Sitä väliaineen akselia, jonka määrittelemässä suunnassa kahtaistaittoa ei tapahdu, kutsutaan *optiseksi akseliksi*, ja yhdessä sähkömagneettisen aallon etenemissuunnan kanssa ne virittävät *optisen päätason*. *Yleissääntöiseksi säteeksi* kutsutaan sitä valonsäteen komponenttia, jolle pätee:  $\vec{D} \perp$  optinen päätaso. *Erikoissääntöiselle säteelle*:  $\vec{D} \parallel$  optinen päätaso. Näissä ehdoissa  $\vec{D}$  on

sähkömagneettinen kenttä väliaineessa. Vastaavista akseleista käytetään nimityksiä *yleis-* ja *erikoissääntöinen akseli*.

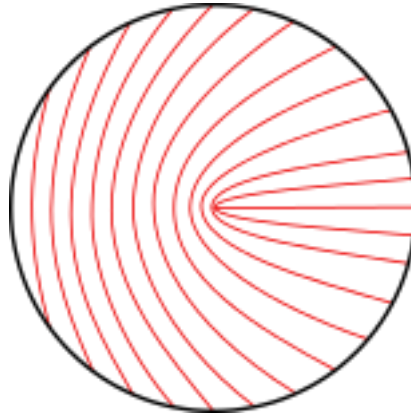
Q-levy on tietynlainen puoliaaltolevy, eli se synnyttää yleis- ja erikoissääntöisen säteen välille  $180^\circ$  vaihe-eron. Q-levy ei kuitenkaan merkittävästi taita näitä säteitä, vaan kokonaissäde pysyy hyvin alkuperäisessä muodossaan. Suurimpana erona tavanomaiseen puoliaaltolevyyn yleis- ja erikoissääntöisten akselien suunnat riippuvat q-levyllä yhtälöstä [34]:

$$\alpha(r, \varphi) = q\varphi + \alpha_0. \quad (2.3.1)$$

Kobayashi *et al.* ovat valinneet sellaisen q-levyn, jolle  $q = 1/2$  ja  $\alpha_0 = 0$  [27]. Täten:

$$\alpha(r, \varphi) = \frac{\varphi}{2}. \quad (2.3.2)$$

Tällaista q-levyä ja yhtälöä (2.3.2) on havainnollistettu kuvassa 5. Siinä yleissääntöinen (tai erikoissääntöinen) akseli osoittaa kussakin punaisen käyrän pisteessä samaan suuntaan kuin kyseisessä pisteessä käyrää sivuava tangentti.

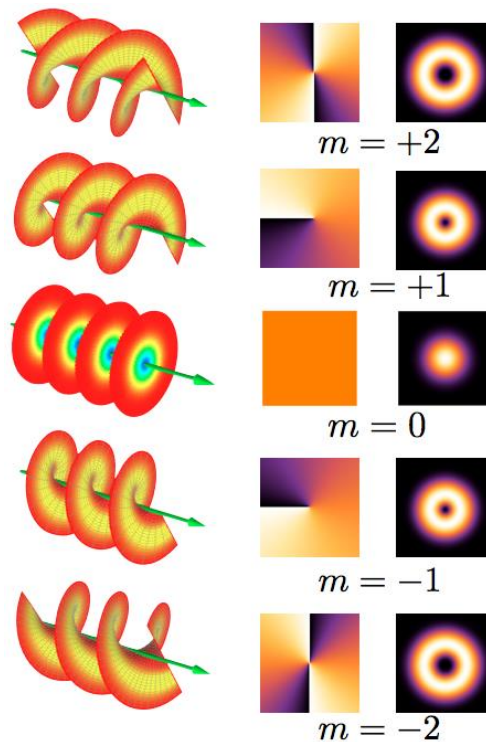


**Kuva 5.** Yleis- ja erikoissääntöisten akselien suuntariippuvuus Kobayashin *et al.* q-levyllä.

Puoliaaltolevyä vastaa yleisesti Jonesin matriisi  $\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$  [34], mistä saadaan yllä kuvatussa tapauksessa määritelmästä (2.2.13) tuttu  $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$ . Kumpikin näistä vaihtaa ympyräpolarisaation kätisyyttä, mutta vain q-levy tuottaa myös fysikaalisesti merkityksellisen muuttujan  $e^{i\varphi}$ . Tavallisella puoliaaltolevyllä saataisiin kyllä  $e^{i2\alpha}$ , mutta  $\alpha$ :n ollessa vakio voidaan se globaalina vakiovaihetekijänä jättää huomiotta. Kun  $\alpha$  sen sijaan riippuu yhtälöstä (2.3.2), on  $e^{i2\alpha}$ :n tai  $e^{i\varphi}$ :n osoitettu muuttavan fotonin spin-kiertoimpulssi (engl. "spin angular

momentum” eli ”SAM”) niin sanotuksi *ratakiertoimpulssiksi* (engl. ”orbital angular momentum” eli ”OAM”) [35], jotka yhdessä muodostaisivat valon kokonaiskiertoimpulssin.

Tämän luvun alusta muistetaan, että spin-kiertoimpulssi liittyy nimenomaan fotonin ympyräpolarisaatioon. Ratakiertoimpulssi vaikuttaa puolestaan sähkömagneettisen aaltorintaman muotoon, minkä vuoksi Gaussin moodista saadaan LG-moodi (SAM  $\rightarrow$  OAM). Yleisesti, vaihetekijässä  $e^{im\varphi}$  kokonaislukua  $m = 2q$  kutsutaan *vorteksin varaukseksi*. Sen itseisarvo kertoo, kuinka monesta helix-kierteestä aaltorintama koostuu, ja sen merkki kertoo niiden kätisyyden. Ratakiertoimpulssin suuruus kutakin fotonia kohden on  $m\hbar$  [34].



**Kuva 6.** ”OAM-säteiden” helix-rakenteet, aaltorintamat ja intensiteettijakaumat eri  $m$ :n arvoilla [36].

Käytännössä q-levyjä voi valmistaa monin eri tavoin. Yksi näistä on päällystää ohut nestekidefilmi molemmiin puolin sellaisilla lasilevyillä, joiden sisäpintojen atomit on järjestetty yleis- ja erikoissääntöisten akselien suhteen suotuisasti, esimerkiksi kuvan 5 tavoin. Materiaalit ja niiden paksuudet on valittava siten, että syntyy  $180^\circ$  vaihe-ero [34].

Valonsäteen jakaminen horisontaalisesti ja vertikaalisesti polarisoituneihin komponentteihin ja niiden ajaminen q-levyn kautta takaisin yhteen onnistuu polarisoivan säteenjakajan ja Sagnac-interferometrin avulla. Säteenjakajan kvanttimekaanisessa kuvauksessa täytyy aina huomioida sen molemmat tuloportit, vaikka vain toiseen niistä tulisi valoa. Polarisoivassa säteenjakajassa

polarisaatiotiloja tulo- ja lähtöporteissa voi kuvata vektoreilla  $(a_H, b_H, a_V, b_V)$  ja  $(c_H, d_H, c_V, d_V)$ , missä  $a$  ja  $b$  tarkoittavat tuloportteja,  $c$  ja  $d$  lähtöportteja sekä  $H$  ja  $V$  horisontaalista ja vertikaalista polarisaatiota [37, s. 10]; Yhteen porttiin liittyviä kompleksilukuja on kaksi, sillä juuri sen verran muistetaan tarvittavan polarisaation täydelliseen karakterisointiin. Itse polarisoiva säteenjakaja (engl. "polarizing beam splitter" eli "PBS") voidaan tällöin esittää matriisina:

$$PBS := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.3)$$

joka on kvanttilaskennassakin yleisesti käytetty *CNOT-portti* [38]. Kun  $a$ -porttiin tulee valoa, mutta  $b$ -porttiin ei, on PBS:n aiheuttama muunnos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_H \\ 0 \\ a_V \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_H \\ 0 \\ 0 \\ a_V \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_H = a_H \\ d_V = a_V \end{cases} \quad (2.3.4)$$

eli lineaarisen polarisaation ortogonaaliset komponentit jatkavat halutusti eri suuntiin. Polarisoivan säteenjakajan toiminta perustuu anisotrooppisten aaltolevyjen tavoin yleis- ja erikoissääntöisten akselien eri suuntiin.

Jotta alkuperäisen kokonaispolarisaation voi sanoa säilyneen muuttumattomana, pitää yhtälössä (2.3.4) erotetut polarisaatiot jotenkin taas yhdistää keskenään. Tämä onnistuu Sagnac-interferometrillä, joka tässä tapauksessa koostuu vain kolmesta peilistä. Näiden avulla lähtöportista  $c$  tullut säde saadaan lähtöporttiin  $d$  (joka toimii nyt tuloporttina) ja lähtöportista  $d$  tullut säde saadaan lähtö-/tuloporttiin  $c$ , eli:

$$\begin{pmatrix} a_H \\ 0 \\ 0 \\ a_V \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a_H \\ a_V \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.5)$$

Sagnac-interferenssin vuoksi valonsäteet kokevat lopuksi vielä toisen PBS-muunnoksen:

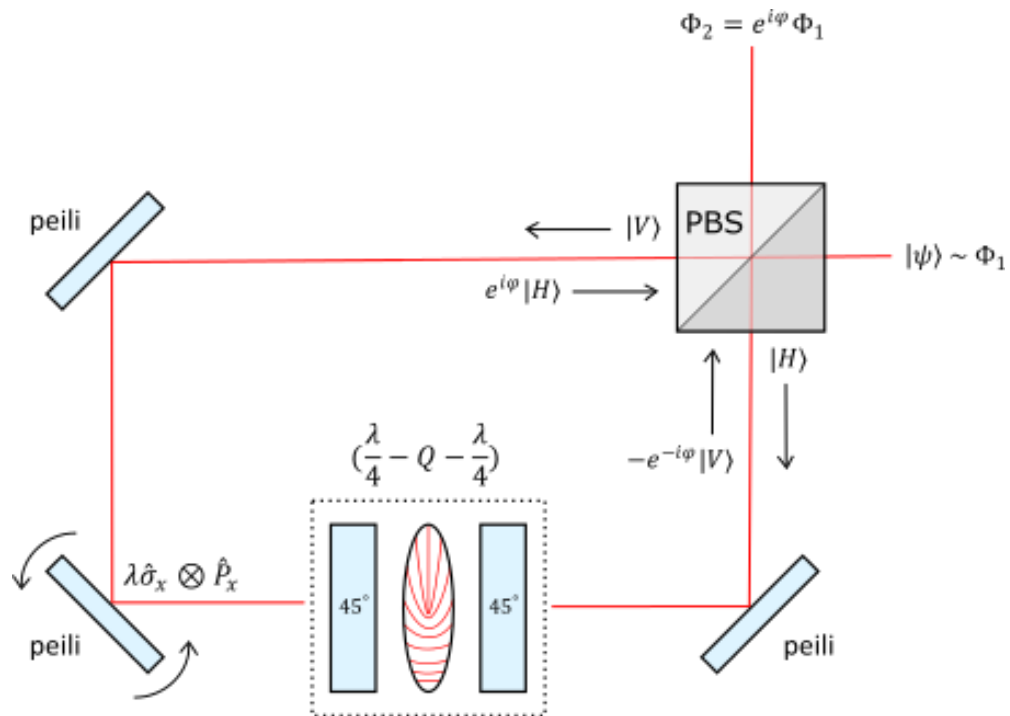
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a_H \\ a_V \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_H \\ 0 \\ a_V \end{pmatrix}. \quad (2.3.6)$$

Kokonaispolarisaatio  $(a_H, a_V)$  on siis säilynyt sellaisenaan, mutta valonsäde on siirtynyt reitiltä  $a$  reitille  $b$ ! Juurikin tällaista Sagnac-interferometriä, jonka lähtöpisteessä sijaitsee polarisoiva säteenjakaja, kutsutaan joskus *polarisoivaksi Sagnac-interferometriksi* (engl. "polarizing Sagnac interferometer" eli "PSI") [27].

Tämän alaluvun loppuun vielä muutama sananen siitä, mikä alun perin motivoi (polarisoivan) Sagnac-interferometrin käyttämisen – mitattavan tilan ja aputilan välinen heikko vuorovaikutus. Koska aputilaa kuvaavan aaltofunktion halutaan siirtyvän, pitää jotenkin muodostaa nollasta eriävä, vaikkakin hyvin pieni kytkentäparametri  $\lambda$  (ks. kaava (1.2.13)). Tässä onnistutaan kääntämällä yhtä Sagnac-interferometrin peileistä hieman muista poikkeavaan asentoon. Tällöin siihen osuvien, eri suunnista tulleiden fotonien liikemäärät kokevat erilaisen muutoksen; Polarisaatio  $\hat{\sigma}_x$  ja liikemäärä  $\hat{P}_x$  kytkeytyvät toisiinsa voimakkuudella  $\lambda$ . Sagnac-interferometrissä ulos tulevat säteet eivät kuitenkaan saisi erottua toisistaan. Niitä pitäisi yhä pystyä kuvaamaan samalla aaltofunktiolla  $\Phi_2 = e^{i\varphi} \Phi_1$ . Tästä syystä heikko ehto (1.2.11) saa Kobayashin *et al.* paperissa muodon [27, muokattu]:

$$\frac{\sigma}{\lambda} \gg \max\{1, |\sigma_{xw}|\} \Leftrightarrow \lambda |\sigma_{xw}| \ll \sigma. \quad (2.3.7)$$

Aputilan aaltofunktion siirtymän (optisen vorteksin siirtymän) pitää olla siis huomattavasti pienempi kuin pre-valitun aaltofunktion keskihajonta (gaussisen säteen leveys).



**Kuva 7.**  $LG_0^1$ -muunnoksen suorittaminen ja heikon vuorovaikutuksen saavuttaminen käytännössä, polarisoivan Sagnac-interferometrin ja q-levykonfiguraation avulla.



Se, että fotoneitten liikemäärää muutetaan vain x-suunnassa, on syynä sivun 28 muunnokselle  $x \rightarrow x - \sigma_{x_w}$  kahden erillisen muunnoksen  $x \rightarrow x - \Re(\sigma_{x_w})$  ja  $y \rightarrow y - \Im(\sigma_{x_w})$  sijaan. Heikko vuorovaikutus jättää jälkensä  $LG_0^1$ -moodiin aavistuksen epätäydellisenä pyörähdyssymmetriana.

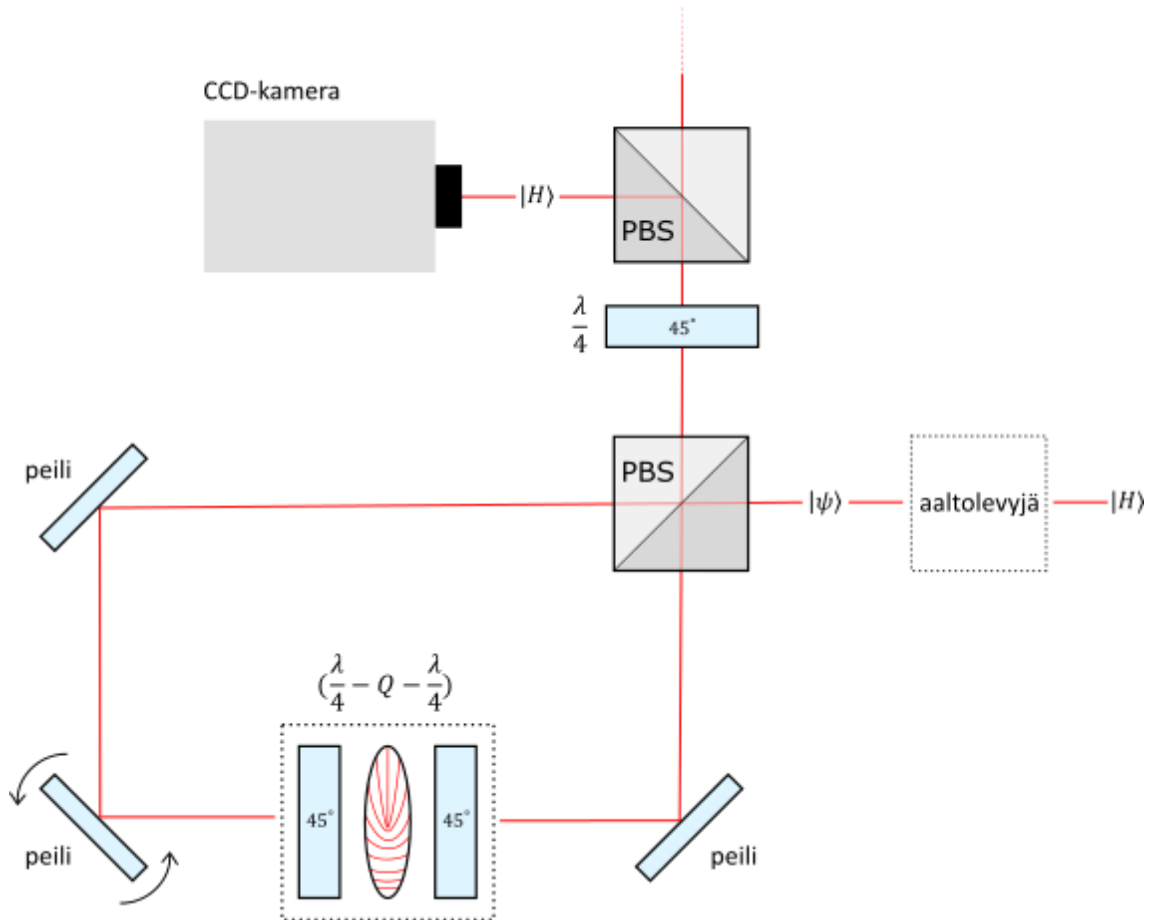
## 2.4 Koejärjestelyn esittely

Nyt kun kaikki Kobayashin *et al.* tutkimustyöhön [27] liittyvä teoria on käyty läpi, voidaan tämän luvun lopuksi esitellä viimein itse koejärjestely. Horisontaalisesti polarisoitunutta laservaloa, jonka intensiteettiä kuvaa kaksiulotteinen Gaussin jakauma, ajetaan ensin erilaisten aaltolevyjen läpi. Näin tila  $|H\rangle$  preparoidaan tuntemattomaksi tilaksi  $|\psi\rangle$ ; On suoritettu pre-valinta. Tämän jälkeen laservalo jatkaa matkaansa polarisoivaan säteenjakajaan ja Sagnac-interferometriin. Interferometrissä poistuessaan valon kokonaispolarisaatio säilyy muuttumattomana, mutta Gaussin jakaumasta on tullut Laguerren-Gaussin jakauma, mikä ilmenee nollaintensiteettipisteenä eli optisena vorteksina valonsäteen keskellä. Lisäksi mitattava tila ja aputila on kytketty heikosti toisiinsa, mikä mahdollistaa heikon mittauksen.

Seuraavaksi vuorossa on R/L-kannan post-valinta. Tämä suoritetaan 45 asteessa olevan neljännesaaltolevyn ja toisen polarisoivan säteenjakajan kanssa. Mikäli tuntematon tila  $|\psi\rangle$  kuvaa oikeakätistä (vasenkätistä) ympyräpolarisaatiota, muuttaa neljännesaaltolevy sen ensin horisontaaliseksi (vertikaaliseksi) polarisaatioksi, joka voidaan sitten erottaa täydellisesti PBS:llä. Muissa tapauksissa saadaan R/L-kannan projektiot. Polarisaation  $\hat{\sigma}_x$  heikoksi arvoksi pre- ja post-valinnoilla  $|\psi\rangle$  ja  $|R\rangle$  voidaan laskea kaavaan (1.2.14) sijoittaen:

$$\begin{aligned} \sigma_{x_w} &\equiv \frac{\langle R | \hat{\sigma}_x | \psi \rangle}{\langle R | \psi \rangle} = \frac{\langle 1 | (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) (\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle) \rangle}{\langle 1 | (\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle) \rangle} \\ &= \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}} = e^{-i\phi} \cot \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Koska kulmat  $\theta$  ja  $\phi$  voidaan lausua x:n ja y:n avulla, saadaan heikko arvo mitattua loppujen lopuksi varsin yksinkertaisesti: Sijoitetaan toisen säteenjakajan perään CCD-kamera, joka tallentaa LG-moodin intensiteettijakauman ja optisen vorteksin sijainnin. Origoksi määritellään optisen vorteksin sijainti silloin, kun  $|\psi\rangle = |R\rangle$ . Kobayashi *et al.* ovat käyttäneet pikselikooltaan 6,45 mikrometrillä CCD-kameraa (tässä tutkielmassa n. 6,5  $\mu\text{m}$ ) ja määritelleet optisen vorteksin tarkan sijainnin olevan ”painotettu keskiarvo siltä alueelta, missä valon intensiteetti on tippunut 1 % sisälle sen maksimi-intensiteetistä” [27]. Tutkielman yhteydessä valonsäteen havaittiin olevan halkaisijaltaan noin millimetrin luokkaa.



**Kuva 8.** Kobayashin *et al.* koejärjestely. Jos toisen PBS:n  $|V\rangle$ -haarasta ei tule valoa, tiedetään  $|\psi\rangle$ :n olevan  $|R\rangle$ .

Selvästikään  $\sigma_{x_w} \neq G\psi = 2e^{i\phi} \cot\frac{\theta}{2}$ , joten stereograafista projektiota ja alkuperäisen polarisaation selvittämistä varten on tehtävä vielä bijektiivinen muunnos:

$$\sigma_{x_w} \rightarrow 2\sigma_{x_w}^* = G\psi. \quad (2.4.2)$$

CCD-kameralla saatujen koordinaattien  $(x, y)$  sijasta tarkastellaankin siis koordinaattien  $(2x, -2y)$  projisoitumista Blochin pallolle. Yhtälöparin (2.1.13) ja äskeisen muunnoksen perusteella saadaan:

$$\phi = -\arctan\frac{y}{x}. \quad (2.4.3)$$

Lasketaan seuraavaksi kallistuskulma  $\theta$ :

$$2x - 2iy = 2e^{i\phi} \cot\frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x - iy &= e^{-i \arctan y/x} \cot \frac{\theta}{2} \\ \Leftrightarrow \theta &= 2 \operatorname{arccot} [e^{i \arctan y/x} (x - iy)] \\ &= 2 \operatorname{arccot} \left[ \frac{x+iy}{r} (x - iy) \right] = 2 \operatorname{arccot} r \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Viimeisellä rivillä otettiin käyttöön tavanomainen merkintä  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

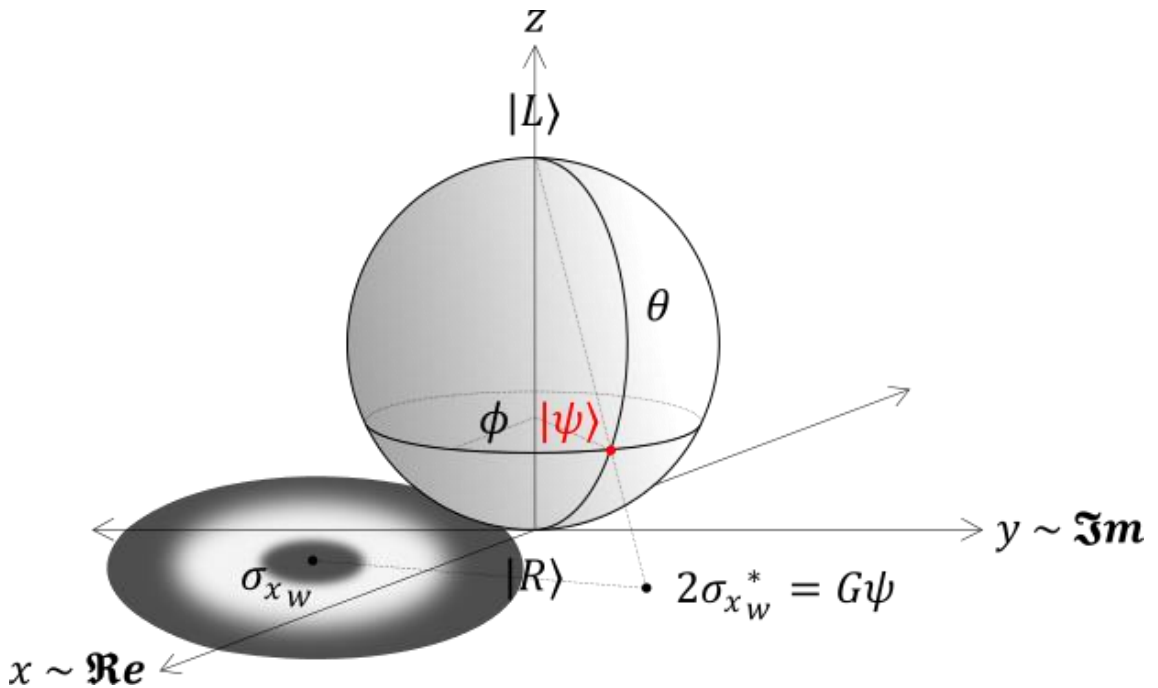
Tilaksi  $|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$  saadaan nyt:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos(\operatorname{arccot} r) |0\rangle + \frac{x-iy}{r} \sin(\operatorname{arccot} r) |1\rangle = \frac{r}{\sqrt{r^2+1}} |0\rangle + \frac{x-iy}{r} \frac{1}{\sqrt{r^2+1}} |1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2+1}} \left( r |0\rangle + \frac{x-iy}{r} |1\rangle \right), \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

ja tiheysmatriisiksi:

$$\rho = \frac{1}{r^2+1} \begin{pmatrix} r^2 & x+iy \\ x-iy & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4.6)$$

Tämä todellakin vastaa kvanttimekaanista tilaa, sillä se toteuttaa kaikki sivun 23 kolme ehtoa! Kobayashin *et al.* tavoin on myös selvästi rajoitettu puhtaisiin tiloihin [27].



**Kuva 9.** Optisen vorteksin projisoiminen Blochin pallolle puhtaaksi polarisaatiotilaksi  $|\psi\rangle$ .

Muuttujien  $x$  ja  $y$  (optisen vorteksin sijainti) on oltava dimensiottomia. Tällainen skaalaus onnistuu helposti sovittamalla matriisi (2.4.6) yhteen matriisien  $|H\rangle\langle H|$ ,  $|V\rangle\langle V|$ , jne. kanssa. Esimerkiksi R/L-kannassa:

$$|H\rangle\langle H| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.4.7)$$

joten kun valon tiedetään olevan horisontaalisesti polarisoitunutta, on matriisien (2.4.6) ja (2.4.7) yhtäsuuruudesta seurattava:  $(x, y) = (1, 0)$ . Vastaavasti muille matriiseille menettelemällä saadaan koottua seuraava taulukko:

**Taulukko 2.** Optisen vorteksin merkittävimmät koordinaatit ja niitä vastaavat tilat.

Optisen vorteksin sijainti	Polarisaatiotila
$(x, y) = (1, 0)$	$ H\rangle$
$(x, y) = (0, 1)$	$ D\rangle$
$(x, y) = (-1, 0)$	$ V\rangle$
$(x, y) = (0, -1)$	$ A\rangle$
$(x, y) = (0, 0)$	$ R\rangle$
$r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$	$ L\rangle$

Muuttujien  $x$  ja  $y$  alkuperäiset arvot  $\mathbf{X}$  ja  $\mathbf{Y}$  tulee siis jakaa optisen vorteksin etäisyydellä origosta, kun polarisaatiotilan tiedetään olevan  $|H\rangle$ ,  $|D\rangle$ ,  $|V\rangle$  tai  $|A\rangle$ , kussakin koordinaatiston neljänneksessä eri paria käyttämällä.

Kobayashi *et al.* suorittivat kokeessaan kaksi eri pre-valintaa. Ensimmäisessä tapauksessa he johtivat horisontaalisesti polarisoitunutta laservaloa kierrettävän puolialttolevyn läpi. Toisessa tapauksessa samanlaista laservaloa johdettiin taas kahden neljännesaalttolevyn läpi, joista ensimmäinen oli kierrettävä ja toinen kiinteä,  $-45^\circ$  kulmassa<sup>7</sup>. Kummassakin tapauksessa optisen vorteksin sijainti mitattiin useassa eri kierrettävän aalttolevyn kulmassa väliltä  $[0^\circ, 360^\circ)$ , ja näin saatiin polarisaatiotilojen muodostamat ”radat” Blochin pallolla, eräänlaiset ”superpositioiden superpositiot”. Ensimmäisessä tapauksessa tilat piirsivät Blochin pallolle

<sup>7</sup> Artikkelissa [27] tämän kulman sanotaan olevan  $45^\circ$ , mikä johtaa ristiriitaan: Ensimmäisen neljännesaalttolevyn ollessa nollakulmassa horisontaalisen polarisaation tulisi päästä siitä sellaisenaan läpi ja muuttua seuraavaksi vasenkätiseksi ympyräpolarisaatioksi. Tämän sijaan on kuitenkin havaittu oikeakätinen ympyräpolarisaatio, jota neljännesaalttolevy kulmassa  $45^\circ$  ei voi aiheuttaa! Tästä syystä kulman on päätelty olevan  $-45^\circ$ . Ainakin tässä tutkielmassa kokeet onnistuivat paremmin kyseisellä valinnalla.

päiväntasaajan. Toisessa tapauksessa saatiin puolestaan  $\infty$ -kuvio pallon pohjassa [27]. Näytetään seuraavaksi, kuinka teoria itse asiassa ennustaakin juuri tällaiset kuviot.

Puoliaaltolevyn Jonesin matriisi R/L-kannassa on  $\begin{pmatrix} 0 & e^{i2\alpha} \\ e^{-i2\alpha} & 0 \end{pmatrix}$ . Lasketaan tämän vaikutus horisontaaliseen polarisaatioon, ja vertaillaan saatua tulosta yleiseen tilaan (2.1.7):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & e^{i2\alpha} \\ e^{-i2\alpha} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i2\alpha} \\ e^{-i2\alpha} \end{pmatrix} = e^{i2\alpha} \left( \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \Leftrightarrow \theta = 90^\circ \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & e^{i2\alpha} \\ e^{-i2\alpha} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i2\alpha} |0\rangle + e^{i(\phi+2\alpha)} |1\rangle) \Leftrightarrow \phi = -4\alpha \\ \Leftrightarrow G\psi \equiv 2e^{i\phi} \cot \frac{\theta}{2} &= 2e^{-i4\alpha} \cot 45^\circ = 2e^{-i4\alpha} \Leftrightarrow \sigma_{x_w} = e^{i4\alpha} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos(4\alpha) \\ y = \sin(4\alpha) \end{cases} & \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Saatu parametrimuotoinen yhtälöpari kuvaa ympyrää.

Kulmassa  $\alpha$  olevaa neljännesaaltolevyä voidaan R/L-kannassa kuvata Jonesin matriisilla  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -ie^{i2\alpha} \\ -ie^{-i2\alpha} & 1 \end{pmatrix}$ , mistä saadaan -45 asteen kulmassa jo aiemminkin esitetty  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Tehdään vastaava lasku kuin edellä:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -ie^{i2\alpha} \\ -ie^{-i2\alpha} & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin(2\alpha) \\ 1 - i \cos(2\alpha) \end{pmatrix} = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 2 \arccos \left( \frac{\sin(2\alpha)}{\sqrt{2}} \right) \\ \phi = -\arctan(\cos(2\alpha)) \end{cases} &\Leftrightarrow G\psi \equiv 2e^{i\phi} \cot \frac{\theta}{2} = 2e^{-i \arctan(\cos(2\alpha))} \cot \left( \arccos \left( \frac{\sin(2\alpha)}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ &= \frac{2 \sin(2\alpha)}{\sqrt{(2 - \sin^2(2\alpha))(1 + \cos^2(2\alpha))}} (1 - i \cos(2\alpha)) \\ \Leftrightarrow \sigma_{x_w} &= \frac{\sin(2\alpha)}{\sqrt{(2 - \sin^2(2\alpha))(1 + \cos^2(2\alpha))}} (1 + i \cos(2\alpha)) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sin(2\alpha)}{\sqrt{(2 - \sin^2(2\alpha))(1 + \cos^2(2\alpha))}} \\ y = \frac{\sin(2\alpha) \cos(2\alpha)}{\sqrt{(2 - \sin^2(2\alpha))(1 + \cos^2(2\alpha))}} \end{cases} & \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Yhtälöpari (2.4.9) kuvaa kallellaan olevaa kahdeksikköä.

Virhetarkastelusta Kobayashin *et al.* paperissa kävi *fideliteetin* eli *uskollisuuden* laskeminen. Tällä tarkoitetaan kvanttimekaanisten tilojen laatua, eli kuinka paljon teoreettinen ja kokeellinen tila osuvat päällekkäin. Puhtaiden tilojen tapauksessa fideliteetti saadaan kaavasta:

$$F = |\langle \psi_{\text{teor.}} | \psi_{\text{kok.}} \rangle|^2, \quad (2.4.10)$$

missä  $|\psi_{\text{teor.}}\rangle$  eli teoreettinen tila saadaan esimerkiksi Jonesin matriisiformalismia tilaan  $|H\rangle$  soveltaen (siis juuri kuten edellä tehtiin), ja  $|\psi_{\text{kok.}}\rangle$  eli kokeellinen tila saadaan mittaustulokset kaavaan (2.4.5) sijoittaen. Kaikkien fideliteettien keskiarvoksi Kobayashi *et al.* saivat 0,994 [27]. Tämän mukaan teoria ja koetulokset olisivat eronneet toisistaan vain 0,6 %.

### 3 Polarisaation heikko mittaus, työselostus

Edellisessä luvussa esitelty Kobayashin *et al.* koejärjestely [27] toistettiin Turun yliopiston kvanttioptiikan laboratoriossa kesällä 2016. Tässä luvussa listataan jokainen työssä käytetty komponentti teknisine tietoineen ja selostetaan yksityiskohtaisesti kaikki työvaiheet aina testimittauksista varsinaisiin heikkoihin mittauksiin ja lopputuloksiin asti. Lopuksi suoritetaan kvalitatiivinen ja kvantitatiivinen virhetarkastelu. Mahdollisten lisätutkimushaarojen ja kaupallisten sovellutusten pohdinta on jätetty viimeiseen lukuun.

#### 3.1 Komponentit

Jotta polarisaation heikko mittaus olisi jatkossa helpommin toistettavissa, luetteloidaan seuraavaksi (lähes) kaikki kokeessa tarvittavat komponentit. Vain alustat, pitimet ja peilien ja aaltolevyjen normaalit kehykset jätetään yksityiskohtaisemmin kuvailematta. Komponentit saattavat erota Kobayashin *et al.* käyttämistä [27]. Ainoa teknisiltä tiedoiltaan hieman epävarma komponentti oli puolialtolevy, joka tuli Turun yliopistolle syksyllä 2012 hankitun yksifotonilähteen mukana. Sen kohdalla seuraavassa taulukossa onkin mainittu Thorlabsin vastaava osanen, jolla kokeet lienevät toteutettavissa aivan yhtä hyvin.

**Taulukko 3.** Polarisaation heikossa mittauksessa tarvittavat komponentit.

Komponentti	Merkki, tunniste ja lukumäärä	Teknisiä tietoja	Käyttötarkoitus
Tasavirtalähde	PeakTech, DC Power Supply 6080, 1 kpl	U=0–15V, P=45W	Virta laseriin
Laser	Thorlabs, CPS808, 1 kpl	$\lambda=808\text{nm}$	Fotoneitten lähde
Kollimaattori	Thorlabs, F220FC-780, 2 kpl	$\lambda=650\text{--}$ 1050nm	Laservalon kollimointi
Yksimoodikuitu	Thorlabs, P1-780PM-FC-2, 1 kpl	$\lambda=770\text{--}$ 1100nm	Saadaan vain yksi, ja juuri halutunlainen moodi (Gauss)
Lineaarinen polarisaattori	Thorlabs, LPVIS050-MP, 1 kpl	$\lambda=550\text{--}$ 1500nm	Polarisaatiotilan $ H\rangle$ siistiminen
Puolialtolevy	Thorlabs, WPH05M-808, 1 kpl	$\lambda\sim 808\text{nm}$	Pre-valinnan suorittaminen

Neljännesaaltolevy	Thorlabs, WPQ10E-808/ WPQ05M-808, 3 + 2 kpl	Nestekide- polymeeri/ kvartsi, $\lambda=650$ – 1050nm	1 polymeeri ja 1 kvartsi pre- valinnassa, 2 polymeeriä LG-moodin muunnoksessa ja 1 kvartsi post-valinnassa
Q-levy	Thorlabs, WPV10L-830, 1 kpl	$\lambda=650$ – 1050nm	LG-moodin muunnos
Polarisoiva säteenjakaja	Thorlabs, PBS102, 2 kpl	$\lambda=620$ – 1000nm	1 Sagnac-interferometrissä ja 1 post-valinnassa
Peili	Thorlabs, PF05-03-P01/BB1-E03, 5 + 1 kpl	$\varnothing=12,7$ mm/ 25,4mm	3 Sagnac-interferometrissä ja 3 $ L\rangle$ :n post-valinnassa
Differentiaalisesti säädettävä kehys	Thorlabs, KS1D, 1 kpl	660 $\mu$ rad/ kierros	Heikko vuorovaikutus Sagnac- interferometrissä (iso peili)
Iiris*	Thorlabs, ID8/M, 1 kpl	$\varnothing=0,7$ – 8,0mm	Heijastusten siistiminen
Kallistettava kehys**	Thorlabs, TR05F90/M, 1 kpl	$\varnothing=12,5$ mm	Polarisaatiotilan $ L\rangle$ post- valinta
CCD-kamera***	Andor Technology, Zyla sCMOS, 1 kpl	Pikselin sivu 6,5 $\mu$ m	Optisen vorteksin paikantaminen
Neutraalisuodin	Thorlabs, NE10/30/40A, 1 + 1 + 1 kpl	ND=1,0/3,0 /4,0	Kuvien ylivalottumisen ehkäisy
Tehomittari	Thorlabs, PM100D, 1 kpl	$\lambda=185$ nm– 25 $\mu$ m, P=100pW– 200W	Testimittaukset

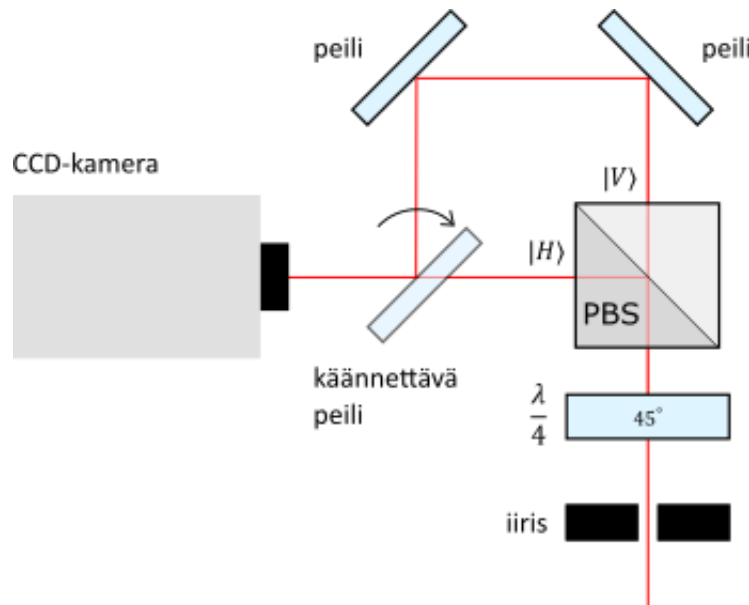
\*Koelaitteistoon lisättiin lasersädettä ”siistivä” iiris juuri ennen post-valintaa, sillä monista eri aaltolevyistä syntyi epämieluisia heijastuksia (ks. kuva 10).

\*\*Toisin kuin Kobayashin *et al.* kokeessa [27], tässä tutkielmassa haluttiin mahdollistaa myös polarisaatiotilan  $|L\rangle$  valitseminen kompleksitason origoksi. Tässä onnistuttiin lisäämällä toisen PBS:n  $|V\rangle$ -haaraan kaksi paikallaan olevaa peiliä ja yksi kallistettavassa kehyksessä oleva peili,



joka alas käännettäessä estäisi polarisaatiota  $|H\rangle$  pääsemästä CCD-kameralle, mutta heijastaisikin sinne  $|V\rangle$ :n (ks. kuva 10).

\*\*\*CCD-kameraa ohjattiin ja sen kuvia tarkkailtiin Andor SOLIS -nimisellä ohjelmalla.



**Kuva 10.** Tutkielmassa tehdyn kokeen eroavaisuudet Kobayashin *et al.* kokeeseen [27].

## 3.2 Testimittaukset

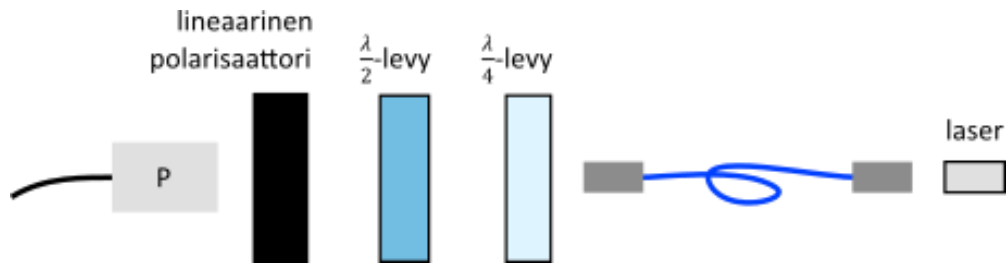
Ennen varsinaisia heikkoja mittauksia tuli selvittää työssä tarvittavien komponenttien toimivuus. Laboratorion tuoreimpina hankintoina näitä olivat erityisesti laservalon lähde ja q-levy. Muut komponentit oli kalibroitu jo ennestään.

### 3.2.1 Laservalon polarisaatio

Q-levyn testimittauksia ja varsinaista koetta varten tarvittiin horisontaalisesti polarisoitunutta laservaloa. Tällainen valonlähde ostettiin Thorlabsilta, mutta polarisaation varmistamiseksi järjestettiin seuraavanlainen mittaus:

Laservalo johdettiin optisen kuidun kautta neljännesaaltolevyyn, puoliaaltolevyyn ja lopuksi lineaariseen polarisaattoriin. Polarisaattorin jälkeen laservalon teho mitattiin optisten levyjen ollessa eri kulmissa. Näiden arvojen perusteella saatiin laskettua Stokesin parametrit ja polarisaation tiheysmatriisi. Mittaus suoritettiin monessa eri optisen kuidun ja laservalonlähteen välisessä asennossa, kunnes saavutettiin horisontaalisen polarisaation

kannalta parhaat tulokset. Nämä tulokset on lueteltu taulukossa 4. Kuidun ja laserin välistä asentoa kyettiin säätämään mikrometriluokan  $xy$ -jalustalla.



**Kuva 11.** Polarisaatiotomografian koejärjestely.

**Taulukko 4.** Polarisaatiotomografian mittaustulokset.

$\theta_{\text{pol.}}/^\circ$	$\theta_{\lambda/2}/^\circ$	$\theta_{\lambda/4}/^\circ$	$P/\mu W$
0	0	0	536
90	0	0	69,3
0	22,5	0	263
90	22,5	0	360
0	0	45	340
90	0	45	264

Stokesin parametreiksi saatiin mitatut tehot kaavaan (2.1.9) sijoittaen:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{263-360}{263+360} \approx -0,156 \\ S_2 = \frac{340-264}{340+264} \approx 0,126 \\ S_3 = \frac{536-69,3}{536+69,3} \approx 0,771 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Lisäksi määritelmän perusteella  $S_0 = 1$ . Täten laservalon polarisaatiota kuvaavaksi tiheysmatriisiksi saatiin:

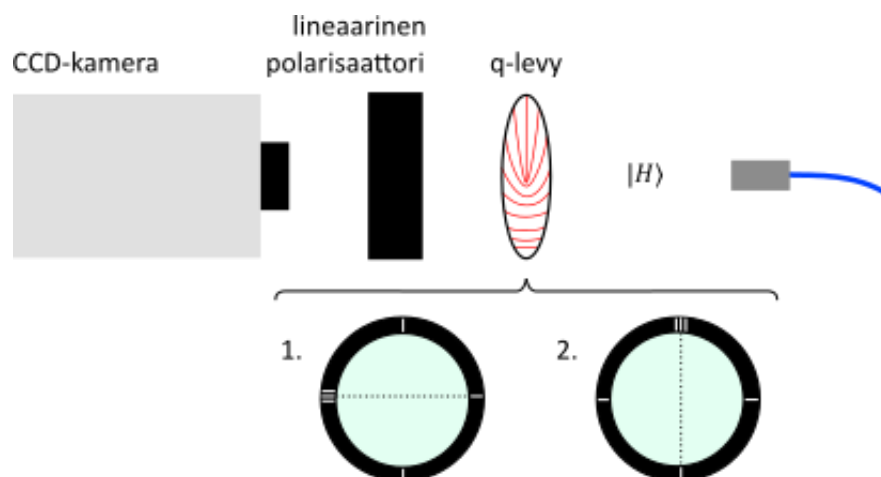
$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 S_i \sigma_i = \begin{pmatrix} 0,8855 & -0,078 + 0,063i \\ -0,078 - 0,063i & 0,1145 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv |H\rangle\langle H|. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Viimeisessä pyörityksessä ainoa nollassa eriävä termi erosi kokeellisesta arvosta noin 12,9 %. Virhe on huomattava, mutta pienennettävissä sijoittamalla lineaarinen polarisaattori koelaitteistossa heti yksimoodikuidun perään (ks. taulukko 3 ja ”lineaarisen polarisaattorin käyttötarkoitus”). Viimeistään tällaisen menettelyn jälkeen voi käytössä sanoa olevan horisontaalisesti polarisoitunutta valoa.

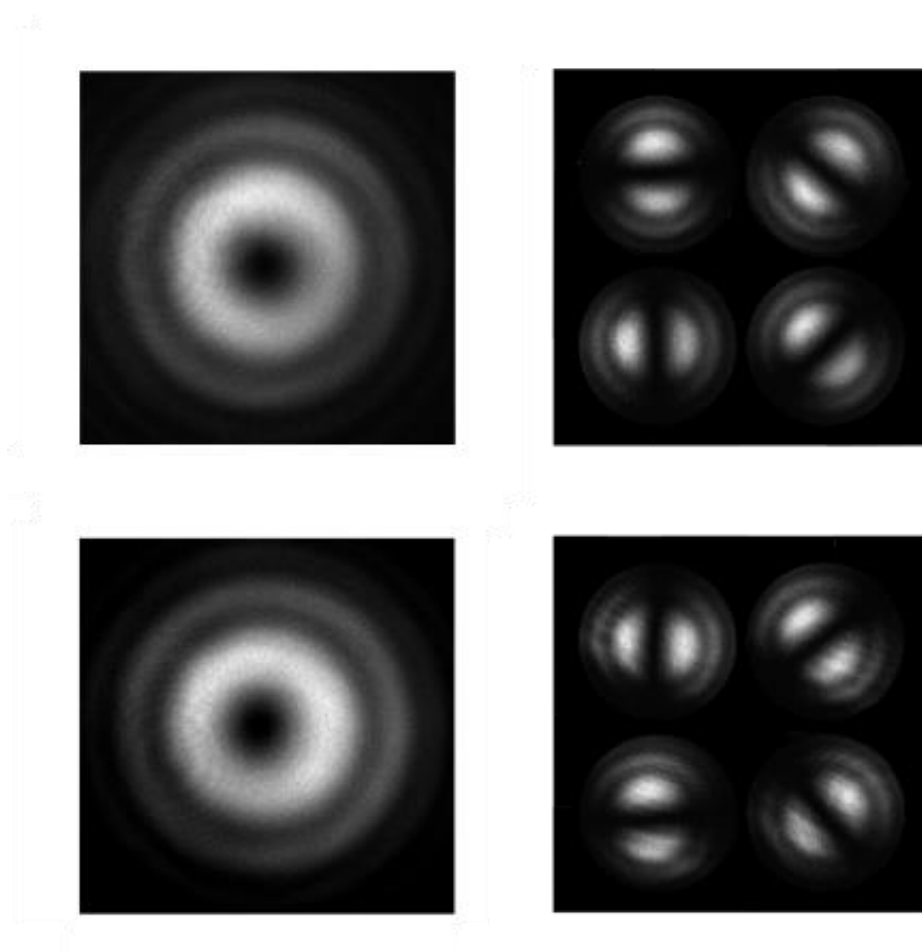
### 3.2.2 Q-levyn toiminta I

Toinen varsinaisen kokeen kannalta hyvin oleellinen komponentti oli q-levy. Sekin ostettiin Thorlabsilta, mutta sen toiminta testattiin Altechna R&D:n manuaalin [39] ehdottamalla tavalla. Kyseinen ohjekirjanen koski itse asiassa *S-aaltolevyä*, joka on kuitenkin hyvin samantyyppinen polarisaatiokonvertteri kuin q-levy. S- ja q-levy eroavat toisistaan ainoastaan valmistusmenetelmiltään [34, 40].

Q-levyn keskipisteeseen johdettiin horisontaalisesti polarisoitunutta laservaloa. Q-levyn nopea akseli oli ensin horisontaalisesti, sitten vertikaalisesti, muuttaen  $|H\rangle$ :n ensin radiaaliseksi polarisaatioksi, sitten azimutaaliseksi. Kummassakin tapauksessa q-levyn läpäisessä valonsäteestä otettiin viisi kuvaa: ilman lineaarista polarisaattoria ja lineaarisen polarisaattorin ollessa kulmissa  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  ja  $135^\circ$ . Lineaarisen polarisaattorin ollessa q-levyn ja CCD-kameran välissä tulisi säteen poikkiprofiilin muuttua käsipainon muotoiseksi, jonka orientaatio riippuu q-levyn nopean akselin kulmasta ja kiertyy lineaarisen polarisaattorin mukana [39]. Koejärjestely on esitetty kuvassa 12 ja mittaustulokset kuvassa 13.



Kuva 12. Q-levyn toiminnan testaus.

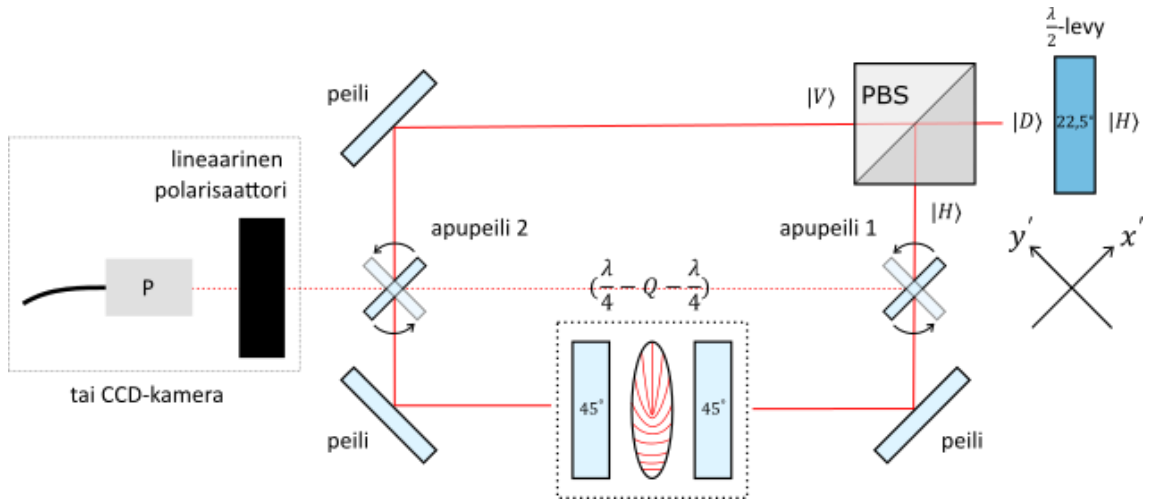


**Kuva 13.** Vasemmalta oikealle ja ylhäältä alas: Radiaalisesti polarisoitunut valo ilman polarisaattoria ja polarisaattorin ollessa kulmissa  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  ja  $135^\circ$  sekä azimutaalisesti polarisoitunut valo samoin asetuksin.

Horisontaalisesti polarisoitunut laservalo käyttäytyi q-levyssä kuvan 13 perusteella juuri niin, kuin Altechna R&D vakuutti S-levyn toimivan.

### 3.2.3 Q-levyn toiminta II

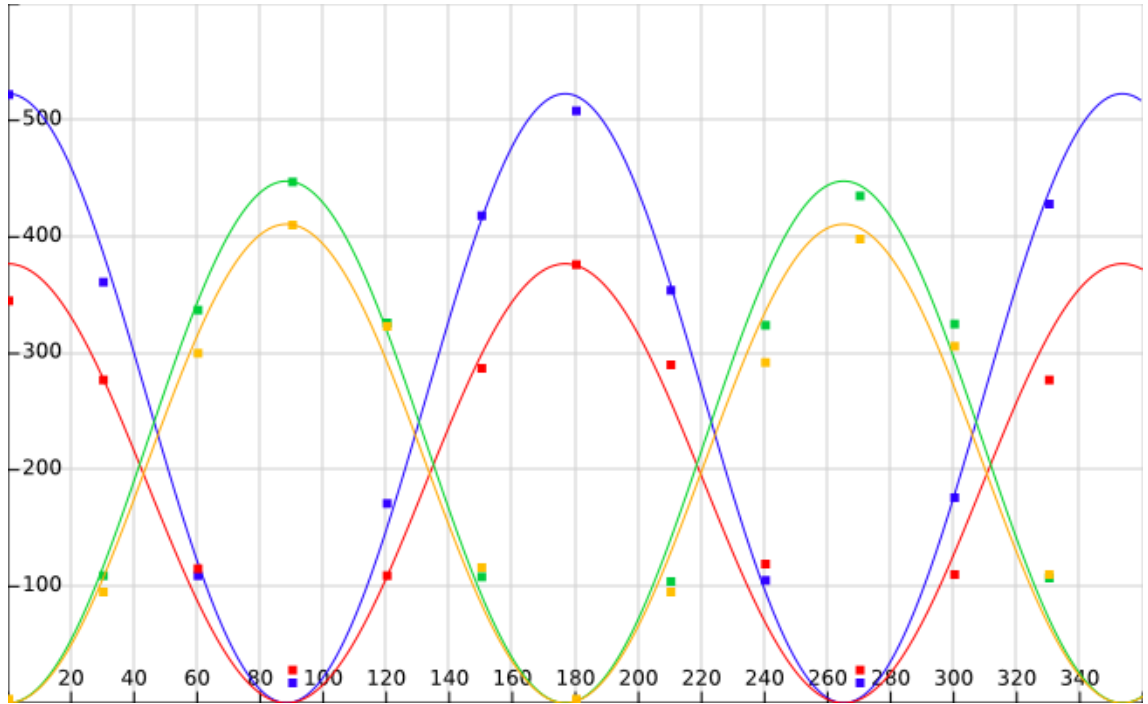
Konfiguraation  $\left(\frac{\lambda}{4} - Q - \frac{\lambda}{4}\right)$  ja kaavojen (2.2.18) ja (2.2.19) toimivuus testattiin yllä kuvatun laservalonlähteen, lineaarisen polarisaattorin, tehomittarin ja CCD-kameran avulla. Komponentit järjestettiin kuvan 14 mukaisesti. Kaikissa tapauksissa (apupeili 1 suunnassa  $x'$ , apupeili 1 suunnassa  $y'$ , apupeili 2 suunnassa  $x'$ , apupeili 2 suunnassa  $y'$ ) lineaarista polarisaattoria kierrettiin täysi kierros, ja 30 asteen välein ylös kirjattiin tehomittarin lukema. Lisäksi valonsäteestä otettiin kuva ennen  $\left(\frac{\lambda}{4} - Q - \frac{\lambda}{4}\right)$ :ää ja sen jälkeen, kaikissa tapauksessa ilman polarisaattoria. Taulukossa 5 ja kuvissa 15 ja 16 on esitetty saadut tulokset.



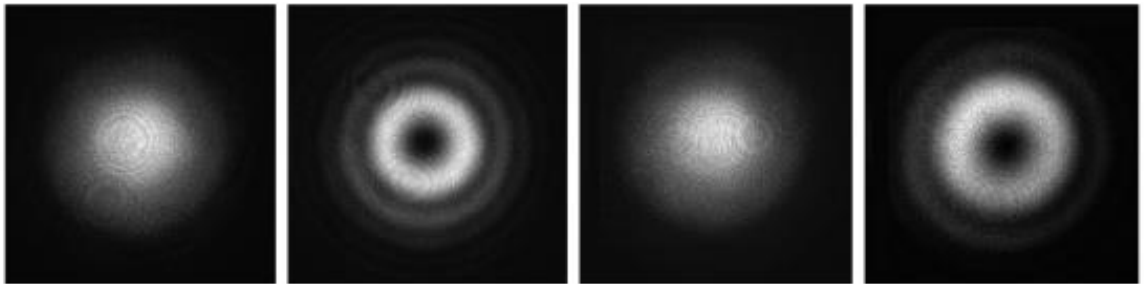
**Kuva 14.**  $(\frac{\lambda}{4} - Q - \frac{\lambda}{4})$ -testin koejärjestely. Horisontaalisen polarisaation mittaaminen ennen  $(\frac{\lambda}{4} - Q - \frac{\lambda}{4})$ :ää onnistuu kääntämällä apupeili 1 suuntaan  $x'$ . Vastaavasti jälkeen apupeiliin 2 tulee osoittaa suuntaan  $y'$ . Vertikaalinen polarisaatio ennen: Apupeili 2 suunnassa  $x'$ . Ja vertikaalinen polarisaatio jälkeen: Apupeili 1 suunnassa  $y'$ .

**Taulukko 5.**  $(\frac{\lambda}{4} - Q - \frac{\lambda}{4})$ -testin mittaustulokset.

$ H\rangle$ ennen		$ H\rangle$ jälkeen		$ V\rangle$ ennen		$ V\rangle$ jälkeen	
$\theta/^\circ$	$P/\mu W$	$\theta/^\circ$	$P/\mu W$	$\theta/^\circ$	$P/\mu W$	$\theta/^\circ$	$P/\mu W$
0	523	0	346	0	1	0	4
30	362	30	278	30	110	30	96
60	110	60	116	60	338	60	301
90	18	90	29	90	448	90	411
120	172	120	110	120	327	120	324
150	419	150	288	150	109	150	117
180	509	180	377	180	0	180	4
210	355	210	291	210	105	210	96
240	106	240	120	240	325	240	293
270	18	270	29	270	436	270	399
300	177	300	111	300	326	300	307
330	429	330	278	330	108	330	111



**Kuva 15.**  $\left(\frac{\lambda}{4} - Q - \frac{\lambda}{4}\right)$ -testin tulokset ja niihin sovitetut, Malusin lakia noudattavat intensiteettikuvaajat. Horisontaalista polarisaatiota ennen  $\left(\frac{\lambda}{4} - Q - \frac{\lambda}{4}\right)$ :ää indikoi sininen väri ja sen jälkeen punainen. Vertikaalista polarisaatiota ennen  $\left(\frac{\lambda}{4} - Q - \frac{\lambda}{4}\right)$ :ää indikoi vihreä väri ja sen jälkeen keltainen.

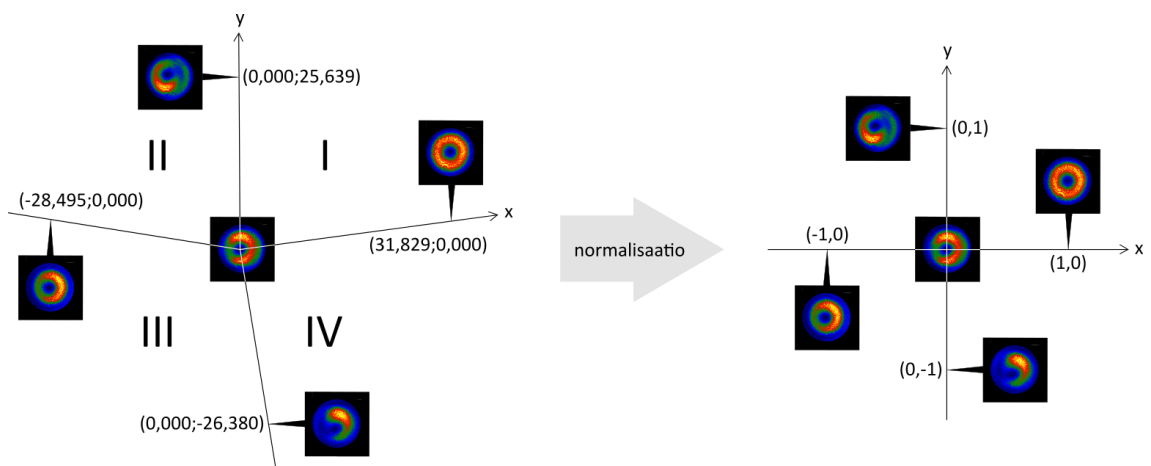


**Kuva 16.** CCD-kameran kuvat ennen  $\left(\frac{\lambda}{4} - Q - \frac{\lambda}{4}\right)$ :ää ja sen jälkeen, eli polarisaatiot  $|H\rangle$ ,  $e^{i\varphi}|H\rangle$ ,  $|V\rangle$  ja  $-e^{-i\varphi}|V\rangle$ .

Tuloksista voidaan päätellä, että  $\left(\frac{\lambda}{4} - Q - \frac{\lambda}{4}\right)$  toimii juuri kaavojen (2.2.18) ja (2.2.19) ennustamalla tavalla: Horisontaalinen polarisaatio säilyy horisontaalisena, mutta se kerrotaan vaihetekijällä  $e^{i\varphi}$ . Vastaavasti vertikaalinen polarisaatio saa eteensä vaihetekijän  $-e^{-i\varphi}$ . Kyseisten vaihetekijöiden ja  $LG_0^1$ -moodin syntyminen voidaan todeta kuvan 16 perusteella. Osa valon intensiteetistä "jää"  $\left(\frac{\lambda}{4} - Q - \frac{\lambda}{4}\right)$ :ään, sillä aaltolevyjen transmissio  $< 100\%$ . Tämän ei kuitenkaan pitäisi haitata varsinaista heikkoa mittausta seuraavassa alaluvussa.

### 3.3 Polarisaation heikko mittaus

Optisten vorteksin paikkojen mittausta ja vertailua varten tuli ensin määrittää koordinaatisto. Se suoritettiin taulukkoon 2 nojautuen; Horisontaalisesti polarisoituneessa valossa optinen vorteksi määritti pisteen  $(x, y) = (1, 0)$  jne. Horisontaalisesti polarisoitunutta valoa saatiin sijoittamalla lineaarinen polarisaattori nollakulmassa laservalonlähteen ja yksimoodikuidun perään. Diagonaalisesti polarisoitunutta valoa saatiin lisäämällä lineaarisen polarisaattorin jälkeen puoliaaltolevy  $22,5^\circ$  kulmassa. Vertikaalinen polarisaatio saavutettiin puoliaaltolevyn kulmassa  $45^\circ$  ja antidiagonaalinen kulmassa  $67,5^\circ$ . Origin määrittelyä varten preparoitiin oikeakätisesti polarisoitunutta valoa sijoittamalla puoliaaltolevyn tilalle neljännesaaltolevy  $-45^\circ$  kulmassa.



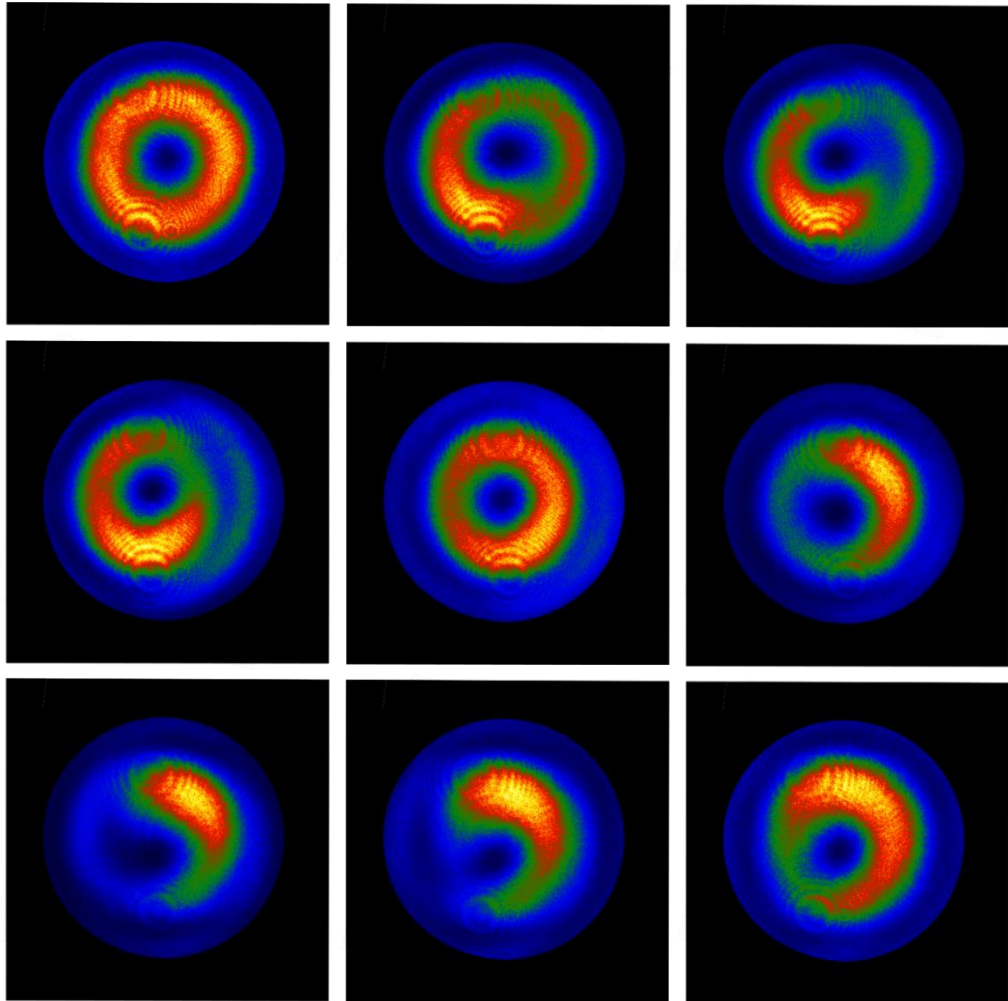
**Kuva 17.** CCD-kameran (rajatut) kuvat ja niiden perusteella muodostettu koordinaatisto. Origossa sijaitsee tila  $|R\rangle$ , pisteessä  $(1, 0)$   $|H\rangle$ , pisteessä  $(0, 1)$   $|D\rangle$ , pisteessä  $(-1, 0)$   $|V\rangle$  ja pisteessä  $(0, -1)$   $|A\rangle$ .

Vasen koordinaatisto kuvassa 17 on selvästikin hieman deformoitunut. Se on kuitenkin lähinnä suorakulmaista, ideaalista koordinaatistoa, mihin koelaitteistoa kalibroidessa päästiin<sup>8</sup>. Tästä syystä mittauspisteet sen eri neljänneksissä normalisoidaan eri luvuin; Ensimmäisessä neljänneksessä havaittujen pisteiden x-koordinaatit jaetaan luvulla 31,829 ja y-koordinaatit luvulla 25,639. Toisessa, kolmannessa ja neljännessä neljänneksessä nämä ”normalisaatioparit” ovat puolestaan  $(28,495; 25,639)$ ,  $(28,495; 26,380)$  ja  $(31,829; 26,380)$ , vastaavasti.

<sup>8</sup> Kalibrointi suoritettiin pääasiassa q-levyn paikkaa ja kulmaa sekä differentiaalista kehystä KS1D säätämällä. CCD-kameran videokuvaa tarkkailemalla varmistuttiin siitä, että puoliaaltolevy koelaitteiston alkupäässä kiertämällä optinen vorteksi kiersi origoa  $|R\rangle$  mahdollisimman puhtaalla ympyräradalla, ja että syntyvä epäsymmetria intensiteettijakaumassa olisi likimain yhtälön (2.2.11) ennustamaa muotoa.

Koska CCD-kameran kuvat on rajattu kuvassa 17, ei niistä käy ilmi se havainto, että optisen vorteksin lisäksi koko lasersäteen havaittiin liikkuvan hieman puoliaaltolevyä kierrettäessä. Tässä ja tulevissa mittauksissa optisen vorteksin siirtymällä tarkoitetaan sen siirtymää kokonaiskuvassa. Käytännössä nämä siirtymät voidaan mitata esimerkiksi jollain vektorigrafiikkaohjelmalla. Tässä tutkielmassa käytettiin Inkscape 0.91 -nimistä ohjelmaa.

Kobayashia *et al.* seuraten ensimmäinen varsinainen koe tehtiin pre-valinta puoliaaltolevyllä suorittaen. Puoliaaltolevyä kuvaavasta Jonesin matriisista  $\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$  nähdään, että sen (polarisaation kannalta merkittävä) jakso on  $90^\circ$ , minkä vuoksi kyseistä levyä kierrettiin 0:sta  $80$  asteeseen  $10$  asteen askelin. Itse kuvien lisäksi seuraavaksi esitetään kokeen tulokset kahdella eri tavalla: optisten vorteksin sijainnit taulukoituna ja normalisoidut pisteet karteesisen koordinaatistoon merkattuna, teoreettisen radan kera.

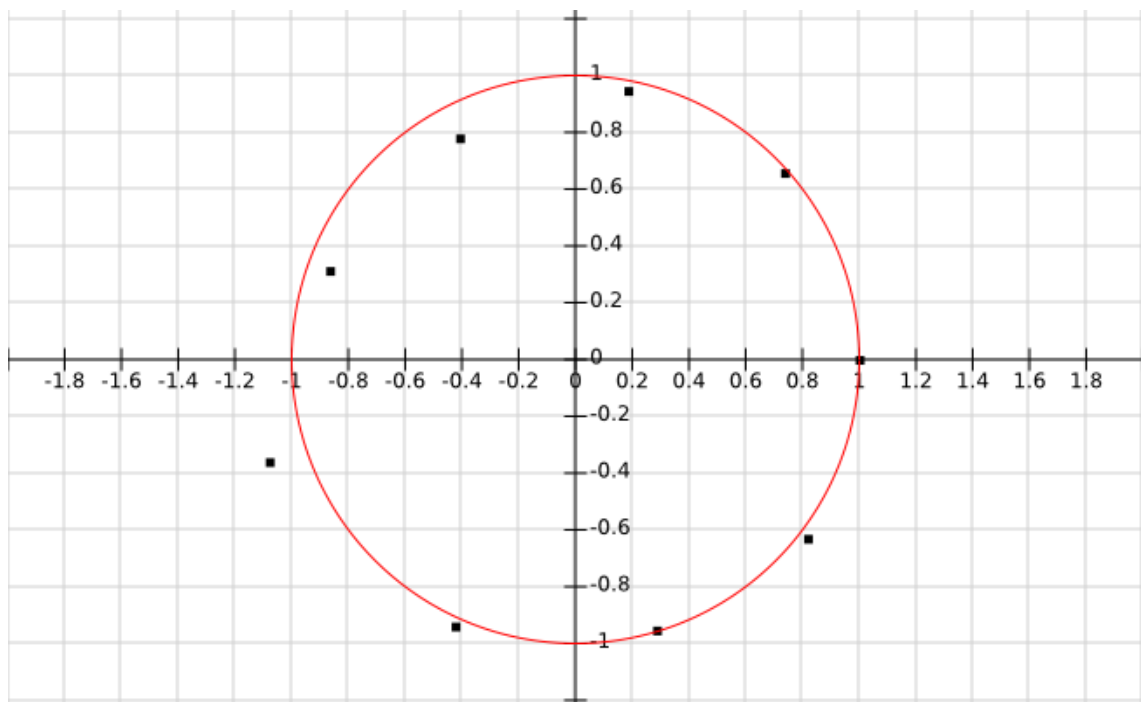


**Kuva 18.** CCD-kameran kuvat LG-moodeista ensimmäisessä kokeessa (preparointi puoliaaltolevyllä). Puoliaaltolevyn kulmat kasvavat tasaisesti vasemmalta oikealle, ylhäältä alas,  $0^\circ \rightarrow 80^\circ$ .

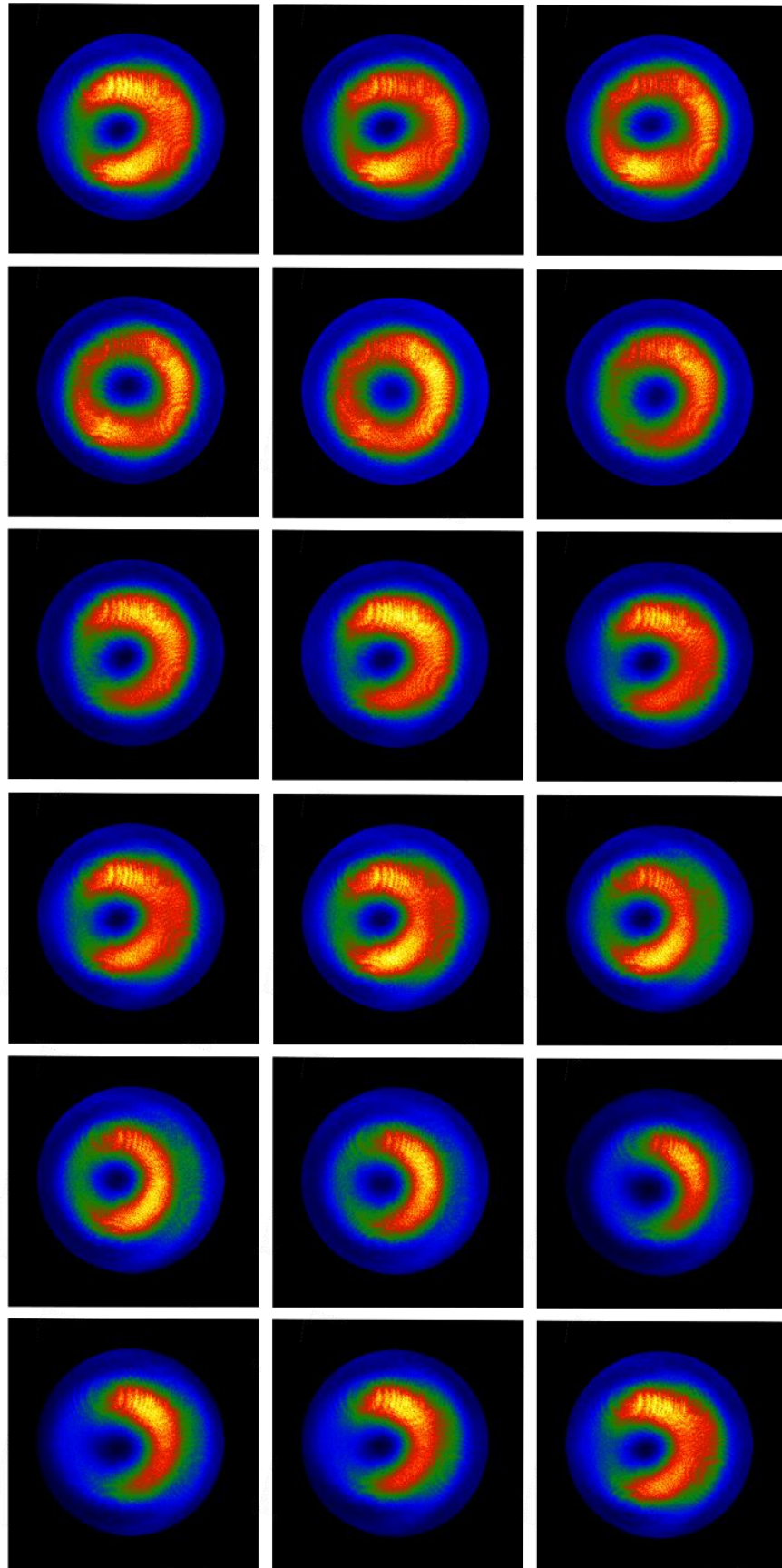


**Taulukko 6.** Ensimmäisen kokeen mittaustulokset.

$\alpha/^\circ$	X/px	Y/px	Neljännes	x	y
0	31,829	0,000	I	1,000	0,000
10	23,465	16,879		0,737	0,658
20	5,904	24,288		0,185	0,947
30	-11,615	20,004	II	-0,408	0,780
40	-24,687	8,037		-0,866	0,313
50	-30,756	-9,496	III	-1,079	-0,360
60	-12,084	-24,779		-0,424	-0,939
70	9,102	-25,133	IV	0,286	-0,953
80	26,029	-16,609		0,818	-0,630

**Kuva 19.** Ensimmäisen kokeen mittaustulokset (mustat pisteet) ja niiden teoreettinen rata (punainen ympyrä).

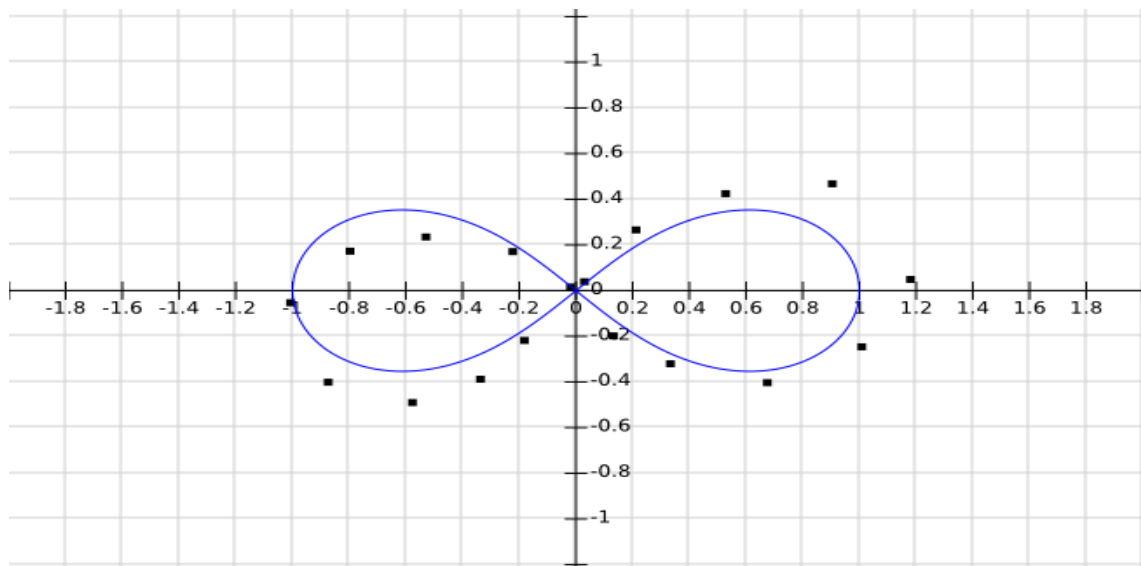
Toisessa kokeessa pre-valinta tehtiin kahdella neljännesaaltolevyllä, joista ensimmäistä kierrettiin ja jälkimmäinen oli kiinteässä kulmassa  $-45^\circ$ . Matriisista  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -ie^{i2\alpha} \\ -ie^{-i2\alpha} & 1 \end{pmatrix}$  näkee "polarisaatiojakson" olevan  $180^\circ$ , joten neljännesaaltolevyä kierrettiin 0:sta  $170$  asteeseen  $10$  asteen askelin. Saadut tulokset on seuraavaksi ilmoitettu edellisten tavoin.



**Kuva 20.** CCD-kameran kuvat LG-moodeista toisessa kokeessa (preparointi kahdella neljännesaaltolevyllä). Neljännesaaltolevyn kulmat kasvavat tasaisesti vasemmalta oikealle, ylhäältä alas,  $0^\circ \rightarrow 170^\circ$ .

**Taulukko 7.** Toisen kokeen mittaustulokset.

$\alpha/^\circ$	X/px	Y/px	Neljännes	x	y
0	0,870	1,066	I	0,027	0,042
10	6,652	6,903		0,209	0,269
20	16,716	10,967		0,525	0,428
30	28,684	12,077		0,901	0,471
40	37,454	1,345		1,177	0,052
50	32,001	-6,401	IV	1,005	-0,243
60	21,393	-10,560		0,672	-0,400
70	10,504	-8,353		0,330	-0,317
80	4,114	-5,140		0,129	-0,195
90	-0,625	0,475	II	-0,022	0,019
100	-6,447	4,464		-0,226	0,174
110	-15,159	6,108		-0,532	0,238
120	-22,785	4,506		-0,800	0,176
130	-28,773	-1,319	III	-1,010	-0,050
140	-24,979	-10,496		-0,877	-0,398
150	-16,520	-12,842		-0,580	-0,487
160	-9,682	-10,169		-0,340	-0,385
170	-5,283	-5,668		-0,185	-0,215

**Kuva 21.** Toisen kokeen mittaustulokset (mustat pisteet) ja niiden teoreettinen rata (sininen silmukka).

### 3.4 Lopputulokset ja virhetarkastelu

Kuten mainittua, polarisaation täydelliseen karakterisointiin vaaditaan kaksi, mahdollisesti kompleksista lukua. Blochin palloon liittyvässä formalismissa nämä luvut ovat reaaliset kallistuskulma  $\theta$  ja azimuuttikulma  $\phi$ , jotka saadaan kaavoista (2.4.3) ja (2.4.4). Siispä kokeiden lopputuloksina ilmoitetaan seuraavaksi kyseiset kulmat, joita lopuksi myös havainnollistetaan Blochin pallolle piirrettyinä. Lisäksi tässä yhteydessä listataan kokeellisten tilojen fideliteetit. Molemmista kokeista ne saadaan sijoittamalla kaavaan (2.4.10) sivulla 40 lasketut tilat ja tila (2.4.5). Siispä ensimmäisessä kokeessa:

$$F = |\langle \psi_{\text{teor.}} | \psi_{\text{kok.}} \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i2\alpha} \langle 0 | + e^{i2\alpha} \langle 1 |) \frac{1}{\sqrt{r^2 + 1}} (r | 0 \rangle + \frac{x - iy}{r} | 1 \rangle) \right|^2$$

$$= \frac{x \cos(4\alpha) + y \sin(4\alpha)}{r^2 + 1} + \frac{1}{2}, \quad (3.4.1)$$

ja toisessa kokeessa:

$$F = |\langle \psi_{\text{teor.}} | \psi_{\text{kok.}} \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin(2\alpha) \langle 0 | + (1 + i \cos(2\alpha)) \langle 1 |) \frac{1}{\sqrt{r^2 + 1}} (r | 0 \rangle + \frac{x - iy}{r} | 1 \rangle) \right|^2$$

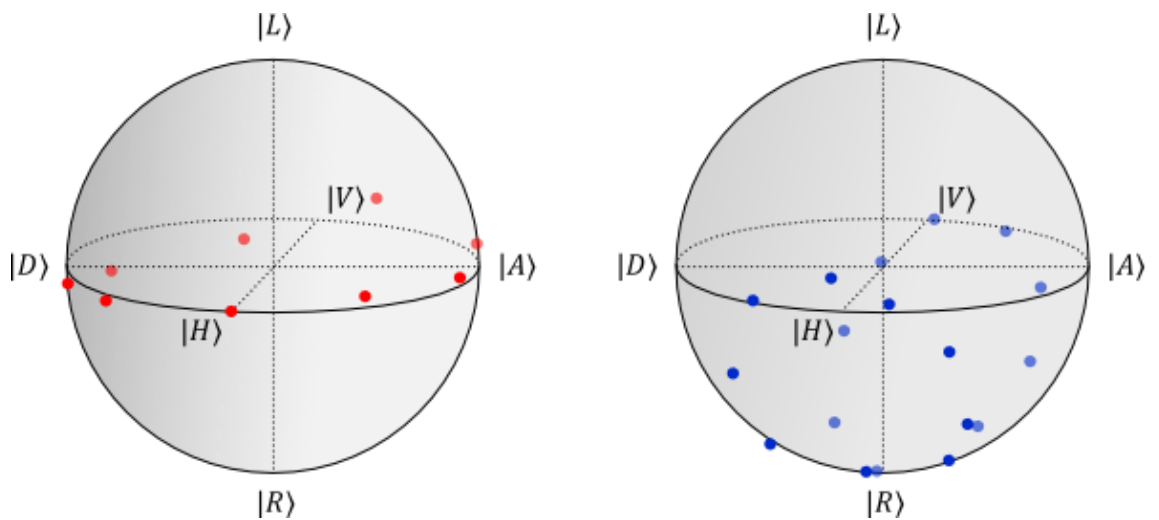
$$= \frac{\sin(2\alpha)(x + y \cos(2\alpha)) + \cos^2(2\alpha)}{r^2 + 1} + \frac{\sin^2(2\alpha)}{2}. \quad (3.4.2)$$

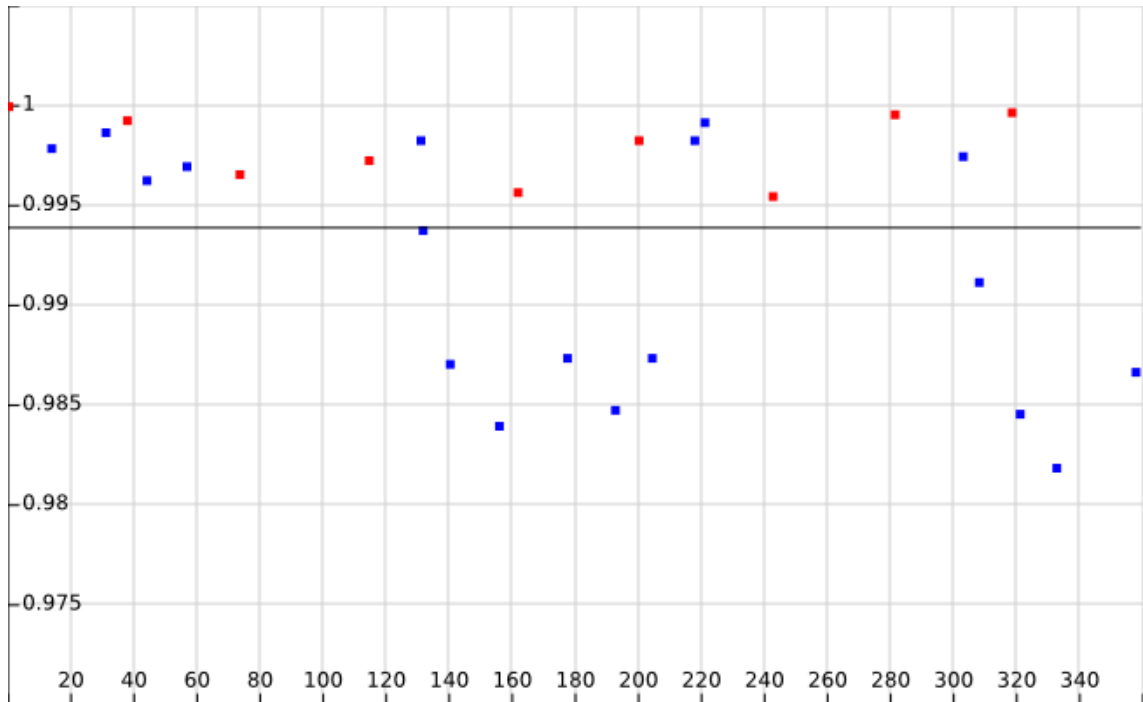
**Taulukko 8.** Ensimmäisen kokeen lopputulokset ja fideliteetit.

$\alpha / ^\circ$	$\theta / ^\circ$	$\phi / ^\circ$	$F$
0	90,0	0,0	1,000
10	90,7	318,2	1,000
20	92,0	281,1	1,000
30	97,3	242,4	0,996
40	94,7	199,9	0,998
50	82,6	161,5	0,996
60	88,3	114,3	0,997
70	90,3	73,3	0,997
80	88,2	37,6	0,999
			$F_{\text{av.}} \approx 0,998$

**Taulukko 9.** Toisen kokeen lopputulokset ja fideliteetit.

$\alpha/^\circ$	$\theta/^\circ$	$\phi/^\circ$	$F$
0	174,3	302,7	0,998
10	142,4	307,8	0,991
20	111,8	320,8	0,985
30	89,1	332,4	0,982
40	80,6	357,5	0,987
50	88,1	13,6	0,998
60	103,9	30,8	0,999
70	130,8	43,8	0,996
80	153,7	56,5	0,997
90	176,7	220,8	0,999
100	148,2	217,6	0,998
110	119,5	204,1	0,987
120	101,4	192,4	0,985
130	89,4	177,2	0,987
140	92,2	155,6	0,984
150	105,7	140,0	0,987
160	125,6	131,4	0,994
170	148,3	130,7	0,998
			$F_{av.} \approx 0,992$

**Kuva 22.** Ensimmäisen (punainen) ja toisen (sininen) kokeen lopputulokset Blochin pallolle visualisoituina.



**Kuva 23.** Ensimmäisen (punainen) ja toisen (sininen) kokeen fideliteetit ja niiden keskiarvo, 0,994. Vaaka-akselilla azimuuttikulmat Blochin pallolla. Sinisten pisteiden puuttuminen väleiltä  $60^{\circ}$ – $120^{\circ}$  ja  $240^{\circ}$ – $300^{\circ}$  selittyy saadun silmukan rakenteella; Blochin pallon D- ja A-puoliskoille ei saatu yhtäkään havaintopistettä (ks. kuva 22).

Kuten jo kuvista 19 ja 21 ja viimeistään edellä lasketuista fideliteeteistä voi päätellä, onnistui Kobayashin *et al.* kokeiden reproduktio loistavasti. Tässä tutkielmassa päädyttiin jopa samaan kokonaisfideliteettiin kolmen desimaalin tarkkuudella. Keskiarvoon 0,994 vaikutti kullakin taholla kuitenkin hieman eri tekijät. Ensimmäisen kokeen fideliteetit tässä tutkielmassa osuivat välille 0,996–1,000, kun taas Kobayashi *et al.* päätyivät laveammalle välille 0,980–0,998. Vastaavat välit toisessa kokeessa olivat 0,982–0,999 ja 0,978–1,000 [27]. Fideliteettien vaihtelu oli siis alkuperäistyössä suurempaa, mutta toisaalta, havaintopisteitäkin oli enemmän (yhteensä 58). Keskimääräistä fideliteettiä 0,994 voi siis luonnehtia yhtä luotettavaksi molemmissa kokeissa.

Syitä täydestä 1,000 poikkeaville fideliteeteille on useita. Vaikka laservalon polarisaatiota siistittiin lineaarisella polarisaattorilla, ei se välttämättä kuitenkaan ollut täysin horisontaalista. Säädettiinhan lineaarinen polarisaattori silmämääräisesti, kuten kaikki muutkin aaltolevyt. Asteen kymmenyksen heitot suuntaan tai toiseen olivat siis mahdollisia. Samaten optisen vorteksin sijainti kussakin CCD-kameran kuvassa arvioitiin silmämääräisesti. Myös komponenttien eri toiminta-alueet ja valmistusmateriaalit saattoivat aiheuttaa jonkin suuruista virhettä, ollen ehkä jopa todennäköisimpänä synnä vinoon koordinaatistoon kuvassa 17.

Kuvasta 22 näkee hyvin, miksi tilan  $|R\rangle$  post-valinta oli järkevintä; Blochin pallon ekvaattori ja kahdeksikko saatiin molemmissa kokeissa selkeästi näkyviin! Jos ensimmäisessä kokeessa olisikin post-valittu vaikka  $|H\rangle$ , olisi "LD-koordinaatistossa" teoriassa havaittu ensin origo, sitten lähestytty  $(0, \infty)$ :tä, ja lopuksi palattu  $(0, -\infty)$ :stä origoon. Vastaavasti, post-valinnalla  $|D\rangle$  olisi "HL-koordinaatistossa" teoriassa havaittu ensin piste  $(1, 0)$ , sitten lähestytty  $(-\infty, 0)$ :aa, ja lopuksi palattu  $(\infty, 0)$ :sta pisteeseen  $(1, 0)$ .

Kumpikin näistä asymptoottisista tapauksista todennettiin myös käytännössä.  $|H\rangle$ :n post-valinta onnistui poistamalla neljännesaaltolevy toisen säteenjakajan edestä, ja  $|D\rangle$ :n post-valinta onnistui korvaamalla sama neljännesaaltolevy  $22,5^\circ$  kulmassa olevalla puolisaaltolevyllä. Tilojen radat (liitteet A ja B) noudattivat selvästi äsken kuvailtua teoriaa, mistä voidaan päätellä: Polarisaation heikko mittaus *ei* riipu post-valinnasta. Täten tulevaisuus *ei* vaikuta mittaustuloksiin (ainakaan polarisaation tapauksessa), vaan pikemminkin siihen, mistä kuvakulmasta ne näkee.

## 4 Sekoitettu polarisaatiotila

Heikko mittausteoria vaikuttaisi edellisten lukujen perusteella ennustavan oikein hyvin puhtaiden polarisaatiotilojen käyttäytymisen koherenttia valoa tarkastellessa. Jos valo sattuu kuitenkin olemaan kaoottista, kuten se luonnossa useimmiten on, voi myös polarisaatioon helposti kuvitella syntyvän jonkinlaista epäjärjestystä; Puhdas polarisaatiotila muuttuu sekoitetuksi, ja Blochin yksikkövektori lyhenee nimikkopallonsa sisään. Sekoitettujen tilojen tarkastelua motivoi myös *Kählerin monistoon* liittyvä tutkimus [27, 41, s. 6]. Kyseessä on eräänlainen kvanttimekaaninen tila-avaruus, johon fideliteetin kaava (2.4.10) oleellisesti liittyy niin sanotun *Fubini-Studyn metriikan* kautta. Näin ollen on yleistettävissä, että optisen vorteksin liike voisi mallintaa Kählerin moniston geometrista rakennetta myös sekoitettujen tilojen tapauksessa [42].

Sekoitettua kvanttimekaanista tilaa ei voi karakterisoida ket-vektorilla, vaan se täytyy lausua (ei välttämättä puhtaiden) tiheysmatriisien konveksikombinaationa [3, s. 52–53]:

$$\rho_{\text{sekoitettu}} = \sum_i \lambda_i \rho_i, \sum_i \lambda_i = 1, \lambda_i \in [0, 1] \forall i \in \mathbb{N}. \quad (4.0.1)$$

On helposti osoitettavissa, että yllä olevan lausekkeen voi redusoida myös vain kahdesta tiheysmatriisista koostuvaan muotoon [3, s. 52]:

$$\rho_{\text{sekoitettu}} = \lambda \rho_1 + (1 - \lambda) \rho_2, \lambda \in [0, 1]. \quad (4.0.2)$$

Joka tapauksessa se, että sekoitettuja tiloja ei voi kirjoittaa pelkkinä vektoreina, vaikuttaa huomattavasti heikkoon mittaukseen. Väite on perusteltu, sillä pre-valittu tila heikon arvon kaavassa (1.2.14) on juuri ket-vektori! Tässä toiseksi viimeisessä luvussa tarkastellaankin, kuinka sekoitettuja tiloja tulisi käsitellä niin teoriassa kuin käytännössä ja Blochin vektori paikantaa Blochin pallon sisään.

### 4.1 Sekoitettun tilan heikko arvo ja minimaalinen suure

Mikäli jotkin tilat  $\rho_i$  konveksikombinaatiossa (4.0.1) ovat sekoitettuja, voidaan niille puolestaan löytää puhtaista tiloista koostuva konveksihajotelma, jolloin tietysti alkuperäisenkin  $\rho_{\text{sekoitettu}}$  on esitettävissä yksiulotteisten projektioitten  $P_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$  kombinaationa. Sekoitettun polarisaatiotilan tapauksessa tämä johtaa esitysmuotoon:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{sekoitettu}} &= \lambda_1 |H\rangle\langle H| + \lambda_2 |V\rangle\langle V| + \lambda_3 |D\rangle\langle D| + \lambda_4 |A\rangle\langle A| + \lambda_5 |R\rangle\langle R| + \lambda_6 |L\rangle\langle L| \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (\lambda_6 - \lambda_5) & (\lambda_1 - \lambda_2) - i(\lambda_4 - \lambda_3) \\ (\lambda_1 - \lambda_2) + i(\lambda_4 - \lambda_3) & 1 - (\lambda_6 - \lambda_5) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$



Bloch'n vektori  $\vec{r}_{\text{Bloch}}$  voidaan siis kirjoittaa seuraavasti:

$$\vec{r}_{\text{Bloch}} = (r_x, r_y, r_z) = ((\lambda_1 - \lambda_2), (\lambda_4 - \lambda_3), (\lambda_6 - \lambda_5)). \quad (4.1.2)$$

Jos heikossa mittauksessa pre-valitaankin tällainen tila, tulisi vektori  $|\eta_{\text{PRE}}\rangle$  periaatteessa vaihtaa tiheysmatriisiksi  $\sum_i \lambda_i |\eta_{i,\text{PRE}}\rangle \langle \eta_{i,\text{PRE}}|$  sivujen 11–12 laskuissa. Sekoitettun tilan statistinen luonne ja heikon arvon kaikki ominaisuudet voidaan kuitenkin saavuttaa myös seuraavalla, varsin luontevalla määritelmällä; Olkoon *sekoitetun tilan heikko arvo* tavallisten heikkojen arvojen painotettu keskiarvo:

$$A_{w,\text{sekoitettu}} \equiv \sum_i \lambda_i \frac{\langle \varphi_{\text{POST}} | \hat{A} \eta_{i,\text{PRE}} \rangle}{\langle \varphi_{\text{POST}} | \eta_{i,\text{PRE}} \rangle}, \quad (4.1.3)$$

missä luvut  $\lambda_i$  ovat puhtaiden tilojen kertoimia sekoitetun tilan konveksikombinaatioissa. Määritelmä on looginen, sillä se palautuu kaavaan (1.2.14), jos jokin luvuista  $\lambda_i$  on 1. Määritelmässä on oletettu, että post-valittu tila on puhdas. Päinvastainen tapaus jätetään tämän tutkielman ulkopuolelle.

Jos sekoitetun tilan konveksihajotelman yksiulotteiset projektiot ovat keskenään myös ortogonaalisia ( $P_j P_k = \delta_{jk} P_j$ ), puhutaan *kanonisesta konveksihajotelmasta* [3, s. 51]. Qubitin eli esimerkiksi polarisaation tapauksessa tämä tarkoittaa rajoittumista jollekin Bloch'n pallon pääakseleista. Jos sekoitetaan vaikkapa horisontaalista ja vertikaalista polarisaatiota, mihin loppu tutkielmassa keskitytään, saadaan tiheysmatriisiksi merkinnöillä  $\lambda_1 = \lambda$  ja  $\lambda_2 = 1 - \lambda$  (vrt. kaava (4.1.1)):

$$\rho_{\text{sekoitettu}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda - 1 \\ 2\lambda - 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.4)$$

ja heikoksi arvoksi:

$$A_{w,\text{sekoitettu}} \equiv \lambda \frac{\langle \varphi_{\text{POST}} | \hat{A} H \rangle}{\langle \varphi_{\text{POST}} | H \rangle} + (1 - \lambda) \frac{\langle \varphi_{\text{POST}} | \hat{A} V \rangle}{\langle \varphi_{\text{POST}} | V \rangle}. \quad (4.1.5)$$

Ennen kuin lähdetään laskemaan sen eksplisiittisempiä heikkoja arvoja tietyn post-valinnoin, tarkastellaan, miten nämä post-valinnat olisi kannattavinta valita. Puhtaiden tilojen tapauksessa valittiin  $|R\rangle$ , ja tämä riitti, sillä tilojen tiedettiin sijaitsevan Bloch'n pallon pinnalla, Bloch'n vektorin ollessa pituudeltaan yksi. Nyt tila voikin sijaita missä tahansa Bloch'n pallon sisällä, joten yhden optisen vorteksin paikka vastaa ääretöntä määrää sekoitettuja tiloja. Tästä syystä post-valintoja on suoritettava useampia.

Kahden voisi kuvitella riittävän – sekoitettu tila sijaitsee tällöin projektioiden leikkauspisteessä. Jos tila on täysin tuntematon, voidaan kuitenkin ajautua tilanteeseen, jossa tila on post-valittuja tiloja yhdistävällä suoralla. Tällöin projektiot ovat päällekkäisiä, ja mahdollisia tiloja on taas ääretön määrä. Tämä motivoi kolmannen post-valinnan, jolloin tietyistä reunaehdoista seuraa itse asiassa neljäskin. Neljän post-valinnan suorittaminen juontaa juurensa Řeháčekin, Englertin ja Kaszlikowskin paperiin vuodelta 2004 [43]. Siinä he määrittivät niin sanotun *minimaalisen positiivioperaattoriarvoisen mitan* eli kansantajuisemmin *suureen*.

Mahdollisesti sekoitetun (kaksiulotteisen) tilan määrittäminen vaatii normaalisti kuusi mittausta, yhden kunkin  $\lambda_i$  määrittämiseksi kaavoissa (4.1.1) ja (4.1.2). Esimerkki tällaisesta mittaussarjasta on eri intensiteettien mittaaminen tavanomaisessa polarisaatiotomografiassa, eli Stokesin parametreja määriteltäessä (ks. s. 24). Jos kaikki kolme kantaa ovat yhtä todennäköisiä, merkitsee tämä mittaustulostodennäköisyyksiä:

$$p_{\xi\pm} = \frac{1}{6}(1 \pm r_{\xi}), \quad (4.1.6)$$

missä  $r_{\xi}$  on yksi Blochin vektorin komponenteista, ja plus- tai miinusmerkki kertoo, kumpaa kantavektoria on mitattu (polarisaatioissa  $|H\rangle$  tai  $|V\rangle$ ,  $|D\rangle$  tai  $|V\rangle$ ,  $|R\rangle$  tai  $|L\rangle$ ). Näin voidaan konstruoida kolmannesprojektiot:

$$\hat{P}_{\xi\pm} = \frac{1}{6}(\mathbb{1} \pm \hat{\sigma}_{\xi}), \quad \xi = x, y, z, \quad (4.1.7)$$

jotka yhdessä summautuvat identiteetiksi ja muodostavat *kuusitilatografian standardisuureen*.

Artikkelissaan [43] Řeháček *et al.* muodostivat minimaalisen suureen tetraedrin symmetrisiä normaalivektoreita käyttämällä. Niitä on kuuden sijasta neljä, ja niille pätee:

$$\vec{a}_j \cdot \vec{a}_k = \frac{4}{3}\delta_{jk} - \frac{1}{3}, \quad (4.1.8)$$

jolloin voidaan määritellä uusi suure:

$$\hat{P}_j = \frac{1}{4}(\mathbb{1} + \vec{a}_j \cdot \vec{\sigma}). \quad (4.1.9)$$

Koska Blochin vektorin komponentit ovat matriisien  $\hat{\sigma}_{\xi}$  kertoimia, saadaan juuri määritellyn suureen mittaustulostodennäköisyydet kaavalla:

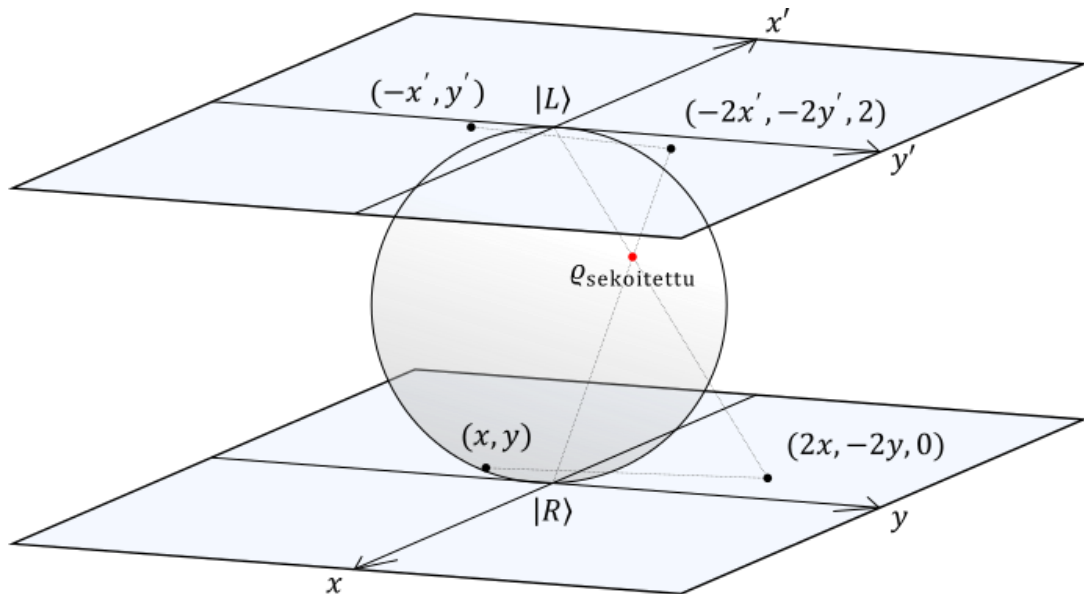
$$p_j = \frac{1}{4}(1 + \vec{a}_j \cdot \vec{r}_{\text{Bloch}}). \quad (4.1.10)$$

$\vec{r}_{\text{Bloch}}$  on nyt helposti laskettavissa:

$$\begin{aligned}
(4.1.8) &\Rightarrow \delta_{jk} = \frac{1}{4}(1 + 3\vec{a}_j \cdot \vec{a}_k) \quad || \quad \cdot \quad 4p_k \\
&\Leftrightarrow \delta_{jk}(1 + \vec{a}_k \cdot \vec{r}_{\text{Bloch}}) = (1 + 3\vec{a}_j \cdot \vec{a}_k)p_k \quad || \quad \sum_k ( ) \\
&\Leftrightarrow 1 + \vec{a}_j \cdot \vec{r}_{\text{Bloch}} = 1 + \vec{a}_j \cdot 3 \sum_k p_k \vec{a}_k \\
&\therefore \vec{r}_{\text{Bloch}} = 3 \sum_k p_k \vec{a}_k \tag{4.1.11}
\end{aligned}$$

Siis, kuten Kobayashi *et al.* artikkelissaan [27] lyhykäisesti toteavatkin, Řeháčekin *et al.* työhön [43] viitaten, tulee mielivaltaisen qubitin selvittämiseksi preparoida neljä kuvaustasoa! Tämä tarkoittaa luonnollisesti neljää eri post-valintaa<sup>9</sup>. Jos mitattavasta tilasta on etukäteen edes jonkinlaista informaatiota, voidaan post-valintoja käytännössä tehdä vain kaksi, ja vasta tilan ylittäessä näitä yhdistävä viiva preparoida kaksi kuvaustasoa lisää. Havainnollistetaan tätä laskemalla sekoitetun polarisaatiotilan tiheysmatriisi ensin pelkillä post-valinnoilla  $|L\rangle$  ja  $|R\rangle$ .

Kuten puhdasta tilaa tarkasteltaessa, vastaa tilaa  $|L\rangle$  nytkin piste  $(0, 0, 2)$ . Vastaavasti  $|R\rangle \sim (0, 0, 0)$ . Oletetaan, että mittaustuloksiksi (eli optisten vorteksin sijainneiksi) saadaan ensimmäisessä tapauksessa  $(x, y)$  ja jälkimmäisessä  $(x', y')$ , joka ensimmäisen koordinaatistoon upotettuna muuntuu pisteeksi  $(-x', y')$ . Tehdään vielä samat muunnokset kuin toisessa luvussa ja otetaan huomioon z-suunta, jolloin saadaan pisteet  $(2x, -2y, 0)$  ja  $(-2x', -2y', 2)$ .



**Kuva 24.** Kaksinkertainen projektio sekoitetun tilan löytämiseksi.

<sup>9</sup> Joko Kobayashi *et al.* eivät tehneet kyseisiä kokeita, tai sitten he ainakin jättivät ne raportoimatta [27].

Pisteitä  $(0, 0, 2)$  ja  $(2x, -2y, 0)$  sekä  $(0, 0, 0)$  ja  $(-2x', -2y', 2)$  yhdistävien viivojen leikkauspisteessä vallitsevasta yhtälöryhmästä saadaan ratkaistua  $r_x$ ,  $r_y$  ja  $r_z$ :

$$\begin{cases} r_x = 2sx = -2tx' \\ r_y = -2sy = -2ty' \\ r_z + 1 = 2 - 2s = 2t \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 - s \Leftrightarrow sx = (s - 1)x' \Leftrightarrow s = \frac{x'}{x' - x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_x = \frac{2x'x}{x' - x} \\ r_y = -\frac{2x'y}{x' - x} \\ r_z = -\frac{x' + x}{x' - x} \end{cases} \quad (4.1.12)$$

Tiheysmatriisiksi saadaan komponentit  $r_x$ ,  $r_y$  ja  $r_z$  matriisiin (2.1.4) sijoittamalla:

$$\rho_{\text{sekoitettu}} = \frac{x'}{x' - x} \begin{pmatrix} -x/x' & x + iy \\ x - iy & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.13)$$

Tästä matriisista voi tehdä kaksi huomiota. Ensinnäkin, kun sekoitetaan pelkästään tiloja  $|H\rangle$  ja  $|V\rangle$ , tulisi teoriassa  $x = -x'$  ja  $y = 0$ . Tällöin matriisi (4.1.13) sievenee muotoon:

$$\rho_{\text{sekoitettu}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.1.14)$$

joka on matriisin (4.1.4) kanssa yhteensopiva, jos määritellään  $x = 2\lambda - 1$ . Määritelmä on järkevä, sillä sekä post-valinnalla  $|L\rangle$  että  $|R\rangle$  voidaan tämä identifioida juuri polarisaation heikoksi arvoksi horisontaalista ja vertikaalista polarisaatiota sekoitettaessa:

$$\begin{cases} \sigma_{x_w, \text{sekoitettu}}(L) = \lambda \frac{\langle 0|(0)\langle 1| + |1\rangle\langle 0|(0) + |1\rangle}{\langle 0|(0) + |1\rangle} + (1 - \lambda) \frac{\langle 0|(0)\langle 1| + |1\rangle\langle 0|(0) - |1\rangle}{\langle 0|(0) - |1\rangle} \\ \sigma_{x_w, \text{sekoitettu}}(R) = \lambda \frac{\langle 1|(0)\langle 1| + |1\rangle\langle 0|(0) + |1\rangle}{\langle 1|(0) + |1\rangle} + (1 - \lambda) \frac{\langle 1|(0)\langle 1| + |1\rangle\langle 0|(0) - |1\rangle}{\langle 1|(0) - |1\rangle} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_{x_w, \text{sekoitettu}}(L) = 2\lambda - 1 \\ \sigma_{x_w, \text{sekoitettu}}(R) = 2\lambda - 1 \end{cases} \quad (4.1.15)$$

Toinen huomion arvoinen seikka matriisissa (4.1.13) on se, että kun koordinaatit  $x$ ,  $x'$ ,  $y$  ja  $y'$  lähestyvät nollaa, saadaan kyllä maksimaalisesti sekoitettu tila  $\frac{1}{2}\mathbb{1}$ , kuten voisi olettaa, mutta yhtä hyvin polarisaatio voisi kokea "kvanttihypyn" jonnekin muualle Blochin pallon z-akselia, eikä heikko mittaus post-valinnoilla  $|L\rangle$  ja  $|R\rangle$  kykenisi erottamaan sitä! Tästä syystä, mikäli seuraavan kappaleen mittauksessa saadaan pisteet  $(x, y) = (0, 0)$  ja  $(x', y') = (0, 0)$ , tehdään tarkistusmittaus uusilla post-valinnoilla  $|H\rangle$  ja  $|V\rangle$ . Jos näinkin saadaan maksimaalisesti sekoitettu tila, voidaan alkuperäiset mittaustulokset säilyttää. Jos taas z-koordinaatille saadaan nollassa eriävä arvo, kirjataan ylös uudet matriisielementit.

## 4.2 Sekoitettun tilan tuottaminen ja heikko mittaus

Yksinkertaisimmillaan polarisaatiotila on sekoittunut ajassa ja/tai paikassa. Joko puhtaat polarisaatiot siis vaihtelevat ajallisissa ”purskeissa” (jotka voivat olla täysin sattumanvaraisia<sup>10</sup>), tai tietyssä havaintokulmassa  $\alpha$  voidaan aina havaita tiettyä puhdasta polarisaatiota, joka mahdollisesti muuttuu kulmassa  $\alpha + d\alpha$ . Tai sitten kumpikin näistä tapahtuu, jolloin valo on polarisaatioltaan täysin kaoottista. Kun puhutaan hyvin pienistä havaintokulmista, voi spatiaalisen polarisaatiojakauman hallittu tuottaminen osoittautua melko haastavaksi tehtäväksi laboratorio-olosuhteissakin. Siksi tämän tutkielman viimeisessä koejärjestelyssä turvaudutaan temporaaliseen vaihtoehtoon.

Käytännössä polarisaation ajallinen sekoittaminen toteutettiin sähköisesti kontrolloitavan nestekide- eli LC-aaltolevyn (Thorlabs, LCC1111-B,  $\lambda=650\text{--}1050\text{nm}$ ) avulla. Kyseinen levy toimi puolialtolevynä, kun se kytkettiin amplitudiltaan 1,371 V olevaan vaihtojännitteeseen, ja sitä tavallisempaan ”nolla-aaltolevynä”, mitä korkeampaan jännitteeseen se oli kytketty. Täksi jännitteeksi valittiin 20,000 V. Levy asennettiin 45 asteen kulmassa tavallisen puolialtolevyn paikalle ensimmäisessä puhtaita tiloja koskevissa koejärjestelyissä. Käytettävä valonlähde oli sama kuin edellisessä luvussa, joten kun LC-aaltolevyn jännite vaihteli välillä 1,371–20,000 V, saatiin valon polarisaatio vaihtelevaan välillä  $|V\rangle\text{--}|H\rangle$ , vastaavasti.

Tavoitteena oli liikkua Blochin pallon halkaisijaa pitkin  $|H\rangle$ :sta  $|V\rangle$ :hen. LC-aaltolevyn kontrolleri (Thorlabs, LCC25) tuotti 1,371- ja 20,000-volttisia pulsseja kuitenkin samassa suhteessa, mikä olisi väistämättä johtanut vain maksimaalisesti sekoitettuun tilaan. Tämän vuoksi kontrolleri kytkettiin ulkoiseen pulssigeneraattoriin (Thurlby Thandar Instruments, TGP110 10 MHz Pulse Generator), jolla pulssien suhdetta kyettiin muuttamaan. Kahden eri pulssin yhteiskestoksi valittiin 72,446 millisekuntia, mikä vastaa likimain taajuutta 14 Hz. ”Sekoituskerroin”  $\lambda$  lausekkeessa  $\lambda|H\rangle\langle H| + (1 - \lambda)|V\rangle\langle V|$  totelee täten yhtälöä:

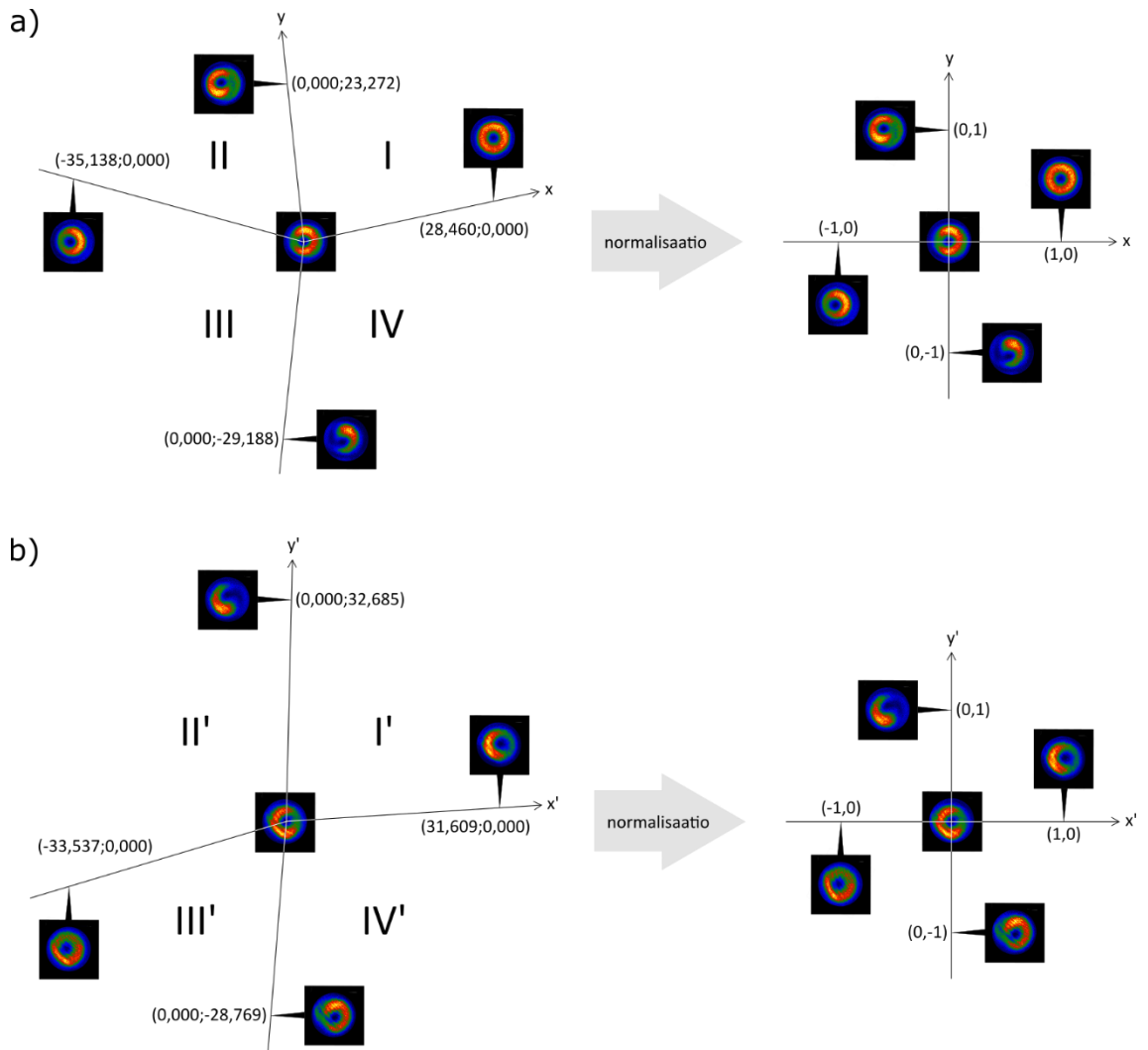
$$\lambda = \frac{t_{20,000V}}{72,446 \text{ ms}} = 1 - \frac{t_{1,371V}}{72,446 \text{ ms}}. \quad (4.2.1)$$

Korkeammilla taajuuksilla CCD-kamera ei havainnut selkeää optista vorteksiä, vaikka sen valotusaika säädettiin oletusarvoisen 0,009988 sekunnin sijasta 1,000000 sekuntiin<sup>11</sup>. Tämä saattoi johtua LC-aaltolevyn molekyylien rajallisesta järjestymisnopeudesta.

<sup>10</sup> Tällöin mittausaika vaikuttaa ratkaisevasti mittaustuloksiin, sillä puhtaiden polarisaatioiden osuudet ajanhetkellä  $t + dt$  voivat olla aivan erilaiset kuin ajanhetkellä  $t$ !

<sup>11</sup> Valotusaikaa pidennettiin juuri luotettavamman statistiikan saavuttamiseksi. Samalla CCD-kameran eteen asennettiin vielä yksi neutraalisuodin (ND = 3,0).

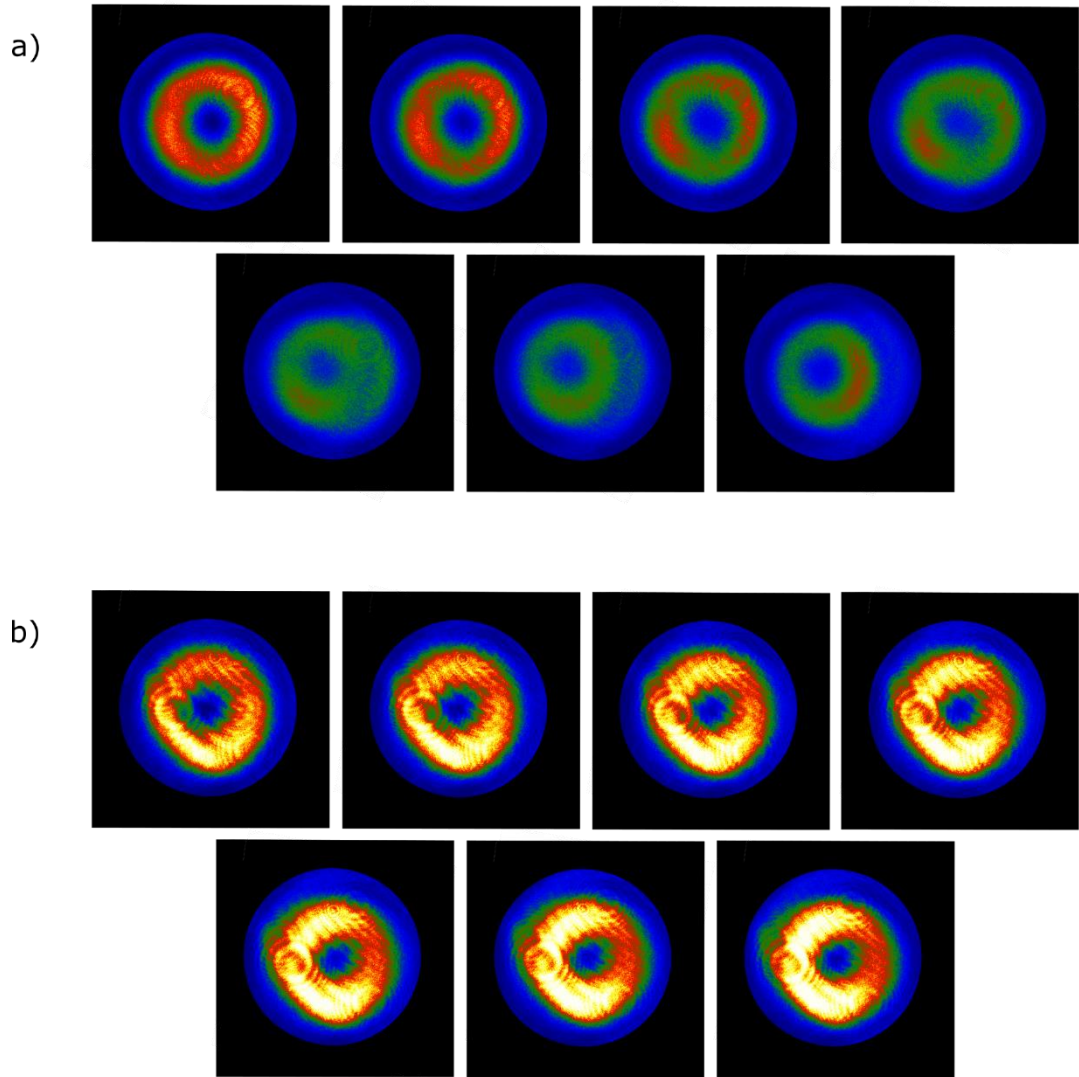
Ensin määriteltiin kaksi eri koordinaatistoa. Ensimmäisessä origona oli  $|R\rangle$ , kuten aiemmin, ja toisessa origona oli  $|L\rangle$ . Jälkimmäinen post-valinta onnistui kääntämällä kuvan 10 käännettävä peili alas. Kiintopisteet  $|H\rangle$ ,  $|D\rangle$ ,  $|V\rangle$  ja  $|A\rangle$  saatiin kuten aiemmin, mutta nyt LC-aaltolevyä puolitai neljännesaaltolevynä (2,229 V) käyttäen. Koordinaatistot ja normalisointitekijät on esitetty kuvassa 25.



**Kuva 25.** Koordinaatistot post-valinnoilla a)  $|R\rangle$  ja b)  $|L\rangle$ .

- a) Origossa sijaitsee tila  $|R\rangle$ , pisteessä (1, 0)  $|H\rangle$ , pisteessä (0, 1)  $|D\rangle$ , pisteessä (-1, 0)  $|V\rangle$  ja pisteessä (0, -1)  $|A\rangle$ .  
 b) Origossa sijaitsee tila  $|L\rangle$ , pisteessä (1, 0)  $|V\rangle$ , pisteessä (0, 1)  $|D\rangle$ , pisteessä (-1, 0)  $|H\rangle$  ja pisteessä (0, -1)  $|A\rangle$ .

Kummankin post-valinnan tapauksessa CCD-kameralla otettiin seitsemän eri kuvaa, 1,371-voltin pulssin ollessa kestoaltaan 5, 15, 25, 35, 45, 55 ja 65 millisekuntia. Merkittävästi 5 ms lyhyempiä tai 65 ms pidempiä pulsseja ei pulssigeneraattorilla voitu tuottaa, ja 10 ms katsottiin riittäväksi intervalliksi. Saadut mittaustulokset on esitetty seuraavaksi sekä kuvin että optisten vorteksien normalisoidut sijainnit taulukoituna.



**Kuva 26.** Optiset vorteksit post-valinnoilla a)  $|R\rangle$  ja b)  $|L\rangle$ , ja ajan  $t_{1,371V}$  kasvaessa tasaisesti vasemmalta oikealle, ylhäältä alas, 5 ms  $\rightarrow$  65 ms.

**Taulukko 10 a.** Sekoitetun tilan mittaustulokset post-valinnalla  $|R\rangle$ .

$t_{1,371V}/\text{ms}$	X/px	Y/px	Neljännes	x	y
5	30,995	-0,326	IV	1,089	-0,011
15	29,432	0,513	I	1,034	0,022
25	17,849	3,692		0,627	0,159
35	11,616	6,999		0,408	0,301
45	-6,022	5,039	II	-0,171	0,217
55	-26,350	2,626		-0,750	0,113
65	-35,374	3,753		-1,007	0,161

**Taulukko 10 b.** Sekoitetun tilan mittaustulokset post-valinnalla  $|L\rangle$ .

$t_{1,371V}/\text{ms}$	$\mathbf{X}'/p_x$	$\mathbf{Y}'/p_x$	Neljännes	$x'$	$y'$
5	-26,197	-2,144	III'	-0,781	-0,075
15	-19,981	-3,191		-0,596	-0,111
25	-10,884	-2,445		-0,325	-0,085
35	-4,030	-1,828		-0,120	-0,064
45	2,964	-4,608	IV'	0,094	-0,160
55	8,707	-2,702		0,275	-0,094
65	13,455	-4,007		0,426	-0,139

Lopputuloksina ilmoitetaan Blochin vektorin muodostavat komponentit  $r_x, r_y, r_z$ , jotka saadaan yhtälöryhmästä (4.1.12). Polarisaation määrittelevät kaksi (kompleksi)lukua ovat tällöin tietysti  $r_x + ir_y$  ja  $r_z$ . Vertailun vuoksi seuraavaan taulukkoon on lisäksi laskettu  $r_x$ :n teoreettiset arvot. Nämä ovat:

$$r_{x,\text{teor.}} = 2\lambda - 1 = 1 - \frac{t_{1,371V}}{36,223 \text{ ms}}. \quad (4.2.2)$$

Blochin pallon  $|H\rangle$ :ta ja  $|V\rangle$ :tä yhdistävällä halkaisijalla  $r_{y,\text{teor.}} = r_{z,\text{teor.}} = 0$ .

Fideliteetit saadaan sekoitetun tilan tapauksessa kaavasta:

$$F = \left( \text{tr} \left[ \sqrt{\sqrt{\rho_{\text{teor.}}} \rho_{\text{kok.}}} \sqrt{\rho_{\text{teor.}}} \right] \right)^2, \quad (4.2.3)$$

joka matriiseja (4.1.13) ja (4.1.14) kokeellisena ja teoreettisena matriisina käyttämällä sievenee todella yksinkertaiseen muotoon:

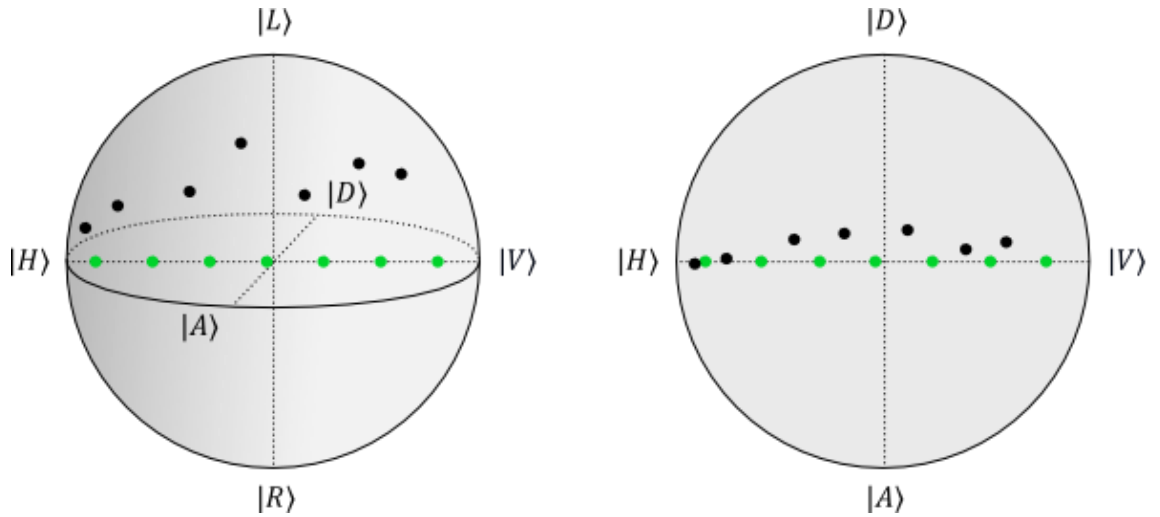
$$F = \frac{(\sqrt{|x|} + \sqrt{|x'|})^2}{2|x-x'|}. \quad (4.2.4)$$

**Taulukko 11.** Sekoitetun tilan lopputulokset, teoreettiset  $r_x$ :t ja fideliteetit.

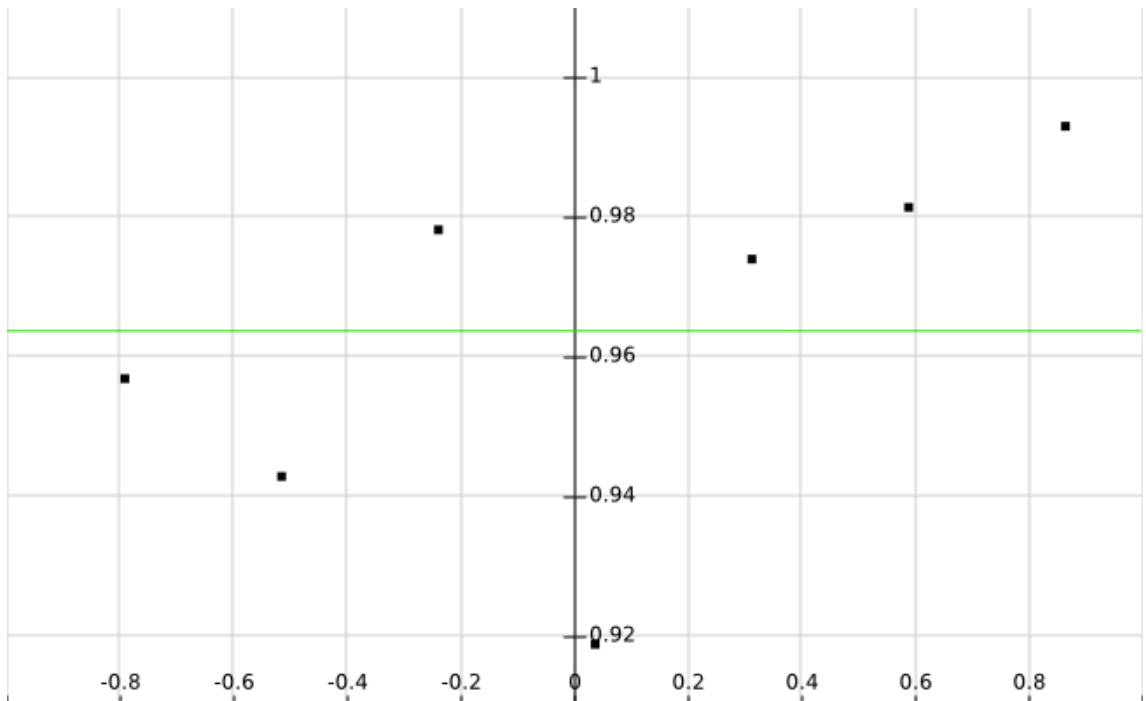
$t_{1,371V}/\text{ms}$	$r_x$	$r_y$	$r_z$	$r_{x,\text{teor.}}$	$F$
5	0,910	0,009	0,165	0,862	0,993
15	0,756	-0,016	0,269	0,586	0,982
25	0,428	-0,109	0,317	0,310	0,974
35	0,185	-0,137	0,545	0,034	0,919



45	-0,121	-0,154	0,291	-0,242	0,978
55	-0,402	-0,061	0,463	-0,518	0,943
65	-0,599	-0,096	0,405	-0,794	0,957
					$F_{av.} \approx 0,964$



**Kuva 27.** Sekoitetun tilan lopputulokset (mustat pisteet) ja teoreettiset arvot (vihreät pisteet) Blochin pallolle visualisoituina, kahdesta eri kuvakulmasta.



**Kuva 28.** Sekoitetun tilan fideliteetit ja niiden keskiarvo, 0,964. Vaaka-akselilla  $r_x$ :t.

Selvästikään sekoitettuja tiloja koskeva koe ei ollut yhtä onnistunut kuin puhtaiden tilojen tapauksessa edellisessä luvussa. Tavoite pysyä halkaisijalla HV ei täyttynyt. Toisaalta, huomattavaan z-suuntaiseen hajontaan verrattuna y-suuntainen hajonta oli todella pientä, eikä x-suunnassakaan tultu teoreettisia arvoja paljon jäljessä. Tämä olikin itse asiassa mielenkiintoinen havainto; Jokainen havaintopiste oli teoreettista vastinettaan enemmän horisontaalisen polarisaation puolella. Kokeen sekoitusmenetelmässä  $|H\rangle$  näyttäisi siis dominoivan.

Puhtaita tiloja pienemmille fideliteeteille löytyy kaksi loogista selitystä, toki edellisessä luvussa mainittujen virhetekijöiden lisäksi. Ensinnäkin, nyt liikuttiin Blochin pallon sisällä, jolloin virrehavaintojen mahdollisuus moninkertaistui (kolmiulotteinen ympäristö >> kaksiulotteinen ympäristö). Toiseksi, korkeajännitteisempi pulssi ei aivan vastannut ideaalista ”nolla-aaltolevyä”. LC-aaltolevyn mukana tulleesta retardaatio/jännite-kuvaajasta (liite C) voi lukea, että 20,000 voltilla aaltolevy toimi likimain ” $\frac{\lambda}{40}$ -aaltolevynä” eli neljännesaaltolevyn kymmenyksenä. Todennäköisesti tästä syystä kokeellinen rata Blochin pallon sisällä kaareutui kohti sen pohjoisnapaa, ja LG-moodit kuvassa 26 eivät olleet yhtä kirkkaita eri post-valinnoin. Koska vastaavaa koetta ei ole aiemmin tehty, eivät tuloksetkaan luonnollisesti olleet verrattavissa mihinkään aiempaan.

## 5 Yhteenveto

Jos koordinaatisto vain tunnetaan, on puhtaan polarisaatiotilan osoitettu olevan mahdollista mitata suoraan ja melko luotettavasti optisen vorteksin sijainnista. Alkuperäistyössä ja tässä tutkielmassa saadut fideliteetit olivat samat ja todella korkeat! Herääkin luonnollinen jatkokysymys: Miten tätä mittauseräilyä voisi soveltaa? Tietysti laservaloa voisi himmentää vaikka yksifotonivalon rajalle saakka, jolloin päästään käsiksi yksittäisten fotonien statistiikkaan. Fotoneita on kuitenkin oltava riittävästi, sillä yhdestä fotonista ei heikon mittauksen takia juuri informaatiota saada. Optinen vorteksi on kyettävä erottamaan. Jo aiemminkin todettiin: ”Käytännössä heikkoja mittauksia tulee suorittaa monta, sillä häiriön ollessa pientä mittaustuloksiin liittyvä epävarmuus on valtavaa.” Toisaalta, aidosti yksittäisen fotonin tapauksessa lohdullista on se, että sen tiedetään olevan joko oikea- tai vasenkätisesti ympyräpolarisoitunut.

Yksi ilmeinen etu tutkielman mittauksessa on kvanttimekaanisen tilan tuhoutumattomuus. Vaihetekijällä kertomista lukuun ottamatta polarisaatiotila säilyy muuttumattomana aina post-valintaan saakka. Intuition mukaan tila voisi tässä vaiheessa tuhoutua, mutta koska optisen vorteksin nähdään selvästi liikkuvan CCD-kameralla post-valinnan *jälkeen*, ei tila ole voinut romahtaa post-valituksi horisontaaliseksi polarisaatioksi<sup>12</sup>. Tila onkin ikään kuin vain jakautunut kahtia – vertikaalisen polarisaation jatkaessa polarisoivasta säteenjakajasta toiseen suuntaan – ja se on erittäin helposti rekonstruoitavissa. Toisestakin PBS:stä voidaan lisäpeilillä sopivasti käyttämällä tehdä nimittäin Sagnac-interferometri, ja kulmassa  $-45^\circ$  oleva neljännesaaltolevy kumoaisi post-valintaan osallistuneen neljännesaaltolevyn ( $45^\circ$ ) vaikutuksen. Tällaiset muutokset olisi helppo toteuttaa esimerkiksi käännettävällä peilillä, ja tila  $|\psi\rangle$  olisi taas varmasti ennallaan!

Jos siis halutaan tuottaa juuri tietynlaisia polarisaatiotiloja, tarjoaa tämän tutkielman mittauseräily sellaisen testaamiseen varsin vaivattoman vaihtoehdon. Tiettyjä kaksiulotteisia tiloja eli *qubitteja* voidaan tarvita esimerkiksi kvanttikryptografian ja kvantti-informaation tutkimusaloilla. Kehitteillä olevan kvanttietokoneenkin voisi tästä syystä kuvitella hyötyvän heikosta mittauksesta. Kobayashi *et al.* ovat itse ehdottaneet heikkoa mittausta sovellettavaksi kvanttidynamiikan ja kvanttikorrelaation tutkimuksessa.

---

<sup>12</sup> Tällainen kuvauseräily muistuttaa itse asiassa hieman *haamukuvausta*, jossa kuva muodostetaan epäsuorasti sellaisista fotoneista, jotka eivät osu kuvattavaan kohteeseen, mutta korreloivat vahvasti tällaisten kanssa [44].

Myöskin hyvin onnistunut sekoitetun tilan heikko mittaus on sovellettavissa, joskin pienin varauksin. Blochin pallon sisällä valon polarisaatioon pakattavan informaation määrä moninkertaistuu. Samalla voi kuitenkin kasvaa myös informaation ”luku-aika”. Esimerkiksi tämän tutkielman yhteydessä kyseinen aika oli minimissään 72,446 millisekuntia, mikä olisi kvanttietokoneelta ehdottomasti liikaa – puhumattakaan siitä, että luotettavan statistiikan saamiseksi tulisi oikean lukuajan olla tämän jokin monikerta. Kvantti-informaation sovelluksissa kannattaisikin siis joko pienentää tätä aikaa (eli sekoittaa polarisaatioita hyvin nopeasti) tai pitäytyä puhtaissa tiloissa. Toisaalta, sekoitettuihin tiloihin liittyvä tutkimus on vasta saamassa tuulta alleen. Tämäkin tutkielma käynee jonkinlaisesta pioneerityöstä kyseisellä saralla!

Kuten mainittua, voi niin puhtaana kuin sekoitetun tilan stereograafinen projektio visualisoida Kählerin monistoa. Ehkä ilmeisin sovelluskohde sekoitettuja tiloja koskevalle mittausmallille on kuitenkin polarisaation puhtauden ja täten valon kaoottisuuden testaus. Mikäli lyhyeen koherenssipituuteen liittyvät tekniset ongelmat kyettäisiin joskus ratkaisemaan, olisi polarisaation heikko mittaus oiva tapa karakterisoida aidosti termisen valon kvanttimekaanista koherenssia.

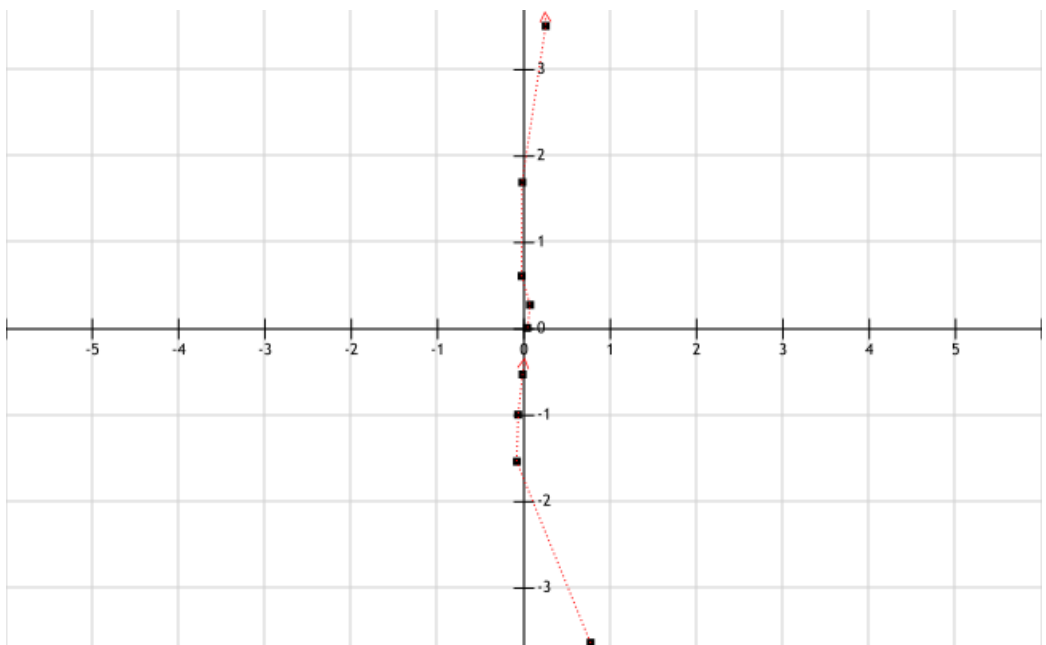
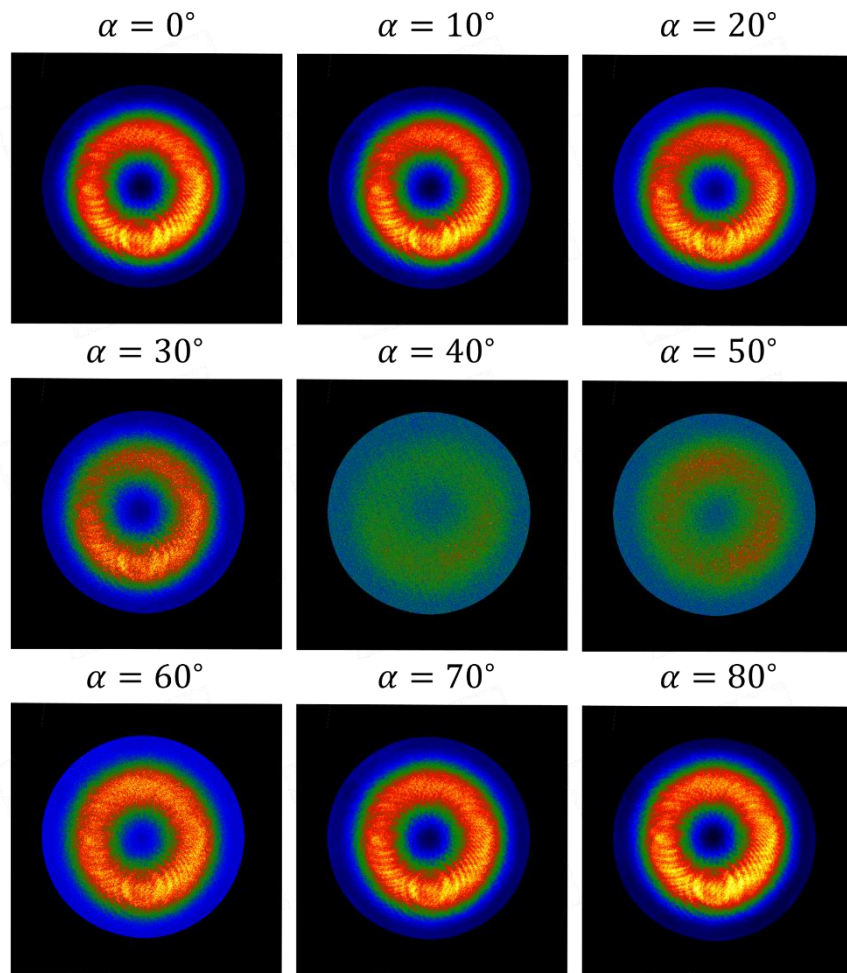
## Lähdeluettelo

- [1] J. von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics*, toim. Princeton University Press (1955).
- [2] A. M. Gleason, *Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space*, Indiana University Mathematics Journal, **6**(4), 885 (1957).
- [3] T. Heinosaari ja M. Ziman, *The Mathematical Language of Quantum Theory: From Uncertainty to Entanglement*, toim. Cambridge University Press (2011).
- [4] A. Bassi, K. Lochan, S. Satin, T. P. Singh ja H. Ulbricht, *Models of Wave-function Collapse, Underlying Theories, and Experimental Tests*, Reviews of Modern Physics, **85**(2), 471 (2013).
- [5] S. P. Walborn, M. O. Terra Cunha, S. Pádua ja C. H. Monken, *Double-slit quantum eraser*, Physical Review A, **65**(3), 033818 (2002).
- [6] P. Busch, "No Information Without Disturbance": Quantum Limitations of Measurement, W. C. Myrvoldin ja J. Christianin esseekoelma, *Quantum Reality, Relativistic Causality, and Closing the Epistemic Circle*, toim. Springer-Verlag (2008).
- [7] P. Busch, P. J. Lahti ja P. Mittelstaedt, *The Quantum Theory of Measurement*, toim. Springer-Verlag (1996).
- [8] Y. Aharonov, D. Z. Albert ja L. Vaidman, *How the Result of a Measurement of a Component of the Spin of a Spin- $\frac{1}{2}$  Particle Can Turn Out to be 100*, Physical Review Letters, **60**(14), 1351 (1988).
- [9] Y. Aharonov, P. G. Bergmann ja J. L. Lebowitz, *Time Symmetry in the Quantum Process of Measurement*, Physical Review, **134**(6B), B1410 (1964).
- [10] S. Watanabe, *Symmetry of Physical Laws, Part III, Prediction and Retrodiction*, Reviews of Modern Physics, **27**(2), 179 (1955).
- [11] Z. Merali, *Back From the Future*, Discover, huhtikuu 2010.
- [12] M. Tukiainen, *Heikot mittaukset ja heikot arvot*, pro gradu -tutkielma, Turun yliopisto (2013).
- [13] C. Ferrie ja J. Combes, *How the result of a single coin toss can turn out to be 100 heads*, Physical Review Letters, **113**(12), 120404 (2014).
- [14] N. W. M. Ritchie, J. G. Story ja R. G. Hulet, *Realization of a Measurement of a "Weak Value"*, Physical Review Letters, **66**(9), 1107 (1991).
- [15] S. Huang ja G. S. Agarwal, *Weak value amplification of atomic cat states*, New Journal of Physics, **17**(9), 093032 (2015).
- [16] M. Malik, M. Mirhosseini, M. P. Lavery, J. Leach, M. J. Padgett ja R. W. Boyd, *Direct measurement of a 27-dimensional orbital-angular-momentum state vector*, Nature Communications, **5**(1), 3115 (2014).
- [17] J. S. Lundeen, B. Sutherland, A. Patel, C. Stewart ja C. Bamber, *Direct measurement of the quantum wavefunction*, Nature, **474**(7350), 188 (2011).

- [18] S. Kocsis, B. Braverman, S. Ravets, M. J. Stevens, R. P. Mirin, L. K. Shalm ja A. M. Steinberg, *Observing the Average Trajectories of Single Photons in a Two-Slit Interferometer*, *Science*, **332**(6034), 1170 (2011).
- [19] D. Sokolovski, *Are the Weak Measurements Really Measurements?*, *Quanta*, **2**(1), 50 (2013).
- [20] I. M. Duck, P. M. Stevenson ja E. C. G. Sudarshan, *The sense in which a "weak measurement" of a spin- $\frac{1}{2}$  particle's spin component yields a value 100*, *Physical Review D*, **40**(6), 2112 (1989).
- [21] V. Monachello ja R. Flack, *The weak value of spin for atomic systems*, *Journal of Physics: Conference Series*, **701**(1), 012028 (2015).
- [22] L. Vaidman, *Comment on "How the result of a single coin toss can turn out to be 100 heads"*, arXiv: 1409.5386v1 [quant-ph] (2014).
- [23] Y. Aharonov ja D. Rohrlich, *Comment on "How the result of a single coin toss can turn out to be 100 heads"*, arXiv: 1410.0381v1 [quant-ph] (2014).
- [24] A. Brodutch, *Comment on 'How the result of a single coin toss can turn out to be 100 heads'*, arXiv: 1410.8510v2 [quant-ph] (2015).
- [25] C. Ferrie ja J. Combes, *Ferrie and Combes Reply*, *Physical Review Letters*, **114**(11), 118902 (2015).
- [26] J. Z. Salvail, M. Agnew, A. S. Johnson, E. Bolduc ja J. Leach, *Full characterization of polarization states of light via direct measurement*, *Nature Photonics*, **7**(4), 316 (2013).
- [27] H. Kobayashi, K. Nonaka ja Y. Shikano, *Stereographical visualization of a polarization state using weak measurements with an optical-vortex beam*, *Physical Review A*, **89**(5), 053816 (2014).
- [28] R. A. Beth, *Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light*, *Physical Review*, **50**(2), 115 (1936).
- [29] W. H. McMaster, *Polarization and the Stokes Parameters*, *American Journal of Physics*, **22**(6), 351 (1954).
- [30] R. C. Jones, *A New Calculus for the Treatment of Optical Systems*, *Journal of the Optical Society of America*, **31**(7), 488 (1941).
- [31] R. P. Feynman, R. B. Leighton ja M. L. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, toim. Addison-Wesley (1936).
- [32] A. Siegman, *Lasers*, toim. University Science Books (1986).
- [33] J. B. Götte ja M. R. Dennis, *Generalized shifts and weak values for polarization components of reflected light beams*, *New Journal of Physics*, **14**(7), 073016 (2012).
- [34] L. Marrucci, C. Manzo ja D. Paparo, *Optical Spin-to-Orbital Angular Momentum Conversion in Inhomogeneous Anisotropic Media*, *Physical Review Letters*, **96**(16), 163905 (2006).
- [35] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw ja J. P. Woerdman, *Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes*, *Physical Review A*, **45**(11), 8185 (1992).

- [36] Wikipedia [online, viitattu 15.7.2016]. Saatavilla [www-muodossa <https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital\\_angular\\_momentum\\_of\\_light#/media/File:Helix\\_oam.png>](https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_angular_momentum_of_light#/media/File:Helix_oam.png).
- [37] G. Weihs ja A. Zeilinger, *Photon statistics at beam-splitters: an essential tool in quantum information and teleportation*, J. Peřinan artikkelikokoelma, *Coherence and Statistics of Photons and Atoms*, toim. Wiley and Wiley (2001).
- [38] J. L. O'Brien, G. J. Pryde, A. G. White, T. C. Ralph ja D. Branning, *Demonstration of an all-optical quantum controlled-NOT gate*, *Nature*, **426**(6964), 264 (2003).
- [39] Altechna R&D, *S-WAVEPLATE, Operation manual*, Workshop of Photonics (2013).
- [40] Y. Shimotsuma, P. G. Kazansky, J. Qiu ja K. Hirao, *Self-Organized Nanogratings in Glass Irradiated by Ultrashort Light Pulses*, *Physical Review Letters*, **91**(24), 247405 (2003).
- [41] A. Moroianu, *Lectures on Kähler Geometry*, Hampurin yliopisto (2004).
- [42] H. Heydari, *A geometric framework for mixed quantum states based on a Kähler structure*, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **48**(25), 255301 (2015).
- [43] J. Řeháček, B.-G. Englert ja D. Kaszlikowski, *Minimal qubit tomography*, *Physical Review A*, **70**(5), 052321 (2004).
- [44] Y. Shih, *The Physics of Ghost Imaging*, arXiv: 0805.1166v5 [quant-ph] (2009).

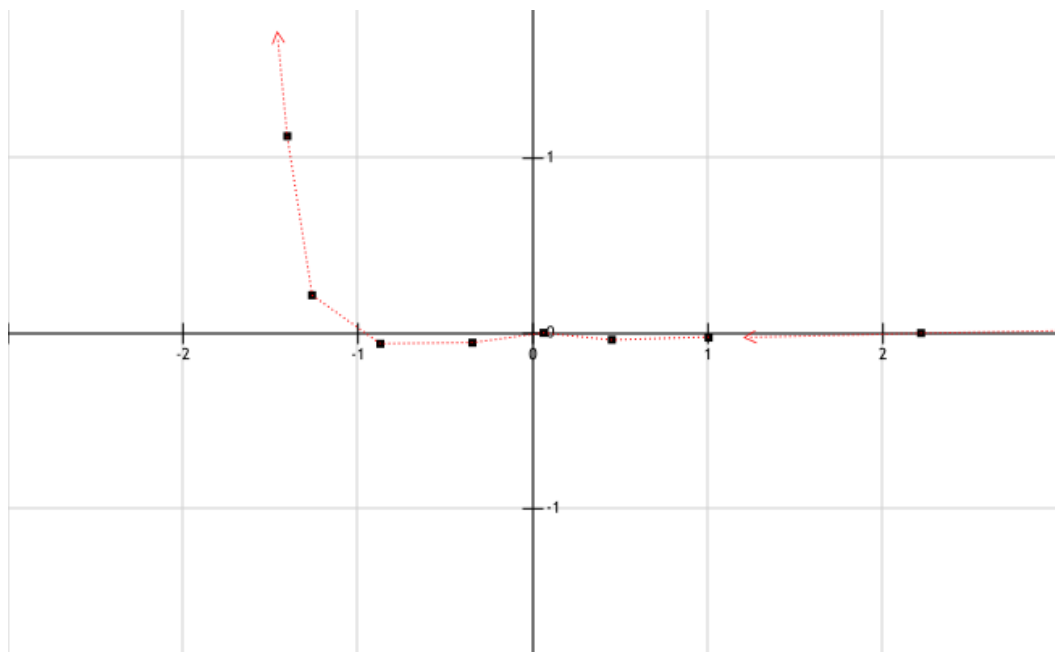
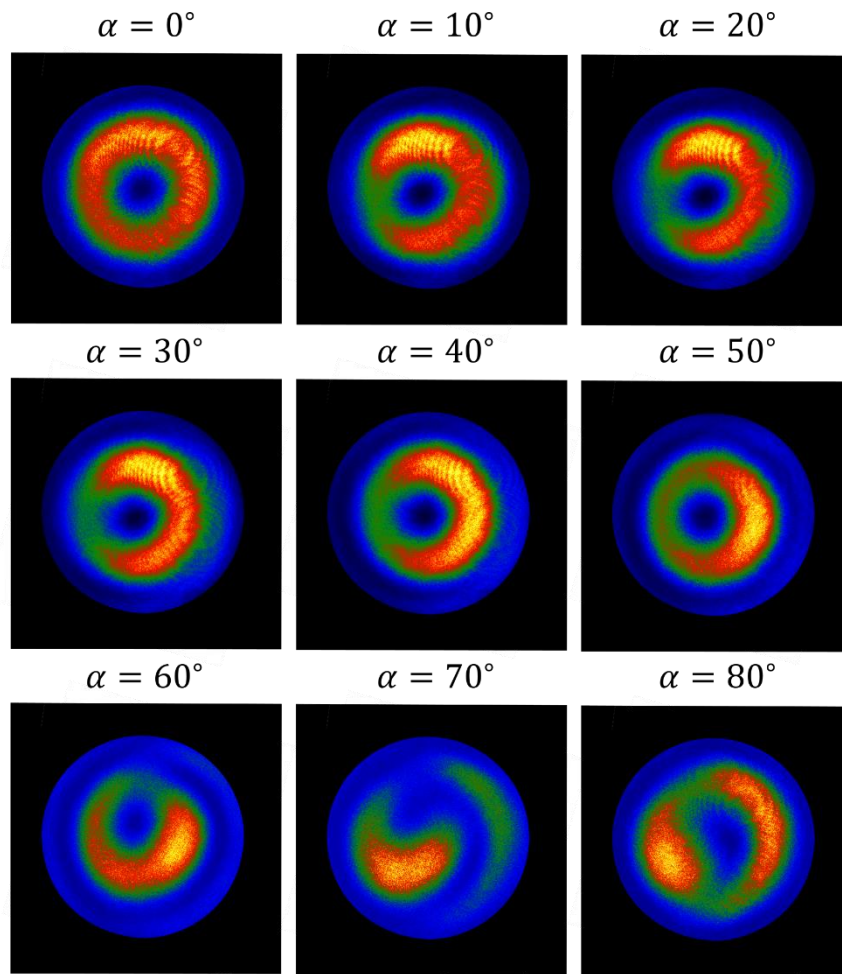
## Liite A: Mittaustulokset post-valinnalla $|H\rangle$



$(0, 0) \sim |H\rangle$ ;  $(1, 0) \sim |L\rangle$ ;  $(0, 1) \sim |D\rangle$ ;  $(-1, 0) \sim |R\rangle$ ;  $(0, -1) \sim |A\rangle$



**Liite B: Mittaustulokset post-valinnalla  $|D\rangle$**



$(0, 0) \sim |D\rangle$ ;  $(1, 0) \sim |H\rangle$ ;  $(0, 1) \sim |L\rangle$ ;  $(-1, 0) \sim |V\rangle$ ;  $(0, -1) \sim |R\rangle$

# Liite C: LC-aaltolevyn retardaatio/jännite-kuvaaja



## LCC1111-B FINAL TEST DATASHEET

Part Number: LCC1111-B

S/N: B0315

Date: 6/27/2016

Tested By: WHUANG

