CORE
Metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
Provided by University of Zagreb Repository

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Antonija Glibušić

KVADRATIČNO PROGRAMIRANJE I LINEARNA ZADAĆA KOMPLEMENTARNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, rujan, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svom mentoru prof. dr. sc. Marku Vrdoljaku na stručnoj pomoći i vodstvu pri pisanju ovoga rada.
Zahvaljujem se svojoj obitelji na materijalnoj i nematerijalnoj potpori koju su mi pružali tokom studiranja.
Na poseban način zahvaljujem Mariju Bambuloviću koji je svih ovih godina bio nesebičan kolega i izvanredan prijatelj.

Sadržaj

Uvod

Zadaća komplementarnosti predstavlja vrlo dubok i težak matematički problem, ali je svakako lijepa domena za istraživanje jer ima brojne zanimljive primjene izvan matematike. Vratimo li se malo u prošlost, pojedinačne primjere zadaće linearne komplementarnosti možemo naći u matematičkoj literaturi od ranih 40-ih godina prošlog stoljeća pod raznim imenima, kao što su *fundamentalna zadaća*, *zadaća komplementarnog pivotiranja* i sl. Tek 1965. godine Cottle predlaže naziv *linearna zadaća komplementarnosti* i možemo vidjeti da se taj naziv koristi i danas u matematičkoj literaturi. Povijesno, linearna zadaća komplementarnosti je zamišljena kao ujedinjena formulacija za linearno i kvadratično programiranje te također bimatrične igre. Ali u stvarnosti, zadaće kvadratičnog programiranja su uvijek bile, a i danas su, usko povezane s linearnim zadaćama komplementarnosti. Upravo te dvije zadaće i spomenuta veza među njima će biti predmet našeg interesa u ovom radu.

Rad je podijeljen na tri poglavlja od kojih svako sadrži dva do četiri odjeljka. Prvo poglavlje je zamišljeno kao teorijska podloga za nešto kompleksniji sadržaj drugog i trećeg poglavlja. Dakle, u prvom poglavlju ćemo ponoviti neke osnovne pojmove i rezultate iz algebre matrica i konveksnosti funkcije. Malo više pažnje ćemo posvetiti konveksnosti jer nas upravo ona uvodi u kvadratično programiranje, prvu veliku temu kojom ćemo se baviti. Drugo poglavlje je podijeljeno na dva odjeljka: u prvom je naglasak na uvjetima optimalnosti zadaće kvadratičnog programiranja, a u drugom nam je cilj uspostaviti vezu između zadaće kvadratičnog programiranja i linearne zadaće komplementarnosti. Upravo ova posljednja predstavlja okosnicu rada i njom ćemo se baviti u trećem poglavlju. Nakon što formuliramo zadaću, posvetit ćemo pažnju pitanju egzistencije i broja rješenja zadaće. Zadnji odjeljak ovog poglavlja govori o algoritmima za rješavanje linearne zadaće komplementarnosti. Postoje dvije glavne familije algoritama: metode pivotiranja (direktne metode) i iterativne metode (indirektne metode). Mi ćemo se u radu pozabaviti poznatijima od spomenutih, metodama pivotiranja, a posebno ćemo obraditi Lemkeov algoritam. Što se tiče druge familije algoritama, samo nakratko ćemo se dotaknuti najpoznatije metode - metode unutrašnje točke. U posljednja dva poglavlja ćemo teoretske rezultate potkrijepiti primjerima.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi i rezultati

U ovom poglavlju postavit ćemo teorijsku podlogu za analizu i rješavanje zadaće kvadratičnog programiranja te linearne zadaće komplementarnosti. Posebno ćemo se osvrnuti na konveksne, odnosno strogo konveksne funkcije koje su usko povezane s pozitivno semidefinitnim, odnosno pozitivno definitnim matricama. Za početak pogledajmo što su to pozitivno definitne i semidefinitne matrice te koja svojstva imaju.

1.1 Pozitivno definitne i semidefinitne matrice

Definicija 1.1.1. *Za kvadratnu matricu $F \in M_n(\mathbb{R})$ reda n kažemo da je:*

(a) ***pozitivno semidefinitna*** *ako je $y^T F y \geq 0$, za svaki $y \in \mathbb{R}^n$,*

(b) ***pozitivno definitna*** *ako je $y^T F y > 0$, za svaki $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Neka je $F = (f_{ij})$ kvadratna matrica reda n. Neka $\{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{1, \ldots, n\}$ indeksni skup s elementima posloženim u rastućem poretku. Brisanjem svih elemenata matrice F u retku i te stupcu i, za svaki $i \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$, preostaje kvadratna matrica reda r:

$$\begin{pmatrix} f_{i_1,i_1} & \cdots & f_{i_1,i_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{i_r,i_1} & \cdots & f_{i_r,i_r} \end{pmatrix}.$$

Tu matricu nazivamo **glavna podmatrica** određena podskupom $\{i_1, \ldots, i_r\}$. Determinantu glavne podmatrice od F nazivamo **vodeća minora** od F.

Sad kad znamo osnovne pojmove, možemo prijeći na kriterije koji će nam pomoći u ispitavanju pozitivno definitnitinih i semidefinitnih matrica. Prvi rezultat u nastavku poznat je još i kao Sylvesterov kriterij za testiranje pozitivno definitnih matrica.

Teorem 1.1.2. *Neka je $F = (f_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična matrica. Označimo redom vodeće minore:*

$$\triangle_1 = f_{11}, \triangle_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}, \dots, \triangle_n = \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}.$$

F je pozitivno definitna matrica ako i samo ako je $\triangle_i > 0, i = 1, \dots, n$.

Dokaz. Za dijagonalnu matricu lako se provjeri da teorem vrijedi. U slučaju $n = 2$ nadopunjavanjem do punog kvadrata dobivamo

$$\begin{aligned} x^T F x &= f_{11} x_1^2 + 2 f_{12} x_1 x_2 + f_{22} x_2^2 \\ &= f_{11} \left(x_1^2 + 2 \frac{f_{12}}{f_{11}} x_1 x_2 + \frac{f_{12}^2}{f_{11}^2} x_2^2 \right) + \frac{-f_{12}^2 + f_{11} f_{22}}{f_{11}} x_2^2 \\ &= f_{11} \left(x_1 + \frac{f_{12}}{f_{11}} x_2 \right)^2 + \frac{detF}{f_{11}} x_2^2. \end{aligned}$$

Sada jednostavno slijedi tvrdnja teorema. □

Analogon Sylvesterovog kriterija za pozitivno semidefinitne matrice je sljedeći teorem.

Teorem 1.1.3. *$F = (f_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ je pozitivno semidefinitna matrica ako i samo ako su sve njezine vodeće minore nenegativne.*

Dokaz. Za dokaz nužnosti pretpostavimo da je F pozitivno semidefinitna matrica. Hipoteza osigurava da $x^T F x \geq 0$ za svojstvene vektore matrice F. Ako je (λ, x) svojstveni par, tada $\lambda = \frac{x^T F x}{x^T x} \geq 0$. Dakle, sve svojstvene vrijednosti od F su nenegativne. Želimo pokazati da se matrica F može zapisati na sljedeći način: $F = B^T B$, gdje je matrica B ranga r. Neka je $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Ako je $\lambda_i \geq 0$ za svaki i, tada postoji $D^{\frac{1}{2}}$ takav da možemo zapisati: $F = PDP^T = PD^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} P^T = B^T B$, gdje je $B = D^{\frac{1}{2}} P^T$ matrica ranga r. Dakle, matricu F možemo zapisati kao $B^T B$ za neku matricu B ranga r. Sada, ako je P_k glavna podmatrica od F, tada

$$\begin{pmatrix} P_k & * \\ * & * \end{pmatrix} = Q^T F Q = Q^T B^T B Q = \begin{pmatrix} A^T \\ * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & | & * \end{pmatrix}$$

povlači da je $P_k = A^T A$ za permutacijsku matricu Q. Tako $det(P_k) = det(A^T A) \geq 0$. Za dokaz obratne implikacije pretpostavimo da je F_k vodeća $k \times k$ glavna podmatrica od F. Ako su $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k\}$ svojstvene vrijednosti od F_k (uključujući ponavljanje), tada $\varepsilon I + F_k$ ima svojstvene vrijednosti $\{\varepsilon + \mu_1, \varepsilon + \mu_2, ..., \varepsilon + \mu_k\}$ pa za svaki $\varepsilon > 0$, $det(\varepsilon I + F_k) = (\varepsilon + \mu_1)(\varepsilon + \mu_2)...(\varepsilon + \mu_k) = \varepsilon^k + S_1 \varepsilon^{k-1} + ... + S_{k-1} \varepsilon + S_k > 0$ jer je S_j j-ta simetrična funkcija μ_i-jeva pa je S_j suma $j \times j$ glavnih minora od F_k, koje su glavne minore od F. Drugim riječima, svaka vodeća glavna minora od $\varepsilon I + F$ je pozitivna, dakle $\varepsilon I + F$ je pozitivno definitna matrica. Posljedica: za svaki $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ slijedi da je $x^T(\varepsilon I + F)x > 0$, za svaki $\varepsilon > 0$. Kad pustimo $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, slijedi upravo ono što želimo dokazati, $x^T F x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$.

□

U sljedećem poglavlju ćemo pokazati da nam je od posebne važnosti znati je li matrica pozitivno semidefinitna ili nije pa je korisno znati kako se može testirati. Jedan od načina pomoću kojeg možemo saznati je li matrica pozitivno semidefinitna je koristeći dekompoziciju Choleskog. Ako je matrica A pozitivno semidefinitna, možemo napraviti dekompoziciju na sljedeći način:

$$A = LL^T,$$

gdje je L donjetrokutasta matrica ($L_{ij} = 0$, za $j > i$). Ova dekompozicija može se dobiti rješavanjem gornjeg identiteta stupac po stupac (ili redak po redak). Cholesky dekompozicija se može izračunati u $O(n^3)$ operacija i igra veliku ulogu u algoritmima za semidefinitno programiranje.

1.2 Konveksne kvadratične funkcije

U ovom odjeljku definirat ćemo kvadratičnu funkciju i pokazati da ako je ona konveksna, onda će točka za koju se postiže lokalni minimum biti ujedno i točka za koju se postiže globalni minimum. Za početak, sljedeću funkciju više varijabli

$$f(x) = \alpha + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{kj} x_k x_j$$

nazivamo kvadratičnom funkcijom. Koristeći matričnu notaciju izraz možemo pojednostaviti u:

$$f(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x,$$

gdje $c \in \mathbb{R}^n$ i $Q \in M_n(\mathbb{R})$. Uočimo da je funkcija pojednostavljena izostavljanjem konstante α jer nam neće igrati ulogu u optimizaciji. Također, faktor jedne polovine u gornjoj funkciji je uključen kako bi izrazi za prvu i drugu derivaciju funkcije f imali jednostavniji oblik. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je matrica Q simetrična jer

$$x^T Q x = (x^T Q x)^T = x^T Q^T x = \frac{1}{2}(x^T Q x + x^T Q^T x) = x^T \left(\frac{Q + Q^T}{2} \right) x,$$

odnosno ako matrica Q nije simetrična, možemo je zamijeniti matricom $\frac{Q+Q^T}{2}$. Prije nego krenemo iznositi rezultate o konveksnim kvadratičnim funkcijama, definirat ćemo konveksnu i strogo konveksnu funkciju.

Definicija 1.2.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup te $f : \Omega \to \mathbb{R}$ realna funkcija. Za f kažemo da je* ***konveksna funkcija*** *na Ω ako*

$$f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \leq \alpha f(x^1) + (1-\alpha)f(x^2),\ \text{za sve } x^1, x^2 \in \Omega,\ \alpha \in [0,1].$$

Za funkciju f kažemo da je ***strogo konveksna funkcija*** *na Ω ako*

$$f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) < \alpha f(x^1) + (1-\alpha)f(x^2),\ \text{za sve } x^1, x^2 \in \Omega,\ \alpha \in \langle 0,1\rangle,\ \text{gdje } x^1 \neq x^2.$$

Sljedeća propozicija daje algebarsku karakterizaciju konveksnih (strogo konveksnih) funkcija preko pozitivno semidefinitnih (pozitivno definitnih) matrica. No, prije ćemo definirati pozitivno definitne i semidefinitne matrice restringirane na neki potprostor.

Definicija 1.2.2. *Neka je $F \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ te $\mathcal{V}$ potprostor od $\mathbb{R}^n$. Za restrikciju $F|\mathcal{V}$ kažemo da je:*

(a) pozitivno semidefinitna ako je $y^T F y \geq 0$, za svaki $y \in \mathcal{V}$,

(b) pozitivno definitna ako je $y^T F y > 0$, za svaki $y \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$.

Propozicija 1.2.3. *Neka je $\mathcal{V}$ potprostor od $\mathbb{R}^n$. Restrikcija kvadratične funkcije f (čiji Hessian je matrica A) na $\mathcal{V}$, $f|\mathcal{V}$, je konveksna ako i samo ako je $A|\mathcal{V}$ pozitivno semidefinitna. Odnosno, $f|\mathcal{V}$ je strogo konveksna ako i samo ako je $A|\mathcal{V}$ pozitivno definitna.*

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathcal{V}$, gdje $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \{0,1\}$, $s = \alpha x + (1-\alpha)y$. Taylorov polinom funkcije f oko točke s je:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(s) + \nabla f(s)^T(x-s) + \frac{1}{2}(x-s)^T A(x-s) \\ f(y) &= f(s) + \nabla f(s)^T(y-s) + \frac{1}{2}(y-s)^T A(y-s). \end{aligned}$$

Množenjem prve jednadžbe s α, a druge s $1-\alpha$ te sumiranjem dobivenih jednadžbi imamo:

$$f(s) + \frac{\alpha}{2}(x-s)^T A(x-s) + \frac{1-\alpha}{2}(y-s)^T A(y-s) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Sada slijedi da ako je $A|\mathcal{V}$ pozitivno semidefinitna matrica, onda je $f|\mathcal{V}$ konveksna. Štoviše, $x = y$ je ekvivalentno s $x = s$ i $y = s$ pa slijedi: ako je $A|\mathcal{V}$ pozitivno definitna matrica, onda je $f|\mathcal{V}$ strogo konveksna. Za dokaz nužnosti pretpostavimo da $z \in \mathcal{V}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ te označimo

$x = 2z, y = 0$. Tada $s = z,\ x - s = z,\ y - s = -z$. Supstitucijom gornjih izraza u Taylorov polinom dobijemo:

$$f(s) + \frac{1}{2}z^T Az = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Kako je $z \in \mathcal{V}$ proizvoljan i $f|\mathcal{V}$ po pretpostavci konveksna, slijedi da je:

$$\frac{1}{2}z^T Az = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) - f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq 0.$$

Dakle, $A|\mathcal{V}$ je pozitivno semidefinitna matrica. Štoviše, ako je $f|\mathcal{V}$ strogo konveksna, tada će $A|\mathcal{V}$ biti pozitivno definitna matrica.

□

Koristeći gornju propoziciju i pretpostavku da je funkcija konveksna, možemo pokazati da je točka za koju funkcija postiže lokalni minimum ujedno i točka za koju se postiže globalni minimum.

Propozicija 1.2.4. *Neka je Ω konveksan skup i $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ kvadratična funkcija definirana na sljedeći način: $f(x) = c^T x + \frac{1}{2}x^T Qx$. Tada vrijedi:*

(i) Ako je f konveksna funkcija, tada je svaki $x \in \Omega$ za kojeg funkcija f postiže lokalni minimum ujedno i globalni minimum te funkcije na Ω.

(ii) Ako je f konveksna na potprostoru $\mathcal{V} \supseteq \Omega$ i x^{1*}, x^{2*} su točke u kojima funkcija f poprima minimum na Ω, tada vrijedi:

$$x^{1*} - x^{2*} \in Ker\ Q.$$

(iii) Ako je f strogo konveksna na Ω i x^{1*}, x^{2*} su točke u kojima funkcija f poprima minimum na Ω, tada

$$x^{1*} = x^{2*}.$$

Dokaz. (i) Neka su $x^{1*}, x^{2*} \in \Omega$ točke u kojima funkcija f poprima lokalni minimum na Ω te neka vrijedi $f(x^{1*}) < f(x^{2*})$. Iz definicije konveksne funkcije slijedi:

$$f\left(\alpha x^{1*} + (1 - \alpha)x^{2*}\right) \leq \alpha f(x^{1*}) + (1 - \alpha)f(x^{2*}) < f(x^{2*}), \text{ za svaki } \alpha \in \langle 0, 1\rangle.$$

Zbog

$$||x^{2*} - (\alpha x^{1*} + (1 - \alpha)x^{2*})|| = \alpha||x^{2*} - x^{1*}||$$

imamo kontradikciju s pretpostavkom da je x^{2*} točka u kojoj f poprima lokalni minimum.

(ii) Neka su x^{1*} i x^{2*} točke u kojima f poprima lokalni minimum na Ω. Tada za svaki $\alpha \in [0, 1]$ vrijedi

$$x^{1*} + \alpha(x^{2*} - x^{1*}) = (1 - \alpha)x^{1*} + \alpha x^{2*} \in \Omega,$$
$$x^{2*} + \alpha(x^{1*} - x^{2*}) = (1 - \alpha)x^{2*} + \alpha x^{1*} \in \Omega.$$

Štoviše, koristeći Taylorovu formulu, imamo:

$$0 \leq f(x^{1*} + \alpha(x^{2*} - x^{1*})) - f(x^{1*}) = \alpha(Qx^{1*} + c)^T(x^{2*} - x^{1*}) + \frac{\alpha^2}{2}(x^{2*} - x^{1*})^T Q(x^{2*} - x^{1*}),$$
$$0 \leq f(x^{2*} + \alpha(x^{1*} - x^{2*})) - f(x^{2*}) = \alpha(Qx^{2*} + c)^T(x^{1*} - x^{2*}) + \frac{\alpha^2}{2}(x^{1*} - x^{2*})^T Q(x^{1*} - x^{2*}).$$

Za proizvoljno mali α tada vrijedi

$$(Qx^{1*} + c)^T(x^{2*} - x^{1*}) \geq 0$$
$$i$$
$$(Qx^{2*} + c)^T(x^{1*} - x^{2*}) \geq 0.$$

Konačno, imamo

$$-(x^{1*} - x^{2*})^T Q(x^{1*} - x^{2*}) \geq 0.$$

Po Propoziciji 1.2.2. konveksnost od $f|\mathcal{V}$ povlači da je $Q|\mathcal{V}$ pozitivno semidefinitna matrica, što daje $x^{1*} - x^{2*} \in Ker\ Q$.

(iii) Neka je f strogo konveksna i $x^{1*}, x^{2*} \in \Omega, x^{1*} \neq x^{2*}$ točke u kojima f poprima globalni minimum na Ω. Dakle, $f(x^{1*}) = f(x^{2*})$. Tada $Ker\ Q = \{0\}$ pa iz (ii) slijedi $x^{1*} - x^{2*} = 0$.

□

Budući da je kvadratična funkcija neprekidna, po Weierstrassovom teoremu slijedi da na zatvorenom i omeđenom skupu Ω ta funkcija sigurno postiže minimum. No u ovom radu nam je potreban teorem koji ćemo moći koristiti i ako nemamo pretpostavku na omeđenost skupa Ω pa donosimo sljedeću propoziciju.

Propozicija 1.2.5. *Neka je f kvadratična funkcija definirana na nepraznom zatvorenom konveksnom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada vrijedi:*

(i) Ako je f strogo konveksna funkcija, tada postoji $x \in \Omega$ za kojeg f postiže globalni mininum i jedinstven je.

(ii) Ako je f brzorastuća funkcija na Ω, tj. $f(x) \to \infty$ za $\| x \| \to \infty$, $x \in \Omega$, tada postoji $x \in \Omega$ u kojem funkcija f postiže globalni minimum.

(iii) Točka $x \in \Omega$ u kojoj funkcija f postiže globalni minimum postoji ako i samo ako je f omeđena odozdo na Ω.

Dokaz. (i) Ako je f strogo konveksna, po Propoziciji 1.2.2. slijedi da je Hessian od Q pozitivno definitna matrica. Lako se pokaže da je u tom slučaju $z = Q^{-1}c$ jedinstvena točka u kojoj f postiže minimum na $\mathbb{R}^n$. Stoga za bilo koji $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $f(x) \leq f(z)$. Odatle slijedi da postoji infimum od $f(x), x \in \Omega$. Odnosno postoji niz vektora $x_k \in \Omega$ takav da

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{x\in\Omega} f(x).$$

Niz (x_k) je omeđen:

$$f(x_k) - f(z) = \frac{1}{2}(x_k - z)^T Q(x_k - z) \geq \frac{\lambda_{min}}{2}\|x_k - z\|^2,$$

gdje λ_{min} predstavlja najmanju svojstvenu vrijednost od Q. Sada po Bolzano-Weierstrasseovom teoremu slijedi da (x_k) ima barem jedno gomilište $x^* \in \Omega$. Kako je f neprekidna, imamo

$$f(x^*) = \inf_{x\in\Omega} f(x).$$

Jedinstvenost slijedi iz Propozicije 1.2.3.

(ii) Analogno dokazu za (i).

(iii) Ova tvrdnja je poznata kao Frank-Wolfeov teorem (vidi [10], str. 95–110).

□

Poglavlje 2

Kvadratično programiranje

Zadaća kvadratičnog programiranja je problem optimizacije u kojem se minimizira ili maksimizira kvadratična funkcija cilja uz ograničenja zadana linearnim funkcijama. Promatrat ćemo zadaću minimizacije

$$\begin{aligned} f(x) &\to min \\ x &\in K, \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdje $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijabilna konveksna funkcija, $K \in \mathbb{R}^n$ konveksan.

2.1 Uvjeti optimalnosti

Da bismo izveli uvjete optimalnosti za zadaću kvadratičnog programiranja, promatrat ćemo zadaću minimizacije (2.1) za koju vrijedi sljedeća ekvivalencija.

Lema 2.1.1. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijabilna konveksna funkcija te $K \in \mathbb{R}^n$ konveksan skup. Za $x^* \in K$ je ekvivalentno:*

(a) $(\forall x \in K)\ f(x^*) \leq f(x)$,

(b) $(\forall x \in K)\ \nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0$.

Dokaz. Pokažimo prvo smjer $(b) \Rightarrow (a)$ Prema definiciji konveksnosti vrijedi $f((1-\alpha)x^* + \alpha x) \leq (1-\alpha)f(x^*) + \alpha f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in [0, 1]$.
Odatle za $\alpha \in \langle 0, 1]$,

$$\frac{f(x^* + \alpha(x - x^*)) - f(x^*)}{\alpha} \leq f(x) - f(x^*).$$

Uzimanjem limesa kad $\alpha \searrow 0$ slijedi

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \leq f(x) - f(x^*), x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Odnosno, graf konveksne funkcije leži iznad tangencijalne plohe u svakoj točki $x^* \in \mathbb{R}^n$. Sada iz (2.2) jednostavno slijedi tvrdnja $(b) \Rightarrow (a)$.
Za dokaz obratnog smjera pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (a). Uzmimo proizvoljan $x \in K$. Tada za $\alpha \in [0, 1]$ imamo $(1 - \alpha)x^* + \alpha x \in K$. Odatle za $\alpha = 0$ slijedi

$$f\left((1 - \alpha)\, x^* + \alpha x\right) \geq f(x^*),$$

odnosno

$$f\left(x^* + \alpha\,(x - x^*)\right) - f\left(x^*\right) \geq 0.$$

Ako gornju nejednakost podijelimo s $\alpha > 0$ te pustimo limes kad $\alpha \searrow 0$, dobijemo

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0.$$

□

Napomena 2.1.2. *U gornjoj lemi smjer* $(a) \Rightarrow (b)$ *vrijedi i bez pretpostavke konveksnosti funkcije* f.

Ako početnim uvjetima dodamo još da je K poliedarski skup, $K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, promatramo problem

$$\begin{aligned} &f(x) \to min \\ &Ax \leq b, \end{aligned} \tag{2.3}$$

gdje $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$. Sada uvjet (b) iz gornje leme nije teško raspisati. No, prije nekoliko napomena o notaciji:

- $a_i \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ je i-ti redak matrice A, $i = 1, \ldots, m$,
- $a^j \in M_{m,1}(\mathbb{R})$ je j-ti stupac matrice A, $j = 1, \ldots, n$,
- $I(x^*) = \{i \in \{1, ..., m\} : a_i x^* = b_i\}$ je skup aktivnih indeksa točke x^*.

Lema 2.1.3. *Ako je K poliedarski skup, $x^* \in K$ te $z \in \mathbb{R}^n$, tada je ekvivalentno:*

(a) $(\forall x \in K)\; z^T(x - x^*) \leq 0$,

(b) $(\forall i \in I(x^*))\; (\exists y_i \geq 0)$ *takvi da je* $z = \sum\limits_{i \in I(x^*)} y_i a_i^T$.

Dokaz. $(b) \Rightarrow (a)$ Za $z = \sum\limits_{i \in I(x^*)} y_i a_i^T$ je $\sum\limits_{i \in I(x^*)} y_i a_i (x - x^*) = \sum\limits_{i \in I(x^*)} \underbrace{y_i}_{\geq 0} (\underbrace{a_i x}_{\leq b_i} - \underbrace{a_i x^*}_{= b_i}) \leq 0$.
$(a) \Rightarrow (b)$ Pretpostavimo suprotno, $z \notin C(\{a_i^T \in \mathbb{R}^n : i \in I(x^*)\})$. Prema teoremu separacije za konačnogenerirani konus postoji $q \in \mathbb{R}^n$ takav da je $q^T z > 0$ i $a_i q \leq 0$, $i \in I(x^*)$. Promatramo točku $x = x^* + yq$, za $y > 0$:

(i) $i \in I(x^*)$, $a_i(x^* + yq) = \underbrace{a_i x^*}_{= b_i} + \underbrace{y}_{\geq 0} \underbrace{a_i q}_{\leq 0} \leq b_i$

(ii) $i \notin I(x^*)$, $a_i(x^* + yq) = \underbrace{a_i x^*}_{< b_i} + y a_i q \leq b_i$, za dovoljno mali $y > 0$.

Kako je takvih indeksa konačno mnogo, nalazimo $x = x^* + yq$ (za neki dovoljno mali $y > 0$) takav da je $x \in K$. Za takav x vrijedi $z^T(x - x^*) = z^T yq > 0$, što je kontradikcija s pretpostavkom iz dijela (a). □

Iz gornjih lema zaključujemo da je x^* optimalna točka zadaće

$$\begin{aligned} f(x) &\to min \\ Ax &\leq b, \end{aligned}$$

gdje je f konveksna funkcija, ako i samo ako je $-\nabla f(x^*) = \sum_{i \in I(x^*)} y_i a_i^T$, za neke $y_i \geq 0$. Ekvivalentno to možemo zapisati na sljedeći način:

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{m} y_i a_i^T \tag{2.4}$$

$$y_i \geq 0, i = 1, ..., m \tag{2.5}$$

$$y_i(a_i x - b_i) = 0, i = 1, ..., m, \tag{2.6}$$

što predstavlja Karush-Kuhn-Tuckerov sustav u slučaju linearnih uvjeta. Prisjetimo se, $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T$. U slučaju da u zadnjem retku gornjeg sustava vrijedi $a_i x < b_i$, onda $y_i = 0$. Idući zadatak nam je opisati taj sustav u kontekstu kvadratičnog programiranja.

Kako je f kvadratična funkcija, $f(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x$, početni problem možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x \\ & Ax \leq b. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Promatramo prvo funkciju cilja. Gradijent funkcije $f(x) = c^T x + \frac{1}{2}x^T Qx$ je

$$\nabla f(x) = c + Qx.$$

Gornju jednakost možemo iskoristiti u jednadžbi (2.4), a (2.5) i (2.6) možemo zapisati u matričnoj formi. Konačno, traženi sustav za zadaću kvadratičnog programiranja (2.7) je

$$Ax \leq b \tag{2.8}$$
$$-c - Qx = A^T y \tag{2.9}$$
$$y \geq 0 \tag{2.10}$$
$$y^T(Ax - b) = 0. \tag{2.11}$$

Međutim, u zadaći kvadratičnog programiranja često ćemo imati dodatni uvjet $x \geq 0$, odnosno imamo zadaću

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^T x + \frac{1}{2}x^T Qx \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{QP}$$

Cilj nam je ovaj problem svesti na (2.7) kako bismo Karush-Kuhn-Tuckerov sustav samo prilagodili. Matrica A će nam u ovom slučaju biti $\begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}$, a y prelazi u $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$. Karush-Kuhn-Tuckerovi uvjeti sada postaju:

(i) $Ax \leq b$, $x \geq 0$,

(ii) $-c - Qx = \begin{pmatrix} A^T & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = A^T y - z$

(iii) $y \geq 0$, $z \geq 0$,

(iv) $\begin{pmatrix} y^T & z^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ax - b \\ -x \end{pmatrix} = 0$, odnosno $y^T(Ax - b) - z^T x = 0$.

Ako (*ii*) zapišemo kao $z = c + Qx + A^T y$ i uzmemo u obzir da je uvjet (*iv*) ekvivalentan jednakostima $y^T(Ax - b) = 0$ i $z^T x = 0$, dobivamo Karush-Kuhn-Tuckerove uvjete za (QP):

Definicija 2.1.4. *Par $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ se naziva **Karush-Kuhn-Tuckerova točka** (skraćeno KKT točka) za zadaću kvadratičnog programiranja (QP) ako i samo ako su sljedeći uvjeti* *zadovoljeni:*

$$\begin{aligned} Ax \leq b,\ x \geq 0, \\ y \geq 0,\ c + Qx + A^T y \geq 0, \\ y^T(Ax - b) = 0,\ x^T(c + Qx + A^T y) = 0. \end{aligned} \tag{KKT}$$

Osim slučaja kad je $K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, ponekad ćemo imati zadan poliedarski skup

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}.$$

Kako smo (QP) svodili na (2.7), analogno ćemo napraviti i za ovaj slučaj. Umjesto matrice A stajat će $\begin{pmatrix} -A \\ -I \end{pmatrix}$, a umjesto y matrica $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ pa će Karush-Kuhn-Tuckerovi uvjeti u ovom slučaju biti:

$$\begin{aligned} Ax \geq b,\ x \geq 0, \\ y \geq 0,\ c + Qx - A^T y \geq 0, \\ y^T(Ax - b) = 0,\ x^T(c + Qx - A^T y) = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Idemo korak dalje i promatramo slučaj zadaće konveksnog kvadratičnog programa. Dopustivo područje u (QP) je poliedarski, a time i konveksan skup pa nam preostaje pogledati još funkciju cilja. U prošlom poglavlju pokazali smo da je f konveksna funkcija ako i samo ako je Hessian od f pozitivno semidefinitna matrica, a ako je funkcija f konveksna, govorimo o zadaći konveksnog kvadratičnog programiranja. Sada na temelju spomenutog možemo dati nužan i dovoljan uvjet optimalnosti za zadaću konveksnog kvadratičnog programiranja.

Teorem 2.1.5. *Ako je Q simetrična i pozitivno semidefinitna matrica, x^* je rješenje (QP) ako i samo ako postoji $y^* \in \mathbf{R}^m$ takav da je (x^*, y^*) KKT točka za (QP).*

Dokaz. Slijedi iz Lema 2.1.1. i 2.1.3 □

U primjerima koji slijede možemo vidjeti kako se rješava zadaća kvadratičnog programiranja pomoću Karush-Kuhn-Tucekerovih uvjeta.

Primjer 2.1.6. *Zadan je sljedeći kvadratični program za kojeg je potrebno odrediti optimalno rješenje:*

$$\begin{aligned} \textit{min} \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ \textit{uz ograničenje} \quad & 3x_1 + 4x_2 = 1. \end{aligned}$$

Prilagodimo prvo zadaću oznakama koje smo do sada koristili:

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}, \; b = 1.$$

Odmah vidimo da je matrica Q pozitivno semidefinitna, odnosno funkcija cilja u gornjoj zadaći je konveksna. Karush-Kuhn-Tuckerov sustav za danu zadaću kvadratičnog programiranja je:

$$\begin{aligned} -c - Qx &= A^T y \\ y &\in \mathbb{R} \\ Ax - b &= 0, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= y\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= 1. \end{aligned}$$

Sređivanjem sustava dobijemo

$$\begin{aligned} -2x_1 = 3y, \quad -2x_2 &= 4y \\ 3x_1 + 4x_2 &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_2 &= \tfrac{4}{3}x_1 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Konačno, $x = \begin{pmatrix} \frac{3}{25} \\ \frac{4}{25} \end{pmatrix}$ *te* $y = -\frac{2}{25}$. *Kako je* (x, y) *KKT točka za početnu zadaću te vrijedi da je Q simetrična pozitivno semidefinitna matrica, prema Teoremu 2.1.5. je* $x = \begin{pmatrix} \frac{3}{25} \\ \frac{4}{25} \end{pmatrix}$ *rješenje dane zadaće kvadratičnog programiranja.*

Napomena 2.1.7. *Ako se u i-tom uvjetu (QP) javlja = umjesto* $\leq$, *za* $i = 1, \ldots, m$, *onda se u Karush-Kuhn-Tuckerovom sustavu ispušta* $y_i \geq 0$ *i* $y_i(Ax - b)_i = 0$ *prelazi u uvjet* $(Ax - b)_i = 0$.

Kvadratično programiranje ima široku primjenu izvan matematike, a posebno se ističe na području fizike, ekonomije i financija. Primjer koji slijedi je upravo financijskog tipa. Riječ je upravljanju portfeljem, odnosno raspodjeli sredstava s ciljem maksimizacije povrata i minimizacije rizika

Primjer 2.1.8 (Problem upravljanja portfeljem)**.** *Portfelj menadžeri neprestano planiraju i upravljaju tržišnim odlukama. Recimo da menadžer mora odlučiti kako raspodijeliti do-*

stupne resurse između 3 tipa investicija: dionica, tržišta novca i korporativnih obveznica. U tablici su prikazani povrati izraženi u postotcima u posljednjih 6 godina na osnovu kojih menadžer temelji svoju odluku. On bi htio postići povrat na investiciju od barem 11% *uz minimalan rizik.*

Kategorija	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Prosjek*
Dionice	*22.24*	*16.16*	*5.27*	*15.46*	*20.62*	*-0.42*	*13.22*
Tržište novca	*9.64*	*7.06*	*7.68*	*8.26*	*8.55*	*8.26*	*8.24*
Obveznice	*10.08*	*8.16*	*8.46*	*9.18*	*9.26*	*9.06*	*9.03*

Varijable odabira:
x_1=*udio portfelja investiran u dionice*
x_2=*udio portfelja investiran u tržište novca*
x_3=*udio portfelja investiran u obveznice*

Za njih definiramo ograničenja:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ 13.22x_1 + 8.24x_2 + 9.03x_3 &\geq 11, \end{aligned}$$

gdje zadnja nejednakost odgovara uvjetu minimalnog prinosa od 11%. *Preostaje nam još modelirati varijabilnost povrata. Jedan od načina modeliranja varijabilnosti je varijanca. Kada bi se ovi tipovi investicija kretali međusobno nezavisno, varijanca ukupnih povrata bila bi jednaka sumi varijanci pojedinačnih financijskih instrumenata. Međutim, financijska tržišta se rijetko kreću nezavisno, stoga model treba uključivati i kovarijance između različitih tipova financijskih instrumenata. Kovarijancu između dva tipa financijskih instrumenata x i y, pri čemu imamo n obzervacija, definiramo kao:*

$$v_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_i^t x_j^t - \frac{1}{n^2}(\sum_{t=1}^{n} x_i^t)(\sum_{t=1}^{n} x_j^t).$$

Tada je varijanca ukupnih povrata dana izrazom: $v = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}x_i x_j = \mathbf{x}V\mathbf{x}$, *gdje je V kovarijacijska matrica. Uvrštavanjem podataka iz tablice dobivamo:*

$$V = \begin{pmatrix} 66.51 & 2.61 & 2.18 \\ 2.61 & 0.63 & 0.48 \\ 2.18 & 0.48 & 0.38 \end{pmatrix}.$$

Sada smo u mogućnosti modelirati problem upravljanja portfeljom:

$$\begin{aligned} \min \quad & 66.51x_1^2 + 5.22x_1x_2 + 4.36x_1x_3 + 0.63x_2^2 + 0.96x_2x_3 + 0.38x_3^2 \\ \textit{uz ograničenja} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & 13.22x_1 + 8.24x_2 + 9.03x_3 \geq 11 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Dakle, minimiziramo varijancu uz ograničenja da je 100% *investicije uloženo i da minimalni povrat mora biti veći od* 11.
Kako je kovarijacijska matrica simetrična pozitivno semidefinitna, optimalno rješenje gornjeg kvadratičnog problema će biti upravo KKT točka istog problema. Rješavanjem dobijemo da je optimalno rješenje problema je $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0.47, 0, 0.53)$. *Dakle, menadžer će 47% resursa investirati u dionice, 53% u obveznice, a u tržište novca neće ulagati. Ako želimo ovaj problem usporediti sa zapisom danim u (QP), vidimo da je u funkciji cilja* $c = 0$ *i* $Q = V$.

2.2 Konveksni kvadratični programi i linearna zadaća komplementarnosti

Linearna zadaća komplementarnosti se sastoji od pronalaženja vektora iz konačnodimenzionalnog realnog vektorskog prostora koji zadovoljava određeni sustav jednakosti i nejednakosti. Konkretno, za dani vektor $q \in \mathbf{R}^n$ i matricu $M \in M_n(\mathbf{R})$, linearna zadaća komplementarnosti ima za cilj pronaći vektor $z \in \mathbf{R}^n$ takav da

$$\begin{aligned} z^T(q + Mz) &= 0, \\ q + Mz &\geq 0, \\ z &\geq 0 \end{aligned} \tag{LCP}$$

ili pokazati da takav z ne postoji. Usporedimo li Karush-Kuhn-Tuckerove uvjete (2.12) sa (LCP), vidimo da uvjeti iz (2.12) definiraju linearnu zadaću komplementarnosti, pri čemu

$$q = \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

Primjetimo da, iako Q je simetrična, matrica M nije simetrična, ali ako je Q pozitivno semidefinitna kao u zadaći konveksnog kvadratičnog programiranja, tada je i M pozitivno semidefinitna matrica. Specijalni slučaj zadaće konveksnog kvadratičnog programa je onaj gdje je jedino ograničenje nenegativnosti na varijablu x:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x \\ \text{uz ograničenje} \quad & x \geq 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ovaj program je ekvivalentan linearnoj zadaći komplementarnosti (LCP), odnosno za proizvoljnu simetričnu matricu Q, (LCP) (c, Q) je ekvivalentan stacionarnoj točki problema (2.13). Međutim, ako M i Q ne možemo poistovjetiti, tj. ako M nije simetrična, linearnu zadaću komplementarnosti možemo pridružiti sljedećoj alternativnoj formi zadaće kvadratičnog programiranja:

$$\begin{aligned} \min \quad & z^T (Mz + q) \\ \text{uz ograničenja} \quad & Mz + q \geq 0, \\ & z \geq 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Primjetimo da je funkcija cilja u (2.14) uvijek omeđena odozdo (s nulom) na dopustivom skupu. Trivijalno se pokaže da je vektor z rješenje linearne zadaće komplementarnosti ako i samo ako je z ujedno i globalni minimum zadaće (2.14) čija je vrijednost funkcije cilja jednaka 0. Naravno, u proučavanju linearne zadaće komplementarnosti ne pretpostavljamo da je M simetrična. Zapis (2.14) je koristan jer omogućuje primjenu rezultata iz teorije kvadratičnog programiranja u linearnoj zadaći komplementarnosti. S druge strane, zapis (2.13) dopušta da rezultate koji vrijede za linearnu zadaću komplementarnosti sa simetričnim matricama primjenimo u zadaći kvadratičnog programiranja. Tako (2.13) i (2.14) kombinirano tvore dvosmjerni most koji povezuje linearnu zadaću komplementarnosti i zadaću kvadratičnog programiranja. Pogledat ćemo jedan primjer u kojem je demonstrirana ta veza.

Primjer 2.2.1 (Tržišna ravnoteža)**.** *Tržišna ravnoteža je ekonomski izraz u kojem su potražnja potrošača i ponuda proizvođača izjednačene po važećoj razini cijena. Promatramo problem tržišne ravnoteže u kojem je strana ponude opisana modelom linearnog programiranja, a funkcija tržišne potražnje je generirana ekonometrijskim modelom sa cijenama robe kao primarnim neovisnim varijablama. Matematički gledano model traži vektore p^* i r^* takve da zadovoljavaju sljedeće uvjete:*

- *strana ponude:*

$$\begin{aligned} \textit{min} \quad & c^T x \\ \textit{uz ograničenja} \quad & Ax \geq b \\ & Bx \geq r^* \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{2.15}$$

gdje je c vektor troškova za ponuđačeve aktivnosti, x je vektor proizvodne aktivnosti, uvjet $Ax \geq b$ predstavlja tehnološka ograničenja na proizvodnju, a uvjet $Bx \geq r^*$ ograničenja na zahtjeve potrošača.

- *strana potražnje:*

$$r^* = Q(p^*) = Dp^* + d, \tag{2.16}$$

gdje je Q funkcija potražnje s p^* i r^* koji predstavljaju vektor potraživačkih cijena i količina. Za Q pretpostavljamo da je afina funkcija.

- *ravnotežna stanja:*

$$p^* = \pi^*, \tag{2.17}$$

gdje π^* predstavlja ponuđenu cijenu na tržištu. Da bismo zapisali gornji model kao linearnu zadaću komplementarnosti, imajmo na umu da je x^* optimalno rješenje linearnog programa (2.15) ako i samo ako postoji vektor v^* takav da:

$$\begin{aligned} y^* = c - A^T v^* - B^T \pi^* \geq 0, \quad & x^* \geq 0, \quad (y^*)^T x^* = 0, \\ u^* = -b + Ax^* \geq 0, \quad & v^* \geq 0, \quad (u^*)^T v^* = 0, \\ \delta^* = -r^* + Bx^* \geq 0, \quad & \pi^* \geq 0, \quad (\delta^*)^T \pi^* = 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Supstitucijom funkcije potražnje (2.16) za r^* i korištenjem ravnotežnih stanja (2.17), zaključujemo da uvjeti u (2.18) čine sljedeću linearnu zadaću komplementarnosti (q, M):

$$q = \begin{pmatrix} c \\ -b \\ -d \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -A^T & -B^T \\ A & 0 & 0 \\ B & 0 & -D \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Primjetimo da je matrica M u (2.19) bisimetrična ako je matrica D simetrična. Prisjetimo se, matrica M ima svojstvo bisimetričnosti ako ju možemo zapisati u obliku $M = \begin{pmatrix} G & -A^T \\ A & H \end{pmatrix}$, gdje su G i H simetrične matrice. U tom slučaju linearna zadaća komplementarnosti (q, M) predstavlja Karush-Kuhn-Tuckerove uvjete zadaće kvadratičnog programiranja:

$$\begin{aligned} \textit{max} \quad & d^T p + \frac{1}{2} p^T D p + b^T v \\ \textit{uz ograničenja} \quad & A^T v + B^T p \leq c \\ & p \geq 0, \quad v \geq 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Ako je D antisimetrična, tada M nije bisimetrična i veza između modela tržišne ravnoteže i zadaće kvadratičnog programiranja (2.20) ne postoji.

Poglavlje 3

Linearna zadaća komplementarnosti

3.1 Formulacija zadaće

Kao što smo već prije rekli, za dani vektor $q \in \mathbf{R}^n$ i matricu $M \in M_n(\mathbb{R})$, linearna zadaća komplementarnosti ima za cilj pronaći vektor $z \in \mathbf{R}^n$ koji zadovoljava

$$\begin{aligned} z^T(q + Mz) &= 0 \\ q + Mz &\geq 0 \\ z &\geq 0 \end{aligned} \tag{LCP}$$

ili pokazati da takav z ne postoji. Gornju linearnu zadaću komplementarnosti obilježavamo parom (q, M), a vektor z koji (strogo) zadovoljava drugu i treću nejednakost se naziva (strogo) dopustivim. Kažemo da je linearna zadaća komplementarnosti (strogo) dopustiva ako postoji (strogo) dopustivi vektor, a skup dopustivih vektora nazivamo dopustivim područjem. Ako stavimo $w = q + Mz$, dopustivi vektor z linearne zadaće komplementarnosti će zadovoljavati $z^T(q + Mz) = 0$ ako i samo ako je $z_i w_i = 0$, za $i = 1, \ldots, n$. Varijable z_i i w_i se nazivaju komplementarni par i kaže se da su komplementi jedan drugom. Cilj linearne zadaće komplementarnosti je pronaći vektor koji je dopustiv i komplementaran. Takav vektor nazivamo rješenjem linearne zadaće komplementarnosti. Uočimo da ako vrijedi $q \geq 0$, tada je linearna zadaća komplementarnosti uvijek rješiva s nul-vektorom kao trivijalnim rješenjem. Da bismo olakšali buduće pozivanje na ekvivalentnu formulaciju, zapisat ćemo uvjete kao:

$$
\begin{aligned}
z^T w &= 0 \\
w &= q + Mz \\
w &\geq 0, z \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Ovakav zapis zadaće bit će nam koristan kada budemo govorili o algoritmima za rješavanje linearne zadaće komplementarnosti.

3.2 Komplementarne matrice i konusi

Za početak, važno je naglasiti da su u (LCP) (q, M) komplementarni konusi definirani samo matricom M, vektor q ne igra ulogu. Par vektor stupaca $(e^j, -m^j)$, gdje je e^j j-ti vektor stupac jedinične matrice reda n, nazivamo **komplementarni par** vektora. Ako uzmemo sada vektor iz para $(e^j, -m^j)$ i označimo ga sa a^j, tada će konus $C(a^1, \ldots, a^n) = \{y : y = \alpha_1 a^1 + \ldots + \alpha_n a^n; \alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_n \geq 0\}$ predstavljati **komplemetarni konus**. Kako za svaki $j = 1, \ldots, n$ imamo dvije mogućnosti za a^j, za danu kvadratnu matricu reda n imamo 2^n mogućih komplementarnih skupova vektor stupaca. Kao posljedica toga, unija svih komplementarnih konusa povezanih s kvadratnom matricom M, $\mathbf{K}(M)$, sadrži 2^n konusa. Ova činjenica će nam biti važna kod rješavanja linearne zadaće komplementarnosti. Sada, koristeći gornje oznake, možemo pokazati da je linerana zadaća komplementarnosti usko povezana s pojmom konusa. Naime, linearna zadaća komplementarnosti (q, M) ekvivalentna je problemu pronalaženja konusa koji sadrži točku q u klasi $\mathbf{K}(M)$, odnosno problemu pronalaženja komplementarnog skupa vektor stupaca $(a^1, \ldots, a^n)$ takvih da vrijedi:

(i) $a^j \in \{e^j, -m^j\}$, za $1 \leq j \leq n$,

(ii) q se može prikazati kao nenegativna linearna kombinacija $(a^1, \ldots, a^n)$.

Gornji problem je ekvivalentan pronalaženju $w \in \mathbf{R}^n$ i $z \in \mathbf{R}^n$ koji zadovoljavaju

$$
\sum_{j=1}^{n} e^j w_j - \sum_{j=1}^{n} m^j z_j = q,
$$

gdje $w_j \geq 0$, $z_j \geq 0$, za $j = 1, \ldots, n$, te je barem jedan od w_j, z_j jednak nuli. Neka je sada $y_j \in \{w_j, z_j\}$, za $j = 1, \ldots, n$, te neka je a^j odgovarajući vektor stupac za y_j u (3.1).

Tada je $y = (y_1, \dots, y_n)$ komplementarni vektor varijabli u ovoj linearnoj zadaći komplementarnosti, uređeni skup $(a^1, \dots, a^n)$ je komplementarni skup vektor stupaca, a matrica A sa svojim vektor stupcima $(a^1, \dots, a^n)$, u tom poretku, je komplementarna matrica za tu zadaću. Ako je $\{a^1, \dots, a^n\}$ linearno nezavisan, y je **komplementarni bazični vektor** varijabli u toj zadaći, a komplementarna matrica A je odgovarajuća **komplementarna baza**.

Primjer 3.2.1. *Neka je* $n = 2$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}$, *što daje sljedeću linearnu zadaću komplementarnosti:*

$$\begin{aligned} w_1 - 2z_1 - z_2 &= -5 \\ w_2 - z_1 - 2z_2 &= -6 \\ w_1, w_2, z_1, z_2 &\geq 0 \\ w_1 z_1 = w_2 z_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

(3.2) možemo zapisati u vektorskom obliku:

$$w_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

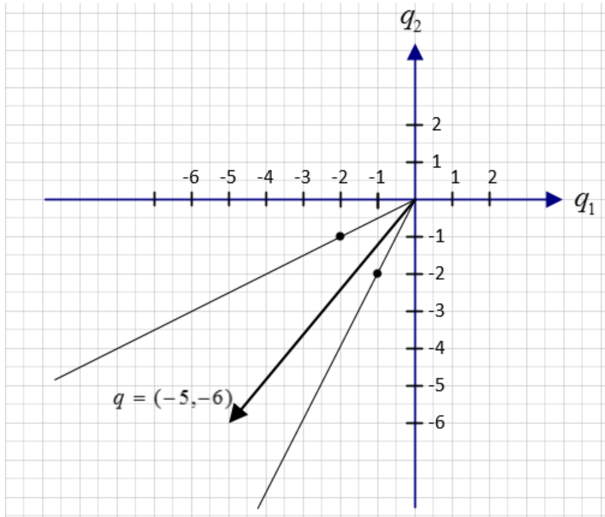
$$w_1, w_2, z_1, z_2 \geq 0, w_1 z_1 = w_2 z_2 = 0. \tag{3.4}$$

Jedan pristup rješavanju ovog problema je odabrati u svakom paru (w_j, z_j) *po jednu varijablu i fiksirati je na vrijednost jednaku* 0. *Na primjer, ako uzmemo da je* $w_1 = w_2 = 0$, *(3.3) prelazi u:*

$$z_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = q \tag{3.5}$$

$$z_1 \geq 0, z_2 \geq 0.$$

Jednadžba (3.5) ima rješenje ako i samo ako vektor q možemo prikazati kao nenegativnu linearnu kombinaciju vektora $(-2, -1)^T$ *i* $(-1, -2)^T$. *Skup svih nenegativnih linearnih kombinacija tih vektora je konus prikazan u ravnini* q_1, q_2 *na Slici 3.1.*



Slika 3.1: Komplementarni konus

Samo ako dani vektor $q = (-5, -6)^T$ leži u tom konusu, linearna zadaća komplementarnosti (3.2) ima rješenje. Rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} -2z_1 - z_2 &= -5 \\ -z_1 - 2z_2 &= -6 \end{aligned}$$

dobijemo da je $z_1 = \frac{4}{3}$, $z_2 = \frac{7}{3}$. Sada je jasno da q leži u konusu prikazanom na Slici 3.1. Rješenje problema (3.2) je $(w_1, w_2, z_1, z_2) = (0, 0, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$. Ovo je bio slučaj kad je komplementarni vektor varijabli bio (z_1, z_2), a odgovarajuća komplementarna matrica $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Osim ovog slučaja, možemo gledati još sljedeće tri kombinacije:

Komplementarni vektor varijabli	*Odgovarajuća komplementarna matrica*
(w_1, w_2)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
(w_1, z_2)	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
(z_1, w_2)	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Crtanjem svih komplementarnih konusa povezanih s ovom linearnom zadaćom komplementarnosti u dvodimenzionalnoj Kartezijevoj ravnini pokaže se da je $\mathbf{K}(M) = \mathbf{R}^2$.

3.3 O rješivosti linearne zadaće komplementarnosti

U teoriji linearne zadaće komplementarnosti klase matrica, od kojih se posebno ističu pozitivno definitne i semidefinitne matrice, imaju snažnu ulogu. U ovom odjeljku utvrdit ćemo egzistenciju i nekoliko svojstava rješenja linearne zadaće komplementarnosti (q, M) s takvim matricama M. Kao i u prošlom poglavlju, općenito nemamo zahtjev na simetričnost matrice M. Kako bismo si olakšali kasniju upotrebu, zapisat ćemo linearnu zadaću komplementarnosti u formi zadaće kvadratičnog programiranja:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & z^T(q + Mz) \\ \text{uz ograničenja} \quad & q + Mz \geq 0 \\ & z \geq 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Osnovno svojstvo zadaće (3.6) dano je sljedećom lemom.

Lema 3.3.1. *Ako je linearna zadaća komplementarnosti* (q, M) *dopustiva, tada kvadratični program (3.6) ima optimalno rješenje,* z^*. *Štoviše, postoji vektor množitelja* u^* *koji zadovoljava uvjete*

$$q + (M + M^T)z^* - M^T u^* \geq 0 \tag{3.7}$$

$$(z^*)^T(q + (M + M^T)z^* - M^T u^*) = 0 \tag{3.8}$$

$$u^* \geq 0 \tag{3.9}$$

$$(u^*)^T(q + Mz^*) = 0. \tag{3.10}$$

Konačno, vektori z^* *i* u^* *zadovoljavaju*

$$(z^* - u^*)_i(M^T(z^* - u^*))_i \leq 0, i = 1, \cdots, n. \tag{3.11}$$

Dokaz. Dok je linearna zadaća komplementarnosti dopustiva, zadaća kvadratičnog programiranja (3.6) je također. Ako je funkcija cilja kvadratičnog programa ograničena odozdo na dopustivom području, već spomenuti Frank-Wolfeov teorem nam osigurava da postoji optimalno rješenje za problem (3.6). Takvo optimalno rješenje z^* i pripadajući vektor množitelja u^* će zadovoljiti Karush-Kuhn-Tuckerove uvjete (3.7) − (3.10). Za dokaz uvjeta (3.11), ispitujemo skalarni produkt (3.8) po komponentama i zaključujemo da je za sve $i = 1, \ldots, n$,

$$z_i^*(M^T(z^* - u^*))_i \leq 0, \tag{3.12}$$

koristeći činjenicu da je z^* iz dopustivog skupa. Slično, množenjem i-te komponente u (3.7) s u_i^*, zatim uzimanjem u obzir uvjeta komplementarnosti $u_i^*(q + Mz^*)_i = 0$, obuhvaćenog s (3.9),(3.10) i dopustivosti od z^*, zaključujemo

$$-u_i^*(M^T(z^* - u^*))_i \leq 0. \tag{3.13}$$

Sada (3.11) slijedi iz (3.12) i (3.13). □

Ova lema nam je potrebna kako bismo dokazali sljedeći rezultat za linearnu zadaću komplementarnosti s pozitivno semidefinitnim matricama.

Teorem 3.3.2. *Neka je M pozitivno semidefinitna matrica. Ako je linearna zadaća komplementarnosti dopustiva, tada je i rješiva.*

Dokaz. Prema Lemi 3.3.1 postoje vektori z^* i u^* takvi da je z^* dopustiv za (LCP) i uvjeti (3.7) − (3.11) vrijede. Dodavanjem n nejednakosti u (3.11), dobivamo

$$(z^* - u^*)^T M^T(z^* - u^*) \leq 0. \tag{3.14}$$

Ako je M pozitivno semidefinitna matrica, ova nejednakost mora vrijediti i kao jednakost. Pogledamo li derivaciju od (3.11), zaključujemo da (3.12) mora vrijediti i kao jednakost za svaki i. Stoga, iz (3.8), zaključujemo

$$(z^*)^T(q + Mz^*) = 0. \tag{3.15}$$

Dakle, z^* je rješenje linearna zadaća komplementarnosti. □

Kada je riječ o pozitivno definitnim matricama, zaključak je nešto jači:

Lema 3.3.3. *Ako je M pozitivno definitna matrica, tada postoji vektor z takav da*

$$Mz > 0, \; z > 0. \tag{3.16}$$

Dokaz. Ako takav vektor z ne postoji, možemo iskoristi Villeov teorem alternatve koji kaže da vrijedi jedna od idućih tvrdnji

(i) $Mz > 0,\ z > 0$

(ii) $M^T u \leq 0,\ u \geq 0,$

ali nikako oboje. Dakle, ako prvi uvjet ne vrijedi, onda postoji netrivijalni vektor $u \geq 0$ takav da $M^T u \leq 0$. Množenjem gornje nejednakosti s u dobivamo $u^T M^T u \leq 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom pozitivne definitnosti matrice M. □

Definicija 3.3.4. *Kvadratna matrica M za koju vektor z zadovoljava (3.16) se naziva* **S *-matrica***. *Klasa* **S***-matrica se označava sa* **S**.

Treba primjetiti da je (3.16) dopustivo ako i samo ako vrijedi da je $Mz > 0,\ z \geq 0$ dopustivo. Jasno, $Mz > 0,\ z \geq 0$ slijedi iz (3.16). S druge strane, pretpostavimo da je vektor $z \geq 0$ zadan tako da vrijedi $Mz > 0$. Dok je Mz konstantan u z, slijedi da je $M(z + \lambda e) > 0$ za sve $\lambda > 0$ dovoljno male. Kad je $z + \lambda e > 0$, imamo (3.16).

Lema 3.3.3. pokazuje da pozitivno definitna matrica M mora pripadati klasi **S**, koja je na sljedeći način povezana s dopustivosti linearne zadaće komplementarnosti.

Propozicija 3.3.5. *Matrica $M \in M_n(\mathbb{R})$ je* **S***-matrica ako i samo ako je (LCP) dopustiv za svaki $q \in \mathbf{R}^n$.*

Dokaz. Promatramo proizvoljnu linearnu zadaću komplementarnosti za koju $M \in \mathbf{S}$. Neka je z^* rješenje za (3.16). Tada za dovoljno velik pozitivni skalar λ takav da $\lambda z^* > 0$ vrijedi

$$\lambda M z^* = M(\lambda z^*) \geq -q. \tag{3.17}$$

S druge strane, ako je (LCP) dopustiv za svaki q, odaberemo bilo koji $q < 0$. Svako dopustivo rješenje z^* za (LCP) će zadovoljavati $Mz^* \geq -q > 0,\ z^* \geq 0$. Dakle, M je **S**-matrica. □

Kombinacijom Teorema 3.3.2, Leme 3.3.3 i Propozicije 3.3.4 dobijemo dio o egzistenciji u sljedećem rezultatu.

Teorem 3.3.6. *Ako je $M \in M_n(\mathbb{R})$ pozitivno definitna matrica, tada (LCP) ima jedinstveno rješenje za svaki $q \in \mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Kao što je već rečeno prije iskaza teorema, dovoljno je dokazati jedinstvenost rješenja. Neka je zadan $q \in \mathbb{R}^n$. Bilo koje rješenje linearne zadaće komplementarnosti mora biti optimalno rješenje za zadaću kvadratičnog programiranja (3.6). Ako je M pozitivno definitna matrica, funkcija cilja je strogo konveksna pa (3.6) ima jedinstveno rješenje, a time i (LCP). □

Općenito, linearna zadaća komplementarnosti s pozitivno semidefinitnom matricom može imati više rješenja. Na primjer, zadaća:

$$q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad i \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ima sljedeća rješenja:

$$z^1 = (1, 0), \quad z^2 = (0, 1), \quad z^3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Uočimo da je $w = q + Mz$ jednak za sva tri rješenja $z^i,\ i = 1, 2, 3$.

Sljedeći teorem opisuje neka od svojstava skupa rješenja linearne zadaće komplementarnosti povezane s pozitivno semidefinitnom matricom.

Teorem 3.3.7. *Neka je $M \in M_n(\mathbf{R})$ pozitivno semidefinitna matrica i $q \in \mathbf{R}^n$ proizvoljan vektor. Tada vrijedi:*

(a) Ako su z^1 i z^2 dva rješenja linearne zadaće komplementarnosti (q, M), tada

$$(z^1)^T(q + Mz^2) = (z^2)^t(q + Mz^1) = 0. \tag{3.18}$$

(b) Ako je z^* iz skupa rješenja linearne zadaće komplementarnosti te vrijedi

(i) z^* je nedegenerirano,

(ii) glavna podmatrica od M, $M_{\alpha\alpha}$, je nesingularna, gdje $\alpha = \{i : z^*_i > 0\}$,

tada je z^* jedinstveno rješenje (q, M).

(c) Ako linearna zadaća komplementarnosti ima rješenje, tada je skup rješenja poliedarski skup

$$P = \{z \in \mathbf{R}^n_+ : q + Mz \geq 0, q^T(z - z^*) = 0, (M + M^T)(z - z^*) = 0\}, \tag{3.19}$$

gdje je z^* proizvoljno rješenje.

(d) Ako je M simetrična matrica, tada je $Mz^1 = Mz^2$ za bilo koja dva rješenja z^1 i z^2.

Dokaz. (a) Neka je $w^i = q + Mz^i$, za $i = 1, 2$. Imamo $w^1 - w^2 = M(z^1 - z^2)$. Iz činjenice da je M pozitivno semidefinitna matrica i da su z^1 i z^2 rješenja linearne zadaće komplementarnosti slijedi

$$0 \leq (z^1 - z^2)^T M(z^1 - z^2) = -(z^1)^T w^2 - (z^2)^T w^1 \leq 0.$$

Sada je očito da mora vrijediti $(z^1)^T w^2 = (z^2)^T w^1 = 0$, što je i trebalo pokazati.
(b) Neka je z' bilo koje rješenje linearne zadaće komplementarnosti. Iz (3.18) imamo

$$(q + Mz')_i = 0, \forall i \in \alpha. \tag{3.20}$$

Ako $i \notin \alpha$, tada $(q + Mz^*)_i > 0$, za nedegenerirani z^*. Iz (3.20) ponovo zaključujemo da $z'_i = 0$, za $i \notin \alpha$. Sada (3.20) postaje kvadratični sustav linearnih nejednakosti

$$q_\alpha + M_{\alpha\alpha} z'_\alpha = 0,$$

čije rješenje mora biti jedinstveno zbog pretpostavke regularnosti matrice $M_{\alpha\alpha}$.
(c) Neka je z^* dano rješenje i z proizvoljno rješenje. Iz dokaza za (a) možemo pokazati da vrijedi $(z - z^*)^T M(z - z^*) = 0$. Odatle zaključujemo da $(M + M^T)(z - z^*) = 0$, za koje pozitivno semidefinitna kvadratična forma nestaje, kao i njezin gradijent. Stoga, imamo

$$z^T(M + M^T)z = z^T(M + M^T)z^*,$$

i

$$z^{*T}(M + M^T)z^* = z^{*T}(M + M^T)z.$$

Zadnje dvije jednadžbe povlače da je $z^T Mz = z^{*T} Mz^*$. Također,

$$0 = z^* T(q + Mz^*) = z^T(q + Mz).$$

Konačno, $q^T z = q^T z^*$ i $z \in P$.
Obrnuto, pretpostavimo da je $z \in P$. Da bismo pokazali da je z rješenje linearne zadaće komplementarnosti, dovoljno je pokazati da vrijedi $z^T(q+Mz) = 0$. Iz $(M+M^T)(z-z^*) = 0$, uz argument koji smo upravo koristili, slijedi da $z^T Mz = z^{*T} Mz^*$. Kako je $q^T(z - z^*) = 0$, slijedi da je

$$z^T(q + Mz) = z^{*T}(q + Mz^*) = 0$$

jer je z^* dano rješenje linearne zadaće komplementarnosti.
(d) Hipoteza ovog dijela uključuje onu iz (c). Željeni zaključak sada slijedi iz pretpostavke simetričnosti matrice M i uvjeta $(M + M^T)(z - z^*) = 0$ dana u definiciji skupa rješenja P. □

Iz (d) vidimo da linearna zadaća komplementarnosti povezana sa simetričnom pozitivno semidefinitnom matricom ima svojstvo da je $w = q + Mz$ konstantno za sva rješenja z. Prema tome, kažemo da su rješenja takvog problema $w - jedinstvena$. Gornji teorem, točnije (b) dio, daje i karakterizaciju konveksnosti skupa rješenja. Naime, skup rješenja linearne zadaće komplementarnosti povezane s pozitivno semidefinitnom matricom je poliedarski skup, a (3.14) vrijedi za bilo koja dva rješenja z^1 i z^2. Štoviše, pokaže se da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne

(i) skup rješenja (LCP) je konveksan,

(ii) za bilo koja dva rješenja (LCP) z^1 i z^2 vrijedi (3.14).

U gornjim rezultatima smo se ograničili uglavnom na pozitivno definitne i semidefinitne matrice, ali ako odemo korak dalje i pogledamo **P**-matrice, zaključci će biti nešto jači.

Definicija 3.3.8. *Matricu $M \in M_n(\mathbf{R})$ nazivamo* **P** ***-matricom*** *ako su sve njene glavne minore pozitivne. Klasu takvih matrica označavamo s* **P**.

Očito, ako je M **P**-matrica, onda su i sve njene glavne podmatrice, uključujući i njihove transponirane matrice, **P**-matrice. Simetrična matrica je pozitivno definitna ako i samo ako pripada **P**-klasi. Ali ekvivalencija općenito ne vrijedi ako ispustimo pretpostavku simetrije. Ipak, iz teorema koji slijedi i Teorema 3.3.4 vidjet ćemo da svaka pozitivno definitna matrica pripada **P**-klasi.

Teorem 3.3.9. *Matrica $M \in M_n(\mathbf{R})$ je* **P***-matrica ako i samo ako linearna zadaća komplementarnosti ima jedinstveno rješenje za sve vektore $q \in \mathbf{R}^n$.*

Dokaz. Vidi [1], str. 148–149. □

Gornji teorem također pokazuje da ako je matrica M **P**-matrica, tada je jedinstveno rješenje linearne zadaće komplementarnosti također jedinstveno rješenje zadaće kvadratičnog programiranja (3.6). Kao što smo već spomenuli, ako M nije pozitivno semidefinitna matrica, funkcija cilja u (3.6) općenito nije konveksna.

3.4 Algoritmi za rješavanje linearne zadaće komplementarnosti

Za rješavanje linearne zadaće komplementarnosti razvijeni su brojni algoritmi od kojih je možda najpoznatiji Lemkeov. Nedostatak Lemkeove metode je u tome što može imati eksponencijalno vrijeme izvođenja algoritma, što ga čini neefikasnim za velike probleme. Ali postoje i metode za rješavanje linearne zadaće komplementarnosti s polinomijalnim vremenom izvođenja algoritma. U ovom radu ćemo objasniti Lemkeov algoritam i spomenuti metodu unutrašnje točke.

Lemkeov algoritam

Riječ je o metodi komplementarnog pivotiranja koja je naziv dobila po tome što se ulazna varijabla odabire po pravilu komplenentarnog pivota, odnosno varijabla koja ulazi u bazični vektor je komplement varijable koja je izašla u prethodnom koraku. Treba još naglasiti da je ova metoda analogon simpleks metode koju smo koristili za rješavanje problema linearnog programiranja.

Na kraju prvog odjeljka ovog poglavlja napisali smo linearnu zadaću komplementarnosti u formi koja će nam sada biti korisna, riječ je o (3.1). Međutim, za rješavanje zadaće metodom komplementarnog pivotiranja trebamo uvesti umjetnu varijablu z_0 povezanu s vektorom d pa će novi sustav biti

$$\begin{aligned} z^T w &= 0 \\ w &= q + dz_0 + Mz \\ w \geq 0,\ z \geq 0,&\ z_0 \geq 0, \end{aligned}$$

a označavat ćemo ga s (q, d, M).

Sada smo u mogućnosti prikazati Lemkeov algoritam komplementarnog pivotiranja:

1. korak *Inicijalizacija* Promatramo LCP (q, d, M). Ako $q \geq 0$, zaustaviti se: $z = 0$ rješava LCP (q, d, M). Inače, neka je $\overline{z_0}$ najmanja vrijednost umjetne varijable z_0 za koju $w = q + dz_0 \geq 0$. Označimo s w_r (jedinstveno, uz pretpostavku nedegeneracije) komponentu od w koja je jednaka nuli kada $z_0 = \bar{z}_0$. Pivot $\langle w_r, z_0 \rangle$. Nakon ovog pivota, komplementarne varijable w_r i z_r su obje nebazične. Odaberemo za ulaznu varijablu z_r, komplement od w_r.

2. korak *Određivanje blokirajuće varijable (ako postoji)* Ako stupac ulazne varijable ima barem jedan negativan unos, koristimo test minimalnog omjera kako bismo odredili postoji li bazična varijabla koja blokira rast ulazne varijable. Ako takve nema, zaustaviti se.

3. korak *Pivotiranje* Ulazna varijabla je blokirana. Ako je ulazna varijabla blokirana sa z_0, tada pivot

$$\langle z_0, \textit{ulazna varijabla} \rangle,$$

zaustaviti se: našli smo rješenje. Ako neka druga varijabla blokira ulaznu, tada pivot

$$\langle blokirajuća\ varijabla, ulazna\ varijabla\rangle.$$

Vratimo se na 2. korak koristeći komplement upravo blokirane varijable kao nove ulazne varijable.

Napomena 3.4.1. *(i) Za vektor d se često koristi vektor čije komponente su sve* 1. *Jasno, vektor d možemo zadati i na neki drugi način, ali to može drastično utjecati na konačni rezultat.*

(ii) Nakon inicijalnog pivota koji umjetnu varijablu mijenja u baziČnu, postoji samo jedan komplementarni par nebazičnih varijabli, inicijalno w_r i z_r su takav par. Općenito, nebazične komplementarne varijable čine nebazični par.

(iii) Nakon početnog rasta z_0 na vrijednost $\overline{z_0}$, sve bazične varijable su nenegativne i takve trebaju ostati. Svaka od njih je u mogućnosti blokirati ulaznu varijablu. Općenito, nakon provođenja pivotnog koraka, nova ulazna varijabla je komplement varijable koja je upravo postala nebazična.

(iv) Interpretacija nepostojanja blokirajuće varijable, što smo mogli vidjeti u 2. koraku, je dosta opširna tema u koju nismo u mogućnosti u ovom radu ulaziti. Ali glavna ideja je da postoje određene klase matrica za koje nepostojanje blokirajuće varijable povlači nedopustivnost dane linearne zadaće komplementarnosti.

(v) U 2. koraku koristimo test minimalnog omjera kako bismo osigurali da nova baza dobivena nakon pivotnog koraka također bude dopustiva.

(vi) Općenito, za pivotni korak kažemo da je degeneriran ako je minimalni omjer θ u tom koraku jednak 0, *a nedegeneriran ako je θ pozitivan i konačan.*

Teorem 3.4.2. *Ako primjenimo Lemkeov algoritam na nedegeneriranu linearnu zadaću komplementarnosti (q,d,M), on će završiti u konačno mnogo koraka ili sa sekundarnim pravcem ili s komplementarno dopustivim rješenjem za (q,d,M), a time i za zadaću (q,M).*

Dokaz. Vidi [1], str. 274. □

Napomena 3.4.3. *U prethodnom teoremu smo spomenuli da algoritam može završiti sekundarnim pravcem. Ako je z_0 bazični vektor, a pivotni stupac nema pozitivnih unosa, algoritam staje jer nije u mogućnosti riješiti linearnu zadaću komplementarnosti. Ovu vrstu prekida zovemo pravcem završetka ili sekundarnim pravcem i on se razlikuje od inicijalnog pravca s kojim algoritam započinje.*

Primjer 3.4.4 (Numerički primjer - linearna zadaća komplementarnosti)**.**

Pomoću gornjeg algoritma tražimo rješenje linearne zadaće komplementarnosti u kojoj

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ te } q = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

Dakle, tražimo z takav da vrijedi:

$$\begin{aligned} z^T w &= 0 \\ w &\geq 0 \\ z &\geq 0, \end{aligned}$$

gdje $w = q + Mz$.

Promatramo sljedeću linearnu zadaću komplementarnosti:

w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	q
1	0	0	-1	0	0	-8
0	1	0	-2	-1	0	-12
0	0	1	-2	-2	-1	-14

Nakon uvođenja umjetne varijable z_0 tablica postaje:

w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	q
1	0	0	-1	0	0	-1	-8
0	1	0	-2	-1	0	-1	-12
0	0	1	-2	-2	-1	**-1**	-14

Najnegativniji q_i je q_3. Kao što je opisano u koraku inicijalizacije, pivotni stupac je stupac z_0, a pivotni redak je upravo taj u kojem je q najnegativniji. U gornjoj tablici smo pivotni element podebljali kako bi bio lakše uočljiv. Nakon transformacije dobijemo:

Bazična varijabla	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	q	*Omjer*
w_1	1	0	-1	1	2	1	0	6	$\frac{6}{1}$
w_2	0	1	-1	0	1	**1**	0	2	$\frac{2}{1}$
z_0	0	0	-1	2	2	1	1	14	$\frac{14}{1}$

Po pravilu komplementarnog pivota z_3 odabiremo kao ulaznu varijablu jer je u prošlom koraku w_3 izašao iz baznog vektora. Pomoću testa minimalnog omjera (između q i z_3), vidimo da će w_2 izaći iz baznog vektora.

Bazična varijabla	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	q	*Omjer*
w_1	1	-1	0	1	1	0	0	4	$\frac{4}{1}$
z_3	0	1	-1	0	**1**	1	0	2	$\frac{2}{1}$
z_0	0	-1	0	2	1	0	1	12	$\frac{12}{1}$

Kako je u prošlom koraku w_2 izašla iz bazičnog vektora, z_2 nam je sad bila ulazna varijabla. Uspoređujući omjere između q i z_2, dolazimo do zaključka da je nova blokirajuća varijabla z_3.

Bazična varijabla	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	q	*Omjer*
w_1	1	-2	**1**	1	0	-1	0	2	$\frac{2}{1}$
z_2	0	1	-1	0	1	1	0	2	
z_0	0	-2	1	2	0	-1	1	10	$\frac{10}{1}$

Kako je nova ulazna varijabla w_3, gledamo omjere između q i w_3. Dolazimo do zaključka da je nova blokirajuća varijabla w_1.

Bazična varijabla	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	q	*Omjer*
w_3	1	-2	1	**1**	0	-1	0	2	$\frac{2}{1}$
z_2	1	-1	0	1	1	0	0	4	$\frac{4}{1}$
z_0	-1	0	0	1	0	0	1	8	$\frac{8}{1}$

U ovom koraku nam je ulazna varijabla bila z_1 pa smo, testirajući minimalni omjer između q i z_1, uočili da će se pivotni element nalaziti u retku u kojem je w_3 te u stupcu u kojem leži z_1.

Bazična varijabla	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	q	*Omjer*
z_1	1	-2	1	1	0	-1	0	2	
z_2	0	1	-1	0	1	**1**	0	2	$\frac{2}{1}$
z_0	-2	2	-1	0	0	1	1	6	$\frac{6}{1}$

Kako je w_3 izašao iz bazičnog vektora u prošlom koraku, njegov komplement z_3 je u ovom koraku bio ulazna varijabla. Pomoću testa minimalnog omjera saznajemo da je nova blokirajuća varijabla z_2.

Bazična varijabla	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	q	*Omjer*
z_1	*1*	*-1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*4*	
z_3	*0*	***1***	*-1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*2*	$\frac{2}{1}$
z_0	*-2*	*1*	*0*	*0*	*-1*	*0*	*1*	*4*	$\frac{4}{1}$

Kao i do sada, komplement blokirajuće varijable iz prošlog koraka, dakle w_2, je bio varijabla koja ulazi u bazični vektor. U ovom koraku je nova blokirajuća varijabla z_3.

Bazična varijabla	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	q	*Omjer*
z_1	*1*	*0*	*-1*	*1*	*2*	*1*	*0*	*6*	
w_2	*0*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*2*	
z_0	*-2*	*0*	***1***	*0*	*-2*	*-1*	*1*	*2*	$\frac{2}{1}$

Uspoređujući stupac nove ulazne varijable, w_3, s konstantnim stupcem, q, vidimo da je z_0 nova blokirajuća varijabla.

Bazična varijabla	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	q
z_1	*-1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*8*
w_2	*-2*	*1*	*0*	*0*	*-1*	*0*	*1*	*4*
w_3	*-2*	*0*	*1*	*0*	*-2*	*-1*	*1*	*2*

Kako je sadašnja baza komplementarno dopustiva baza, algoritam staje. Rješenje ove linearne zadaće komplementarnosti je:

$$w = (0, 4, 2) \text{ te } z = (8, 0, 0).$$

Primjer 3.4.5 (Numerički primjer - zadaća kvadratičnog programiranja)**.**
Promatramo zadaću kvadratičnog programiranja

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{5}{2}x_1^2 - 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_2x_3 + \frac{5}{2}x_3^2 + 2x_1 - 35x_2 - 47x_3 \\ \textit{uz ograničenje} \quad & x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

koju želimo transformirati u linearnu zadaću komplementarnosti sa simetričnom pozitivno semidefinitnom matricom M i primjeniti Lemkeov algoritam.

Iz gornje zadaće lako iščitamo da je matrica $Q = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ *te vektor* $c^T = (2, -35, -47)$. *Kao što smo objasnili u zadnjem odjeljku prošlog poglavlja, ako zadaća* *konveksnog kvadratičnog programiranja ima jedino ograničenje nenegativnosti na varijablu x i ako je matrica Q simetrična, matricu M možemo poistovjetiti s matricom Q, a vektor q s vektorom c. Odnosno, riješavamo linearnu zadaću komplementarnosti (c, Q). Kao i u prošlom primjeru, uvodimo umjetnu varijablu z_0 povezanu s vektorom $d = (1, 1, 1)$.*

w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	q
1	0	0	-5	2	1	-1	2
0	1	0	2	-4	-3	-1	-35
0	0	1	1	-3	-5	**-1**	-47

Najnegativniji q_i je q_3. U koraku inicijalizacije, pivotni stupac je stupac z_0, a pivotni redak je upravo taj u kojem je q najnegativniji. U gornjoj tablici smo pivotni element podebljali kako bi bio lakše uočljiv. Nakon transformacije dobijemo:

Bazična varijabla	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	q	Omjer
w_1	1	0	-1	-6	5	6	0	49	$\frac{49}{6}$
w_2	0	1	-1	1	-1	**2**	0	12	$\frac{12}{2}$
z_0	0	0	-1	-1	3	5	1	47	$\frac{47}{5}$

Po pravilu komplementarnog pivota z_3 odabiremo kao ulaznu varijablu jer je u prošlom koraku w_3 izašao iz baz̆ičnog vektora. Pomoću testa minimalnog omjera (između q i z_3), vidimo da je w_2 blokirajuća varijabla.

Bazična varijabla	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	q	Omjer
w_1	1	-3	2	-9	**8**	0	0	13	$\frac{13}{8}$
z_3	0	$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{2}$	1	0	6	
z_0	0	-$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{11}{2}$	0	1	17	$\frac{17}{\frac{11}{2}}$

Kako je u prošlom koraku w_2 izašla iz baz̆ičnog vektora, z_2 nam je sad bila ulazna varijabla. Uspoređujući omjere između q i z_2, dolazimo do zaključka da je nova blokirajuća varijabla w_1.

Bazična varijabla	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	q	Omjer
z_2	$\frac{1}{8}$	-$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	-$\frac{9}{8}$	1	0	0	$\frac{13}{8}$	
z_3	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	-$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{16}$	0	1	0	$\frac{109}{16}$	
z_0	$-\frac{11}{16}$	-$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{43}{16}$	0	0	1	$\frac{129}{16}$	$\frac{\frac{129}{16}}{\frac{43}{16}}$

Kako je nova ulazna varijabla z_1, gledamo omjere između q i z_1. Vidimo da je u stupcu z_1 jedini pozitivni unos za redak z_0, odnosno pivot je $\langle z_0, z_1\rangle$.

Bazična varijabla	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	q
z_2	$-\frac{7}{43}$	$-\frac{24}{43}$	$\frac{13}{43}$	*0*	*1*	*0*	$\frac{18}{43}$	*5*
z_3	$\frac{2}{43}$	$\frac{13}{43}$	$-\frac{16}{43}$	*0*	*0*	*1*	$-\frac{1}{43}$	*7*
z_1	$-\frac{11}{43}$	$-\frac{7}{43}$	$\frac{2}{43}$	*1*	*0*	*0*	$\frac{16}{43}$	*3*

Kako je sadašnja baza komplementarno dopustiva baza, algoritam staje. Rješenje ove linearne zadaće komplementarnosti je $z = (3, 5, 7)$, odnosno rješenje početne zadaće kvadratičnog programiranja je

$$x = (3, 5, 7).$$

Osim metode pivotiranja koja je neefikasna za velike zadaće, često se koriste iterativne metode, od kojih je najpoznatija metoda unutrašnje točke. Metoda unutrašnje točke se temelji na algoritmima korištenim za rješavanje linearnih programa u polinomijalnom vremenu izvođenja. No, u tom slučaju matrica M mora biti pozitivno semidefinitna.

Bibliografija

[1] R. W. Cottle, J. S. Pang, R. E. Stone, *The linear complementarity problem*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2009

[2] K. G. Murty, *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming*, 1997

[3] M. L. Balinski, R. W. Cottle, *Complementarity and fixed point problems*, NH, 1978

[4] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, Awiley-Interscience Publication, 1981

[5] C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra Book and Solutions Manual*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2000

[6] Z. Dostal, *Optimal Quadratics Programming Algorithms*, Springer, 2009

[7] Q. L. Zhi, Q. Zhang, *On the Extensions of Frank-Wolfe Theorem* Econometric Institute Report No. 9748/A, 1997

[8] I. Griva, S. G. Nash, A. Sorer, *Linear and Nonlinear Optimization*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2009

[9] C. A. Floudas, V. Visweswaran, *Quadratic Optimization*, Princeton, New Jersey

[10] M. Frank, P. Wolfe, *An algorithm for quadratic programming*, Naval Research Logistic Quarterly 3, 1956

[11] P. A. Jensen, J. F. Bard, *Nonlinear Programming Methods, Quadratic Programming*, Operations Research Models and Methods

[12] D. Olsson, *The linear complementarity problem: Methods and applications*, KTH Royal Institute of Technology, dostupno na `http://www.math.kth.se/optsyst/grundutbildning/kurser/SF2827/olsson.pdf` (kolovoz 2014.)

[13] P. Pandžić, J. Tambača, *Integrali funkcija više varijabli*, dostupno na `http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/difraf/dif/p_o16.pdf` (ožujak 2014.)

Sažetak

Linearna zadaća komplementarnosti je sjajan kontekst u kojem se mogu prikazati pojmovi iz linearne algebre i teorije matrica pa smo se na početku rada dotakli osnovnih pojmova i rezultata vezanih za matrice, konkretno pozitivno definitne i semidefinitne matrice. Osim toga, prisjetili smo se još pokojeg rezultata o konveksnim kvadratičnim funkcijama koji su nam pomogli u razumijevanju zadaće kvadratičnog programiranja.

Prije uspostavljanja veze između zadaće kvadratičnog programiranja i linearne zadaće komplementarnosti, pozabavili smo se uvjetima optimalnosti prvog reda, odnosno izveli smo Karush-Kuhn-Tuckerove uvjete koji su ključno vezivo za izgradnju mosta među spomenutim zadaćama.

Kako mnogo toga u linearnoj zadaći komplementarnosti počiva na ideji komplementarnog konusa, bilo je neizbježno zastati i prokomentirati zadaću u terminima konusa te demonstrirati to primjerom. Glavni dio poglavlja o linearnoj zadaći komplementarnosti je svakako rasprava o egzistenciji i broju rješenja. Isprva smo se bazirali na klasu pozitivno definitnih i semidefinitnih matrica te pokazali u slučaju pozitivno semidefinitne matrice M da je zadaća rješiva ako je dopustiva, a u slučaju pozitivno definitnh matrica je k tome rješenje i jedinstveno za svaki vektor q. Osim te dvije klase, govorili smo i o klasama **S**-matrica i **P**-matrica. Ova posljednja nam je bila posebno zanimljiva jer smo za tu klasu mogli dati teorem koji govori da je jedinstveno rješenje linearne zadaće komplementarnosti također jedinstveno rješenje zadaće kvadratičnog programiranja. Na samom kraju rada pozabavili smo se algoritmima za rješavanje linearne zadaće komplementarnosti direktnim metodama te pokazali na primjerima kako možemo riješti zadaću linearne komplementarnosti te zadaću kvadratičnog programiranja koristeći Lemkeov algoritam.

Summary

The linear complementarity problem is an excellent context to illustrate concepts of linear algebra and matrix theory. At the beginning we introduced some basic terms and results regarding matrix theory, especially positive definite and semi-definite matrices. Moreover, we mentioned some results concerning convex quadratic functions as they are essential for understanding of quadratic program.

Before establishing the connection between quadratic program and linear complementarity problem, we defined first-order optimality conditions. More precisely, we derived Karush-Kuhn-Tucker conditions that are integral part of building the connection between aforementioned problems.

In the third chapter, we introduced the concept of complementarity cones as linear complementarity problem rests on that idea. We demonstrated that by the example. Main part of the chapter is based on presenting the results pertaining to the existence and multiplicity of solutions to the linear complementarity problem. At first, we were based only on the class of positive definite and positive semi-definite matrices. In the case of positive semi-definite matrices we showed an important result: if the linear complementarity problem is feasible, then it's solvable. In the case of positive definite matrices, the linear complementarity problem has a unique solution. Moreover, we mentioned the classes of S-matrices and P-matrices. Class of P-matrices has an interesting property as the unique solution of linear complementarity problem characterized by P-matrix is also the unique solution of the quadratic program. At the end, we developed Lemke's algorithm for solving the linear complementarity problem and made some examples with linear complementarity problem and quadratic program.

Životopis

Rođena sam 13. prosinca 1989. godine u Vinkovcima. Pohađala sam OŠ Augusta Cesarca u Ivankovu, a potom od 2004. godine Gimnaziju Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima, opći smjer. Po završetku srednješkolskog obrazovanja upisujem Prirodoslovno - matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Matematički odsjek, gdje sam 2012. godine stekla diplomu sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike. Iste godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika, također na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu.