SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Karmen Grizelj

REPREZENTACIJE POLUPROSTIH LIEJEVIH ALGEBRI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Pavle Pandžić

Zagreb, rujan, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Borisu i Denisu, velikim ljubiteljima Liejevih algebri

Sadržaj

Uvod

Liejeve algebre su važne i kao algebarska struktura, ali i u nekim proučavanjima diferencijalne geometrije i topologije. Svrha uvodnog dijela ovog rada je predočiti na koji način su Liejeve algebre predmet interesa i drugih grana matematike. Zato je potrebno uvesti pojam Liejeve grupe i pokazati blisku vezu Liejeve grupe sa Liejevom algebrom.

Glavni dio rada usmjeren je na same Liejeve algebre, definiciju i određene vrste Liejevih algebri. Nakon što je dana motivacija za proučavanje poluprostih Liejevih algebri, prelazi se na proučavanje njihovih reprezentacija. Dokazuje se nekoliko važnih teorema koji su priprema za dokaz rastava konačnodimenzionalnih reprezentacija poluprostih Liejevih algebri na direktnu sumu ireducibilnih podreprezentacija.

Nakon najavljenog rastava izvedeni rezultati se koriste na konkretnim primjerima Liejevih algebri; primjeri će biti matrični, obzirom da se u primjenama najčešće javljaju upravo matrične Liejeve algebre.

Poglavlje 1

Liejeve algebre i reprezentacije

1.1 Liejeve grupe

Definicija 1.1.1. *Liejeva grupa je skup* G *koji je grupa i* $\mathcal{C}^\infty$*-mnogostrukost takav da su množenje* $G \times G \to G$ *i invertiranje* $G \to G$ *funkcije klase* $\mathcal{C}^\infty$ *.*

Definicija 1.1.2. *Homomorfizam Liejevih grupa je diferencijabilni homomorfizam grupa. Liejeva podgrupa* H *Liejeve grupe* G *je podgrupa koja je zatvorena mnogostrukost u smislu da vrijedi:* $H \subset G$ *i* H *nasljeđuje strukturu mnogostrukosti od* G*.*

Primjer 1.1.3. (Primjeri Liejevih grupa)

$\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$**, opća linearna grupa**

Grupa svih regularnih matrica sa realnim koeficijentima ili $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$
Ova grupa je diferencijalna mnogostrukost kao otvoren podskup vektorskog prostora $M_n(\mathbb{R})$*.*
Diferencijabilnost množenja je očita, a diferencijabilnost invertiranja slijedi iz Cramerove formule invertiranja:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})}\tilde{A}$$

i činjenice da su matrični elementi od $\tilde{A}$*, adjunkte matrice* A*, determinante koje su sume produkata matričnih elemenata.*

$\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$**, specijalna linearna grupa**

Grupa svih matrica s realnim koeficijentima determinante 1 ili grupa svih automorfizama od $\mathbb{R}^n$ *koji čuvaju volumen*

$B_n(\mathbb{R})$

Grupa gornjetrokutastih matrica ili grupa automorfizama od $\mathbb{R}^n$ koji čuvaju zastavu oblika

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{R}^n,$$

gdje je $V_i = \operatorname{span}\{e_1, e_2, ..., e_i\}, i = 1, ..., n,$ a $e_1, ..., e_n$ su vektori kanonske baze za $\mathbb{R}^n$.

Općenito, zastava je niz potprostora istog vektorskog prostora (V_i) takav da vrijedi $V_i \subsetneqq V_{i+1}, \forall i$. Ukoliko dodatno vrijedi $\dim V_{i+1} = \dim V_i + 1, \forall i$, reći ćemo da je zastava potpuna, inače govorimo o parcijalnoj zastavi.

1.2 Liejeve algebre

Definicija 1.2.1. *Vektorski prostor $\mathfrak{g}$ sa bilinearnom operacijom $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(x, y) \mapsto [x, y]$ koja zadovoljava*

(L1) $[x, x] = 0, \ \forall x \in \mathfrak{g}$

(L2) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \ \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$

naziva se Liejeva algebra.

Uvjet (L2) obično se naziva **Jacobijev identitet**. Za $x, y \in \mathfrak{g}$ proizvoljne primjenom (L1) na $x + y \in \mathfrak{g}$ koristeći bilinearnost dobivamo

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$$

Dakle,

$$[x, y] = -[y, x], \ \forall x, y \in \mathfrak{g} \tag{1.1}$$

i zbog toga se svojstvo (L1) obično zove **antikomutativnost**. Ova jednakost povlači (L1) u slučaju da polje nad kojim je Liejeva algebra nema karakteristiku 2. Množenje $(x, y) \mapsto [x, y]$ obično se zove **komutator**. Za $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre definiramo homomorfizam Liejevih algebri $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ kao homomorfizam vektorskih prostora koji zadovoljava $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)], \forall x, y \in \mathfrak{g}$. Monomorfizam (epimorfizam, izomorfizam) se definira kao homomorfizam Liejevih algebri koji je monomorfizam (epimorfizam, izomorfizam) vektorskih prostora.

Liejeva podalgebra Liejeve algebre je vektorski potprostor zatvoren na komutator. Ako je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem $\mathbb{F}$, onda je za $x \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ $\{\alpha x, \alpha \in \mathbb{F}\}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ sa trivijalnim komutatorom zbog (L1).

Neka je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Ako vrijedi $[g, h] \in \mathfrak{h}, \forall g \in \mathfrak{g}, \forall h \in \mathfrak{h}$ reći ćemo da je $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Nema potrebe za definiranjem lijevog i desnog ideala jer je zbog antikomutativnosti komutatora ekvivalentno biti lijevi i desni ideal.
Ako vrijedi $[x, y] = 0, \forall x, y \in \mathfrak{g}$ kažemo da je $\mathfrak{g}$ **Abelova** ili **komutativna** Liejeva algebra. **Centar** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ definiramo kao $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}$. Dakle $\mathfrak{g}$ će biti Abelova ako i samo ako je $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Centar je očito ideal u $\mathfrak{g}$.

Primjer 1.2.2. *Ako je A asocijativna algebra, uz $[x, y] := xy - yx, x, y \in A$ ona postaje Liejeva algebra. Pritom xy i yx označavaju produkte u odnosu na zadano množenje u A.*
Neka je sada V vektorski prostor. End(V)*, skup svih homomorfizama vektorskih prostora $f : V \to V$ čini asocijativnu algebru pa na upravo opisan način čini i Liejevu algebru. Nju obično označavamo sa $\mathfrak{gl}(V)$ i zovemo **opća Liejeva algebra**. Liejevu podalgebru od $\mathfrak{gl}(V)$ zovemo **linearnom Liejevom algebrom**.*

Važni pojmovi u teoriji Liejevih algebri su rješive i nilpotentne Liejeve algebre. Da bismo definirali te pojmove prvo trebamo dva niza ideala u danoj Liejevoj algebri. Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra. **Izvedeni niz** ideala u $\mathfrak{g}$ definiramo na način

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g} \\
&\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\
&\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] \\
&\vdots \\
&\mathfrak{g}^{(i)} = [\mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i-1)}], i \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Slično, **centralni silazni niz** ideala u $\mathfrak{g}$ definiramo sa

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{g}^{0} = \mathfrak{g} \\
&\mathfrak{g}^{1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\
&\mathfrak{g}^{2} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{1}] \\
&\vdots \\
&\mathfrak{g}^{i} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}], i \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Definicija 1.2.3. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra. Kažemo da je $\mathfrak{g}$ **rješiva** ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\mathfrak{g}^{(n)} = \{0\}$.*
*$\mathfrak{g}$ je **nilpotentna** ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\mathfrak{g}^{n} = \{0\}$.*

Korisno je odmah primijetiti da je svaki ideal u rješivoj Liejevoj algebri i sam rješiv, suma rješivih ideala također rješiva i kvocijent rješive Liejeve algebre po bilo kojem idealu je opet rješiva Liejeva algebra.

Definicija 1.2.4. *Liejevu algebru* $\mathfrak{g}$ *zovemo* ***prosta*** *Liejeva algebra ako su jedini ideali u* $\mathfrak{g}$ $\{0\}$ *i* $\mathfrak{g}$ *i vrijedi* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \neq \{0\}$.

Uvjet $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \neq \{0\}$ jednostavno znači da $\mathfrak{g}$ nije Abelova i prvenstveno služi tome da jednodimenzionalne Liejeve algebre ne promatramo kao proste.
Za kraj ćemo definirati najvažniji pojam vezan uz Liejeve algebre, barem što se tiče teme ovoga rada.

Definicija 1.2.5. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *Liejeva algebra.* ***Radikal*** *od* $\mathfrak{g}$, $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$, *je maksimalni rješivi ideal u* $\mathfrak{g}$. *Ako je* $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ *i* $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g} = \{0\}$ *kažemo da je* $\mathfrak{g}$ ***poluprosta*** *Liejeva algebra.*

Napomenimo samo da je definicija dobra jer za svaku Liejevu algebru postoji jedinstveni maksimalni rješivi ideal, dan je kao suma svih rješivih ideala u danoj Liejevoj algebri. Ovo će slijediti iz propozicije 2.3.1. Liejeve algebre koje ćemo proučavati su one konačnodimenzionalne, dakle takve da su konačnodimenzionalne kao vektorski prostor. Zato od sada nadalje Liejeva algebra pretpostavlja konačnu dimenziju.

1.3 Liejeva grupa i pridružena Liejeva algebra

Liejeva grupa je objekt kod kojega moramo istovremeno proučavati algebru, topologiju i geometriju, što može biti jako komplicirano. Liejeva algebra je čisto algebarski pojam, barem gledajući njenu definiciju. Ono što želimo je Liejevoj grupi pridružiti Liejevu algebru na način da ne gubimo informacije o grupi kao mnogostrukosti.
Za povezanu Liejevu grupu G vrijedi da svaka okolina jedinice generira G. Zato je za Liejeve grupe G i H, pri čemu je G povezana, svaki homomorfizam $\rho : G \to H$ jedinstveno određen na proizvoljnoj okolini jedinice. Može se pokazati da vrijedi i više: uz gornje oznake homomorfizam ρ je jedinstveno određen diferencijalom $d\rho_e : T_eG \to T_eH$. Zanima nas koja su preslikavanja među ovim vektorskim prostorima zapravo oblika diferencijala homomorfizma Liejevih grupa.
Za početak trebamo malo zakomplicirati definiciju homomorfizma da bismo ga mogli dovesti u vezu sa diferencijalom.
Diferencijabilno preslikavanje Liejevih grupa $\rho : G \to H$ je homomorfizam Liejevih algebri ako poštuje djelovanje grupe na samu sebe lijevim množenjem. To znači da, ako za svaki $g \in G$ označimo sa $m_g : G \to G$ množenje sa g, onda će ρ biti takav da

dijagram

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho} & H \\ {\scriptstyle m_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m_{\rho(g)}} \\ G & \xrightarrow{\rho} & H \end{array}$$

komutira.
Problem kod preslikavanja m_g je taj što za $g \neq e$ on nema fiksnih točaka koje su nam potrebne za pridruživanje operacija na tangencijalnom prostoru u točki g. Zato ćemo sada slično kao gore promatrati konjugaciju. Za fiksnu točku $g \in G$ definiramo $\Psi_g : G \to G$ sa $\Psi_g(h) = g \cdot h \cdot g^{-1}, \forall h \in G$. ρ je homomorfizam pa poštuje konjugaciju; dakle komutira dijagram

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho} & H \\ {\scriptstyle \Psi_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_{\rho(g)}} \\ G & \xrightarrow{\rho} & H \end{array}$$

Ovo znači da imamo prirodno preslikavanje $\Psi : G \to \mathrm{Aut(G)}, g \mapsto \Psi_g$. Sada je jasno da svaki Ψ_g fiksira jedinicu $e \in G$ pa definiramo $\mathrm{Ad(g)} = (d\Psi_g)_e : T_eG \to T_eG$. Napomenimo da na ovaj način dobivamo reprezentaciju $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut(T_eG)}$ koju zovemo **adjungirana reprezentacija grupe G**, iako pojam reprezentacije još nije definiran. Ovim pojmom ćemo se baviti kasnije. Sada možemo reći da ako je ρ homomorfizam, onda za svaki $g \in G$ djelovanje od $\mathrm{Ad}(g)$ na T_eG i djelovanje od $\mathrm{Ad}(\rho(g))$ na T_eH komutiraju sa $(d\rho)_e : T_eG \to T_eH$, odnosno da je dijagram

$$\begin{array}{ccc} T_eG & \xrightarrow{(d\rho)_e} & T_eH \\ {\scriptstyle Ad(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ad(\rho(g))} \\ T_eG & \xrightarrow{(d\rho)_e} & T_eH \end{array}$$

komutativan. Eksplicitno, za svaki vektor $v \in T_eG$ mora vrijediti

$$d\rho(\mathrm{Ad}(g)(v)) = \mathrm{Ad}(\rho(g))(d\rho(v))$$

Da bismo dobili nužan uvjet koji ovisi samo o diferencijalu u jedinici trebamo pogledati diferencijal preslikavanja Ad. Uočimo da je $\mathrm{Aut}(T_eG)$ otvoreni podskup od $\mathrm{End}(T_eG)$ i tangencijalni prostor u jedinici možemo prirodno identificirati sa $\mathrm{End}(T_eG)$. Sada uzimanjem diferencijala preslikavanja Ad dobivamo preslikavanje $\mathrm{ad} : T_eG \to \mathrm{End}(T_eG)$.

Sada smo dobili ono što smo htjeli, sada ovisimo isključivo o tangencijalnom prostoru, do na jednu identifikaciju. Sjetimo se da je ono što smo htjeli dobiti jedna Liejeva algebra. Vektorski prostor imamo, to je tangencijalni prostor T_eG, ali nam još nedostaje komutator zbog kojega smo i provodili ovu konstrukciju. Ovako definiran ad treba shvatiti malo drugačije jer ipak trebamo preslikavanje sa dva argumenta. Zato možemo pogledati sliku prve varijable, što je određeni endomorfizam, a onda pogledati njegovu evaluaciju u drugoj varijabli, dakle komutator definiramo na način

$$[X, Y] := \mathrm{ad}(X)(Y)$$

Lako se provjeri da smo na ovaj način zaista dobili Liejevu algebru.
Istaknimo rezultat koji daje smisao svemu što je do sada napravljeno:

Teorem 1.3.1. *Neka su G i H Liejeve grupe, gdje je G povezana i 1-povezana. Linearno preslikavanje $\varphi : T_eG \to T_eH$ je diferencijal nekog homomorfizma $\rho : G \to H$ ako i samo ako čuva komutator u smislu*

$$\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)], \quad \forall X, Y \in T_eG$$

Dokaz ovog teorema nalazi se u [1].
Za kraj navedimo teoreme koji se često nazivaju fundamentalni Liejevi teoremi koji u potpunosti opravdavaju uspostavljanje ovakve veze između Liejevih grupa i Liejevih algebri, iako svi rezultati ne pripadaju samom Lieju.

Teorem 1.3.2. *Liejeve grupe imaju izomorfne pridružene Liejeve algebre ako i samo ako su grupe lokalno izomorfne.*

Teorem 1.3.3. *Svaka konačnodimenzionalna Liejeva algebra nad $\mathbb{R}$ je Liejeva algebra pridružena nekoj Liejevoj grupi koja je 1-povezana i koja je jedinstveno određena do na izomorfizam.*

Ovaj teorem smo mogli izreći i na način da kažemo da su kategorije 1-povezanih Liejevih grupa i konačnodimenzionalnih realnih Liejevih algebri ekvivalentne. Za dokaz ovog teorema možemo zahvaliti Elieju Cartanu.

1.4 Reprezentacije

Definicija 1.4.1. *Neka je S neprazan skup i V vektorski prostor. Preslikavanje $\pi : S \to \mathrm{L}(V)$ zovemo* ***reprezentacija skupa S*** *na vektorskom prostoru V.*

Ovakva definicija je dobra ukoliko želimo općeniti pojam reprezentacije. Međutim, kada imamo posla sa određenim strukturama želimo da reprezentacija poštuje tu strukturu. Na primjer, ukoliko se radi o grupi želimo imati homomorfizam grupa, a kako $\mathrm{L}(V)$ ne čini grupu umjesto njega promatramo samo podskup $\mathrm{GL}(V)$ koji jest grupa. Obzirom da nas najviše zanimaju Liejeve algebre, izdvojimo njihove reprezentacije kao zasebnu definiciju.

Definicija 1.4.2. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem $\mathbf{k}$ i V vektorski prostor nad nekim proširenjem polja $\mathbf{k}$. **Reprezentacija Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$ na V je homomorfizam Liejevih algebri $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.*

Definicije iz ovog poglavlja će ipak dozvoljavati da S bude proizvoljan skup koliko god je to moguće, odnosno dokle god definicije budu imale smisla u općenitoj situaciji.
Primijetimo da gornje definicije ne ograničavaju dimenziju vektorskog prostora. Za to i nema razloga, definicija ima smisla i za $\dim V = \infty$. Ukoliko je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i reprezentaciju ćemo zvati konačnodimenzionalnom, a njenu dimenziju ćemo definirati kao $\mathrm{d}(\pi) := \dim(V)$.
Nas će u ovom radu zanimati samo konačnodimenzionalne reprezentacije pa možemo odmah sve buduće reprezentacije smatrati konačnodimenzionalnima.

Ako je $\pi : S \to \mathrm{L}(V)$ reprezentacija skupa S i W potprostor od V za kojeg je $\pi(s)(w) \in W, \forall s \in S, \forall w \in W$, kažemo da je $\pi_W : S \to \mathrm{L}(W)$ **podreprezentacija** reprezentacije π. Pritom su operatori $\pi_W(s)$ dani restringiranjem operatora $\pi(s)$ na W.
Ako je W maksimalan pravi potprostor od V sa gornjim svojstvom pripadnu podreprezentaciju zovemo **maksimalna podreprezentacija**. Ako je $\pi \neq 0$ i ne postoji pravi netrivijalni potprostor W od V za koji vrijedi $\pi(s)(w) \in W, \forall s \in S, \forall w \in W$, onda kažemo da je π **ireducibilna reprezentacija**.

Neka su sada $\pi : S \to \mathrm{L}(V_1)$ i $\rho : S \to \mathrm{L}(V_2)$ dvije proizvoljne reprezentacije skupa S. **Direktnu sumu** reprezentacija π i ρ definiramo na način: vektorski prostor na kojemu će biti reprezentacija je $V_1 \oplus V_2$. Neka je $\alpha : \mathrm{L}(V_1) \times \mathrm{L}(V_2) \to \mathrm{L}(V_1 \oplus V_2)$ prirodno preslikavanje dano koordinatnim djelovanjem. Tada je direktna suma reprezentacija π i ρ dana sa $\sigma : S \to \mathrm{L}(V_1 \oplus V_2)$, $\sigma(s) = \alpha(\pi(s), \rho(s))$.

Kažemo da je π **potpuno reducibilna** ili **poluprosta** reprezentacija ako je direktna suma ireducibilnih reprezentacija.
To znači da svaka podreprezentacija ima komplement u smislu: ako je $\pi : S \to \mathrm{L}(V)$

potpuno reducibilna reprezentacija i $\pi_W : S \to \mathrm{L}(W)$ njena podreprezentacija, onda postoji podreprezentacija $\pi_{W'} : S \to \mathrm{L}(W')$ takva da je $\pi = \pi_W \oplus \pi_{W'}$.

1.5 Derivacije

Definicija 1.5.1. *Neka je $\mathbb{F}$ polje. Vektorski prostor V nad $\mathbb{F}$ sa bilinearnim preslikavanjem $\cdot : V \times V \to V$ zovemo $\mathbb{F}$**-algebra**.*

Definicija 1.5.2. *Neka je V $\mathbb{F}$-algebra. **Derivacija** od V je linearno preslikavanje $\delta : V \to V$ koje zadovoljava **Leibnizovo pravilo** : $\delta(v \cdot w) = \delta(v) \cdot w + v \cdot \delta(w), \forall v, w \in V$.*

Skup svih derivacija od V čini vektorski potprostor od End(V) i obično se označava sa Der V. Ako je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad $\mathbb{F}$, onda je ona i $\mathbb{F}$-algebra pa možemo promatrati Der $\mathfrak{g}$. Neka su $\delta_1, \delta_2 \in$ Der $\mathfrak{g}$, $a, b \in \mathfrak{g}$ proizvoljni. Tada je zbog svojstva derivacije i bilinearnosti komutatora

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2][a, b] &= \delta_1\delta_2[a, b] - \delta_2\delta_1[a, b] \\
&= \delta_1([\delta_2(a), b] + [a, \delta_2(b)]) - \delta_2([\delta_1(a), b] + [a, \delta_1(b)]) \\
&= [\delta_1\delta_2(a), b] + [\delta_2(a), \delta_1(b)] + [\delta_1(a), \delta_2(b)] + [a, \delta_1\delta_2(b)] - [\delta_2\delta_1(a), b] \\
&\quad - [\delta_1(a), \delta_2(b)] - [\delta_2(a), \delta_1(b)] - [a, \delta_2\delta_1(b)] \\
&= [\delta_1\delta_2(a) - \delta_2\delta_1(a), b] + [a, \delta_1\delta_2(b) - \delta_2\delta_1(b)] \\
&= [[\delta_1, \delta_2](a), b] + [a, [\delta_1, \delta_2](b)]
\end{aligned}$$

pa je $[\delta_1, \delta_2] \in$ Der $\mathfrak{g}$, što znači da je Der $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.
Neka je sada x $\in \mathfrak{g}$. Definiramo $\operatorname{ad} x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ sa $\operatorname{ad} x(y) = [x, y], y \in \mathfrak{g}$. Zbog bilinearnosti komutatora dobili smo linearno preslikavanje. Pokažimo da smo na ovaj način dobili i derivaciju. Neka su y,z $\in \mathfrak{g}$ proizvoljni. Koristeći Jacobijev identitet imamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad} x[y, z] &= [x, [y, z]] = -[y, [z, x]] - [z, [x, y]] \\
&= [[x, y], z] - [y, -[x, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] \\
&= [\operatorname{ad} x(y), z] + [y, \operatorname{ad} x(z)]
\end{aligned}$$

Ove derivacije imaju svojstvo $[\operatorname{ad}(x), \operatorname{ad}(y)] = \operatorname{ad}[x, y], \forall x, y \in \mathfrak{g}$ pa skup svih derivacija ovog oblika čini Liejevu podalgebru od Der $\mathfrak{g}$ koju zovemo **unutarnje derivacije**. Sve ostale derivacije zovemo vanjskima.

Definicija 1.5.3. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra. Preslikavanje $\mathfrak{g} \to$ Der $\mathfrak{g}$, $x \mapsto \operatorname{ad} x$ zove se **adjungirana reprezentacija** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*

Pogledajmo što je jezgra ove reprezentacije. Iz definicije preslikavanja ad jasno je da je to točno centar od $\mathfrak{g}$. Ovo ima zanimljivu posljedicu: ako je $\mathfrak{g}$ poluprosta, onda je $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Podsjetimo, poluprosta Liejeva algebra nema netrivijalnih rješivih ideala, a centar Liejeve algebre je rješiv ideal pa tvrdnja slijedi iz definicije. To znači da je ova reprezentacija injektivna pa po prvom teoremu o izomorfizmu $\mathfrak{g}$ je izomorfna svojoj slici koja je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Dakle, svaka poluprosta Liejeva algebra je izomorfna nekoj linearnoj Liejevoj algebri.
Vrijedi i više, svaka Liejeva algebra je izomorfna nekoj linearnoj Liejevoj algebri. Taj rezultat je poznat kao Adov teorem, dokaz možete pronaći u [1].

1.6 Dekompozicija ireducibilne reprezentacije

Vratimo se sada ranije uvedenim klasama Liejevih algebri. Svrha ovog dijela je motivacija za proučavanje poluprostih Liejevih algebri i opravdanje toga da je razumijevanje poluprostih Liejevih algebri i njihovih reprezentacija ključno za razumijevanje reprezentacija proizvoljne Liejeve algebre.

Neka je $\mathfrak{g}$ proizvoljna Liejeva algebra i $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ njezin radikal. Prije dokaza jednostavne ali važne propozicije istaknimo jednu činjenicu vezanu za rješive Liejeve algebre: ako je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$ takav da su $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ rješive Liejeve algebre, onda je i $\mathfrak{g}$ rješiva. To će kasnije biti dio propozicije 2.3.1.

Propozicija 1.6.1. *$\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$ je poluprosta Liejeva algebra.*

Dokaz. Neka je I rješiv ideal u $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$. Tada je on oblika $\mathfrak{h}/\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$, gdje je $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$ koji sadrži $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$ i prema gornjoj napomeni je rješiv. Zbog definicije radikala sada mora biti $\mathfrak{h} = \mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$, a to točno znači da je I$= \{0\}$. Dakle $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$ nema netrivijalnih rješivih ideala pa je poluprosta Liejeva algebra.

□

Ovime smo dobili i jedan primjer poluproste Liejeve algebre. Sada, ako *lieg* nije rješiva Liejeva algebra, možemo promatrati egzaktan niz

$$0 \to \mathrm{Rad}\,\mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g} \to 0$$

pri čemu je prva Liejeva algebra rješiva, a posljednja poluprosta; taj niz se cijepa prema Levijevom teoremu. Ovo već daje naslutiti da će nam klase rješivih i poluprostih Liejevih algebri biti ključne za razumijevanje Liejevih algebri općenito. Formalizaciju ove veze ipak treba malo odgoditi. Prije toga trebamo rezultate nekoliko važnih teorema. Započnimo jednom kratkom lemom.

Lema 1.6.2. *Neka je $X \in \mathfrak{gl}(V)$ nilpotentan endomorfizam prostora V. Tada je $\operatorname{ad} X$ nilpotentan endomorfizam prostora $\mathfrak{gl}(V)$.*

Dokaz. Elementu X možemo pridružiti dva endomorfizma od End V, lijevo i desno množenje, dakle definiramo $\lambda_X, \rho_X : \text{End } V \to \text{End } V$ sa

$$\lambda_X(Y) = XY, \quad \rho_X(Y) = YX$$

Kako je X nilpotentan, nilpotentni su i λ_X i ρ_X. Sjetimo se kako definiramo komutator kod asocijativnih algebri pa $\operatorname{ad} X$ možemo prikazati kao $\operatorname{ad} X = \lambda_X - \rho_X$. λ_X i ρ_X očito komutiraju pa ako je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $X^k = 0$, onda je i $\lambda_X^k = \rho_X^k = 0$ pa po binomnoj formuli imamo

$$(\operatorname{ad} X)^{2k-1} = (\lambda_X - \rho_X)^{2k-1} = \sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^j \binom{2k-1}{j} \lambda_X^{2k-1-j} \rho_X^j = 0$$

jer za svaki $j \in \{0, ..., n\}$ imamo da je ili $j \geq k$ ili $2k - 1 - j \geq k$; dakle svaki od gornjih sumanada je jednak nuli. Sada imamo $(\operatorname{ad} X)^{2k-1} = 0$ pa je $\operatorname{ad} X$ nilpotentan. □

Teorem 1.6.3. (Friedrich Engel) *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}$(V) takva da je svaki $X \in \mathfrak{g}$ nilpotentan endomorfizam i $V \neq \{0\}$. Tada postoji $v \in V, v \neq 0$, takav da je $X(v) = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$.*

Dokaz. Indukcijom po $\dim \mathfrak{g}$. Slučaj $\dim \mathfrak{g} = 0$ je trivijalan. Ako je $\dim \mathfrak{g} = 1$, onda postoji nilpotentan endomorfizam $Y \in \mathfrak{g}$ koji razapinje $\mathfrak{g}$ kao vektorski prostor. Obzirom da je Y nilpotentan, postoji $v \in V$, $v \neq 0$, takav da je $Y(v) = 0$, ali tada vrijedi i $X(v) = 0$, $\forall X \in \mathfrak{g}$.

Za korak indukcije prvo želimo pokazati da $\mathfrak{g}$ sadrži ideal $\mathfrak{h}$ kodimenzije 1, to znači da je $\dim {}^{\mathfrak{g}}/_{\mathfrak{h}} = 1$. Neka je $\mathfrak{h}$ neka maksimalna prava podalgebra od $\mathfrak{g}$, pokažimo da je to traženi ideal. Pogledajmo adjungiranu reprezentaciju od $\mathfrak{g}$. Kako je $\mathfrak{h}$ podalgebra od $\mathfrak{g}$ adjungirano djelovanje $\operatorname{ad} \mathfrak{h}$ od $\mathfrak{h}$ na $\mathfrak{g}$ čuva $\mathfrak{h}$ i tako djeluje na ${}^{\mathfrak{g}}/_{\mathfrak{h}}$. Prema lemi 1.6.2. za svaki $X \in \mathfrak{h}$ $\operatorname{ad} X$ djeluje nilpotentno na $\mathfrak{g}$ pa onda i na ${}^{\mathfrak{g}}/_{\mathfrak{h}}$. Po induktivnoj pretpostavci postoji $\tilde{Y} \in {}^{\mathfrak{g}}/_{\mathfrak{h}}$ kojeg poništava $\operatorname{ad} X, \forall X \in \mathfrak{h}$. Ovo je, pak, ekvivalentno s tim da postoji $Y \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ takav da je $\operatorname{ad} X(Y) \in \mathfrak{h}, \forall X \in \mathfrak{h}$. Ali ovo točno znači da je potprostor od $\mathfrak{g}$ razapet sa $\mathfrak{h}$ i Y Liejeva podalgebra koja sadrži $\mathfrak{h}$ kao ideal kodimenzije 1; zbog maksimalnosti to je onda čitav $\mathfrak{g}$ i time smo dokazali tvrdnju.
Vratimo se sada indukciji. Primjenom pretpostavke indukcije na ideal $\mathfrak{h}$ kodimenzije

jedan čija egzistencija je upravo dokazana imamo da postoji $v \in V, v \neq 0$ takav da je $X(v) = 0, \forall X \in \mathfrak{h}$. Neka je W vektorski potprostor od V svih vektora s ovim svojstvom. Neka je $Y \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$. Obzirom da Y i $\mathfrak{h}$ razapinju $\mathfrak{g}$, dovoljno je pokazati da postoji $v \in W, v \neq 0$ takav da $Y(v) = 0$.
Za proizvoljne $w \in W, X \in \mathfrak{h}$ imamo

$$X(Y(w)) = Y(X(w)) + [X, Y](w) = 0$$

Prvi sumand je nula jer je $X(w) = 0$, pa je i $Y(X(w)) = 0$, a drugi zato što je $\mathfrak{h}$ ideal pa je $[X, Y] \in \mathfrak{h}$. Po definiciji od W dobili smo $Y(w) \in W$. w je bio proizvoljan pa zaključujemo da je W invarijantan na djelovanje od Y na V. Y je iz $\mathfrak{g}$ pa djeluje nilpotentno na V, posebno onda i na W. Po pretpostavci indukcije postoji $v \in W$ takav da $Y(v) = 0$, što smo i htjeli.

□

Ovaj teorem ima za posljedicu važnu karakterizaciju nilpotentnih Liejevih algebri, koju će neki autori zvati Engelovim teoremom umjesto gornjeg teorema. Ipak, najveći dio dokaza je već napravljen pa će ovaj rezultat biti u obliku korolara.

Korolar 1.6.4. $\mathfrak{g}$ *je nilpotentna Liejeva algebra ako i samo ako je* $\mathrm{ad}(X)$ *nilpotentan endomorfizam,* $\forall X \in \mathfrak{g}$.

Dokaz. Jedan smjer je lema 1.6.2., obrat indukcijom po dimenziji prostora. Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra u kojoj su svi elementi ad - nilpotentni. U slučaju $\mathfrak{g} = \{0\}$ tvrdnja je trivijalna pa pretpostavimo $\mathfrak{g} \neq \{0\}$. Sada $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ zadovoljava uvjete teorema 1.6.3. pa postoji $X \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ takav da je $\mathrm{ad}\, Y(X) = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}$, odnosno $[Y, X] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}$. To znači da je $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ netrivijalan pa $\mathfrak{g}/\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ ima strogo manju dimenziju od $\mathfrak{g}$; isto tako, $\mathfrak{g}/\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ se sastoji od ad-nilpotentnih elemenata pa možemo iskoristiti pretpostavku indukcije. Dakle $\mathfrak{g}/\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ je nilpotentna Liejeva algebra.
Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathfrak{g}^n \subset \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$, takav postoji jer je $\mathfrak{g}/\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ nilpotentna. Tada je $\mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^n] = [\mathfrak{g}, \mathrm{Z}(\mathfrak{g})] = \{0\}$ pa je i $\mathfrak{g}$ nilpotentna.

□

Napomena 1.6.5. *U posljednjoj tvrdnji gornjeg dokaza,* $\mathfrak{g}/\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ *nilpotentna* $\Rightarrow \mathfrak{g}$ *nilpotentna, nismo koristili dodatne pretpostavke na* $\mathfrak{g}$*, dakle tvrdnja vrijedi za proizvoljnu Liejevu algebru.*

Zanimljiva posljedica Engelovog teorema je da, uz uvjete teorema, postoji baza od V uz koju se svaki $X \in \mathfrak{g}$ može prikazati kao strogo gornjetrokutasta matrica. Neka je $\dim V = n$. Definiramo $v_1 = v$ i koristimo indukciju: Neka je $\tilde{V}$ kvocijent od V po potprostoru razapetom sa $\{v\}$, induktivno možemo naći bazu $\tilde{v}_2, ..., \tilde{v}_n$ za $\tilde{V}$

takvu da su matrice djelovanja od $\mathfrak{g}$ na $\tilde{V}$ strogo gornjetrokutaste. Pridruživanjem pripadnih vektora u V, v_i, vektorima $\tilde{v}_i$, $i \in \{2, ...n\}$, dobivamo traženu bazu.

Liejev teorem

Sada smo spremni za dokaz najvažnijeg teorema u ovom dijelu i njegove posljedice koja nam je motivacija za proučavanje reprezentacija poluprostih Liejevih algebri. Dokažimo prvo jednu lemu.

Lema 1.6.6. *Neka je $\mathfrak{h}$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$, neka je $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ reprezentacija i $\lambda : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ linearna funkcija. Označimo*

$$W = \{v \in V : \pi(X)(v) = \lambda(X) \cdot v, \forall X \in \mathfrak{h}\}.$$

Tada je $\pi(Y)(W) \subset W, \forall Y \in \mathfrak{g}$.

Dokaz. Neka su $w \in W \setminus \{0\}$ i $X \in \mathfrak{h}$ proizvoljni. $\mathfrak{h}$ je ideal pa za svaki $Y \in \mathfrak{g}$ imamo

$$\begin{aligned} \pi(X)(\pi(Y)(w)) &= \pi(Y)(\pi(X))(w) + \pi([X,Y])(w) \\ &= \lambda(X) \cdot \pi(Y)(w) + \lambda([X,Y]) \cdot w \end{aligned}$$

Zbog ove jednakosti, uvažavajući definiciju od W, $\pi(Y)(w) \in W$ ako i samo ako je desni sumand jednak nuli, a to je pak ekvivalentno sa $\lambda([X,Y]) = 0, \forall X \in \mathfrak{h}$. Pokažimo sada da to zaista i vrijedi, time će dokaz biti gotov.
Definiramo potprostor od V, U, kao prostor razapet sa $(\pi(Y))^i(w), i \in \mathbb{N}_0$, dakle svim iteracijama djelovanja od Y na w uključujući nultu, identitetu. Očito je da $\pi(Y)$ čuva potprostor U; ono što želimo pokazati je da tvrdnja vrijedi i ako zamijenimo Ysa X, za bilo koji $X \in \mathfrak{h}$. $\mathfrak{h}$ djeluje na w na način da ga pomnoži skalarom pa je $\pi(X)(w)$ svakako element od U. Gornja jednakost nam daje da će $\pi(X)\pi(Y)(w)$ biti linearna kombinacija od w i $\pi(Y)(w)$, što je opet u U. Za ostale elemente sustava izvodnica jednostavno koristimo indukciju i jednakost

$$\pi(X)(\pi(Y)^k(w)) = \pi(Y)(\pi(X)(\pi(Y)^{k-1}(w))) + \pi([X,Y])(\pi(Y)^{k-1}(w)).$$

Iz dosadašnjih jednakosti dobili smo i više: u ranije zadanoj bazi iteracija od $\pi(Y)$ na w matrica djelovanja svakog $X \in \mathfrak{h}$ je gornjetrokutasta i dijagonalni elementi su $\lambda(X)$. Zato je trag restrikcije od $\pi(X)$ na U jednak $\lambda(X) \cdot \dim U$. S druge strane, za svaki $X \in \mathfrak{h}$ $[X,Y]$ djeluje na U i trag slike po reprezentaciji je trag komutatora u $\mathfrak{gl}(V)$ pa mora biti 0. Dakle, $\lambda([X,Y]) = 0$, što smo i trebali.

□

Teorem 1.6.7. (Sophus Lie) *Neka je $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ kompleksna rješiva Liejeva algebra. Tada postoji $v \in V, v \neq 0$, koji je svojstveni vektor za svaki $X \in \mathfrak{g}$.*

Dokaz. Ako je $\dim \mathfrak{g} = 0$, nemamo što dokazivati. Pretpostavimo da je $\dim \mathfrak{g} = 1$. Tada postoji $Y \in \mathfrak{g}$ takav da je $\mathfrak{g} = \{\lambda Y, \lambda \in \mathbb{C}\}$ pa možemo uzeti bilo koji svojstveni vektor za Y.
Sada slično kao u dokazu Engelovog teorema želimo pokazati da $\mathfrak{g}$ sadrži ideal kodimenzije 1 pa koristiti indukciju. Kada bi vrijedilo $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, onda bi izvedeni niz ideala od $\mathfrak{g}$ bio stacionaran pa $\mathfrak{g}$ ne bi mogla biti rješiva Liejeva algebra; dakle $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$ pa je $\mathfrak{f} := \mathfrak{g}/_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$ netrivijalna Liejeva algebra koja je očito komutativna. Sada sve što trebamo je pogledati prasliku nekog potprostora od $\mathfrak{f}$ kodimenzije 1 po kanonskoj surjekciji; sada traženi ideal $\mathfrak{h}$ definiramo kao tu prasliku. $\mathfrak{h}$ je ideal jer sadrži $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.
Po pretpostavci indukcije postoji $v_0 \in V \setminus \{0\}$ koji je svojstveni vektor za svaki $X \in \mathfrak{h}$. Označimo pripadnu svojstvenu vrijednost sa $\lambda(X)$. Na ovaj način smo dobili linearnu funkciju $\lambda : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$. Sada definiramo potprostor od V, W, sa

$$W = \{v \in V : X(v) = \lambda(X) \cdot v, \, \forall X \in \mathfrak{h}\}.$$

Ovo je zapravo potprostor iz prethodne leme, jedino što je $\mathfrak{g}$ linearna Liejeva algebra pa nam nije potrebna reprezentacija, što osjetno pojednostavljuje izraz. W je netrivijalan potprostor jer sadrži $v_0 \neq 0$. Neka je sada $Y \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ proizvoljan. Dovoljno je pokazati da postoji $w \in W$ takav da je $Y(w) = \lambda \cdot w$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Za ovo je, pak, dovoljno pokazati da je $Y(W) \subset W$, a to je samo specijalni slučaj leme 1.6.6.

□

Teorem se mogao iskazati i malo općenitije: umjesto $\mathbb{C}$ mogli smo promatrati i bilo koje algebarski zatvoreno polje karakteristike nula. Ipak, teorem se najviše primjenjuje na kompleksne Liejeve algebre pa će i ova varijanta biti sasvim dostatna.

Korolar 1.6.8. *Svaka ireducibilna reprezentacija rješive Liejeve algebre je jednodimenzionalna.*

Dokaz. Neka je $\mathfrak{g}$ rješiva Liejeva algebra i $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ ireducibilna reprezentacija. Prema Liejevom teoremu postoji $v \in V, v \neq 0$ koji je svojstveni vektor za sve $\pi(X), X \in \mathfrak{g}$. To znači da je potprostor od V razapet sa v invarijantan za π i netrivijalan. Kako je reprezentacija ireducibilna, v razapinje V.

□

Korolar 1.6.9. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna Liejeva algebra, označimo $\mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}/_{\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}}$. Svaka ireducibilna reprezentacija $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ je tenzorski produkt ireducibilne reprezentacije od $\mathfrak{g}_s$ i jednodimenzionalne reprezentacije.*

Sada smo konačno motivirani za proučavanje reprezentacija poluprostih Liejevih algebri. Gornji korolar nam kaže da za razumijevanje proizvoljne ireducibilne reprezentacije trebamo razumjeti reprezentacije poluprostih Liejevih algebri i jednodimenzionalne reprezentacije, a jednodimenzionalne reprezentacije i nisu baš toliko zanimljive.

Poglavlje 2

Poluproste Liejeve algebre

2.1 Schurova lema

Konačni cilj je prikazati reprezentacije poluprostih Liejevih algebri kao direktne sume ireducibilnih reprezentacija. Za to se moramo nakratko odmaknuti od poluprostih Liejevih algebri i dobiti neke općenitije rezultate. Prvi među njima govori o ireducibilnim reprezentacijama. Za početak, jedna definicija.

Definicija 2.1.1. *Neka su $\pi : S \to \mathrm{L}(V)$ i $\rho : S \to \mathrm{L}(W)$ reprezentacije skupa S. **Homomorfizam reprezentacija** π i ρ je homomorfizam vektorskih prostora $\varphi : V \to W$ takav da vrijedi $\varphi \circ \pi(s) = \rho(s) \circ \varphi, \forall s \in S$.*

Skup svih takvih homomorfizama označavamo sa $\mathrm{Hom}_S(\pi, \rho)$ ili $\mathrm{Hom}_S(V, W)$. Ova oznaka se inače koristi za homomorfizme S-modula, ali to nije slučajno: reprezentacija daje vektorskom prostoru strukturu S-modula, a homomorfizam reprezentacija je zapravo homomorfizam S-modula.

Lema 2.1.2. (Issai Schur) *Neka je π, odnosno ρ, ireducibilna reprezentacija skupa S na vektorskom prostoru V, odnosno W, gdje su V i W nad istim poljem.*

(1) Svaki element $A \in \mathrm{Hom}_S(V, W), A \neq 0$ je izomorfizam.

(2) Svaki $A \in \mathrm{End}_S(V), A \neq 0$ je invertibilan.

(3) Ako je V vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem, onda je $\mathrm{End}_S(V)$ jednak skupu skalarnih operatora.

Dokaz. (1) Neka je $A \in \mathrm{Hom}_S(V, W) \setminus \{0\}$. Pokažimo da jezgra tog operatora daje podreprezentaciju od π, odnosno da je $\mathrm{Ker}\, A$ invarijantan za π.

$$v \in \mathrm{Ker}\, A, s \in S \Rightarrow A(\pi(s)(v)) = \rho(s)A(v) = 0 \Rightarrow \pi(s)(v) \in \mathrm{Ker}\, A$$

Za reprezentaciju π smo pretpostavili da je ireducibilna, dakle sada $\operatorname{Ker} A$ može biti ili $\{0\}$ ili V, ali $A \neq 0$ pa je jezgra trivijalna. To znači da je A injektivan operator.
Pogledajmo sada $\operatorname{Im} A$; tvrdimo da je i to invarijantan potprostor, ovaj put za ρ.

$$\begin{aligned} w \in \operatorname{Im} A, s \in S &\Rightarrow \exists v \in V, w = A(v) \\ &\Rightarrow \rho(s)(w) = \rho(s)(A(v)) = A(\pi(s)(v)) \in \operatorname{Im} A. \end{aligned}$$

Kao i kod jezgre, sada su nam jedine mogućnosti za $\operatorname{Im} A$ $\{0\}$ i W, s tim da $\{0\}$ ne može biti jer je $A \neq 0$. Dakle A je i surjekcija. Time je dokazano da je A izomorfizam.

(2) Direktna posljedica (1), $\operatorname{End}_S(V) = \operatorname{Hom}_S(V, V)$

(3) Neka je $A \in \operatorname{End}_S(V)$. Zbog pretpostavke o algebarskoj zatvorenosti polja A ima neku svojstvenu vrijednost λ. To znači da $A - \lambda \cdot \mathrm{I} \in \operatorname{End}_S(V)$ nije invertibilan pa je prema (2) jednak nuli. Dakle $A = \lambda \cdot \mathrm{I}$.

$\square$

2.2 Jordanov rastav linearnog operatora

Svrha ovog dijela je iznošenje rezultata koji su uglavnom već poznati, barem u slučaju kompleksnih vektorskih prostora. Zato će većina rezultata biti samo iskazana, dok će dokazana biti propozicija o djelovanju adjungirane reprezentacije na Jordanov rastav.
Od sada uvodimo dodatnu pretpostavku na sve vektorske prostore (pa posebno i Liejeve algebre), osim konačne dimenzije pretpostavit ćemo da su nad algebarski zatvorenim poljem.

Teorem 2.2.1. (Jordanova dekompozicija) *Neka je A linearan operator na vektorskom prostoru V nad $\mathbb{F}$.*

(1) Postoje jedinstveni linearni operatori A_s i A_n na V, gdje je A_s dijagonalizabilan, a A_n nilpotentan, takvi da je $A = A_s + A_n$ i ti operatori komutiraju.

(2) Postoje polinomi $p, q \in \mathbb{F}[x]$ takvi da je $p(0) = q(0) = 0, p(A) = A_s, q(A) = A_n$.

(3) Ako je B linearan operator na V koji komutira sa A, onda B komutira i sa A_s i A_n.

(4) Neka je W A-invarijantan potprostor od V. Tada je W A_s-invarijantan i A_n-invarijantan i vrijedi $(A|_W)_s = A_s|_W$, $(A|_W)_n = A_n|_W$.

Propozicija 2.2.2. *Neka je A linearan operator na vektorskom prostoru V.*

(1) Ako je A dijagonalizabilan, onda je i operator $\operatorname{ad} A$ *dijagonalizabilan.*

(2) ako je A nilpotentan, onda je i $\operatorname{ad} A$ *nilpotentan.*

(3) $(\operatorname{ad} A)_s = \operatorname{ad} A_s$ *i* $(\operatorname{ad} A)_n = \operatorname{ad} A_n$.

Dokaz. (1) Neka je $\{v_1, ..., v_n\}$ baza za V sastavljena od svojstvenih vektora za A, takva postoji zbog pretpostavke o dijagonalizabilnosti. Dakle imamo

$$A(v_j) = \lambda_j \cdot v_j, \quad j = 1, ..., n$$

Neka je sada $\{E_{i,j}, i, j = 1, ..., n\}$ baza za $\mathfrak{gl}(V)$ zadana sa

$$E_{i,j}(v_k) = \delta_{jk} v_i, \quad i, j, k = 1, ..., n$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad} A(E_{i,j})(v_k) &= AE_{i,j}(v_k) - E_{i,j}A(v_k) \\
&= A(\delta_{jk} v_i) - E_{i,j}(\lambda_k v_k) \\
&= \delta_{jk} A(v_i) - \lambda_k E_{i,j}(v_k) \\
&= \delta_{jk} \lambda_i v_i - \lambda_k \delta_{jk} v_i \\
&= (\lambda_i - \lambda_k)\delta_{jk} v_i \qquad\qquad (\lambda_k \delta_{jk} = \lambda_j \delta_{jk}) \\
&= (\lambda_i - \lambda_j) E_{i,j}(v_k), \quad \forall i, j, k = 1, ..., n
\end{aligned}$$

pa je $\operatorname{ad} A$ dijagonalizabilan.

(2) Ovo je lema 1.6.2.

(3) Iz (1) i (2) imamo da je $\operatorname{ad} A_s$ dijagonalizabilan, a $\operatorname{ad} A_n$ nilpotentan operator. A_s i A_n komutiraju pa komutiraju i $\operatorname{ad} A_s$ i $\operatorname{ad} A_n$. Zbog aditivnosti reprezentacije vrijedi i $\operatorname{ad} A = \operatorname{ad} A_s + \operatorname{ad} A_n$. Preostaje primijeniti jedinstvenost Jordanovog rastava (teorem 2.2.1.(1)).

□

2.3 Kriteriji rješivosti

Iako je već rečeno da samo proučavanje rješivih Liejevih algebri nije od velikog interesa u ovom radu, korisno je saznati neke uvjete pod kojima će Liejeva algebra biti rješiva. Osim toga, svrha ovog poglavlja je i uvođenje definicije jedne bilinearne forme, koja će nam biti jako važna kasnije, a za sada nam daje jedan kriterij rješivosti.

Do sada smo već spominjali radikal Liejeve algebre i koristili njegovu egzistenciju. Dokažimo sada propoziciju koja opravdava činjenicu da svaka Liejeva algebra zaista posjeduje radikal, a i upotpunjuje dokaz propozicije 1.6.1.

Propozicija 2.3.1. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ njezina podalgebra, a $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ ideali u $\mathfrak{g}$.*

(1) Ako je $\mathfrak{g}$ rješiva, onda su Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ rješive.

(2) Ako su $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ rješive Liejeve algebre, onda je i $\mathfrak{g}$ rješiva.

(3) Ako su $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ rješivi ideali, onda je i $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ rješiv ideal.

Dokaz. (1) $\mathfrak{h}$ je rješiva zbog $\mathfrak{h}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{(k)}, \forall k \in \mathbb{N}$.
Neka je $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ kanonski epimorfizam. Indukcijom koristeći svojstvo homomorfizma Liejevih algebri dobivamo da vrijedi $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(k)} = \pi(\mathfrak{g}^{(k)})$ pa je i $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ rješiva.

(2) Neka su $k, m \in \mathbb{N}$ takvi da je $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(k)} = \{0\}$ i $\mathfrak{a}^{(m)} = \{0\}$ i neka je π ponovno kanonski epimorfizam. Zbog $\pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(k)}$ je $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \operatorname{Ker}\pi = \mathfrak{a}$. Sada je $\mathfrak{g}^{(k+m)} = (\mathfrak{g}^{k})^{(m)} \subset \mathfrak{a}^{(m)} = \{0\}$ pa je $\mathfrak{g}$ rješiva.

(3) Preslikavanje $x + \mathfrak{a} \mapsto x + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, x \in \mathfrak{b}$, daje izomorfizam između $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\big/\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}\big/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$.
Iz (1) imamo da je $\mathfrak{b}\big/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ rješiva pa je onda i $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\big/\mathfrak{a}$ rješiva. $\mathfrak{a}$ je rješiva pa prema (2) onda je rješiva i $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$.

□

Lema 2.3.2. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike 0 i neka su X i Y potprostori od $\mathfrak{gl}(V)$ takvi da $X \subset Y$. Označimo*

$$\mathfrak{a} = \{A \in \mathfrak{gl}(V) : [A, Y] \subset X\}.$$

Ako za $A \in \mathfrak{a}$ vrijedi $\operatorname{Tr} AB = 0, \forall B \in \mathfrak{a}$, onda je A nilpotentan.

Dokaz. Zbog Jordanovog rastava trebamo pokazati da vrijedi $A_s = 0$. Neka je $\{v_1, ..., v_n\}$ baza za V sastavljena od svojstvenih vektora za A_s sa pripadnim svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, ..., \lambda_n$.
Neka je $\mathbb{K}$ primitivno potpolje od $\mathbb{F}$ iz teorema o primitivnom potpolju. Tada je ono izomorfno sa $\mathbb{Q}$. Zato je dovoljno pokazati da je potprostor L od $\mathbb{F}$, razapet sa $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ nad $\mathbb{Q}$, jednak $\{0\}$ da bismo imali tvrdnju. Za to je pak dovoljno pokazati da je dualni prostor L^* trivijalan jer je L konačnodimenzionalan.
Neka je $f : L \to \mathbb{Q}$ proizvoljan $\mathbb{Q}$-linearan funkcional. Definiramo $B \in \mathfrak{gl}(V)$ sa $B(v_j) = f(\lambda_j)v_j, j = 1, ..., n$.
Vratimo se dokazu propozicije 2.2.2.(1); neka je baza $\{E_{i,j}, i, j = 1, ..., n\}$ definirana kao tamo. Iz dokaza propozicije dobivamo i

$$\operatorname{ad} A_s(E_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j} \tag{2.1}$$

$$\operatorname{ad} B(E_{i,j}) = (f(\lambda_i) - f(\lambda_j))E_{i,j} \tag{2.2}$$

$\forall i, j \in \{1, ..., n\}$. Neka je $p \in \mathbb{F}[x]$ polinom koji zadovoljava

$$p(0) = 0, \;\; p(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i) - f(\lambda_j), \quad i, j = 1, ..., n$$

Ovime je p dobro definiran jer $\lambda_i - \lambda_j = \lambda_k - \lambda_m$ povlači $f(\lambda_i) - f(\lambda_j) = f(\lambda_k) - f(\lambda_m)$ zbog $\mathbb{Q}$-linearnosti od f. Zbog (2.1) i (2.2) vrijedi $p(\operatorname{ad} A_s) = \operatorname{ad} B$.

$\operatorname{ad} A_s$ je poluprosti dio operatora $\operatorname{ad} A$ zbog propozicije 2.2.2.(3), a zbog teorema 2.2.1.(2) $\operatorname{ad} A_s$ se može prikazati kao polinom u $\operatorname{ad} A$ bez konstantnog člana. Tada je i $\operatorname{ad} B$ polinom u $\operatorname{ad} A$ bez konstantnog člana kao kompozicija dvaju polinoma bez konstantnog člana. Zbog toga, budući da je $A \in \mathfrak{a}$ pa je $\operatorname{ad} A(Y) \subset X$, vrijedi i $\operatorname{ad} B(Y) \subset X$ pa je $B \in \mathfrak{a}$.
Po pretpostavci na A zato vrijedi $\operatorname{Tr} AB = 0$. Po potrebi renumerirajmo bazu za V tako da operator A ima za matrični prikaz gornjetrokutastu matricu sa dijagonalnim elementima $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Sada će i AB imati za prikaz gornjetrokutastu matricu sa elementima $f(\lambda_1)\lambda_1, ..., f(\lambda_n)\lambda_n$ na dijagonali. Sada zbog $\operatorname{Tr} AB = 0$ imamo $\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\lambda_i = 0$. Primijenimo na ovu jednakost f pa zbog $\mathbb{Q}$-linearnosti dobivamo $\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)^2 = 0$. Dakle $f(\lambda_i) = 0, \forall i = 1, ..., n$ pa je i $f = 0$ jer se poništava na sustavu izvodnica.

$\square$

Cartanovi kriteriji rješivosti

Teorem 2.3.3. (Élie Joseph Cartan) *Neka je V vektorski prostor nad poljem karakteristike 0 i $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$. $\mathfrak{g}$ je rješiva ako i samo ako vrijedi*

$$\operatorname{Tr} AB = 0, \quad \forall A \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \forall B \in \mathfrak{g}.$$

Dokaz. ($\Leftarrow$)
Koristimo lemu 2.3.2. i u skladu s tim označimo $X := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $Y := \mathfrak{g}$. Pripadni ideal $\mathfrak{a}$ je sada jednak

$$\mathfrak{a} = \{C \in \mathfrak{gl}(V) : [C, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}$$

Očito je $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$. Da bismo pokazali da je neki $A \in \mathfrak{g}$ nilpotentan sada trebamo

$$\operatorname{Tr} AB = 0, \quad \forall B \in \mathfrak{a},$$

a tvrdnju po pretpostavci imamo za $B \in \mathfrak{g}$.
A je suma elemenata oblika $[A_1, A_2]$ za $A_1, A_2 \in \mathfrak{g}$. Za bilo koji $B \in \mathfrak{a}$ sada imamo

$$\operatorname{Tr}([A_1, A_2]B) = \operatorname{Tr}(A_1[A_2, B]) = \operatorname{Tr}([A_2, B]A_1),$$

a posljednji izraz je jednak nuli jer je $[A_2, B] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ po definicijji od $\mathfrak{a}$. Dakle prema lemi 2.3.2. A je nilpotentan operator, pa zbog proizvoljnosti od A svi elementi u $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ su nilpotentni. Primijenimo lemu 1.6.2. pa korolar 1.6.4. i dobivamo da je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentna Liejeva algebra.
Sada imamo da su $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ rješive Liejeve algebre; $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ je prema upravo pokazanom nilpotentna, pa onda i rješiva, a $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ je Abelova pa je kao takva rješiva. Prema propoziciji 2.3.1.(2) sadi i $\mathfrak{g}$ mora biti rješiva.

($\Rightarrow$)
Direktna posljedica Liejevog teorema (1.6.7.), koji nam daje da postoji baza u kojoj svaki $L \in \mathfrak{g}$ ima za matrični prikaz gornjetrokutastu matricu, a komutator dvije gornjetrokutaste matrice je strogo gornjetrokutasta matrica.

□

Definicija 2.3.4. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem $\mathbb{F}$. Simetričnu bilinearnu formu $\kappa_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{F}$ definiranu sa*

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

*zovemo **Killingova forma** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*

Teorem 2.3.5. (Élie Joseph Cartan) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je rješiva ako i samo ako je*

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0.$$

Dokaz. Prema teoremu 2.3.3. imamo da je $\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$ ako i samo ako je $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ rješiva; ovdje je korisno ponoviti da adjungirana reprezentacija prevodi komutator u $\mathfrak{g}$ u komutator u $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$. Dakle, preostalo je pokazati da je $\mathfrak{g}$ rješiva ako i samo ako je $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ rješiva.
Jedan smjer je trivijalan, ako je $\mathfrak{g}$ rješiva, onda je $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ rješiva kao slika homomorfizma rješive Liejeve algebre.
Obratno, neka je $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ rješiva. Ranije smo već napomenuli da je jezgra adjungirane reprezentacije jednaka $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ pa je $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ izomorfna $\mathfrak{g}/_{\mathrm{Z}(\mathfrak{g})}$, onda je i $\mathfrak{g}/_{\mathrm{Z}(\mathfrak{g})}$ rješiva. Centar svake Liejeve algebre je rješiva Liejeva algebra pa preostaje samo pozvati se na propoziciju 2.3.1.(2).

□

2.4 Poluproste Liejeve algebre

Killingova forma i kriterij poluprostote

Pokažimo prvo neka osnovna svojstva Killingove forme.

Propozicija 2.4.1. *Za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ vrijedi:*

(1) $\kappa_{\mathfrak{g}}(\varphi(X), \varphi(Y)) = \kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y), \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall \varphi \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$

(2) $\kappa_{\mathfrak{g}}(\delta(X), Y) + \kappa_{\mathfrak{g}}(X, \delta(Y)) = 0, \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall \delta \in \operatorname{Der}\mathfrak{g}$

(3) $\kappa_{\mathfrak{g}}([X, Y], Z) = \kappa_{\mathfrak{g}}(X, [Y, Z]), \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

(4) Ako je $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$, onda je $\kappa_{\mathfrak{h}} = \kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$

Dokaz. (1) Uzmimo $\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}), X, Y \in \mathfrak{g}$. Imamo

$$\operatorname{ad}_{\varphi(X)}(Y) = [\varphi(X), Y] = \varphi([X, \varphi^{-1}(Y)]) = \varphi \circ \operatorname{ad}_X \circ \varphi^{-1}(Y),$$

dakle

$$\operatorname{ad}_{\varphi(X)} = \varphi \circ \operatorname{ad}_X \circ \varphi^{-1}.$$

Sada je konačno

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathfrak{g}}(\varphi(X), \varphi(Y)) &= \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_{\varphi(X)}, \operatorname{ad}_{\varphi(Y)}) \\ &= \operatorname{Tr}(\varphi \circ \operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y \circ \varphi^{-1}) \\ &= \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y) \\ &= \kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y)\end{aligned}$$

(2) Neka su $X, Y \in \mathfrak{g}, \delta \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$. Tada je

$$\begin{aligned}[\delta, \mathrm{ad}_X](Y) &= \delta \circ \mathrm{ad}_X(Y) - \mathrm{ad}_X \circ \delta(Y) \\ &= \delta([X, Y]) - [X, \delta(Y)] \\ &= [\delta(X), Y] + [X, \delta(Y)] - [X, \delta(Y)] \\ &= [\delta(X), Y] \\ &= \mathrm{ad}_{\delta(X)}(Y),\end{aligned}$$

dakle

$$\mathrm{ad}_{\delta(X)} = [\delta, \mathrm{ad}_X].$$

Zato je sada

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathfrak{g}}(\delta(X), Y) + \kappa_{\mathfrak{g}}(X, \delta(Y)) &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\delta(X)}\,\mathrm{ad}_Y) + \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X\,\mathrm{ad}_{\delta(Y)}) \\ &= \mathrm{Tr}([\delta, \mathrm{ad}_X]\,\mathrm{ad}_Y) + \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X[\delta, \mathrm{ad}_Y]) \\ &= \mathrm{Tr}(\delta\,\mathrm{ad}_X\,\mathrm{ad}_Y) - \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X\,\delta\,\mathrm{ad}_Y) + \\ &\quad + \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X\,\delta\,\mathrm{ad}_Y) - \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X\,\mathrm{ad}_Y\,\delta) \\ &= 0\end{aligned}$$

(3) Slijedi iz (2) uz $\delta = \mathrm{ad}_Y$

(4) Iz linearne algebre znamo ovo: ako je V vektorski prostor, W njegov potprostor i $A \in \mathrm{L}(V)$ takav da $\mathrm{Im}(A) \subset W$, onda je $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A|_W)$. Koristeći tu činjenicu i jednakosti

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{X,\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}} &= \mathrm{ad}_{X,\mathfrak{h}} \\ \mathrm{ad}_{Y,\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}} &= \mathrm{ad}_{Y,\mathfrak{h}} \\ \mathrm{ad}_{X,\mathfrak{g}}\,\mathrm{ad}_{Y,\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}} &= \mathrm{ad}_{X,\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}}\;\;\mathrm{ad}_{Y,\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}}\,,\end{aligned}$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{h}$,dobivamo

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{X,\mathfrak{g}}\,\mathrm{ad}_{Y,\mathfrak{g}}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{X,\mathfrak{h}}\,\mathrm{ad}_{Y,\mathfrak{h}}) = \kappa_{\mathfrak{h}}(X, Y)$$

□

Teorem 2.4.2. *Liejeva algebra $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ je poluprosta ako i samo ako je njena Killingova forma nedegenerirana, odnosno vrijedi*

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) = 0,\ \forall\, Y \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad X = 0.$$

Dokaz. Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta. Označimo

$$\mathfrak{r} = \{X \in \mathfrak{g} : \kappa_{\mathfrak{g}}(X,Y) = 0,\ \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Želimo pokazati da vrijedi $\mathfrak{r} = \{0\}$. Iz propozicije 2.4.1.(3) slijedi da je $\mathfrak{r}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Po definiciji od $\mathfrak{r}$ vrijedi $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{r}\times\mathfrak{g}} = 0$, pa onda posebno i $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{r}\times\mathfrak{r}} = 0$. Prema propoziciji 2.4.1.(4) tada je $\kappa_{\mathfrak{r}} = 0$, a prema drugom Cartanovom kriteriju rješivosti (2.3.5.) $\mathfrak{r}$ je rješiv ideal. Zato vrijedi $\mathfrak{r} \subset \operatorname{Rad}\mathfrak{g}$, ali $\mathfrak{g}$ je poluprosta pa je $\operatorname{Rad}\mathfrak{g} = \{0\}$. Dakle $\mathfrak{r} = \{0\}$, što smo i tvrdili.

Pretpostavimo sada da je gore definirani ideal $\mathfrak{r}$ jednak $\{0\}$. Pokažimo prvo da je svaki komutativan ideal u $\mathfrak{g}$ sadržan u $\mathfrak{r}$, pa onda i jednak $\{0\}$. Neka je $\mathfrak{h}$ neki komutativan ideal u $\mathfrak{g}, X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}$. Tada je $\operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{h}$ pa je $(\operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y)^2(\mathfrak{g}) \subset [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] = \{0\}$. Dakle $\operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y$ je nilpotentan operator pa je $\kappa_{\mathfrak{g}}(X,Y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y) = 0$, što znači da je $X \in \mathfrak{r}$ pa je $\mathfrak{h} = \{0\}$.
Sada tvrdimo da je Liejeva algebra bez netrivijalnih komutativnih ideala poluprosta; time će dokaz biti gotov jer $\mathfrak{g}$ zadovoljava ovo svojstvo. Pretpostavimo da postoji rješivi ideal $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ u $\mathfrak{g}$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\mathfrak{a}^{(k-1)} \neq \{0\}, \mathfrak{a}^{(k)} = \{0\}$, ali onda je $[\mathfrak{a}^{(k-1)}, \mathfrak{a}^{(k-1)}] = \mathfrak{a}^{(k)} = \{0\}$ pa je $\mathfrak{a}^{(k-1)}$ netrivijalan komutativan ideal, kontradikcija.
Dakle, $\mathfrak{g}$ je poluprosta Liejeva algebra.

□

Osim što smo pomoću Killingove forme dobili karakterizaciju rješivih i prostih Liejevih algebri, Killingova forma nam opravdava promatranje rješivih i poluprostih Liejevih algebri kao suprotnih objekata u proučavanju Liejevih algebri. Pritom se ne može reći da je ovo veliko iznenađenje, već sama definicija poluproste Liejeve algebre daje naslutiti da se radi o objektu koji je "sve samo ne rješiv".

Napomena 2.4.3. *Ideal $\mathfrak{r}$ iz gornjeg teorema obično se zove* ***radikal Killingove forme****. Iz dokaza teorema dobivamo i da je radikal Killingove forme uvijek sadržan u radikalu pripadne Liejeve algebre. Obrat općenito ne vrijedi.*

Posljedice kriterija poluprostote

Karakterizacija poluprostih Liejevih algebri pomoću Killingove forme olakšava dokazivanje mnogih važnih svojstava poluprostih Liejevih algebri, a pomoću njih ćemo doći do konačnog cilja, rastava proizvoljne reprezentacije poluproste Liejeve algebre na direktnu sumu ireducibilnih podreprezentacija.

Propozicija 2.4.4. *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra i $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$.*

(1) $\mathfrak{h}$ *je poluprosta Liejeva algebra.*

(2) $\mathfrak{h}^\perp := \{X \in \mathfrak{g} : \kappa_\mathfrak{g}(X,Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\}$ *je ideal u* $\mathfrak{g}$

(3) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$.

Dokaz. Dokažimo prvo (2). Za $X \in \mathfrak{h}^\perp, Y \in \mathfrak{g}$ i $Z \in \mathfrak{h}$ imamo $[Y,Z] \in \mathfrak{h}$ pa prema propoziciji 2.4.1.(3) imamo $\kappa_\mathfrak{g}([X,Y],Z) = \kappa_\mathfrak{g}(X,[Y,Z]) = 0$.
Dakle $[X,Y] \in \mathfrak{h}^\perp, \forall X \in \mathfrak{h}^\perp, Y \in \mathfrak{g}$ pa je $\mathfrak{h}^\perp$ ideal u $\mathfrak{g}$.

Dokažimo sada (3). Zbog nedegeneriranosti forme $\kappa_\mathfrak{g}$ imamo $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h} + \dim \mathfrak{h}^\perp$. Cartanov kriterij nam daje da je $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$ rješiva Liejeva algebra, ali to je zbog (2) i ideal u $\mathfrak{g}$ pa mora biti $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp = \{0\}$. Dakle suma je direktna pa je $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$.

Konačno, pokažimo (1). Iz (3) i nedegeneriranosti forme $\kappa_\mathfrak{g}$ imamo i da je $\kappa_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}} = \kappa_\mathfrak{h}$ nedegenerirana. Posljednja jednakost je propozicija 2.4.1.(4). Prema teoremu 2.4.4. $\mathfrak{h}$ je poluprosta Liejeva algebra.

□

Pokažimo sada da je svaka poluprosta Liejeva algebra jednaka svome prvome izvedenom idealu.

Teorem 2.4.5. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *poluprosta Liejeva algebra. Tada je* $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.

Dokaz. Označimo $\mathfrak{h} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^\perp = \{X \in \mathfrak{g} : \kappa_\mathfrak{g}(X,[Y,Z]) = 0, \forall Y,Z \in \mathfrak{g}\}$. Prema propoziciji 2.4.4.(2) $\mathfrak{h}$ je ideal u $\mathfrak{g}$.
Zbog $\kappa_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}} = \kappa_\mathfrak{h}$ za sve $X \in \mathfrak{h}$ i $Y \in [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ imamo $\kappa_\mathfrak{h}(X,Y) = \kappa_\mathfrak{g}(X,Y) = 0$.
Po Cartanovom kriteriju sada je $\mathfrak{h}$ rješiva Liejeva algebra pa je jednaka $\{0\}$, a zbog propozicije 2.4.4.(3) to znači $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.

□

Ovaj teorem je interesantan sam po sebi, ali nam daje i jako važne informacije o reprezentacijama poluprostih Liejevih algebri. Na koji način, pogledajmo u sljedećim korolarima.

Korolar 2.4.6. *Neka je* $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ *reprezentacija poluproste Liejeve algebre. Tada je* $\pi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(V) = \{A \in \mathfrak{gl}(V) : \mathrm{Tr}(A) = 0\}$.

Dokaz. Iz teorema 2.4.5. imamo

$$\pi(\mathfrak{g}) = \pi[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = [\pi(\mathfrak{g}),\pi(\mathfrak{g})] \subset [\mathfrak{gl}(V),\mathfrak{gl}(V)] \subset \mathfrak{sl}(V).$$

□

Iz gornje relacije direktno slijedi

Korolar 2.4.7. *Neka je π reprezentacija poluproste Liejeve algebre na jednodimenzionalnom vektorskom prostoru. Tada je $\pi = 0$.*

Sada smo konačno spremni opravdati naziv *poluproste* Liejeve algebre.

Teorem 2.4.8. *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta ako i samo ako je izomorfna direktnoj sumi prostih Liejevih algebri.*
Ako je $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ poluprosta Liejeva algebra i $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$, gdje su $\mathfrak{g}_1, ..., \mathfrak{g}_k$ prosti ideali u $\mathfrak{g}$, i ako je $\mathfrak{h} \neq \{0\}$ ideal u $\mathfrak{g}$, onda postoji rastući podskup indeksa $\{i_1, ...i_m\} \subset \{1, ..., k\}$ takav da je $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{i_m}$. Posebno, to znači da su jedini prosti ideali u $\mathfrak{g}$ upravo $\mathfrak{g}_1, ..., \mathfrak{g}_k$.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$, gdje su $\mathfrak{g}_1, ..., \mathfrak{g}_k$ prosti ideali u $\mathfrak{g}$ i neka je $X \in \mathfrak{g}$ takav da vrijedi $\kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}$. X je oblika $X = X_1 + ... + X_k, X_i \in \mathfrak{g}_i, i = 1, ..., k$.

Uočimo jednu trivijalnu ali važnu činjenicu koja će nam biti potrebna za nastavak dokaza. Ukoliko imamo direktnu sumu kao gore, onda imamo ortogonalnost ne samo u smislu vektorskih prostora, nego i u smislu komutatora. Preciznije, zbog $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j$ imamo $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \{0\}, i \neq j$.

Sada za $j \in \{1, ..., k\}$ i $Y \in \mathfrak{g}_j$ imamo $[Y, \mathfrak{g}_i] = \{0\}, i \neq j$, odnosno $\mathrm{ad}_Y|_{\mathfrak{g}_i} = 0$ pa je onda i $\kappa_{\mathfrak{g}}(Y, X_i) = 0, i \neq j$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
\kappa_{\mathfrak{g}_j}(Y, X_j) &= \kappa_{\mathfrak{g}}(Y, X_j) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \kappa_{\mathfrak{g}}(Y, X_i) \\
&= \kappa_{\mathfrak{g}}(Y, X) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\mathfrak{g}_j$ je po pretpostavci prosta, pa onda i poluprosta. Zato prema teoremu 2.4.2. sada mora biti $X_j = 0$. Tvrdnja vrijedi za sve $j \in \{1, ..., k\}$ pa je i $X = 0$. Dakle κ_g je nedegenerirana pa je prema teoremu 2.4.2. $\mathfrak{g}$ poluprosta.

U propoziciji 2.4.4. vidjeli smo da ako $\mathfrak{g}$ sadrži netrivijalan ideal $\mathfrak{h}$, onda $\mathfrak{g}$ možemo prikazati u obliku $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$. Iskoristimo ovo da bismo pokazali obrat indukcijom po $\dim \mathfrak{g}$. Ako $\mathfrak{g}$ nema pravih ideala, onda je po definiciji to prosta Liejeva algebra pa smo gotovi. Ako postoji ideal $\mathfrak{h} \neq \{0\}, \mathfrak{g}$, onda je i $\mathfrak{h}^{\perp}$ ideal po propoziciji 2.4.4., oba imaju strogo manju dimenziju od $\mathfrak{g}$ i oba su poluprosta kao ideali u poluprostoj Liejevoj algebri. Primijenimo pretpostavku indukcije na $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}^{\perp}$ i iskoristimo $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$.

Za kompletiranje dokaza dovoljno je dokazati da su $\mathfrak{g}_1, ..., \mathfrak{g}_k$ jedini prosti ideali u $\mathfrak{g}$. Neka je $\mathfrak{a}$ neki prost ideal u $\mathfrak{g}$, tada je i $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$ ideal u $\mathfrak{a}$, netrivijalan jer je $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ pa zbog prostote od $\mathfrak{a}$ slijedi $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$. S druge strane, zbog gornjeg rastava od $\mathfrak{g}$ imamo

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_1] \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_k]$$

pa svi sumandi osim jednog moraju biti 0; neka to bude $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_i]$. Sada imamo $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_i]$ pa je $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_i$, ali $\mathfrak{g}_i$ je prost pa je onda $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_i$.

□

Vidjeli smo koliko su dosad bile važne unutarnje derivacije, bez njih ne bismo mogli ni definirati Killingovu formu. Sljedeći teorem daje da su u slučaju poluproste Liejeve algebre to i jedine derivacije.

Teorem 2.4.9. *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra. Tada vrijedi* $\mathrm{Der}\, \mathfrak{g} = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$, *odnosno svaka derivacija od $\mathfrak{g}$ je unutarnja.*

Za dokaz pogledajte [3]

Jordan-Chevalleyeva dekompozicija

U **2.2** smo se podsjetili na Jordanov rastav linearnog operatora. Sada želimo napraviti sličnu stvar za elemente Liejeve algebre, dakle želimo ih rastaviti na poluprostu i nilpotentnu komponentu. Prije toga, naravno, moramo definirati što nam označavaju ti pojmovi.

Definicija 2.4.10. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra. Za $X \in \mathfrak{g}$ kažemo da je **poluprost** ako je ad_X poluprost, odnosno dijagonalizabilan operator. Za $Y \in \mathfrak{g}$ kažemo da je **nilpotentan** ako je ad_Y nilpotentan operator.*

Neka je sada $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra. Za svaki $X \in \mathfrak{g}$ postoji dekompozicija $\mathrm{ad}_X = (\mathrm{ad}_X)_s + (\mathrm{ad}_X)_n$, a ovo su sve elementi od $\mathrm{Der}\, \mathfrak{g}$ (ova tvrdnja nije trivijalna, za dokaz pogledajte [4]), pa onda po teoremu 2.4.9. i elementi od $\mathrm{ad}\, \mathfrak{g}$. Dakle postoje jedinstveni $X_{(s)}, X_{(n)} \in \mathfrak{g}$ takvi da vrijedi $(\mathrm{ad}_X)_s = \mathrm{ad}_{X_{(s)}}, (\mathrm{ad}_X)_n = \mathrm{ad}_{X_{(n)}}$ jer je ad injektivno preslikavanje. Po definiciji je $X_{(s)}$ poluprost, a $X_{(n)}$ nilpotentan element u $\mathfrak{g}$. Osim toga, vrijedi

$$\mathrm{ad}_{[X_{(s)}, X_{(n)}]} = [\mathrm{ad}_{X_{(s)}}, \mathrm{ad}_{X_{(n)}}] = [(\mathrm{ad}_X)_{(s)}, (\mathrm{ad}_X)_{(n)}] = 0$$

pa je $[X_{(s)}, X_{(n)}] = 0$ zbog injektivnosti od ad.

$X_{(s)}$ zovemo **poluprosti dio**, a $X_{(n)}$ **nilpotentni dio** elementa $X \in \mathfrak{g}$, a rastav $X = X_{(s)} + X_{(n)}$ zovemo **Jordan-Chevalleyeva dekompozicija** elementa X.

Kod ovakvih dekompozicija obično imamo jedinstvenost, a ni ova nije iznimka. Pokažimo to. Pretpostavimo da su $Y, Z \in \mathfrak{g}$ takvi da je Y poluprost, Z nilpotentan element, vrijedi $X = Y + Z$ i $[Y, Z] = 0$. Uz ove pretpostavke ad_Y je poluprost, a ad_Z nilpotentan operator na $\mathfrak{g}$. Osim toga, vrijedi $\mathrm{ad}_X = \mathrm{ad}_Y + \mathrm{ad}_Z$ i $[\mathrm{ad}_Y, \mathrm{ad}_Z] = 0$. Sada konačno imamo $\mathrm{ad}_Y = (\mathrm{ad}_X)_s = \mathrm{ad}_{X_{(s)}}$, $\mathrm{ad}_Z = (\mathrm{ad}_X)_n = \mathrm{ad}_{X_{(n)}}$ pa onda i $Y = X_{(s)}, Z = X_{(n)}$ jer je ad injektivan.

Poglavlje 3

Weylov teorem potpune reducibilnosti

3.1 Casimirov operator

Neka je $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike 0. Definiramo jednu simetričnu bilinearnu formu, slično Killingovoj formi, pridruženu reprezentaciji π na način

$$B_\pi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{F}, \quad B_\pi(X, Y) = \mathrm{Tr}(\pi(X)\pi(Y)), \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

Pokažimo neka svojstva ove forme.

Propozicija 3.1.1. *Neka je $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*

(1) $B_\pi([X, Y], Z) = B_\pi(X, [Y, Z]), \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

(2) Ako je $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$, onda je i $\mathfrak{h}^\pi = \{X \in \mathfrak{g} : B_\pi(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\}$ ideal u $\mathfrak{g}$

(3) Ako je B_π nedegenerirana forma i $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$, onda je $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\pi$ komutativan ideal.

Dokaz. (1) Uzmimo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, raspisujemo:

$$\begin{aligned} B_\pi([X, Y], Z) &= \mathrm{Tr}(\pi([X, Y])\pi(Z)) \\ &= \mathrm{Tr}(\pi(X)\pi(Y)\pi(Z)) - \mathrm{Tr}(\pi(Y)\pi(X)\pi(Z)) \\ &= \mathrm{Tr}(\pi(X)\pi(Y)\pi(Z)) - \mathrm{Tr}(\pi(X)\pi(Z)\pi(Y)) \\ &= \mathrm{Tr}(\pi(X)\pi([Y, Z])) \\ &= B_\pi(X, [X, Z]) \end{aligned}$$

(2) Za $X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}, Z \in \mathfrak{h}^\pi$ iz (1) imamo $B_\pi(X,[Y,Z]) = B_\pi([X,Y],Z) = 0$ pa je $[Y,Z] \in \mathfrak{h}^\pi$, dakle je $[\mathfrak{h}^\pi, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}^\pi$.

(3) Za $X, Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\pi, Z \in \mathfrak{g}$ imamo $[Y,Z] \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{h}^\pi$ pa prema (1) imamo $B_\pi([X,Y],Z) = B_\pi(X,[Y,Z]) = 0$. Iz ovoga slijedi $[X,Y] \in \mathfrak{g}^\pi, \forall X, Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\pi$, a zbog pretpostavke o nedegeneriranosti je $\mathfrak{g}^\pi = \{0\}$. Dakle $[\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\pi, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\pi] = \{0\}$.

□

Prije iduće propozicije, koja nam daje sličan rezultat kao u slučaju Killingove forme, napomenimo da se injektivna reprezentacija obično zove vjernom reprezentacijom.

Propozicija 3.1.2. *Neka je $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ vjerna reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada je B_π nedegenerirana.*

Dokaz. Prema prethodnoj propoziciji $\mathfrak{g}^\pi$ je ideal u $\mathfrak{g}$. Ako je π vjerna reprezentacija, onda je $\mathfrak{g}$ izomorfna $\pi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ pa možemo odmah pretpostaviti da je $\mathfrak{g}$ poluprosta linearna Liejeva algebra, a π ulaganje. Za $X, Y \in \mathfrak{g}^\pi$ tada je $\mathrm{Tr}(XY) = B_\pi(X,Y) = 0$ pa po Cartanovom kriteriju $\mathfrak{g}^\pi$ je rješiva. Kako je $\mathfrak{g}$ poluprosta sada je $\mathfrak{g}^\pi = \{0\}$.

□

Teorem 3.1.3. *Neka je π vjerna reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ na vektorskom prostoru V. Neka je $\{X_1, ..., X_n\}$ baza za $\mathfrak{g}$ i $\{Y_1, ..., Y_n\}$ njoj biortogonalna baza u odnosu na B_π u smislu*

$$B_\pi(X_i, Y_j) = \delta_{i,j}, \ \forall i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Neka je $C_\pi : V \to V$ linearni operator zadan sa

$$C_\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi(X_i)\pi(Y_i).$$

Tada

(1) C_π ne ovisi o izboru baze $\{X_1, ..., X_n\}$

(2) $C_\pi \pi(X) = \pi(X) C_\pi, \forall X \in \mathfrak{g}$, odnosno C_π je homomorfizam reprezentacija

(3) $\mathrm{Tr}(C_\pi) = \dim \mathfrak{g}$

(4) Ako je π ireducibilna, onda je C_π invertibilan.

Dokaz. (1) Neka je $\{X'_1, ..., X'_n\}$ neka druga baza od $\mathfrak{g}$ sa pripadnom biortogonalnom bazom $\{Y'_1, ..., Y'_n\}$. Označimo pripadne matrice prijelaza: neka su $A = [\alpha_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}, B = [\beta_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ takve da

$$X'_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} X_i, \quad Y'_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} Y_i, \ \ j = 1, ..., n.$$

Tada za $j, k \in \{1, ..., n\}$ imamo

$$\delta_{jk} = B_\pi(X'_j, Y'_k) = \sum_{i,l=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{lk} B_\pi(X_i, Y_l) = \sum_{i,l=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{lk}\delta_{il} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{ik},$$

a to znači da vrijedi $(A^{-1})^{\mathcal{T}} = B$, a onda i

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{ki} = \delta_{jk}, \forall j, k \in \{1, ..., n\}.$$

Konačno, imamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \pi(X'_i)\pi(Y'_i) &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \alpha_{ji}\beta_{ki}\pi(X_j)\pi(Y_k) \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \delta_{jk}\pi(X_j)\pi(Y_k) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \pi(X_j)\pi(Y_j)\end{aligned}$$

(2) Neka je $X \in \mathfrak{g}$ i neka su λ_{ij}, μ_{ij} dani sa

$$[X, X_j] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} X_i, \quad [X, Y_j] = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} Y_i, \ \ i = 1, ..., n.$$

Zbog propozicije 3.1.1.(1) za sve $i, k \in \{1, ..., n\}$ imamo

$$\begin{aligned}\lambda_{ki} &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji}\delta_{jk} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} B_\pi(X_j, Y_k) \\ &= B_\pi([X, X_i], Y_k) = -B_\pi(X_i, [X, Y_k]) \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \mu_{jk} B_\pi(X_i, Y_j) = -\sum_{j=1}^{n} \mu_{jk}\delta_{ij} \\ &= -\mu_{ik}.\end{aligned}$$

Za proizvoljne $A, B, C \in \mathfrak{gl}(V)$ vrijedi $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$. Zato imamo

$$\begin{aligned}
[\pi(X), C_\pi] &= \sum_{i=1}^{n} [\pi(X), \pi(X_i)\pi(Y_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big([\pi(X), \pi(X_i)]\pi(Y_i) + \pi(X_i)[\pi(X), \pi(Y_i)] \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(\pi([X, X_i])\pi(Y_i) + \pi(X_i)\pi([X, Y_i]) \Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\lambda_{ji}\pi(X_j)\pi(Y_i) + \mu_{ji}\pi(X_i)\pi(Y_j) \Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ji}\pi(X_j)\pi(Y_i) - \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij}\pi(X_i)\pi(Y_j) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

a to točno znači da imamo traženu jednakost.

(3)

$$\mathrm{Tr}(C_\pi) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}(\pi(X_i)\pi(Y_i)) = \sum_{i=1}^{n} B_\pi(X_i, Y_i) = n = \dim \mathfrak{g}.$$

(4) Prema (2) i (3) imamo $C_\pi \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) \setminus \{0\}$, a prema Schurovoj lemi (2.1.2.(2)) je svaki element od $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) \setminus \{0\}$ invertibilan.

□

Definicija 3.1.4. *Operator C_π iz teorema 3.1.3. zovemo* ***Casimirov operator reprezentacije*** *π.*

Teorem je zahtijevao da reprezentacija bude vjerna, pa implicitno i definicija Casimirovog operatora to zahtijeva. Međutim, kada nemamo vjernu reprezentaciju potrebna nam je mala modifikacija. Dakle, ako je $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ netrivijalna reprezentacija, onda ju možemo promatrati kao vjernu reprezentaciju kvocijenta $\mathfrak{g}/_{\ker \pi}$. Pripadni Casimirov operator ćemo jednako označavati i opet ga zvati Casimirovim operatorom reprezentacije π.

3.2 Weylov teorem

Obzirom da je ovaj teorem bio konačni cilj ovog rada, a i općenito je fundamentalni rezultat teorije Liejevih algebri, zaslužio je dobiti vlastito poglavlje. Obzirom da je sve dosad bila samo priprema za ovaj teorem možemo odmah preći na njegov dokaz.

Teorem 3.2.1. (Hermann Weyl) *Svaka reprezentacija poluproste Liejeve algebre je potpuno reducibilna.*

Dokaz. Neka je $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. U slučaju da je $\pi = 0$ imamo $\operatorname{Im} \pi = \{0\}$ pa je reprezentacija potpuno reducibilna kao prazna suma ireducibilnih reprezentacija.
Isto tako, ako je π ireducibilna, onda V nema pravih netrivijalnih π-invarijantnih potprostora pa nemamo što dokazivati.

Pretpostavimo sada da je W pravi netrivijalan π-invarijantan potprostor od V; želimo pokazati da postoji potprostor W' od V koji je π-invarijantan i vrijedi $V = W \oplus W'$.

Dokažimo prvo specijalan slučaj: neka je W potprostor kodimenzije 1. Prema korolaru 2.4.7. je $\pi_{V/W}(X) = 0, \forall X \in \mathfrak{g}$, iz čega imamo $\pi(X)(V) \subset W, \forall X \in \mathfrak{g}$.
Pretpostavimo još i da je π_W ireducibilna podreprezentacija ili 0. Ako je $\pi_W = 0$, onda zbog $\pi(X)(V) \subset W, \forall X \in \mathfrak{g}$, imamo $\pi(X)\pi(Y) = \pi_W(X)\pi(Y) = 0, \forall X, Y \in \mathfrak{g}$.
Tada zbog $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (teorem 2.4.5.) imamo

$$\pi(\mathfrak{g}) = \pi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\pi(\mathfrak{g}), \pi(\mathfrak{g})] = \operatorname{span}\{\pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X), X, Y \in \mathfrak{g}\} = \{0\}$$

pa za W' možemo uzeti bilo koji direktan komplement od W u V.
Ako je $\pi_W \neq 0$, onda po teoremu 3.1.3.(4) $C_\pi|_W = C_{\pi_W} \in \operatorname{Gl}(W)$.
Zbog $C_\pi(V) \subset W$ sada je $\operatorname{Im} C_\pi = W$.
Dakle $\operatorname{Ker} C_\pi$ je jednodimenzionalni potprostor od V koji je direktan komplement od W. Zbog teorema 3.1.3.(2) $\operatorname{Ker} C_\pi$ je π-invarijantan pa onda možemo staviti $W' := \operatorname{Ker} C_\pi$.

Oslabimo sada pretpostavku na π_W, sada ne mora biti ireducibilna reprezentacija, ali ostavljamo pretpostavku da je W kodimenzije 1. Dokazujemo indukcijom po $\dim V$. Baza indukcije, $\dim V = 1$, je trivijalna pa pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za prostore dimenzije manje od $\dim V$. Ako π_W nije ireducibilna, neka je $U \neq \{0\}$ π-invarijantan potprostor od W takav da je π_U ireducibilna. Ponovno promatramo kvocijentnu reprezentaciju, $\pi_{V/U}$. W/U je $\pi_{V/U}$-invarijantan potprostor od V/U kodimenzije 1. Zbog $\dim V/U < \dim V$ po pretpostavci postoji $\pi_{V/U}$-invarijantan potprostor Z od V/U takav da je $V/U = W/U \oplus Z$.

Neka je $Z' = \{v \in V : v+U \in Z\}$, dakle $Z = Z'/U$. Tada je Z' π-invarijantan i vrijedi $\dim Z'/U = 1, Z' \cap W = U$. Ponovno koristimo korolar 2.4.7. pa imamo $\pi(X)(Z') \subset U, \forall X \in \mathfrak{g}$. Po pretpostavci indukcije, zbog $\dim Z' = \dim U + 1 < \dim W + 1 = \dim V$, postoji $\pi_{Z'}$-invarijantan potprostor W' od Z' takav da je $Z' = U \oplus W'$. W' je tada i π-invarijantan i vrijedi $V = W \oplus W'$.

Konačno, pokažimo tvrdnju teorema u punoj općenitosti, dakle π je sada proizvoljna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na V i W je bilo koji π-invarijantan potprostor od V. Neka je $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$ reprezentacija dana sa

$$\rho(X)(A) = [\pi(X), A] = \pi(X)A - A\pi(X), \quad X \in \mathfrak{g}, A \in \mathfrak{gl}(V).$$

Neka su T i U potprostori od $\mathfrak{gl}(V)$ dani sa

$$T = \{A \in \mathfrak{gl}(V) : A(V) \subset W, A|_W = \lambda \, \mathrm{I}_W \text{ za neki } \lambda \in \mathbb{F}\}$$

$$U = \{A \in \mathfrak{gl}(V) : A(V) \subset W, A|_W = 0\}.$$

Tada je U potprostor od T kodimenzije 1. Tvrdimo da su U i T ρ-invarijantni. Neka je $A \in T$ proizvoljan i λ pripadni skalar iz definicije od T. W je π-invarijantan pa za svaki $v \in V$ vrijedi

$$\rho(X)(A)(v) = (\pi(X)A)(v) - (A\pi(X))(v) \in W,$$

a za $w \in W$ imamo

$$\rho(X)(A)(w) = (\pi(X)A)(w) - (A\pi(X))(w) = \lambda\pi(X)(w) - \lambda\pi(X)(w) = 0 = \mathbf{0}(w).$$

To pokazuje da je $\rho(X)(T) \subset U$ pa slijedi da su T i U ρ-invarijantni. Prema prethodnom dijelu dokaza postoji ρ_T-invarijantan potprostor U' od T takav da je $T = U \oplus U'$. Kao ranije imamo $\rho_{U'}(X) = 0, \forall X \in \mathfrak{g}$ jer je U' jednodimenzionalan, dakle $[\pi(X), A] = 0, \forall X \in \mathfrak{g}, \forall A \in U'$. Sada imamo $\pi(X)A = A\pi(X)$ pa su svi elementi iz U' zapravo homomorfizmi reprezentacija (π i π).
U' je potprostor od T komplementaran U pa postoji $A \in U'$ takav da je $A(V) \subset W$ i $A|_W = \mathrm{I}_W$. Tada je A zapravo projektor prostora V na potprostor W. Tada za $W' := \operatorname{Ker} A$ vrijedi $V = W \oplus W'$. W' je π-invarijantan zbog $\pi(X)A = A\pi(X), \forall X \in \mathfrak{g}$. Ovime smo dobili da je π potpuno reducibilna.

□

Za kraj dokažimo jednu zanimljivu i važnu posljedicu Weylovog teorema.

Teorem 3.2.2. *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta linearna Liejeva algebra. Tada se Jordan-Chevalleyeva dekompozicija elemenata iz $\mathfrak{g}$ podudara sa Jordanovom dekompozicijom.*

Dokaz. Neka je V vektorski prostor takav da je $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ i neka je $X \in \mathfrak{g}$. Neka je $X = X_s + X_n$ Jordanova dekompozicija od X u $\mathfrak{gl}(V)$. Pokažemo li da se X_s i X_n nalaze u $\mathfrak{g}$, gotovi smo. Zbog jedinstvenosti ovih rastava onda mora vrijediti $X_{(s)} = X_s, X_{(n)} = X_n$, a to je upravo tvrdnja teorema.
Za početak, vrijedi $\mathrm{ad}_X(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ pa onda i $\mathrm{ad}_{X_s}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}, \mathrm{ad}_{X_n}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$, jer su X_s i X_n polinomi od X bez konstantnog člana. Dakle, X_s i X_n su elementi **normalizatora** od $\mathfrak{g}$ u $\mathfrak{gl}(V)$,

$$\mathfrak{n} = \{Y \in \mathfrak{gl}(V) : [Y, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}\}$$

Neka je W bilo koji ι-invarijantan potprostor od V, pri čemu je ι reprezentacija od $\mathfrak{g}$ dana ulaganjem u $\mathfrak{gl}(V)$. Definiramo

$$\mathfrak{g}_W = \{Y \in \mathfrak{gl}(V) : Y(W) \subset W, \mathrm{Tr}(Y|_W) = 0\}.$$

$\mathfrak{g}$ je poluprosta pa je po teoremu 2.4.5. $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$; zato je $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_W$, za svaki ι-invarijantan potprostor W. Sada je $\mathfrak{g}$ sadržana i u

$$\mathfrak{g}^* := \bigcap_W \mathfrak{g}_W.$$

Vrijedi i: ako je $X \in \mathfrak{g}$, onda se X_s i X_n nalaze u $\mathfrak{g}^*$, za to treba vidjeti da se nalaze u svakom $\mathfrak{g}_W$. Da čuvaju W znamo jer su polinomi od X; za drugi uvjet koristimo teorem 2.2.1.(4) pa imamo $\mathrm{Tr}(X_n|_W) = \mathrm{Tr}(X|_W)_n = 0$ jer je to nilpotentan operator, a tvrdnja za X_s onda slijedi iz aditivnosti traga i $\mathrm{Tr}(X|_W) = 0$.

Sada želimo pokazati $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*$; time će dokaz biti gotov.
Prema Weylovom teoremu postoji $\iota_{\mathfrak{g}^*}$-invarijantan potprostor $\mathfrak{h}$ takav da je $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$.
$\mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{n}$ pa je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*] \subset \mathfrak{g}$, stoga je djelovanje od $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{h}$ trivijalno.
Neka je W neki potprostor od V takav da je podreprezentacija ireducibilna. Ako je $Y \in \mathfrak{h}$, onda je zbog ranije primjedbe $[\mathfrak{g}, Y] = \{0\}$ pa prema Schurovoj lemi Y djeluje na W kao skalar.
S druge strane, $Y \in \mathfrak{g}_W$ pa je $\mathrm{Tr}(Y|_W) = 0$, dakle $Y = 0$.
Slijedi $\mathfrak{h} = \{0\}$, odnosno $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*$.

□

Poglavlje 4

Primjeri

Najvažniji primjeri Liejevih algebri su svakako oni matrični, tako da će svi navedeni primjeri biti upravo skupovi posebnih vrsta matrica.

$\mathfrak{gl}(V)$, opća Liejeva algebra

Općom Liejeva algebrom smo se bavili većinom ovog rada, tako da je ovdje navedena samo da ne bi bila nepravedno izostavljena. Naravno, pripadnu matričnu algebru dobivamo fiksiranjem baze za V i promatranjem matričnog prikaza linearnog operatora u toj bazi.

4.1 Klasične Liejeve algebre

Sada možemo promatrati druge linearne Liejeve algebre, opet uz istu identifikaciju linearnog operatora i njegovog matričnog prikaza. Sljedeći primjeri pripadaju Liejevim algebrama koje obično zovemo **klasične algebre**, iz čega je jasno da zaista pripadaju najvažnijim primjerima.

$\mathfrak{sl}(V)$, specijalna linearna algebra

Ovaj primjer je već spomenut u korolaru 2.4.6., ali ponovimo definiciju:

$$\mathfrak{sl}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) : \mathrm{Tr}(X) = 0\}$$

Zbog $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX), \forall X, Y \in \mathfrak{gl}(V)$ jasno je da vrijedi $[\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] \subset \mathfrak{sl}(V)$; posebno imamo da je $\mathfrak{sl}(V)$ ideal u $\mathfrak{gl}(V)$.

Odredimo sada $\dim \mathfrak{sl}(V)$. Neka je $\dim V = n$. $\mathfrak{sl}(V)$ je pravi potprostor od $\mathfrak{gl}(V)$ pa je $\dim \mathfrak{sl}(V)$ najviše $n^2 - 1$. Da bismo pokazali da je $\dim \mathfrak{sl}(V) = n^2 - 1$, trebamo pronaći $n^2 - 1$ nezavisan vektor u $\mathfrak{sl}(V)$. Pogledajmo prvo kanonsku bazu za prostor matrica; jasno je da će nam sve matrice kojima se jedinica ne nalazi na dijagonali biti dobre. Preciznije, ako je $\{E_{ij}, i, j \in \{1, ..., n\}\}$ kanonska baza za $\mathfrak{gl}(V)$, onda je skup $\{E_{ij}, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\} \cup \{E_{ii} - E_{i+1,i+1}, 1 \leq i \leq n\}$ linearno nezavisan, nalazi se u $\mathfrak{sl}(V)$ i ima $(n^2 - n) + (n - 1) = n^2 - 1$ elemenata. Dakle zaista vrijedi $\dim \mathfrak{sl}(V) = n^2 - 1$.

$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{F})$, simplektička algebra

Već iz same oznake za ovu Liejeveu algebru vidimo da ćemo promatrati samo vektorske prostore parne dimenzije, odnosno matrice sa parnim brojem stupaca, inače se koristi i oznaka $\mathfrak{sp}(V)$ uz dodatnu napomenu da je dimenzija parna. Razlog ovakvog ograničenja na dimenziju je sljedeća činjenica: ako postoji nedegenerirana antisimetrična bilinearna forma $Q : V \times V \to \mathbb{F}$, dakle takva da vrijedi $Q(v, w) = -Q(w, v), \forall v, w \in V$, onda je $\dim V$ nužno paran broj.
Neka je sada Q neka nedegenerirana antisimetrična linearna forma na V. Tada definiramo

$$\mathfrak{sp}(V) = \{A \in \mathfrak{gl}(V) : Q(A(v), w) = -Q(v, A(w)),\ \forall v, w \in V\}.$$

Uočimo da se u oznaci za simplektičku algebru nigdje ne pojavljuje forma Q; promjenom forme Q dobili bismo izomorfnu Liejevu algebru. Ipak, da bismo zapisali gornji uvjet tako da dobijemo eksplicitne uvjete na matricu, trebamo fiksirati jednu formu Q. Obično se izabere tako da, ako je baza za V jednaka $\{e_1, ..., e_n\}$, Q zadovoljava

$$\begin{aligned} Q(e_i, e_{i+n}) &= 1, i \in \{1, ..., n\} \\ Q(e_{i+n}, e_i) &= -1, i \in \{1, ..., n\} \\ Q(e_i, e_j) &= 0, j \geq i, j \neq i + n. \end{aligned}$$

Sada Q možemo pisati u obliku

$$Q(X, Y) = X^{\tau}\, J\, Y,$$

gdje je J dana kao blok-matrica, $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$, pri čemu I_n standardno označava jediničnu matricu ranga n. Sada možemo reći da je $A \in \mathfrak{sp}(V)$ ako zadovoljava

$A^\tau J = -J\,A$. Zapišemo li A kao blok-matricu,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} \in M_n(\mathbb{F}),$$

imamo

$$A^\tau J = \begin{bmatrix} -A_{21}^\tau & A_{11}^\tau \\ -A_{22}^\tau & A_{12}^\tau \end{bmatrix}, \; J\,A = \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ -A_{11} & -A_{12} \end{bmatrix}.$$

Sada gornji uvjet prelazi u

$$\begin{bmatrix} -A_{21}^\tau & A_{11}^\tau \\ -A_{22}^\tau & A_{12}^\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{21} & -A_{22} \\ A_{11} & A_{12} \end{bmatrix},$$

iz čega dobivamo uvjete

$$A_{11}^\tau = -A_{22},\; A_{12}^\tau = A_{12},\; A_{21}^\tau = A_{21}.$$

Odavde imamo i $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{F}) \subset \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{F})$.
Napomenimo još da je $\dim \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{F}) = 2n^2 + n$.

$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{F})$, ortogonalna algebra

Ovoga puta ne stavljamo nikakvo ograničenje na dimenziju prostora, samo ćemo posebno promatrati slučaj neparne i parne dimenzije. Dakle, neka je sada V vektorski prostor dimenzije $2n+1$. Opet će nam biti potrebna jedna nedegenerirana linearna forma, ovoga puta simetrična. Kao i u prošlom primjeru, treba nam neka određena forma da bismo dobili uvjete na matricu. Obično se uzima ona oblika

$$Q(X,Y) = X^\tau J\,Y,\; X,Y \in V, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu sve nule u matrici označavaju prikladno dimenzionirane nul-matrice. Prostor $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{F})$ ćemo sada definirati istim uvjetom kao i $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{F})$,

$$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{F}) = \{A \in \mathfrak{gl}(V) : Q(A(v),w) = -Q(v,A(w)), \forall v,w \in V\}$$

Ovisno o literaturi, ortogonalna algebra se označava i sa $\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{F})$.

Označimo sada $A \in \mathfrak{gl}(V)$ na način

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}. \end{bmatrix}$$

Ovdje je a_{11} označen malim slovom jer je jedini skalar, ostali elementi su blok-matrice, da budemo u skladu sa izgledom matrice J. Sada raspisujući uvjet da bi A pripadala $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{F})$ analogno prošlom primjeru dobivamo

$$A \in \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{F}) \quad \Leftrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{13}^{\tau} & A_{22} & A_{23} \\ -A_{12}^{\tau} & A_{32} & -A_{22}^{\tau} \end{bmatrix}, \ A_{23}^{\tau} = -A_{23}, \ A_{32}^{\tau} = -A_{32}.$$

I ovdje sada imamo $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{F}) \subset \mathfrak{sl}_{2n+1}(\mathbb{F})$, a vrijedi i $\dim \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{F}) = 2n^2 + n$.

Napomena 4.1.1. *Q smo u ovom primjeru mogli izabrati i jednostavnije, mogli smo staviti $J = I_{2n+1}$, ali u tom slučaju bismo dobili samo antisimetrične matrice, a onda bi jedina dijagonalna matrica koja zadovoljava gornje uvjete bila nul-matrica. Uz naš izbor Q ova Liejeva algebra sadrži mnogo dijagonalnih matrica, što donosi izvjesne prednosti u daljnjem razvoju teorije. S druge strane, sve Liejeve algebre dobivene pomoću različitih Q međusobno su izomorfne.*

$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{F})$, ortogonalna algebra

Konstrukcija je jednaka onoj iz prošlog primjera, jedino što je sada dimenzija prostora parna i zato je ovaj slučaj malo jednostavniji. Sada matrica J ima paran broj stupaca pa nam više nije potrebna jedinica na prvom mjestu, odnosno sada imamo

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Jednakost koju matrica A mora zadovoljavati da bi se nalazila u $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{F})$ je ista, samo zbgo promjene matrice J sada imamo

$$A \in \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{F}) \quad \Leftrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11}^{\tau} \end{bmatrix}, \ A_{12}^{\tau} = -A_{12}, \ A_{21}^{\tau} = -A_{21}.$$

Sada ponovno dobivamo matrice traga 0, a dimenzija ovog prostora je $2n^2 - n$.

Za klasične Liejeve algebre koriste se i ove oznake:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_n &= \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{F}), \\ \mathfrak{B}_n &= \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{F}), \\ \mathfrak{C}_n &= \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{F}), \\ \mathfrak{D}_n &= \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{F}), n \geq 1. \end{aligned}$$

Pritom vrijedi da su sve navedene Liejeve algebre proste osim $\mathfrak{D}_1$ i $\mathfrak{D}_2$. Vrijedi $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{C}_2$ i $\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{D}_3$. Ovo su jedini izomorfizmi među navedenim Liejevim algebrama. Konačnodimenzionalne proste kompleksne Liejeve algebre su klasificirane na način da je svaka takva ili jedna od klasičnih algebri ili je jedna od iznimaka koje su jednostavno označene sa: $\mathfrak{G}_2, \mathfrak{F}_4, \mathfrak{E}_6, \mathfrak{E}_7, \mathfrak{E}_8$.

4.2 Reprezentacije od $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$

Već smo ranije odredili bazu ovog prostora; napišimo ju sada uz standardno korištene oznake za ovaj prostor:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Njihovi komutatori zadovoljavaju

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Neka je $\pi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \to \mathfrak{gl}(V)$ neka reprezentacija. Iz Weylovog teorema, točnije teorema 3.2.2., imamo da je $\pi(H)$ dijagonalizabilan, budući da je H poluprost. Zato V možemo prikazati kao direktnu sumu svojstvenih potprostora za $\pi(H)$, označimo ih sa

$$V_\lambda = \{v \in V : \pi(H)(v) = \lambda v\}, \quad \lambda \in \sigma(\pi(H)).$$

Svaki $\lambda \in \sigma(\pi(H))$ zovemo **težina** od H, a V_λ zovemo **težinski prostor**.
Sljedeća lema nam daje jedan zanimljiv odnos među težinama.

Lema 4.2.1. *Ako je $v \in V_\lambda$, onda je $\pi(X)(v) \in V_{\lambda+2}$ i $\pi(Y)(v) \in V_{\lambda-2}$.*

Dokaz.

$$\begin{aligned} \pi(H)(\pi(X)(v)) &= \pi([H, X])(v) + \pi(X)(\pi(H)(v) \\ &= 2\pi(X)(v) + \lambda\, \pi(X)(v) \\ &= (\lambda + 2)\pi(X)(v), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\pi(H)(\pi(Y)(v)) &= \pi([H,Y])(v) + \pi(Y)(\pi(H)(v)) \\
&= -2\pi(Y)(v) + \lambda\,\pi(Y)(v) \\
&= (\lambda - 2)\pi(Y)(v).
\end{aligned}
$$

□

Obzirom da je V direktna suma težinskih prostora, zbog prethodne leme mora postojati težina λ takva da je $V_{\lambda+2} = \{0\}$. Za taj λ svaki nenul vektor iz V_λ zovemo **maksimalni vektor** težine λ.

Iskoristimo sada ova razmatranja da bismo opisali ireducibilne reprezentacije od $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. Pretpostavimo sada da je $\pi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \to \mathfrak{gl}(V)$ ireducibilna reprezentacija. Uzmimo neki maksimalni vektor i označimo ga s v_0. Dalje definiramo niz vektora na način

$$
\begin{aligned}
v_{-1} &= 0, \\
v_k &= \frac{1}{k!}\pi(Y)^k(v_0), k \geq 0.
\end{aligned}
$$

Tada vrijedi:

(1) $\pi(H)(v_k) = (\lambda - 2k)v_k$,

(2) $\pi(Y)(v_k) = (k+1)v_{k+1}$,

(3) $\pi(X)(v_k) = (\lambda - k + 1)v_{k-1}, k \geq 0$.

(1) slijedi višestrukom primjenom prethodne leme, a (2) iz definicije od v_k. Preostalo je još pokazati (3), to radimo indukcijom. Baza indukcije je jednostavna, svodi se na trivijalnu jednakost $0 = 0$. Za korak indukcije imamo

$$
\begin{aligned}
k\pi(X)(v_k) &= \pi(X)\pi(Y)(v_{k-1}) && (\textit{iz definicije od } v_k) \\
&= \pi([X,Y])(v_{k-1}) + \pi(Y)\pi(X)(v_{k-1}) \\
&= \pi(H)(v_{k-1}) + (\lambda - k + 2)\pi(Y)(v_{k-2}) && (\textit{pretpostavka indukcije}) \\
&= (\lambda - 2(k-1))v_{k-1} + (k-1)(\lambda - k + 2)v_{k-1} \\
&= k(\lambda - k + 1)v_{k-1}
\end{aligned}
$$

Preostaje podijeliti sa k.

Zbog (1) svi $v_k \neq 0$ se nalaze u različitim svojstvenim potprostorima pa su linearno nezavisni. Obzirom da je V konačnodimenzionalan, sada mora postojati $m \in \mathbb{Z}$ takav da je $v_m \neq 0, v_{m+1} = 0$; uzmimo najmanji takav. Za takav m vrijedi $v_{m+k} = 0, \forall k > 0$. Iz (1),(2) i (3) sada imamo da $\{v_0, ..., v_m\}$ čini bazu π-invarijantnog potprostora od V. Obzirom da smo pretpostavili da je reprezentacija ireducibilna ovime smo dobili bazu za čitav V.
Uočimo još nešto: u ovoj bazi $\pi(H)$ ima dijagonalnu, $\pi(X)$ gornjetrokutastu, a $\pi(Y)$ donjetrokutastu matricu.

Vratimo se jednakosti (3), za $k = m + 1$ lijeva strana je jednaka nuli, a desna $(\lambda - m)v_m$. Obzirom da smo v_m uzeli kao maksimalan vektor, on ne može biti nulvektor pa imamo $\lambda = m$. To znači da je težina maksimalnog vektora pozitivan cijeli broj jednak $\dim V - 1$. Težinu maksimalnog vektora obično zovemo **najvećom težinom** od V. Nadalje, iz (1) i gornje baze imamo da svaki težinski prostor ima dimenziju 1. Vidjeli smo da je najveća težina jedinstveno određena samim prostorom V pa dobivamo da je maksimalni vektor jedinstveno određen do na nenul skalar.
Dakle, V je jednak direktnoj sumi težinskih prostora V_μ, $\mu = m, m-2, ..., -(m-2), -m$, gdje je $\dim V = m + 1$ i $\dim V_\mu = 1$ za sve μ.

Uzmimo sada proizvoljnu reprezentaciju π od $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. Tada imamo

(1) Sve svojstvene vrijednosti od $\pi(H)$ su cjelobrojne i svaka se pojavljuje zajedno sa svojom negativnom vrijednošću.

(2) U svakoj dekompoziciji reprezentacije na ireducibilne sumande broj tih sumanada je točno $\dim V_0 + \dim V_1$.

Ako je $V = \{0\}$ nemamo što dokazivati. Za $V \neq \{0\}$ koristimo Weylov teorem pa reprezentaciju možemo rastaviti kao direktnu sumu ireducibilnih podreprezentacija. Ireducibilne reprezentacije smo upravo opisali u gornjim razmatranjima i time odbivamo tvrdnju (1).
Za tvrdnju (2) dovoljno je primijetiti da se kod svake ireducibilne subreprezentacije kao svojstvena vrijednost za $\pi(H)$ pojavljuje točno jedna od vrijednosti iz $\{0, 1\}$.

Moguće je u potpunosti opisati sve ireducibilne reprezentacije svake poluproste Liejeve algebre, ali to je znatno teže nego u slučaju $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ i prelazi okvire ovog rada.

Bibliografija

[1] William Fulton i Joe Harris, *Representation theory: a first course*, sv. 129, Springer, 1991.

[2] Roe Goodman i Nolan R Wallach, *Symmetry, representations, and invariants*, sv. 65, Springer, 2009.

[3] James Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, sv. 9, Springer, 1972.

[4] H. Kraljević, *Liejeve algebre*, 2013, `http://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2012-13/LA.pdf`.

Sažetak

Cilj uvodnog dijela ovog rada je bio motivacija za proučavanje kako općenito Liejevih algebri tako i poluprostih Liejevih algebri. U tu svrhu uveden je pojam Liejeve grupe i izneseni su glavni rezultati o vezi Liejeve grupe sa pripadnom Liejevom algebrom. Eksplicitno je konstruiran funktor **Lie** koji Liejevoj grupi pridružuje Liejvu algebru. Zapravo, taj funktor uspostavlja ekvivalenciju između 1-povezanih Liejevih grupa i konačnodimenzionalnih realnih Liejevih algebri.

Dane su definicije svih pojmova važnih za ovaj rad: Liejeve algebre, reprezentacije, derivacije. Uvedene su i određene važne klase ovih objekata poput rješive i poluproste Liejeve algebre, ireducibilne i potpuno reducibilne reprezentacije, unutarnjih derivacija.

Nakon uvođenja pojmova dokazani su osnovni rezultati vezani uz Liejeve algebre i reprezentacije, najvažniji među njima su Engelov teorem, Liejev teorem, Schurova lema i Cartanovi kriteriji rješivosti. Zatim su dana neka važna svojstva poluprostih Liejevih algebri i dokazan je kriterij poluprostote preko Killingove forme.

Zatim je uveden pojam Casimirovog operatora reprezentacije i dokazana su njegova osnovna svojstva. Sve navedeno bila je priprema za dokaz fundamentalnog teorema u teoriji reprezentacija i Liejevih algebri, Weylovog teorema, koji kaže da je konačnodimenzionalna reprezentacija poluproste Liejeve algebre potpuno reducibilna.

Nakon rezultata iz teorije navedeni su matrični primjeri Liejevih algebri i opisane su reprezentacije od $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ korištenjem Weylovog teorema.

Summary

The purpose of the introductory part is the motivation to study Lie algebras and particularly semisimple Lie algebras. Therefore the concept of Lie group was introduced, as well as the main results about the close connection between the Lie group and its Lie algebra. We constructed a functor **Lie** taking Lie groups to Lie algebras. This functor in fact gives an equivalence between simply connected Lie groups and finite dimensional real Lie algebras.

Most important definitions are given: Lie algebra, representation, derivation. Also, some important classes of these objects are introduced, like solvable and semisimple Lie algebras, irreducible and completely reducible representations, inner derivations.

Afterwards the main results of the theory of Lie algebras and representations are given; the most important are certainly Engel's theorem, Lie's theorem, Schur's lemma and Cartan's solvability criteria. The main object in this study are semisimple Lie algebras, therefore some important properties of semisimple Lie algebras are given. Also, we got one crucial semisimplicity criterion using the Killing form.

To get to the fundamental theorem of this study the concept of Casimir element is introduced and the main properties are proved. Afterwards we are ready to prove Weyl's theorem, which states that any finite dimensional representation of a semisimple Lie algebra is completely reducible.

After the theoretical part, some examples of Lie algebras are mentioned; these examples belong to matrix algebras. Also, using Weyl's theorem all representations of $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ are described.

Životopis

Karmen Grizelj rođena je dana 12.7.1991. u Zagrebu. U Zagrebu pohađa Osnovnu školu Josipa Jurja Strossmayera od 1997. do 2005. godine. 2005. godine upisuje opću gimnaziju, II gimnaziju u Zagrebu. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja sudjeluje na brojnim natjecanjima. Od državnih natjecanja sudjeluje na onima iz matematike, kemije, fizike, latinskog i grčkog jezika. 2007. godine dobiva pohvalu Povjerenstva, a 2008. godine treću nagradu na natjecanjima iz matematike.

Gimnaziju završava 2009. godine i tada upisuje Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Studij završava 2012. godine i nastavlja obrazovanje upisom Diplomskog studija Teorijske matematike na istom fakultetu. Tijekom tog studija radi kao mentor za matematička natjecanja učenicima II gimnazije s kojima postiže zavidne rezultate na natjecanjima.