SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Maja Štajduhar

HILBERTOV PROSTOR

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, srpanj, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Želim se zahvaliti svom mentoru, doc. dr. sc. Zvonku Iljazoviću, na pomoći i uloženom trudu pri izradi diplomskog rada. Također zahvaljujem prijateljima s kojima sam dijelila trenutke tokom studiranja. Na kraju najviše hvala mojoj obitelji koja mi je bila najveća potpora i oslonac u svim trenutcima.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **2**

1 Definicije i osnovna svojstva **3**
1.1 Vektorski i metrički prostori 3
1.2 Euklidska metrika na $\mathbb{R}$ 5
1.3 Omeđeni i konvergentni nizovi 8
1.4 Konvergencija reda 15

2 Hilbertov prostor i njegova svojstva **21**
2.1 Definicija Hilbertovog prostora 21
2.2 Hilbertov prostor kao potprostor vektorskog prostora 23
2.3 Zatvoreni skupovi 27
2.4 Separabilnost 31
2.5 Potpunost 34
2.6 Konveksnost 40

Uvod

Ovim radom želimo pokazati svojstva Hilbertovog prostora koji je jedan od zanimljivijih prostora u topologiji. Hilbertov prostor služi kao bitna poveznica koja spaja analizu i topologiju. Topologija je jedno područje matematike koje se razvilo iz geometrije. Dok su za geometriju karakteristični pojmovi kutovi i udaljenost u topologiji su od interesa pojmovi kao što su povezanost, potpunost i sl.

Osoba koja je zaslužna za ovaj prostor je njemački matematičar David Hilbert, rođen 23. siječnja 1862. godine u Königsbergu. Rastao je uz oca Otto Hilbera, koji je bio cijenjeni gradski sudac i majke Marie, koja je proučavala filozofiju i astronomiju. Smatra se da je Hilbertova majka bila očarana prirodnim brojevima i pravilnim tijelima. Moguće je da upravo zbog toga Hilbert pokazao odlično znanje matematike u ranim godinama. Bavio se teorijom brojeva, matematičkom logikom, osnovama matematike, diferencijalnim i integralnim jednadžbama, dokazao je konzistentnost aksioma euklidske geometrije te je dao 1899. godine novu aksiomatizaciju euklidske geometrije. David Hilbert je teorijski oblikovao Hilbertov prostor i utemeljio je funkcionalnu analizu. U knjizi *Grundlagen der Geometrie*, 1899. riješio je problem zasnivanja elementarne geometrije na aksiomatskoj osnovi. 1900. godine Hilbert i matematičarska zajednica na Drugom kongresu matematičara postavili su 23 matematička problema. Neki od njegovih problema nisu još riješeni. Do 1912. godine Hilbert postaje jedan od najcjenjenijih matematičara i planira posjetiti Bonn gdje je upoznao tada svog budućeg prijatelja Hermana Minkowskog koji je zaslužan za većinu Hilbertovih istraživanja u fizici. David Hilbert radio je kao editor jednog vodećeg matematičkog časopisa između 1902. – 1939. godine. U svojoj 68. godini prisilno je morao otići u mirovinu sa sveučilišta zbog zakona koji zabranjuje židovima rad u obrazovnim ustanovama. 14. veljače 1943. godine Hilbert umire od stresa i zdravstvenih problema.

Hilbertov prostor danas se primjenjuje u teoriji diferencijalnih i integralnih jednadžbi. On tvori okvir za Fourierove redove i redove drugih funkcija te je osnovni objekt u aksiomatskom zasnivanju kvantne mehanike.

U ovom diplomskom radu, u prvom poglavlju objasnit ćemo neke osnovne činjenice vezane uz vektorski i metrički prostor. Proučit ćemo konvergentne nizove i redove. U drugom poglavlju definirat ćemo Hilbertov prostor te povezujući elementarna svojstva iz prvog poglavlja ispitat ćemo od kakvih nizova se on sastoji. Dokazat ćemo da je Hilbertov prostor potprostor vektorskog prostora, da je separabilan i potpun te ćemo dokazat da je strogo konveksan bez grananja.

Poglavlje 1

Definicije i osnovna svojstva

1.1 Vektorski i metrički prostori

Neka je X neprazan skup te $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima sljedeća svojstva:

1. $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$,
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$,
4. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$, $\forall x, y, z \in X$.

Tada za d kažemo da je **metrika** na X, a za uređeni par (X, d) kažemo da je **metrički prostor**.

Neka je V skup te $+$ binarna operacija na V, tj. $+\colon V \times V \to V$ funkcija sa svojstvima:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in V$ (asocijativnost),
2. postoji $0 \in V$ tako da $x + 0 = 0 + x = x$, $\forall x \in V$ (postojanje neutralnog elementa),
3. za svaki $x \in V$ postoji $y \in V$ takav da je $x + y = y + x = 0$ (postojanje suprotnog elementa),
4. $x + y = y + x$, $\forall x, y \in V$ (komutativnost).

Zadana je i funkcija $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ koja ima svojstva za sve $x, y \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

1. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$,
2. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$,
3. $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$,
4. $1 \cdot x = x$.

Za $(V, +, \cdot)$ kažemo da je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ ili realni vektorski prostor.

Primjer 1.1.1. *Neka je $\mathbb{R}^n$ skup svih uređenih n-torki realnih brojeva, tj.*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Na skupu $\mathbb{R}^n$ definirana je operacija zbrajanja $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:
ako su $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ elementi iz $\mathbb{R}^n$ tada je njihov zbroj jednak

$$x + y = (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n).$$

Na ovom skupu je definirana operacija množenja vektora skalarom, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ na sljedeći način:

$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1, ..., x_n) := (\lambda x_1, ..., \lambda x_n) \text{ za sve } x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Uz te operacije $\mathbb{R}^n$ postaje vektorski prostor.

Neka je $(V, +, \cdot)$ realni vektorski prostor. Neka je $\langle \,|\, \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle$, funkcija takva da vrijedi:

1. $\langle x_1 + x_2 \mid y \rangle = \langle x_1 \mid y \rangle + \langle x_2 \mid y \rangle$ za sve $x_1, x_2, y \in V$,
2. $\langle \lambda x \mid y \rangle = \lambda \langle x \mid y \rangle$ za sve $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in V$,
3. $\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$ za sve $x, y \in V$,
4. $\langle x \mid x \rangle \geq 0$, $\langle x \mid x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ za svaki $x \in V$.

Za $\langle \,|\, \rangle$ kažemo da je skalarni produkt na $(V, +, \cdot)$, a za $(V, +, \cdot, \langle \,|\, \rangle)$ kažemo da je unitarni prostor.

Propozicija 1.1.2. *Neka je* $(V, +, \cdot, \langle \mid \rangle)$ *unitarni prostor. Tada za sve* $x, y \in V$ *vrijedi Cauchy-Schwartz-Buniakowsky nejednakost:*

$$\langle x \mid y \rangle^2 \leq \langle x \mid x \rangle \cdot \langle y \mid y \rangle .$$

Dokaz. Uzmimo da su $x, y \in V$. Ako je $y = 0$ nejednakost vrijedi (iz definicije skalarnog produkta lako dobivamo da je $\langle x \mid 0 \rangle = 0$).

Pretpostavimo da je $y \neq 0$. Definirajmo funkciju

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

s $f(t) = \langle x + ty \mid x + ty \rangle$, za svaki $t \in \mathbb{R}$. Uočimo da je $f(t) \geq 0$, za svaki $t \in \mathbb{R}$. Nadalje, za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle x \mid x + ty \rangle + \langle ty \mid x + ty \rangle \\ &= \langle x \mid x \rangle + \langle x \mid ty \rangle + \langle ty \mid x \rangle + \langle ty \mid ty \rangle \\ &= \langle x \mid x \rangle + 2t \langle x \mid y \rangle + t^2 \langle y \mid y \rangle . \end{aligned}$$

Uvedimo supstituciju

$$c = \langle x \mid x \rangle , b = 2 \langle x \mid y \rangle \text{ i } a = \langle y \mid y \rangle .$$

Imamo $a > 0$ te $at^2 + bt + c \geq 0$ za svaki $t \in \mathbb{R}$.

Kako je $a > 0$ tada je funkcija konveksna i vrijedi da je $b^2 - 4ac \leq 0$ pa je $b^2 \leq 4ac$ te je

$$4\langle x \mid y \rangle^2 \leq 4 \cdot \langle x \mid x \rangle \langle y \mid y \rangle$$

što povlači $\langle x \mid y \rangle^2 \leq \langle x \mid x \rangle \cdot \langle y \mid y \rangle$. □

1.2 Euklidska metrika na $\mathbb{R}$

Definicija 1.2.1. *Neka je* $(V, +, \cdot, \langle \mid \rangle)$ *unitarni prostor. Za* $x \in V$ *definiramo* $||x|| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.

Propozicija 1.2.2. *Neka je* $(V, +, \cdot, \langle \mid \rangle)$ *unitarni prostor. Vrijedi:*

1. $||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *za svaki* $x \in V$,
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ *za svaki* $x \in V, \lambda \in \mathbb{R}$,
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *za sve* $x, y \in V$.

Dokaz. Iz definicije skalarnog produkta lako dobivamo prva dva svojstva. Ostaje nam jedino dokazati treće svojstvo koristeći propoziciju 1.1.2:

$$\langle x \mid y\rangle^2 \leq \langle x \mid x\rangle \cdot \langle y \mid y\rangle$$

$$\Rightarrow |\langle x \mid y\rangle| \leq \sqrt{\langle x \mid x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y \mid y\rangle}$$

$$\Rightarrow \langle x \mid y\rangle \leq \sqrt{\langle x \mid x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y \mid y\rangle}$$

$$\Leftrightarrow \langle x \mid x\rangle + 2\,\langle x \mid y\rangle + \langle y \mid y\rangle \leq \langle x \mid x\rangle + 2\,||x||\,||y|| + \langle y \mid y\rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle x + y \mid x + y\rangle \leq ||x||^2 + 2\,||x||\,||y|| + ||y||^2$$

$$\Leftrightarrow ||x + y||^2 \leq (||x|| + ||y||)^2$$

$$\Leftrightarrow ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||\,.$$

□

Definicija 1.2.3. *Neka je* $(V, +, \cdot)$ *vektorski prostor te neka je* $||\ ||\colon V \to \mathbb{R}$ *funkcija koja ima sljedeća svojstva:*

1. $||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *za svaki* $x \in V$,
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ *za sve* $x \in V, \lambda \in \mathbb{R}$,
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *za sve* $x, y \in V$.

Tada za $||\ ||$ *kažemo da je* ***norma*** *na vektorskom prostoru* $(V, +, \cdot)$*, a za* $(V, +, \cdot, ||\ ||)$ *kažemo da je* ***normirani vektorski prostor****.*

VIDJELI SMO: ako je $(V, +, \cdot, \langle\ |\ \rangle)$ unitarni prostor onda je funkcija $||\ || : V \to \mathbb{R}$, definirana sa

$$||x|| = \sqrt{\langle x \mid x\rangle}$$

norma na $(V, +, \cdot)$, dakle $(V, +, \cdot, ||\ ||)$ je normiran prostor.

Za $||\ ||$ kažemo da norma na $(V, +, \cdot)$ inducirana skalarnim produktom $\langle\ |\ \rangle$.

Neka je $(V, +, \cdot, ||\ ||)$ normiran (realan) vektorski prostor. Definirajmo funkciju $d\colon V \times V \to \mathbb{R}$ s

$$d(x, y) = ||x - y||\,.$$

Tada je d metrika na V. Dokažimo to.

Za sve $x, y \in V$ vrijedi $d(x, y) \geq 0$ jer je $||v|| \geq 0$ za svaki $v \in V$.

- Neka su $x, y \in V$. Imamo

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

- Za sve $x, y \in V$ vrijedi

$$\begin{aligned} d(x, y) = \|x - y\| &= \|(-1)(y - x)\| \\ &= |-1|\, \|y - x\| \\ &= \|y - x\| \\ &= d(y, x). \end{aligned}$$

- Neka su $x, y, z \in V$. Vrijedi

$$d(x, z) = \|z - x\| = \|(z - y) + (y - x)\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| = d(x, y) + d(y, z).$$

Dakle d je zaista metrika na V. Za d kažemo da je metrika inducirana normom $\| \ \|$.

Primjer 1.2.4. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Funkcija $\| \ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$\|(x_1, ..., x_n)\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2}$$

je norma na $\mathbb{R}^n$ (pri čemu na $\mathbb{R}^n$ gledamo standardnu strukturu vektorskog prostora).

Naime, $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ pri čemu je $\langle \mid \rangle$ standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$:

$$\langle (x_1, ..., x_n) \mid (y_1, ..., y_n) \rangle = x_1 \cdot y_1 + ... + x_n \cdot y_n.$$

Dakle $\| \ \|$ je norma inducirana skalarnim produktom $\langle \mid \rangle$.

Neka je d metrika na $\mathbb{R}^n$ inducirana normom $\| \ \|$. Za d kažemo da je euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Dakle za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $d(x, y) = \|x - y\|$, tj. za sve $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

U slučaju $n = 1$, tj. kada je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$, imamo da je

$$d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|,$$

tj. $d(x, y) = |x - y|$, za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

1.3 Omeđeni i konvergentni nizovi

Neka je X skup. Za svaku funkciju s $\mathbb{N}$ u X kažemo da je niz u X. Ako je $x\colon \mathbb{N} \to X$ niz onda za $n \in \mathbb{N}$ umjesto $x(n)$ obično pišemo x_n. Funkciju x označavano s $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili (x_n).

Neka je (x_n) niz realnih brojeva (tj. niz u $\mathbb{R}$) te neka je $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da (x_n) teži ili konvergira prema a ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|x_n - a| < \epsilon$$

za svaki $n \geq n_0$. U tom slučaju za broj a kažemo da je limes niza (x_n) i pišemo $x_n \to a$.

Za niz (x_n) u $\mathbb{R}$ kažemo da je konvergentan ako postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$.

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$. Za a kažemo da je gornja međa skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi da je $x \leq a$. Za $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je odozgo omeđen ako postoji $a \in \mathbb{R}$ tako da je a gornja međa od S.

Ako je $S \subseteq \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$ onda za a kažemo da je donja međa skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi da je $a \leq x$.

Za $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je odozdo omeđen ako postoji $a \in \mathbb{R}$ tako da je a donja međa od S.

Za skup S kažemo da je omeđen ako je omeđen odozgo i odozdo.

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$. Za a kažemo da je supremum skupa S ako vrijedi:

1. a je gornja međa od S
2. za svaku gornju među a' od S vrijedi $a \leq a'$

Drugim riječima, a je supremum od S ako je a najmanja gornja međa od S. Ako su a_1 i a_2 supremumi skupa S, onda je $a_1 \leq a_2$ jer je a_2 gornja međa od S te je također

$$a_2 \leq a_1$$

jer je a_1 gornja međa od S. Prema tome

$$a_1 = a_2.$$

Ovim smo pokazali da supremum skupa ako postoji mora biti jedinstven. Supremum skupa S označavamo sa $\sup S$.

Nadalje ako je S skup koji ima supremum (tj. postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je a supremum od S), onda je S neprazan i odozgo omeđen. (Svaki broj $a \in \mathbb{R}$ je gornja međa praznog skupa, pa je očito da prazan skup nema najmanju gornju među.)

Aksiom potpunosti. *Neka su X i Y neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $x \leq y$ $\forall x \in X$ i $\forall y \in Y$. Tada postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq z \leq y$, $\forall x \in X$ i $\forall y \in Y$.*

Propozicija 1.3.1. *Neka je S neprazan odozgo omeđen podskup od $\mathbb{R}$. Tada S ima supremum, tj. postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je a supremum od S.*

Dokaz. Definirajmo T kao skup svih gornjih međa skupa S. Skup T je neprazan jer postoji barem jedna gornja međa od S (S je po pretpostavci odozgo omeđen). Očito je $s \leq t$, $\forall s \in S$ i $\forall t \in T$. Prema aksiomu potpunosti postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je $s \leq a \leq t$, $\forall s \in S$ i $\forall t \in T$. Iz ovoga je jasno da je a supremum od S. □

Primjer 1.3.2. *Neka je $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$. Tada je skup $\{q^n : n \in \mathbb{N}\}$ odozgo neomeđen.*

Pretpostavimo suprotno. Tada prema propoziciji 1.3.1 taj skup ima supremum koji ćemo označiti s a. Očito je $a > 0$ pa iz $\frac{1}{q} < 1$ slijedi

$$\frac{a}{q} < a.$$

Ovo povlači da $\frac{a}{q}$ nije gornja međa tog skupa. Stoga postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{a}{q} < q^n$. Slijedi da je

$$a < q^{n+1}$$

što je u kontradikciji s činjenicom da je a supremum skupa $\{q^n : n \in \mathbb{N}\}$. Prema tome skup

$$\{q^n : n \in \mathbb{N}\}$$

je odozgo neomeđen.

Primjer 1.3.3. *Neka je $q \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < q < 1$ te neka je (x_n) niz realnih brojeva definiran s $x_n = q^n$. Tada $x_n \to 0$.*

Neka je $\epsilon > 0$. Uočimo da je $\frac{1}{q} > 1$. Stoga je prema prethodnom primjeru skup

$$\left\{\left(\frac{1}{q}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$$

odozgo neomeđen. Slijedi da $\frac{1}{\epsilon}$ nije gornja međa ovog skupa. Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{1}{\epsilon} < \left(\frac{1}{q}\right)^{n_0}$$

iz čega slijedi da je $q^{n_0} < \epsilon$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$. Tada je $n - n_0 \geq 0$ pa iz $0 < q < 1$ slijedi $q^{n-n_0} \leq 1$. Množenjem ove nejednakosti s q^{n_0} dobivamo nejednakost $q^n \leq q^{n_0}$. Stoga je $q^n < \epsilon$ tj.

$$|q^n - 0| < \epsilon.$$

Dakle $|x_n - 0| < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. Prema tome $x_n \to 0$.

Neka je (x_n) niz realnih brojeva. Za (x_n) kažemo da je rastući niz ako je $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Uočimo sljedeće: ako je (x_n) rastući niz te ako su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $i \leq j$ onda je $x_i \leq x_j$. Uočimo sljedeće: ako su $x, y, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ onda je

$$|x - y| < r \Leftrightarrow y \in \langle x - r, x + r\rangle .$$

Naime,

$$|x - y| < r \Leftrightarrow x - y < r \text{ i } -x + y < r$$

$$\Leftrightarrow x - r < y \text{ i } y < x + r$$

$$\Leftrightarrow y \in \langle x - r, x + r\rangle .$$

Definicija 1.3.4. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$. Za niz (x_n) kažemo da je omeđen ako je njegova slika omeđena u $\mathbb{R}$, tj. $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ omeđen skup u $\mathbb{R}$.*

Propozicija 1.3.5. *Neka je (x_n) rastući niz u $\mathbb{R}$ te pretpostavimo da je $a \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $a = sup\,\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Tada $x_n \to a$.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Imamo $a - \epsilon < a$. Iz ovoga slijedi da $a - \epsilon$ nije gornja međa skupa $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a - \epsilon < x_{n_0}$. Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$a - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \epsilon$$

pa je

$$x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon\rangle ,$$

tj. $|x_n - a| < \epsilon$. Prema tome

$$|x_n - a| < \epsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Time smo dokazali da $x_n \to a$. □

Korolar 1.3.6. *Neka je (x_n) omeđen i rastući niz u $\mathbb{R}$. Tada je (x_n) konvergentan.*

Dokaz. Kako je (x_n) omeđen i rastući niz u $\mathbb{R}$ tada prema 1.3.1 i 1.3.5 slijedi da je (x_n) konvergentan. □

Propozicija 1.3.7. *Neka su (x_n) i (y_n) nizovi realnih brojeva te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to a$ i $y_n \to b$.*

Tada niz $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $a + b$. Nadalje niz $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $-a$.

Dokaz. Imamo $|-x_n - (-a)| = |-x_n + a| = |x_n - a|, \forall n \in \mathbb{N}$.

Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|x_n - a| < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. Stoga je $|-x_n - (-a)| < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. Prema tome $-x_n \to -a$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\begin{aligned} |x_n + y_n - (a + b)| &= |x_n + y_n - a - b| \\ &= |x_n - a + y_n - b| \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b|, \end{aligned}$$

dakle

$$|x_n + y_n - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|. \tag{1.1}$$

Neka je $\epsilon > 0$. Budući da $x_n \to a$ i $y_n \to b$ postoje $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \ \forall n \geq n_0 \ \text{ i } \ |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}, \ \forall n \geq m_0.$$

Neka je $k_0 = \max\{m_0, n_0\}$. Tada je $m_0 \leq k_0$ i $n_0 \leq k_0$.

Neka je $n \geq k_0$. Tada je $n \geq n_0$ i $n \geq m_0$, pa je

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \ \text{ i } \ |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Iz (1.1) slijedi tada da je

$$|x_n + y_n - (a + b)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dakle $|x_n + y_n - (a + b)| < \epsilon, \forall n \geq k_0$. Time smo dokazali da $x_n + y_n \to a + b$.

□

Propozicija 1.3.8. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$. Neka je $c \in \mathbb{R}$. Tada $cx_n \to ca$.*

Dokaz. Ako je $c = 0$ tvrdnja je jasna. Uzmimo da je $c \neq 0$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{|c|}.$$

Iz ovoga slijedi da je

$$|c| \cdot |x_n - a| < \epsilon,$$

tj. $|cx_n - ca| < \epsilon$ za svaki $n \geq n_0$. Time je tvrdnja dokazana. □

Propozicija 1.3.9. *Neka su (x_n) i (y_n) nizovi realnih brojeva te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to a$ i $y_n \to b$. Tada $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$.*

Dokaz. Budući da $y_n \to b$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|y_n - b| < 1$ za svaki $n \geq n_0$. Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|y_n| = |y_n - b + b| \leq |y_n - b| + |b| < 1 + |b| .$$

Dakle

$$|y_n| < 1 + |b| \tag{1.2}$$

za svaki $n \geq n_0$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2(1 + |b|)} \tag{1.3}$$

za svaki $n \geq n_1$. Nadalje postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|y_n - b| < \frac{\epsilon}{2(1 + |a|)} \tag{1.4}$$

za svaki $n \geq n_2$. Neka je $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Neka je $n \geq n_3$. Tada vrijedi (1.2), (1.3) i (1.4) pa dobivamo

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \\
&\leq |x_n - a|\,|y_n| + |a|\,|y_n - b| \\
&< \frac{\epsilon}{2(1 + |b|)} \cdot (1 + |b|) + |a| \cdot \frac{\epsilon}{2(1 + |a|)} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Dakle $|x_n y_n - ab| < \epsilon$ za svaki $n \geq n_3$. Prema tome $x_n y_n \to ab$.

□

Neka je (x_n) niz realnih brojeva. Neka je $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz definiran sa

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Za niz (s_n) kažemo da je niz parcijalnih suma niza (x_n). Za uređeni par $((x_n),(s_n))$ kažemo da je red i taj uređeni par označavamo sa

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \text{ ili } \sum x_n.$$

Definicija 1.3.10. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je (x_n) niz u X te neka je $a \in X$. Za niz (x_n) kažemo da konvergira ili teži prema a u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je*

$$d(x_n, a) < \epsilon$$

za svaki $n \geq n_0$. U tom slučaju pišemo $x_n \to a$.

Definicija 1.3.11. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka su $x_0 \in X$ i $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Definiramo*

$$K(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}.$$

Za $K(x_0, r)$ kažemo da je (otvorena) kugla oko x_0 radijusa r u metričkom prostoru (X, d).

Uočimo sljedeće: Ako je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$, onda niz (x_n) teži prema a u (X, d) ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in K(a, \epsilon)$, $\forall n \geq n_0$.

Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$, (x_n) niz u $\mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$. Tada niz (x_n) teži prema a (u smislu konvergencije u $\mathbb{R}$) ako i samo ako (x_n) teži prema a u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$.

Lema 1.3.12. *Neka je (X, d) metrički prostor te $a, b \in X$, $a \neq b$. Tada postoji $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ takav da je $K(a, r) \cap K(b, r) = \emptyset$.*

Dokaz. Iz $a \neq b$ slijedi da je $d(a, b) > 0$. Odaberimo pozitivan realan broj r takav da je

$$r < \frac{d(a, b)}{2}.$$

Tvrdimo da je $K(a, r) \cap K(b, r) = \emptyset$. Pretpostavimo da postoji $c \in X$ takav da je $c \in K(a, r)$ i $c \in K(b, r)$.

Tada je $d(c, a) < r$ i $d(c, b) < r$. Imamo

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq d(a, c) + d(c, b) \\ &= d(c, a) + d(c, b) < r + r = 2r. \end{aligned}$$

Prema tome $d(a, b) < 2r$ tj. $r > \frac{d(a,b)}{2}$, što je u kontradikciji s činjenicom da je

$$r < \frac{d(a, b)}{2}.$$

Prema tome $K(a, r) \cap K(b, r) = \emptyset$. □

Propozicija 1.3.13. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je (x_n) niz u X te neka su $a, b \in X$ takvi da $x_n \to a$ i $x_n \to b$. Tada je $a = b$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $a \neq b$. Prema prethodnoj lemi 1.3.12 postoji $r \in \mathbb{R}, r > 0$ takav da je

$$K(a, r) \cap K(b, r) = \emptyset. \tag{1.5}$$

Budući da $x_n \to a$ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in K(a, r)$ za svaki $n \geq n_1$. Budući da $x_n \to b$ postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in K(b, r)$ za svaki $n \geq n_2$. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_1$, $n \geq n_2$. Tada je $x_n \in K(a, r)$ i $x_n \in K(b, r)$ što je u kontradikciji s (1.5). Prema tome $a = b$.

□

Definicija 1.3.14. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$. Za a kažemo da je limes niza (x_n) u (X, d) ako $x_n \to a$.*

Propozicija 1.3.13 nam kaže da je limes niza u metričkom prostoru ako postoji jedinstven.

Korolar 1.3.15. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to a$, $x_n \to b$. Tada je $a = b$.*

Dokaz. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Tada $x_n \to a$, $x_n \to b$ u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$ pa iz propozicije 1.3.13 slijedi da je $a = b$. □

Definicija 1.3.16. *Neka je (X, d) metrički prostor te (x_n) niz u X. Kažemo da je (x_n) konvergentan niz u (X, d) ako postoji $a \in X$ takav da $x_n \to a$. U tom slučaju a označavamo s*

$$\lim_{n \to \infty} x_n.$$

1.4 Konvergencija reda

Definicija 1.4.1. *Neka je* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *red, dakle*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = ((x_n), (s_n)),$$

pri čemu je (x_n) *niz realnih brojeva, a* (s_n) *pripadni niz parcijalnih suma. Za red* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *kažemo da je konvergentan ako je niz* (s_n) *konvergentan. U tom slučaju limes niza* (s_n) *nazivamo suma reda* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *i označavamo sa* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$*. Dakle,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Definicija 1.4.2. *Neka je* (x_n) *niz realnih brojeva te* $N \in \mathbb{N}$*. Definirajmo niz* (s_k) *sa*

$$s_k = \sum_{n=N}^{N+k-1} x_n.$$

Za uređeni par $((x_n), (s_n))$ *kažemo da je* ***N-red*** *i označavamo ga sa* $\sum_{n\geq N} x_n$*, a za* (s_k) *kažemo da je niz parcijalnih suma tog N-reda. Kažemo da N-red* $\sum_{n\geq N} x_n$ *konvergira ako njegov niz parcijalnih suma konvergira i u tom slučaju limes niza parcijalnih suma označavamo sa*

$$\sum_{n=N}^{\infty} x_n.$$

Uočimo da je $\sum x_n = \sum_{n\geq 1} x_n$*.*

Lema 1.4.3. *Neka je* (x_n) *niz realnih brojeva, neka je* $N \in \mathbb{N}_0$ *te neka je* (y_n) *niz u* $\mathbb{R}$ *definiran s* $y_n = x_{n+N}$*. Neka je* $a \in \mathbb{R}$*. Tada* $x_n \to a$ *ako i samo ako* $y_n \to a$*.*

Dokaz. Pretpostavimo da $x_n \to a$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|x_n - a| < \epsilon, \forall n \geq n_0$. Za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $n + N \geq n_0$ pa je $|x_{n+N} - a| < \epsilon$, tj. $|y_n - a| < \epsilon$. Dakle $|y_n - a| < \epsilon$ za svaki $n \geq n_0$. Prema tome $y_n \to a$.

Pretpostavimo obratno da $y_n \to a$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|y_n - a| < \epsilon$ za svaki $n \geq n_0$, tj.

$$|x_{n+N} - a| < \epsilon \text{ za svaki } n \geq n_0. \tag{1.6}$$

Neka je $n \geq n_0 + N$. Tada je $n - N \geq n_0$ pa iz (1.6) slijedi da je

$$|x_{n-N+N} - a| < \epsilon,$$

tj. $|x_n - a| < \epsilon$. Dakle $|x_n - a| < \epsilon$ za svaki $n \geq n_0 + N$. Prema tome $x_n \to a$.

$\square$

Propozicija 1.4.4. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $N \in \mathbb{N}$. Tada red $\sum x_n$ konvergira ako i samo ako konvergira N-red $\sum\limits_{n \geq N} x_n$ i u tom slučaju vrijedi da je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{N-1} x_n + \sum_{n=N}^{\infty} x_n.$$

Dokaz. Neka su (t_k) i (s_k) nizovi definirani s $t_k = \sum\limits_{n=1}^{k} x_n$ i $s_k = \sum\limits_{n=N}^{N+k-1} x_n$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$s_k = \sum_{n=1}^{N+k-1} x_n - \sum_{n=1}^{N-1} x_n = t_{N+k-1} - c,$$

gdje je $c = \sum\limits_{n=1}^{N-1} x_n$ konstanta. Dakle

$$s_k = t_{k+(N-1)} - c, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Pretpostavimo da je red $\sum x_n$ konvergentan. Neka je $a = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Tada $t_k \to a$ pa iz leme 1.4.3 slijedi da $t_{k+(N-1)} \to a$. Iz propozicije 1.3.7 i iz (1.7) slijedi da

$$s_k \to a - c.$$

Prema tome niz parcijalnih suma N-reda $\sum\limits_{n \geq N} x_n$ je konvergentan, tj. N-red $\sum\limits_{n \geq N} x_n$ je konvergentan i

$$\sum_{n=N}^{\infty} x_n = a - c = \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n=1}^{N-1} x_n.$$

Obratno pretpostavimo da je N-red $\sum\limits_{n \geq N} x_n$ konvergentan. Tada je (s_k) konvergentan niz. Prema (1.7) vrijedi

$$t_{k+(N-1)} = s_k + c \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Iz propozicije 1.3.7 slijedi da je niz $(t_{k+(N-1)})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergentan pa je prema lemi 1.4.3 niz (t_k) konvergentan, tj.

$$\sum x_n$$

je konvergentan red. $\square$

Propozicija 1.4.5. *Neka je* $\sum x_n$ *konvergentan red. Tada niz* $\left(\sum\limits_{n=N}^{\infty} x_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ *teži nuli.*

Dokaz. Prema propoziciji 1.4.4 za svaki $N \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{N} x_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} x_n$$

pa je

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n=1}^{N} x_n \tag{1.8}$$

Znamo da niz $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} x_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ teži prema $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Iz propozicije 1.3.7 i (1.8) slijedi da niz $\left(\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} x_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ teži nuli. Iz leme 1.4.3 slijedi tvrdnja propozicije. □

Propozicija 1.4.6. *Neka je* (x_n) *niz realnih brojeva te neka je* $N \in \mathbb{N}$. *Tada N-red* $\sum\limits_{n\geq N} x_n$ *konvergira ako i samo ako konvergira red* $\sum x_{n+N-1}$ *i u tom slučaju vrijedi*

$$\sum_{n=N}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+N-1}.$$

Dokaz. Neka je (s_k) niz parcijalnih suma N-reda $\sum\limits_{n\geq N} x_n$ te (t_k) niz parcijalnih suma reda

$$\sum x_{n+N-1}.$$

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Imamo

$$s_k = \sum_{n=N}^{N+k-1} x_n = x_N + x_{N+1} + ... + x_{N+k-1} = \sum_{n=1}^{k} x_{n+N-1} = t_k.$$

Dakle $s_k = t_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ pa tvrdnja propozicije slijedi. □

Definicija 1.4.7. *Neka je* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *red. Za* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *kažemo da je apsolutno konvergentan red ako je red* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ *konvergentan.*

Propozicija 1.4.8. *Neka su* $\sum x_n$ *i* $\sum y_n$ *konvergentni redovi. Tada je* $\sum (x_n + y_n)$ *konvergentan red i*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Nadalje $\sum (-x_n)$ *je konvergentan red i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-x_n) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n.$

Dokaz. Neka je (s_n) niz parcijalnih suma niza (x_n), te neka je (t_n) niz parcijalnih suma niza (y_n). Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$s_n + t_n = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i).$$

Prema tome $(s_n + t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je niz parcijalnih suma niza $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Prema propoziciji 1.3.7 niz $(s_n + t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ teži prema $\lim\limits_{n \to \infty} s_n + \lim\limits_{n \to \infty} t_n$, tj. prema $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

Zaključak:

Red $\sum (x_n + y_n)$ je konvergentan jer njegov niz parcijalnih suma (tj. niz parcijalnih suma pripadnog niza $(x_n + y_n)$) $(s_n + t_n)$ teži prema $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

Stoga je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$-s_n = -\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (-x_i).$$

Prema tome $(-s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je niz parcijalnih suma reda $\sum (-x_n)$, i on prema propoziciji 1.3.7 konvergira prema $-\lim\limits_{n \to \infty} s_n$, tj. prema $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Lema 1.4.9. *Neka je* (x_n) *rastući niz realnih brojeva te neka je* $a \in \mathbb{R}$ *takav da* $x_n \to a$. *Tada je* $x_n \leq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno.

Tada postoji neki $m \in \mathbb{N}$ takav da je $x_m > a$. Neka je

$$\epsilon = x_m - a.$$

Tada je $\epsilon > 0$ pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$$

za svaki $n \geq n_0$. Neka je $n = \max\{m, n_0\}$. Tada je

$$n \geq m \text{ i } n \geq n_0$$

pa slijedi $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$ što povlači da je

$$x_n < a + \epsilon.$$

No $a + \epsilon = x_m$ pa je $x_n < x_m$. S druge strane iz $m \leq n$ i činjenice da je dani niz rastući slijedi da je $x_m \leq x_n$, što je u kontradikciji s

$$x_n < x_m.$$

Prema tome $x_n \leq a$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

Lema 1.4.10. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te $a \in \mathbb{R}$ takav da je $x_n \to a$. Pretpostavimo da su $n_0 \in \mathbb{N}$ i $M \in \mathbb{R}$ takvi da je $x_n \leq M$ za svaki $n \geq n_0$. Tada je $a \leq M$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada je $M < a$. Neka je $\epsilon = a - M$. Tada je $\epsilon > 0$ pa postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|x_n - a| < \epsilon$ za svaki $n \geq m_0$, tj. $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$ za svaki $n \geq m_0$.

Odaberimo bilo koji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ i $n \geq m_0$. Tada je $a - \epsilon < x_n$. No prema definiciji broja ϵ vrijedi $M = a - \epsilon$. Prema tome $M < x_n$, što je u kontradikciji s pretpostavkom leme. Prema tome $a \leq M$. □

Lema 1.4.11. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da je $x_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq M$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je red $\sum x_n$ konvergentan.*

Dokaz. Neka je (s_n) niz parcijalnih suma reda $\sum x_n$. Prema pretpostavci, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $s_n \leq M$. Nadalje za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$s_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} = s_n + x_{n+1} \geq s_n,$$

dakle $s_{n+1} \geq s_n$. Prema tome niz (s_n) je rastući. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $s_1 \leq s_n \leq M$, prema tome skup

$$\{s_n | \, n \in \mathbb{N}\}$$

je omeđen u $\mathbb{R}$, tj. (s_n) je omeđen niz. Iz korolara 1.3.6 slijedi da je (s_n) konvergentan niz. Prema tome red $\sum x_n$ je konvergentan. □

Propozicija 1.4.12. *Neka je $\sum x_i$ apsolutno konvergentan red. Tada je $\sum x_i$ konvergentan red.*

Dokaz. Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo brojeve a_i^-, a_i^+ sa

$$a_i^+ = \begin{cases} x_i, & \text{ako je } x_i \geq 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

$$a_i^- = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x_i \geq 0 \\ -x_i, & \text{ako je } x_i < 0 \end{cases}.$$

Iz ove definicije je jasno da je $x_i = a_i^+ - a_i^-$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Nadalje uočimo da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $0 \leq a_i^+$ i $0 \leq a_i^-$, te $a_i^+ \leq |x_i|$, $a_i^- \leq |x_i|$. Slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^+ \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|. \tag{1.9}$$

Niz $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ je niz parcijalnih suma reda

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$$

koji je konvergentan prema pretpostavci propozicije. Stoga je $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz, a očito je taj niz rastući. Stoga postoji $M \in \mathbb{R}$ tako da je

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq M$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz (1.9) slijedi da je $\sum_{i=1}^{n} a_i^+ \leq M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema lemi 1.4.11 red

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^+$$

je konvergentan. Analogno zaključujemo da je red $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^-$ konvergentan. Iz propozicije 1.4.8 slijedi da je red $\sum_{i\in\mathbb{N}} (-a_i^-)$ konvergentan, pa iz iste propozicije slijedi da je red

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (a_i^+ - a_i^-)$$

konvergentan. To je upravo red $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$. □

Poglavlje 2

Hilbertov prostor i njegova svojstva

2.1 Definicija Hilbertovog prostora

Napomena 2.1.1. *Općenito ako su S i T neprazni skupovi onda s T^S označavamo skup svih funkcija $f\colon S \to T$.*

Na skupu $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, tj. skupu svih nizova realnih brojeva, definiramo binarnu operaciju $+\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ te "množenje skalarom" $\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sa:

$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} + (y_i)_{i\in\mathbb{N}} = (x_i + y_i)_{i\in\mathbb{N}},$$

$$\lambda \cdot (x_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\lambda \cdot x_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Tvrdimo da je $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ vektorski prostor (nad $\mathbb{R}$).

Neka je $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz definiran s $a_i = 0$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Neka su $(x_i), (y_i), (z_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ te neka su $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada je

$$((x_i) + (y_i)) + (z_i) = (x_i) + ((y_i) + (z_i))$$

jer je zbrajanje realnih brojeva asocijativno. Isto tako očito je

$$(x_i) + (y_i) = (y_i) + (x_i).$$

Nadalje imamo $(x_i) + (a_i) = (x_i)$, te $(x_i) + (-x_i) = (a_i)$. Iz distributivnosti množenja prema zbrajanju u $\mathbb{R}$ odmah slijede jednakosti

$$(\lambda + \mu)(x_i) = \lambda(x_i) + \mu(x_i) \text{ i } \lambda((x_i) + (y_i)) = \lambda(x_i) + \lambda(y_i).$$

Nadalje asocijativnost množenja u $\mathbb{R}$ povlači da je $\lambda(\mu(x_i)) = (\lambda\mu)(x_i)$. Očito je $1 \cdot (x_i) = (x_i)$. Prema tome $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ je vektorski prostor.

Definicija 2.1.2. *Neka je* l^2 *skup svih nizova realnih brojeva* (x_i) *takvih da je red* $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^2$ *konvergentan. Za* l^2 *kažemo da je Hilbertov prostor.*

Primjer 2.1.3. *Neka je* $(a_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *nulniz, tj. niz definiran sa* $a_i = 0$ *za svaki* $i \in \mathbb{N}$*. Tada je* $(a_i) \in l^2$*.*

Primjer 2.1.4. *Neka je* $(b_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *niz definiran s* $b_i = \frac{1}{2^i}$ *za svaki* $i \in \mathbb{N}$*. Promotrimo red*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (\frac{1}{2^i})^2.$$

Za $n \in \mathbb{N}$ *neka je* s_n *n-ta parcijalna suma ovog reda.*

Dakle

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2^i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^i} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} - 1 \\ &= \frac{4\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}{3} - 1 \\ &= \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{4} - 1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n, \end{aligned}$$

tj. $s_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$*, za svaki* $n \in \mathbb{N}$*.*

Iz primjera 2.1.4, propozicije 1.3.8 i propozicije 1.3.7 slijedi da $s_n \to \frac{1}{3}$. Ovim smo dokazali da je red $\sum (b_i)^2$ konvergentan. Slijedi da je $(b_i) \in l^2$.

Propozicija 2.1.5. *Neka je* $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$ *konvergentan red. Tada niz* (x_i) *teži* 0*.*

Dokaz. Neka je (s_n) niz parcijalnih suma reda $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$. Tada je (s_n) konvergentan niz pa postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da $s_n \to a$. Neka je (t_n) niz definiran s $t_n = s_{n+1}$. Prema lemi 1.4.3 vrijedi $t_n \to a$. Prema propoziciji 1.3.7 vrijedi $t_n - s_n \to 0$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$t_n - s_n = s_{n+1} - s_n = \sum_{i=1}^{n+1} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i = x_{n+1}.$$

Dakle $x_{n+1} \to 0$, pa iz leme 1.4.3 slijedi $x_n \to 0$. □

Lema 2.1.6. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, te neka su $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$. Tada je*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}.$$

Dokaz. Neka je $\langle \mid \rangle$ standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Neka je $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$. Prema propoziciji 1.1.2 vrijedi

$$\langle x \mid y \rangle^2 \leq \langle x \mid x \rangle \cdot \langle y \mid y \rangle$$

pa je $\langle x \mid y \rangle \leq \sqrt{\langle x \mid x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y \mid y \rangle}$. Time je lema dokazana. □

2.2 Hilbertov prostor kao potprostor vektorskog prostora

Propozicija 2.2.1. *l^2 je potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

Dokaz. Treba dokazati da je l^2 zatvoren na operacije $+$ i $\cdot$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ te da je l^2 uz te operacije i sam vektorski prostor. U tu svrhu dovoljno je provjeriti da je $(x_i) + (y_i) \in l^2$ i $\lambda(x_i) \in l^2$ za sve $(x_i), (y_i) \in l^2$ i za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$. Neka su $(x_i) \in l^2$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Za $n \in \mathbb{N}$ neka je s_n n-ta parcijalna suma reda

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^2,$$

te neka je t_n n-ta parcijalna suma reda $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} (\lambda x_i)^2$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda^2 {x_i}^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = \lambda^2 s_n.$$

Dakle $t_n = \lambda^2 s_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz ovoga, činjenice da je (s_n) konvergentan niz (jer je $(x_i) \in l^2$) i propozicije 1.3.8 slijedi da je i (t_n) konvergentan niz. Dakle $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} (\lambda x_i)^2$ je konvergentan red pa zaključujemo da je $(\lambda x_i) \in l^2$, tj. $\lambda \cdot (x_i) \in l^2$. Neka su $(x_i), (y_i) \in l^2$. Neka je s_n niz parcijalnih suma reda

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} {x_i}^2$$

te neka je (t_n) niz parcijalnih suma reda $\sum_{i\in\mathbb{N}} {y_i}^2$. Neka je (v_n) niz parcijalnih suma reda $\sum_{i\in\mathbb{N}} (x_i + y_i)^2$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$s_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + x_{n+1}^2 = s_n + x_{n+1}^2 \geq s_n,$$

tj. $s_{n+1} \geq s_n$. Dakle (s_n) je rastući niz. Analogno dobivamo da su (t_n) i (v_n) rastući nizovi. Niz (s_n) je konvergentan jer je $(x_i) \in l^2$, neka je njegov limes S. Isto tako (t_n) je konvergentan niz. Neka je njegov limes T. Imamo $s_n \to S$ i (s_n) je rastući niz pa iz leme 1.4.9 slijedi da je $s_n \leq S$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Isto tako vrijedi $t_n \leq T$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Koristeći lemu 2.1.6 dobivamo

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = s_n + 2\sqrt{s_n}\sqrt{t_n} + t_n$$

$$\leq S + 2\sqrt{S}\sqrt{T} + T.$$

Dakle $v_n \leq S + 2\sqrt{S}\sqrt{T} + T$. Iz ovoga zaključujemo da je (v_n) omeđeni niz, pa budući da je rastući imamo da je (v_n) konvergentan niz (korolar 1.3.6). Prema tome red $\sum_{i\in\mathbb{N}} (x_i + y_i)^2$ je konvergentan, a to znači da je $(x_i + y_i) \in l^2$. Dakle $(x_i) + (y_i) \in l^2$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Lema 2.2.2. *Neka su* $(x_i), (y_i) \in l^2$. *Tada je* $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i y_i$ *apsolutno konvergentan red.*

Dokaz. Neka su (s_n), (t_n) i (w_n) nizovi parcijalnih suma redova $\sum_{i\in\mathbb{N}} {x_i}^2$, $\sum_{i\in\mathbb{N}} {y_i}^2$ i $\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i y_i|$. Kao u dokazu prethodne propozicije zaključujemo da postoje nenegativni realni brojevi S, T takvi da je $s_n \leq S$ i $t_n \leq T$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Koristeći lemu 2.1.6 dobivamo

$$w_n = \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}$$
$$= \sqrt{s_n}\,\sqrt{t_n} \leq \sqrt{S}\,\sqrt{T}.$$

Dakle

$$w_n \leq \sqrt{S}\,\sqrt{T}. \tag{2.1}$$

Iz definicije niza (w_n) je jasno da je on rastući. Iz ovoga, (2.1) i korolara 1.3.6 slijedi da je (w_n) konvergentan niz. Dakle red $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_i y_i|$ je konvergentan pa je red $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} x_i y_i$ apsolutno konvergentan.

□

Lema 2.2.3. *Neka je $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergentan red te neka je $c \in \mathbb{R}$. Tada je $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} cx_n$ konvergentan red i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cx_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.*

Dokaz. Neka je (s_n) niz parcijalnih suma reda

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

te neka je (t_n) niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} cx_n$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} cx_n = c\sum_{i=1}^{n} x_n = cs_n,$$

dakle $t_n = cs_n$. Imamo $s_n \to \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, pa iz propozicije 1.3.8 slijedi da

$$cs_n \to c\sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

tj. $t_n \to c\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Dakle (t_n) je konvergentan niz, tj. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} cx_n$ je konvergentan red i

$$\sum_{n=1}^{\infty} cx_n = c\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

□

Neka je $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : l^2 \times l^2 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana tako da za $x, y \in l^2$, $x = (x_i), y = (y_i)$ vrijedi $\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$.

Propozicija 2.2.4. *Funkcija $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ je skalarni produkt na l^2.*

Dokaz. Neka je $x \in l^2$, $x = (x_i)$. Imamo $\langle x \mid x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i{}^2$. Neka je (s_n) niz parcijalnih suma reda $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i{}^2$. Dakle $s_n \to \langle x \mid x \rangle$, a očito je niz (s_n) rastući. Iz leme 1.4.9 slijedi da je $s_n \leq \langle x \mid x \rangle$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle

$$\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \leq \langle x \mid x \rangle$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa zaključujemo da je $x_i^2 \leq \langle x \mid x \rangle$ za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Iz ovoga slijedi da je $\langle x \mid x \rangle \geq 0$. Nadalje, ako je $\langle x \mid x \rangle = 0$ onda je $x_i^2 = 0$, tj. $x_i = 0$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa je x nulniz, a to je nulvektor u vektorskom prostoru l^2. Obratno, ako je x nulniz onda je $x_i = 0$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa je $s_n = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ što povlači da $s_n \to 0$. Stoga je $\langle x \mid x \rangle = 0$. Neka su $x, y, z \in l^2$, $x = (x_i)$, $y = (y_i)$, $z = (z_i)$. Koristeći propoziciju 1.4.8 dobivamo

$$\langle x + y \mid z \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i z_i + y_i z_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i z_i + \sum_{i=1}^{\infty} y_i z_i = \langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle,$$

dakle

$$\langle x + y \mid z \rangle = \langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle.$$

Neka je $\lambda \in \mathbb{R}$. Koristeći lemu 2.2.3 dobivamo

$$\langle \lambda x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda x_i) y_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda (x_i y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = \lambda \langle x \mid y \rangle,$$

dakle $\langle \lambda x \mid y \rangle = \lambda \langle x \mid y \rangle$. Vrijedi

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i = \langle y \mid x \rangle,$$

dakle $\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Neka je $\|\cdot\|$ norma na l^2 inducirana skalarnim produktom $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Tada za svaki $x \in l^2$, $x = (x_i)$ vrijedi $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ pa je

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i{}^2}.$$

Nadalje neka je d_2 metrika na l^2 inducirana normom $\|\cdot\|$. Tada za sve $x, y \in l^2$, $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ vrijedi $d_2(x, y) = \|x - y\|$ pa je

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}.$$

2.3 Zatvoreni skupovi

Definicija 2.3.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $U \subseteq X$. Kažemo da je U otvoren skup u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$.*

Napomena 2.3.2. *Neka su A, X skupovi, $A \neq \emptyset$ te neka je $U : A \to \mathcal{P}(X)$, gdje je $\mathcal{P}(X)$ skup svih podskupova od X (tj. partitivni skup od X). Tada za U kažemo da je indeksirana familija podskupova od X. Tu indeksiranu familiju označavamo $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$. Za $\alpha \in A$ umjesto $U(\alpha)$ obično pišemo U_α. Ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija podskupova od X onda definiramo*

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \{x \in X \mid \exists \alpha \in A,\ x \in U_\alpha\}.$$

Za $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ kažemo da je unija indeksirane familije $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Propozicija 2.3.3. *Neka je (X, d) metrički prostor.*

1. *Skupovi $\emptyset$ i X su otvoreni u (X, d).*

2. *Ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija podskupova od X takva da je U_α otvoren skup u (X, d) za svaki $\alpha \in A$, onda je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ otvoren skup u (X, d).*

3. *Ako su U i V otvoreni skupovi u (X, d), onda je $U \cap V$ otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. 1. $\emptyset$ je otvoren skup na trivijalan način jer ne postoji ni jedan x takav da je $x \in \emptyset$. Neka je $x \in X$. Tada očito za svaki $r > 0$ vrijedi $K(x, r) \subseteq X$. Prema tome X je otvoren skup.

2. Neka je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija podskupova od X takva da je U_α otvoren u (X, d) za svaki $\alpha \in A$. Neka je $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Tada postoji $\alpha \in A$ takva da je $x \in U_\alpha$. Iz činjenice da je U_α otvoren skup slijedi da postoji $r > 0$ tako da vrijedi

$$K(x, r) \subseteq U_\alpha.$$

Prema tome $K(x, r) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Dakle $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ je otvoren skup.

3. Neka su U i V otvoreni skupovi u (X, d). Neka je $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$. Činjenica da su U i V otvoreni skupovi u (X, d) povlači da postoje $r_1, r_2 > 0$ tako da vrijedi $K(x, r_1) \subseteq U$ i $K(x, r_2) \subseteq V$. Tada je

$$K(x, r_1) \cap K(x, r_2) \subseteq U \cap V. \tag{2.2}$$

Neka je $r = \min\{r_1, r_2\}$. Tvrdimo da je

$$K(x, r) = K(x, r_1) \cap K(x, r_2). \tag{2.3}$$

Neka je $y \in K(x, r)$. Tada je $d(x, y) < r$ pa je

$$d(x, y) < r_1 \text{ i } d(x, y) < r_2$$

iz čega slijedi da je $y \in K(x, r_1)$ i $y \in K(x, r_2)$, tj.

$$y \in K(x, r_1) \cap K(x, r_2).$$

Obratno, ako je $y \in K(x, r_1) \cap K(x, r_2)$ onda je $d(x, y) < r_1$ i $d(x, y) < r_2$ pa je $d(x, y) < r$, tj. $y \in K(x, r)$. Dakle vrijedi (2.3) . Iz (2.2) i (2.3) slijedi da je

$$K(x, r) \subseteq U \cap V$$

pa zaključujemo da je $U \cap V$ otvoren skup.

□

Propozicija 2.3.4. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je svaka otvorena kugla u (X, d) otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Neka su $x_0 \in X$ i $r > 0$. Dokažimo da je $K(x_0, r)$ otvoren skup u (X, d). Neka je $x_1 \in K(x_0, r)$. Želimo pronaći $r_1 > 0$ takav da je

$$K(x_1, r_1) \subseteq K(x_0, r).$$

Iz $x_1 \in K(x_0, r)$ slijedi $d(x_0, x_1) < r$ pa je

$$0 < r - d(x_0, x_1).$$

Odaberimo realan broj r_1 takav da je $0 < r_1 < r - d(x_0, x_1)$. Tada je

$$d(x_0, x_1) + r_1 < r.$$

Dokažimo da je $K(x_1, r_1) \subseteq K(x_0, r)$. Odaberimo proizvoljnu točku $x_2 \in K(x_1, r_1)$. Tada za nju vrijedi

$$d(x_0, x_2) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) < d(x_0, x_1) + r_1 < r.$$

Slijedi da je $x_2 \in K(x_0, r)$. Time smo dokazali da je $K(x_1, r_1) \subseteq K(x_0, r)$. Dakle $K(x_0, r)$ je otvoren skup u (X, d). □

Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je stacionaran ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n = x_{n_0}$ za svaki $n \geq n_0$.

Uočimo sljedeće. Svaki stacionaran niz je konvergentan. Naime ako je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ te $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n = x_{n_0}$ za svaki $n \geq n_0$ onda $x_n \to x_{n_0}$.

Primjer 2.3.5. *Neka je*

$$A = \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ takav da je } x_n = 0, \forall n \geq n_0\right\}.$$

Tvrdimo da je $A \subseteq l^2$.

Neka je $(x_n) \in A$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n = 0$ za svaki $n \geq n_0$. Neka je (s_n) niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n{}^2$. Neka je $n > n_0$. Tada je

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n_0} x_i{}^2 + \sum_{i=n_0+1}^{n} x_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n_0} x_i{}^2 + 0 = s_{n_0}.$$

Dakle $s_n = s_{n_0}$ za svaki $n \geq n_0$. Prema tome niz (s_n) je stacionaran pa je stoga i konvergentan. Prema tome red $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x^2$ je konvergentan, a to povlači $(x_n) \in l^2$. Dakle dokazali smo da je $A \subseteq l^2$.

Dokažimo da skup A nije otvoren u metričkom prostoru (l^2, d_2). Pretpostavimo suprotno. Neka je (a_n) niz u $\mathbb{R}$ definiran sa $a_n = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Očito je $(a_n) \in A$. Budući da je A otvoren postoji $r > 0$ takav da je

$$K((a_n), r) \subseteq A. \tag{2.4}$$

Odaberimo $c > 0$ takav da je $c < \sqrt{3}r$. Definirajmo niz realnih brojeva (x_n) tako da je $x_n = \frac{c}{2^n}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Koristeći primjer 2.1.4 zaključujemo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n{}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{c}{2^n})^2 = c^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n})^2 = c^2 \cdot \frac{1}{3},$$

tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n{}^2 = \frac{c^2}{3}$.

Dakle, $(x_n) \in l^2$ *i*

$$d_2((x_n),(a_n)) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n{}^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot c.$$

No prema odabiru broja c imamo $\frac{c}{\sqrt{3}} < r$*, tj.* $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot c < r$*. Prema tome* $d_2((x_n),(a_n)) < r$ *pa slijedi da je* $(x_n) \in K((a_n), r)$*. Iz* (2.4) *slijedi da je* $(x_n) \in A$*. No to je nemoguće jer očito* $x_n \neq 0$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$*. Zaključujemo da skup A nije otvoren u metričkom prostoru* (l^2, d_2)*.*

Definicija 2.3.6. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te F podskup od X. Kažemo da je F zatvoren skup u metričkom prostoru* (X, d) *ako je* $X \setminus F$ *otvoren skup u* (X, d)*.*

Primjer 2.3.7. *Neka je A skup iz primjera 2.3.5 . Tvrdimo da A nije zatvoren skup u metričkom prostoru* (l^2, d_2)*.*

Pretpostavimo suprotno. Tada je $l^2 \setminus A$ *otvoren skup u* (l^2, d_2)*. Neka je* (x_i) *niz u* $\mathbb{R}$ *definiran s* $x_i = \frac{1}{2^i}$*. Znamo da je* $(x_i) \in l^2$*. Očito* $(x_i) \notin A$*, prema tome* $(x_i) \in l^2 \setminus A$*. Stoga postoji* $r > 0$ *takav da je*

$$K((x_i), r) \subseteq l^2 \setminus A. \tag{2.5}$$

Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da vrijedi* $n_0 > \log_2 \frac{2\sqrt{3}}{3r}$*. Tada je* $2^{n_0} > \frac{2\sqrt{3}}{3r}$ *pa je* $\frac{1}{2^{n_0-1}} < \sqrt{3}r$*. Definirajmo niz* (y_i) *u* $\mathbb{R}$ *sa*

$$y_i = \begin{cases} \frac{1}{2^i}; & i < n_0 \\ 0; & \text{inače} \end{cases}$$

Očito je $(y_i) \in A$*. Koristeći primjer 2.3.5 imamo:*

$$d_2((x_i),(y_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n_0-1} (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=n_0}^{\infty} (x_i - y_i)^2}$$

$$= \sqrt{0 + \sum_{i=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^i}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{1}{4^i}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^{i+n_0-1}}} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n_0-1}} \cdot \frac{1}{4^i}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4^{n_0-1}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i}} \\
&= \frac{1}{2^{n_0-1}} \sqrt{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{2^{n_0-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} < r,
\end{aligned}
$$

dakle $d_2((x_i),(y_i)) < r$. *Stoga je* $(y_i) \in K((x_i), r)$ *pa je prema* (2.5) $(y_i) \in l^2 \setminus A$, *što je kontradikcija. Dakle skup A nije zatvoren u metričkom prostoru* (l^2, d_2).

2.4 Separabilnost

Definicija 2.4.1. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te* $S \subseteq X$. *Kažemo da je* S *gust skup u metričkom prostoru* (X, d) *ako za svaki* $x \in X$ *i svaki* $r > 0$ *postoji* $y \in S$ *takav da je* $y \in K(x, r)$. *Drugim riječima* S *je gust ako za svaki* $x \in X$ *i svaki* $r > 0$ *vrijedi* $K(x, r) \cap S \neq \emptyset$.

Primjer 2.4.2. *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Tada je* X *gust skup u* (X, d).

Nadalje neka je d *euklidska metrika na* $\mathbb{R}$. *Neka su* $x \in \mathbb{R}$ *i* $r > 0$. *Tada je* $x < x + r$ *pa postoji* $y \in \mathbb{Q}$ *takav da je* $x < y < x + r$. *Slijedi* $0 < y - x < r$ *pa je* $d(x, y) < r$, *tj.* $y \in K(x, r)$. *Ovo znači da je* $\mathbb{Q}$ *gust skup u metričkom prostoru* $(\mathbb{R}, d)$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ *te* d *euklidska metrika na* $\mathbb{R}^n$. *Neka je* $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$ *te* $r > 0$. *Za svaki* $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *prema dokazanom postoji* $y_i \in \mathbb{Q}$ *takav da je* $|x_i - y_i| < \frac{r}{n}$. *Neka je* $y = (y_1, ..., y_n)$. *Očito je* $y \in \mathbb{Q}^n$, *a vrijedi*

$$
\begin{aligned}
d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \\
&< \sqrt{n \cdot \frac{r^2}{n^2}} = \frac{r}{\sqrt{n}} \leq r.
\end{aligned}
$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ *i svaki* $r > 0$ *postoji* $y \in \mathbb{Q}^n$ *takav da je*

$$d(x, y) < r.$$

Prema tome $\mathbb{Q}^n$ *je gust u metričkom prostoru* $(\mathbb{R}^n, d)$.

Definicija 2.4.3. *Za metrički prostor* (X, d) *kažemo da je separabilan ako postoji prebrojiv skup koji je gust u* (X, d).

Prema primjeru 2.4.2 ako je $n \in \mathbb{N}$ i d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$ onda je $(\mathbb{R}^n, d)$ separabilan prostor.

Propozicija 2.4.4. *Metrički prostor* (l^2, d_2) *je separabilan.*

Dokaz. Za $n \in \mathbb{N}$ neka je

$$S_n = \left\{(x_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x_1, ..., x_n \in \mathbb{Q},\ x_i = 0,\ \text{za svaki } i > n\right\}.$$

Očito je $S_n \subseteq l^2$. Nadalje funkcija $f\colon \mathbb{Q}^n \to S_n$, $f(q_1, ..., q_n) = (q_1, ..., q_n, 0, 0, ...)$ je bijekcija pa je S_n prebrojiv skup. Neka je $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Tada je A prebrojiv skup (unija prebrojivo mnogo prebrojivih skupova). Tvrdimo da je A gust skup u $\left(l^2, d_2\right)$. Neka su $(x_i) \in l^2$ i $r > 0$. Red $\sum {x_i}^2$ je konvergentan pa prema korolaru 1.4.5 niz

$$\left(\sum_{i=n}^{\infty} x_i^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

teži nuli. Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\left|\sum_{i=n}^{\infty} x_i^2 - 0\right| < \frac{r^2}{4}$$

za svaki $n \geq n_0$. Dakle

$$\sum_{i=n}^{\infty} x_i^2 < \frac{r^2}{4}. \tag{2.6}$$

Neka je (y_i) niz realnih brojeva definiran s

$$y_i = \begin{cases} x_i\ , & i \leq n_0 \\ 0\ , & i > n_0 \end{cases} .$$

Imamo

$$d_2\left((x_i), (y_i)\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n_0} (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=n_0+1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=n_0+1}^{\infty} {x_i}^2}.$$

Kako za svaki $n \geq n_0$ vrijedi (2.6), imamo

$$\sqrt{\sum_{i=n_0+1}^{\infty} {x_i}^2} < \frac{r}{2}.$$

Dakle

$$d_2\left((x_i), (y_i)\right) < \frac{r}{2}. \tag{2.7}$$

Budući da je $\mathbb{Q}^{n_0}$ gust skup u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^{n_0}, d)$ gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^{n_0}$ (prema primjeru 2.4.2) postoje $q_1, ..., q_{n_0} \in \mathbb{Q}$ takvi da je

$$\sqrt{(x_1 - q_1)^2 + ... + (x_{n_0} - q_{n_0})^2} < \frac{r}{2}. \tag{2.8}$$

Neka je (z_i) niz realnih brojeva definiran s

$$z_i = \begin{cases} q_i \,, & i \leq n_0 \\ 0 \,, & i > n_0 \end{cases} .$$

Koristeći (2.8) dobivamo

$$d_2((y_i), (z_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (y_i - z_i)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n_0} (x_i - q_i)^2} < \frac{r}{2},$$

dakle $d_2((y_i), (z_i)) < \frac{r}{2}$. Iz ovoga, (2.7) i nejednakosti trokuta slijedi da je $d_2((x_i), (z_i)) < r$. Očito je $(z_i) \in S_{n_0}$, dakle $(z_i) \in A$.

Time smo dokazali da je A gust skup u (l^2, d_2). Prema tome (l^2, d_2) je separabilan. □

2.5 Potpunost

Definicija 2.5.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je (x_n) niz u X. Kažemo da je (x_n) Cauchyjev niz u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_n, x_m) < \epsilon$ za sve $m, n \geq n_0$.*

Propozicija 2.5.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je (x_n) konvergentan niz u (X, d). Tada je (x_n) Cauchyjev niz u (X, d).*

Dokaz. Budući da je (x_n) konvergentan postoji $x_0 \in X$ takav da $x_n \to x_0$. Za bilo koji $\epsilon > 0$ možemo naći $i \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_j, x_0) < \frac{\epsilon}{2}$ za svaki $j \geq i$ pa za sve prirodne brojeve $m, n \geq i$ imamo

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_0) + d(x_n, x_0) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dakle (x_n) je Cauchyjev niz. □

Sljedeći primjer pokazuje da ne vrijedi obrat prethodne propozicije.

Primjer 2.5.3. *Neka je d euklidska metrika $\mathbb{R}$ te neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ definiran s $x_n = \frac{1}{n}$. Tvrdimo da je $x_n \to 0$ u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$.*

Neka je $\epsilon > 0$. Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $n > \frac{1}{\epsilon}$ pa je $\frac{1}{n} < \epsilon$, tj.

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon.$$

Dakle $d(x_n, 0) < \epsilon$ za svaki $n \geq n_0$. Prema tome $x_n \to 0$. Dakle (x_n) je konvergentan niz u $(\mathbb{R}, d)$ pa je (x_n) Cauchyjev niz u $(\mathbb{R}, d)$.

Općenito ako je X neprazan podskup u $\mathbb{R}$ tada je funkcija $p \colon X \times X \to \mathbb{R}$,

$$p(x, y) = d(x, y)$$

očito metrika na X. Uzmimo da je $X = \langle 0, \infty \rangle$ te neka je p metrika na X definirana s $p(x, y) = d(x, y)$. Uočimo da je $x_n \in X$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, dakle (x_n) je niz u X. Neka je $\epsilon > 0$. Budući da je (x_n) Cauchyjev niz u $(\mathbb{R}, d)$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n, m \geq n_0$ vrijedi

$$p(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Prema tome (x_n) je Caucjyjev niz u (X, p). Tvrdimo da niz (x_n) nije konvergentan u (X, p).

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $x_0 \in X$ takav da $x_n \to x_0$ u metričkom prostoru (X, p). Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $p(x_n, x_0) < \epsilon$, tj.

$$d(x_n, x_0) < \epsilon.$$

Prema tome $x_n \to x_0$ u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$.

No $x_0 \to 0$ *u metričkom prostoru* $(\mathbb{R}, d)$ *pa slijedi* $x_0 = 0$.

Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $x_0 \in X$. *Dakle niz* (x_n) *nije konvergentan u* (X, p) *(iako je Cauchyjev).*

Definicija 2.5.4. *Neka je* (x_n) *niz u* $\mathbb{R}$ *te* $A \subseteq \mathbb{R}$. *Kažemo da je niz* (x_n) *gotovo čitav u* A *ako postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je* $x_n \in A$ *za svaki* $n \geq n_0$.

Uočimo sljedeće: Ako je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ te ako su A i B podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je (x_n) gotovo čitav u A i (x_n) gotovo čitav u B onda je (x_n) gotovo čitav u $A \cap B$. Naime postoje $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je $x_n \in A$ za svaki $n \geq n_0$ i $x_n \in B$ za svaki $n \geq m_0$ pa tada za svaki

$$n \geq \max\{n_0, m_0\}$$

vrijedi $x_n \in A \cap B$.

Lema 2.5.5. *Neka su* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $a \leq b$ *i* $c \leq d$. *Pretpostavimo da je* $[a, b] \cap [c, d] \neq \emptyset$. *Tada postoje* $a', b' \in \mathbb{R}$, $a' \leq b'$, *takvi da je*

$$[a', b'] = [a, b] \cap [c, d] \quad i \;\; b' - a' \leq b - a.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $x \in [a, b] \cap [c, d]$. Tada je $a \leq x$ i $c \leq x$ te $x \leq b$ i $x \leq d$ pa je $\max\{a, c\} \leq x \leq \min\{b, d\}$.

Neka je $a' = \max\{a, c\}$ i $b' = \min\{b, d\}$. Iz prethodne nejednakosti i činjenice da je $[a, b] \cap [c, d] \neq \emptyset$ slijedi da je

$$a' \leq b'.$$

Nadalje ako je $x \in [a, b] \cap [c, d]$ onda je $x \in [a', b']$. Obratno, jasno je da $x \in [a', b']$ povlači

$$x \in [a, b] \cap [c, d].$$

Dakle $[a', b'] = [a, b] \cap [c, d]$.

Nadalje iz $a \leq a'$ slijedi $-a' \leq -a$ što zajedno s $b' \leq b$ daje $b' - a \leq b - a$. □

Propozicija 2.5.6. *Neka su* (a_n) *i* (b_n) *nizovi realnih brojeva takvi da je* $a_n \leq b_n$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *te takvi da je* $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Tada je* $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

Dokaz. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_{n+1}, b_{n+1} \in [a_n, b_n]$ pa je $a_n \leq a_{n+1}$ i $b_{n+1} \leq b_n$. Stoga za sve $m, n \in \mathbb{N}$ takve da je $n \leq m$ vrijedi $a_n \leq a_m$ i $b_m \leq b_n$. Neka su $n, m \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je $a_n \leq b_m$. Imamo dva slučaja.

1^0 $m \leq n$. Tada je $a_n \leq b_n \leq b_m$ pa slijedi tvrdnja.

2^0 $m \geq n$. Tada je $a_n \leq a_m \leq b_m$ pa slijedi tvrdnja.

Skup $\{a_n \mid \ n \in \mathbb{N}\}$ je odozgo omeđen pa ima supremum. Označimo ga s c. Očito je $a_n \leq c$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. S druge strane za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi da je b_m gornja međa skupa

$$\{a_n \mid \ n \in \mathbb{N}\}$$

pa je stoga $c \leq b_m$. Dakle za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \leq c \leq b_n$, tj. $c \in [a_n, b_n]$. Stoga je $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$. □

Lema 2.5.7. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te neka je (x_n) Cauchyjev niz u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoje $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ takvi da je $b - a < \epsilon$ te da je niz (x_n) gotovo čitav u $[a, b]$.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{4}$. Posebno za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, x_{n_0}) < \frac{\epsilon}{4}$ pa je $x_n \in K\left(x_{n_0}, \frac{\epsilon}{4}\right)$, tj.

$$x_n \in \left\langle x_{n_0} - \frac{\epsilon}{4}, x_{n_0} + \frac{\epsilon}{4} \right\rangle.$$

Prema tome (x_n) je gotovo čitav u $\left\langle x_{n_0} - \frac{\epsilon}{4}, x_{n_0} + \frac{\epsilon}{4} \right\rangle$ pa je gotovo čitav i u $[a, b]$, gdje je

$$a = x_{n_0} - \frac{\epsilon}{4} \ \text{ i } \ b = x_{n_0} + \frac{\epsilon}{4}.$$

Vrijedi $b - a = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. □

Teorem 2.5.8. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te neka je (x_n) Cauchyjev niz u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$. Tada je niz (x_n) konvergentan u $(\mathbb{R}, d)$.*

Dokaz. Definirajmo nizove realnih brojeva (a_k) i (b_k) induktivno na sljedeći način. Prema prethodnoj lemi postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ takvi da je

$$\beta - \alpha < 1$$

i takvi da je (x_n) gotovo čitav u $[\alpha, \beta]$. Definirajmo $a_1 = \alpha$ i $b_1 = \beta$. Dakle $a_1 < b_1$, $b_1 - a_1 < 1$ i niz (x_n) je gotovo čitav u

$$[a_1, b_1].$$

Pretpostavimo da je $k \in \mathbb{N}$ te da smo definirali brojeve $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ takve da je $a_k \leq b_k$, $b_k - a_k < \frac{1}{k}$ te da je niz (x_n) gotovo čitav u $[a_k, b_k]$. Prema lemi 2.5.7 postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\alpha < \beta$, $\beta - \alpha < \frac{1}{k+1}$ te da je niz (x_n) gotovo čitav u $[\alpha, \beta]$. Slijedi da je niz (x_n) gotovo čitav u

$$[\alpha, \beta] \cap [a_k, b_k].$$

Prema lemi 2.5.5 možemo odabrati brojeve $a_{k+1}, b_{k+1} \in \mathbb{R}$ takve da je $a_{k+1} \leq b_{k+1}$ te da je

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = [\alpha, \beta] \cap [a_k, b_k] \quad \text{i} \quad b_{k+1} - a_{k+1} \leq \beta - \alpha.$$

Slijedi da je (x_n) gotovo čitav u $[a_{k+1}, b_{k+1}]$, $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k]$ i $b_{k+1} - a_{k+1} < \frac{1}{k+1}$. Na ovaj način smo konstruirali nizove (a_k), (b_k) takve da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:

(1) $a_k \leq b_k$,

(2) $b_k - a_k < \frac{1}{k}$,

(3) $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k]$,

(4) (x_n) gotovo čitav u $[a_k, b_k]$.

Prema propoziciji 2.5.6 vrijedi $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k] \neq \emptyset$. Dakle postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $c \in [a_k, b_k]$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da (x_n) teži prema c. Neka je $\epsilon > 0$. Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ tako da je $\frac{1}{k} < \epsilon$. Imamo $c \in [a_k, b_k]$ pa je

$$b_k - c \leq b_k - a_k < \frac{1}{k} < \epsilon.$$

Dakle $b_k - c < \epsilon$ pa je $b_k < c + \epsilon$.

Nadalje $c - a_k \leq b_k - a_k < \frac{1}{k} < \epsilon$ pa je $c - a_k < \epsilon$, što povlači $c - \epsilon < a_k \leq c + \epsilon$ pa je $[a_k, b_k] \subseteq \langle c - \epsilon, c + \epsilon \rangle$. Iz (4) slijedi da je (x_n) gotovo čitav u $\langle c - \epsilon, c + \epsilon \rangle$.

Zaključak: za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$x_n \in \langle c - \epsilon, c + \epsilon \rangle,$$

tj. $x_n \in K(c, \epsilon)$. Prema tome $x_n \to c$.

Dakle niz (x_n) je konvergentan u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$.

$\square$

Definicija 2.5.9. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je potpun ako je svaki Cauchyjev niz u (X, d) konvergentan.*

Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Prema teoremu 2.5.8 zaključujemo da je metrički prostor $(\mathbb{R}, d)$ potpun.

Teorem 2.5.10. *Metrički prostor (l^2, d_2) je potpun.*

Dokaz. Neka je $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u (l^2, d_2). Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $x^n \in l^2$ pa imamo $x^n = (x_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$. Neka su $i, m, n \in \mathbb{N}$. Onda je

$$d_2(x^m, x^n) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} (x_j^m - x_j^n)^2} \geq \sqrt{(x_i^m - x_i^n)^2} = \left|x_i^m - x_i^n\right|,$$

dakle

$$\left|x_i^m - x_i^n\right| \leq d_2(x^m, x^n). \tag{2.9}$$

Neka je $i \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u $(\mathbb{R}, d)$ gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $\epsilon > 0$. Budući da je $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u (l^2, d_2) postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d_2(x^m, x^n) < \epsilon$ za sve $m, n \geq n_0$. Iz (2.9) slijedi da je

$$\left|x_i^m - x_i^n\right| < \epsilon$$

za sve $m, n \geq n_0$. Prema tome $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev niz u $(\mathbb{R}, d)$. Prema teoremu 2.5.8 niz $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan u $(\mathbb{R}, d)$. Dakle postoji $y_i \in \mathbb{R}$ takav da niz $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema y_i u $(\mathbb{R}, d)$. Na ovaj način smo dobili niz realnih brojeva $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Dokažimo da je $y \in l^2$ te da $x^n \to y$ u (l^2, d_2). Neka su $i, n \in \mathbb{N}$. Niz $(x_i^n - x_i^m)_{m\in\mathbb{N}}$ prema propoziciji 1.3.7 teži prema $x_i^n - y_i$.

Stoga prema propoziciji 1.3.9

$$\text{niz } ((x_i^n - x_i^m)^2)_{m\in\mathbb{N}} \text{ teži prema } (x_i^n - y_i)^2. \tag{2.10}$$

Neka su $n, p \in \mathbb{N}$. Znamo da tvrdnja (2.10) vrijedi za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa posebno i za svaki $i \in \{1, ..., p\}$. Iz propozicije 1.3.7 slijedi da niz

$$\left(\sum_{i=1}^{p} (x_i^n - x_i^m)^2\right)_{m\in\mathbb{N}}$$

teži prema $\sum\limits_{i=1}^{p} (x_i^n - y_i)^2$.

Neka je $\epsilon > 0$. Budući da je $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d_2(x^n, x^m) < \frac{\epsilon}{2}$ za sve $m, n \geq n_0$.

Uzmimo $m, n \geq n_0$. Imamo

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i^m - x_i^n)^2} = d_2(x^n, x^m) < \frac{\epsilon}{2}$$

pa je $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x_i^m - x_i^n)^2 < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2$.

Uzmimo $p \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\sum_{i=1}^{p} (x_i^n - x_i^m)^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^n - x_i^m)^2$$

pa je

$$\sum_{i=1}^{p} (x_i^n - x_i^m)^2 < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2. \tag{2.11}$$

Dakle (2.11) vrijedi za sve $m, n, p \in \mathbb{N}$ takve da je $m, n \geq n_0$.

Neka su $p, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $n \geq n_0$. Niz $\left(\sum\limits_{i=1}^{p} (x_i^n - x_i^m)^2\right)_{m\in\mathbb{N}}$ teži prema $\sum\limits_{i=1}^{p} (x_i^n - y_i)^2$, a za $m \geq n_0$ m-ti član ovog niza je prema (2.11) manji od $\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2$. Stoga je prema lemi 1.4.10

$$\sum_{i=1}^{p} (x_i^n - y_i)^2 \leq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 \quad \text{za svaki } \ p \in \mathbb{N} \ \text{ i } \ n \geq n_0. \tag{2.12}$$

Odaberimo neki $n \geq n_0$. Niz $\left(\sum\limits_{i=1}^{p} (x_i^n - y_i)^2\right)_{p\in\mathbb{N}}$ je očito rastući, a prema (2.12) je omeđen. Stoga je taj niz konvergentan. No to znači da je niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} (x_i^n - y_i)^2$ konvergentan, dakle red $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} (x_i^n - y_i)^2$ je konvergentan.

Prema tome $x^n - y \in l^2$. Iz propozicije 2.2.1 slijedi da je $x^n - (x^n - y) \in l^2$, tj. $y \in l^2$.

Dokažimo da $x^n \to y$ u (l^2, d_2). Neka je $\epsilon > 0$. Pokazali smo da tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi (2.12). Uzmimo $n \geq n_0$. Niz $\left(\sum\limits_{i=1}^{p} (x_i^n - y_i)^2\right)_{p\in\mathbb{N}}$ teži prema $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x_i^n - y_i)^2$ pa iz (2.12) i leme 1.4.10 slijedi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x_i^n - y_i)^2 \leq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2$, tj.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i^n - y_i)^2} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Prema tome $d_2(x^n, y) < \epsilon$ za svaki $n \geq n_0$. Time smo dokazali da niz (x^n) teži u y.

Zaključak: Svaki Cauchyjev niz u (l^2, d_2) je konvergentan. Dakle (l^2, d_2) je potpun metrički prostor.

□

2.6 Konveksnost

Definicija 2.6.1. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te neka je X neprazan podskup od $\mathbb{R}$. Funkcija $p\colon X \times X \to \mathbb{R}$ definirana s $p(x, y) = d(x, y)$ je metrika. Za p kažemo da je euklidska metrika na X.*

Definicija 2.6.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $x, y \in X$. Za točku $p \in X$ kažemo da je polovište od x i y u metričkom prostoru (X, d) ako je*

$$d(x, p) = d(p, y) = \frac{1}{2} d(x, y).$$

Definicija 2.6.3. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je konveksan ako za sve $x, y \in X$ postoji barem jedan $p \in X$ takav da je p polovište od x i y u metričkom prostoru (X, d).*

Primjer 2.6.4.

1. *Neka je $X = \{0, 1\}$ te neka je d euklidska metrika na X. Tada metrički prostor (X, d) nije konveksan. Ako pretpostavimo da je $p \in X$ polovište točaka 0 i 1 u (X, d) onda je*

$$d(0, p) = d(p, 1),$$

   a očito je da ova jednakost ne vrijedi za niti jedan $p \in X$.

2. *Neka je $X = \mathbb{Q}$ te neka je d euklidska metrika na X. Tvrdimo da je metrički prostor (X, d) konveksan. Neka su $x, y \in X$. Definirajmo $p = \frac{x+y}{2}$. Tada je $p \in \mathbb{Q}$, tj. $p \in X$. Imamo*

$$d(x, p) = |x - p| = \left| x - \frac{x + y}{2} \right| = \left| \frac{x - y}{2} \right|,$$

$$d(p, y) = |p - y| = \left| \frac{x + y}{2} - y \right| = \left| \frac{x - y}{2} \right|.$$

   Prema tome $d(x, p) = d(p, y) = \frac{1}{2} d(x, y)$, tj. p je polovište od x i y u (X, d). Dakle metrički prostor (X, d) je konveksan.

Primjer 2.6.5. *Neka je $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je*

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Tada je d metrika na $\mathbb{R}^2$. Jedino netrivijalno svojstvo koje treba provjeriti je nejednakost trokuta.

Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$. Imamo

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|$$

$$= (|x_1 - z_1| + |x_2 - z_2|) + (|z_1 - y_1| + |z_2 - y_2|)$$
$$= d(x, z) + d(z, y).$$

Dakle $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Neka su $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. *Neka je* $p = \left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}\right)$. *Tvrdimo da je* p *polovište od* x *i* y *u metričkom prostoru* $(\mathbb{R}^2, d)$. *Imamo*

$$\begin{aligned} d(x, p) &= \left|x_1 - \frac{x_1 + y_1}{2}\right| + \left|x_2 - \frac{x_2 + y_2}{2}\right| \\ &= \left|\frac{x_1 - y_1}{2}\right| + \left|\frac{x_2 - y_2}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2}(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|) \\ &= \frac{1}{2}d(x, y), \\ d(p, y) &= \left|\frac{x_1 + y_1}{2} - y_1\right| + \left|\frac{x_2 + y_2}{2} - y_2\right| \\ &= \left|\frac{x_1 - y_1}{2}\right| + \left|\frac{x_2 - y_2}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2}(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|) \\ &= \frac{1}{2}d(x, y). \end{aligned}$$

Slijedi da je $d(x, p) = d(p, y) = \frac{1}{2}d(x, y)$.

Zaključak: Metrički prostor $(\mathbb{R}^2, d)$ *je konveksan.*

Neka je $x = (0, 0)$ *i* $y = (1, 1)$ *te neka je* $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *i* $q = (1, 0)$. *Imamo*

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |0 - 1| + |0 - 1| = 2, \\ d(x, p) &= \left|0 - \frac{1}{2}\right| + \left|0 - \frac{1}{2}\right| = 1, \\ d(p, y) &= \left|\frac{1}{2} - 0\right| + \left|\frac{1}{2} - 0\right| = 1. \end{aligned}$$

Prema tome $d(x, p) = d(p, y) = \frac{1}{2}d(x, y)$. *Nadalje*

$$d(x, q) = |0 - 1| + |0 - 0| = 1,$$
$$d(q, y) = |1 - 1| + |0 - 1| = 1,$$

pa je $d(x, q) = d(q, y) = \frac{1}{2}d(x, y)$. *Vidimo da su točke* p *i* q *polovišta od* x *i* y, *a* $p \neq q$. *Zaključak: Metrički prostor* $(\mathbb{R}^2, d)$ *nije strogo konveksan.*

Definicija 2.6.6. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je bez grananja ako ne postoje točke $x, x', p, y \in X$ takve da je $x \neq x'$, p polovište od x i y te p polovište od x' i y.*

Primjer 2.6.7. *Neka je d metrika na $\mathbb{R}^2$ kao u prethodnom primjeru. Neka je $x = (1,1)$, $x' = (1,-1)$, $p = (1,0)$ i $y = (0,0)$. Imamo $d(x,y) = 2$, $d(x,p) = 1$, $d(y,p) = 1$, $d(x',p) = 1$ i $d(x',y) = 2$ pa je*

$$\frac{1}{2}d(x,y) = d(x,p) = d(p,y),$$
$$\frac{1}{2}d(x',y) = d(x',p) = d(p,y).$$

Dakle p je polovište od x i y te ujedno i polovište od x' i y, a $x \neq x'$. Zaključak: Metrički prostor $(\mathbb{R}^2, d)$ nije bez grananja.

Napomena 2.6.8. *Ako je (x_n) niz realnih brojeva takav da je $x_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te ako je $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0$ onda je $x_n = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Naime neka je (s_n) niz parcijalnih suma reda $\sum x_n$. Tada je (s_n) rastući niz i $s_n \to 0$. Iz leme 1.4.9 slijedi da je $s_n \leq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. S druge strane za svaki $n \in \mathbb{N}$ očito vrijedi $0 \leq s_n$. Prema tome $s_n = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga je $x_n = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Teorem 2.6.9. *Hilbertov prostor (l^2, d_2) je strogo konveksan bez grananja.*

Dokaz. Neka su $x, y \in l^2$, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Neka je $p = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$. Neka je $\|\cdot\|$ standardna norma na l^2. Tada je

$$\begin{aligned} d_2(x,p) = \|x-p\| &= \left\|x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\right\| \\ &= \frac{1}{2}\|x-y\| = \frac{1}{2}d_2(x,y), \\ d_2(p,y) = \|p-y\| &= \left\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - y\right\| \\ &= \frac{1}{2}\|x-y\| = \frac{1}{2}d_2(x,y). \end{aligned}$$

Prema tome p je polovište od x i y u metričkom prostoru (l^2, d_2). Pretpostavimo da je $q \in l^2$, $q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, polovište od x i y. Tada je

$$d_2(x,q) = d_2(q,y) = \frac{1}{2}d_2(x,y)$$

pa je

$$4\left(d_2(x,q)\right)^2 = 4\left(d_2(q,y)\right)^2 = \left(d_2(x,y)\right)^2,$$

$$2\,(d_2(x,q))^2 = 2\,(d_2(q,y))^2 = \frac{1}{2}\,(d_2(x,y))^2\,. \tag{2.13}$$

Lako se provjeri da za sve $u, v, w \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(u+v-2w)^2 = 2(u-w)^2 + 2(v-w)^2 - (u-v)^2. \tag{2.14}$$

Red $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (x_n + y_n - 2q_n)^2$ konvergira jer je $x+y-2q \in l^2$. Koristeći (2.13) i (2.14) dobivamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n-2q_n)^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(2(x_n-q_n)^2+2(y_n-q_n)^2-(x_n-y_n)^2\Big)\\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-q_n)^2+2\sum_{n=1}^{\infty}(y_n-q_n)^2-\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2\\ &= 2\,(d_2(x,q))^2+2\,(d_2(y,q))^2-(d_2(x,y))^2\\ &= \frac{1}{2}\,(d_2(x,y))^2+\frac{1}{2}\,(d_2(x,y))^2-(d_2(x,y))^2=0.\end{aligned}$$

Dakle

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n-2q_n)^2 = 0.$$

Iz napomene 2.6.8 slijedi $x_n + y_n - 2q_n = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tj. $q_n = \frac{x_n+y_n}{2}$. Prema tome $q = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ tj. $q = p$. Iz toga zaključujemo da za sve $x, y \in l^2$ postoji jedinstveno polovište od x i y u (l^2, d_2). Dakle metrički prostor (l^2, d_2) je strogo konveksan.

Dokazali smo zapravo slijedeće: Ako su $x, y, p \in l^2$ takvi da je p polovište od x i y, onda je

$$p = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Dokažimo da je metrički prostor (l^2, d_2) bez grananja. Pretpostavimo da su $x', x, p, y \in l^2$ takvi da je p polovište od x' i y te p polovište od x i y. Tada je $p = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y$ i $p = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ pa je

$$\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$$

iz čega slijedi $\frac{1}{2}x' = \frac{1}{2}x$. Množeći ovu jednakost sa skalarom 2 i koristeći osnovna svojstva vektorskog prostora dobivamo da je $x' = x$. Dakle metrički prostor (l^2, d_2) je bez grananja.

Zaključak: Metrički prostor (l^2, d_2) je strogo konveksan bez grananja.

□

Literatura

[1] Charles O. Christenson, William L. Voxman: *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, INC., 270 Madison Avenue, New York

[2] Nicolas Bourbaki: *Topological Vector Spaces*, Espaces Vectoriels Topologiques, Masson, Paris, 1981.

[3] David M. Burton: *The History of Mathematics*, A Division of The McGraw-Hill Companies

[4] Z. Čerin: *Metrički prostori*, interna skripta

[5] W. Sutherland: *Introduction to Metric and Topological Space*, Oxford University Press, 1975.

[6] Boris Guljaš: *Matematička analiza I i II*, interna skripta, Zagreb, 2015.

Sažetak

U ovom diplomskom radu, u prvom poglavlju objasnili smo neke osnovne činjenice vezane uz vektorski i metrički prostor. Proučili smo konvergentne nizove i redove. U drugom poglavlju definirali smo Hilbertov prostor te povezujući elementarna svojstva iz prvog poglavlja ispitali smo od kakvih nizova se on sastoji. Dokazali smo da je Hilbertov prostor potprostor vektorskog prostora, da je separabilan i potpun te smo dokazali da je strogo konveksan bez grananja.

Summary

In this thesis in the first chapter, we explained some basic facts related to the vector and metric spaces. We also examined convergent sequences and series. In the second chapter we defined the Hilbert space and linking the basic properties of the first chapter we examined from which series he is composed. We proved that the Hilbert space is a subspace of vector space, that is separable and complete, and we also proved that it is strongly convex without ramifications.

Životopis

Rođena sam 07. svibnja 1986. u Osijeku gdje sam 2001. godine završila osnovnu školu *Ljudevita Gaja*. Nakon toga upisujem *III. Gimnaziju Osijek - Prirodoslovno-matematičku gimnaziju* te ju završavam 2005. godine. Upisujem *Preddiplomski sveučilišni studij matematike u Osijeku* na odjelu za matematiku, smjer inženjerski, a 2009. prelazim na studij *Matematike* na *Preddiplomskom sveučilišnom studiju u Zagrebu*, smjer nastavnički. Od 2012. godine studiram na diplomskom studiju *Matematika*, smjer nastavnički. Tijekom studiranja bavila sam se raznim studentskim i volonterskim poslovima.