Yhteismittaukset ja Bellin epäyhtälöt

Pro gradu -tutkielma
Turun yliopisto
Fysiikan ja tähtitieteen laitos
Teoreettinen fysiikka
2012
Roope Uola
Tarkastaja:
FT Teiko Heinosaari
FT Juha-Pekka Pellonpää

TURUN YLIOPISTO
Fysiikan ja tähtitieteen laitos
UOLA, ROOPE: Yhteismittaukset ja Bellin epäyhtälöt
Pro gradu-tutkielma 103 sivua
Teoreettinen fysiikka
Joulukuu 2012

Tässä työssä tarkastellaan kahta kvanttimekaniikan keskeistä kysymystä: milloin suurepari tai joukko suureita voidaan mitata samanaikaisesti sekä mitä ns. Bellin epäyhtälöiden rikkominen vaatii? Nämä kysymykset ovat erityisen merkittäviä kvantti-informaation kannalta. Lisäksi tutkitaan näiden kahden ongelman välistä yhteyttä. Työn fysikaalisena motivaationa toimivat esimerkiksi kvanttioptiikan keinoin toteutettavat kaksitasosysteemeille tehtävät kokeet, kuten tavanomainen korrelaatiokoe kietoutuneille fotoneille.

Työn ensimmäinen painopiste on yhteismitallisuuden problematiikassa. Yhteismitallisuuteen liittyviä kysymyksiä sekä niiden matemaattista muotoilua on käsitelty laajalti ja aihepiiriä on selkeytetty fysikaalisesti motivoiduilla esimerkeillä. Toisena painopisteenä ovat Bellin epäyhtälöt. Bellin epäyhtälöiden luonnetta on analysoitu sekä matemaattiselta että fysikaaliselta kannalta ja niiden johtamiseen on esitetty erilaisia menetelmiä.

Keskeiset tulokset liittyvät Bellin epäyhtälöiden ja yhteismitallisuuden väliseen yhteyteen sekä qubittisuureiden yhteismittausten karakterisointiin. Useammalle kuin kahdelle qubittisuureelle tämä karakterisointi ei ole yleisesti tiedossa, joten työssä on esitetty tätä ongelmaa koskien useita lähestymistapoja sekä tuloksia. Lisäksi karakterisointi on annettu kolmelle qubitille muodossa, jonka fysikaalinen merkitys jää vielä toistaiseksi auki.

Avainsanoja: yhteismittaus, Bellin epäyhtälöt

Sisältö

Johdanto

Kvanttiteoria omaa monia epäklassisia piirteitä. Esimerkiksi kietoutuminen, Heisenbergin epätarkkuusrelaatio ja mahdottomuus mitata samanaikaisesti tietyn tyyppisiä suureita ovat klassiselle fysiikalle tuntemattomia käsitteitä, mutta kvanttimekaanikolle jokapäiväisiä työkaluja. Tämän työn tarkoitus on perehtyä kahteen kvanttimekaniikalle tyypilliseen ei-klassiseen ominaisuuteen sekä tutkia näiden välistä yhteyttä. Käsiteltävät ominaisuudet ovat edellä mainittu suureiden yhteismitattomuus sekä mahdollisuus rikkoa ns. Bellin epäyhtälöitä.

Bellin epäyhtälöt kertovat minkälaiset yhdistetyt todennäköisyysjakaumat ovat sallittuja klassisen todennäköisyysteorian puitteissa. Koska tunnetusti kvanttiteoria mahdollistaa Bellin epäyhtälöiden rikkoutumisen ja klassinen fysiikka ei niitä riko, niin epäyhtälöitä voidaan pitää jonkinlaisena rajana klassisen fysiikan ja kvanttiteorian välillä.

Bellin epäyhtälöiden ympärille muodostettavat fysikaaliset kokeet ovat aina ns. korrelaatiokokeita, joissa mitataan jossain mielessä erillään olevien systeemien yhteyttä tai lomittumista. Tällaisessa koejärjestelyssä ei-klassisen tuloksen (eli Bellin epäyhtälön rikkomisen) aikaansaamiseksi tarvitaan tunnetusti aina kietoutunut tila. Bellin epäyhtälön rikkominen vaatii siis systeemiltä ei-klassisena ominaisuutena kietoutumisen.

Tunnetusti kietoutuminen ei ole ainoa ei-klassinen vaatimus epäyhtälöiden rikkoutumiselle. Jotta rikkoutuminen saavutetaan, kokeessa käytettävät suureet tulee valita yhteismitattomiksi [9]. Kuitenkin kysymys siitä, onko Bellin epäyhtälön rikkoutuminen sekä yhteismitattomuus itse asiassa yksi ja sama asia, on edelleen avoin ongelma. Kysymykseen on kuitenkin saatu hieman valoa vuonna 2009 julkaistun Wolf et al [7] työn myötä. Tässä työssä on osoitettu, että niin sanotussa CHSH-tapauksessa, joka on luultavasti kaikkein tunnetuin korrelaatiokoe, käytettävien suureiden yhteismitattomuus sekä mahdollisuus rikkoa Bellin epäyhtälö tällä koejärjestelyllä ovat yhtäpitävät.

Tässä työssä tullaan esittelemään tarvittavat matemaattiset työkalut yhteismittausten sekä Bellin epäyhtälöiden käsittelemiseksi ja lisäksi todistetaan monia näihin liittyviä tuloksia. Kuitenkaan aivan ruohonjuuritasolta ei voida lähteä, joten työn ymmärtämiseksi olisi hyvä, jos lukijalla olisi jonkinlainen käsitys kvanttimekaniikan peruskäsitteistä sekä pohjalla olevasta Hilbertin avaruus -rakenteesta.

1 Fysikaalinen suure

Fysikaalinen suure esitetään yleensä alkeiskvanttimekaniikan kirjallisuudessa itseadjungoituna operaattorina. Tällainen esitys on teorian ymmärtämisen sekä rakentamisen kannalta turhan rajoittava. Esimerkiksi kysymykseen siitä, miten Heisenbergin epätarkkuusrelaatiossa tulisi tulkita suureiden heikko mittaustarkkuus, saadaan vastaus vasta siirtymällä itseadjungoituja operaattoreita (tai tarkemmin sanottuna spektraalimittoja) yleisempään positiivioperaattorimittana (semispektraalimittana) esitettävään suureen kuvaukseen. Toinen motivaatio positiivioperaattorimittakuvaukselle on kvanttimekaniikan mittausteorian tavanomaisten mittausmallien antamat mitatut suureet, jotka yleensä ovat spektraalimittoja vain joissain erityistapauksissa [26].

Ennen positiivioperaattorimitan määrittelemistä kiinnitetään muutama peruskäsite sekä notaatio. Tässä työssä symbolilla $\mathcal{H}$ viitataan aina kompleksiseen separoituvaan ääretön tai äärellisulotteiseen Hilbertin avaruuteen. Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}$ rajoitettujen operaattoreiden joukolle käytetään merkintää $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Tällä joukolla on monia kvanttimekaniikan kannalta tärkeitä osajoukkoja, joista useimmin esiintyviä ovat itseadjungoitujen operaattoreiden joukko $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})$, positiivisten jäljen yksi operaattoreiden muodostama tilajoukko $\mathcal{S}(\mathcal{H})$, adjungaattina käänteisoperaattorinsa antavien operaattorien muodostama unitaarioperaattorien joukko $\mathcal{U}(\mathcal{H})$, ominaisuudet $P = P^2 = P^*$ omaavien operaattorien antama projektioiden joukko $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ sekä alhaalta nollaoperaattorilla sekä ylhäältä identiteetillä rajoitettujen operaattorien muodostama efektijoukko $\mathcal{E}(\mathcal{H})$.

Määritelmä 1.1. Olkoon Ω epätyhjä joukko ja $\mathcal{F}$ kokoelma sen osajoukkoja. $\mathcal{F}$ on joukon Ω sigma-algebra, jos
(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$
(ii) $X \in \mathcal{F} \Rightarrow X^c = \Omega \setminus X \in \mathcal{F}$
(iii) $X_1, X_2, ... \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_i X_i \in \mathcal{F}$.

Esimerkki 1.1. Esimerkiksi kokoelmat $\{\emptyset, 1, 2, \{1,2\}\}$ ja $\{\emptyset, \{1,2\}\}$ ovat joukon $\{1,2\}$ sigma-algebroja.

Määritelmä 1.2. Olkoon Ω joukko ja $\mathcal{F}$ sen sigma-algebra. Kuvausta $E : \mathcal{F} \to \mathcal{E}(\mathcal{H})$ sanotaan positiivioperaattorimitaksi (POM), jos
(i) $E(\emptyset) = 0$
(ii) $E(\Omega) = I$
(iii) $\langle \psi | E(\cup_i X_i) \psi \rangle = \sum_i \langle \psi | E(X_i) \psi \rangle \; \forall \psi \in \mathcal{H}$ erillisille joukoille $X_i \in \mathcal{F}$.

POMista käytetään myös nimitystä semispektraalimitta. Jos POMin E maalijoukko $\mathrm{ran}(E)$ koostuu projektioista, sanotaan että E on spektraalimitta eli tarkka suure. Tämän vastakohtana on suure, jonka maalijoukon kaikki alkiot eivät ole projektioita. Tällöin puhutaan sumeasta suureesta.

Tästä eteenpäin fysikaalisella suureella tarkoitetaan positiivioperaattorimittaa, jonka määrittelyjoukkona on reaalisuoran Borelin sigma-algebra[1] tai joidenkin sen osajoukkojen muodostama sigma-algebra. Asian selventämiseksi tarkastellaan seuraavaa esimerkkiä.

Esimerkki 1.2. Tarkastellaan spinsuuretta suunnassa x. Tätä suuretta vastaava itseadjungoitu operaattori on σ_x. Tämän ominaisarvot ovat ± 1 ja näihin liittyvät ominaisvektorit ovat $\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ sekä $\vec{x}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$. Näistä voidaan muodostaa operaattorin σ_x spektraalihajotelma

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \vec{x}_1^T \vec{x}_1 - \vec{x}_{-1}^T \vec{x}_{-1} \\ &= \frac{1}{2}(I + \sigma_x) - \frac{1}{2}(I - \sigma_x) \\ &=: S_x(+1) + S_x(-1),\end{aligned}$$

missä $S_x(\pm 1) = \frac{1}{2}(I \pm \sigma_x)$ on x-suuntaista spinsuuretta vastaava positiivioperaattorimitta.

Edellinen esimerkki on tehty vain havainnolistamaan sitä, miten itseadjungoidulle diskreetin spektrin omaavalle operaattorille haetaan spektraalihajotelma ja miten siitä luetaan suureen positiivioperaattorimittaesitys. Menemättä sen syvällisemmin yksityiskohtiin[2] todettakoon tässä vaiheessa vain, että positiivioperaattorimittaesityksellä on selkeä fysikaalinen tulkinta mittaustulostodennäköisyyksien kannalta. Esimerkiksi edellisessä esimerkissä esiintyneet operaattorit $S_x(\pm 1)$ antavat mittaustuloksia ± 1 vastaavat todennäköisyydet tilassa ρ kaavana $P_\rho^{S_x}(\pm 1) = \mathrm{tr}[\rho S_x(\pm 1)]$.

Tässä kohtaa on hyvä huomata, että yleensä kirjallisuudessa sekä artikkeleissa näkee puhuttavan positiivioperaattorimitasta joukkona $\{E_n\}_{n\in\omega}$, missä ω on jokin numeroituva joukko, $E_n \in \mathcal{E}(\mathcal{H})\ \forall n \in \omega$ ja $\sum_{n\in\omega} E_n = I$. Tämä puhetapa koskee vain diskreettejä suureita, mutta on täysin ekvivalentti tässä luvussa esitellyn POMin määritelmän kanssa. Ainoa ero on se, että tällaisessa puhetavassa tarkoitetaan POMilla mitan arvoja eikä itse mittaa.

[1] Joukon Borelin sigma-algebralla tarkoitetaan sen kaikkien avointen osajoukkojen generoimaa sigma-algebraa.

[2] Yksityiskohtaisempi aiheen käsittely löytyy esimerkiksi teoksesta [13].

Seuraava esimerkki antaa yhden hyvin selkeän ja fysikaalisesti järkevän perustelun sille, miksi tarvitaan muitakin kuin spektraalimittana esitettäviä suureita.

Esimerkki 1.3. Tarkastellaan (tarkkoja) spin-suureita S_x ja S_y. Ajatellaan mittausta, jossa satunnaisesti joka toinen kerta mitataan S_x ja joka toinen kerta S_y. Jos ollaan kiinnostuneita ainoastaan saaduista mittaustuloksista ± 1, niin mitattava suure on $E(\pm 1) = \frac{1}{2}S_x(\pm 1) + \frac{1}{2}S_y(\pm 1)$. Koska

$$\begin{aligned} E(+1)^2 &= \frac{1}{4}(S_x(+1) + S_y(-1))^2 \\ &= \frac{1}{16}(2I + \sigma_x + \sigma_y)^2 \\ &= \frac{1}{16}(6I + 4\sigma_x + 4\sigma_y) \\ &\neq \frac{1}{4}(2I + \sigma_x + \sigma_y) = E(+1), \end{aligned}$$

niin suure E ei ole projektioarvoinen eikä siis näin ollen spektraalimitta.

1.1 Suurejoukon rakenteesta

Edellä todettiin, että tarkkoja fysikaalisia suureita vastaa projektioarvoiset POMit. Tässä luvussa näytetään, että tällaiset operaattorimitat ovat POMien konveksissa joukossa ääripisteitä.

Lause 1.1. Olkoon Ω joukko ja $\mathcal{F}$ sen sigma-algebra. Olkoon lisäksi A kaikkien sigma-algebrassa $\mathcal{F}$ määriteltyjen POMien joukko. Joukko A on konveksi, kun POMien konveksikombinointi ymmärretään pisteittäin.

Todistus. Olkoon $E, F \in A$. Määritellään kuvaus $S_\lambda : \mathcal{F} \to \mathcal{E}(\mathcal{H})$ kaavalla

$$S_\lambda(X) = \lambda E(X) + (1 - \lambda)F(X),$$

missä $\lambda \in (0, 1)$. Kuvaus S_λ on POM, sillä ensinnäkin mittojen E ja F ominaisuuksien perusteella $S_\lambda(\emptyset) = 0$ ja $S_\lambda(\Omega) = I$. Lisäksi sigma-additiivisuus (POMin määritelmän ominaisuus (*iii*)) seuraa mittojen E ja F sigma-additiivisuudesta. $\square$

Seuraava lause on olennaisessa asemassa tarkasteltaessa suurejoukon ääripisteitä. Sen sekä tässä alaluvussa myöhemmin esitettävien lauseiden todistukset on tehty mukaillen teoksen [13] vastaavia todistuksia.

Lause 1.2. Projektiot ovat efektijoukon ääripisteet. Toisin sanoen $\mathrm{Ext}(\mathcal{E}(\mathcal{H})) = \mathcal{P}(\mathcal{H})$.

Todistus. Olkoon $P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ ja $\psi \in \mathrm{ran}(P)^\perp = P(\mathcal{H})^\perp$. Jos P ei ole ääripiste, niin on olemassa efektit $E, F \neq P$ sekä parametri $\lambda \in (0,1)$ s.e.

$$P = \lambda E + (1-\lambda)F.$$

Koska E ja F ovat positiivisia, tästä seuraa $E \leq \frac{1}{\lambda}P$. Koska $\frac{1}{\lambda}P\psi = 0$ on oltava myös $E\psi = 0$.

Olkoon nyt $\varphi \in \mathrm{ran}(P)$. Kirjoitetaan projetkion P komplementtiprojektio hieman toisessa muodossa:

$$P^\perp = I - P = \lambda(I-E) + (1-\lambda)(I-F).$$

Koska $P^\perp\varphi = 0$, niin tästä saadaan samalla perusteella kuin aiemmin $(I-E)\varphi = 0$ eli $E\varphi = \varphi$. Koska Hilbertin avaruus voidaan aina jakaa suoraksi summaksi $\mathcal{H} = \mathrm{ran}(P) \oplus \mathrm{ran}(P^\perp)$, niin saadaan $E = P$, joka on ristiriidassa oletuksen kanssa. Siispä P on ääripiste.

Sen todistamiseksi, että efektijoukolla ei ole muita ääripisteitä kuin projektiot, otetaan jokin efekti E s.e. $E^2 \neq E$ (tällaisia on olemassa, sillä esim. $\frac{1}{2}I$ on tällainen) ja määritellään $F_1 = E^2$. F_1 on myös efekti, sillä selvästi $F_1 \geq 0$ ja toisaalta

$$\langle\eta|E^2\eta\rangle = \|E\eta\| \leq \|\eta\| = \langle\eta|I\eta\rangle.$$

Määritellään lisäksi $F_2 = 2E - E^2$. Tämäkin on efekti, sillä

$$\begin{aligned} 2E - E^2 = E^{1/2}(2I - E)E^{1/2} \geq 0 \\ (I-E)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2E - E^2 \leq I \end{aligned}$$

Nyt efekti E saadaan konveksikombinaationa efekteistä F_1 ja F_2:

$$E = \frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}F_2.$$

Koska $F_1 \neq E \neq F_2$, niin E ei ole ääripiste. Tämä todistaa väitteen. □

Edellisen lauseen avulla saadaan nyt kätevästi todistettua seuraava tulos koskien suurejoukon ääripisteitä.

Lause 1.3. Tarkat suureet ovat suurejoukon ääripisteitä.

Todistus. Olkoon E tarkka suure (eli spektraalimitta). Tehdään vastaoletus: E ei ole ääripiste. Tällöin on olemassa suureet $A, B \neq E$ sekä luku $\lambda \in (0,1)$ s.e.

$$E(X) = \lambda A(X) + (1-\lambda)B(X) \ \forall X \in B(\mathbb{R}).$$

Koska $A \neq E$, niin on olemassa joukko $X \in B(\mathbb{R})$, jolle $E(X) \neq A(X)$, joka on ristiriidassa edellisen lauseen kanssa, sillä $E(X)$ on projektio. Näin ollen tarkat suureet ovat suurejoukon ääripisteitä. □

Seuraava määritelmä on asetettu ainoastaan diskreeteille suureille, koska tässä ei tarvita muuta. Jatkuva tapaus löytyy esimerkiksi paperista [28].

Määritelmä 1.3. Diskreetti suure E (arvojoukkona $\{x_1, ..., x_n\}$) on rank-1 suure, jos $E(x_i) = r_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|, r_i \in [0,1], \psi_i \in \mathcal{H}, \|\psi_i\| = 1, i \in \{1, ..., n\}$.

Seuraava lemma on aputulos sitä seuraavaan lemmaan, jota puolestaan käytetään lauseessa, joka koskee rank-1 suureiden ääripisteominaisuutta.

Lemma 1.1. Olkoon $P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ ja $T \in L(\mathcal{H})$ positiivinen operaattori. Jos $T \leq P$, niin $T = TP = PT$.

Todistus. Olkoon $\psi^\perp \in \mathrm{ran}(P)^\perp$. Koska $0 \leq T \leq P$, niin $P\psi^\perp = 0 \Rightarrow T\psi^\perp = 0$. Näin ollen jokaisella $\mathcal{H} \ni \tilde{\eta} = \eta + \eta^\perp$, missä $\eta \in \mathrm{ran}(P)$ ja $\eta^\perp \in \mathrm{ran}(P)^\perp$ ovat vektorin $\tilde{\eta}$ suorasummahajotelman $\mathcal{H} = \mathrm{ran}(P) \oplus \mathrm{ran}(P)^\perp$ mukaiset komponentit, saadaan

$$T\tilde{\eta} = T\eta + T\eta^\perp = T\eta = TP\eta = TP\eta + TP\eta^\perp = TP\tilde{\eta}.$$

Näin ollen $T = TP$. Tästä saadaan edelleen

$$PT = (TP)^* = T^* = T,$$

joka todistaa väitteen. □

Lemma 1.2. Olkoon $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ja $B = t|\psi\rangle\langle\psi|$ jollekin $\psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1, t \in [0,1]$. Jos $0 \leq A \leq B$, niin $A = rB$, missä $r \in [0,1]$.

Todistus. Olkoon A ja B kuten yllä. Ensinnäkin $A \leq t|\psi\rangle\langle\psi| \leq |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$. Edellisen lemman nojalla

$$A = A|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi|A.$$

Jälkimmäinen yhtäsuuruus antaa suoraan

$$A\psi = |\psi\rangle\langle\psi|A\psi = \langle\psi|A\psi\rangle\psi.$$

Käyttämällä tätä sekä ensimmäistä yhtäsuuruutta saadaan

$$A = |A\psi\rangle\langle\psi| = \langle\psi|A\psi\rangle|\psi\rangle\langle\psi| =: e|\psi\rangle\langle\psi|.$$

Koska $e = \langle\psi|A\psi\rangle \leq \langle\psi|B\psi\rangle = r$, niin $A = tB$ jollain $t \in (0, 1)$. □

Lause 1.4. Rank-1 suure, jonka arvojoukko on $\Omega = \{x_1, ..., x_n\}$ ja efektit lineaarisesti riippumattomia, on suurejoukon ääripiste.

Todistus. Olkoon E lauseen mukainen rank-1 suure. Tehdän vastaoletus: $E = \lambda A + (1-\lambda)B$ joillain suureilla $A, B \neq E$ ja luvulla $\lambda \in (0, 1)$. Tällöin kaikilla $x_j \in \Omega$ on voimassa $E(x_j) \geq \lambda A(x_j)$ ja $E(x_j) \geq (1-\lambda)B(x_j)$. Edellisen lemman nojalla tällöin $A(x_j) = a_j E(x_j)$ ja $B(x_j) = b_j E(x_j)$, missä $a_j, b_j \in \mathbb{R}^+$. Koska A ja B ovat normitettuja, niin

$$\sum_{j=1}^{n} a_j E(x_j) = \sum_{j=1}^{n} b_j E(x_j) = I.$$

Näin ollen voidaan kirjoittaa

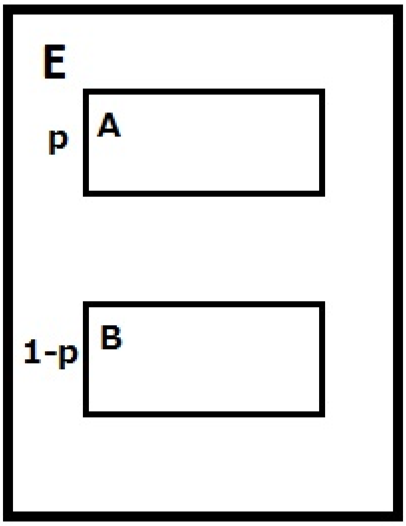
$$\sum_{j=1}^{n} (1 - a_j)E(x_j) = \sum_{j=1}^{n} (1 - b_j)E(x_j) = 0.$$

Koska suureen E efektit ovat lineaarisesti riippumattomia, niin välttämättä kaikki yllä olevissa summissa esiintyvät kertoimet ovat nollia. Täten $a_j = b_j = 1\ \forall j$. Tämä puolestaan tarkoittaa sitä, että $A(x_j) = B(x_j) = E(x_j)\ \forall j$, joka on ristiriidassa sen kanssa, että $A \neq E \neq B$. □

1.2 Suureiden muokkaamisesta

Fysikaalisen suureen määritteleminen positiivioperaattorimittana antaa monia mahdollisuuksia tehdä yhdestä tai useammasta suureesta uusia suureita. Edellisessä alaluvussa nähtiin, että jokainen suurepari antaa konveksikombinaation avulla kontinuumin verran uusia suureita. Tällaiselle suureiden sekoittamiselle löytyy selkeä fysikaalinen tulkinta: esimerkiksi konveksikombinaatio $E = pA + (1-p)B$ voidaan tulkita siten, että suoritetaan mittaus, jossa suure A mitataan todennäköisyydellä

p ja suure B todennäköisyydellä $1-p$ (kts. Kuva 1). Tässä alaluvussa on tarkoitus käsitellä esimerkkien kautta muutamaa muuta tyypillistä tapaa tehdä annetuista suureista uusia suureita.



Kuva 1: Sekoitettu suure

Tarkastellaan ensimmäisenä esimerkkinä karkeistetun (engl. coarse-grained) suureen muodostamista annetusta suureesta.

Määritelmä 1.4. Suure E on suureen F karkeistus, jos sen arvojoukko $\mathcal{F}_E$ on suureen F arvojoukon $\mathcal{F}_F$ osajoukko ja lisäksi $E(X) = F(X)\ \forall X \in \mathcal{F}_E$.

Esimerkki 1.4. Tarkastellaan x- ja y-suuntaisia spinsuureita S_x ja S_y. Ajatellaan suoritettavaksi mittaus, jossa valitaan satunnaisesti mitattavaksi x-suunta todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ ja y-suunta samalla todennäköisyydellä. Kun pidetään lisäksi kirjaa siitä, kumpi suunta valittiin mitattavaksi, tällaista mittausta voidaan kuvata suureella

$$\tilde{E}(x) = \frac{1}{2}(\tilde{S}_x(x) + \tilde{S}_y(x)),$$

missä $x \in \{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$ ja suureet $\tilde{S}_x$ sekä $\tilde{S}_y$ on määritelty seuraavasti:

$$\tilde{S}_x(x) = \begin{cases} S_x(x), & x \in \{-1, 1\} \\ 0, & x \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \end{cases}, \quad \tilde{S}_y(x) = \begin{cases} S_y(2x), & x \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \\ 0, & x \in \{-1, 1\} \end{cases}.$$

Suureesta E voidaan luonnollisesti määritellä usealla tavalla karkeistettu versio. Kuitenkin fysikaaliselta kannalta nämä kaikki eivät välttämättä ole kovin motivoituja. Yksi yksinkertainen ja fysikaalisesti motivoitu karkeistus on sellainen, jossa jätetään huomiotta itse mittaussuunta. Toisin sanoen ollaan ainoastaan kiinnostuneita siitä, mikä mittaustulos saadaan. Tällaista tilannetta kuvaava suure on

$$E(x) = \frac{1}{2}(S_x(x) + S_y(x)),$$

missä $x \in \{\pm 1\}$. Koska $E(1) = \tilde{E}(\{\frac{1}{2}\} \cup \{1\})$ ja $E(-1) = \tilde{E}(\{-\frac{1}{2}\} \cup \{-1\})$, niin E on suureen $\tilde{E}$ karkeistus yllä asetetun määritelmän mielessä, kun suureen E arvojoukko tulkitaan seuraavan samaistuksen mukaisesti: $\{1, -1\} = \{\{\frac{1}{2}\} \cup \{1\}, \{-\frac{1}{2}\} \cup \{-1\}\}$.

Toinen tapa tuottaa jostain suureesta uusi suure on diskretoida kyseinen suure. Otetaan teoksen [13] tavoin esimerkiksi diskretoinnista niin sanottu spinsuuntasuure (spin direction observable).

Esimerkki 1.5. Koska jokainen tila Blochin pallolla on muotoa $\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{a} \cdot \vec{\sigma})$ ja suuntaan $\vec{b}$ osoittavan spinkomponentin mittausta kuvaava suure on

$$S_{\vec{b}}(\pm 1) = \frac{1}{2}(I \pm \vec{b} \cdot \vec{\sigma}),$$

niin todennäköisyys saada $\vec{b}$-suuntaisen spinkomponentin mittaustulokseksi ± 1 tilassa ρ on

$$\mathrm{tr}[\rho S_{\vec{b}}(\pm 1)] = \frac{1}{2}(I \pm \vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Spinsuunnan tapauksessa ideana on, että valitaan satunnaisesti suunta $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ja mitataan tämän suuntainen spinsuure. Mittaustulos tulkitaan olemaan suunta avaruudessa $\mathbb{R}^3$ seuraavasti: tulos $+1$ yhdistetään suuntaan $\vec{b}$ ja tulos -1 puolestaan suuntaan $-\vec{b}$. Koska tilassa $\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{a} \cdot \vec{\sigma})$

$$\mathrm{tr}[\rho S_{\vec{b}}(+1)] = \mathrm{tr}[\rho S_{-\vec{b}}(-1)] = \frac{1}{2}(1 + \vec{a} \cdot \vec{b}),$$

niin todennäköisyys saada satunnaisen suunnan mittauksessa tulos joukosta $X \subset \mathbb{S}^2$ ($\mathbb{S}^2$ on $\mathbb{R}^3$:n yksikköpallon pinta) on

$$2 \int_X \frac{1}{2}(1 + \vec{a} \cdot \vec{b}) \frac{1}{4\pi} d\vec{b} = \frac{1}{4\pi} \int_X (1 + \vec{a} \cdot \vec{b}) d\vec{b},$$

jossa on käytetty parametrisointia $\vec{b} = \vec{b}(\theta, \phi)$ ja $d\vec{b} = \sin(\theta) d\theta d\phi$ [3]. Tästä voidaan lukea suoraan vastaava suure, niin sanottu spinsuuntasuure:

$$D(X) = \frac{1}{4\pi} \int_X (I + \vec{b} \cdot \vec{\sigma}) d\vec{b}.$$

Määritelmä 1.5. Oletetaan, että E on jatkuva suure, jonka arvojoukko on Ω. Jokaista joukon Ω äärellistä erillisistä joukoista koostuvaa peitettä $\{X_j\}_j, X_j \in \mathcal{F}\ \forall j$ kohti voidaan määritellä suure $\tilde{E}(j) = E(X_j)$. Näin määriteltyä suuretta $\tilde{E}$ sanotaan suureen E diskretoinniksi.

Esimerkki 1.6. Tarkastellaan edellisen esimerkin spinsuuntasuuretta D. Jakamalla yksikköpallo oktanttien mukaan kahdeksaan osaan $\{X_j\}_{j=1}^8$ voidaan määritellä spinsuureelle diskretointi D' kaavalla $D'(j) = D(X_j)$. Esimerkiksi ensimmäisessä oktantissa saadaan

$$\begin{aligned}
D'(1) &= D(X_1) \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{X_1} (I + \vec{b} \cdot \vec{\sigma}) d\vec{b} \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (I + (\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta)) \cdot \vec{\sigma}) \sin(\theta) d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{8} I + \frac{1}{16} (1, 1, 1) \cdot \vec{\sigma} \\
&= \frac{1}{4} (\frac{1}{2} I + \frac{1}{4} (1, 1, 1) \cdot \vec{\sigma}).
\end{aligned}$$

Vastaavasti muille oktanteille laskemalla saadaan sama tulos sillä erolla, että suunnan määräävä vektori osoittaa aina kyseisen oktantin keskelle, eli vektorin suunta on $(\text{sign}(x), \text{sign}(y), \text{sign}(z))$.

1.3 Mittalaitteen tuottama epätarkka suure

Tämän alaluvun tarkoitus on osoittaa, että kvanttimekaniikan mittausteorian mukaiset mittalaitteet tuottavat sopivilla valinnoilla epätarkan suureen ja näin motivoida edelleen semispektraalimittojen käyttämistä suureen määritelmänä pelkkien spektraalimittojen sijaan.

Kvanttimekaanista mittaustapahtumaa voidaan kuvata monella tasolla: suureen (josta saadaan mittaustulostilasto), instrumentin (joka antaa edellisen lisäksi myös

[3] Integraalilla $\frac{1}{4\pi} \int_X (I + \vec{a} \cdot \vec{b}) d\vec{b}$ tarkoitetaan niin sanottua invarianttia (eli Haarin mitan suhteen) integrointia yksikköpallon kuorella.

mittauksen aiheuttaman tilamuunnoksen) sekä mittausmallien kautta saadaan mittaustapahtumaa analysoitua eri tavoin. Tässä alaluvussa keskitytään mittalaitteen kvanttimekaanisen mallinnuksen kautta määrittyvään oikeasti mitattuun suureeseen.

Mitattava systeemi sekä mittalaite voidaan nähdä yhdistettynä systeeminä, joiden Hilbertin avaruudet ovat $\mathcal{H}$ sekä $\mathcal{H}_m$ vastaavasti. Olkoon mittalaitteen alkutila $P[\phi] \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_m)$. Mittalaitteen ja mitattavan systeemin välistä vuorovaikutusta (mittauskytkentää) kuvataan unitaarioperaattorilla $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_m)$. Määritellään lisäksi niin sanottu asteikkosuure $F : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to P(\mathcal{H}_m)$, joka kuvaa mittalaitteesta saatavaa todennäköisyysjakaumaa. Tällainen mittausmalli määrää alkuperäisen systeemin mitatun suureen E ehdosta

$$\mathrm{tr}[E(X)P[\psi]] = \mathrm{tr}[U^* P[\psi \otimes \phi] U (I \otimes F(X))] \qquad \forall X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \psi \in \mathcal{H}.$$

Tätä ehtoa kutsutaan yleisesti todennäköisyyksien reprodusointiehdoksi. Asteikkosuureen ominaisuuksia käyttäen todetaan helposti, että E todellakin on POM. Määrittelemällä kuvaus $V_\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_m$ kaavalla $V_\phi \psi = \phi \otimes \psi$ voidaan kirjoittaa

$$\langle \psi | E(X) \psi \rangle = \langle \psi | V_\phi^* U^* (I \otimes F(X)) U V_\phi \psi \rangle \qquad \forall X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \psi \in \mathcal{H}.$$

Näin ollen saadaan suureelle E kirjoitettua

$$E(X) = V_\phi^* U^* (I \otimes F(X)) U V_\phi.$$

Tämä suure ei ole aina spektraalimitta. Seuraava lause antaa karakterisoinnin sille, milloin esitellyn mittausmallin antama suure on tarkka. Ennen lausetta on kuitenkin hyvä esitellä seuraava pieni aputulos.

Lemma 1.3. Olkoon $Q, P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ ja oletetaan lisäksi, että $PQP \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$. Tällöin P ja Q kommutoivat.

Todistus. Ensinnäkin jos $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on sellainen, että $A^*A = 0$, niin $A = 0$, sillä tällöin jokaisella $\psi \in \mathcal{H}$

$$0 = \langle \psi | A^* A \psi \rangle = \langle A\psi | A\psi \rangle = \|A\psi\|^2,$$

joten A on nollakuvaus.

Oletuksen nojalla

$$\begin{aligned}((I-P)QP)^*(I-P)QP &= PQ(I-P)QP \\ &= PQP - PQPQP \\ &= PQP - (PQP)^2 \\ &= 0,\end{aligned}$$

joten $(I-P)QP = 0$. Näin ollen $QP = PQP \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, joten erityisesti $QP = (QP)^* = PQ$. □

Lause 1.5. Olkoon F tarkka suure. Edellä esitetyn mittausmallin mukainen suure

$$E(X) = V_\phi^* U^*(I \otimes F(X))UV_\phi$$

on tarkka silloin ja vain silloin kun operaattorit $I \otimes P[\phi]$ sekä $U^*(I \otimes F(X))U$ kommutoivat kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Todistus. Oletetaan ensin kommutointi. Olkoon $\{\alpha_i \otimes \beta_j\}_{i,j}$ avaruuden $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_m$ jokin kanta. Sisä- ja tensoritulon ominaisuuksien nojalla

$$\begin{aligned}\langle \alpha_i \otimes \beta_j | V_\phi V_\phi^* \alpha_k \otimes \beta_l \rangle &= \langle \alpha_i \otimes \beta_j | V_\phi^*(\alpha_k \otimes \beta_l) \otimes \phi \rangle \\ &= \langle \alpha_i | V_\phi^*(\alpha_k \otimes \beta_l) \rangle \langle \beta_j | \phi \rangle \\ &= \langle \alpha_i | \alpha_k \rangle \langle \phi | \beta_l \rangle \langle \beta_j | \phi \rangle \\ &= \langle \alpha_i \otimes \beta_j | I \otimes P[\phi](\alpha_k \otimes \beta_l) \rangle.\end{aligned}$$

Näin ollen $V_\phi V_\phi^* = I \otimes P[\phi]$. Koska lisäksi $V_\phi = (I \otimes P[\phi])V_\phi$ ja F on määritelmänsä mukaan tarkka suure, niin voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}E(X) &= V_\phi^* U^*(I \otimes F(X))UV_\phi \\ &= V_\phi^* U^*(I \otimes F(X))UU^*(I \otimes F(X))UV_\phi \\ &= V_\phi^* U^*(I \otimes F(X))UU^*(I \otimes F(X))U(I \otimes P[\phi])V_\phi \\ &= V_\phi^* U^*(I \otimes F(X))U(I \otimes P[\phi])U^*(I \otimes F(X))UV_\phi \\ &= V_\phi^* U^*(I \otimes F(X))UV_\phi V_\phi^* U^*(I \otimes F(X))UV_\phi \\ &= E(X)^2.\end{aligned}$$

Näin ollen E on spektraalimitta eli tarkka suure.

Oletetaan nyt, että suure E on tarkka. Merkitään

$$\begin{aligned} P &:= I \otimes P[\phi] \\ Q &:= U^*(I \otimes F(X))U. \end{aligned}$$

Ensinnäkin $(PQP)^* = PQP$, sillä P ja Q ovat itseadjungoituja. Toiseksi

$$\begin{aligned} (PQP)^2 &= PQPQP \\ &= (I \otimes P[\phi])U^*(I \otimes F(X))U(I \otimes P[\phi])U^*(I \otimes F(X))U(I \otimes P[\phi]) \\ &= V_\phi E(X)^2 V_\phi^* \\ &= V_\phi E(X) V_\phi^* \\ &= (I \otimes P[\phi])U^*(I \otimes F(X))U(I \otimes P[\phi]) \\ &= PQP. \end{aligned}$$

Näin ollen $PQP \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, joten edellisen lemman nojalla saadaan $PQ = QP$, joka todistaa väitteen. □

1.3.1 Paikan standardimittaus

Tämän alaluvun tarkoitus on motivoida vielä konkreettisella esimerkillä fysikaalisen suureen positiivioperaattorimittaesitystä. Seuraavassa annettava esimerkki olisi voinut olla kvanttifysiikan kehityksen kannalta erittäin merkittävässä roolissa, jos John von Neumann olisi aikanaan laskenut kyseisen laskun loppuun asti kirjassaan *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* [29]. Kyseisen kirjan kahdella viimeisellä sivulla von Neumann nimittäin käsittelee paikan standardimittausta esimerkkinä siitä, miten paikan tarkka mittaus ei ole koskaan mahdollista. Neumannin aiempien kvanttimekaniikan alaan liittyvien tulosten perusteella voisi kuvitella, että laskiessaan tässä esiteltävän laskun loppuun asti olisi hän saattanut huomata, että tuolloin valloilla ollut käsitys fysikaalisen suureen spektraalimittaesityksestä on liian rajoittava, joka olisi saattanut motivoida häntä tekemään tarvittavia yleistyksiä fysikaalisen suureen esitystapaan.

Esimerkki 1.7. Tarkastellaan paikan standardimittausta. Tässä sekä mitattavan systeemin että mittalaitteen Hilbertin avaruudet ovat molemmat $L^2(\mathbb{R})$. Mittauskytkentää mallintava operaattori on $U = e^{-i\lambda Q \otimes P_0}$, missä P_0 on mittalaitteen liikemääräsuure. Asteikkosuurena toimii puolestaan $F(X) = E^{Q_0}(\lambda X)$ eli mittalaitteen skaalattu paikkasuure. Tämän mittauksen toteuttava suure on todennäköisyyksien reprodusointikaavan mukaan

$$E(X) = V_\phi^* e^{i\lambda Q\otimes P_0}(I \otimes E^{Q_0}(\lambda X))e^{-i\lambda Q\otimes P_0}V_\phi.$$

Tavoitteena on näyttää, että E on sumea paikkasuure, ts. $E(X) = (\chi_X * f)(Q)$, missä f on (λ-skaalattu) todennäköisyystiheys. Kirjoitetaan ensin operaattori U toisessa muodossa. Ensinnäkin spektraalihajotelman mukaan

$$\begin{aligned}
U &= e^{-i\lambda Q\otimes P_0} \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda z} dE^{Q\otimes P_0}(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\lambda xy} dE^Q(x) \otimes dE^{P_0}(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} dE^Q(x) \otimes e^{-i\lambda x P_0}.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
\langle\psi|E(X)\psi\rangle &= \langle\psi\otimes\phi|e^{i\lambda Q\otimes P_0}(I\otimes E^{Q_0}(\lambda X))e^{-i\lambda Q\otimes P_0}\psi\otimes\phi\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \langle\psi\otimes\phi|dE^Q(x)\otimes e^{i\lambda x P_0}(I\otimes E^{Q_0}(\lambda X))dE^Q(x')\otimes e^{-i\lambda x' P_0}\psi\otimes\phi\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \langle\psi|dE^Q(x)dE^Q(x')\psi\rangle\langle\phi|e^{i\lambda x P_0}E^{Q_0}(\lambda X)e^{-i\lambda x' P_0}\phi\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} \langle\psi|dE^Q(x)\psi\rangle\langle\phi|e^{i\lambda x P_0}E^{Q_0}(\lambda X)e^{-i\lambda x P_0}\phi\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} \langle\psi|dE^Q(x)\psi\rangle\langle\phi|E^{Q_0}(\lambda(X+x))\phi\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} p_\phi^{Q_0}(\lambda(X+x))dp_\psi^Q(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\lambda(X+x)} dp_\phi^{Q_0}(y)dp_\psi^Q(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\lambda(X+x)} |\phi(y)|^2|\psi(x)|^2 dydx \\
&= \langle\psi|(\chi_X * f)(Q)\psi\rangle.
\end{aligned}$$

Neljännessä yhtäsuuruudessa on käytetty spektraalimitan multiplikatiivisuutta ja viidennessä kovarianssia. Täten paikan standardimittaus tuottaa kaavalla $f(x) = \lambda|\phi(-\lambda x)|^2$ määritellyllä tiheydellä sumennetun paikkasuureen.

2 Yhteismittauksista

Kysymys kahden (tai useamman) fysikaalisen suureen yhteismitattavuudesta on kvanttimekaniikassa kiistämättä keskeinen kysymys. Yhteismittauksen ideana on, että fysikaaliselta systeemiltä mitataan samanaikaisesti useamman kuin yhden suureen arvo. Toistamalla tällainen mittaus monta kertaa saadaan mittaustulostilasto, joka voidaan nähdä mitattujen suureiden määrittelemän yhteissuureen mittaustulostilastona. Täten välttämätön ehto yhteismitattavuudelle on mitattavien suureiden *koeksistenssi*. Tämä tarkoittaa sitä, että on olemassa suure, jonka arvojoukko sisältää kaikki yhteismittauksen mahdollisesti tuottamat tulokset. Lisäksi yhteismittauksessa esiintyvältä yhteissuureelta vaaditaan ns. marginaaliominaisuus, jota voidaan intuitiivisesti ajatella siten, että mittaustilastosta voidaan haluttaessa lukea pelkästään yhden suureen jakauma.

Vaikka kaikki suureet eivät ole yhteismitallisia, niin vähentämällä mittaustarkkuutta saadaan yhteismittaus aikaan. Tällaista mittaustarkkuuden vähentämistä voidaan mallintaa sumennettujen suureiden avulla. Tässä luvussa esitetään yhteismittausten teorian peruskäsitteitä sekä tuloksia. Erityistä painoa saavat juuri sumennettujen suureiden yhteismittaukset.

2.1 Työkaluja yhteismittausten käsittelyyn

Tässä jaksossa on seurattu hyvin pitkälti artikkelin [1] esitystapaa. Lisäksi lähteenä on käytetty teosta [4]. Merkitään suureen arvojoukkoa (topologinen avaruus) ja tämän joukon Borelin sigma-algebraa symboleilla Ω ja $\mathcal{B}(\Omega)$ tässä järjestyksessä.

2.1.1 Yhteissuure

Suureiden yhteismitattavuuden kannalta oleellista on yhteissuureen olemassaolo. Määritellään tämä käsite seuraavaksi.

Määritelmä 2.1. Sanotaan, että suure $E : \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on suureiden $E_1 : \mathcal{B}(\Omega_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ja $E_2 : \mathcal{B}(\Omega_2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ yhteissuure, jos kaikilla $X \in \mathcal{B}(\Omega_1)$ ja $Y \in \mathcal{B}(\Omega_2)$ on voimassa

$$E_1(X) = E(X \times \Omega_2) \tag{1}$$

$$E_2(Y) = E(\Omega_1 \times Y) \tag{2}$$

Seuraavat kaksi lausetta ovat perustyökaluja yhteismittausten käsittelyssä.

Lause 2.1. Jos suureilla E_1 ja E_2 on enemmän kuin yksi yhteissuure, niin yhteissuureita on tällöin ääretön määrä.

Todistus. Olkoon E sekä $\tilde{E}$ suureiden E_1 ja E_2 yhteissuureita. Määritellään $\forall\lambda \in [0,1]$ kuvaus

$$C_\lambda(X,Y) = \lambda E(X,Y) + (1-\lambda)\tilde{E}(X,Y).$$

Tämä on kahden POMin konveksikombinaationa itsekin POM. Lisäksi marginaalitehdot toteutuvat selvästi. Näin ollen se, että kahden suureen yhteissuure ei ole yksikäsitteinen, implikoi, että yhteissuureita on olemassa ääretön määrä. □

Lause 2.2. Olkoon $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ unitaarinen. Suureilla E_1 ja E_2 on yhteissuure jos ja vain jos suureilla UE_1U^* ja UE_2U^* on yhteissuure.

Todistus. Oletetaan ensin, että suureilla E_1 ja E_2 on yhteissuure E. Tällöin UEU^* on POM, sillä E on POM. Lisäksi marginaaleina saadaan suureet UE_1U^* ja UE_2U^*. Oletetaan nyt, että suureilla UE_1U^* ja UE_2U^* on yhteissuure $\tilde{E}$. Tällöin $U^*\tilde{E}U$ on POM, joka antaa marginaaleinaan suureet E_1 ja E_2. □

Esimerkki 2.1. Olkoon $\vec{a} = (a,0,0)$ ja $\vec{b} = (0,b,0)$ $\mathbb{R}^3$:n vektoreita, joille pätee $a^2 + b^2 \leq 1$. Määritellään ns. sumeat spinsuureet $S_a, S_b : \mathcal{B}(\{-1,1\}) \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ kaavoilla

$$S_a(\pm 1) = \frac{1}{2}(I \pm \vec{a}\cdot\vec{\sigma}),\ S_b(\pm 1) = \frac{1}{2}(I \pm \vec{b}\cdot\vec{\sigma}),$$

missä $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. Tulevissa jaksoissa tullaan antamaan karakterisointi tällaisten suureiden yhteismitattavuudelle, mutta tässä vaiheessa riittää todeta, että näille suureille löytyy yhteissuure , koska vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ normit on sopivasti rajattu. Määritellään kuvaus $S_{ab} : \mathcal{B}(\{-1,1\}\times\{-1,1\}) \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ kaavalla

$$S_{ab}(X_1, X_2) = \frac{1}{4}(I + X_1\sigma_x a + X_2\sigma_y b),$$

missä $X_1, X_2 \in \{-1,1\}$. Näin määritelty kuvaus on positiivinen, sillä sen kuvajoukon matriisien ominaisarvot ovat $\frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{a^2+b^2})$, jotka ovat positiivisia. Kun vielä huomioidaan kuvauksen additiivisuus, nähdään, että S_{ab} on semispektraalimitta eli suure. Lisäksi näin määritellylle suureelle marginaaliehdot toteutuvat. Esimerkiksi ensimmäiseksi marginaaliksi saadaan

$$\begin{aligned}
S_{ab}(\pm 1, \{-1, 1\}) &= \frac{1}{4}(I \pm \sigma_x a + \sigma_y b) + \frac{1}{4}(I \pm \sigma_x a - \sigma_y b) \\
&= \frac{1}{2}(I \pm \sigma_x a) \\
&= S_a(\pm 1),
\end{aligned}$$

kuten yhteissuureelle kuulukin.

Esimerkki 2.2. Tarkastellaan vielä edellisen lauseen innoittamana yllä olevaa esimerkkiä. Määritellään unitaarioperaattori $U = e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_z}$. Nyt operaattorilla U muunnettut suureet saavat muodon

$$\begin{aligned}
US_a(\pm 1)U^* &= \frac{1}{2}(I \mp \sigma_y a) \\
US_b(\pm 1)U^* &= \frac{1}{2}(I \pm \sigma_x b).
\end{aligned}$$

Edellisen lauseen mukaiseksi yhteissuureeksi saadaan nyt

$$US_{ab}(X_1, X_2)U^* = \frac{1}{4}(I - X_1\sigma_y a + X_2\sigma_x b).$$

Tämä kuvaus on selvästi suure ja esimerkiksi ensimmäisenä marginaalina saadaan

$$\begin{aligned}
US_{ab}(\pm 1, \{-1, 1\})U^* &= \frac{1}{4}(I \mp \sigma_y a + \sigma_x b) + \frac{1}{4}(I \mp \sigma_y a - \sigma_x b) \\
&= \frac{1}{2}(I \mp \sigma_y a) \\
&= US_a(\pm 1)U^*,
\end{aligned}$$

kuten pitääkin.

2.1.2 Funktionaalinen koeksistenssi

Toinen yhteismittausten teorian kannalta oleellinen käsite on suureiden funktionaalinen koeksistenssi. Funktionaalinen koeksistenssi on yhtäpitävää edellä esitellyn yhteissuureen olemassaolon kanssa.

Määritelmä 2.2. Suureet $E_1 : \mathcal{B}(\Omega_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ja $E_2 : \mathcal{B}(\Omega_2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ovat funktionaalisesti koeksistentit, jos on olemassa suure $E : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, jonka funktioita E_1 ja E_2 ovat. Tämä tarkoittaa, että on olemassa mitalliset funktiot $f_1 : \Omega \to \Omega_1$ ja

$f_2 : \Omega \to \Omega_2$ s.e. kaikilla $X \in \mathcal{B}(\Omega_1)$, $Y \in \mathcal{B}(\Omega_2)$,

$$E_1(X) = E(f_1^{-1}(X)) \tag{3}$$

$$E_2(Y) = E(f_2^{-1}(Y)). \tag{4}$$

Esimerkki 2.3. Jatketaan esimerkkiä 2.1 näyttämällä, että siinä määritellyt suureet $S_a(\pm 1) = \frac{1}{2}(I \pm \vec{a} \cdot \vec{\sigma})$ ja $S_b(\pm 1) = \frac{1}{2}(I \pm \vec{b} \cdot \vec{\sigma})$ ovat funktionaalisesti koeksistentit, jos niillä on esimerkissä 2.1 määritelty yhteissuure S_{ab}. Määrittelemällä funktiot $f_1, f_2 : \{-1, 1\} \times \{-1, 1\} \to \{-1, 1\}$ kaavoilla $f_1(a, b) = a$ ja $f_2(a, b) = b$. Tästä nähdään, että S_a ja S_b ovat funktionaalisesti koeksistentit:

$$S_{ab}(f_1^{-1}(\pm 1)) = S_{ab}(\pm 1, \{-1, 1\}) = S_a(\pm 1)$$

$$S_{ab}(f_2^{-1}(\pm 1)) = S_{ab}(\{-1, 1\}, \pm 1) = S_b(\pm 1)$$

2.1.3 Kaksoissuure

Määritelmä 2.3. Kuvaus $B : \mathcal{B}(\Omega_1) \times \mathcal{B}(\Omega_2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on positiivioperaattorikaksoismitta, jos kaikilla $X \in \mathcal{B}(\Omega_1)$ ja $Y \in \mathcal{B}(\Omega_2)$ kuvaukset

$$X \mapsto B(X, Y)$$

$$Y \mapsto B(X, Y)$$

ovat positiivioperaattorimittoja. Suureilla $E_1 : \mathcal{B}(\Omega_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ja $E_2 : \mathcal{B}(\Omega_2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on kaksoissuure B, jos B on positiivioperaattorikaksoismitta ja lisäksi kaikilla $X \in \Omega_1$ ja $Y \in \Omega_2$ on voimassa

$$B(X, \Omega_2) = E_1(X)$$

$$B(\Omega_1, Y) = E_2(Y)$$

Kaksoissuure muistuttaa rakenteeltaan yhteissuuretta ja voidaankin osoittaa, että kahdella suureella on kaksoissuure jos ja vain jos niillä on yhteissuure. Olennainen ero yhteissuureella ja kaksoissuureella on niiden arvojoukoissa: kaksoissuureen arvojoukko on karteesinen tulo $\mathcal{B}(\Omega_1) \times \mathcal{B}(\Omega_2)$ kun taas yhteissuureen arvojoukko on $\mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Huomautus 2.1. Esimerkiksi tässä työssä tarkasteltavat suureet ovat pääosin diskreettejä, jolloin suureiden arvojouokkojen Borelin sigma-algebrat ovat joukkojen sisältämien yksiöitten (ja niiden yhdisteiden) generoimia, ts. ne vastaavat potenssijoukkoja. Näin ollen diskreetissä tapauksessa saadaan suoralla laskulla $\mathcal{B}(\Omega_1) \times \mathcal{B}(\Omega_2) = \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Ero kaksoissuureen ja yhteissuureen välille tulee vasta jatkuvassa tapauksessa: esimerkiksi $\mathcal{B}([0,1]) \times \mathcal{B}([0,1]) \neq \mathcal{B}([0,1] \times [0,1])$. Tämän näkee helposti ottamalla oikeanpuoleisesta joukosta jonkin alkion, joka ei ole tulomuotoa. Esimerkiksi avoimesta (tai suljetusta) yksikköympyrästä joukkoon $[0,1] \times [0,1]$ jäävä alue on tällainen.

Esimerkki 2.4. Jatketaan edelleen esimerkkejä 2.1 ja 2.3. Näytetään, että suureiden S_a ja S_b funktionaalisesta koeksistenssista seuraa kaksoissuureen olemassaolo. Määritellään kuvaus $B : \mathcal{B}(\{-1,1\}) \times \mathcal{B}(\{-1,1\}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (heikosti) kaavalla

$$\langle\psi|B(X,Y)\psi\rangle = \langle\psi|S_{ab}(f_1^{-1}(X) \cap f_2^{-1}(Y))\psi\rangle, \ \psi \in \mathcal{H}.$$

Kuvaus B on positiivinen, sillä $\langle\psi|S_{ab}(Z)\psi\rangle \geq 0 \ \forall Z \in \mathcal{B}(\{-1,1\}^2)$. Myös marginaaliehdot toteutuvat, sillä kaikilla $X, Y \in \mathcal{B}(\{-1,1\})$ saadaan:

$$\begin{aligned}
\langle\psi|B(X,\{-1,1\})\psi\rangle &= \langle\psi|S_{ab}(X \times \{-1,1\})\psi\rangle = \langle\psi|S_a(X)\psi\rangle \\
\langle\psi|B(\{-1,1\},Y)\psi\rangle &= \langle\psi|S_{ab}(\{-1,1\} \times Y)\psi\rangle = \langle\psi|S_b(Y)\psi\rangle.
\end{aligned}$$

Jotta B olisi kaksoissuure, tulee vielä näyttää, että kaikilla $X, Y \in \mathcal{B}(\{-1,1\})$ kuvaukset $X \mapsto \langle\psi|B(X,Y)\psi\rangle$ ja $Y \mapsto \langle\psi|B(X,Y)\psi\rangle$ ovat additiivisia. Tämäkin ominaisuus on selvä, esimerkiksi:

$$\begin{aligned}
\langle\psi|B(+1,\{-1,+1\})\psi\rangle =& \langle\psi|S_{ab}(+1,\{-1,+1\})\psi\rangle \\
=& \langle\psi|S_{ab}((+1,-1) \cup (+1,+1))\psi\rangle \\
=& \langle\psi|S_{ab}(+1,-1)\psi\rangle + \langle\psi|S_{ab}(+1,+1)\psi\rangle \\
=& \langle\psi|B(+1,-1)\psi\rangle + \langle\psi|B(+1,+1)\psi\rangle
\end{aligned}$$

Vastaava ehto saadaan muille mahdollisille tapauksille täysin identtisellä tavalla. B:n marginaalifunktiot ovat siis positiivioperaattoriarvoisia additiivisia kuvauksia, siis positiivioperaattorimittoja. Näin ollen B on kaksoissuure parille S_a, S_b.

Esitellään vielä yksi esimerkki ennen kuin edellä käydyt määritelmät nivotaan yhdeksi lauseeksi.

Esimerkki 2.5. Tarkastellaan edelleen esimerkkien 2.1, 2.3 ja 2.4 mukaista tilannetta. Oletetaan tällä kertaa kuitenkin vain, että suureparilla S_a, S_b on kaksoissuure B_{ab}. Jokaisella $\psi \in \mathcal{H}$ kaksoissuure B_{ab} määrää kaksoismitan $\mathcal{B}(\{-1,1\}) \times \mathcal{B}(\{-1,1\}) \ni$

$(X, Y) \mapsto \langle\psi|B_{ab}(X, Y)\psi\rangle \in [0, 1]$. Tämä kaksoismitta puolestaan määrää yksikäsitteisen mitan $\mu(B_{ab}, \psi) : \mathcal{B}(\{-1, 1\}^2) \to [0, 1]$, jolle [2]

$$\mu(B_{ab}, \psi)(X \times Y) = \langle\psi|B_{ab}(X, Y)\psi\rangle.$$

Määritellään nyt kuvaus $E_{ab} : \mathcal{B}(\{-1, 1\}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (heikosti) kaavalla $\langle\psi|E_{ab}(Z)\psi\rangle = \mu(B_{ab}, \psi)(Z)\ \forall Z \in \mathcal{B}(\{-1, 1\}^2), \psi \in \mathcal{H}$. E_{ab} on semispektraalimitta, sillä B_{ab} on semispektraalimitta. Lisäksi näin määritelty E_{ab} toteuttaa yhteissuureelta vaaditut marginaaliehdot, sillä B_{ab} on kaksoissuure.

Edellä käydyt esimerkit osoittavat, että yhteissuureen olemassaolo, funktionaalinen koeksistenssi sekä kaksoissuureen olemassaolo ovat yhtäpitäviä kahden kaksiarvoisen suureen tapauksessa. Seuraava lause muotoilee tämän tuloksen yleisessä muodossa. Lauseen todistus on esitetty esimerkiksi artikkelin [1] sivun 4 lauseessa 2.6. Todistuksen idea löytyy myös esimerkeistä 2.3,2.4 ja 2.5, joiden laskutoimitukset yleistyvät suoraan lauseen tilanteeseen.

Lause 2.3. Kahdelle suureelle $E_1 : \mathcal{B}(\Omega_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ja $E_2 : \mathcal{B}(\Omega_2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

a) E_1:llä ja E_2:lla on yhteissuure

b) E_1 ja E_2 ovat funktionaalisesti koeksistentit

c) E_1:llä ja E_2:lla on kaksoissuure.

Lause 2.4. Jos suureet $E_1 : \mathcal{B}(\Omega_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ja $E_2 : \mathcal{B}(\Omega_2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kommutoivat, niin niillä on olemassa yhteissuure.

Todistus. Määritellään suure $E : \mathcal{B}(\Omega_1) \times \mathcal{B}(\Omega_2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kaavalla $E(X \times Y) = E_1(X)E_2(Y)$. Tällöin marginaaliehdot toteutuvat selvästi. Kommutatiivisuudesta saadaan E:n positiivisuus seuraavasti: kaikilla $X \times Y \in \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ ja $\psi \in \mathcal{H}$ saadaan

$$\langle\psi|E(X \times Y)\psi\rangle = \langle\psi|E_1(X)E_2(Y)\psi\rangle = \langle E_1(X)^{1/2}\psi|E_2(Y)E_1(X)^{1/2}\psi\rangle \geq 0,$$

jossa viimeisessä yhtäsuuruudessa on käytetty tietoa, että suureiden kommutoinnista seuraa niiden neliöjuurten kommutatiivisuus. Lisäksi E on selvästi normitettu, sillä E_1 ja E_2 ovat. Näin ollen suureille E_1 ja E_2 löytyi kaksoissuure, joten edellisen lauseen nojalla niillä on olemassa myös yhteissuure. □

2.1.4 Post-prosessointi

Aiemmin esitellyt yhteismittauksen käsitteet ja seuraavassa alaluvussa esiteltävä koeksistenssin käsite ovat olleet pitkään käytössä. Sen sijaan tässä luvussa esiteltävä suureen post-prosessointi on modernimpi tapa puhua yhteismitattavuudesta. Post-prosessointi näyttää määritelmänsä nojalla yleisemmältä käsitteeltä kuin yhteissuure, mutta voidaan osoittaa, että yhteissuureen olemassaolo (ainakin kahden suureen tapauksessa) on yhtäpitävää sen kanssa, että on olemassa suure, josta saadaan post-prosessoimalla alkuperäiset suureet. [20] Tässä alaluvussa esitellään post-prosessointi vain äärellisulotteisessa tapauksessa, sillä ääretönulotteinen versio tarvitsisi pitkät matemaattiset pohjustukset eikä se ole tämän työn kannalta oleellinen. Tarkempi analyysi aiheesta löytyy artikkelista [20], jota tässäkin on käytetty pohjana.

Määritelmä 2.4. N-arvoinen suure E saadaan L-arvoisesta suureesta G post-prosessoimalla, jos on olemassa vakiot $\mu_x(a_i) \in [0,1]$ s.e. $\sum_{i=1}^{N} \mu_x(a_i) = 1$ $\forall x \in \{1, ..., L\}$ ja

$$E(a_i) = \sum_{x=1}^{L} \mu_x(a_i) G(x)$$

Lause 2.5. Olkoon E_1 ja E_2 N- ja M-arvoisia suureita. Näillä suureilla on olemassa yhteissuure jos ja vain jos molemmat suureet saadaan postprosessoimalla jostain suureesta G.

Todistus. Oletetaan, että suureilla E_1 ja E_2 on yhteissuure E. Numeroidaan E:n efektit järjestyksessä

$$E(a_1, b_1), E(a_1, b_2), ..., E(a_1, b_M), E(a_2, b_1), E(a_2, b_2), ..., E(a_N, b_M).$$

Määritellään kertoimet $\mu_x(a_i)$ kaavalla

$$\mu_x(a_i) = \begin{cases} 1, & x \in \{1 + iM - M, 2 + iM - M, ..., iM\} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}.$$

Määritellään vastaavasti kertoimet $\nu_x(b_j)$ kaavalla

$$\nu_x(b_j) = \begin{cases} 1, & x \in \{j, j + M, ..., j + M(N - 1)\} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}.$$

Nyt E_1 ja E_2 saadaan E:stä post-prosessoitua, sillä $\sum_{i=1}^{N} \mu_x(a_i) = 1$ ja $\sum_{j=1}^{N} \nu_x(b_j) = 1$ $\forall x \in \{1, ..., NM\}$ sekä lisäksi

$$\begin{aligned} E_1(a_i) &= \sum_{x=1}^{NM} \mu_x(a_i) E(x) \\ E_2(b_j) &= \sum_{x=1}^{NM} \nu_x(b_j) E(x). \end{aligned}$$

Olkoon nyt E_1 ja E_2 kuten edellä, mutta oletetaan, että niillä on yhteissuureen sijaan olemassa suure G, josta ne saadaan post-prosessoitua. Tällöin

$$\begin{aligned} E_1(a_i) &= \sum_{x} \mu_x(a_i) G(x) \\ E_2(b_j) &= \sum_{x} \nu_x(b_j) G(x). \end{aligned}$$

Määritellään uudet vakiot $\lambda_x(a_i, b_j)$ kaavalla

$$\lambda_x(a_i, b_j) = \mu_x(a_i)\nu_x(b_j).$$

Määritellään nyt uusi suure $\tilde{G}$ kaavalla

$$\tilde{G}(a_i, b_j) = \sum_{x} \lambda_x(a_i, b_j) G(x).$$

Tämä todellakin on suure, sillä kertoimet $\lambda_x(a_i, b_j)$ ovat ei-negatiivisia ja $\sum_{i,j} \lambda_x(a_i, b_j) = 1$. Uuden suureen marginaaleiksi saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{M} \tilde{G}(a_i, b_j) &= \sum_{x} \sum_{j=1}^{M} \lambda_x(a_i, b_j) G(x) = \sum_{x} \mu_x(a_i) G(x) = E_1(a_i) \\ \sum_{i=1}^{N} \tilde{G}(a_i, b_j) &= \sum_{x} \sum_{i=1}^{N} \lambda_x(a_i, b_j) G(x) = \sum_{x} \nu_x(b_j) G(x) = E_2(b_j), \end{aligned}$$

joka todistaa väitteen. □

2.1.5 Koeksistenssi

Kuten tämän luvun johdannossa todettiin, suureparin koeksistenssi on välttämätön ehto suureiden yhteismitattavuudelle. Määritellään tämä käsite seuraavaksi.

Määritelmä 2.5. Kaksi suuretta $E_1 : \mathcal{B}(\Omega_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ja $E_2 : \mathcal{B}(\Omega_2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ovat koeksistentit, jos on olemassa kolmas suure $E : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ s.e.

$$\mathrm{ran}(E_1) \cup \mathrm{ran}(E_2) \subseteq \mathrm{ran}(E)$$

Koeksistenssin määritelmä on osoittautunut hieman hankalaksi, ja siksi on otettu käyttöön aiemmin esitelty funktionaalisen koeksistenssin käsite. Välittömästi nähdään, että funktionaalisesti koeksistentti (ja näin ollen lauseen 2.3 ehdot täyttävä) suurepari E_1, E_2 on koeksistentti. Käänteinen tulos tunnetaan vain joissakin erityistapauksissa. Seuraava lause antaa yhden tällaisen tapauksen [1].

Lause 2.6. Kaksiarvoisille suureille koeksistenssi ja funktionaalinen koeksistenssi ovat yhtäpitävät.

Todistus. Selvästi funktionaalisesti koeksistentit suureet ovat koeksistentit. Käänteinen tulos sen sijaan vaatii perusteluja. Olkoon tätä varten E_1, E_2 : $\mathcal{B}(\{-1, 1\}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kaksiarvoisia suureita, jotka ovat koeksistentit. Tällöin on olemassa suure $E : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, jolle $E(X) = E_1(+1)$ ja $E(Y) = E_2(+1)$ joillakin $X, Y \in \mathcal{B}(\Omega)$. Määritellään nyt suure $\tilde{E} : \mathcal{B}(\{1, 2, 3, 4\}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ehdoilla

$$\begin{aligned}
\tilde{E}(1) &= E(X \cap Y) \\
\tilde{E}(2) &= E(X^c \cap Y) \\
\tilde{E}(3) &= E(X \cap Y^c) \\
\tilde{E}(4) &= E(X^c \cap Y^c).
\end{aligned}$$

Näin määritelty kuvaus $\tilde{E}$ todellakin on suure, sillä E on suure ja $\tilde{E}(\{1, 2, 3, 4\}) = E(\Omega) = I$. Määritellään kaksi kuvausta $f_1, f_2 : \{1, 2, 3, 4\} \to \{-1, 1\}$ kaavoilla

$$\begin{aligned}
f_1(1) &= f_1(3) = 1 \\
f_1(2) &= f_1(4) = -1 \\
f_2(1) &= f_2(2) = 1 \\
f_2(3) &= f_2(4) = -1.
\end{aligned}$$

Nyt $\tilde{E}(f_1^{-1}(\pm 1)) = E_1(\pm 1)$ ja $\tilde{E}(f_2^{-1}(\pm 1)) = E_2(\pm 1)$, joka osoittaa, että E_1 ja E_2 ovat funktionaalisesti koeksistentit. □

Mainittakoon tämän alaluvun loppuun vielä, että projektioarvoisille suureille koeksistenssi ja funktionaalinen koeksistenssi ovat yhtäpitäviä. Tämä on edelleen yhtäpitävää sen kanssa, että näitä suureita esittävät itseadjungoidut operaattori kommutoivat. Tämä tulos on jokseenkin luonnollinen, kun sitä katsoo esimerkiksi Heisenbergin epätarkkuusrelaation kannalta, jonka intuitiivinen ajatus on se, että kommutoimattomia tarkkoja suureita ei voi mitata tarkasti yhdessä. Itse asiassa myös hieman vahvempi tulos on voimassa ja se on esitetty seuraavassa lauseessa. Seuraavan lemman ja lauseen todistukset on koottu artikkeleista [1] ja [6].

Lemma 2.1. Olkoon $E : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ suure. Jos $E(X)^2 = E(X)$ jollain $X \in \mathcal{B}(\Omega)$, niin $E(X)E(Y) = E(Y)E(X)\ \forall\ Y \in \mathcal{B}(\Omega)$.

Todistus. Olkoon $X \in \mathcal{B}(\Omega)$ s.e. $E(X)^2 = E(X)$. Kaikilla $Y \in \mathcal{B}(\Omega)$ on voimassa $E(Y) = E(Y\backslash(X \cap Y)) + E(X \cap Y)$, joten

$$E(X) + E(Y) - E(X \cap Y) = E(X) + E(Y\backslash(X \cap Y)) = E(X \cup Y) \leq I.$$

Tästä saadaan $E(Y\backslash(X \cap Y)) \leq I - E(X)$. Lisäksi on voimassa $E(X \cap Y) \leq E(X)$. Näin ollen voidaan kirjoittaa:

$$\begin{aligned} &E(X \cap Y) = E(X)E(X \cap Y)E(X) \\ &E(Y\backslash(Y \cap X)) = (I - E(X))E(Y\backslash(Y \cap X))(I - E(X)) \end{aligned}$$

Täten saadaan:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(Y\backslash(X \cap Y)) + E(X \cap Y) \\ &= (I - E(X))E(Y\backslash(X \cap Y))(I - E(X)) + E(X)E(X \cap Y)E(X). \end{aligned}$$

Kertomalla tämä vasemmalta $E(X)$:llä saadaan $E(X)E(Y) = E(Y)E(X)$. □

Lause 2.7. Olkoon $E_1 : \mathcal{B}(\Omega_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ja $E_2 : \mathcal{B}(\Omega_2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kaksi suuretta. Jos edes toinen suureista on projektioarvoinen, niin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

a) E_1 ja E_2 kommutoivat

b) E_1 ja E_2 ovat funktionaalisesti koeksistentit

c) E_1 ja E_2 ovat koeksistentit.

Tällöin saatava kaksoissuure on yksikäsitteinen.

Todistus. Lauseiden 2.4 ja 2.3 avulla a):sta saadaan b). Puolestaan b):stä seuraa c) määritelmän nojalla. Oletetaan nyt, että E_1 ja E_2 ovat koeksistentit. Tällöin on olemassa suure E, jonka maalijoukko sisältää kaikki suureiden E_1 ja E_2 maalijoukkojen alkiot. Voidaan olettaa, että E_1 on projektioarvoinen. Tällöin edellisen lemman nojalla $E_1(X)E_2(Y) = E_2(Y)E_1(X)\ \forall\ X \in \mathcal{B}(\Omega_1), Y \in \mathcal{B}(\Omega_2)$, sillä $E_1(X), E_2(Y) \in \operatorname{ran}(E)$.

Todistetaan nyt saatavan kaksoissuureen yksikäsitteisyys. Oletetaan, että suureet E_1 ja E_2 ovat funktionaalisesti koeksistentit ja että E_1 on projektioarvoinen. Tällöin on olemassa kaksoissuure E. Koska

$$E(X \times Y) = E(X \times \Omega_2) - E(X \times Y^c) \leq E(X \times \Omega_2) = E_1(X),$$

niin on voimassa

$$E_1(X)E(X \times Y) = E(X \times Y).$$

Soveltamalla tätä joukon X komplementtiin saadaan

$$\begin{aligned} E_1(X)E(X^c \times Y) &= (I - E_1(X^c))E(X^c \times Y) \\ &= E(X^c \times Y) - E_1(X^c)E(X^c \times Y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} E_1(X)E_2(Y) &= E_1(X)E(\Omega_1 \times Y) \\ &= E_1(X)(E(X \times Y) + E(X^c \times Y)) \\ &= E(X \times Y). \end{aligned}$$

Kaksoissuure siis pakottuu olemaan muotoa $E(X \times Y) = E_1(X)E_2(Y)$. $\square$

2.2 Sumeiden suureiden yhteismittauksista

Vaikka kaikki suureparit eivät ole yhteismitattavia, niin yhteismitattomia suurepareja voidaan kuitenkin yhteismitata epätarkasti. Heikkoa mittaustarkkuutta voidaan mallintaa ns. sumeilla suureilla. Sumeat suureet ovat tarkoista (eli spektraalimittana esitettävistä) suureista saatavia epätarkkoja (eli semispektraalimittana esitettäviä) suureita. Esimerkiksi edellisessä alaluvussa käsitellyt esimerkit yhteismitattavuudesta sisälsivät kaikki sumeita spin-suureita, koska kaksi erisuuntaista tarkkaa spinsuuretta eivät ole koskaan yhteismitattavat, sillä ne eivät kommutoi. Aloitetaan sumeiden suureiden käsittely esimerkillä paikan ja liikemäärän yhteismittauksesta.

Esimerkki 2.6. Tarkastellaan Hilbertin avaruuden $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ tavanomaisia paikka- ja liikemääräoperaattoreita $\mathcal{Q}$ ja $\mathcal{P}$. Nämä eivät ole yhteismitattavia suureita, mutta niiden sumeat versiot ovat. Jokaisella yksikkövektorilla $\varphi \in C^\infty_\downarrow(\mathbb{R})$ (= nopeasti vähenevät sileät kuvaukset $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) voidaan määritellä niin sanottu faasiavaruussuure $E^\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ heikosti kaavalla

$$E^\varphi(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_Z |W_{qp}\varphi\rangle\langle W_{qp}\varphi| dq dp,$$

missä $W_{qp} = e^{i\frac{qp}{2}} e^{-iqP} e^{ipQ}$ on Weylin operaattori. Osoitetaan suoralla laskulla, että faasiavaruussuureen E^φ marginaalisuureet ovat juuri sumea paikka ja sumea liikemäärä. Olkoon tätä varten $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Paikkamarginaaliksi saadaan:

$$\begin{aligned}
\langle\psi|E^\varphi(X \times \mathbb{R})\psi\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_X \int_{\mathbb{R}} |\langle W_{qp}\varphi|\psi\rangle|^2 dp dq \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_X \int_{\mathbb{R}} | \int_{\mathbb{R}} \overline{e^{ipx}\varphi(x-q)}\psi(x) dx|^2 dp dq \\
&= \int_X \int_{\mathbb{R}} |(F\xi_q)(p)|^2 dp dq \\
&= \int_X ||F\xi_q||^2 dq \\
&= \int_X ||\xi_q||^2 dq \\
&= \int_X \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x-q)\psi(x)|^2 dx dq \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_X(q)|\varphi(x-q)|^2|\psi(x)|^2 dx dq \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\chi_X * |\varphi|^2)(x)|\psi(x)|^2 dx \\
&= \langle\psi|(\chi_X * |\varphi|^2)(Q)\psi\rangle,
\end{aligned}$$

missä $\chi_X * |\varphi|^2$ on funktioiden χ_X ja $|\varphi|^2$ konvoluutio ja $\xi_q(x) := \overline{\varphi(x-q)}\psi(x)$. Suure $(\chi_X * |\varphi|^2)(Q)$ on sumea paikkasuure ja todennäköisyystiheyttä $|\varphi|^2$ sanotaan sen sumeusparametriksi.

Lasketaan seuraavaksi liikemäärämarginaali. Tätä laskua helpottaa seuraava tieto:

$$FW_{qp}F^{-1} = e^{i\frac{qp}{2}}Fe^{-iqP}F^{-1}Fe^{ipQ}F^{-1} = e^{i\frac{qp}{2}}e^{-iqQ}e^{-ipP} = e^{iqp}W_{p,-q},$$

missä F on Fourier'n-Plancherelin operaattori. Tämän havainnon avulla liikemäärämarginaalin laskeminen saadaan palautettua paikkamarginaalin tapaukseen. Ensinnäkin

$$\langle\psi|W_{qp}\varphi\rangle = \langle F\psi|FW_{qp}F^{-1}F\varphi\rangle = \langle F\psi|W_{p,-q}F\varphi\rangle.$$

Täten liikemäärämarginaaliksi saadaan

$$\begin{aligned}
\langle\psi|E^{\varphi}(\mathbb{R}\times Y)\psi\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{Y}\int\limits_{\mathbb{R}}|\langle W_{p,-q}F\varphi|F\psi\rangle|^2 dqdp \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\chi_Y(p)|\hat{\varphi}(x-p)|^2|\hat{\psi}(x)|^2 dxdp \\
&= \langle\hat{\psi}|M_{\chi_Y*|\hat{\varphi}|^2}\hat{\psi}\rangle \\
&= \langle\psi|F^{-1}M_{\chi_Y*|\hat{\varphi}|^2}F\psi\rangle \\
&= \langle\psi|(\chi_Y*|\hat{\varphi}|^2)(P)\psi\rangle.
\end{aligned}$$

Näin ollen liikemäärämarginaalina saadaan sumea liikemääräsuure.

Huomattakoon, että marginaalisuureiden sumeusparametrit ovat Fourier'n muunnoksen päässä toisistaan. Tämä tarkoittaa sitä, että jos toinen suure mitataan tarkemmin eli sen sumeusparametria "kavennetaan", niin toisen suureen sumeusparametri "levenee"ja mittaustarkkuus kärsii. Tässä jaksossa tullaan käsittelemään juuri tämän tapaista problematiikkaa ja pyritään erityisesti tiettyjen diskreettien suureiden tapauksessa analysoimaan kysymystä siitä millainen sumennus riittää yhteismitattavuuteen.

2.2.1 Muutama huomio koskien suureiden sumentamista

Tässä alaluvussa seurataan pääosin kirjan [4] ja artikkelin [16] esitystapaa.

Vaikka tässä työssä tullaan sumentamaan suureita lähes poikkeuksetta sekoittamalla niitä ns. triviaalisuureen kanssa, niin tämä ei ole ainoa tapa tuottaa tarkasta suureesta sumea versio. Itse asiassa kyseessä on vain erityistapaus postprosessoinnista. Yleisemmin sumennus toteutetaan edellisen esimerkin tavoin ottamalla tarkasta suureesta konvoluutio jonkin todennäköisyysmitan kanssa. Diskreettien suureiden tapauksessa tämä tarkoittaa sitä, että jos E on d-arvoinen suure ja $\Lambda : \mathcal{B}(\{1, ..., d\}) \to [0,1]$ on todennäköisyysmitta, niin Λ:lla sumennettu E on suure

$$E_\Lambda(l) = \sum_{n=1}^{d} \Lambda(l-n)E(n), \tag{5}$$

missä Λ:n argumentti tulkitaan mod d. Tästä nähdään, että valitsemalla $\Lambda(0) = \lambda + \frac{1-\lambda}{d}$ ja $\Lambda(j) = \frac{1-\lambda}{d}, j \neq 0$ saadaan suure

$$E_{konv}(l) = \lambda E(l) + \frac{1-\lambda}{d}\sum_{n=1}^{d} E(n) = \lambda E(l) + \frac{1-\lambda}{d} I,$$

joka on juuri triviaalisuureella sekoitettu E.

Huomautus 2.2. Tämän työn puitteissa sumennuksista ei tarvita muuta kuin edellä mainittua konvoluutiota. Kuitenkin täydellisyyden vuoksi mainittakoon tässä, että konvoluutiokin voidaan nähdä erityistapauksena laajemmasta luokasta sumennuksia. Tämän näkemiseksi tarvitaan topologiset avaruudet Ω_1 sekä Ω_2 ja niiden Borelin sigma-algebrat $\mathcal{B}(\Omega_1)$ sekä $\mathcal{B}(\Omega_2)$. Määritellään kuvaus (Markovin ydin) $p : \mathcal{B}(\Omega_2) \times \Omega_1 \to [0,1]$, jolle $p(\cdot, \omega_1)$ on tn-mitta sigma-algebrassa $\mathcal{B}(\Omega_2)$ kaikilla $\omega_1 \in \Omega_1$ ja $p(X, \cdot)$ on mitallinen funktio joukossa Ω_1 kaikilla $X \in \mathcal{B}(\Omega_2)$. Nyt voidaan määritellä tarkasta suureesta $E : \mathcal{B}(\Omega_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ epätarkka versio $F : \mathcal{B}(\Omega_2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kaavalla

$$F(X) = \int_{\Omega_1} p(X, \omega) dE(\omega).$$

Diskreettien suureiden tapauksessa ($\Omega_1 = \{1, ..., N\}, \Omega_2 = \{1, ..., M\}$) tämä saadaan palautumaan edellä esitettyyn seuraavasti. Olkoon $E : \mathcal{B}(\Omega_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tarkka suure, jolle $E(n) = E_n$. Määritellään kuvaus $p : \mathcal{B}(\Omega_2) \times \Omega_1 \to [0,1]$ kaavalla

$$p(X, n) = \sum_{m \in X} \lambda_{mn},$$

missä λ_{mn} viittaa stokastisen matriisin[4] (λ_{mn}) alkio. Nyt sumennetun suureen arvot

[4]Stokastisella matriisilla tarkoitetaan tässä $M \times N$-matriisia, jonka pystyrivit summautuvat

voidaan laskea ja ne ovat

$$F(m) = \sum_n \lambda_{mn} E_n,$$

josta saadaan erityistapauksena kaavan (5) mukainen konvoluutio valitsemalla matriisiksi $\lambda_{mn} = \Lambda(m-n)$, sillä tällöin

$$\begin{aligned} F(m) &= \sum_n \lambda_{mn} E_n \\ &= \sum_n \Lambda(m-n)E(n) \\ &= E_\Lambda(m). \end{aligned}$$

Paikan ja liikemäärän tapauksessa puolestaan saadaan edellä esitetty sumennus ottamalla sellainen p, että sillä on tiheysfunktio $\rho(\omega', \omega) = e(\omega - \omega')$. Käytännössä sen sijaan, että annettaisiin ensin p ja etsittäisiin sille tiheysfunktio, riittää yleensä antaa vain jokin sopiva funktio e. Nyt sumennetuksi suureeksi tulee esimerkiksi paikkasuureen tapauksessa

$$\begin{aligned} F(X) &= \int_{\mathbb{R}} p(X, \omega) dE^Q(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_X e(\omega - \omega') d\omega' dE^Q(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\chi_X * e)(\omega) dE^Q(\omega). \end{aligned}$$

Valitsemalla $e = |\varphi|^2$ saadaan aiemmin esillä ollut paikkasuureen sumennus.

Tulevissa tarkasteluissa suureita sumennettaan pääosin konveksikombinoimalla niitä triviaalisuureen $\frac{1}{d}I$ kanssa. Tällainen sumennus voitaisiin toteuttaa myös sumentamalla tilaa ja mittaamalla tarkka suure. Sumennetuksi tilaksi tulisi tällöin $\lambda\rho + (1-\lambda)\frac{1}{d}I$, jossa $\lambda \in [0, 1]$ ja ρ on tila, jossa sumea suure olisi alun perin haluttu mitata. Tietyissä konteksteissa puhutaan sumennuksesta tarkoittaen tilan sumentamista. Esimerkiksi Bellin epäyhtälöiden eräänä luokittelukriteerinä pidetään niiden kykyä sietää tilan sumeutta. Tässä työssä ei kuitenkaan keskitytä tilojen sumentamiseen, vaan sumennuksella tarkoitetaan aina suureen sumentamista, ellei toisin mainita.

---

ykköseksi ja jonka alkiot ovat ei-negatiivisia.

2.2.2 Kaksiarvoisten suureiden yhteismittauksesta

Tulevissa luvuissa ollaan monta kertaa tekemisissä kaksiarvoisten suureiden kanssa. Seuraava lause antaa kahden kaksiarvoisen suureen yhteismitattavuudelle (yhteissuureen olemassaololle) yksinkertaisen karakterisoinnin.

Lause 2.8. Olkoon E_1 ja E_2 kaksiarvoisia suureita, ts. $E_i(+1) = F_i$ ja $E_i(-1) = I - F_i$, $i = 1, 2$. Suureilla E_1 ja E_2 on olemassa yhteissuure jos ja vain jos on olemassa efekti F_{12} s.e.

$$\begin{aligned}
&F_{12} \leq F_1, \\
&F_{12} \leq F_2 \; ja \\
&0 \leq F_1 + F_2 - F_{12} \leq I
\end{aligned}$$

Todistus. Oletetaan, että on olemassa efekti F_{12}, jolle lauseen ehdot toteutuvat. Tällöin voidaan määritellä suure E ehdoista

$$\begin{aligned}
E(+,+) &= F_{12} \\
E(+,-) &= F_1 - F_{12} \\
E(-,+) &= F_2 - F_{12} \\
E(-,-) &= I - (F_1 + F_2 - F_{12}).
\end{aligned}$$

Välittömästi nähdään, että näin määritelty suure on E_1:n ja E_2:n yhteissuure.

Oletetaan nyt, että suureilla E_1 ja E_2 on olemassa yhteissuure E. Tällöin $E(X) = F_1$ ja $E(Y) = F_2$ joillakin X ja Y. E:n additiivisuudesta seuraa, että

$$E(X \cup Y) = E(X) + E(Y) - E(X \cap Y) = F_1 + F_2 - E(X \cap Y).$$

Koska $E(X \cup Y)$ on efekti, niin $0 \leq F_1 + F_2 - E(X \cap Y) \leq I$. Lisäksi $F_1 = E(X) \geq E(X \cap Y)$ ja $F_2 = E(Y) \geq E(X \cap Y)$. Voidaan siis valita $F_{12} = E(X \cap Y)$. □

Seuraavassa on kirjattu edellisen tuloksen yleistys kolmen kaksiarvoisen suureen tapaukseen. Tulosta ei ole löytynyt kirjallisuudesta eikä vastaantulleista julkaisuista, joten todistus on kirjoittajan käsialaa. Tulosta voi soveltaa esimerkiksi kolmen sumean spinsuureen yhteismittauksen karakterisointiin. Saatava ehto spinsuureiden tapauksessa koostuu kuitenkin 15 epäyhtälöstä, joita ei ainakaan vielä ole onnistuttu sieventämään niin siistiin muotoon, että niitä olisi mielekästä esitellä. Tähän asti yhteissuure on määritelty vain kahdelle suureelle. Seuraavassa määritelmässä on esitetty tämän käsitteen suoraviivainen yleistys kolmen suureen tapaukselle.

Määritelmä 2.6. Suure $E : \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on suureiden $E_1 : \mathcal{B}(\Omega_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}), E_2 : \mathcal{B}(\Omega_2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ja $E_3 : \mathcal{B}(\Omega_3) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ yhteissuure, jos kaikilla $X \in \mathcal{B}(\Omega_1), Y \in \mathcal{B}(\Omega_2)$ ja $Z \in \mathcal{B}(\Omega_3)$ on voimassa

$$\begin{aligned}
E_1(X) &= E(X \times \Omega_2 \times \Omega_3) \\
E_2(Y) &= E(\Omega_1 \times Y \times \Omega_3) \\
E_3(Z) &= E(\Omega_1 \times \Omega_2 \times Z).
\end{aligned}$$

Lause 2.9. Olkoon E_1, E_2 ja E_3 kaksiarvoisia suureita, ts. $E_i(+1) = F_i$ ja $E_i(-1) = I - F_i, i = 1, 2, 3$. Näillä suureilla on olemassa yhteissuure jos ja vain jos on olemassa efektit F_{12}, F_{13}, F_{23} ja F_{123} s.e.

$$\begin{aligned}
F_{ij} &\leq F_i, F_j, \;\; i, j \in \{1, 2, 3\}, \;\; i \neq j \\
F_{123} &\leq F_{12}, F_{13}, F_{23} \\
0 &\leq F_{123} - F_{12} - F_{13} + F_1 \\
0 &\leq F_{123} - F_{12} - F_{23} + F_2 \\
0 &\leq F_{123} - F_{13} - F_{23} + F_3 \\
I &\geq F_1 + F_2 + F_3 - F_{12} - F_{13} - F_{23} + F_{123}.
\end{aligned}$$

Todistus. Todistetaan ensin ehtojen riittävyys. Määritellään kuvaus $E : \mathcal{B}(\{\pm 1, \pm 1, \pm 1\}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}
E(+,+,+) &= F_{123} \\
E(+,+,-) &= F_{12} - F_{123} \\
E(+,-,+) &= F_{13} - F_{123} \\
E(-,+,+) &= F_{23} - F_{123} \\
E(+,-,-) &= F_1 - F_{12} - F_{13} + F_{123} \\
E(-,+,-) &= F_2 - F_{12} - F_{23} + F_{123} \\
E(-,-,+) &= F_3 - F_{13} - F_{23} + F_{123} \\
E(-,-,-) &= I - (F_{123} + F_1 + F_2 + F_3 - F_{12} - F_{13} - F_{23}).
\end{aligned}$$

Oletuksen nojalla kaikki suureen E maalijoukon alkiot ovat efektejä. Lisäksi nämä efektit summautuvat identiteetiksi, joten kyseessä on suure. Koska lisäksi

$$\begin{aligned}
E(+,+,+)+E(+,+,-)+E(+,-,+)+E(+,-,-)&=F_1\\
E(+,+,+)+E(+,+,-)+E(-,+,+)+E(-,+,-)&=F_2\\
E(+,+,+)+E(+,-,+)+E(-,+,+)+E(-,-,+)&=F_3,
\end{aligned}$$

niin marginaaliehdot toteutuvat ja E on täten yhteissuure.

Oletetaan nyt, että on olemassa yhteissuure E. Tällöin on olemassa joukot $X, Y, Z \in \mathcal{B}\{\pm 1, \pm 1, \pm 1\}$ s.e.

$$E(X)=F_1,\ E(Y)=F_2,\ E(Z)=F_3.$$

Koska

$$\begin{aligned}
E(X\cap Y)&\leq E(X),E(Y)\\
E(X\cap Z)&\leq E(X),E(Z)\\
E(Y\cap Z)&\leq E(Y),E(Z)\\
E(X\cap Y\cap Z)&\leq E(X\cap Y),E(X\cap Z),E(Y\cap Z),
\end{aligned}$$

niin valitsemalla $F_{12}=E(X\cap Y), F_{13}=E(X\cap Z), F_{23}=E(Y\cap Z)$ ja $F_{123}=E(X\cap Y\cap Z)$ saadaan lauseessa annetut ehdot $F_{ij}\leq F_i, F_j$ sekä $F_{123}\leq F_{12}, F_{13}, F_{23}$ täyttävät efektit. Tämä valinta toteuttaa myös lauseen muut ehdot, sillä esim.

$$\begin{aligned}
F_{123}-F_{12}-F_{13}+F_1&=E(X\cap Y\cap Z)-E(X\cap Y)-E(X\cap Z)+E(X)\\
&=E(X)-E(X\cap(Y\cup Z))\\
&=E(X\setminus(Y\cup Z))\geq 0.
\end{aligned}$$

Tässä toisessa yhtäsuuruudessa on käytetty tietoa $E(X\cap Y)+E(X\cap Z)=E(X\cap(Y\cup Z))+E(X\cap Y\cap Z)$ ja arvio saadaan sisältymisestä $Y\cap(X\cup Z)\subset Y$. Vastaavalla tavalla nähdään, että myös epäyhtälöt

$$\begin{aligned}
F_{123}-F_{12}-F_{23}+F_2&\geq 0\\
F_{123}-F_{13}-F_{23}+F_3&\geq 0.
\end{aligned}$$

ovat voimassa. Lauseen viimeinen epäyhtälö nähdään todeksi huomaamalla, että

$$F_1 + F_2 + F_3 - F_{12} - F_{13} - F_{23} + F_{123} = E(X \cup Y \cup Z) \in \mathcal{E}(\mathcal{H}).$$

Näin ollen sopivien efektien F_{12}, F_{13}, F_{23} sekä F_{123} olemassaolo on yhtäpitävää annettujen kolmen kaksiarvoisen suureen yhteismitattavuuden kanssa. □

2.2.3 Kahden qubittisuureen yhteismitattavuus

Sumeaa qubittisuuretta kuvataan semispektraalimitalla $E_k : B(\{-1, 1\}) \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, jolle $E_k(\pm 1) = \frac{1}{2}(a_k I \pm \vec{\sigma} \cdot \vec{\eta}_k)$. Ellei toisin mainita, sumealla qubittisuureella tarkoitetaan kuitenkin tapausta, jossa $a_k = 1$ (niin sanottu unbiased-tapaus). Seuraava lause, jonka on ensimmäisenä todistanut Busch artikkelissaan [3] ja jonka tässä esitettävä todistus on peräisin kirjasta [4], karakterisoi kahden qubittisuureen yhteismitattavuuden.

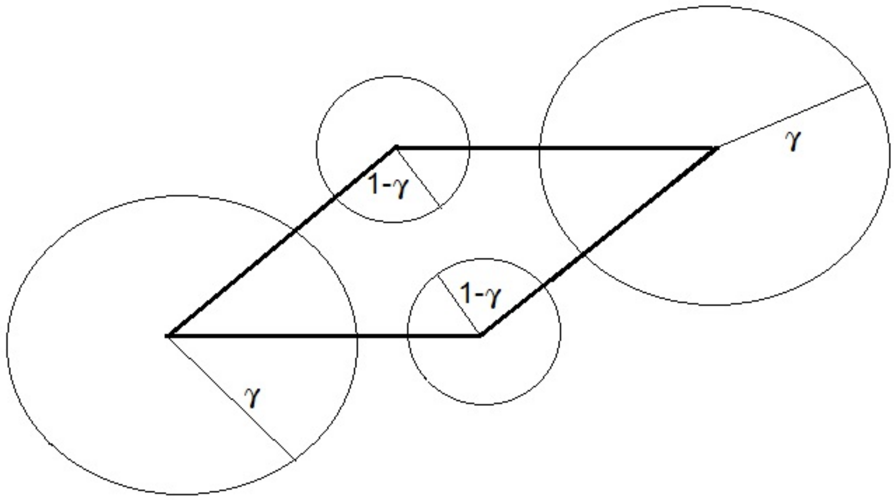
Lause 2.10. Kahden sumean qubittisuureen E_1 ja E_2 yhteismitattavuudelle välttämätön ja riittävä ehto on (kts. kuva 3)

$$\frac{1}{2}||\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2||^2 + \frac{1}{2}||\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2||^2 \leq 1 \tag{6}$$

Todistus. Lauseesta 2.8 saadaan suureiden E_1 ja E_2 yhteismitattavuudelle riittävä ja välttämätön ehto. Kyseisen lauseen mukaan suureilla E_1 ja E_2 on yhteissuure, jos on olemassa efekti $E_{12} := \gamma E_3(+1)$, jolle

$$\begin{aligned}
&0 \leq \gamma E_3(+1), \\
&\gamma E_3(+1) \leq E_1(+1), \\
&\gamma E_3(+1) \leq E_2(+1)\ ja \\
&E_1(+1) + E_2(+1) - \gamma E_3(+1) \leq I.
\end{aligned}$$

Koska matriisin positiivisuus on yhtäpitävää ominaisarvojen positiivisuuden kanssa, saadaan suoralla laskulla $\alpha E_n(+1) - \beta E_m(+1) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta \geq ||\alpha\vec{\eta}_n - \beta\vec{\eta}_m||$. Tällä tempulla kolme ylimmäistä yhtälöä ja analogisella laskulla alimmainen yhtälö



Kuva 2: Kaavan (7) havainnollistus.

saadaan muotoon:

$$
\begin{aligned}
&||\gamma\vec{\eta}_3|| \leq \gamma \\
&||\vec{\eta}_1 - \gamma\vec{\eta}_3|| \leq 1-\gamma \\
&||\vec{\eta}_2 - \gamma\vec{\eta}_3|| \leq 1-\gamma \\
&||\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 - \gamma\vec{\eta}_3|| \leq \gamma
\end{aligned}
$$

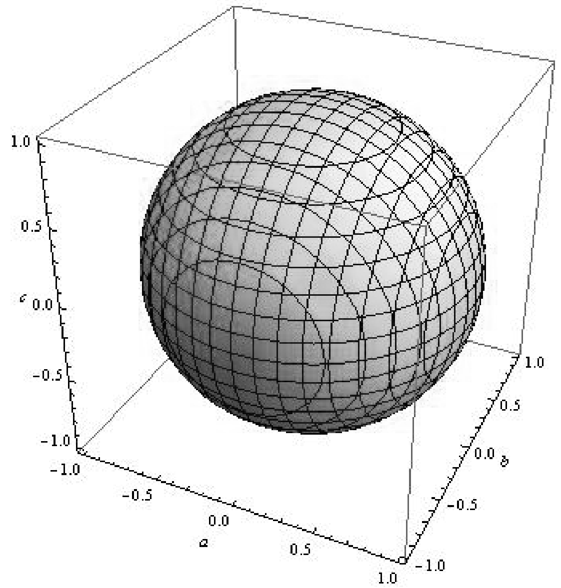
Yllä olevasta yhtälöryhmästä huomataan, että jokaisen normin sisällä on $\gamma\vec{\eta}_3$. Täten yhtälöryhmän toteutuminen on yhtäpitävää (kts. kuva) sen kanssa, että

$$\gamma\vec{\eta}_3 \in \bar{B}(0,\gamma) \cap \bar{B}(\vec{\eta}_1, 1-\gamma) \cap \bar{B}(\vec{\eta}_2, 1-\gamma) \cap \bar{B}(\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2, \gamma), \tag{7}$$

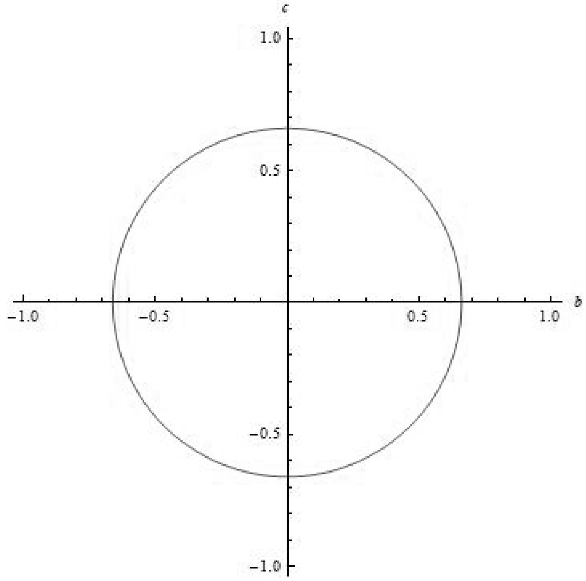
missä $\bar{B}(\vec{a}, r)$ tarkoittaa pisteen $\vec{a}$ r-säteistä suljettua palloympäristöä. Kahden keskimmäisen pallon leikkaus on epätyhjä jos ja vain jo $1-\gamma \geq \frac{1}{2}||\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2||$. Puolestaan reunimmaisten pallojen leikkaus on epätyhjä tarkalleen silloin kun $\gamma \geq \frac{1}{2}||\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2||$. Näin ollen yhteissuureen olemassaolosta seuraa, että $\frac{1}{2}||\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2|| + \frac{1}{2}||\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2|| \leq 1$.

Kääntäen, jos saatu epäyhtälö on voimassa, niin on olemassa γ, jolle kaksi aiempaa epäyhtälöä ovat voimassa. Tällöin vektori $\vec{\eta}_0 := \frac{1}{2}(\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2)$ on kaikkien neljän pallon leikkauksessa, sillä esimerkiksi $||\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_0|| = \frac{1}{2}||\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2|| \leq 1-\gamma$. Valitsemalla $\gamma = ||\vec{\eta}_0||$ ja $\vec{\eta}_3 = \hat{\eta}_0$[5] saadaan ehto (7) toteutumaan.

[5] Tässä työssä vektorilla, jonka päällä on viivan sijasta hattu tarkoitetaan normitettua vektoria. Esimerkiksi tässä $\hat{\eta}_0 = \frac{1}{||\vec{\eta}_0||}\vec{\eta}_0$



(a) Parametrit $\vec{\eta}_1 = (a, 0, 0), \vec{\eta}_2 = (b, c, 0)$.



(b) Parametrit $\vec{\eta}_1 = (\frac{3}{4}, 0, 0), \vec{\eta}_2 = (b, c, 0)$.

Kuva 3: Kahden qubitin yhteismittallisuus.

Näin ollen qubittisuureilla E_1 ja E_2 on olemassa yhteissuure, jos ja vain jos

$$\frac{1}{2}||\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2|| + \frac{1}{2}||\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2|| \leq 1. \tag{8}$$

$\square$

Yllä saatu tulos tulee olemaan tärkeässä asemassa osoitettaessa, että kahden qubittisuureen yhteismitattavuus ja Bellin epäyhtälön toteutuminen ovat yhtäpitävät.

2.2.4 Useamman qubittisuureen yhteismittauksesta

Kolmen tai useamman qubittisuureen yhteismitattavuudelle ei tunneta karakterisointia yleisesti. Tämän kappaleen lauseet antavat kuitenkin välttämättömän sekä riittävän ehdon, mutta nämä eivät ole samat muuta kuin ortogonaalisten suuntien tapauksessa. Kaksi lauseista ovat yleistyksiä artikkelissa [5] esitetyistä tuloksista, joissa kaikkia suureita sumennetaan yhtä paljon. Alla lauseet on muotoiltu siten, että jokaista suuntaa sumennetaan toisien suuntien sumennuksista riippumattomasti. Yksi lause on puolestaan artikkelista [17]. Tämä antaa yleisemmässä tapauksessa välttämättömän ehdon kuin artikkelin [5] todistus. Rajoittuneempi tapaus on esitetty tässä, koska sen alkuperäinen todistus osoittautui puutteelliseksi: se ei riitä todistamaan niin laajaa tapausta, jonka kirjoittajat sen väittävät todistavan. Tässä esitettävässä versiossa on asetettu riittävät lisävaatimukset, jotta lause saadaan päteväksi. Aloitetaan pienellä aputuloksella.

Lemma 2.2. Kaikille $B \in \mathcal{T}(\mathcal{H})^+$ ja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ s.e. $A \leq I$ on voimassa $\operatorname{tr}[AB] \leq \operatorname{tr}[B]$.

Todistus. Olkoon $B \in \mathcal{T}(\mathcal{H})^+$ ja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ s.e. $A \leq I$. Ensinnäkin $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ on $\mathcal{L}(\mathcal{H})$:n tähti-ideaali, joten $AB \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$. Epäyhtälö nähdään todeksi kirjoittamalla

$$\operatorname{tr}[AB] = \operatorname{tr}[B^{1/2}AB^{1/2}] \leq \operatorname{tr}[B],$$

jossa arvio nähdään kirjoittamalla $\operatorname{tr}[B^{1/2}AB^{1/2}]$ jäljen määritelmän avulla auki ja käyttämällä sitä, että $A \leq I$. □

Lause 2.11. Olkoon $\vec{\eta}_1 = (a, 0, 0)$, $\vec{\eta}_2 = (0, b, 0)$ ja $\vec{\eta}_3 = (0, 0, c)$. Näihin vektoreihin liittyvien qubittisuureiden $E_k(\pm 1) = \frac{1}{2}((1 \pm a_k)I \pm \vec{\sigma} \cdot \vec{\eta}_k)$, missä $-1 + \|\vec{\eta}_k\| \leq a_k \leq 1 - \|\vec{\eta}_k\|$, yhteismitattavuudelle välttämätön ehto on $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$.

Todistus. Merkitään $\vec{\eta}(x_1, x_2, x_3) := \sum_{k=1}^{3} x_k \vec{\eta}_k$, missä $x_k \in \{-1, 1\}$ $\forall k$ ja $\vec{\eta}_k$ on suureeseen k liittyvä sumeusvektori. Ensimmäinen havainto on, että

$$\operatorname{tr}[\pm(\vec{\sigma} \cdot \vec{\eta}_k)E_k(\pm 1)] = \pm\frac{1}{2}(1 \pm a_k)\operatorname{tr}[\vec{\sigma} \cdot \vec{\eta}_k] + \frac{1}{2}\operatorname{tr}[(\vec{\sigma} \cdot \vec{\eta}_k)^2] = \|\vec{\eta}_k\|^2. \tag{9}$$

Oletuksen nojalla on olemassa yhteissuure $E : \mathcal{B}(\{-1, 1\}^3) \to L(\mathbb{C}^2)$, joka antaa marginaaleinaan suureet E_k, ts.

$$\sum_{\{x_i\}_{i \neq k}} E(x_1, x_2, x_3) = E_k(x_k). \tag{10}$$

Yhtälöiden (9) ja (10) nojalla voidaan kirjoittaa:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3} \|\vec{\eta}_k\|^2 &= \sum_{k=1}^{3} \mathrm{tr}[\pm(\vec{\sigma} \cdot \vec{\eta}_k) E_k(\pm 1)] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \sum_{x_k=\pm 1} \mathrm{tr}[x_k(\vec{\sigma} \cdot \vec{\eta}_k) E_k(x_k)] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \sum_{x_k=\pm 1} \mathrm{tr}[x_k(\vec{\sigma} \cdot \vec{\eta}_k) \sum_{\{x_i\}_{i\neq k}} E(x_1, x_2, x_3)] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \sum_{x_1,x_2,x_3} \mathrm{tr}[x_k(\vec{\sigma} \cdot \vec{\eta}_k) E(x_1, x_2, x_3)] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x_1,x_2,x_3} \mathrm{tr}[(\vec{\sigma} \cdot \sum_{k=1}^{3} x_k \vec{\eta}_k) E(x_1, x_2, x_3)] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x_1,x_2,x_3} \|\vec{\eta}(x_1, x_2, x_3)\| \mathrm{tr}[(\vec{\sigma} \cdot \hat{\eta}(x_1, x_2, x_3)) E(x_1, x_2, x_3)].
\end{aligned}
$$

Koska $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2) \ni \hat{\sigma} \cdot \vec{\eta}(x_1, x_2, x_3) \leq I \ \forall k$ ja $E(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{T}(\mathbb{C}^2)^+ \ \forall x_i \in \{-1, 1\}, i = 1, 2, 3$, saadaan lemman 2.2 avulla yläraja-arvio:

$$
\sum_{k=1}^{3} \|\vec{\eta}_k\|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{x_1,x_2,x_3} \|\vec{\eta}(x_1, x_2, x_3)\| \mathrm{tr}[E(x_1, x_2, x_3)]. \tag{11}
$$

Oikean puolen lauseke voidaan tulkita $\mathbb{R}^8$:n vektoreiden

$$
\begin{aligned}
\vec{x} &:= (\|\vec{\eta}(x_1, x_2, x_3)\|)_{x_1,x_2,x_3=\pm 1} \text{ ja} \\
\vec{y} &:= \left(\frac{1}{2} \mathrm{tr}[E(x_1, x_2, x_3)]\right)_{x_1,x_2,x_3=\pm 1}
\end{aligned}
$$

sisätuloksi. Koska

$$
\|\vec{y}\|_1 = \frac{1}{2} \sum_{x_1,x_2,x_3} |\mathrm{tr}[E(x_1, x_2, x_3)]| = 1,
$$

niin epäyhtälöä (11) saadaan edelleen arvioitua:

$$
\sum_{k=1}^{3} \|\vec{\eta}_k\|^2 \leq \max\{x_i | i = 1, ..., 6\} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.
$$

Tämän yhtälön vasen puoli on $a^2 + b^2 + c^2$, joten saadaan haluttu tulos:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 1. \tag{12}$$

$\square$

Seuraavassa lauseessa on esitetty kolmen qubittisuureen yhteismitattavuudelle edellisen lauseen välttämätöntä ehtoa yleisempi ehto. Sitä ennen on kuitenkin syytä esitellä kahden ja kolmen qubittisuureen yhteissuureiden yleinen muoto. Ensimmäinen tulos on peräisin artikkelista [18], jossa sen todistus on esitetty monimutkaisella tavalla. Alla tulos on todistettu suoralla laskulla. Jälkimmäinen tulos on puolestaan annettu artikkelissa [17], mutta kyseisessä paperissa sitä ei ole todistettu eikä ole annettu lähdettä, josta todistus löytyisi. Todistus on tässä tehty edellisen tavoin suoralla laskulla.

Lemma 2.3. Suureet $E_k(\pm 1) = \frac{1}{2}((1 \pm a_k)I \pm \vec{\eta}_k \cdot \vec{\sigma}), k = 1, 2$ marginaaleinaan antava (normitettu) operaattorimitta on välttämättä muotoa

$$E_{12}(a, b) = \frac{1}{4}((1 + aa_1 + ba_2 + abz)I + (a\vec{\eta}_1 + b\vec{\eta}_2 + ab\vec{z}) \cdot \vec{\sigma}),$$

missä $z \in \mathbb{R}$ ja $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ ovat mielivaltaisia sekä $a, b \in \{-1, 1\}$.

Todistus. Olkoon nyt E_{12} operaattorimitta, joka antaa marginaaleinaan suureet E_1 ja E_2. Koska joukko $\{I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ muodostaa kannan avaruudelle $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, niin voidaan kirjoittaa

$$E_{12}(+, +) = \frac{1}{4}((1 + a_1 + a_2 + z)I + (\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 + \vec{z}) \cdot \vec{\sigma}),$$

missä $z \in \mathbb{R}$ ja $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$. Koska $E_{12}(+, -) = E_1(+) - E_{12}(+, +)$, niin

$$E_{12}(+, -) = \frac{1}{4}((1 + a_1 - a_2 - z)I + (\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2 - \vec{z}) \cdot \vec{\sigma}).$$

Edelleen $E_{12}(-, +) = E_2(+) - E_{12}(+, +)$, joten saadaan

$$E_{12}(-, +) = \frac{1}{4}((1 - a_1 + a_2 - z)I + (-\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 - \vec{z}) \cdot \vec{\sigma}).$$

Viimeinen E_{12}:n efekti saadaan kaavasta

$$E_{12}(-, -) = I - E_{12}(+, +) - E_{12}(+, -) - E_{12}(-, +).$$

Näin ollen saadaan

$$E_{12}(-,-) = \frac{1}{4}((1 - a_1 - a_2 + z)I + (-\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2 + \vec{z}) \cdot \vec{\sigma},$$

joten väite on todistettu. □

Lemma 2.4. Suureet $E_k(\pm 1) = \frac{1}{2}((1 \pm a_k)I \pm \vec{\eta}_k \cdot \vec{\sigma}), k = 1, 2, 3$ marginaaleinaan antava (normitettu) operaattorimitta on välttämättä muotoa

$$\begin{aligned} E(a, b, c) = \frac{1}{8}((&1 + aa_1 + ba_2 + ca_3 + abz_1 + bcz_2 + caz_3 + abcz_4)I \\ &+(a\vec{\eta}_1 + b\vec{\eta}_2 + c\vec{\eta}_3 + ab\vec{z}_1 + bc\vec{z}_2 + ca\vec{z}_3 + abc\vec{z}_4) \cdot \vec{\sigma}). \end{aligned}$$

Todistus. Aloitetaan kirjoittamalla E:n efektit[6] $E(+,+,+)$:n ja marginaaliefektien avulla:

$$\begin{aligned} E(+,+,-) =& E_{12}(+,+) - E(+,+,+) \\ E(+,-,+) =& E_{13}(+,+) - E(+,+,+) \\ E(-,+,+) =& E_2(+) - E_{23}(+,-) - E(+,+,+) \\ E(+,-,-) =& -E_3(+) + E_{12}(+,-) + E_{13}(-,+) + E(+,+,+) \\ E(-,+,-) =& E_{23}(+,-) - E_{12}(+,+) + E(+,+,+) \\ E(-,-,+) =& -E_2(+) + E_{13}(-,+) + E_{23}(+,-) + E(+,+,+) \\ E(-,-,-) =& E_{23}(+,+) + E_{12}(-,-) - E_{13}(-,+) - E(+,+,+). \end{aligned}$$

Tässä käytetyssä notaatiossa E_{ij} viittaa E:stä laskettuun marginaaliin ij, eli esimerkiksi $E_{12}(a, b) = \sum_{n=\pm 1} E(a, b, n)$. Kuten kahden suureen tapauksessa, voidaan nytkin kirjoittaa

$$\begin{aligned} E(+,+,+) =& \frac{1}{8}((1 + a_1 + a_2 + a_3 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4)I \\ &+(\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_3 + \vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4) \cdot \vec{\sigma}), \end{aligned}$$

missä $z_i \in \mathbb{R}$ ja $\vec{z}_i \in \mathbb{R}^3$, i=1,2,3, ovat edellisessä lemmassa esiintyneitä kahden qubitin yhteissuureen parametreja $(z_1, \vec{z}_1 \leftrightarrow E_{12}; z_2, \vec{z}_2 \leftrightarrow E_{23}; z_3, \vec{z}_3 \leftrightarrow E_{13})$ ja $i = 4$

[6]Tarkalleen ottaen tässä ei ole kyse efekteistä, sillä ran(E):n operaattoreilta ei ole vaadittu positiivisuutta.

vastaa E:n vapaita parametreja. Nyt yllä olevista kaavoista saadaan

$$\begin{aligned}
E(+,+,-) =&\frac{1}{8}((1+a_1+a_2-a_3+z_1-z_2-z_3-z_4)I \\
&+(\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2-\vec{\eta}_3+\vec{z}_1-\vec{z}_2-\vec{z}_3-\vec{z}_4)\cdot\vec{\sigma}) \\
E(+,-,+) =&\frac{1}{8}((1+a_1-a_2+a_3-z_1-z_2+z_3-z_4)I \\
&+(\vec{\eta}_1-\vec{\eta}_2+\vec{\eta}_3-\vec{z}_1-\vec{z}_2+\vec{z}_3-\vec{z}_4)\cdot\vec{\sigma}) \\
E(-,+,+) =&\frac{1}{8}((1-a_1+a_2+a_3-z_1+z_2-z_3-z_4)I \\
&+(-\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2+\vec{\eta}_3-\vec{z}_1+\vec{z}_2-\vec{z}_3-\vec{z}_4)\cdot\vec{\sigma}) \\
E(+,-,-) =&\frac{1}{8}((1+a_1-a_2-a_3-z_1+z_2-z_3+z_4)I \\
&+(\vec{\eta}_1-\vec{\eta}_2-\vec{\eta}_3-\vec{z}_1+\vec{z}_2-\vec{z}_3+\vec{z}_4)\cdot\vec{\sigma}) \\
E(-,+,-) =&\frac{1}{8}((1-a_1+a_2-a_3-z_1-z_2+z_3+z_4)I \\
&+(-\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2-\vec{\eta}_3-\vec{z}_1-\vec{z}_2+\vec{z}_3+\vec{z}_4)\cdot\vec{\sigma}) \\
E(-,-,+) =&\frac{1}{8}((1-a_1-a_2+a_3+z_1-z_2-z_3+z_4)I \\
&+(-\vec{\eta}_1-\vec{\eta}_2+\vec{\eta}_3+\vec{z}_1-\vec{z}_2-\vec{z}_3+\vec{z}_4)\cdot\vec{\sigma}) \\
E(-,-,-) =&\frac{1}{8}((1-a_1-a_2-a_3+z_1+z_2+z_3-z_4)I \\
&+(-\vec{\eta}_1-\vec{\eta}_2-\vec{\eta}_3+\vec{z}_1+\vec{z}_2+\vec{z}_3-\vec{z}_4)\cdot\vec{\sigma}),
\end{aligned}$$

joka todistaa väitteen. □

Lause 2.12. Olkoon $E_k(\pm 1) = \frac{1}{2}((1 \pm a_k)I \pm \vec{\eta}_k \cdot \vec{\sigma}), k = 1, 2, 3$ kolme qubittisuuretta. Näiden yhteismitattavuudelle välttämätön ehto on sellaisen vektorin $\vec{z}_4 \in \mathbb{R}^3$ olemassaolo, että

$$\begin{aligned}
&||-\vec{\eta}_1-\vec{\eta}_2-\vec{\eta}_3-\vec{z}_4||+||\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2-\vec{\eta}_3-\vec{z}_4|| \\
+&||-\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2+\vec{\eta}_3-\vec{z}_4||+||\vec{\eta}_1-\vec{\eta}_2+\vec{\eta}_3-\vec{z}_4|| \leq 4.
\end{aligned}$$

Todistus. Edellisen lemman nojalla jokainen normoitu operaattorimitta, joka antaa halutut kolme qubittisuuretta marginaaleinaan, on muotoa

$$\begin{aligned}
E(a,b,c) = &\frac{1}{8}((1+aa_1+ba_2+ca_3+abz_1+bcz_2+caz_3+abcz_4)I \\
&+(a\vec{\eta}_1+b\vec{\eta}_2+c\vec{\eta}_3+ab\vec{z}_1+bc\vec{z}_2+ca\vec{z}_3+abc\vec{z}_4)\cdot\vec{\sigma}).
\end{aligned}$$

Jotta tämä olisi suure, on oltava $E(a,b,c) \geq 0\ \forall a,b,c \in \{-1,1\}$. Tästä saadaan esimerkiksi $E(+,+,+)$:lla

$$||\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_3 + \vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4|| \leq 1 + a_1 + a_2 + a_3 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4$$

ja $E(-,-,-)$:lla

$$|| - \vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_3 + \vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 - \vec{z}_4|| \leq 1 - a_1 - a_2 - a_3 + z_1 + z_2 + z_3 - z_4.$$

Nämä kaksi epäyhtälöä voidaan tulkita siten, että vektori $\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3$ kuuluu kahden pallon leikkaukseen, joiden keskipisteet ovat $-\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_3 - \vec{z}_4$ ja $\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_3 + \vec{z}_4$ sekä säteet $1 + a_1 + a_2 + a_3 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ ja $1 - a_1 - a_2 - a_3 + z_1 + z_2 + z_3 - z_4$ vastaavasti. Koska vektori $\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3$ on pallojen leikkauksessa, on leikkauksen oltava epätyhjä. Näin ollen pallojen keskipisteiden etäisyyden tulee olla pienempi kuin säteiden summa, eli on oltava voimassa

$$|| - \vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_3 - \vec{z}_4|| \leq 1 + z_1 + z_2 + z_3.$$

Käymällä läpi parien $(E(+,+,-), E(-,-,+))$, $(E(+,-,+), E(-,+,-))$ ja $(E(-,+,+), E(+,-,-))$ positiivisuusehdot saadaan samalla tavoin kuin edellä epäyhtälöt

$$\begin{aligned}
||\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_3 - \vec{z}_4|| &\leq 1 - z_1 - z_2 + z_3, \\
||\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_3 - \vec{z}_4|| &\leq 1 + z_1 - z_2 - z_3, \\
|| - \vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_3 - \vec{z}_4|| &\leq 1 - z_1 + z_2 - z_3.
\end{aligned}$$

Laskemalla kaikki neljä epäyhtälöä yhteen saadaan

$$\begin{aligned}
&|| - \vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_3 - \vec{z}_4|| + ||\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_3 - \vec{z}_4|| \\
+&|| - \vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_3 - \vec{z}_4|| + ||\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_3 - \vec{z}_4|| \leq 4,
\end{aligned}$$

joka on väitetty epäyhtälö. □

Yllä nähtiin, että sopivan vektorin $\vec{z}_4 \in \mathbb{R}^3$ olemassaolo on välttämätön ehto kolmen qubittisuureen yhteismitattavuudelle. Jotta kyseisen vektorin merkityksestä saisi jonkinlaisen kuvan, on hyvä huomata, että edellisessä lemmassa annettu välttämättömän ehdon epäyhtälö voidaan tulkita summana pisteiden $-\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_3$, $\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_3$, $\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_3$ ja $-\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_3$ etäisyyksistä pisteeseen $\vec{z}_4$. Pistettä $\vec{z}_4$, joka minimoi tämän summan, kutsutaan ko. neljän pisteen joukon Fermat'n-Torricellin pisteeksi. Näin ollen yhteismitattavuudelle välttämätön ehto on, että qubittisuureiden sumeusvektoreista $\vec{\eta}_i$ muodostetun yllä mainitun neljän pisteen joukon FT-piste on sellainen, jolla tutkittava etäisyyksien summa on pienempi tai yhtäsuuri kuin neljä.

Mainitaan ilman todistusta seuraava FT-pisteitä koskeva tulos [19].

Lause 2.13. Olkoon $T_n = \{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}^d$. Jos T_n:n Fermat-Torricelli piste x_{FT} kuuluu itse joukkoon, niin

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{FT}}{||x_i - x_{FT}||} \right\| \leq 1.$$

Tässä termi, jossa tulee nolla nimittäjään, tulkitaan nollaksi.

Jos taas x_{FT} ei ole joukossa T_n, niin Fermat-Torricelli piste on se piste x_{FT}, jolle

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{FT}}{||x_i - x_{FT}||} \right\| = 0.$$

Esimerkki 2.7. Olkoon $\vec{\eta}_1 = (a, 0, 0)$, $\vec{\eta}_2 = (0, b, 0)$ ja $\vec{\eta}_3 = (0, 0, c)$. Joukon $S = \{(-a, -b, -c), (a, -b, c), (a, b, -c), (-a, b, c)\}$ FT-piste on yllä esitetyn tuloksen nojalla origo, sillä ensinnäkin FT-pisteen ollessa esimerkiksi $(-a, -b, -c)$, saataisiin (voidaan olettaa, että $a, b, c \geq 0$)

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{FT}}{||x_i - x_{FT}||} \right\| = \left\| \frac{a+c}{\|a+c\|} + \frac{a+b}{\|a+b\|} + \frac{b+c}{\|b+c\|} \right\| = 3 \nleq 1.$$

Laskemalla sama lasku joukon S muille pisteille saadaan vastaava tulos, joten FT-piste ei voi olla joukossa S. Toisaalta

$$\frac{(-a, -b, -c) + (a, -b, c) + (a, b, -c) + (-a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

Täten vektoreiden $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3$ määrämien qubittisuureiden yhteismitattavuudelle saadaan edellisestä lauseesta välttämätön ehto

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 1,$$

joka yhtyy tämän alaluvun alussa esitettyyn kolmen ortogonaalisen qubittisuureen yhteismitattavuuden välttämättömään ehtoon.

Esimerkki 2.8. Tarkastellaan kahden qubitin yhteismittaukselle edellisestä lauseesta saatavaa välttämätöntä ehtoa. Koska mikä tahansa suure on yhteismitallinen triviaalisuureen kanssa (yhteissuureena $E(x,y) = \frac{1}{d}E(x)$, missä d on dimensio), niin kahden suureen yhteismitallisuuden sijaan voidaan tarkastella näiden suureiden ja triviaalisuureen yhteismitallisuutta. Tätä varten määritellään $\vec{\eta}_3 = \vec{0}$. Nyt edellisen lauseen epäyhtälö tulee muotoon

$$\begin{aligned} &||-\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2 - \vec{z}_{FT}|| + ||\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 - \vec{z}_{FT}|| \\ &+||-\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 - \vec{z}_{FT}|| + ||\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2 - \vec{z}_{FT}|| \leq 4, \end{aligned}$$

missä FT viittaa Fermat-Torricelli pisteeseen. Koska nyt joukko, jolle haetaan FT-pistettä sisältää kaksi vektoria sekä niiden vastavektorit, on FT-piste nolla. Näin ollen tästä saadaan sama välttämätön ehto kuin aiemmin

$$||\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2|| + ||\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2|| \leq 2.$$

Huomautus 2.3. Edellisen esimerkin tuloksen voi johtaa myös seuraamalla kolmen qubitin yhteismitattavuuden välttämättömän ehdon johtoa. Toisin sanoen riittää hakea positiivisuusehto lemman 2.3 antaman yhteissuureen neljälle efektille ja käydä sama lasku läpi kuin kolmen qubitin tapauksessa. Kahden qubitin tapauksessa tilanne on siinä mielessä mukavampi, että siinä tutkittavan pistejoukon FT-piste on aina nolla.

Tutkitaan seuraavaksi useamman qubittisuureen yhteismittauksen riittävää ehtoa. Seuraavassa lemmassa on käytetty merkintää $\vec{\eta}(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{\eta}_k$, missä $x_i \in \{-1, 1\}$.

Lemma 2.5. Seuraavat yhtäsuuruudet ovat voimassa:

$$1) \quad \sum_{x_1,...,x_n=\pm 1} \vec{\eta}(x_1..., x_n) = \sum_{x_1,...,x_n=\pm 1} \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{\eta}_j = 0$$

$$2) \quad \sum_{\{x_i\}_{i\neq k}} \vec{\eta}(x_1, ..., x_n) = \sum_{\{x_i\}_{i\neq k}} \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{\eta}_j \quad = 2^{n-1} x_k \vec{\eta}_k$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \sum_{x_1,...,x_n=\pm 1} \|\vec{\eta}(x_1, ..., x_n)\| &= \sum_{\{x_i\}_{i\neq k}, x_k=1} \|\vec{\eta}(x_1, ..., x_n)\| + \sum_{\{x_i\}_{i\neq k}, x_k=-1} \|\vec{\eta}(x_1, ..., x_n)\| \\ &= 2 \sum_{\{x_i\}_{i\neq k}} \|\vec{\eta}(x_1, ..., x_n)\|. \end{aligned}$$

Viimeisessä termissä ei ole väliä x_k:n arvolla.

Todistus. Kaksi ensimmäistä tulosta ovat ilmeisiä ja ja viimeinen yhtäsuuruus nähdään todeksi käyttämällä tietoa

$$\|\vec{\eta}(x_1, ..., x_n)\| = \| - \vec{\eta}(-x_1, ..., -x_n)\| = \|\vec{\eta}(-x_1, ..., -x_n)\|.$$

□

Seuraava lause antaa riittävän ehdon äärellisen monen qubittisuureen yhteismitattavuudelle.

Lause 2.14. Riittävä ehto n:n qubittisuureen yhteismitattavuudelle on

$$\sum_{x_1,...,x_n=\pm 1} ||\vec{\eta}(x_1, ..., x_n)|| \leq 2^n. \tag{13}$$

Todistus. Määritellään positiivioperaattorimitta $E : \mathcal{B}(\{-1, 1\}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ kaavalla

$$E(x_1, ..., x_n) := \frac{2\|\vec{\eta}(x_1, ..., x_n)\|}{\sum\limits_{x_1',...,x_n'=\pm 1} \|\vec{\eta}(x_1', ..., x_n')\|}[\frac{1}{2}I + t\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \hat{\eta}(x_1, ..., x_n)],$$

missä $t \in [0, 1]$. Näin määritelty kuvaus on selvästi positiivinen, sillä edessä oleva kerroin on positiivinen ja suluissa oleva osa on jonkin qubittisuureen efekti (eli positiivinen). Täten ominaisarvot ovat ei-negatiiviset, joka riittää positiivisuuteen. Edellisen lemman avulla saadaan nyt helposti näytettyä, että E on yhteissuure sumeille qubittisuureille. Ensinnäkin

$$\sum_{x_1,...,x_n=\pm 1} E(x_1, ..., x_n) = I + t\vec{\sigma} \cdot \frac{\sum\limits_{x_1,...,x_n=\pm 1} \|\vec{\eta}(x_1, ..., x_n)\|\hat{\eta}(x_1, ..., x_n)}{\sum\limits_{x_1',...,x_n'=\pm 1} \|\vec{\eta}(x_1', ..., x_n')\|} = I.$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa lemman ensimmäisestä yhtäsuuruudesta. E:n marginaaleiksi saadaan lemman kahden jälkimmäisen kohdan nojalla:

$$\begin{aligned}\sum_{\{x_i\}_{i\neq k}} E(x_1, ..., x_n) &= \frac{\sum\limits_{\{x_i\}_{i\neq k}} 2\|\vec{\eta}(x_1, ..., x_n)\|}{\sum\limits_{x_1',...,x_n'=\pm 1} \|\vec{\eta}(x_1', ..., x_n')\|}[\frac{1}{2}I + t\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \hat{\eta}(x_1, ..., x_n)] \\ &= \frac{1}{2}(I + \vec{\sigma} \cdot t\frac{2^n}{\sum\limits_{x_1',...,x_n'=\pm 1} \|\vec{\eta}(x_1', ..., x_n')\|}x_k\vec{\eta}_k).\end{aligned}$$

Täten yhteissuureen olemassaololle riittävä ehto on $\sum\limits_{x_1,...,x_n=\pm 1} \|\vec{\eta}(x_1,...,x_n)\| = t2^n$. Toisin muotoiltuna tämä ehto tarkoittaa, että yhteissuure on olemassa, jos

$$\sum_{x_1,...,x_n=\pm 1} \|\vec{\eta}(x_1,...,x_n)\| \leq 2^n,$$

joka todistaa väitteen. □

Seuraus 2.1. Riittävä ja välttämätön ehto vektorien $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ ja $(0,0,c)$ määräämien sumeiden qubittisuureiden yhteismitattavuudelle on

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 1. \tag{14}$$

Todistus. Välttämättömyys on jo todistettu. Riittäväksi ehto nähdään edellisen lauseen avulla, sillä nyt

$$\sum_{x_1,x_2,x_3=\pm 1} \|\vec{\eta}(x_1,x_2,x_3)\| = 2^n\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leq 2^n,$$

josta saadaan $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$. □

Seuraus 2.2. Kolmen qubittisuureen parittainen yhteismitattavuus ei riitä kaikkien kolmen suureen yhteismitattavuuteen.

Todistus. Vektorien $\vec{\eta}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)$, $\vec{\eta}_2 = (0,\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ ja $\vec{\eta}_3 = (0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ määräämät qubittisuureet ovat parittain yhteismitallisia, sillä

$$\|\vec{\eta}_i + \vec{\eta}_j\| + \|\vec{\eta}_i - \vec{\eta}_j\| = 2 \ \forall i,j = 1,2,3, i \neq j.$$

Kuitenkin

$$\|\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_3\| + \|\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_3\| + \|\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_3\| + \|\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_3\| = 6 > 4,$$

joten saatavat kolme suuretta eivät ole yhteismitattavat. □

Tähän asti esitetyissä tarkasteluissa ei ole yhteissuureelta oletettu mitään ylimääräistä. Mielenkiintoinen kysymys on kuitenkin se, milloin riittää ottaa yhteissuure, jossa on vähemmän nollasta eroavia efektejä kuin maksimimäärä (esim. kahden ja kolmen qubitin tapauksessa maksimimäärä on neljä ja kahdeksan vastaavasti). Seuraava lause ja esimerkki osoittavat, että kolmen qubitin tapauksessa tietyn neliarvoisen yhteissuureen olemassaolo tuo lisärajoituksia yhteismitattavuudelle.

Lause 2.15. Olkoon

$$\begin{aligned} A(\pm 1) &= \frac{1}{2}(I \pm \vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \\ B(\pm 1) &= \frac{1}{2}(I \pm \vec{b} \cdot \vec{\sigma}) \\ C(\pm 1) &= \frac{1}{2}(I \pm \vec{c} \cdot \vec{\sigma}) \end{aligned}$$

kaksiarvoisia suureita. Välttämätön ja riittävä ehto sille, että on olemassa neliarvoinen suure E s.e.

$$\begin{aligned} A(+1) &= E(1) + E(2) \\ B(+1) &= E(1) + E(3) \\ C(+1) &= E(1) + E(4), \end{aligned}$$

on

$$||x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}|| \leq 1 \ \forall x_i \in \{-1, 1\}.$$

Todistus. Oletetaan, että on olemassa lauseen mukainen suure E. Koska joukko $\{I, \vec{\sigma}\}$ muodostaa kannan avaruudelle $\mathcal{L}_s(\mathbb{C}^2)$, niin voidaan kirjoittaa

$$E(1) = \frac{1}{2}(\gamma I + \vec{f} \cdot \vec{\sigma}).$$

Välittömästi nähdään, että suureen E muissa efekteissä on oltava identiteetin kertoimena $1 - \gamma$. Koska E on suure, niin sen efektit summautuvat identiteetiksi. Näin ollen $\gamma + 3(1 - \gamma) = 2$ eli $\gamma = \frac{1}{2}$. Siitä, että E on suure, seuraa

$$\begin{aligned} &||\vec{f}|| \leq \frac{1}{2} \\ &||\vec{a} - \vec{f}|| \leq \frac{1}{2} \\ &||\vec{b} - \vec{f}|| \leq \frac{1}{2} \\ &||\vec{c} - \vec{f}|| \leq \frac{1}{2} \\ &\left\| \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \vec{f} \right\| = 0, \end{aligned}$$

jossa viimeinen yhtälö on voimassa, koska $\sum_{i=1}^{4} E(i) = A(+1) + B(+1) + C(+1) -$

$2E(1) = I$. Viimeisestä yhtälöstä saadaan $\vec{f} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, joten epäyhtälöt tulevat muotoon

$$||x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}|| \leq 1 \ \forall x_i \in \{-1, 1\}.$$

Kääntäen, jos yllä oleva epäyhtälö on voimassa, niin voidaan määritellä neliarvoinen positiivioperaattorimitta E seuraavasti

$$\begin{aligned}
E(1) &= \frac{1}{4}(I + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{\sigma}) \\
E(2) &= \frac{1}{4}(I + (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{\sigma}) \\
E(3) &= \frac{1}{4}(I + (-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{\sigma}) \\
E(4) &= \frac{1}{4}(I + (-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{\sigma}).
\end{aligned}$$

Näin määritelty positiivioperaattorimitta E on todellakin suure, sillä sen arvot ovat efektejä ja ne summautuvat I:ksi. □

Huomautus 2.4. Edellisen lauseen tilanteessa on oletettu, että suureet A, B ja C saadaan postprosessoitua neliarvoisesta suureesta tietyllä tavalla. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että suureilla on olemassa tietynlainen neliarvoinen yhteissuure. Tämän näkemiseksi kirjoitetaan

$$\begin{aligned}
A(a_i) &= \sum_x \mu_x(a_i)E(x) \\
B(b_j) &= \sum_x \nu_x(b_j)E(x) \\
C(c_k) &= \sum_x \lambda_x(c_k)E(x).
\end{aligned}$$

Jotta kyseessä olisi edellisen lauseen mukainen post-prosessointi, niin esim. ylimmässä yhtälössä esiintyvät kertoimet $\mu_x(a_i)$ tulee valita siten, että

$$\begin{aligned}
\mu_1(1) = \mu_2(1) = \mu_3(-1) = \mu_4(-1) = 1 \\
\mu_1(-1) = \mu_2(-1) = \mu_3(1) = \mu_4(1) = 0.
\end{aligned}$$

Nyt suure $\tilde{E}(a_i, b_j, c_k) := \sum_x \mu_x(a_i)\nu_x(b_j)\lambda_x(c_k)E(x)$ antaa marginaaleinaan alkuperäiset suureet ja sillä on ainoastaan neljä nollasta eroavaa efektiä, jotka ovat

$$\begin{aligned}\tilde{E}(+,+,+) &= E(1)\\ \tilde{E}(+,-,-) &= E(2)\\ \tilde{E}(-,+,-) &= E(3)\\ \tilde{E}(-,-,+) &= E(4).\end{aligned}$$

Kääntäen, jos on olemassa yhteissuure G, jonka ainoat nollasta eroavat efektit ovat $G(+,+,+), G(+,-,-), G(-,+,-)$ ja $G(-,-,+)$, niin tästä marginaalin laskeminen on juuri edellisen lauseen tyyppinen post-prosessointi.

Esimerkki 2.9. Olkoon $\vec{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,0), \vec{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,1,0)$ ja $\vec{\eta}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,1)$ kolme vektoria, jotka määrävät kolme qubittisuuretta luonnollisella tavalla. Nyt

$$||\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_3|| + ||\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_3|| + ||\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_3|| + || - \vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_3|| = 2 + \frac{4}{\sqrt{5}} < 4$$

joten lauseen 2.14 ehto toteutuu. Näin ollen on olemassa yhteissuure. Kuitenkin esimerkiksi

$$||\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_3|| = \frac{3}{\sqrt{5}} > 1,$$

joten edellisen lauseen mukaista neliarvoista yhteissuuretta ei ole olemassa.

Huomautus 2.5. Käytetään tuttua notaatiota sumeusvektoreille. Ortogonaalisten qubittisuureiden (eli ortogonaalisten sumeusvektoreiden) tapauksessa lauseen 2.15 mukaisen neliarvoisen yhteissuureen olemassaolo on yhtäpitävää yhteismitattavuuden kanssa. Tämän näkee helposti aiempien tuloksien avulla: lauseen 2.14 ehto, joka antaa ortogonaalisten qubittien tapauksessa lauseen 2.11 nojalla karakterisoinnin yhteismitattavuudelle, redusoituu muotoon

$$||\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_3|| \leq 1,$$

joka on tässä tapauksessa sama kuin lauseen 2.15 antama ehto. Näin ollen ortogonaalisilla qubiteilla on olemassa yhteissuure, jos ja vain jos niillä on olemassa lauseen 2.15 mukainen neliarvoinen yhteissuure. Itse asiassa tässä ei tarvitse edes puhua tietyn tyyppisistä neliarvoisista yhteissuureista, sillä jos yhteissuure on olemassa, niin on olemassa ainakin tietyn tyyppinen neliarvoinen yhteissuure. Toisaalta, jos on olemassa jokin neliarvoinen yhteissuure, niin tämä on jo itsessään yhteissuure. Näin ollen voidaan sanoa, että kolmella ortogonaalisella qubitilla on yhteissuure, jos ja vain jos niillä on neliarvoinen yhteissuure.

2.2.5 Fourier-kytkettyjen suureiden yhteismittaus

Tähän asti yhteismitattavuutta on käsitelty vain qubittisuureiden kannalta. Tässä alaluvussa esitellään aiemmin esitetyistä tavoista huomattavasti poikkeava tapa karakterisoida kahden tietyn symmetrian omaavan d-arvoisen suureen yhteismittaus. Pohjana on käytetty artikkelia [21]. Merkintä $\mathbb{Z}_d = \{0, ..., d-1\}$ tarkoittaa d:n alkion syklistä ryhmää ja merkinnällä $\mathcal{H}$ tarkoitetaan d-ulotteista Hilbertin avaruutta, jos ei toisin mainita. Seuraava määritelmä liittyy tarkasteltavilta suureilta vaadittavaan symmetriaan.

Määritelmä 2.7. Olkoon $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_d}$ ja $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}_d}$ kaksi Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}$ ortonormaalia kantaa. Nämä kannat ovat keskenään tasa-arvoiset (MUB)[7], jos on voimassa

$$|\langle\varphi_j|\psi_k\rangle|^2 = \frac{1}{d}\ \forall j, k \in \mathbb{Z}_d.$$

MUB-kantojen olemassaolo ei ole määritelmästä suoraan selvää. Niiden generointi onnistuu kuitenkin helposti seuraavalla kanonisella tavalla. Olkoon $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_d}$ Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}$ ortonormaali kanta. Määritellään diskreetti Fourier-muunnos kaavalla

$$F\varphi_k := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{h\in\mathbb{Z}_d} \omega^{-hk}\varphi_h,$$

missä $\omega = e^{2\pi i/d}$. Suora lasku osoittaa, että operaattorin F adjungaatti F^* saadaan kaavalla

$$F^*\varphi_k := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{h\in\mathbb{Z}_d} \omega^{hk}\varphi_h.$$

Määritellään nyt uusi ortonormaali kanta $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}_d}$, missä $\psi_k = F^*\varphi_k$. Näin määritelty uusi kanta on alkuperäisen kannan suhteen MUB, sillä $|\langle\varphi_j|\psi_k\rangle|^2 = |\frac{1}{\sqrt{d}}\,\omega^{jk}|^2 = \frac{1}{d}$.

Määritellään nyt kaksi d-arvoista suuretta A ja B, jotka omaavat MUB-kantojen tyyppisen symmetrian toisiinsa nähden. Olkoon tätä varten $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_d}$ ortonormaa-

[7]MUB=Mutually Unbiased Bases

li kanta ja $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}_d}$ siitä kanonisesti konstruoitu MUB-kanta. Näistä voidaan määritellä suureet A ja B seuraavasti

$$\begin{aligned} A(j) &= |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| \\ B(k) &= |\psi_k\rangle\langle\psi_k|. \end{aligned}$$

Heti nähdään, että jos $\mathrm{tr}[A(j)\rho] = 1$ jollain tilalla ρ, niin välttämättä $\rho = |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$ ja tällöin $\mathrm{tr}[B(k)\rho] = \frac{1}{d}$ $\forall k \in \mathbb{Z}_d$. Vastaavasti $\mathrm{tr}[B(k)\rho] = 1 \Rightarrow \mathrm{tr}[A(j)\rho] = \frac{1}{d}$ $\forall j \in \mathbb{Z}_d$. Tämä tarkoittaa sitä, että jos toisen suureen arvon tietää varmasti, niin toisen arvo on täysin epämääräinen, toisin sanoen suurepari on komplementaarinen.

Suureilla A ja B on tietyt kovarianssi- ja invarianssiominaisuudet. Tämän näkemiseksi määritellään ryhmälle $\mathbb{Z}_d$ unitaariesitykset $U, V : \mathbb{Z}_d \to \mathcal{L}(H)$ kaavoilla

$$\begin{aligned} U_x\varphi_j &= \varphi_{j+x} \\ V_y\varphi_j &= \omega^{yj}\varphi_j. \end{aligned}$$

Selvästi $U_{x+y} = U_xU_y$ ja $V_{x+y} = V_xV_y$, joten kyseiset kuvaukset todellakin ovat esityksiä. Lisäksi operaattorit U_x ja V_y ovat selvästi unitaarisia kaikilla $x, y \in \mathbb{Z}_d$. Lasketaan operaattoreiden U_x ja V_y arvot MUB-kannan $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}_d}$ alkioilla

$$\begin{aligned} U_x\psi_k &= \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{h\in\mathbb{Z}_d}\omega^{hk}U_x\varphi_h = \omega^{-xk}\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{h\in\mathbb{Z}_d}\omega^{(h+x)k}\varphi_{h+x} = \omega^{-xk}\psi_k \\ V_y\psi_k &= \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{h\in\mathbb{Z}_d}\omega^{hk}V_y\varphi_h = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{h\in\mathbb{Z}_d}\omega^{h(k+y)}\varphi_h = \psi_{k+y}. \end{aligned}$$

Nyt suureilla A ja B nähdään selvästi olevan seuraavat kovarianssi- sekä invarianssiominaisuudet

$$\begin{aligned} U_xA(j)U_x^* &= A(j+x) \\ V_yA(j)V_y^* &= A(j) \\ U_xB(k)U_x^* &= B(k) \\ V_yB(k)V_y^* &= B(k+y). \end{aligned}$$

Tähän asti suureita on sumennettu pääosin ottamalla konveksikombinaatio triviaalisuureen kanssa. Kuten tämän luvun alussa todettiin, konveksikombinointi ei ole ainoa tapa sumentaa suureita, vaan ainoastaan erityistapaus suuremmasta luokasta sumennuksia. Määritellään nyt sumeat versiot suureista A ja B konvoluution avulla:

$$A_\Lambda(j) = \sum_{h\in\mathbb{Z}_d} \Lambda(j-h)A(h)$$
$$B_\Gamma(k) = \sum_{h\in\mathbb{Z}_d} \Gamma(k-h)B(h),$$

missä Λ sekä Γ ovat todennäköisyysjakaumia joukossa $\mathbb{Z}_d$. Selvästi myös suureiden sumeat versiot toteuttavat samat kovarianssi- sekä invarianssiehdot kuin alkuperäiset suureet.

Tämän alaluvun tarkoitus on karakterisoida suureiden A_Λ ja B_Γ yhteismitattavuus. Tätä varten tarvitaan niin sanottua kovarianttia faasiavaruussuuretta.

Määritelmä 2.8. Suure $C : \mathcal{B}(\mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on kovariantti faasiavaruussuure, jos

$$U_x V_y C(j,k) V_y^* U_x^* = C(j+x, k+y) \ \forall j,k,x,y \in \mathbb{Z}_d.$$

Lause 2.16. Jos suureilla A_Λ ja B_Γ on yhteissuure C, niin niillä on myös kovariantti yhteissuure.

Todistus. Olkoon C suureiden A_Λ ja B_Γ yhteissuure. Määritellään jokaiselle $x, y \in \mathbb{Z}_d$ suure $C_{x,y}$ kaavalla

$$C_{x,y}(j,k) := U_x^* V_y^* C(j+x, k+y) V_y U_x.$$

Näin määritelty suure on myöskin yhteissuure, sillä

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_d} C_{x,y}(j,k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_d} U_x^* V_y^* C(j+x,k+y) V_y U_x = U_x^* V_y^* A_\Lambda(j+x) V_y U_x = A_\Lambda(j)$$
$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_d} C_{x,y}(j,k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_d} U_x^* V_y^* C(j+x,k+y) V_y U_x = U_x^* V_y^* B_\Gamma(k+y) V_y U_x = B_\Gamma(k).$$

Määritellään nyt kolmas suure $\tilde{C}$ kaavalla

$$\tilde{C}(j,k) := \frac{1}{d^2} \sum_{x,y\in\mathbb{Z}_d} C_{x,y}(j,k).$$

Suure $\tilde{C}$ on yhteissuureiden konveksikombinaationa myös yhteissuure. Koska kaikilla kanta-alkioilla φ_k

$$\begin{aligned} V_y U_x^* \varphi_k &= \omega^{y(k-x)} \varphi_{k-x} \\ U_x^* V_y \varphi_k &= \omega^{yk} \varphi_{k-x}, \end{aligned}$$

niin $V_y U_x^* = \omega^{-xy} U_x^* V_y$. Käyttämällä tätä ominaisuutta ja sitä, että U ja V ovat esityksiä, saadaan

$$\begin{aligned} U_x V_y \tilde{C}(j,k) V_y^* U_x^* &= \frac{1}{d^2} \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_d} U_x V_y U_a^* V_b^* C(j+a, k+b) V_b U_a V_y^* U_x^* \\ &= \frac{1}{d^2} \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_d} U_x U_a^* V_y V_b^* C(j+a, k+b) V_b V_y^* U_a U_x^* \\ &= \frac{1}{d^2} \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_d} U_{a-x}^* V_{b-y}^* C(j+a, k+b) V_{b-y} U_{a-x} \\ &= \frac{1}{d^2} \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_d} U_a^* V_b^* C(j+a+x, k+b+y) V_b U_a \\ &= \frac{1}{d^2} \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_d} C_{a,b}(j+x, k+y) \\ &= \tilde{C}(j+x, k+y). \end{aligned}$$

Näin ollen $\tilde{C}$ on kovariantti faasiavaruussuure. □

Seuraavassa lauseessa tarvitaan kirjasta [22] löytyvää tulosta, jonka mukaan faasiavaruussuureet ovat yksi yhteen vastaavuudessa positiivisten jäljen yksi operaattoreiden kanssa. Kirjassa tämä on todistettu ääretönulotteisessa tapauksessa. Seuraavassa lemmassa on esitetty todistus ainoastaan tämän työn kannalta oleellisessa eli äärellisulotteisessa tapauksessa.

Lemma 2.6. Kovariantit faasiavariuussuureet $C : \mathcal{B}(\mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ovat yksi yhteen vastaavuudessa tilaoperaattoreiden kanssa seuraavan kaavan mukaisesti

$$C_T(j,k) = \frac{1}{d} U_j V_k T V_k^* U_j^*, \;\; j,k \in \mathbb{Z}_d, T \in \mathcal{S}(\mathcal{H}). \tag{15}$$

Todistus. Olkoon aluksi T tila. Määritellään kuvaus $C_T : \mathcal{B}(\mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kaavan (15) mukaisesti. Näin määritellyn kuvauksen arvot ovat ensinnäkin positiivisia, sillä

$$\langle \varphi | C_T(j,k) \varphi \rangle = \frac{1}{d} \langle V_k^* U_j^* \varphi | T V_k^* U_j^* \varphi \rangle \geq 0 \;\forall \varphi \in \mathcal{H},$$

sillä $T \geq 0$. Lisäksi kuvaus on normitettu. Tämän näkemiseksi otetaan Hilbertin avaruudelle $\mathcal{H}$ sama kanta kuin edellä (eli $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{Z}_d}$) ja lasketaan summaoperaattorin $\sum\limits_{j,k\in\mathbb{Z}_d} C_T(j,k)$ matriisialkiot:

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k\in\mathbb{Z}_d} \langle\varphi_a|C_T(j,k)\varphi_b\rangle &= \frac{1}{d}\sum_{j,k\in\mathbb{Z}_d} \omega^{k(b-a)}\langle\varphi_{a-j}|T\varphi_{b-j}\rangle \\
&= \delta_{ab}\sum_{j\in\mathbb{Z}_d}\langle\varphi_{a-j}|T\varphi_{b-j}\rangle \\
&= \delta_{ab}\mathrm{tr}[T] \\
&= \langle\varphi_a|\varphi_b\rangle.
\end{aligned}$$

Kovarianssiehto nähdään käyttämällä ominaisuutta $V_yU_j = \omega^{yj}U_jV_y$ seuraavasti

$$\begin{aligned}
U_xV_yC_T(j,k)V_y^*U_x^* &= \frac{1}{d}U_xV_yU_jV_kTV_k^*U_j^*V_y^*U_x^* \\
&= \frac{1}{d}U_{x+j}V_{y+k}TV_{y+k}^*U_{x+j}^* \\
&= C_T(j+x,k+y).
\end{aligned}$$

Olkoon nyt C kovariantti faasiavaruussuure. Ensinnäkin

$$\mathrm{tr}[C(j,k)] = \mathrm{tr}[U_jV_kC(0,0)V_k^*U_j^*] = \mathrm{tr}[C(0,0)]\ \forall j,k\in\mathbb{Z}_d.$$

Tätä käyttämällä saadaan

$$\mathrm{tr}[C(0,0)] = \frac{1}{d^2}\mathrm{tr}\left[\sum_{j,k\in\mathbb{Z}_d} C(j,k)\right] = \frac{1}{d^2}\mathrm{tr}[I] = \frac{1}{d}.$$

Koska C on suure, niin $C(0,0)$ on positiivinen operaattori. Näin ollen $C(0,0)d =: T$ on tila. Käyttämällä kovarianssiominaisuutta voidaan kirjoittaa

$$C(j,k) = U_jV_kC(0,0)V_k^*U_j^* = \frac{1}{d}U_jV_kTV_k^*U_j^*.$$

On siis osoitettu, että jokainen kovariantti faasiavaruussuure syntyy jostakin tilasta kaavan (15) mukaisesti ja että jokainen tila määrää kovariantin faasiavaruussuuren. Jos kaavassa (15) tekee korvauksen $T \to \tilde{T}$ ja saatava suure C on sama kummallakin tilalla, niin $C(0,0)d = T = \tilde{T}$. Koska lisäksi kovarianssin vuoksi efekti $C(0,0)$ karakterisoi suureen C, niin jokaista kovarianttia faasiavaruussuuretta vastaava tila on yksikäsitteinen. Näin ollen tilajoukko ja kovariantit faasiavaruussuureet ovat yksi yhteen vastaavuudessa. □

Lause 2.17. Suureet A_Λ ja B_Γ ovat yhteismitattavat jos ja vain jos on olemassa tila T, jolle

$$\Lambda(j) = \mathrm{tr}[A(-j)T] \tag{16}$$

$$\Gamma(k) = \mathrm{tr}[B(-k)T] \tag{17}$$

Todistus. Oletetaan ensin, että A_Λ ja B_Γ ovat yhteismitattavia. Edellisen lauseen nojalla on olemassa kovariantti faasiavaruussuure C_T, joka antaa marginaaleinaan suureet A_Λ ja B_Γ. Suureen A_Λ määritelmän sekä yhtälön (15) nojalla

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_d} \Lambda(j-k)A(k) = A_\Lambda(j) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_d} C_T(j,k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_d} \frac{1}{d} U_j V_k T V_k^* U_j^*.$$

Ottamalla puolittain odotusarvo tilassa φ_i saadaan

$$\begin{aligned}
\Lambda(j-i) &= \frac{1}{d}\sum_{k\in\mathbb{Z}_d} \langle \varphi_i | U_j V_k T V_k^* U_j^* \varphi_i\rangle \\
&= \frac{1}{d}\sum_{k\in\mathbb{Z}_d} \mathrm{tr}[|\varphi_{i-j}\rangle\langle\varphi_{i-j}| V_k T V_k^*] \\
&= \frac{1}{d}\sum_{k\in\mathbb{Z}_d} \mathrm{tr}[|\varphi_{i-j}\rangle\langle\varphi_{i-j}| T] \\
&= \mathrm{tr}[A(i-j)T].
\end{aligned}$$

Vastaavasti suureen B_Γ tapauksessa saadaan

$$\begin{aligned}
\Gamma(k-i) &= \frac{1}{d}\sum_{j\in\mathbb{Z}_d} \langle \psi_i | U_j V_k T V_k^* U_j^* \psi_i\rangle \\
&= \frac{1}{d}\sum_{j\in\mathbb{Z}_d} \mathrm{tr}[|\psi_i\rangle\langle\psi_i| V_k T V_k^*] \\
&= \frac{1}{d}\sum_{j\in\mathbb{Z}_d} \mathrm{tr}[|\psi_{i-k}\rangle\langle\psi_{i-k}| T] \\
&= \mathrm{tr}[B(i-k)T].
\end{aligned}$$

Oletetaan nyt, että on olemassa tila T, josta saadaan Λ ja Γ kaavojen (16) ja (17) mukaisesti. Tilan T määräämän kovariantin faasiavaruussuureen C_T toisen marginaalin matriisialkioiksi saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}_d}\langle\varphi_l|C_T(j,k)\varphi_i\rangle &= \frac{1}{d}\sum_{k\in\mathbb{Z}_d}\langle\varphi_l|U_jV_kTV_k^*U_j^*\varphi_i\rangle\\
&= \frac{1}{d}\sum_{k\in\mathbb{Z}_d}\langle\omega^{-k(l-j)}\varphi_{l-j}|T\omega^{-k(i-j)}\varphi_{i-j}\rangle\\
&= \frac{1}{d}\langle\varphi_{l-j}|T\varphi_{i-j}\rangle\sum_{k\in\mathbb{Z}_d}\omega^{k(l-i)}\\
&= \delta_{il}\mathrm{tr}[TA(i-j)]\\
&= \delta_{il}\Lambda(j-i)\\
&= \Big\langle\varphi_l\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}_d}\Lambda(j-n)A(n)\varphi_i\Big\rangle\\
&= \langle\varphi_l|A_\Lambda(j)\varphi_i\rangle\ \forall i,l\in\mathbb{Z}_d,\end{aligned}$$

missä neljännessä yhtäsuuruudessa on käytetty ykkösenjuurten ominaisuutta $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}_d}\omega^{k(x-y)}=\delta_{xy}$. Laskemalla sama lasku toiselle marginaalille saadaan

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_d}\langle\psi_l|C_T(j,k)\psi_i\rangle = \langle\psi_l|B_\Gamma(k)\psi_i\rangle\ \forall i,l\in\mathbb{Z}_d.$$

Näin ollen suure C_T antaa marginaaleinaan suureet A_Λ sekä B_Γ ja kelpaa täten näiden yhteissuureeksi. □

Edellisessä lauseessa Fourier-kytketyille suureille annettu yhteismittauksen karakterisointi ei välttämättä ole yhtä intuitiivinen kuin aiemmin johdetut qubittisuureita koskevat yhteismittauskriteerit. Kuitenkin edellä esiintynyt kriteeri saadaan epäyhtälön muotoon, kun suureita sumennetaan konveksikombinoimalla niitä triviaalisuureen kanssa. Tämän näkemiseksi tarvitaan muutama aputulos.

Lemma 2.7. Lauseen (2.17) ehdot ovat yhtäpitäviä sen kanssa, että on olemassa yksikkövektori $\varphi\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$, jolle

$$\Lambda(j)=\langle\varphi|(A(-j)\otimes I)\varphi\rangle \tag{18}$$

$$\Gamma(k)=\langle\varphi|(B(-k)\otimes I)\varphi\rangle. \tag{19}$$

Todistus. Ensinnäkin jokainen $T\in\mathcal{S}(\mathcal{H})$ voidaan kirjoittaa itseadjungoituna (kompaktina) operaattorina spektraalihajotelmalla muotoon $T=\sum\limits_{i=1}^{d}p_i|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$, missä $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{Z}_d}$ on ortonormaali kanta ja $\sum_i p_i=1, p_i\geq 0\ \forall i$. Määritellään yksikkövektori

$\varphi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ kaavalla $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i} \varphi_i \otimes \varphi_i$. Tästä saatava tila $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ on tilan T niin sanottu puhdistus (purification), sillä

$$\mathrm{tr}_2[|\varphi\rangle\langle\varphi|] = T.$$

Tässä kuvaus $\mathrm{tr}_2 : \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on niin sanottu osittainen jälki[8].

Jos lauseen (2.17) ehdot ovat voimassa, niin kaava (16) saadaan yllä olevin merkinnöin muotoon

$$\begin{aligned}
\Lambda(j) &= \mathrm{tr}[A(-j)T] = \langle \varphi_{-j} | T \varphi_{-j} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{d} p_i \langle \varphi_{-j} | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | \varphi_{-j} \rangle \\
&= \langle \varphi | (A(j) \otimes I) \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Viimeisen yhtäsuuruuden näkee helposti kirjoittamalla oikean puolen auki vektorin φ ja operaattorin A määritelmien avulla. Vastaava lasku osoittaa, että

$$\Gamma(k) = \langle \varphi | (B(k) \otimes I) \varphi \rangle.$$

Oletetaan nyt, että on olemassa yksikkövektori $\varphi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, jolle kaavat (18) ja (19) ovat voimassa. Määrittelemällä $T := \mathrm{tr}_2[|\varphi\rangle\langle\varphi|]$ saadaan operaattori, jolle

$$\mathrm{tr}[TP] = \mathrm{tr}[(P \otimes I)|\varphi\rangle\langle\varphi|] \ \forall P \in \mathcal{P}(\mathcal{H}).$$

Koska jälki on lineaarikuvaus ja jokainen (kompakti) itseadjungoitu operaattori voidaan kirjoittaa spektraalihajotelmansa avulla projektioiden summaksi, niin yllä oleva kaava toimii myös kaikilla $P \in \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$. Näin ollen on voimassa

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}[A(-j)T] &= \mathrm{tr}[(A(-j) \otimes I)|\varphi\rangle\langle\varphi|] = \Lambda(j) \\
\mathrm{tr}[B(-k)T] &= \mathrm{tr}[(B(-k) \otimes I)|\varphi\rangle\langle\varphi|] = \Gamma(k)
\end{aligned}$$

Vielä on osoitettava, että T on tila. Tämä nähdään osittaisen jäljen ominaisuuksien

[8] Operaattorin $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ osittainen jälki yli Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}_2$ lasketaan etsimällä operaattori $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, jolle $\mathrm{tr}[BP] = \mathrm{tr}[(P \otimes I_2)A] \ \forall P \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_1)$. Vastaavasti operaattorin A osittainen jälki yli Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}_1$ lasketaan etsimällä operaattori $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$, jolle $\mathrm{tr}[CP] = \mathrm{tr}[(I_1 \otimes P)A] \ \forall P \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_2)$.

avulla. Ensinnäkin operaattorin T jälki on yksi, sillä

$$\mathrm{tr}[T] = \mathrm{tr}[TI] = \mathrm{tr}[I \otimes I|\varphi\rangle\langle\varphi|] = 1.$$

Lisäksi T on positiivinen, koska jokaisella $\psi \in \mathcal{H}$

$$\langle\psi|T\psi\rangle = \mathrm{tr}[T|\psi\rangle\langle\psi|] = \mathrm{tr}[\tilde{P}|\varphi\rangle\langle\varphi|] \geq 0,$$

sillä $\tilde{P} := |\psi\rangle\langle\psi| \otimes I$ on projektiona positiivinen. □

Seuraavassa lauseessa sumennus on toteutettu triviaalisuureen kanssa konveksikombinoimalla. Tämä onnistuu valitsemalla sumeiden suureiden A_Λ ja B_Γ todennäköisyysjakaumat siten, että

$$\begin{aligned}\Lambda(j) &= \lambda\delta(j) + (1-\lambda)\mu(j)\\ \Gamma(k) &= \gamma\delta(k) + (1-\gamma)\mu(k),\end{aligned}$$

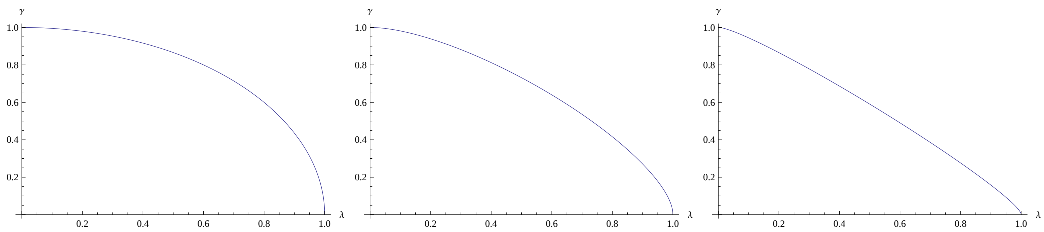
missä δ on nollaan keskittynyt pistemitta ja μ on tasainen jakauma.

Lemma 2.8. Olkoon $\lambda, \gamma \in (0, 1)$ ja suureet A_λ ja B_γ triviaalisuureen $\frac{1}{d}$ kanssa sumennetut A ja B, eli esimerkiksi $A_\lambda(j) = \lambda A(j) + (1-\lambda)\frac{1}{d}I$. A_λ ja B_γ ovat yhteismitalliset jos ja vain jos $A_{\lambda'}$ ja $B_{\gamma'}$ ovat yhteismitalliset kaikilla $0 \leq \lambda' \leq \lambda$ ja $0 \leq \gamma' \leq \gamma$. Tämä on edelleen yhtäpitävää sen kanssa, että $A_{\lambda'}$ ja $B_{\gamma'}$ ovat yhteismitalliset kaikilla $0 \leq \lambda' < \lambda$ ja $0 \leq \gamma' < \gamma$

Todistus. Oletetaan ensin, että A_λ ja B_γ ovat yhteismitalliset yhteissuureenaan C_1. Olkoon $0 \leq \lambda' \leq \lambda$. Koska mikä tahansa suure on triviaalisuureen $\frac{1}{d}I = A_0$ kanssa yhteismitallinen, niin voidaan määritellä suureille B_γ ja A_0 yhteissuure C_0. Nyt konveksikombinaatio $tC_1 + (1-t)C_0$ on suureiden B_γ ja $tA_1 + (1-t)A_0$ yhteissuure. Kun merkitään $t = \frac{\lambda'}{\lambda}$, niin huomataan, että itse asiassa $tA_1 + (1-t)A_0 = A_{\lambda'}$. Vaihtamalla tässä A_λ ja B_γ keskenään saadaan sama tulos toisin päin, joten $A_{\lambda'}$ ja $B_{\gamma'}$ ovat yhteismitalliset kaikilla $0 \leq \lambda' \leq \lambda$ ja $0 \leq \gamma' \leq \gamma$.

Seuraava välivaihe on triviaali, sillä yhteismitallisuus kaikilla $0 \leq \lambda' \leq \lambda$ ja $0 \leq \gamma' \leq \gamma$ antaa erityistapauksenaan väitteen kolmannen kohdan.

Oletetaan nyt yhteismitallisuus kaikilla $0 \leq \lambda' < \lambda$ ja $0 \leq \gamma' < \gamma$. Valitaan jonot (λ_n) ja (γ_n), joille $0 < \lambda_n < \lambda$, $0 < \gamma_n < \gamma$ sekä $\lim \lambda_n = \lambda$ ja $\lim \gamma_n = \gamma$. Koska A_{λ_n} ja B_{γ_n} ovat yhteismitalliset jokaisella n, niin niillä on lauseen 2.16 nojalla myös yhteissuure C_{T_n}, joka on kovariantti faasiavaruussuure. Koska tilajoukko on kompakti,



(a) $d = 2$ (b) $d = 10$ (c) $d = 100$

Kuva 4: Fourier-kytkettyjen suureiden yhteismitattavuus dimensioissa $2, 10$ ja 100.

niin jonolla (T_n) on suppeneva osajono, merkitään $\lim T_n = T$. Tästä saatavan faasiavaruussuureen C_T marginaalisuureissa esiintyvät todennäköisyysjakaumat ovat kaavojen (16) ja (17) nojalla

$$\Lambda(j) = \lim_n \operatorname{tr}[A(-j)T_n] = \lim_n [\lambda_n \delta(j) + (1-\lambda_n)\mu(j)] = \lambda\delta(j) + (1-\lambda)\mu(j)$$
$$\Gamma(k) = \lim_n \operatorname{tr}[B(-k)T_n] = \lim_n [\gamma_n \delta(j) + (1-\gamma_n)\mu(j)] = \gamma\delta(j) + (1-\gamma)\mu(j),$$

jotka vastaavat juuri suureissa A_λ ja B_γ esiintyviä todennäköisyysjakaumia (kts. todennäköisyysjakaumia koskeva argumentti ennen tätä lausetta). Näin ollen suureilla A_λ ja B_γ on yhteissuure C_T. $\square$

Edellisen lauseen nojalla voidaan jokaiselle $\gamma \in (0,1)$ määrätä luku $\lambda_{\max}(\gamma)$, joka on sellainen, että A_λ ja B_γ ovat yhteismitattavat jos ja vain jos $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}(\gamma)$. Vastaavasti voidaan jokaiselle $\lambda \in (0,1)$ määrätä luku $\gamma_{\max}(\lambda)$. Näin ollen yhteismittauksen karakterisointi epäyhtälömuodossa redusoituu funktion $\gamma_{\max}(\lambda)$ tai yhtäpitävästi funktion $\lambda_{\max}(\gamma)$ etsimiseen.

Lause 2.18. Riittävä ja välttämätön ehto sille, että A_λ ja B_γ ovat yhteismitattavat on (kts. kuva)

$$\gamma \leq \frac{(d-2)(1-\lambda) + 2\sqrt{(1-d)\lambda^2 + (d-2)\lambda + 1}}{d}$$

tai yhtäpitävästi

$$\lambda \leq \frac{(d-2)(1-\gamma) + 2\sqrt{(1-d)\gamma^2 + (d-2)\gamma + 1}}{d}.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että suureet A_λ ja B_γ ovat yhteismitattavat. Olkoon $\varphi \in$

$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ vektori, joka toteuttaa yhtälöt (18) ja (19). Kirjoitetaan φ muotoon

$$\varphi = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_d} c_{ij} \varphi_i \otimes \varphi_j = \sum_{i \in \mathbb{Z}_d} \varphi_i \otimes \xi_i,$$

missä vektorit $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{Z}_d}$ ovat kuten edellä ja $\xi_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}_d} c_{ij} \varphi_j$. Yhtälön (18) nojalla $\Lambda(j) = \langle \varphi | (A(-j) \otimes I) \varphi \rangle$, joka toisin kirjoitettuna antaa

$$\lambda \delta(j) + (1 - \lambda) \mu(j) = ||\xi_j||^2.$$

Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \sqrt{\lambda + \frac{1-\lambda}{d}} \eta_0 \\ \xi_i &= \sqrt{\frac{1-\lambda}{d}} \eta_i, \ i \neq 0, \end{aligned}$$

missä vektorit η_i ovat normitettuja versioita vektoreista ξ_i. Yhtälön (19) nojalla $\Gamma(k) = \langle \varphi | (B(-k) \otimes I) \varphi \rangle$. Kirjoittamalla tämä auki saadaan

$$\begin{aligned} \gamma \delta(k) + (1 - \gamma) \mu(k) &= \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_d} \langle \varphi_j \otimes \xi_j | (|\psi_k\rangle\langle\psi_k| \otimes I) \varphi_i \otimes \xi_i \rangle \\ &= \frac{1}{d} \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_d} \omega^{jk} \omega^{-ik} \langle \xi_j | \xi_i \rangle. \end{aligned}$$

Tämä yhtälö antaa pisteessä $k = 0$

$$\begin{aligned} \gamma + \frac{(1-\gamma)}{d} &= \frac{1}{d} \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_d} \langle \xi_j | \xi_i \rangle \\ &= \frac{1}{d} \Big\| \sum_{i \in \mathbb{Z}_d} \xi_i \Big\|^2 \\ &= \frac{1}{d^2} \Big\| \sqrt{(d-1)\lambda + 1} \eta_0 + \sum_{i=1}^{d-1} \sqrt{1-\lambda} \eta_i \Big\|^2. \end{aligned}$$

Parametrin γ maksimiarvo löytyy etsimällä oikean puolen maksimi. Se saavutetaan, kun kaikki vektorit η_i ovat samansuuntaisia. Näin ollen

$$\begin{aligned}\gamma_{\max} &= \frac{(\sqrt{(d-1)\lambda+1}+(d-1)\sqrt{1-\lambda})^2-d}{d(d-1)}\\ &= \frac{(d-2)(1-\lambda)+2\sqrt{(1-d)\lambda^2+(d-2)\lambda+1}}{d}.\end{aligned}$$

Näin saatu yläraja γ_{max} todellakin on ylärajoista pienin. Tämän näkemiseksi valitaan

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum_{i\in\mathbb{Z}_d} ||\xi_i||\varphi_i\otimes\eta\\ &= \left(\sqrt{\frac{(d-1)\lambda+1}{d}}\varphi_0+\sqrt{\frac{1-\lambda}{d}}\sum_{i=1}^{d-1}\varphi_i\right)\otimes\eta\\ &=: (\alpha_\lambda\varphi_0+\beta_\lambda\psi_0)\otimes\eta,\end{aligned}$$

missä η on jokin yksikkövektori, $\alpha_\lambda=\frac{1}{\sqrt{d}}\left(\sqrt{(d-1)\lambda+1}-\sqrt{1-\lambda}\right)$ ja $\beta_\lambda=\sqrt{1-\lambda}$. Yhtälöt (18) ja (19) antavat tällä vektorilla[9]

$$\begin{aligned}\langle\varphi|(A(j)\otimes I)\varphi\rangle &= |\langle\varphi_j|\varphi\rangle|^2 = ||\xi_j||^2 = \lambda\delta(j)+(1-\lambda)\mu(j)\\ \langle\varphi|(B(k)\otimes I)\varphi\rangle &= |\langle\psi_k|\alpha_\lambda\varphi_0+\beta_\lambda\psi_0\rangle|^2\\ &= (\frac{1}{\sqrt{d}}\alpha_\lambda+\beta_\lambda\delta(k))^2\\ &= \frac{\alpha_\lambda^2}{d}+(\beta_\lambda^2+2\frac{\alpha_\lambda\beta_\lambda}{\sqrt{d}})\delta(k)\\ &= (1-\gamma_{\max})\mu(k)+\gamma_{\max}\delta(k),\end{aligned}$$

joten $\gamma_{\max}$ todellakin on pienin yläraja.

Vielä pitää todistaa, että annettu ehto on riittävä yhteissuureen olemassaololle. Tämä seuraa siitä, että annetulla parametrin arvolla λ suureet A_λ ja $B_{\gamma_{\max}(\lambda)}$ ovat yhteismitattavat (tämän näkee katsomalla yllä olevaa vektorin φ konstruktiota ja soveltamalla lemmaa 2.7), jolloin lemman 2.8 nojalla myös A_λ ja B_γ ovat yhteismitattavat kaikilla $0\le\gamma\le\gamma_{\max}$.

Väitteessä esiintyvä epäyhtälö, jossa on vaihdettu parametrien λ ja γ rooli, on yhtäpitävä alkuperäisen epäyhtälön kanssa, joten väite on todistettu. □

[9] Triviaalisuureen kanssa sumennettaessa yhtälöt (18) ja (19) ovat yhtäpitäviä samoista yhtälöistä korvauksella $A(-j)\to A(j)$ ja $B(-k)\to B(k)$ saatavien yhtälöiden kanssa, sillä näissä esiintyvä pistemitta eroaa nollasta vain origossa ja tasaiseen jakaumaan tämä korvaus ei vaikuta.

3 Bellin epäyhtälöistä

Bellin epäyhtälöt ovat epäyhtälöitä, jotka toimivat rajana klassisen fysiikan ja kvanttimekaniikan välillä. Epäyhtälöt ovat osoittautuneet mielenkiintoisiksi paitsi niihin liittyvien teoreettisten tarkastelujen vuoksi, myös niiden ympärille rakennettujen käytännön kokeiden takia. Bellin epäyhtälöt saivat alkunsa John Stewart Bellin 1964 julkaisemasta paperista "On the Einstein Podolsky Rosen Paradox", jossa Bell näytti, että EPR-kolmikon kannattama lokaali realismi johtaa kvanttimekaniikan kanssa eriäviin ennustuksiin. Tässä lokaalisuus tarkoittaa sitä, että jos kaksi systeemiä eivät vuorovaikuta, niin toiselle systeemille tehtävät operaatiot eivät voi vaikuttaa toiseen. Reaalisuudella puolestaan tarkoitetaan sitä, että jos häiritsemättä systeemiä voidaan ennustaa jonkin suureen arvo varmuudella (eli todennäköisyydellä 1), niin systeemillä on ominaisuus, joka määrää suureelle kyseisen arvon. Toisin sanoen suureen mitattu arvo on ollut systeemillä jo ennen mittausta.

Aina Bellin 1964 paperista lähtien Bellin epäyhtälöistä on kehitetty uusia versioita, joita on käytetty muun muassa erilaisten piilomuuttujamallien ja kvanttimekaniikan antamien ennusteiden erilaisuuden osoittamiseen. Lisäksi näitä ennustuksia on pystytty kokeellisesti testaamaan ja koetulokset ovat olleet kvanttitulkintaa tukevia. Bellin epäyhtälöitä on käytetty myös moneen muuhun kuin piilomuuttujatulkintojen (lokaalin realismin) testaamiseen. Tämän tutkielman kannalta mielenkiintoisin sovelluskohde epäyhtälöille on artikkelissa [7] löydetty yhteys kahden qubittisuureen yhteismitattavuuden ja Bellin epäyhtälön rikkoutumisen välille.

Aloitetaan aiheen käsittely selvittämällä Bellin epäyhtälöiden luonnetta ja tarkastelemalla muutamaa yksinkertaista piilomuuttujateoriaa. Pohjana tässä on käytetty artikkeleita [8] ja [9].

3.1 Bellin epäyhtälöt matemaattiselta kannalta

Bellin epäyhtälöt eivät matemaattisesti ajatellen ole mitään sen kummempaa kuin klassisen todennäköisyysteorian asettamia rajoja tapahtumien todennäköisyyksille. Seuraava esimerkki valaisee tätä ajatusta.

Esimerkki 3.1. Olkoon uurnassa sata palloa, joista osa on onttoja ja osa umpinaisia. Lisäksi osa palloista on mustia ja osa valkoisia. Ajatellaan, että jokaisen pallon todennäköisyys tulla nostetuksi on $1/100$. Jos nyt halutaan, että onton pallon noston todennäköisyys on $3/4$ ja mustan pallon noston todennäköisyys on $4/5$, niin tulee uurnassa olla 75 onttoa ja 80 mustaa palloa. Nyt on mahdotonta saada aikaan tilanne, jossa todennäköisyys nostaa ontto musta pallo on esim. $1/5$, sillä tällöin onttoja mustia palloja pitäisi olla 20, jolloin palloja, jotka ovat joko mustia tai onttoja tulisi olla $80 + 75 - 20 = 135$.

Bellin epäyhtälöissä on kyse rajoituksista todennäköisyyksistä muodostuville vektoreille, esim. vektorille (p_1, p_2, p_{12}), missä p_i on tapahtuman i todennäköisyys ja p_{12} on tapahtumien 1 ja 2 leikkauksen todennäköisyys. Esimerkiksi edellisessä esimerkissä vektori $(0.75, 0.80, 0.20)$ ei ollut mahdollinen. Sallituille vektoreille (p_1, p_2, p_{12}) voidaan asettaa seuraavat rajoitukset:

$$0 \leq p_{12} \leq p_1, p_2 \leq 1.$$

Lisäksi todennäköisyys sille, että joko 1 tai 2 tapahtuu on $p_1 + p_2 - p_{12}$, joten

$$0 \leq p_1 + p_2 - p_{12} \leq 1.$$

Selvästi vektori $(0.75, 0.80, 0.20)$ ei toteuta jälkimmäistä epäyhtälöä. Ylläolevat epäyhtälöt ovat välttämättömiä ehtoja sille, että vektori (p_1, p_2, p_{12}) on klassisen todennäköisyyslaskennan mukainen. Seuraavassa nähdään, että nämä ehdot ovat myös riittävät. Ennen tuloksen esittämistä esitellään siinä käytettäviä termejä ja notaatioita.

Olkoon S kokoelma joukon $\{1, ..., n\}$ epätyhjiä osajoukkoja ja $T_1, ..., T_{|S|}$ jokin numerointi S:n alkioille. Jokaista $T = \{i_1, ..., i_k\} \in S$ kohti kiinnitetään luku $p(T) \in [0, 1]$ ja tämän luvun tulkinta tulee olemaan leikkauksen $i_1 \wedge ... \wedge i_k$ todennäköisyys. Tehtävänä on vastata kysymykseen milloin vektori

$$\vec{p} = (p(T_1), ..., p(T_{|S|}))$$

on sallittu, ts. milloin siinä esiintyvät todennäköisyydet $p(T_n)$ ovat keskenään yhteensopivat klassisen todennäköisyysteorian mielessä. Tämän karakterisoinnin antavia ehtoja (epäyhtälöitä) kutsutaan Bellin epäyhtälöiksi.

Määritelmä 3.1. Olkoon S kuten edellä. Jokaista (Boolen) vektoria $\vec{e} = (e_1, ..., e_n) \in \{0, 1\}^n$ kohti määritellään toinen $|S|$-komponenttinen (Boolen) vektori $\vec{e}_{(S)}$ kaavalla

$$(\vec{e}_{(S)})_i = \prod_{j \in T_i} e_j.$$

Määritelmä 3.2. Joukkoa

$$C(n, S) := \text{conv}\{\vec{e}_{(S)} | \vec{e} \in \{0,1\}^n\},$$

missä $\text{conv}\{x_1, ..., x_n\} := \{\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n | \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + ... + \lambda_n = 1\}$, kutsutaan korrelaatiopolytoopiksi.

Esimerkki 3.2. Tapauksessa $n = 2, S = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ saadaan vektoria $(e_1, e_2) \in \{0,1\}^2$ vastaavaksi toiseksi Boolen vektoriksi[10]

$$\vec{e}_{(S)} = (e_1, e_2, e_1 e_2).$$

Näin ollen korrelaatiopolytoopiksi saadaan

$$\begin{aligned} C(2, S) &= \text{conv}\{\vec{e}_{(S)} | \vec{e} \in \{0,1\}^2\} \\ &= \text{conv}\{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)\}. \end{aligned}$$

Seuraavan lauseen todistus löytyy artikkelista [8]. Lause antaa karakterisoinnin sille, milloin vektorin $\vec{p} = (p(T_1), ..., p(T_{|S|}))$ komponentit voidaan tulkita yhdistettyjen tapahtumien $T = \{i_1, .., i_k\}$ todennäköisyyksiksi.

Lause 3.1. Edellä määritelty vektori $\vec{p}$ kuuluu joukkoon $C(n, S)$ jos ja vain jos on olemassa joukko Ω, sigma-algebra F, todennäköisyysmitta $P : F \to [0, 1]$ ja tapahtumat $A_1, .., A_n \in F$ s.e.

$$p(T_i) = p(\{i_1, ..., i_k\}) = P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) \ \forall T_i \in S. \tag{20}$$

Toisin sanoen $\vec{p} \in C(n, S)$ jos ja vain jos vektorin $\vec{p}$ komponentit voidaan tulkita yhdistettyjen tapahtumien todennäköisyyksinä.

Ennen lauseen todistamista todistetaan seuraava lemma.

Lemma 3.1. Käytetään yllä olevan lauseen notaatiota ja lisäksi merkitään sigma-algebran F jäsenille $A_j^1 = A_j, A_j^0 = A_j^c$. Käyttäen tätä merkintätapaa määritellään kuvaus $A : \{0,1\}^n \to F$ kaavalla

$$A(\vec{e}) := A_1^{e_1} \cap ... \cap A_n^{e_n}.$$

[10] Tässä joukon S numerointi on valittu siten, että $T_1 = \{1\}, T_2 = \{2\}, T_3 = \{1, 2\}$.

Näin määritellyllä kuvauksella on seuraavat ominaisuudet:

$$
\begin{aligned}
&(i)\ A(\vec{e}) \cap A(\vec{f}) = \emptyset,\ \vec{e} \neq \vec{f},\\
&(ii)\ \Omega = \bigcup_{\vec{e} \in \{0,1\}^n} A(\vec{e}),\\
&(iii)\ A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k} = \bigcup_{e_{i_1} = ... = e_{i_k} = 1} A(\vec{e}).
\end{aligned}
$$

Todistus. Kohta (i) on selvä, sillä jos $\vec{e} \neq \vec{f}$, niin $e_i \neq f_i$ jollain i. Tällöin joukossa $A(\vec{e}) \cap A(\vec{f})$ on yhtenä leikkauksen jäsenenä $A_i \cap A_i^c = \emptyset$.

Kohdan (ii) todistamiseksi otetaan alkio $x \in \Omega$ ja näytetään, että se kuuluu oikean puolen unioniin. Ensinnäkin jokaisella i joko $x \in A_i$ tai $x \in A_i^c$. Valitsemalla $e_i = 1$, jos $x \in A_i$, ja $e_i = 0$, jos $x \in A_i^c$. Tällöin $x \in A_1^{e_1} \cap ... \cap A_n^{e_n} = A(\vec{e})$. Näin ollen $\Omega \subset \bigcup_{\vec{e} \in \{0,1\}^n} A(\vec{e})$. Toiseen suuntaan sisältyminen on voimassa automaattisesti, joten $\Omega = \bigcup_{\vec{e} \in \{0,1\}^n} A(\vec{e})$.

Todistetaan vielä kohta (iii). Olkoon ensiksi $x \in \bigcup_{e_{i_1} = ... = e_{i_k} = 1} A(\vec{e})$. Tällöin $x \in A(\vec{e})$ jollain $\vec{e}$, jolle $e_{i_1} = ... = e_{i_k} = 1$. Täten kuvauksen A määritelmän nojalla $x \in A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}$. Sisältymisen todistamiseksi myös toiseen suuntaan otetaan alkio $x \in A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}$ ja jokaiselle $j \notin \{i_1, ..., i_k\}$ määritellään e_j s.e. $x \in A_j^{e_j}$. Tällöin

$$
x \in A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k} \cap \left(\bigcap_{j \notin \{i_1, ..., i_k\}} A_j^{e_j} \right) \subset \bigcup_{e_{i_1} = ... = e_{i_k} = 1} A(\vec{e}),
$$

joka todistaa väitteen. □

Todistetaan nyt lause 3.1.

Todistus. Oletetaan ensin, että on olemassa kolmikko (Ω, F, P) ja tapahtumat $A_1, ..., A_n \in F$ s.e. kaava (20) on voimassa. Määritellään kuvaus $\lambda : \{0,1\}^n \to [0,1]$ kaavalla $\lambda(\vec{e}) = P(A(\vec{e}))$. Edellisen lemman kohdan (ii) nojalla

$$
\sum_{\vec{e} \in \{0,1\}^n} \lambda(\vec{e}) = \sum_{\vec{e} \in \{0,1\}^n} P(A(\vec{e})) = P\left(\bigcup_{\vec{e} \in \{0,1\}^n} A(\vec{e}) \right) = P(\Omega) = 1,
$$

missä toisen yhtäsuuruuden näkemiseksi pitää huomata, että edellisen lemman kohdan (ii) oikean puolen unionin jäsenet ovat erillisiä kohdan (i) nojalla. Kaavan (20) ja edellisen lemman kohdan (iii) nojalla saadaan joukolle $T_i = \{i_1, ..., i_k\}$

$$\begin{aligned}
p(T_i) &= P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) \\
&= P\left(\bigcup_{e_{i_1}=...=e_{i_k}=1} A(\vec{e}) \right) \\
&= \sum_{e_{i_1}=...=e_{i_k}=1} P(A(\vec{e})) \\
&= \sum_{e_{i_1}=...=e_{i_k}=1} \lambda(\vec{e}) \\
&= \sum_{\vec{e}\in\{0,1\}^n} \lambda(\vec{e}) e_{i_1} ... e_{i_k} \\
&= \left(\sum_{\vec{e}\in\{0,1\}^n} \lambda(\vec{e}) \vec{e}_{(S)} \right)_i ,
\end{aligned}$$

missä kolmannessa yhtäsuuruudessa on jälleen käytetty edellisen lemman kohtaa (i). Näin ollen $\vec{p} = (p(T_1), ..., p(T_{|S|})) \in C(n, S)$.

Oletetaan nyt, että $\vec{p} = (p(T_1), ..., p(T_{|S|})) \in C(n, S)$. Tällöin on olemassa ei-negatiiviset luvut $\lambda(\vec{e})$, joille $\sum_{\vec{e}\in\{0,1\}^n} \lambda(\vec{e}) = 1$ ja

$$\vec{p} = \sum_{\vec{e}\in\{0,1\}^n} \lambda(\vec{e}) \vec{e}_{(S)}.$$

Vektorin $\vec{e}_{(S)}$ määritelmän nojalla saadaan joukolle $T_i = \{i_1, ..., i_k\}$

$$p(T_i) = (\vec{p})_i = \sum_{\vec{e}\in\{0,1\}^n} \lambda(\vec{e}) e_{i_1} ... e_{i_k}.$$

Määritellään nyt $\Omega = \{0, 1\}^n, F = 2^\Omega$ ja $P(T) = \sum_{\vec{e}\in T} \lambda(\vec{e}) \quad \forall T \in F$. Näin määritelty kuvaus P todellakin on todennäköisyysmitta. Additiivisuus seuraa suoraan kuvauksen määritelmästä ja positiivisuus sekä normitus saadaan kertoimien

$\lambda(\vec{e})$ ominaisuuksista. Määrittelemällä vielä $A_i = \{\vec{e} \mid e_i = 1\}$ saadaan

$$\begin{aligned}
P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) &= \sum_{\vec{e} \in A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}} \lambda(\vec{e}) \\
&= \sum_{e_{i_1} = ... = e_{i_k} = 1} \lambda(\vec{e}) \\
&= \sum_{\vec{e} \in \{0,1\}^n} \lambda(\vec{e}) e_{i_1} ... e_{i_k} \\
&= p(T_i),
\end{aligned}$$

joka todistaa väitteen. □

Esimerkki 3.3. Aiemmin nähtiin, että välttämätöntä vektorin (p_1, p_2, p_{12}) tulkitsemiseksi todennäköisyyksinä on

$$\begin{aligned}
0 \leq p_{12} \leq p_1, p_2 \leq 1 \\
0 \leq p_1 + p_2 - p_{12} \leq 1.
\end{aligned}$$

Näytetään edellisen lauseen avulla, että nämä ehdot ovat myös riittävät. Olkoon tätä varten $n = 2$ ja $S = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Nyt korrelaatiopolytooppi saadaan kuten esimerkissä 3.2 ja se on $C(2, S) = \text{conv}\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$. Koska jokainen vektori (p_1, p_2, p_{12}) voidaan esittää muodossa

$$(p_1, p_2, p_{12}) = (p_2 - p_{12})(0, 1, 0) + (p_1 - p_{12})(1, 0, 0) + p_{12}(1, 1, 1)$$

ja lisäksi joukko $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ on $\mathbb{R}^3$:n kanta, niin kyseinen hajoitelma on yksikäsitteinen. Yksikäsitteisyyden nojalla ainoa tapa kirjoittaa vektori (p_1, p_2, p_{12}) $C(2, S)$:n ääripisteiden avulla siten, että kertoimet summautuvat ykköseksi, on

$$\begin{aligned}
(p_1, p_2, p_{12}) =& (1 - p_1 - p_2 + p_{12})(0, 0, 0) \\
&+ (p_2 - p_{12})(0, 1, 0) + (p_1 - p_{12})(1, 0, 0) + p_{12}(1, 1, 1).
\end{aligned}$$

Jos nyt edellä annetut välttämättömät ehdot otetaan oletukseksi, niin nähdään, että ylläoleva hajotelma on konveksikombinaatio $C(2, S)$:n ääripisteistä. Näin ollen edellisen lauseen nojalla ehdot nähdään riittäviksi.

3.2 Yksinkertaisia piilomuuttujamalleja

Kvanttimekaniikan kiusana on käytännössä teorian ensimmäisistä kehitysaskelista asti ollut erilaiset piilomuuttujatulkinnat. Nämä tulkinnat pyrkivät selittämään kvanttimekaniikan joitain epäklassisia piirteitä sillä, että on olemassa havaintokyvyn ulottumattomissa olevia parametreja, jotka määräävät systeemin ominaisuudet. Piilomuuttujamalleja on onnistuttu kumoamaan Bellin epäyhtälöiden ja niiden ympärille rakennettujen kokeiden avulla. Kuitenkaan kaikkia malleja ei ole pystytty osoittamaan vääriksi, mutta tietyn tyyppisille malleille on melko yksinkertaisin keinoin pystytty esittämään tilanteita, joissa piilomuuttujatulkinta ja kvanttimekaniikka antavat ristiriitaiset ennustukset. Tässä alaluvussa esitellään kaksi jatkossa esiteltävän CHSH-epäyhtälön avulla kumottavissa olevaa piilomuuttujamallia. CHSH viittaa tilanteeseen, jossa on kaksi havaitsijaa, joilla kummallakin on kaksi kaksiarvoista suuretta mitattavanaan. Tämän alaluvun tulokset todistuksineen löytyvät artikkelista [9].

3.2.1 Deterministinen piilomuuttujamalli 2-arvoisille suureille

Deterministinen piilomuuttujamalli koostuu piilomuuttujien joukosta Λ, Λ:ssa määritellystä (normitetusta) todennäköisyystiheydestä $\rho(\lambda)$ ja funktioista, jotka antavat piilomuuttujien sekä suureiden arvojen vastaavuuden. Jokaista 2-arvoista (arvot ± 1) suuretta S kohti määritellään kuvaus $\tilde{S} : \Lambda \to \{0, 1\}$ ja vaaditaan, että suureen S sekä kahden tällaisen suureen S ja T “tulosuureen” ST mittaustulostodennäköisyyksille on voimassa

$$P(S = 1) = \int \tilde{S}(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda \tag{21}$$

$$P(S = 1, T = 1) = \int \tilde{S}(\lambda)\tilde{T}(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda, \tag{22}$$

missä $\tilde{S}(\lambda) = 1$, jos $S(\lambda) = 1$ ja $\tilde{S}(\lambda) = 0$, jos $S(\lambda) = -1$ ja samoin $\tilde{T}$:lle. Tapaukset, joissa on mukana esimerkiksi suureen S arvo -1, lasketaan tekemällä vaihto $\tilde{S} \to 1 - \tilde{S}$.

3.2.2 Stokastinen piilomuuttujamalli

Stokastinen piilomuuttujamalli eroaa deterministisestä siinä, että stokastisessa mallissa piilomuuttujan arvo ei anna suoraan suureen arvoa vaan ainoastaan todennäköisyyden, jolla suureen mittaus tuottaa tuloksen $+1$ tai -1. Deterministisessä mallissa esiintyneet funktiot $\tilde{S}, \tilde{S}\tilde{T} : \Lambda \to \{0, 1\}$ korvataan todennäköisyyksillä $p(S, \lambda)$ ja $p(ST, \lambda)$, joista ensimmäinen on todennäköisyys sille, että S:n mittaus tuottaa tuloksen $+1$ piilomuuttujan arvolla λ. Jälkimmäinen puolestaan on todennäköisyys sille, että S:n ja T:n mittaukset tuottavat molemmat tuloksen $+1$ piilomuuttujan arvolla λ. Nyt deterministisessä mallissa esiintyneet ehdot saavat hieman eri muodon:

$$P(S = 1) = \int p(S, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda \tag{23}$$

$$P(S = 1, T = 1) = \int p(ST, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda \tag{24}$$

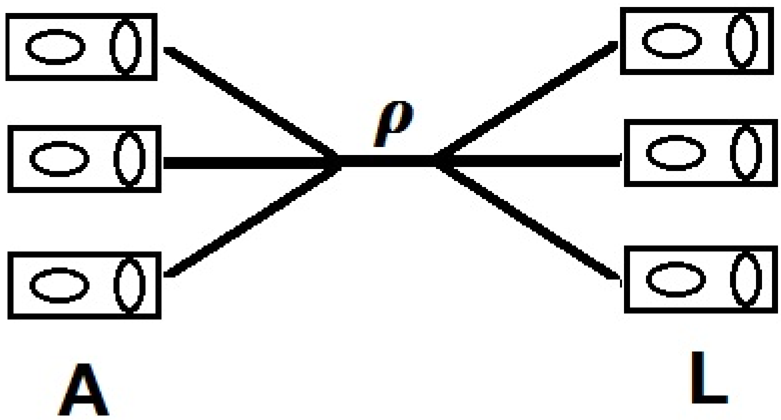
Tässä tapauksessa suureiden negatiivisten arvojen mittaustulostodennäköisyydet saadaan tekemällä korvaukset (tilde viittaa suureeseen, jonka negatiivisesta arvosta on kyse) $p(\tilde{S}, \lambda) = 1 - p(S, \lambda)$, $p(\tilde{S}T, \lambda) = p(T, \lambda) - p(ST, \lambda)$ ja $p(S\tilde{T}, \lambda) = p(S, \lambda) - p(ST, \lambda)$. Jos lisäksi seuraava ehto on voimassa, mallia sanotaan hajoavaksi:

$$p(ST, \lambda) = p(S, \lambda)p(T, \lambda). \tag{25}$$

Selvästi jokainen deterministinen malli on aina myös hajoava stokastinen malli. Tämän näkee asettamalla $p(S, \lambda) = 1$, jos $S(\lambda) = 1$ ja $p(S, \lambda) = 0$, jos $S(\lambda) = -1$ sekä lisäksi $p(ST, \lambda) = p(S, \lambda)p(T, \lambda)$. Vaikka käänteinen tulos ei ole totta, niin stokastisen mallin olemassaolo implikoi, että tilannetta voidaan kuvata myös deterministisellä mallilla [9]. Mainitaan täydellisyyden vuoksi seuraava tulos, joka löytyy todistuksineen artikkelista [9]. Tuloksessa mainittu CHSH-epäyhtälö löytyy seuraavasta alaluvusta.

Lause 3.2. Tapauksessa, jossa on kaksi havaitsijaa ja molemmilla on kaksi kaksiarvoista suuretta mitattavanaan, seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä:

(i) On olemassa deterministinen piilomuuttujamalli.
(ii) On olemassa hajoava stokastinen piilomuuttujamalli.
(iii) On olemassa todennäköisyysjakauma, josta saadaan kokeen suureiden sekä suureparien mittaustulostodennäköisyydet marginaaleina.
(iv) Jokaiselle kommutoivalle ja kommutoimattomalle suureparille sekä kolmikolle on olemassa todennäköisyysjakauma, josta yksittäisten suureiden mittaustulostodennäköisyydet saadaan marginaaleina.
(v) CHSH-epäyhtälö ei rikkoudu.



Kuva 5: Tapaus $(2, 3, 2)$ eli kaksi havaitsijaa (Antti ja Laura), joilla kummallakin on kolme kaksiarvoista suuretta. Tässä $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ on systeemin tila.

Tulos osoittaa, että käsiteltävän tyyppisten piilomuuttujamallien olemassaolo on ristiriidassa kvanttimekaniikan kanssa: epäkommutatiivisille suureille löytyy yhteisjakauma. Lisäksi tästä nähdään, että mitattavien suureiden yhteismitattomuus on välttämätön ehto CHSH-epäyhtälön rikkoutumiselle, sillä yhteissuureen olemassaolosta seuraa edellisen lauseen kohta (iii), jolloin CHSH ei rikkoudu.

3.3 Bellin epäyhtälöitä

Tässä alaluvussa esitellään tämän työn kannalta tärkeimpiä Bellin epäyhtälöitä. Jokaisen alaluvun otsikossa on merkintä (n, m, d), joka tarkoittaa tilannetta, johon yhtälö liittyy seuraavalla tavalla: n on havaitsijoiden määrä, m havaitsijalla käytössä olevien suureiden määrä ja d on mahdollisten mittaustulosten lukumäärä (kts. kuva 5). Ainoa poikkeus tästä on BG epäyhtälö, jossa merkintä (n, m, m', d, d') viittaa siihen, että toisella havaitsijalla on m' kappaletta d'-arvoisia suureita.

3.3.1 CHSH $(2, 2, 2)$

CHSH-epäyhtälö (Clauser Horne Shimony Holt [30]) on yksi tunnetuimmista Bellin epäyhtälöistä. Epäyhtälö on erittäin yksinkertainen muodoltaan ja sen antama raja kvanttimaailman ja klassisen fysiikan välille on kokeellisesti testattavissa esimerkiksi kietoutuneilla fotonipareilla. Tällaisia kokeita on tehty runsaasti ja niiden tulokset ovat tukeneet kvanttimekaniikan ennustuksia.

Seuraavassa on johdettu CHSH-epäyhtälö lokaalista realistista piilomuuttujamallia käyttäen. Tämä johto löytyy teoksesta [13]. Johto voidaan tehdä myös lauseen

3.1 avulla. Näin tehty johto on esitetty esimerkiksi teoksessa [24].

Kuten edellä mainittiin, (stokastisella hajoavalla) piilomuuttujamallilla tarkoitetaan teoriaa, jossa mittaustulostodennäköisyydet voidaan antaa piilomuuttujan $\lambda \in \Lambda$, todennäköisyysmitan $\mu : \Lambda \to [0,1]$ ja mitattavaan suureeseen A liittyvän jakauman $\chi_A(a,\lambda)$ avulla seuraavasti:

$$P_A(a) = \int\limits_{\Lambda} \chi_A(a,\lambda)\mu(d\lambda).$$

Tätä voi ajatella myös siten, että jokaista tilaa vastaa jokin todennäköisyysmitta, jonka avulla kaikkien suureiden mittaustulostodennäköisyydet tässä tilassa saadaan yllä olevalla kaavalla.

Kuten yllä mainittiin, CHSH:n johtamiseksi käytetään tässä lokaalista piilomuuttujamallia. Lokaalisuuden nojalla Antin ja Lauran mittaukset ovat toisistaan riippumattomia. Täten jakauma $\chi_A(a,\lambda)\chi_L(l,\lambda)$ kuvaa todennäköisyyttä sille, että Antin mittaus tuottaa tuloksen a ja Lauran mittaus tuloksen l. Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$P_{A,L}(a,l) = \int\limits_{\Lambda} \chi_A(a,\lambda)\chi_L(l,\lambda)\mu(d\lambda).$$

Olkoon nyt A_1, A_2, L_1 ja L_2 kaksiarvoisia suureita arvoinaan ± 1. Lokaalisen piilomuuttujamallin mukaan odotusarvot tulosuureille voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$E(A_i, L_j) = \sum_{a,l=\pm 1} a l P_{A,L}(a,l) = \int\limits_{\Lambda} a_i(\lambda) l_j(\lambda)\mu(d\lambda),$$

missä $a_i(\lambda) = \chi_{A_i}(1,\lambda) - \chi_{A_i}(-1,\lambda)$ ja $l_j(\lambda) = \chi_{L_j}(1,\lambda) - \chi_{L_j}(-1,\lambda)$. Näin määritellyt jakaumat toteuttavat aina ehdon

$$\int\limits_{\Lambda} a_i(\lambda)\mu(d\lambda) \in [-1,1], \quad i \in \{-1,1\}$$
$$\int\limits_{\Lambda} l_j(\lambda)\mu(d\lambda) \in [-1,1], \quad j \in \{-1,1\},$$

sillä todennäköisyyksien tulee olla aina välillä $[0,1]$. Nyt CHSH saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}&|E(A_1,L_1)+E(A_1,L_2)+E(A_2,L_1)-E(A_2,L_2)|\\=&\left|\int\limits_\Lambda (a_1(\lambda)(l_1(\lambda)+l_2(\lambda))+a_2(\lambda)(l_1(\lambda)-l_2(\lambda)))\mu(d\lambda)\right|\leq 2.\end{aligned}$$

Huomautus 3.1. CHSH-epäyhtälö esitetään yleensä muodossa

$$|E(A_1,L_1)+E(A_1,L_2)+E(A_2,L_1)-E(A_2,L_2)|\leq 2. \tag{26}$$

Kuitenkin on hyvä huomata, että oikeastaan CHSH sisältää kahdeksan epäyhtälöä: ensinnäkin epäyhtälössä esiintyy itseisarvo vasemmalla puolella. Tämä antaa jo kaksi eri epäyhtälöä (ylä- sekä alaraja). Lisäksi epäyhtälössä miinusmerkkisenä esiintyvä odotusarvo voidaan valita miksi tahansa, ts. sen ei ole pakko olla $E(A_2,L_2)$.

Huomautus 3.2. Olkoon systeemi tulotilassa $\rho=\rho_A\otimes\rho_L$. Nyt CHSH:n vasemman puolen itseisarvon sisältö tulee muotoon

$$\begin{aligned}&E(A_1,L_1)+E(A_1,L_2)+E(A_2,L_1)-E(A_2,L_2)\\=&\mathrm{tr}[A_1\rho_A\otimes L_1\rho_L]+\mathrm{tr}[A_1\rho_A\otimes L_2\rho_L]+\mathrm{tr}[A_2\rho_A\otimes L_1\rho_L]-\mathrm{tr}[A_2\rho_A\otimes L_2\rho_L]\\=&\mathrm{tr}[A_1\rho_A]\mathrm{tr}[L_1\rho_L]+\mathrm{tr}[A_1\rho_A]\mathrm{tr}[L_2\rho_L]+\mathrm{tr}[A_2\rho_A]\mathrm{tr}[L_1\rho_L]-\mathrm{tr}[A_2\rho_A]\mathrm{tr}[L_2\rho_L]\\\leq&\mathrm{tr}[L_1\rho_L](\mathrm{tr}[A_2\rho_A]+1)+\mathrm{tr}[L_2\rho_L](1-\mathrm{tr}[A_2\rho_A])\leq 2,\end{aligned}$$

missä arviot tulevat siitä, että suureiden arvot ovat ±1, joten niiden odotusarvot ovat välillä [-1,1]. Vastaavalla laskulla saadaan samalle lausekkeelle alarajaksi -2. Näin ollen CHSH ei rikkoudu tulotilalla. Kuten aiemmin on mainittu, Bellin epäyhtälöt ovat rajanvetäjiä klassisen ja kvanttimaailman välillä, joten ei ole kovin yllättävää, että tällaisen epäyhtälön rikkomiseen tarvitaan ei-klassinen tila.

3.3.2 WW $(d,2,2)$

Tässä luvussa esitellään lyhyesti R.F. Wernerin ja M.M. Wolfin artikkelissa [14] annettua tapaa konstruoida tyypin $(d,2,2)$ Bellin epäyhtälöitä. Luvun pääpaino on kuitenkin tämän tyyppisten epäyhtälöiden rikkomiseen liittyvässä ns. PPT-kriteerissä[11], joka sekin esiteltiin artikkelissa [14].

Aloitetaan katsomalla pääpiirteissään Wernerin ja Wolfin tapa konstruoida epäyhtälöitä. Tarkastellaan tilannetta, jossa on d kappaletta havaitsijoita ja jokaisel-

[11] PPT = Positive Partial Transpose

la havaitsijalla on kaksi kaksiarvoista suuretta. Tällöin on 2^d eri tapaa valita mitattavat suureet ja mahdollisia mittaustuloksia jokaista mittauskonfiguraatiota kohti on 2^d. Näin ollen mittauksiin liittyy $(2 \times 2)^d$ mittaustulostodennäköisyyttä. Nämä todennäköisyydet muodostavat vektorin ξ 4^d-ulotteisessa avaruudessa. Klassisesti (lokaalirealistisessa teoriassa) ξ muodostuisi liittämällä jokaiseen $2d$ suureen kahteen arvoon mittaustulostodennäköisyys, joka ei riipu muiden havaitsijoiden tekemistä mittauksista.

Tarkastellaan nyt tilannetta juuri klassiselta kannalta. Klassisen teorian antamia todennäköisyyksiä on yhteensä 2^{2d} kappaletta, joten klassisen teorian todennäköisyysvektoreille sallima alue Ω on pienin konveksi joukko, joka sisältää 2^{2d} tunnettua ääripistettä. Koska Ω on kompakti (rajoitettu ja suljettu) ja konveksi joukko, niin se saadaan sen sisältävien puolitasojen leikkauksena [31]. Lisäksi jokainen puolitaso voidaan karakterisoida lineaarisella yhtälöllä, joten tulee etsiä vektoreita β, joille $\langle\beta|\xi\rangle \leq 1\ \forall\xi \in \Omega$. Selvästi tämän ominaisuuden pätevyys on yhtäpitävää sen kanssa, että ominaisuus on voimassa kaikilla ääripisteillä ξ_c. Näin ollen tulee tarkastella (konveksia) joukkoa

$$B = \{\beta|\langle\beta|\xi_c\rangle \leq 1\ \forall c\}.$$

Joukkoa B kutsutaan joukon Ω duaali- tai polaarikartioksi. Heti havaitaan, että jokaiselle $\beta \in B$ ehto $\langle\beta|\xi\rangle \leq 1$ on välttämätön sille, että $\xi \in \Omega$. Lisäksi ns. bipolaarilauseen mukaan riittävä ehto on se, että tämä epäyhtälö on voimassa kaikilla $\beta \in B$. Joukosta B huomataan heti, että taas riittää tarkastella vain sen ääripisteitä. Näin ollen Bellin epäyhtälöiden etsiminen tai toisin sanoen ehdon $\xi \in \Omega$ tutkiminen on ekvivalenttia joukon Ω ääripisteiden ξ_c määräämän polaarikartion ääripisteiden etsimisen kanssa.

Käytetään nyt parametria $s_k \in \{0, 1\}$ merkkaamaan havaitsijan k valitsemaa ± 1-arvoista suuretta $A_k(s_k)$. Seuraten yllä esitettyä tapaa johtaa Bellin epäyhtälöitä, voidaan tulon $\prod_k A_k(s_k)$ odotusarvoa pitää 2^d-ulotteisen vektorin $\xi(s)$ yhtenä komponenttina. Tässä on merkitty $s = (s_1, ..., s_d)$. Tällöin mikä tahansa Bellin epäyhtälö on muotoa:

$$\sum_s \beta(s)\xi(s) \leq 1,$$

kunhan vakiot $\beta(s)$ on valittu siten, että klassisesti lausekkeen suurin mahdollinen arvo on 1. Tässä klassinen tarkoittaa sitä, että suureiden $A_k(s_k)$ arvot saadaan lokaalisrealistisella piilomuuttujamallilla. Yllä oleva lauseke on seuraavan ns. Bellin polynomin odotusarvo

$$B_p = \sum_s \beta(s) \prod_{k=1}^{n} A_k(s_k).$$

Kvanttitapauksessa Bellin polynomi korvataan Bellin operaattorilla:

$$B = \sum_s \beta(s) \bigotimes_{k=1}^{n} A_k(s_k),$$

missä $-I \leq A_k(s_k) \leq I$.

Huomautus 3.3. Kuten edellisessä luvussa oli esillä, muistutettakoon tässäkin, että epäyhtälö $\sum_s \beta(s)\xi(s) \leq 1$ saattaa näyttää hieman erikoiselta, jos sitä vertaa vaikka CHSH-epäyhtälöön, joka sisältää oikeastaan yhteensä kahdeksan epäyhtälöä. Kuitenkin nyt annettu epäyhtälö sisältää oikeasti enemmän kuin yhden epäyhtälön, sillä suureita $(A_i(0) \leftrightarrow A_i(1))$ ja niiden arvoja voidaan nimetä uusiksi $(-1 \leftrightarrow 1)$. Lisäksi havaitsijat voidaan nimetä uusiksi $(A_i \leftrightarrow A_j)$.

Huomautus 3.4. Tapauksessa (2,2,2) saadaan Bellin polynomiksi

$$B_p = \sum_s \beta(s) \prod_{k=1}^{n} A_k(s_k) = \sum_{s_1=0}^{1} \sum_{s_2=0}^{1} \beta(s_1, s_2) \prod_{k=1}^{2} A_k(s_k).$$

Koska klassisesti (lokaalirealistisessa piilomuuttujamallissa) suureen $\prod_{k=1}^{2} A_k(s_k)$ odotusarvo on maksimissaan 1 $\forall s$ ja kertoimet $\beta(s)$ tulee valita siten, että Bellin polynomin B_p odotusarvon maksimi on 1, niin saadaan kertoimiksi $\beta(s)$ luvut $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$. Tässä herää luonnollisesti kysymys siitä, miksi tarkasteltiin vain tapausta, jossa suureiden $A_k(s_k)$ odotusarvot otettiin ykkösiksi. Vastaus tähän on yksinkertainen: toista ääripäätä (odotusarvo -1) tarkasteltaessa voidaan aina vaihtaa suureiden arvoja siten, että saadaan tapaus palautettua nyt tarkasteltuun. Nyt Bellin polynomiksi saadaan

$$B = \frac{1}{2}[A_1(0)(A_2(0) + A_2(1)) + A_1(1)(A_2(0) - A_2(1))]$$

eli vanha tuttu CHSH:ssa esiintyvä operaattori.

Edellisessä luvussa huomattiin, että CHSH-epäyhtälöä ei saa rikki tilalla, joka ei ole kietoutunut. Seuraava lause antaa laajemman rikkoutumattomuusehdon tyypin $(n, 2, 2)$ epäyhtälöille.

Lause 3.3. Olkoot $\mathcal{H}_i, i \in \{1, ..., n\}$ kaksiulotteisia Hilbertin avaruuksia. Jos systeemin tilan $\rho \in S\Big(\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i\Big)$ jokaisen osasysteemin (tarkemmin osasysteemien joukon) τ yli otettu transpoosi ρ^τ on positiivinen, niin tilannetta voidaan kuvata lokaalisrealistisella piilomuuttujamallilla.Toisin sanoen Bellin operaattorin odotusarvo on alle ykkösen.

Todistus. Koska osittainen transpoosi säilyttää jäljen ja varianssi ($\langle B^2\rangle - \langle B\rangle^2$) on positiivinen (huom! tässä tarvitaan sitä, että ρ^τ on positiivinen), niin minkä tahansa osasysteemin τ yli otetulle transpoosille saadaan

$$\mathrm{tr}[\rho B]^2 = \mathrm{tr}[\rho^\tau B^\tau]^2 \leq \mathrm{tr}[\rho^\tau (B^\tau)^2] \leq \mathrm{tr}[\rho((B^\tau)^2)^\tau].$$

Koska epäyhtälön vasen puoli ei riipu τ:sta ja toisaalta epäyhtälö on totta kaikille τ, niin saadaan

$$\mathrm{tr}[\rho B]^2 \leq \frac{1}{2^n}\sum_{\tau} \mathrm{tr}[\rho((B^\tau)^2)^\tau].$$

Vaihtamalla tensoritulon järjestys notaation kannalta mukavammaksi voidaan kirjoittaa

$$(B^\tau)^2 = \sum_{s}\sum_{s'} \beta(s)\beta(s') \bigotimes_{k\in\tau} A_k(s_k)^\tau A_k(s'_k)^\tau \bigotimes_{k\notin\tau} A_k(s_k)A_k(s'_k).$$

Näin ollen annetun epäyhtälön oikean puolen odotusarvossa esiintyvä operaattori tulee muotoon

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n}\sum_{\tau}((B^\tau)^2)^\tau &= \frac{1}{2^n}\sum_{\tau}\sum_{s}\sum_{s'} \beta(s)\beta(s') \bigotimes_{k\in\tau} A_k(s'_k)A_k(s_k) \bigotimes_{k\notin\tau} A_k(s_k)A_k(s'_k) \\ &= \sum_{s}\sum_{s'} \beta(s)\beta(s') \bigotimes_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\{A_k(s_k), A_k(s'_k)\},\end{aligned}$$

missä $\{A, B\} := AB + BA$ on antikommutaattori ja alemmalla rivillä tensoritulo on laitettu alkuperäiseen järjestykseen. Koska ± 1-arvoiselle (tarkalle) suureelle A saadaan spektraalihajotelma $A = (I - P) - P$, niin $A^2 = I$. Täten yllä olevassa lausekkeessa esiintyvän antikommutaattorin kukin tensoritulon komponentti tulee summauksen jälkeen sisältämään I:n tai antikommutaattorin $2\{A_k(0), A_k(1)\}$. Nämä kommutoivat, joten jokainen tensoritulon komponentti voidaan diagonalisoida samalla matriisilla. Näin ollen koko operaattori voidaan diagonalisoida. Koska tensoritulo-operaattorin ominaisarvot ovat tunnetusti tensoritulossa esiintyvien operaattoreiden ominaisarvojen tuloja, niin yllä olevan operaattorin ominaisarvoiksi saadaan

$$\sum_s \sum_{s'} \beta(s)\beta(s') \prod_{k=1}^{n} \begin{cases} \chi_k, & s_k \neq s'_k \\ 1, & s_k = s'_k, \end{cases}$$

missä $\chi_k \in [-1, 1]$. Toisaalta aina voidaan määritellä “klassiset”kaksiarvoiset suureet $C_k(i)$, joille $\langle C_k(0)C_k(1)\rangle = \chi_k$, joten tilannetta voidaan kuvata klassisella todennäköisyysteorialla, ts. lokaalirealistisella piilomuuttujamallilla. Näin ollen Bellin operaattorin B odotusarvo ei voi ylittää ykköstä. □

Huomautus 3.5. Mainittakoon ilman todistusta, että PPT-kriteeri on yhtäpitävä sen kanssa, että tila ei ole kietoutunut tapauksessa, jossa tarkasteltavan yhdistetyn systeemin Hilbertin avaruus on kahden kaksiulotteisen tai kaksi- ja kolmiulotteisen Hilbertin avaruuden tensoritulo [27]. Esimerkiksi artikkelissa [15] on esitetty vastaesimerkit tapauksille, joissa yhdistetyn systeemin osasysteemien dimensiot ovat kaksi ja neljä sekä kolme ja kolme.

3.3.3 CGLMP $(2, 2, d)$

Tässä luvussa tarkastellaan artikkelissa [10] esiteltyä luokan $(2, 2, d)$ Bellin epäyhtälöä. $(2, 2, d)$ tarkoittaa, että havaitsijoita on kaksi (Antti ja Laura), kummallakin havaitsijalla on kaksi suuretta ja nämä suureet ovat d-arvoisia. Seuraavassa johdettavasta epäyhtälöstä käytetään yleisesti nimitystä CGLMP-epäyhtälö. Todistus on tehty artikkelissa [11] esitetyllä tavalla.

Lause 3.4. Olkoon A_1, A_2, B_1 ja B_2 d-arvoisia suureita, joiden jokaisen arvojoukko on $\{1, ..., d\}$. Merkitään todennäköisyyttä sille, että suureen A_i mittaus tuottaa pienemmän tuloksen kuin suureen B_j mittaus symbolilla $P(A_i < B_j)$. Tällöin mittaustulostodennäköisyyksille saadaan seuraava klassinen raja:

$$P(A_2 < B_2) + P(B_2 < A_1) + P(A_1 < B_1) - P(A_2 < B_1) \geq 0. \tag{27}$$

Todistus. Seuraavassa merkintä $\{A_i < B_j\}$ tarkoittaa suureiden arvojoukkojen karteesisessa tulossa $\{1, ..., d\}^4$ niitä alkioita, joilla suureen A_i arvo on pienempi kuin suureen B_j arvo. Seuraava sisältymisrelaatio on ilmeinen:

$$\{A_2 \geq B_2\} \cap \{B_2 \geq A_1\} \cap \{A_1 \geq B_1\} \subseteq \{A_2 \geq B_1\}.$$

Ottamalla tästä komplementti puolittain saadaan:

$$\{A_2 < B_1\} \subseteq \{A_2 < B_2\} \cup \{B_2 < A_1\} \cup \{A_1 < B_1\}.$$

Tästä saadaan todennäköisyyksille haluttu epäyhtälö:

$$P(A_2 < B_1) \leq P(A_2 < B_2) + P(B_2 < A_1) + P(A_1 < B_1).$$

□

Yllä oleva tulos on eräs klassinen raja d-arvoisten suureiden mittaustulostodennäköisyyksille. Muitakin rajoja mittausasetukselle $(2, 2, d)$ on olemassa, kuten seuraavassa alaluvussa esitettävä H. Bechmann-Pasquinuccin sekä N. Gisinin 2002 paperissaan [12] Fourier-kytketyille suureille antama raja.

Jotta yllä saatu tulos olisi Bellin epäyhtälönä mielenkiintoinen, tulee se olla rikottavissa joillakin suureilla ja jollakin tilalla. Tämän epäyhtälön rikkominen joillakin kanonisilla (esim. Fourier-kytketyillä) suureilla on osoittautunut hankalaksi. Paperissa [11] on kuitenkin annettu vektorit, joiden määräämät suureet rikkovat CGLMP-epäyhtälön ja ne on kirjattu alle:

$$|i\rangle_{A,a} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} exp(\frac{2\pi i}{d} k(i + \alpha_a))|k\rangle_A$$
$$|j\rangle_{B,b} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{l=0}^{d-1} exp(\frac{2\pi i}{d} l(-j + \beta_b))|l\rangle_B,$$

missä $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\beta_1 = \frac{1}{4}$ ja $\beta_2 = -\frac{1}{4}$. Koska CGLMP:n testaaminen on melko työlästä jo pienissäkin dimensioissa, niin todettakoon vaan, että paperin [11] tulokset ovat kuitenkin melko helposti todennettavissa numeriikkaa hyödyntäen esimerkiksi Mathematicalla. Huomautettakoon tässä kohtaa, että toisin kuin CHSH-epäyhtälön tapauksessa, CGLMP:tä ei saa maksimaalisesti rikki maksimaalisen kietoutuneella tilalla muuta kuin qubittisuureiden tapauksessa, jolloin epäyhtälö on juuri CHSH, kuten seuraava lause osoittaa.

Lause 3.5. Olkoon A_1, A_2, L_1 ja L_2 neljä kaksiarvoista suuretta (arvoinaan ± 1). Näille suureille CGLMP redusoituu CHSH-epäyhtälöksi.

Todistus. Kaksiarvoisten suureiden tapauksessa CGLMP-epäyhtälö voidaan permutoida kahdeksaan eri muotoon. Otetaan tähän kaksi muotoilua ja johdetaan niistä yksi muoto CHSH:lle. Loput kolme CHSH:n muotoa saadaan vastaavasti muista CGLMP:n permutaatioista.

Merkitään todennäköisyyttä sille, että A_i saa arvon k ja B_j saa arvon l symbolilla $P_{A_iB_j}(k,l)$. Otetaan CGMLP:stä seuraavat kaksi muotoilua:

$$P_{A_2B_2}(-1,1) + P_{A_1B_2}(1,-1) + P_{A_1B_1}(-1,1) - P_{A_2B_1}(-1,1) \geq 0$$
$$P_{A_1B_1}(1,-1) + P_{A_1B_2}(-1,1) + P_{A_2B_2}(1,-1) - P_{A_2B_1}(1,-1) \geq 0.$$

Kertomalla ylempi -1:llä ja lisäämällä puolittain 2 saadaan

$$P(A_2 \geq B_2) + P(B_2 \geq A_1) + P(A_1 \geq B_1) - P(A_2 \geq B_1) \leq 2.$$

Lisätään tähän nolla sopivalla tavalla, jotta saadaan CHSH esille (tässä $E(X,Y)$ on odotusarvo):

$$\begin{aligned} &E(A_2,B_2) + E(A_1,B_2) + E(A_1,B_1) - E(A_2,B_1) \\ &+2(P(B_1 < A_1) + P(A_1 < B_2) + P(B_2 < A_2) - P(B_1 < A_2)) \\ &+P(A_2 < B_2) + P(B_2 < A_1) + P(A_1 < B_1) - P(A_2 < B_1) \leq 2. \end{aligned}$$

Tässä kaksi alimmaista riviä ovat edellä annettua CGLMP:n muotoa ja siksi ≥ 0. Tätä arviota käytämällä saadaan CHSH:n yläraja:

$$E(A_2,B_2) + E(A_1,B_2) + E(A_1,B_1) - E(A_2,B_1) \leq 2.$$

CHSH:n alaraja saadaan, kun esimerkiksi A_1:n ja A_2:n arvot vaihdetaan päittäin (siis miinus ykköstä vastaavaa arvoa merkataan ykkösellä ja toisin päin). Tällöin

$$\begin{aligned} E(A_i,B_j) =& P_{A_iB_j}(1,1) + P_{A_iB_j}(-1,-1) - P_{A_iB_j}(-1,1) - P_{A_iB_j}(1,-1) \\ \to& P_{A_iB_j}(-1,1) + P_{A_iB_j}(1,-1) - P_{A_iB_j}(1,1) - P_{A_iB_j}(-1,-1) \\ =& -E(A_i,B_j). \end{aligned}$$

Yllä johdetun ylärajan tulee olla voimassa myös uudelleen nimetyillä suureilla, joten

$$E(A_2,B_2) + E(A_1,B_2) + E(A_1,B_1) - E(A_2,B_1) \geq -2.$$

Muut CHSH:n muotoilut (eli ne, joissa miinus on eri paikassa) saadaan ottamalla CGLMP:hen eri permutaatio. $\square$

3.3.4 BG $(2, 2, d, d, d^2)$

Tässä alaluvussa esiteltävä epäyhtälö on peräisin Bechmann-Pasquinuccin ja Gisinin artikkelista [12]. Epäyhtälöstä käytetään tässä nimitystä BG-epäyhtälö ja jos se osoittautuu oikeaksi Bellin epäyhtälöksi, niin se olisi tämän työn kannalta olennainen siinä mielessä, että työn pääotsikon kysymystä on hankala tutkia nykytietämyksen valossa muilla kuin BG- sekä CHSH-epäyhtälöillä. Tämä johtuu siitä, että yhteismitattavuutta ei ole juuri muille kuin näitä epäyhtälöitä vastaaville tapauksille onnistuttu karakterisoimaan. Kuitenkin näyttäisi siltä, että tulos on puutteellinen. Tälle väitteelle annetaan tämän luvun lopussa perustelu. Aloitetaan aiheen käsittely yksinkertaistetulla versiolla päätuloksesta rajoittumalla kolmiulotteiseen tapaukseen.

Olkoon Antin suureet jakson 2.2.5 tavoin $A(i) = |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ ja $A'(j) = |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$, missä $\{\varphi_i\}_{i=1}^3$ on Hilbertin avaruuden kanta ja vektorit

$$\psi_j = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{h \in \mathbb{Z}_3} \omega^{hj} \varphi_h, \ j = 1, ..., 3, \ \omega = e^{i2\pi/3}$$

muodostavat tätä kantaa vastaavan MUB-kannan.

Lauran suureita varten määritellään vektorit ξ_{ij} kaavalla

$$\xi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{C}}(\sqrt{3}\langle\varphi_i|\psi_j\rangle\varphi_i + \psi_j),$$

missä $C = 2(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})$ on normitusvakio. Määritellään nyt Lauran "suureet"[12] seuraavasti:

$$\begin{aligned} L_0(i) &= |\xi_{ii}\rangle\langle\xi_{ii}| \\ L_1(i) &= |\xi_{i,i+1}\rangle\langle\xi_{i,i+1}| \\ L_2(i) &= |\xi_{i,i-1}\rangle\langle\xi_{i,i-1}|, \end{aligned}$$

missä luvut i on tulkittu syklisen ryhmän $\mathbb{Z}_3$ alkioiksi.

Bellin epäyhtälön johtamiseksi määritellään seuraava luku:

$$\begin{aligned} B_3 = &\sum p(\text{Antin ja Lauran mittauksissa on korrelaatio}) \\ &- \sum p(\text{Antin ja Lauran mittauksissa ei ole korrelaatiota}), \end{aligned}$$

missä p viittaa todennäköisyyteen ja korrelaatiolla tarkoitetaan sitä, että Antin mi-

[12]Tarkalleen ottaen tässä ei ole kyse suureista, sillä näin määritellyt kuvaukset eivät ole normitettuja.

tatessa esimerkiksi suureen A arvoksi nollan (vastaavan projektion antava vektori on φ_0) tulee Lauran saada mittaamalleen suureelleen mittaustulos, jota vastaava vektori sisältää vektorin φ_0 (kts. ξ_{ij}:n määritelmä). Vastaavasti Antin mitatessa suureen A' arvoksi yksi, tulee Lauran saada mittaustulos, joka sisältää vektorin ψ_1.

Lokaali piilomuuttujamalli, joka liittää jokaiseen suureeseen jonkin tietyn arvon, antaa luvulle B_3 ylärajan kaksi. Tämä raja voidaan todistaa numeerisesti [12] tai seuraavalla päättelyllä. Olkoon Antin suureiden A, A' arvot i ja j. Jos Laura mittaa jonkin suureistaan ja saa tuloksen, johon liityvä vektori on ξ_{kl}, missä $k \neq i$ ja $j \neq l$, niin tulosten välillä ei ole korrelaatiota. Koska jokaisella suureella on tässä tilanteessa varmasti jokin arvo, niin tilanteen ollessa tämä, saadaan todennäköisyydellä yksi tulos "A:n ja ξ_{kl}:n välillä ei korrelaatiota" sekä samalla todennäköisyydellä "A':n ja ξ_{kl}:n välillä ei korrelaatiota". Näin ollen summaan tulee termi -2.

Jos Lauran mittaustulos on puolestaan sellainen, jossa toinen indeksi on oikein, ts. ξ_{il} tai ξ_{kj}, niin korrelaatio saadaan toisen, muttei toisen suureen suhteen varmuudella. Näin ollen tästä tulee lukuun B_3 kerran plus yksi ja kerran miinus yksi eli kokonaisuudessaan nolla.

Jos Lauran mittaustulosta vastaava vektori on ξ_{ij}, niin tällöin saadaan varmuudella korrelaatio kummankin Antin mittauksen kanssa. Täten B_3 saa termin plus kaksi. Näin saadaan epäyhtälö

$$B_3 \leq 2.$$

Jotta saatua tulosta voisi pitää Bellin epäyhtälönä, tulisi näyttää, että kvanttimekaniikka rikkoo sen. Tätä varten kirjoitetaan B_3 hieman tarkemmin:

$$\begin{aligned}
B_3 = {} & P(L_0 = A) - P(L_0 \neq A) \\
& + P(L_1 = A) - P(L_1 \neq A) \\
& + P(L_2 = A) - P(L_2 \neq A) \\
& + P(L_0 = A') - P(L_0 \neq A') \\
& + P(L_1 = A' + 2) - P(L_1 \neq A' + 2) \\
& + P(L_2 = A' + 1) - P(L_2 \neq A' + 1).
\end{aligned}$$

Tässä esimerkiksi merkintä $P(L_0 = A)$ tarkoittaa todennäköisyyttä sille, että Antin suureen A mittaustulosta vastaava vektori on mukana Lauran suureen L_0 mittaustulosta vastaavassa vektorissa, ts.

$$P(L_0 = A) = \sum_{i=0}^{2} p(\xi_{ii} \cap \varphi_i),$$

missä $p(\xi_{ii} \cap \varphi_i) = p(L_0 = i|A = i)p(A = i)$.

B_3:n lausekkeessa esiintyy termejä, joissa suureeseen A' on lisätty luku yksi tai kaksi. Tämä johtuu siitä, että esimerkiksi suureen L_2 tapauksessa Antin suureen A' arvoa yksi vastaa vektori ψ_1, joka esiintyy suureen L_2 arvoa kaksi vastaavassa vektorissa.

Olkoon η maksimaalisen kietoutunut tila, ts.

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\varphi_0 \otimes \varphi_0 + \varphi_1 \otimes \varphi_1 + \varphi_2 \otimes \varphi_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\psi_0 \otimes \psi_0 + \psi_1 \otimes \psi_2 + \psi_2 \otimes \psi_1),\end{aligned}$$

jossa yhtäsuuruus nähdään suoralla laskulla kirjoittamalla oikea puoli auki. Käyttämällä jompaa kumpaa näistä muotoiluista maksimaalisen kietoutunelle tilalle sekä seuraavia suoralla laskulla todennettavia kaavoja saadaan B_3:n arvo laskettua tilassa η:

$$\begin{aligned}|\langle \xi_{ij}|\varphi_i\rangle|^2 = |\langle \xi_{ij}|\psi_j\rangle|^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ |\langle \xi_{ij}|\varphi_k\rangle|^2 = |\langle \xi_{ij}|\psi_l\rangle|^2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Koska tässä kaikki tensoritulot ovat hajoavia, niin ehdolliset todennäköisyydet saadaan helposti laskettua; esimerkiksi

$$\begin{aligned}P(L_0 = A) &= \sum_{i=0}^{2} p(\xi_{ii} \cap \varphi_i) \\ &= \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2} |\langle \varphi_i \otimes \xi_{ii}|\varphi_i \otimes \varphi_i\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{3}\left|\sum_{i=0}^{2}\langle \xi_{ii}|\varphi_i\rangle\right|^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Laskemalla kaikki B_3:n termit auki huomaa, että jokainen suureeseen A liittyvä termi, jossa on todennäköisyys korrelaatiolle (eli termit joissa on yhtäsuuruus), on suurudeltaan $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Vastaavasti jokainen sureeseen A liittyvä termi, jossa on erisuuruus on arvoltaan $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Alkuperäisessä artikkelissa väitetään, että näin on myös suureeseen A' liittyvillä termeillä. Jos tämä olisi totta, niin maksimaalisen kietoutuneella tilalla η saataisiin

$$B_3 = \frac{12}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Tätä rajaa on artikkelin [12] mukaan numeerisesti testattu [12] ja havaittu, että sitä suurempaa ylitystä ei saavuteta. Lisäksi ainoa tila, joka antaa suurimman rikkoutumisen on juuri maksimaalisen kietoutunut tila [12]. Saatu epäyhtälö yleistyy täysin samalla päättelyllä korkeampaan dimensioon, mutta muuttuu samalla huomattavasti hankalammaksi. Koska tätä epäyhtälöä ei tässä työssä tarvita ja toisaalta jo 3-ulotteinenkin tapaus näyttää epäselvältä, todetaan vain, että yleistys löytyy artikkelista [12].

Saadun 3-ulotteiseen tapaukseen liittyvän epäyhtälön johto ei ole itsessään virheellinen, mutta kuten aiemmin todettiin, on tämän epäyhtälön yllä tiettyä epäselvyyttä. Seuraavassa on pyritty tuomaan tämä asia esille. Suoralla laskulla nähdään, että esimerkiksi

$$\begin{aligned}
P(L_0 = A') &= \sum_{i=1}^{3} \mathrm{tr}[P[\eta](P[\psi_i] \otimes P[\xi_{ii}])] \\
&= \frac{1}{3C}\sum_{i=1}^{3} |\langle \psi_0 \otimes \psi_0 + \psi_1 \otimes \psi_2 + \psi_2 \otimes \psi_1 | \psi_i \otimes \xi_{ii}\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{3C}(|\langle \psi_0|\xi_{00}\rangle|^2 + |\langle \psi_2|\xi_{11}\rangle|^2 + |\langle \psi_1|\xi_{22}\rangle|^2) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}(3+\sqrt{3}) + \frac{1}{6+2\sqrt{3}} + \frac{1}{6+2\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

joka on eri tulos kuin artikkelin kirjoittajat väittävät. Eroavaisuuksia on enemmänkin. Seuraavassa on mainittu muut eroavaisuudet:

$$\begin{aligned}
P(L_1 = A'+2) = P(L_2 = A'+1) &= \frac{1}{3} \\
P(L_1 \neq A'+2) = P(L_2 \neq A'+1) = P(L_0 \neq A') &= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Täten maksimaalisen kietoutunut tila antaa epäyhtälössä esiintyvän termin B_3 arvoksi $\sqrt{3}-1$, joka ei riko kyseistä epäyhtälöä.

Kuitenkin on olemassa toinen tapa ryhmitellä Lauran mittaukset, jolla saadaan aikaan samat termit kuin artikkelissa. Määrittelemällä

$$
\begin{aligned}
\tilde{B}_3 = {} & P(L_0 = A) - P(L_0 \neq A) \\
& + P(L_1 = A) - P(L_1 \neq A) \\
& + P(L_2 = A) - P(L_2 \neq A) \\
& + P(L_0 = 0, A' = 0) + P(L_0 = 1, A' = 2) + P(L_0 = 2, A' = 1) \\
& - P(L_0 = 0, A' = 1, 2) - P(L_0 = 1, A' = 1, 3) - P(L_0 = 2, A' = 2, 3) \\
& + P(L_1 = 0, A' = 2) + P(L_1 = 1, A' = 1) + P(L_1 = 2, A' = 0) \\
& - P(L_1 = 0, A' = 0, 1) - P(L_1 = 1, A' = 0, 2) - P(L_1 = 2, A' = 1, 2) \\
& + P(L_2 = 0, A' = 1) + P(L_2 = 1, A' = 0) + P(L_2 = 2, A' = 2) \\
& - P(L_2 = 0, A' = 0, 2) - P(L_2 = 1, A' = 1, 2) - P(L_2 = 2, A' = 0, 1)
\end{aligned}
$$

saadaan luku, joka maksimaalisessti kietoutuneen tilan tapauksessa on $2\sqrt{3}$. Kysymys siitä, mikä on $\tilde{B}_3$:n klassinen raja, joudutaan jättämään toistaiseksi auki.

4 Bell vs. yhteismitattavuus

Bellin epäyhtälöiden rikkoutuminen ja yhteismitattomuus ovat molemmat kvanttimekaniikalle ominaisia epäklassisia piirteitä. Jo Finen 1982 julkaiseman paperin [9] pohjalta on ollut tiedossa, että CHSH-epäyhtälöä ei saa rikki yhteismitallisilla suureilla (kts. lause 3.2). Näin ollen yhteismitattomuus on välttämätöntä epäyhtälön rikkomiseksi. Kuitenkin kysymys siitä, onko tämä myös riittävä ehto CHSH:n ylitykselle, on ollut auki aina vuoteen 2009 asti, jolloin Wolf et al [7] julkaisivat artikkelin, jossa yhteimitattomuus on osoitettu myös riittäväksi ehdoksi. Seuraavassa alaluvussa on esitelty kyseisen paperin tulokset.

4.1 CHSH

Aloitetaan aiheen käsittely esittelemällä artikkelin [7] päätulos ensin tarkoille suureille. Artikkelissa esitetty todistus on melko pelkistetty. Tässä todistus on kirjoitettu hieman yksityiskohtaisemmin.

Lause 4.1. Tarkat kaksiarvoiset suureet A_1 ja A_2 (arvoinaan ± 1) ovat yhteismitattavat, jos ja vain jos ne eivät mahdollista CHSH-epäyhtälön rikkoutumista millään tilan tai toisen osapuolen (tarkkojen) suureiden valinnalla. Lisäksi CHSH (kaava

(26)) voidaan kirjoittaa operaattorin $B := \frac{1}{2}(A_1 \otimes L_1 + A_2 \otimes L_2 + A_2 \otimes L_1 - A_2 \otimes L_2)$ odotusarvon (tilassa ρ) avulla muodossa $|\mathrm{tr}[\rho B]| \leq 1$ ja tämän odotusarvon yläraja on

$$\sup_{\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}); L_1, L_2 \in \mathcal{L}_s(\mathcal{H})} |\mathrm{tr}[\rho B]| = \sqrt{1 + \frac{1}{2}||[A_1, A_2]||}. \tag{28}$$

Todistus. Kuten tämän luvun alussa todettiin, suunnan "vain jos" voi todistaa lauseen 3.2 avulla. Kuitenkin A_1 ja A_2 ovat tarkkoja suureita, joten niiden yhteismitattavuus ja kommutatiivisuus ovat yhtäpitävät lauseen 2.7 nojalla. Näin ollen lause saadaan todistettua kerralla molempiin suuntiin osoittamalla, että kaava (28) pätee.

Ensinnäkin sisätulon lineaarisuuden nojalla CHSH on yhtäpitävää sen kanssa, että lauseessa määritellyn operaattorin B odotusarvo on alle ykkösen. Operaattoria B on mukavampi käsitellä sen neliön avulla, sillä neliölle saadaan suoralla laskulla seuraava helppo muoto

$$B^2 = I + \frac{1}{4}[A_1, A_2] \otimes [L_1, L_2].$$

Koska jokainen tila saadaan konveksikombinaationa puhtaista tiloista, tavanomainen rajoitetun operaattorin normi matriisille C saadaan laskemalla matriisin C^*C suurimman ominaisarvon neliöjuuri (operaattorinormi on itseadjungoidulle operaattorille äärellisulotteisessa Hilbertin avaruudessa sama kuin itseisarvoltaan suurimman ominaisarvon itseisarvo) ja itseadjungoidun operaattorin T normi saadaan kaavalla $\|T\| = \sup_{\psi \in \mathcal{H}, ||\psi||=1} |\langle \psi | T\psi \rangle|$, niin

$$\begin{aligned}
\sup_{\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})} |\mathrm{tr}[\rho B]| &= \sup \left\{ \Big| \sum_i \lambda_i \langle \psi_i | B\psi_i \rangle \Big| : \psi_i \in \mathcal{H}, \|\psi_i\| = 1, \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1 \right\} \\
&= \sup_{\psi \in \mathcal{H}, ||\psi||=1} |\langle \psi | B\psi \rangle| = \|B\| = \sqrt{\|B^2\|} \\
&= \sqrt{\lambda_{max}(B^2)}.
\end{aligned}$$

Suora lasku ja tieto siitä, että neliömatriisilla on korkeintaan riviensä verran nollasta eroavia ominaisarvoja, osoittavat tensoritulomatriisin kaikkien ominaisarvojen olevan tulossa esiintyvien matriisien ominaisarvoista muodostettuja tuloja. Käyttäen tätä, edellistä kaavaa ja tietoa, että operaattorin B^2 ominaisarvot ovat muotoa $1+\lambda$, missä λ on operaattorin $\frac{1}{4}[A_1, A_2] \otimes [L_1, L_2]$ ominaisarvo, voidaan kirjoittaa

$$\sup_{\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})} |\mathrm{tr}[\rho B]| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\|[A_1, A_2]\| \|[L_1, L_2]\|}.$$

Kaavan (28) todistamiseksi riittää nyt huomata, että $\|[L_1, L_2]\| \leq \|L_1 L_2\| + \|L_2 L_1\| \leq 2\|L_1\|\|L_2\| = 2$ (sillä suureiden L_1 ja L_2 ominaisarvot ovat ± 1) ja että esimerkiksi suureilla $L_1 = \sigma_x$ ja $L_2 = \sigma_y$ kyseinen yläraja saavutetaan. Näin ollen

$$\sup_{\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}); L_1, L_2 \in \mathcal{L}_s(\mathcal{H})} |\mathrm{tr}[\rho B]| = \sqrt{1 + \frac{1}{2}||[A_1, A_2]||},$$

joten suureiden A_1 ja A_2 yhteismitattavuus on yhtäpitävää sen kanssa, että CHSH-epäyhtälöä ei voi rikkoa millään tilan tai toisen osapuolen suureiden valinnalla. □

Tarkastellaan nyt yleistä tapausta. Olkoon tätä varten A_1 ja A_2 ± 1 -arvoisia suureita sekä P ja Q näitä suureita vastaavat efektit. Lauseen 2.8 nojalla suureiden A_1 ja A_2 yhteismitattavuus on yhtäpitävää sellaisen efektin S, jolle $P + Q - I \leq S \leq P, Q$, olemassaolon kanssa. Näin ollen kysymys suureiden A_1 ja A_2 yhteismitattavuudesta voidaan muotoilla seuraavan optimointiongelman avulla:[13]

$$\inf\{\lambda \in \mathbb{R} | Q + P \leq \lambda I + S\} \tag{29}$$
$$\text{s.t. } 0 \leq S \leq Q, P. \tag{30}$$

Jos λ_0 on tämän optimointitehtävän ratkaisu, niin yhteismitattavuus on yhtäpitävää sen kanssa, että $\lambda_0 \leq 1$.[14] Seuraavan lemman avulla saadaan tämä optimointitehtävä muotoiltua toisin.

Lemma 4.1. Olkoon λ_0 optimointitehtävän (29) ratkaisu. Ehto $\lambda_0 > 1$ on yhtäpitävä sen kanssa, että seuraavaan optimointiongelman ratkaisu on aidosti positiivinen:

$$\lambda^* := \sup_{X, Y, Z \geq 0} \mathrm{tr}[X(Q + P - I)] - \mathrm{tr}[QY] - \mathrm{tr}[PZ] \tag{31}$$
$$\text{s.t. } X \leq Y + Z \in \mathcal{S}(\mathcal{H}). \tag{32}$$

[13]Tässä lyhenne s.t. on yleisesti optimointitehtävissä käytetty merkintä reunaehdoille. Lyhenne tulee sanoista “subject to”.

[14]Toinen suunta on selvä ja toisen näkee vastaoletuksella seuraavasti: jos $\lambda_0 > 1$, niin ei voi olla olemassa efektiä S, josta saataisiin yhteissuure konstruoitua (ts. lauseen 2.8 mukaista efektiä ei löydy). Näin ollen yhteismitallisuudesta seuraa, että $\lambda_0 \leq 1$.

Todistus. Lagrangen dualiteetin [25] nojalla tehtävän (29) tyyppiselle ongelmalle löytyy aina niin sanottu duaaliongelma. Yleisesti Lagrangen duaaliteetti voidaan kirjoittaa muodossa

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{\langle c|x\rangle\middle|\sum_i x_iF_i\geq C\right\}\geq\sup_{X\geq 0}\{\mathrm{tr}[CX]\mid\mathrm{tr}[XF_i]=c_i\},\tag{33}$$

missä $c\in\mathbb{R}^n$ ja F_i sekä C ovat itseadjungoituja operaattoreita.[15] Kaavan vasemman puolen ongelma on niin sanottu primääri tai alkuperäinen ongelma ja oikealla on duaaliongelma. Kaavassa on voimassa yhtäsuuruus, jos on olemassa (x_i) s.e. $\sum_i x_iF_i>C$ tai $X>0$ s.e. $\mathrm{tr}[XF_i]=c_i\ \forall i$ [25].

Määrittelemällä avaruudelle $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ kanta $\{G_i\}_{i=1}^4$ voidaan kirjoittaa $S=\sum_i x_iG_i$. Nyt tehtävä (29) saadaan kaavan (33) primääritehtävän muotoon määrittelemällä $c_0=1, x_0=\lambda, c_i=0,\ i\geq 1$ ja operaattorit

$$\begin{aligned}C&=(Q+P)\oplus 0\oplus(-Q)\oplus(-P),\\F_0&=I\oplus 0\oplus 0\oplus 0,\\F_i&=G_i\oplus G_i\oplus(-G_i)\oplus(-G_i),\ i\geq 1.\end{aligned}$$

Koska matriisien suora summa on positiivinen, jos ja vain jos sen summattavat komponentit ovat positiivisia[16] ja suorasummamatriisin jälki on sama kuin summattavien matriisien jälkien summa, niin duaalitehtäväksi saadaan

$$\sup_{\rho,Y,Z,W\geq 0}\{\mathrm{tr}[\rho(Q+P)]-\mathrm{tr}[QY]-\mathrm{tr}[PZ]\}$$

ehdolla, että $\mathrm{tr}[\rho I]=\mathrm{tr}[\rho]=1$ ja $\mathrm{tr}[G_i(\rho+W-Y-Z)]=0,\ i\geq 1$, missä ρ,W,Y ja Z ovat suorasummamatriisin komponentit.[17]

Valitsemalla esimerkiksi tilaksi $\rho=\frac{1}{2}I$ ja operaattoreiksi $Y,Z=\frac{1}{3}I$ sekä $W=\frac{1}{6}I$ huomataan kaavan (33) alla annetun ehdon nojalla, että duaalitehtävän ja primääritehtävän ratkaisut yhtyvät.

[15] F_i ja C eivät yleisesti ole systeemiin liittyvän Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}$ operaattoreita, vaan suorasummia $\mathcal{H}$:n operaattoreista.

[16] Suunta "jos" on selvä. Toiseen suuntaan tämän näkee esimerkiksi kirjoittamalla suorasummamatriisi spektraalihajotelmansa avulla auki. Tässä hajotelmassa diagonaalilla on vain ei-negatiivisia lukuja, joten myös summan jäsenet ovat positiivisia.

[17] Duaalitehtävän (33) rajoitus $X\geq 0$ voidaan pilkkoa neljäksi matriisiksi. Tämä johtuu yksinkertaisesti siitä, että suorasummamatriisin ja matriisin X tulon jälkeen ei vaikuta muut kuin matriisin X diagonaaliblokit.

Jälkimmäinen reunaehdoista on voimassa kaikilla $i = 1, ..., 4$ ja joukko $\{G_i\}$ on kanta, joten ehto on yhtäpitävä sen kanssa, että

$$\mathrm{tr}[A(\rho - Y - Z)] = -\mathrm{tr}[AW] \ \forall A \in \mathcal{L}_s(\mathcal{H}).$$

Tästä puolestaan seuraa erityisesti, että $\langle\psi|(\rho - Y - Z)\psi\rangle = -\langle\psi|W\psi\rangle \leq 0 \ \forall\psi \in \mathcal{H}$. Näin ollen joukon $W \geq 0$ yli optimointi on yhtäpitävää joukon $\rho \leq Y + Z$ yli optimoinnin kanssa. Tehtävänä on siis vastata kysymykseen, milloin ja vain milloin optimointitehtävän

$$\sup_{\substack{\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}), \rho \leq Y+Z \\ Y,Z \geq 0}} \{\mathrm{tr}[\rho(Q + P)] - \mathrm{tr}[QY] - \mathrm{tr}[PZ]\},$$

ratkaisu on aidosti suurempi kuin yksi. Tämä ongelma on yhtäpitävä ensinnäkin sen kanssa, että

$$\sup_{\substack{\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}), \rho \leq Y+Z \\ Y,Z \geq 0}} \{\mathrm{tr}[\rho(Q + P - I)] - \mathrm{tr}[QY] - \mathrm{tr}[PZ]\} \geq 0.$$

Jakamalla tämä puolittain luvulla $\mathrm{tr}[Y + Z]$ saadaan haluttu lopputulos: efektit Q ja P ovat yhteismitattomat jos ja vain jos optimointitehtävän

$$\begin{aligned} &\sup_{X,Y,Z \geq 0} \{\mathrm{tr}[X(Q + P - I)] - \mathrm{tr}[QY] - \mathrm{tr}[PZ]\} \\ &s.t. \ X \leq Y + Z \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \end{aligned}$$

ratkaisu on aidosti positiivinen. □

Itse päätulosta varten tarvitaan vielä seuraava lemma, joka antaa yksinkertaisen tavan käsitellä tensorituloavaruuden yksikkövektoreita toisen alisysteemin tilajoukon ja unitaarioperaattoreiden avulla.

Lemma 4.2. Olkoon $\psi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ yksikkövektori. On olemassa tila $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, unitaarioperaattori $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ja ortonormaali kanta $\{\varphi_1, .., \varphi_d\}$, joille

$$\psi = (\sqrt{\rho} \otimes U) \sum_{i=1}^{d} \varphi_i \otimes \varphi_i. \tag{34}$$

Todistus. Schmidtin hajotelman nojalla

$$\psi = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \varphi_i \otimes \psi_i,$$

missä $\{\psi_1, ..., \psi_d\}$ sekä $\{\varphi_1, ..., \varphi_d\}$ ovat ortonormaaleja kantoja ja kertoimet λ_i ovat ei-negatiivisia reaalilukuja, joille $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^2 = 1$. Määritellään unitaarioperaattori U kanta-alkioiden avulla vaatimalla, että $U\varphi_i = \psi_i \ \forall i = 1, ..., d$. Määrittelemällä lisäksi tila $\rho = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^2 |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ saadaan pari (U, ρ), jolle kaava (34) pätee. □

Lause 4.2. Käytetään edellä esitettyjä merkintöjä. Seuraava kaava on voimassa

$$\sup_{\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}), L_1, L_2} |\mathrm{tr}[\rho B]| = 1 + 2\lambda^*.$$

Toisin sanoen suureiden A_1 ja A_2 yhteismitattavuus on yhtäpitävää sen kanssa, että CHSH-epäyhtälöä ei saa rikki.

Todistus. Merkitään[18]

$$\begin{aligned} \rho &:= Y + Z \\ \tilde{Q} &:= \rho^{-1/2} X \rho^{-1/2} \\ \tilde{P} &:= \rho^{-1/2} Y \rho^{-1/2}. \end{aligned}$$

Optimointitehtävän (31) rajat voidaan nyt esittää operaattoreiden $\tilde{Q}$ ja $\tilde{P}$ avulla. Ensinnäkin $X, Y \geq 0 \Leftrightarrow \tilde{Q}, \tilde{P} \geq 0$.[19] Vastaavalla tavalla nähdään, että $X \leq \rho \Leftrightarrow \tilde{Q} \leq I$. Operaattorin Z positiivisuudesta puolestaan seuraa, että $Y \leq \rho$, joka puolestaan on yhtäpitävää sen kanssa, että $\tilde{P} \leq I$. Kääntäen $0 \leq \tilde{P} \leq I \Rightarrow Z \geq 0$. Näin ollen optimointitehtävän (31) rajat voidaan korvata rajoilla $0 \leq \tilde{Q}, \tilde{P} \leq I$ ja vaatimalla, että ρ on tila.

Määritellään yksikkövektori ψ kaavalla

$$\psi := (\sqrt{\rho} \otimes I) \sum_{i=1}^{d} |ii\rangle,$$

[18] Tarvittaessa notaatiolla $\rho^{-1/2}$ tarkoitetaan Moore-Penrose käänteismatriisia (kts. Liite)

[19] Tämän näkee suoraan positiivisuuden määritelmän avulla: $\langle\psi|X\psi\rangle \geq 0 \ \forall\psi \in \mathcal{H} \Rightarrow \langle\rho^{-1/2}\psi|X\rho^{-1/2}\psi\rangle \geq 0 \ \forall\psi \in \mathcal{H}$. Vastaavasti toiseen suuntaan $\langle\psi|\rho^{-1/2}X\rho^{-1/2}\psi\rangle \geq 0 \ \forall\psi \in \mathcal{H} \Rightarrow \langle\rho^{1/2}\psi|\rho^{-1/2}X\rho^{-1/2}\rho^{1/2}\psi\rangle \geq 0 \ \forall\psi \in \mathcal{H}$.

missä $\{|i\rangle\}_i$ on ortonormaali kanta ja $|ii\rangle = |i\rangle \otimes |i\rangle$. Tila $P[\psi]$ on tilan ρ puhdistus (engl. purification), sillä osittainen jälki yli jälkimmäisen systeemin antaa tilan ρ:

$$\mathrm{tr}[(T \otimes I)P[\psi]] = \sum_{i,j=1}^{d} \langle \sqrt{\rho} j | T \sqrt{\rho} i \rangle \langle j|i \rangle = \mathrm{tr}[\sqrt{\rho} T \sqrt{\rho}] = \mathrm{tr}[T\rho] \ \forall T \in \mathcal{P}(\mathcal{H}).$$

Uusien efektien $\tilde{Q}$ ja $\tilde{P}$ sekä tilan $P[\psi]$ avulla saadaan kirjoitettua lausekkeessa (31) esiintyvät termit toisin, esimerkiksi

$$\begin{aligned}
\langle \psi | Q \otimes \tilde{P}^T \psi \rangle &= \sum_{i,j=1}^{d} \langle (\sqrt{\rho} \otimes I) ii | (Q \otimes (\rho^{-1/2} Y \rho^{-1/2})^T)(\sqrt{\rho} \otimes I) jj \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \langle \sqrt{\rho} i | Q \sqrt{\rho} j \rangle \langle i | (\rho^{-1/2} Y \rho^{-1/2})^T j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \langle \sqrt{\rho} i | Q \sqrt{\rho} j \rangle \langle j | \rho^{-1/2} Y \rho^{-1/2} i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{d} \langle \sqrt{\rho} i | Q \sqrt{\rho} \rho^{-1/2} Y \rho^{-1/2} i \rangle \\
&= \mathrm{tr}[QY],
\end{aligned} \tag{35}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus saadaan siitä, että $\sqrt{\rho}\rho^{-1/2}$ ja $\rho^{-1/2}\sqrt{\rho}$ ovat projektioita aliavaruudelle $\mathrm{ran}(\sqrt{\rho}) = \mathrm{ran}(\rho)$ (kts. lause A.1) ja $Y \leq \rho$ on näiden projektioiden rajoittama, jolloin $\sqrt{\rho}\rho^{-1/2} Y \rho^{-1/2} \sqrt{\rho} = Y$.

Vastaavalla tavalla saadaan $\mathrm{tr}[X(Q + P - I)] = \langle \psi | (Q + P - I) \otimes \tilde{Q}^T \psi \rangle$. Käyttämällä sitä, että ρ on tilan $P[\psi]$ osittainen jälki ja kaavaa (35) korvauksella $\tilde{Q} \to \tilde{P}$ saadaan

$$\mathrm{tr}[PZ] = \mathrm{tr}[P(\rho - Y)] = \langle \psi | P \otimes I \psi \rangle - \langle \psi | P \otimes \tilde{P}^T \psi \rangle = \langle \psi | P \otimes (I - \tilde{P}^T) \psi \rangle.$$

Koska transponointi pitää efektijoukon paikallaan, niin kaava (31) tulee muotoon

$$\lambda^* = \sup_{\rho, \tilde{Q}, \tilde{P}} \langle \psi | (Q + P - I) \otimes \tilde{Q} - Q \otimes \tilde{P} - P \otimes (I - \tilde{P}) \psi \rangle,$$

missä $\tilde{Q}, \tilde{P}$ käyvät läpi efektijoukon. Tässä esiintyvä supremum tilajoukon yli voidaan korvata supremumilla yli kaikkien tensorituloavaruuden yksikkövektoreiden yli. Tämä näkemiseksi muistetaan ensin, että edellisen lemman nojalla jokainen yhdistetyn systeemin yksikkövektori on muotoa

$$\psi_U = (\sqrt{\rho} \otimes U) \sum_{i=1}^{d} \varphi_i \otimes \varphi_i$$

jollekin unitaarioperaattorille U, tilalle ρ ja ortonormaalille kannalle $\{\varphi_1, ..., \varphi_d\}$. Koska edellä tehdyt laskut eivät riipu vektorin ψ määritelmässä esiintyneen kannan $\{|ij\rangle\}_{i,j=1}^{d}$ valinnasta, niin luvun λ^* arvo ei voi myöskään tästä riippua. Näin ollen supremum voidaan ottaa efektien $\tilde{Q}$ ja $\tilde{P}$ sekä tilajoukon lisäksi yli kaikkien vektorin ψ määritelmässä olevien kantojen. Huomaamalla vielä, että unitaarioperaattorilla konjugointi pitää efetkijoukon itsenään, saadaan esimerkiksi

$$\begin{aligned}
\sup_{\tilde{P},\rho} \langle \psi | Q \otimes \tilde{P} \psi \rangle &= \sup_{U^*\tilde{P}U,\rho,|ii\rangle} \langle \psi | Q \otimes U^* \tilde{P} U \psi \rangle \\
&= \sup_{U^*\tilde{P}U,\rho,|ii\rangle} \langle I \otimes U \psi | (Q \otimes P)(I \otimes U) \psi \rangle \\
&= \sup_{\|\psi\|=1} \langle \psi | Q \otimes \tilde{P} \psi \rangle.
\end{aligned}$$

Täten voidaan kirjoittaa

$$\lambda^* = \sup_{\psi,\tilde{Q},\tilde{P}} \langle \psi | (Q + P - I) \otimes \tilde{Q} - Q \otimes \tilde{P} - P \otimes (I - \tilde{P}) \psi \rangle.$$

Sijoittamalla nyt luvun λ^* lausekkeeseen efekteistä saatavat suureet

$$A_1 = I - 2P, \; A_2 = 2Q - I, \; L_1 = 1 - 2\tilde{P}, \; L_2 = 1 - 2\tilde{Q}$$

saadaan

$$\lambda^* = \sup_{\psi,L_1,L_2} \frac{1}{2} \langle \psi | (B - I) \psi \rangle = \sup_{\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}),L_1,L_2} \frac{1}{2} \mathrm{tr}[(B - I)\rho],$$

missä viimeinen yhtäsuuruus saadaan tilajoukon konveksisuuden avulla. Näin ollen

$$\sup_{\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}),L_1,L_2} |\mathrm{tr}[\rho B]| = 1 + 2\lambda^*,$$

joten yhteismitattomuus on todellakin yhtäpitävää sen kanssa, että CHSH-epäyhtälöä ei saa rikki. □

4.2 Muut epäyhtälöt

Tämän työn punainen lanka on ollut tutkia Bellin epäyhtälöiden ja yhteismitattavuuden välistä suhdetta. Kuten luvussa 3 nähtiin, Bellin epäyhtälöitä on aina periaatteessa mahdollista generoida minkälaiselle tahansa systeemille. Esimerkiksi kirjassa [24] on tämä työ tehty CHSH-tilanteessa ja tapauksessa, jossa on kolme osapuolta sekä halutaan todennäköisyysjakauma, joka sisältää kaikkien tapahtumaparien leikkausten todennäköisyydet. Kuitenkin jo näinkin yksinkertaisissa tapauksissa epäyhtälöiden muodostaminen osoittautuu melko hankalaksi tehtäväksi. Onni onnettomuudessa on kuitenkin se, että kirjallisuus ja alaan liittyvät julkaisut antavat monia tavanomaisiin tilanteisiin soveltuvia epäyhtälöitä.

Suurempi ongelma haettaessa vastausta kysymykseen, onko Bellin epäyhtälöiden voimassaolo ja yhteismitallisuus yksi ja sama asia, on ollut se, että sumeiden suureiden yhteismitallisuutta ei ole onnistuttu karakterisoimaan kovin monessa tapauksessa. Tässä esitetyt kahden qubitin, kolmen ortogonaalisen tai symmetrisessä asemassa olevan qubitin ja Fourier-kytkettyjen d-arvoisten suureiden yhteismitattavuudet näyttäisivät olevan ainoat äärellisulotteiset tapaukset, joissa karakterisointi löytyy. Näyttäisi siltä, että näistäkin kolmen symmetrisen qubitin tapaus tuli esille vasta tätä työtä tehtäessä. Esimerkiksi CGLMP:stä ei ole saatu haluttua testiä yhteismitattavuuden ja epäyhtälön rikkoutumisen välille, sillä CGLMP:tä ei ole toistaiseksi saatu rikki suureilla, joiden yhteismittaukselle löytyy karakterisointi. Yksi tätä työtä varten tehty yritys oli muuntaa Antin suureet siten, että ensimmäisen suureen efektit ovat luonnollinen kanta ja etsiä unitaarimuunnos, joka muuntaisi näin saadun Antin toisen suureen luonnollisen kannan Fourier-muunnokseksi, sillä tällaiselle tilanteelle yhteismittaus osataan karakterisoida (lauseen 2.2 mukaan suureiden yhteismitallisuus on yhtäpitävää unitaarimuunnoksella saatavien suureiden yhteismitallisuuden kanssa).

Jaksossa 3.3.4 annettiin artikkelissa [12] johdetusta klassisesta rajasta toinen versio, jonka yhteys yhteismitallisuuteen joudutaan jättämään tässä vaiheessa auki. Jos kyseessä on Bellin epäyhtälö, niin seuraavan lauseen todistamista toiseen suuntaan Fourier-kytkettyjen suureiden tapauksessa on mahdollista yrittää vähintäänkin numeerisesti melko helpolla algoritmilla, joka on esitelty pääpiirteissään liitteessä.

Lause 4.3. Yhteismitattomuus on aina välttämätön ehto Bellin epäyhtälön rikkoutumiselle.

Todistus. Tehdään vastaoletus: suureet $E_1, ..., E_n$ ovat yhteismitallisia. Tällöin on olemassa yhteissuure E, josta saadaan jokaisella puhtaalla tilalla ψ todennäköisyysjakauma $E_\psi : \mathcal{B}(\Omega_1) \times ... \times \mathcal{B}(\Omega_n) \to [0,1]$ kaavalla

$$E_\psi(X_1, ..., X_n) = \langle \psi | E(X_1, .., X_n)\psi \rangle.$$

Koska E on yhteissuure, niin jakaumasta E_ψ saadaan kaikkien suurejoukon $\{E_1, ..., E_n\}$ osajoukkojen yhdistetyt mittaustulostodennäköisyydet tilassa ψ. Näin ollen jakaumasta E_ψ muodostettu lauseen 3.1 mukainen vektori $\vec{E}_\psi$ kuuluu korrelaatiopolytooppiin $C(m, S)$ (joillakin tilanteelle ominaisilla parametreilla m ja S). Koska Bellin epäyhtälöt ovat rajoituksia sille, milloin vektori kuuluu joukkoon $C(m, S)$, niin missä tahansa vektoritilassa ψ saatavat mittaustulostodennäköisyydet toteuttavat Bellin epäyhtälöt. Tilajoukon konveksisuuden nojalla tulos pätee myös sekoitetuille tiloille. Näin ollen yhteismitallisuudesta seuraa aina, että mittaustulostodennäköisyydet toteuttavat tilanteeseen liittyvät Bellin epäyhtälöt. $\square$

Tällä hetkellä ei ole tiedossa muita tuloksia liittyen Bellin epäyhtälöiden ja yhteismittauksen väliseen yhteyteen kuin tässäkin työssä analysoitu CHSH-tapaus sekä yllä oleva lause. Kuitenkin pyrkimykset karakterisoida esimerkiksi kolmen qubitin tai kahden qutrittisuureen yhteismittaus sekä tässä toistaiseksi auki jäänyt kysymys Fourier-kytkettyihin suureisiin liittyvästä Bellin epäyhtälöstä ovat mielekkäitä tutkimusaiheita ja niiden pohjalta aihetta pystytään varmasti jatkossa analysoimaan tarkemmin. Lisäksi esimerkiksi juuri CHSH-tapausta käsitellyt artikkeli [7] antoi liitteessään monia karakterisointeja yhteismitattavuudelle semidefiniittiohjelman muodossa. Osoittamalla, että nämä epäyhtälöt ovat Bellin epäyhtälöitä, pystyttäisiin hankkimaan lisätietoa klassisen ja kvanttimaailman välisestä rajasta.

A Liite

A.1 Moore-Penrose käänteismatriisi

Jo lineaarialgebrasta tiedetään, että jokainen matriisi ei ole kääntyvä. Voidaan kuitenkin kysyä, miten mahdollisesti käänteismatriisin käsitettä voisi yleistää siten, että kääntymättömillekin matriiseille saataisiin jossain mielessä lähellä käänteisalkiota oleva “pseudokäänteisalkio”. Esimerkiksi tässä pohjana käytetystä teoksessa [23] on esitelty ns. Moore-Penrose käänteismatriisi (lyhyesti M-P matriisi tai vielä lyhyemmin M-P), joka antaa yhden tällaisen yleistyksen.

Olkoon $A \in GL(n, m, \mathbb{K})$, missä $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$. Vaikka A ei välttämättä ole kääntyvä, niin restriktiolla

$$\tilde{A} : \ker(A)^{\perp} \to \operatorname{ran}(A)$$

on bijektiivisenä kuvauksena käänteiskuvaus $\tilde{A}^{-1}$ olemassa. Matriisi A^{-1} voidaan laajentaa koko avaruudessa määritellyksi lineaarikuvaukseksi A^{+} vaatimalla, että

$$A^{+}(x+y) = \tilde{A}^{-1}x, \text{ jos } x \in \operatorname{ran}(A) \text{ ja } y \in \operatorname{ran}(A)^{\perp}. \tag{36}$$

Näin määriteltyä kuvausta kutsutaan matriisin A Mooren Penrosen käänteismatriisiksi ja se on käänteismatriisi siinä mielessä, että

$$A^{+}Ax = x \ \forall x \in \mathbb{K}^{n}$$
$$AA^{+}x = x \ \forall x \in \operatorname{ran}(A).$$

Seuraava lause antaa kaksi vaihtoehtoista tapaa määritellä M-P matriisi.

Lause A.1. Olkoon $A \in GL(n,m,\mathbb{K})$. Seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä:

(i) $A^{+} \in GL(m,n,\mathbb{K})$ on matriisin A Moore-Penrose käänteismatriisi

(ii) $AA^{+} = P_{\operatorname{ran}(A)}$ ja $A^{+}A = P_{\operatorname{ran}(A^{+})}$

(iii) AA^{+} sekä $A^{+}A$ ovat itseadjungoituja ja $AA^{+}A = A,\ A^{+}AA^{+} = A^{+}$.

Todistus. Todistetaan ensin kohtien (ii) ja (iii) yhtäpitävyys. Ensinnäkin implikaatio $(ii) \Rightarrow (iii)$ on selvä. Kaavat saadaan siitä, että esimerkiksi $A \leq P_{\operatorname{ran}(A)}$, jolloin $AP_{\operatorname{ran}(A)} = A$.

Oletetaan nyt (iii). Operaattorit AA^{+} ja $A^{+}A$ ovat projektioita, sillä ne ovat itseadjugoituja ja esimerkiksi $(AA^{+})^{2} = AA^{+}AA^{+} = AA^{+}$. Koska $\operatorname{ran}(AA^{+}A) \subset \operatorname{ran}(AA^{+}) \subset \operatorname{ran}(A)$ ja $A = AA^{+}A$, niin $\operatorname{ran}(AA^{+}) = \operatorname{ran}(A)$. Vastaavasti $\operatorname{ran}(A^{+}A) = \operatorname{ran}(A^{+})$.

Oletetaan seuraavaksi (i). Ensinnäkin

$$AA^{+}x = x \ \forall x \in \operatorname{ran}(A) \text{ ja } AA^{+}y = 0 \ \forall y \in \operatorname{ran}(A)^{\perp}.$$

Näin ollen $AA^{+} = P_{\operatorname{ran}(A)}$. Koska $\operatorname{ran}(A^{+})^{\perp} = \ker(A)$, niin $A^{+}Ax = 0 \ \forall x \in \operatorname{ran}(A^{+})^{\perp}$. Lisäksi jokainen $y \in \operatorname{ran}(A^{+})$ on muotoa $A^{+}x$ jollekin x, joten

$$A^{+}Ay = A^{+}AA^{+}x = A^{+}x - A^{+}(I - AA^{+})x = A^{+}x = y,$$

sillä $I - AA^+ = P^\perp_{\mathrm{ran}(A)}$ ja A^+ on nolla kaikilla joukon $\mathrm{ran}(A)^\perp$ alkioilla. Täten $A^+A = P_{\mathrm{ran}(A^+)}$ ja (ii) (sekä (iii)) pätee.

Oletetaan nyt (ii) ja (iii). Ensinnäkin jokaista $y \in \mathrm{ran}(A)$ kohti löytyy $x \in \ker(A)^\perp$ s.e. $y = Ax$. Näin ollen $A^+y = A^+Ax$. Kohdasta (iii) saadaan

$$A^* = (AA^+A)^* = (A^+A)^*A^* = A^+AA^*,$$

missä viimeisessä yhtäsuuruudessa on käytetty kohtaa (ii). Tämän perusteella $\ker(A)^\perp = \mathrm{ran}(A^*) \subset \mathrm{ran}(A^+)$. Koska lisäksi $A^+A = P_{\mathrm{ran}(A^+)}$, niin

$$A^+y = A^+Ax = x = \tilde{A}^{-1}Ax = \tilde{A}^{-1}y.$$

Lisäksi jokaisella $z \in \mathrm{ran}(A)^\perp$ on kohdan (ii) nojalla voimassa $AA^+z = 0$ ja kohdan (iii) avulla saadaan

$$A^+z = A^+AA^+z = 0,$$

joka todistaa väitteen. □

A.2 Monte Carlo

Tässä liitteen alaluvussa annetaan aiemmin esitetystä duaalitehtävästä poikkeava metodi tutkia joidenkin Bellin epäyhtälöiden rikkoutumista numeerisesti. Ideana on määritellä ensin johonkin laskentaohjelmaan (tässä Mathematica 7) sumennetut suureet toiselle puolelle ja rikkoutumiseen tarvittavat suureet toiselle.[20] Tämän jälkeen suoritetaan Monte Carlo -simulaatio tilajoukon suhteen eli laitetaan laskentaohjelma arpomaan suuri määrä tiloja, jotka pistetään sisään haluttuun epäyhtälöön. Alla on esitetty Mathematica-koodi tilojen arpomiselle $\mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_3$ eli 3-dimensioisten Hilbertin avaruuksien tensoritulon tapauksessa (esim. BG:ssä on

[20] Tämä on rajoittava tekijä, sillä kuten aiemmin nähtiin, esimerkiksi CHSH-tapauksessa joudutaan lisäksi optimoimaan toisen puolen suureiden yli, jotta saataisiin kaikki tapaukset käytyä läpi. Esimerkiksi BG-tapauksessa toisen puolen suureet on kiinnitetty, joten tämä metodi sopii ko. epäyhtälön testaamiseen.

juuri tämä tapaus).

$$A = \text{RandomComplex}[\{1+i\},\{9,9\}];$$
$$B = A.\text{ConjugateTranspose}[A];$$
$$\rho = \frac{1}{\text{Tr}[B]}B.$$

Esimerkiksi Mathematica Table komennolla on tämän jälkeen helppo laittaa ohjelma laskemaan suuri määrä iteraatioita halutusta epäyhtälöstä. Bellin epäyhtälöissä on aina kyse todennäköisyyksistä, joten tietokoneelle jää laskettavaksi pelkästään matriisien tulojen jälkiä. Tämä on nopea operaatio, joten tällä metodilla pystyy hyvin pienessä ajassa testaamaan hyvin suuren joukon tiloja. Seuraavassa on vielä annettu esimerkki Table-komennon käytöstä. Olkoon B suure, jonka odotusarvona saadaan tutkittava Bellin epäyhtälö. Tällöin seuraava komento arpoo tuhat tilaa ja sijoittaa ne epäyhtälöön:

$$\text{data=Table[Arvonta; }\{\text{tr}[B.\rho],\rho\},\{10^4\}];$$

Komennolla

$$\text{Max[Table[data[[i]][[1]],}\{i,1,10^4\}]]$$

saadaan puolestaan tarkistettua rikkoutuiko epäyhtälö jollain arvotuista tiloista. Laskentaohjelmien numeriikasta johtuen on yleensä tarpeen asettaa itseisarvot saatavien lukujen (Tr[B]) ympärille, koska ne saattavat sisältää luokkaa 10^{-5} olevia kompleksitermejä, jolloin maksimin ottamiseksi tarvitsee karsia tällaiset termit pois.

A.3 Finen tulos

Tässä alaluvussa annetaan todistus lauseelle 3.2. Muistin virkistämiseksi kirjoitetaan lause tähän uudelleen.

Lause A.2. Tapauksessa, jossa on kaksi havaitsijaa ja molemmilla on kaksi kaksiarvoista suuretta mitattavanaan, seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä:

(i) On olemassa deterministinen piilomuuttujamalli.
(ii) On olemassa hajoava stokastinen piilomuuttujamalli.
(iii) On olemassa todennäköisyysjakauma, josta saadaan kokeen suureiden sekä

suureparien mittaustulostodennäköisyydet marginaaleina.[21]
(iv) Jokaiselle kommutoivalle ja kommutoimattomalle suureparille sekä kolmikolle on olemassa todennäköisyysjakauma, josta yksittäisten suureiden mittaustulostodennäköisyydet saadaan marginaaleina.
(v) CHSH-epäyhtälö ei rikkoudu.

Todistus. Käytetään samaa notaatiota kuin luvussa 3.2 sillä muutoksella, että merkitään esimerkiksi $P(A=1) = P(A)$, $P(A=-1) = P(\bar{A})$ ja $P(A=1, L=1) = P(A, L)$.

Todistetaan ensin kohtien (*i*) ja (*iii*) yhtäpitävyys. Oletetaan aluksi determinististen mallin olemassaolo. Määritellään todennäköisyysjakauma kaavalla

$$P(A, A', L, L') = \int \tilde{A}(\lambda)\tilde{A}'(\lambda)\tilde{L}(\lambda)\tilde{L}'(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda. \tag{37}$$

Loput todennäköisyydet saadaan kuten aiemmin. Esimerkiksi

$$P(\bar{A}, A', L, \bar{L}') = \int (1-\tilde{A}(\lambda))\tilde{A}'(\lambda)\tilde{L}(\lambda)(1-\tilde{L}'(\lambda))\rho(\lambda)d\lambda.$$

Näin määritelty todennäköisyysjakauma antaa marginaaleinaan halutut mittaustulostodennäköisyydet. Esimerkiksi

$$\begin{aligned}
&P(A, A', L, L') + P(A, \bar{A}', L, L') + P(A, A', \bar{L}, L') + P(A, \bar{A}', \bar{L}, L') \\
=&\int \tilde{A}(\lambda)\tilde{L}'(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda \\
=&P(A, L').
\end{aligned} \tag{38}$$

Vastaavasti

$$P(A, A', L, \bar{L}') + P(A, \bar{A}', L, \bar{L}') + P(A, A', \bar{L}, \bar{L}') + P(A, \bar{A}', \bar{L}, \bar{L}') = P(A, \bar{L}'). \tag{39}$$

Laskemalla kaavat (38) ja (39) yhteen saadaan yhtälössä (37) määritellyn todennäköisyysjakauman ensimmäiseksi marginaaliksi $P(A)$. Loput marginaalit voidaan laskea samalla tavalla.

Oletetaan nyt yhteisjakauman P olemassaolo. Olkoon piilomuuttujien joukko $\Lambda = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) | a_i = \pm 1\}$ ja määritellään $A(\lambda) = a_1$, $A'(\lambda) = a_2$, $L(\lambda) = a_3$ sekä

[21] Suurepareilla tarkoitetaan tässä pareja, joiden suureet ovat erillään toisistaan siinä mielessä, että parin toinen suure on Antin ja toinen Lauran suure.

$L'(\lambda) = a_4$. Tiheysfunktio määritellään kaavalla $\rho(a_1, a_2, a_3, a_4) = P(A_1, A'_2, L_3, L'_4)$, missä $S_i = S$, jos $a_i = 1$, ja $S_i = \bar{S}$, jos $a_i = -1$. Näin määritelty ρ on normitettu, sillä

$$\int_\Lambda \rho(a_1, a_2, a_3, a_4) d\lambda = \sum_{A,A',L,L'} P(A, A', L, L') = 1, \tag{40}$$

jossa summaus tarkoittaa sitä, että summataan kaikki todennäköisyysjakauman P arvot. Nyt esimerkiksi

$$\begin{aligned}\int_\Lambda \tilde{A}(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda &= \int_{(1,a_2,a_3,a_4)} \rho(\lambda)d\lambda \\ &= \sum_{a_2,a_3,a_4=\pm 1} P(A = 1, A' = a_2, L = a_3, L' = a_4) \\ &= P(A),\end{aligned}$$

koska P on yhteisjakauma. Vastaavasti

$$\begin{aligned}\int_\Lambda \tilde{A}(\lambda)\tilde{L}(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda &= \int_{(1,a_2,1,a_4)} \rho(\lambda)d\lambda \\ &= \sum_{a_2,a_4=\pm 1} P(A = 1, A' = a_2, L = 1, L' = a_4) \\ &= P(A, L).\end{aligned}$$

Vastaavilla laskuilla saadaan myös muut todennäköisyydet laskettua, joten deterministiseltä piilomuuttujamallilta vaaditut yhtälöt (21) ja (22) ovat voimassa. Näin ollen kohdat (*i*) ja (*iii*) ovat yhtäpitävät.

Osoitetaan seuraavaksi kohta (*iv*) yhtäpitäväksi kohdan (*iii*) kanssa. Oletetaan ensin (*iii*). Olkoon P kohdan (*iii*) mukainen yhteisjakauma. Tällä jakaumalla on marginaaleinaan suurekolmikon (A, L, L') sekä (A', L, L') yhteisjakaumat, joista saadaan marginaaleina $P(A), P(A'), P(L), P(L'), P(A, L), P(A, L'), P(A', L)$ sekä $P(A', L')$. Lisäksi näistä jakaumista saadaan ulos yhtenä marginaalina $P(L, L')$, vaikka L sekä L' eivät kommutoisi. Näin ollen deterministisen piilomuuttujamallin olemassaolo nähdään ristiriitaiseksi kvanttimekaniikan kanssa: kommutoimattomille suureille löytyy yhteisjakauma. Vastaavasti voidaan ottaa jakauman P marginaaleina (A, A', L) sekä (A, A', L'), joista saadaan marginaaleina $P(A, A')$.

Oletetaan nyt (*iv*). Määrittelemällä

$$P(A, A', L, L') = \frac{P(A, L, L')P(A', L, L')}{P(L, L')},$$

jos $P(L, L') \neq 0$ ja $P(A, A', L, L') = 0$, jos $P(L, L') = 0$, saadaan kohdan (*iii*) mukainen yhteisjakauma.

Näytetään seuraavaksi, että kohdasta (*iv*) seuraa (*v*). Ensinnäkin marginaalien sekä sen tiedon nojalla, että kohdat (*iii*) sekä (*iv*) ovat yhtäpitävät saadaan

$$\begin{aligned} P(A, L, L') &= P(A, A', L, L') + P(A, \bar{A}', L, L') \\ &\leq P(A', B) + P(\bar{A}', B') \\ &= P(A', B) + P(B') - P(A', B'). \end{aligned} \tag{41}$$

Samalla perusteella voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} P(\bar{A}, L, L') &= P(\bar{A}, A', L, L') + P(\bar{A}, \bar{A}', L, L') \\ &\leq P(A', L') + P(\bar{A}', L) \\ &= P(A', L') + P(B) - P(A', B). \end{aligned} \tag{42}$$

Käyttämällä marginaaleja saadaan edelleen

$$\begin{aligned} P(A, \bar{L}, \bar{L}') &= P(A) - P(A, \bar{L}, L') - P(A, L, \bar{L}') - P(A, L, L') \\ &= P(A) - P(A, L) - P(A', L') + P(A, L, L') \end{aligned} \tag{43}$$

sekä

$$\begin{aligned} P(\bar{A}, \bar{L}, \bar{L}') &= 1 - P(A, L, L') - P(A, L, \bar{L}') - P(A, \bar{L}, L') - P(\bar{A}, L, L') \\ &\quad - P(A, \bar{L}, \bar{L}') - P(\bar{A}, L, \bar{L}') - P(\bar{A}, \bar{L}, L') \\ &= 1 - P(A) - P(L) - P(L') + 2P(A, L, L') + P(A, L, \bar{L}') \\ &\quad + P(A, \bar{L}, L') + P(\bar{A}, L, L') \\ &= 1 - P(A) - P(L) - P(L') + P(A, L) + P(A, L') + P(\bar{A}, L, L'). \end{aligned} \tag{44}$$

Käyttämällä epäyhtälöä (41) yhtälöön (43) saadaan seuraavan lausekkeen yläraja ja puolestaan käyttämällä epäyhtälöä (42) yhtälöön (44) saadaan alaraja

$$-1 \leq P(A, L) + P(A, L') + P(A', L') - P(A', L) - P(A) - P(L') \leq 0. \tag{45}$$

Vastaavalla laskulla voidaan johtaa kolme muuta epäyhtälöä, jotka ovat samaa muotoa kuin (45) sillä erolla, että niissä yhdessä on vaihdettu $A \leftrightarrow A'$, toisessa $B \leftrightarrow B'$ ja kolmannessa $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B'$.

Saadun epäyhtälön saattamiseksi tutumpaan muotoon käytetään seuraavanlaisia paritodennäköisyyksien ominaisuuksia

$$\begin{aligned} P(A,\bar{L}) &= P(A) - P(A,L) \\ P(\bar{A},L) &= P(L) - P(A,L) \\ P(\bar{A},\bar{L}) &= 1 - P(A,L) - P(\bar{A},L) - P(A,\bar{L}) \\ &= 1 - P(A) - P(L) + P(A,L). \end{aligned} \tag{46}$$

Kaavojen (46) avulla saadaan

$$\begin{aligned} E(A,L) &= P(A,L) + P(\bar{A},\bar{L}) - P(\bar{A},L) - P(A,\bar{L}) \\ &= 4P(A,L) - 2P(A) - 2P(L) + 1. \end{aligned} \tag{47}$$

Koska kaava (47) toimii myös permutaatioilla $A \leftrightarrow A'$ sekä $B \leftrightarrow B'$, voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} &E(A,L) + E(A,L') + E(A',L') - E(A',L) \\ &= 4\left[P(A,L) + P(A,L') + P(A',L') - P(A',L) - P(A) - P(L') + \frac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

Käyttämällä tähän epäyhtälöä (45) saadaan

$$-2 \leq E(A,L) + E(A,L') + E(A',L') - E(A',L) \leq 2.$$

Koska kaikki laskut toimivat myös permutaatioilla $A \leftrightarrow A'$ sekä $B \leftrightarrow B'$, saadaan kaavasta (45) permutoitujen kaavojen avulla loput kolme CHSH-epäyhtälöä.

Näytetään seuraavaksi, että kohdasta (v) saadaan (iii). Olkoon

$$\begin{aligned} \beta := \min\{&P(L), P(L'), P(A,L) + P(L') - P(A,L'), P(A,L') + P(L) - P(A,L), \\ &P(A',L) + P(L') - P(A',L'), P(A',L') + P(L) - P(A',L)\}. \end{aligned}$$

Määritellään nyt $P(L, L') = \beta$, josta saadaan

$$
\begin{aligned}
P(L, \bar{L}') &= P(L) - \beta \\
P(\bar{L}, L') &= P(L') - \beta \\
P(\bar{L}, \bar{L}') &= 1 - P(L) - P(L') + \beta.
\end{aligned}
$$

Nämä ovat kaikki positiivisia luvun β määritelmän nojalla. Määritellään seuraavaksi

$$
\begin{aligned}
\alpha &:= \min\{\beta, P(A, L), P(A, L'), \\
&\qquad \beta - [P(A) + P(L) + P(L') - P(A, L') - P(A, L) - 1]\} \\
\alpha' &:= \min\{\beta, P(A', L), P(A', L'), \\
&\qquad \beta - [P(A') + P(L) + P(L') - P(A', L') - P(A', L) - 1]\}.
\end{aligned}
$$

CHSH:n avulla sekä käyttämällä epäyhtälöitä $P(A, L) \leq \min\{P(A), P(L)\}$ ja $P(A) + P(L) \leq 1 + P(A, L)$ voi tarkastaa, että $\alpha, \alpha' \geq 0$.[22] Näin ollen $0 \leq \alpha \leq \beta$ sekä $0 \leq \alpha' \leq \beta$. Asetetaan $P(A, L, L') = \alpha$ ja määritellään

$$
\begin{aligned}
P(A, L, \bar{L}') &= P(A, L) - \alpha \\
P(A, \bar{L}, L') &= P(A, L') - \alpha \\
P(A, \bar{L}, \bar{L}') &= P(A) - P(A, L) - P(A, L') + \alpha \\
P(\bar{A}, L, L') &= \beta - \alpha \\
P(\bar{A}, L, \bar{L}') &= P(L) - P(A, L) - (\beta - \alpha) \\
P(\bar{A}, \bar{L}, L') &= P(L') - P(A, L') - (\beta - \alpha) \\
P(\bar{A}, \bar{L}, \bar{L}') &= 1 - P(A) - P(L) - P(L') + P(A, L) + P(A, L') + P(A, L') + \beta - \alpha.
\end{aligned}
$$

Vastaavalla tavalla asetetaan $P(A', L, L') = \alpha'$ ja määritellään loput suureiden A', L sekä L' jakauman termit kuten yllä sillä erolla, että tehdään korvaukset $A \to A'$ sekä $\alpha \to \alpha'$. Vastaavilla tekniikoilla kuin lukujen α ja α' positiivisuuden tarkastamisessa saadaan näytettyä, että saadut yhteisjakaumat ovat todellakin todennäköisyysjakaumia. Esimerkiksi tapauksessa, jossa

$$\alpha = \beta = P(A', L') + P(L') - P(A', L)$$

[22] Esimerkiksi tapauksessa $\beta = P(L)$ saadaan $\beta - [P(A) + P(L) + P(L') - P(A, L') - P(A, L) - 1] = -P(A) - P(L') + P(A, L') + P(A, L) + 1 \geq P(A, L) \geq 0$.

ehto

$$P(A,\bar{L},\bar{L}') = P(A) - P(A,L) - P(A,L') + \alpha = P(A) - P(A,L) - P(A,L') + P(A',L') + P(L$$

on sama kuin epäyhtälö (45). Näin ollen kohta (iii) pätee.

Tähän asti on näytetty, että kaikki muut kohdat paitsi (ii) ovat keskenään yhtäpitävät. Luvussa 3.2.2 nähtiin, että kohdasta (i) seuraa (ii). Imlpikaatio $(ii) \Rightarrow (iii)$ puolestaan seuraa määrittelemällä yhteisjakauma

$$P(A,A',L,L') = \int_{\Lambda} p(A,\lambda)p(A',\lambda)p(L,\lambda)p(L',\lambda)\rho(\lambda)d\lambda.$$

Lause on todistettu. □

Viitteet

[1] P. Lahti 2002, *Coexistence and Joint Measurability in Quantum Mechanics*, International Journal of Theoretical Physics **42**, 5 (2003)

[2] C. Berg, J. Christensen, P. Ressel, *Harmonic Analysis on Semigroups*, Springer-Verlag (1987)

[3] P. Busch, *Unsharp Reality and Joint Measurements for Spin Observables*, Phys. Rev. D **33** (1986)

[4] P. Busch, M. Grabowski, P. Lahti, *Operational Quantum Physics*, Springer-Verlag (1995)

[5] Y-C. Liang, R. Spekkens, H. Wiseman, *Specker's parable of the overprotective seer: A road to contextuality, nonlocality and complementarity*, Physics Reports **1**, 506 (2011)

[6] T. Heinosaari, D. Reitzner, P. Stano, *Notes on Joint Measurability of Quantum Observables*, Foundations of Physics **38**, 1133-1147 (2008)

[7] M. Wolf, D. Perez-Garcia, C. Fernandez, *Measurements Incompatible in Quantum Theory Cannot Be Measured Jointly in Any Other No-Signaling Theory*, Phys. Rev. Lett. **103**, 230402 (2009)

[8] M. Hirvensalo, *EPR Paradox and Bell Inequalities*, EATCS Bulletin **92** (2007)

[9] A. Fine, *Hidden Variables, Joint Probability, and the Bell Inequalities*, Physical Review Letters **48**, 5 (1982)

[10] D. Collins, N. Gisin, N. Linden, S. Massar, and S. Popescu, *Bell inequalities for arbitrarily high dimensional systems*, Phys. Rev. Lett. **88**, 040404 (2002)

[11] S. Zohren, R. Gill, *Maximal Violation of the Collins-Gisin-Linden-Massar-Popescu Inequality for Infinite Dimensional States*, Phys. Rev. Lett. **100**, 120406 (2008)

[12] H. Bechmann-Pasquinucci and N. Gisin, *Bell inequality for quNits with binary measurements*, Quantum Information & Computation **3**, (2003)

[13] T. Heinosaari, M. Ziman, *The Mathematical Language of Quantum Theory, From Uncertainty to Entanglement*, Cambridge University Press (2012)

[14] R. F. Werner, M. M. Wolf, *All-multipartite Bell-correlation inequalities for two dichotomic observables per site*, Physical Review A **64**, 032112 (2001)

[15] P. Horodecki, *Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition*, Physics Letters A **232**, 5 (1997)

[16] C. Carmeli, T. Heinosaari, A. Toigo, *Informationally complete joint measurements on finite quantum systems*, Physical Review A **85**, 012109 (2012)

[17] R. Pal, S. Ghosh, *Approximate joint measurement of qubit observables through an Arthut-Kelly model*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **44**, 485303 (2011)

[18] S. Yu, N. Liu, L. Li, C. H. Oh, *Joint measurement of two unsharp observables of a qubit*, Physical Review A **81**, 062116 (2010)

[19] Y. S. Kupitz, H. Martini, *The Fermat-Torricelli point and isosceles tetrahedra*, Journal of Geometry **49**, 150 (1994)

[20] S. T. Ali, C. Carmeli, T. Heinosaari, A. Toigo, *Commutative POVMs and fuzzy observables*, Foundations of Physics **39**, 593 (2009)

[21] C. Carmeli, T. Heinosaari, A. Toigo, *Informationally compelete joint measurements on finite quantum systems*, Phys. Rev. A **85**, 012109 (2012)

[22] E. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Academic, London (1976)

[23] O. Christensen, *Frames and Bases: An Introductory Course (Applied and Numerical Harmonic Analysis)*, Birkhäuser Boston (2008)

[24] I. Ptowsky, *Quantum Probability - Quantum Logic (Lecture Notes in Physics)*, Springer-Verlag (1989)

[25] L. Vandenberghe, S. Boyd, *Semidefinite Programming*, SIAM Rev. vol. 38, 49 (1996)

[26] P. Busch, P. Lahti, P. Mittelstaedt, *Quantum Theory of Measurement*, Springer (1996)

[27] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, *Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Conditions* Physics Letters A **223** (1996)

[28] J-P. Pellonpää, *Complete measurements of quantum observables*, arXiv:1206.2506

[29] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer-Verlag, Berlin (1932)

[30] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt, *Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories*, Phys. Rev. Lett. **23**, 880-884 (1969)

[31] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press (2004)