SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Iva Zovko

MAGIČNE KOCKE I 3-ADSKA ZETA FUNKCIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Matija Kazalicki

Zagreb, studeni, 2015

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Mojim roditeljima

Sadržaj

Uvod

Smatra se da su magični kvadrati proučavani od davnina. Budući da nema konkretnih pisanih dokaza kako i kad su otkriveni, sve se oslanja na jednu legendu koja kaže kako su Kinezi otkrili magični kvadrat. Prema legendi, oko 2800. godine pr. Kr. u Kini je zavladala velika poplava. Narod je nudio žrtvu bogu rijeke Lo. Iz rijeke je tada isplivala kornjača, na čijem oklopu je bio vidljiv kvadrat s tri reda i tri stupca u kojoj su bili smješteni brojevi $1, 2, \ldots, 9$ poredani tako da je zbroj u svakom retku, stupcu ili na dijagonali jednak 15. Taj prvi magični kvadrat su nazvali Lo-Shu. Kinezi su tom kvadratu pripisivali magična svojstva, pa su oko vrata nosili magične kvadrate da ne bi oboljeli ili prosili.
Magični kvadrat (čarobna četvorina) reda M je kvadratna tablica veličine $M \times M$ ispunjena svim brojevima $1, 2, 3, \ldots, M^2$, tako da je suma brojeva svakog retka, svakog stupca i na obje dijagonale jednaka. Magični kvadrat je 2-kocka reda M. Ovaj magični kvadrat koji punimo brojevima $1, 2, 3, \ldots, M^2$ je normalni magični kvadrat. Broj M naziva se red (ili dimenzija) magičnog kvadrata. Magični kvadrati postoje za svako $M > 2$. Zbroj elemenata po recima (stupcima ili na dijagonalama) naziva se magična suma a dobiva se po formuli

$$S(M) = \frac{1}{2}M(M^2 + 1).$$

Nisu samo matematičari kroz povijest proučavali magične kvadrate. Poznato je kako je Albercht Dürer, njemački slikar i kipar, izradio bakrorez, u čijem jednom dijelu možemo vidjeti sljedeći magični kvadrat.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Magični kvadrat, kojeg je na svome bakrorezu urezao Dürer, naziva se još i supermagični kvadrat. Možemo primijetiti da je magična suma jednaka 34. Kod

ovog kvadrata vrijedi da je suma brojeva kvadrata 2×2 u kutovima također jednaka 34. Zbroj srednja dva broja u prvom i srednja dva broja u zadnjem redu je jednaka magičnoj sumi. Zbroj srednja dva broja u prvom i zadnjem stupcu je također jednaka magičnoj sumi. Značajno je primijetiti da dva srednja broja u zadnjem redu čine godinu kad je nastao bakrorez.
Magična kocka je ekvivalent magičnog kvadrata u 3 dimenzije. Magičnu kocku ispunjamo brojevima $1, 2, \ldots M^3$. Kod nje vrijedi da su sume jednake za svaki niz brojeva koji je paralelan sa bilo kojim bridom kocke te za prostorne dijagonale.
U ovom diplomskom radu, objasnit ćemo razne metode konstrukcije magičnih kvadrata i magičnih kocki. Metode se razlikuju ovisno o tome želimo li konstruirati magičnu N-kocku parnog reda ili neparnog. Prvo ćemo objasniti Loubéreovu metodu koja se koristi za konstruiranje magičnih kvadrata neparnog reda te magične N-kocke neparnog reda. Jedna od najpoznatijih metoda koja se koristi za konstruiranje magičnih N-kocki parnog reda je pomoću Prohuetovog niza. Zatim ćemo objasniti konstrukciju magičnih kocki neparnog reda metodom uokvirivanja. U trećem poglavlju definirati ćemo množenje magičnih kvadrata te objasniti stukturu koju čine svi magični kvadrati i operacija množenja nad njima.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju upoznati ćemo se sa definicijom magičnog kvadrata i magičnih N-kocki, važnih za daljnju konstrukciju.

Definicija 1.0.1. *Magični kvadrat reda M (ili $M \times M$ magični kvadrat , 2-kocka reda M) je $M \times M$ kvadratni niz $A = (a_{ij}), 0 \leq i, j \leq M - 1$, pozitivnih cijelih brojeva takvih da vrijedi sljedeće:*

(1) Svaki od brojeva $1, 2, \ldots, M^2$ se pojavljuje točno na jednom mjestu u nizu A, odnosno magičnom kvadratu.

(2) Za $0 \leq i \leq M - 1$, sume

$$\sum_{j=0}^{M-1} a_{ij}$$

su jednake i nezavisne o koordinati i.

(3) Za $0 \leq j \leq M - 1$, sume

$$\sum_{i=0}^{M-1} a_{ij}$$

su jednake i nezavisne o koordinati j.

(4) Sume

$$\sum_{i=0}^{M-1} a_{ii} \quad i \quad \sum_{i=0}^{M-1} a_{i,n-i-1}$$

su međusobno jednake te jednake sumama u (2) i (3).

U definiciji 1.0.1. sume pod (2) odnosno (3) označavaju sume po recima, odnosno stupcima, a pod (4) sume na dijagonalama. Primijetimo da su te sume jednake

$$S = \frac{1}{2}M(M^2 + 1).$$

Na primjer, na slici 1.1 možemo vidjeti 2-kocku reda 7, odnosno 7×7 magični kvadrat.

22	47	16	41	10	35	4	175
5	23	48	17	42	11	29	175
30	6	24	49	18	36	12	175
13	31	7	25	43	19	37	175
38	14	32	1	26	44	20	175
21	39	8	33	2	27	45	175
46	15	40	9	34	3	28	175
175	175	175	175	175	175	175	

Slika 1.1: Magični kvadrat reda 7

Definirali smo magični kvadrat (magičnu 2-kocku reda M). Sada ćemo dati općenitu definiciju za bilo koju magičnu N-kocku reda M.

Definicija 1.0.2. *Magična N-kocka reda M (ili $\underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{N}$ magična kocka) je N-dimenzionalni niz $A = (a_{i_1,i_2\ldots,i_N})$, $\quad 0 \le i_1, i_2, \ldots, i_N \le M-1$ pozitivnih cijelih brojeva takvih da vrijedi sljedeće:*

(1) Svaki od brojeva od $1, 2, \ldots, M^N$ se pojavljuje točno na jednom mjestu u nizu A, odnosno u magičnoj N-kocki.

(2) Neka su $v_1, v_2, \ldots, v_N$ koordinate početne točke takve da su svi $v_i \in \{0, 1, \ldots M-1\}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, pri čemu bar jedna koordinata v_j mora biti 0 ili $M-1$. Nadalje, neka vektor $(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_N)$ označava vektor kretanja po j-toj koordinati, koji je u ovisnosti o koordinatama početne točke definiran na sljedeći način: ako je $v_j = 0$, tada je $\epsilon_j = 1$ a ako je $v_j = M-1$, tada je $\epsilon_j = -1$. Ostale koordinate su jednake 0 tj. $v_i = 0$, za $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $i \neq j$. Tada su sume

$$\sum_{k=0}^{M-1} a_{v_1+k\cdot\epsilon_1, v_2+k\cdot\epsilon_2,\ldots,v_N+k\cdot\epsilon_N}$$

neovisne o izboru početne točke i jednake

$$\frac{M(M^N+1)}{2} \tag{1.1}$$

(3) *Neka su* $v_1, v_2, \ldots, v_N$ *koordinate početne točke takve da su svi* $v_i \in \{0, M-1\}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, N\}$*. Nadalje, neka* $(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_N)$ *označava vektor kretanja po dijagonalama, određen izborom početne točke na sljedeći način:*

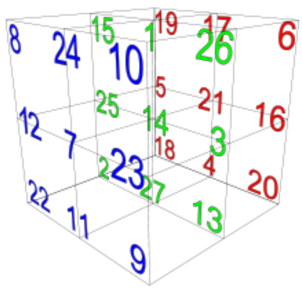
$$\epsilon_i = \begin{cases} 1, & v_i = 0 \\ -1, & v_i = M-1 \end{cases} \quad \textit{za sve } i = 1, 2, \ldots, N$$

Tada su sume

$$\sum_{k=0}^{M-1} a_{v_1+k\cdot\epsilon_1, v_2+k\cdot\epsilon_2, \ldots, v_N+k\cdot\epsilon_N}$$

neovisne o izboru početne točke te jednake sumi pod (1.1)

Nakon što smo definirali magičnu N-kocku, na slici 1.2 možemo vidjeti primjer magične 3-kocke reda 3. U ovom slučaju, kada imamo 3-dimenzionalnu kocku, vrijedi da su sume jednake za svaki niz brojeva koji je paralelan sa bilo kojim bridom kocke te za prostorne dijagonale. Ubuduće kad budemo prikazivali magične 3-kocke koristit ćemo prikaz pomoću M kvadrata koji su dio kocke, npr. kod magične kocke sa slike 1.2 imali bi 3 kvadrata tj. plavi,zeleni i crveni kvadrat.



Slika 1.2: Primjer 3-kocke reda 3

Poglavlje 2

Konstrukcija magičnih kvadrata i kocki

2.1 Loubére-ova metoda

Postoji mnogo metoda za konstruiranje magičnih kvadrata. Jedna od najpoznatijih je Loubére-ova metoda, koja se koristi samo za konstruiranje magičnih kvadrata neparnog reda. Počinjemo s okvirom praznog kvadrata dimenzije $M \times M$ kojeg ćemo puniti brojevima od 1 do M^2 po sljedećim pravilima:

(1) Prvi korak je smjestiti broj 1 u prvi red na sredinu.

(2) Svaki sljedeći broj stavljamo na mjesto dijagonalno gore-desno.

(3) U slučaju da smo došli do desnog ruba, sljedeći broj ćemo smjestiti na mjesto u krajnju lijevu kolonu i jedan red iznad.

(4) U slučaju da smo došli do gornjeg ruba, sljedeći broj ćemo smjestiti na mjesto u najdonji red i jedan stupac desno.

(5) Ako je mjesto u kvadratu zauzeto, npr. ako je mjesto gdje želimo staviti broj k+1 zauzeto, onda ćemo broj k+1 smjestiti direktno ispod broja k u kvadratu.

Sada ćemo ilustrirati kako ovom metodom konstruirati magični kvadrat reda 5.

		1		
	5			
4	6			
				3
			2	

Slika 2.1: Konstrukcija magičnog kvadrata

Na slici 2.1 smo smjestili prvih šest brojeva. Broj 1 smo smjestili u magični kvadrat po pravilu (1). Zatim po pravilu (4) broj 2 ćemo smjestit u najdonji red i jedan stupac udesno. Broj 3 ćemo smjestit prema pravilu (2). Sada ćemo u krajnji lijevi stupac i jedan red gore staviti broj 4 prema pravilu (3). Broj 5 ćemo smjestit na mjesto dijagonalno od 4 prema pravilu (2). Sada bi trebali broj 6 staviti na mjesto gdje se nalazi broj 1, budući da je to mjesto zauzet sada ćemo ga prema pravilu (5) smjestit ispod broja 5. Ako nastavimo puniti kvadrat ovim načinom dobiti ćemo sljedeću magičnu kocku:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Slika 2.2: Magični kvadrat

Jedan korak zahtjeva objašnjenje a to je kako smo smjestili broj 16 ispod 15. Naime, prema pravilu (3) i (4) broj 16 bi trebali smjestit na mjesto broja 11. Budući da je to mjesto zauzeto, prema pravilu (5) smještamo ga ispod prethodnog broja. Možemo vidjeti da je kvadrat sa slike 2.2 magični kvadrat. Kako bi se uvjerili, provjerite da je zbroj elemenata po recima i stupcima te zbroj elemenata na dijagonalama jednak te iznosi 65.

U slučaju da smo punili magični kvadrat istom metodom, ali da smo ubacili brojeve od 0 do $M^2 - 1$, ne bi poremetili činjenicu da to hoće ili neće na kraju biti magični kvadrat. Za našu daljnju konstrukciju, prikladnije je koristiti brojeve od 0 do $M^2 - 1$ (Slika 2.3). Zato ćemo mi modificirati prethodni magični kvadrat tako da oduzmemo od svakog broja jedan. Zatim ćemo brojeve u kvadratu napisati kao dvoznamenkaste brojeve u bazi 5 i dobiti ćemo magični kvadrat prikazan na slici 2.3. Takav način konstrukcije koristimo kako bismo kasnije lakše dokazali da je suma elemenata po stupcima, recima i po dijagonalama jednaka.

16	23	0	7	14
22	4	6	13	15
3	5	12	19	21
9	11	18	20	2
10	17	24	1	8

Slika 2.3: Magični kvadrat

Na slici 2.4 je svaki broj napisan u obliku dvoznamenkastog broja u bazi 5. Možemo primijetit da se u svakom retku, odnosno stupcu, na mjestu jedinica nalazi skup brojeva $\{0,1,2,3,4\}$ u nekom poretku . Isto vrijedi i za mjesto desetica. Iako govorimo o brojevnom sustavu u bazi 5, radi jednostavnosti koristiti ćemo naziv jedinica, desetica, stotica itd. i u nastavku ovog rada. Na osnovu toga, možemo zaključiti da su sume po recima, odnosno stupcima jednake. Primijetimo da na mjestu desetica elemenata jedne od dijagonala imamo samo znamenku 2 . Suma znamenaka na tim mjestima desetica iznosi 10(=0+1+2+3+4). Stoga će i za dijagonale vrijediti da je suma jednaka ostalim sumama po recima i stupcima.

31	43	00	12	24
42	04	11	23	30
03	10	22	34	41
14	21	33	40	02
20	32	44	01	13

Slika 2.4: Magični kvadrat s elementima u bazi 5

Sada ćemo pokazati da se preslikavanje iz praznog kvadrata dimenzija $M \times M$, u našem slučaju 5×5, u magični kvadrati može definirati pomoću funkcije, pri čemu će domena funkcije i područje vrijednosti biti vektorski prostor. Za naš kvadrat sa slike 2.4 imamo sljedeći vektorski prostor:

$$\mathbb{F}_5^2 = \{(u,v) : u,v \in \mathbb{F}_5\ ,\ \ \mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{0,1,2,3,4\}\} \tag{2.1}$$

gdje je $\mathbb{F}_5$ konačno polje, polje ostataka modulo 5.
Sada možemo magični kvadrat sa slike 2.4 definirati pomoću sljedeće funkcije

$$\phi : \mathbb{F}_5^2 \to \mathbb{F}_5^2$$
$$\phi(x,y) = (2+x+y, 2+2x+y)$$

x i y će nam biti koordinate ovog kvadrata s tim da će ishodište biti u središtu, odnosno, gdje se nalazi broj 22. Koordinata x će označavati red ovog kvadrata, a koordinata y će označavati stupac. Prva koordinata preslikavanja, u našem slučaju $2 + x + y$ će označavati prvu znamenku, odnosno znamenku desetica u mjestu (x, y) u kvadratu, a druga koordinata će označavati drugu znamenku, odnosno znamenku jedinica, na mjestu (x, y) broja u bazi 5. Ovo preslikavanje je afina transformacija. Sada postavljamo pitanje, iz kojih sve afinih transformacija možemo dobiti magični kvadrat, odnosno, koje uvjete mora zadovoljavati to preslikavanje da bi iz njega mogli konstruirati magični kvadrat.

Općenito, neka je sada M neparan cijeli broj koji označava red magičnog kvadrata i neka $R = \mathbb{Z}/M\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, M-1\}$, prsten ostataka modulo M. Elemente kvadrata $M \times M$ možemo gledati kao uređeni par $(x, y) \in R^2$, pri čemu je R^2 slobodni modul ranga 2 nad prstenom R. Elementi imaju zapis $\overline{xy}$ u bazi M. Općenito, funkciju ϕ možemo napisati kao afinu transformaciju od R^2 na ovaj način:

$$\phi(x, y) = (ax + by + c, dx + ey + f). \tag{2.2}$$

Preslikavanje je ekvivalentno sljedećem matričnom prikazu:

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

pri čemu ćemo s A označiti matricu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Sada ćemo navesti uvjete koje koeficijenti moraju zadovoljavati, da bi se iz ovog preslikavanja mogao dobiti magični kvadrat.
Kao prvo, zahtijevamo da je ovo preslikavanje ϕ bijekcija a to znači da $ad - bc \in R^x$, pri čemu R^x označava invertibilne elemente od R. Kada je R polje, onda su svi elementi tog skupa osim nule invertibilni elementi, pa ćemo tada zahtijevati da je determinanta matrice različita od nule, tj. $ad - bc \neq 0$.
Također bi htjeli da se u našem magičnom kvadratu među elementima nekog reda ili stupca na mjestu jedinice nađu sve znamenke od $1, 2, \ldots, M-1$, isto tako na mjestu desetica. To je isto da kažemo da su koeficijenti $a, b, c, d \in R^x$. Ovo će nam garantirati da su sume elemenata po recima i stupcima jednake.

Korolar 2.1.1. *Ako su $a, b, c, d \in R^x$, onda se u svakom retku ili stupcu na mjestu znamenki jedinica i desetica pojavljuju sve znamenke iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, M-1\}$.*

Dokaz. Dokazat ćemo samo za znamenke desetica u magičnom kvadratu. Analogno ide dokaz za znamenke jedinica.

Fiksirati ćemo koordinatu x. Pretpostavimo suprotno da postoje dva različita broja, y_1 i y_2 koja će se preslikati u isti, tj. $\exists\, y_1 \ i \ y_2$, $y_1 \not\equiv y_2 \pmod M$ takvi da

$$ax + by_1 + c \equiv ax + by_2 + c \pmod M$$

$$by_1 \equiv by_2 \pmod M$$

$$b(y_1 - y_2) \equiv 0 \pmod M$$

Iskoristimo pretpostavku da je $b \in R^x$, $b \in R^x \Leftrightarrow (b, M) = 1$ tj.

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^x = \{k \mid k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \text{ i } (n, k) = 1\}$$

Sada imamo

$$M \mid y_1 - y_2$$

$$y_1 \equiv y_2 \pmod M$$

što je kontradikcija s pretpostavkom. □

Nadalje, uvjeti da su $a \pm b$ i $c \pm d$ invertibilni elementi prstena R osiguravaju da će dijagonale također imati jednaku sumu. Ovaj primjer magične kocke 5×5 pokazuje da uz prikladan izbor e i f možemo dobiti magičnu kocku iako je $a = \pm b$ ili $c = \pm d$. Ako je $a = \pm b$ tada za e moramo uzeti da je $\frac{M-1}{2}$ i ako je $c = \pm d$ onda za f moramo uzeti da je jednak isto vrijednosti $\frac{M-1}{2}$. Također, može se dokazati, ako je broj M paran, da a, b, c, d i $ad - bc$ ne mogu svi biti invertibilni elementi od R istovremeno, što znači da ova metoda ne vrijedi.
Općenito, magičnu N-kocku neparnog reda M možemo konstruirati pomoću funkcije ϕ odnosno, afine transformacije slobodnog modula R^N ranga N nad R.
Funkciju ϕ možemo prikazati u sljedećem matričnom prikazu:

$$\phi(x) = u + A \cdot x$$

Elemente magične N-kocke možemo prikazati kao uređenu N-torku

$$\phi(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) = (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}) \in R^N,$$

pri čemu je $R = \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$, prsten ostataka modulo M. $(y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})$ označava N-torku koja ima zapis $\overline{y_0 y_1 \cdots y_{N-1}}$ u bazi M, tj. $y_0 \cdot M^{N-1} + y_1 \cdot M^{N-2} \ldots y_{N-1} \cdot M^0$ u dekadskom brojevnom sustavu. Za ishodište uvijek uzimamo centar magične kocke. Ovo preslikavanje mora biti bijekcija pa matrica A mora biti regularna matrica reda N čiji elementi su invertibilni elementi prstena R. To će nam garantirati da će se na znamenkama jedinica (desetica, stotica, ...) pojaviti svi elementi iz R. Sada ćemo na primjeru 3-kocke ilustrirati ovu metodu.

Na sljedećoj slici su prikazane koordinate 3-magične kocke, ishodište je u centru.

(-1,-1,-1)	(0,-1,-1)	(1,-1,-1)
(-1, 0,-1)	(0, 0,-1)	(1, 0,-1)
(-1, 1,-1)	(0, 1,-1)	(1, 1,-1)

(-1,-1, 0)	(0,-1, 0)	(1,-1, 0)
(-1, 0, 0)	(0, 0, 0)	(1, 0, 0)
(-1, 1, 0)	(0, 1, 0)	(1, 1, 0)

(-1,-1, 1)	(0,-1, 1)	(1,-1, 1)
(-1, 0, 1)	(0, 0, 1)	(1, 0, 1)
(-1, 1, 1)	(0, 1, 1)	(1, 1, 1)

Slika 2.5: Koordinate 3-kocke

Pomoću sljedeće funkcije ϕ možemo dobiti magičnu 3-kocku reda 3:

$$\phi(x_0, x_1, x_2,) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Lako se provjeri da je A regularna matrica, znači preslikavanje je bijekcija. Elementi koji čine matricu A su invertibilni elementi prstena R. To će osigurati da su sume jednake u svakom retku, odnosno stupcu, jer će se na mjestu znamenki jedinica, odnosno desetica i stotica naći svi elementi iz skupa $\{0, 1, 2\}$. Gledamo sada sume po dijagonalama. Vidimo da se na većini mjesta znamenki jedinica, desetica i stotica nalaze različiti elementi iz skupa $\{0, 1, 2\}$. Međutim, ako pogledamo elemente jedne od dijagonala možemo primijetiti da se na mjestu desetica nalaze sve jedinice, čija suma je jednaka sumi različitih elemenata. Pogledajmo kako matrica A djeluje na koordinate koje čine dijagonalu. Promatrati ćemo sljedeće koordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ koje čine jednu od prostornih dijagonala. Označit ćemo vektor kretanja sa $\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_0 \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix}$, a sa $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ koordinate početne točke. Primijetimo da vektor kretanja po zadanoj dijagonali iznosi $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vrijedi da je

$$\phi(x + \epsilon) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A(x + \epsilon) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \epsilon_0 \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix}.$$

Gledamo kako matrica A djeluje na vektor kretanja. $A(\epsilon) = A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ Možemo zaključiti da se na mjestu desetica neće mijenjati znamenka desetica,

odnosno na tom mjestu će se pojaviti sve jedinice. Možemo lako zaključiti da će prvi red matrice A utjecati da se na mjestu stotica, onih elemenata koje čine jednu od dijagonala, pojaviti sve jedinice, odnosno treći red matrice A će utjecati da se na mjestu jedinica pojave sve jedinice. Ovaj uvjet je analogan uvjetu $a \pm b = 0$ kod magičnih kvadrata.
Ako funkcijom ϕ djelujemo na koordinate kocke dobit ćemo sljedeću magičnu kocku:

000	121	212
211	002	120
122	210	001

112	200	021
020	111	202
201	022	110

221	012	100
102	220	011
010	101	222

Slika 2.6: Magična 3-kocka reda 4

Sada ćemo elemente magične kocke sa slike 2.6 pretvoriti u dekadski brojevni sustav i dodat ćemo svakom elementu broj 1. Time ćemo dobiti magičnu kocku sa slike 2.7:

1	17	24
23	3	16
18	22	2

15	19	8
7	14	21
20	9	13

26	6	10
12	25	5
4	11	27

Slika 2.7: Magična 3-kocka reda 4

2.2 Metoda Prouhet-ovog niza

U ovom odjeljku definirati ćemo Prouhet–Thue–Morse niz te objasniti konstrukciju magičnih kvadrata i magičnih kocki pomoću tog niza.

Prouhet–Thue–Morse niz

Prouhet–Thue–Morse niz je prvo proučavao Eugéne Prouhet 1851. Prohuet nije dao ekspicitnu definiciju ili objašnjenje niza. To je prepustio Axelu Thue 1906., koji je ovaj niz koristio u kombinatorici riječi. Uz binarni Prouhet–Thue–Morse niz, Morse i Hedlund u svojim radovima su definirali općeniti t-ov Morse-Hedlundov niz. Kad se govori o binarnom Morse-Hedlundovom nizu obično se kaže samo Prohuetov niz.

Definicija 2.2.1. *Thue–Morse niz (ili Prouhet–Thue–Morse ili Prohuet niz) je beskonačni binarni niz nula i jedinica,* $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ *gdje je* $a_n = 0$ *u slučaju da je broj jedinica u binarnom zapisu broja n paran, odnosno* $a_n = 1$ *ako je broj jedinica u binarnom zapisu broja n neparan.*

Ovako izgleda niz:

$$0110100110010110100101100110100 1\ldots \tag{2.5}$$

n	0	1	2	3	4	5
Binarni zapis	0	1	10	11	100	101
a_n	0	1	1	0	1	0

Kako jednostavnije doći do Prouhet–Thue–Morse niza? Naime, uzmimo za prvi broj da nam bude 0. Zatim komplementiranjem 0 dobijemo 1 i stavimo ga u niz. Nadalje, komplementiramo niz koji imamo do sada i dobivamo 10 te ga stavljamo na kraj niza, pa naš niz izgleda ovako 0110. Daljnim komplementiranjem ovog niza dobijemo niz nula i jedinica. Prouhet–Thue–Morse niz (2.5) možemo komplementirati te dobijemo niz 1001011001101001011 01. Ovo je bio binarni Morse-Hedlundov niz. Sada ćemo dati općenitiju definiciju.

Definicija 2.2.2. *t-ov Morse-Hedlundov niz je beskonačni niz* $\{a_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ *cijelih brojeva iz skupa* $\{0, 1, 2, \ldots, t-1\}$*, pri čemu je* a_n *suma modulo t, svih znamenaka u izrazu broja n u bazi t.*

Rekli smo da a_n poprima vrijednosti prstena ostataka modulo t pa se sve operacije izvode u skladu sa definicijom prstena. Na primjer, u sljedećoj tablici možemo vidjeti ternarni (3) Morse-Hedlundov niz:

n	Ternarni zapis	a_n
0	0	0
1	1	1
2	10	2
3	11	1
4	100	2
5	101	0
6	102	2

Nastavljajući ovim postupkom dobivamo sljedeći niz:

$$012120201120201012\ldots$$

Na isti način se mogu dobiti i ostali Morse-Hedlund-ovi nizovi.
U nastavku ovog rada mi ćemo trebati komplement binarnog Prohuet-ovog niza iz definicije (2.2.1) odnosno sljedeći niz:

$$1001011001101001011 01$$

pa ćemo modificirati danu definiciju Prohuet-ovog niza. Definirati ćemo niz a_n na sljedeći način: $a_n = 0$ ako je broj jedinica u binarnom zapisu neparan odnosno $a_n = 1$ ako je broj jedinica u binarnom zapisu paran.

Metoda konstrukcije magičnog kvadrata pomoću Prouhet-ovog niza

U ovom odjeljku ilustrirati ćemo kako iz kvadrata reda 4 dobiti magični kvadrat pomoću Prohuet-ovog niza, zatim objasniti konstrukciju za općenitu N-kocku i dati primjer konstrukcije 3-kocke reda 3. Prvo ćemo početi s konstrukcijom magičnog kvadrata. Objasniti ćemo kako označavamo koordinate magičnog kvadrata, budući da se razlikuju od koordinata kod konstrukcije Loubéreove metode. Naime, koordinate mjesta u kvadratu označit ćemo brojevima od 0 pa do $M^2 - 1$ na sljedeći način:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Slika 2.8: Koordinate magičnog kvadrata

Na kvadratu reda 4 označimo mjesta koja se nalaze na dijagonali. Magični kvadrat počinjemo puniti brojevima koji označavaju koordinatu tog mjesta u kvadratu, kao što je to prikazano na slici 2.9.

0			3
	5	6	
	9	10	
12			15

Slika 2.9: Konstrukcija magičnog kvadrata

Kada popunimo mjesta na dijagonalama, upisujemo brojeve koji su preostali, tako da brojimo unatrag, od 15 do 0, te ih stavljamo na mjesta koja su ostala prazna.

Na taj način dobit ćemo sljedeći magični kvadrat sa slike 2.10.

0	14	13	3
11	5	6	8
7	9	10	4
12	2	1	15

Slika 2.10: Konstrukcija magičnog kvadrata

Ako bolje pogledamo, možemo uočiti sličnost između Prohuetovog niza i konstruiranja ovog magičnog kvadrata. Prisjetimo se kako izgleda Prohuet-ov niz:

$$1001011001101001011 01.$$

Naime, brojeve koje smo prve ubacili u kvadrat,

$$0,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 12,\ 15,$$

su indeksi elemenata u Prohuet-ovom binarnom nizu na kojima se nalaze jedinice. Metoda konstrukcije magičnog kvadrata sastoji se od toga da magični kvadrat ispunimo indeksima elemenata, koje u Prohuet-ovom binarnom nizu imaju jedinicu na tom mjestu, na način na koji smo to uradili u gornjem primjeru. Zatim na preostala mjesta ubacujemo brojeve koje su ostali, ali ih stavljamo u magični kvadrat obrnutim redoslijedom, od najvećeg do najmanjeg.
Mogu li se na ovaj način konstruirati magični kvadrati za bilo koji parni red? Lako se može provjeriti da ova metoda ne vrijedi za magični kvadrat reda 6, ali vrijedi za magični kvadrat reda 8. U pravilu, ovom metodom možemo dobiti magične kvadrate reda $2^n \times 2^n$ za sve $n \geq 2$.
Sljedeća slika 2.11 prikazuje magični kvadrat reda 8 konstruiran pomoću Prohuet-ovog niza. Može se lako provjeriti da je ovo magični kvadrat, tj. da je suma po recima, stupcima i na dijagonalama jednaka.

1	63	62	4	60	6	7	57
56	10	11	53	13	51	50	16
48	18	19	45	21	43	42	24
25	39	38	28	36	30	31	33
32	34	35	29	37	27	26	40
41	23	22	44	20	46	47	17
49	15	14	52	12	54	55	9
8	58	59	5	61	3	2	64

Slika 2.11: Konstrukcija magičnog kvadrata

Metoda konstrukcije magičnih N-kocki pomoću Prouhet-ovog niza

Za daljnju konstrukciju objasnit ćemo kako možemo prikazati magične kocke. Magičnu N-kocku reda M možemo shvatiti kao N-dimenzionalni niz. Na sljedeći način možemo iz N-kocke reda M konstruirati magičnu kocku pomoću Prouhet-ovog niza.
Neka je $t \in \mathbb{Z}, t > 1$ i neka je $M = t^K$. Želimo smjestiti brojeve $0, 1, 2, \ldots, t^{KN} - 1$ u N-dimenzionalni niz tako da svaki broj smijemo staviti na samo jedno mjesto u nizu. Svaki od ovih brojeva se može prikazati kao KN-znamenkasti broj u bazi t, tj. možemo ga shvatit kao element slobodnog modula S^{KN} ranga KN nad S, tj. prstenom ostataka modulo t. Za točku ishodišta uzimamo jedan kut magične kocke. Magičnu N-kocku možemo definirati pomoću funkcije koja ide iz skupa S^{KN} u taj isti skup uz određene uvjete. Funkcija ϕ je linearno preslikavanje dano s

$$\phi : S^{KN} \to S^{KN}$$
$$\phi(x) = A \cdot x$$

gdje je A matrica reda N, definirana tako da se na dijagonali nalazi broj 2 a izvan dijagonale broj 1. $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ označava koordinatu magične N-kocke koja se preslika u $\phi(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$. $\phi(x)$ označava element koji se nalazi na mjestu x magičnoj kocki. Ovom metodom možemo konstruirati N-dimenzionalne kocke reda t^K za koje vrijede sljedeća tri uvjeta:

- $t|KN$
- $M \geq 2$
- t je paran broj

Sada ćemo pomoću funkcije ϕ konstruirati magičnu 3-kocku reda 4.

To je moguće zato što 3-kocka reda 4 zadovoljava uvjete potrebne da bi se mogla konstruirati magična kocka ovom metodom, imamo da je $N = 3, M = 4 = 2^2 = t^K$. Vidimo da $t|KN$, $M \geq 2$ i da je t paran. U našem slučaju, elemente magične kocke ćemo prikazati kao 6-znamenkasti broj u bazi 2. Odredimo prvo ishodište naše magične kocke, odabrati ćemo jedan vrh. U principu se uvijek uzima gornji lijevi kut i po redu se označavaju koordinate kao na sljedećoj slici gdje su prikazana prva dva kvadrata.

000000	000001	000010	000011
000100	000101	000110	000111
001000	001001	001010	001011
101100	001101	001110	001111

010000	010001	010010	010011
010100	010101		

Slika 2.12: Koordinate 3-kocke

U našem primjeru, funkcija $\phi : \mathbb{F}_2^6 \to \mathbb{F}_2^6$, pri čemu je $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ odnosno,

$$\mathbb{F}_2^6 = \{(x_0, x_1, \ldots, x_5) : x_i \in \mathbb{F}_2, \forall i \in \{0, 1, , \ldots 5\}\}.$$

U našem slučaju, mjestu s koordinatama $(x_0, x_1, \ldots, x_5)$ funkcija ϕ pridružuje broj $(y_0, y_1, \ldots, y_5)$ koji u bazi 2 ima zapis $\overline{y_0 y_1 \ldots y_5}$. Općenito, mjestu s koordinatama $(x_0, x_1, \ldots x_{KN-1})$ pridružujemo broj

$$\phi(x) = \phi(x_0, x_1, \ldots, x_{KN-1}) = (y_0, y_1, \ldots, y_{KN-1})$$

koji u bazi t ima zapis $\overline{y_0 y_1 \ldots y_{KN-1}}$ odnosno u dekadskom sustavu

$$y_0 \cdot t^{MN-1}, y_1 \cdot t^{MN-2}, \ldots, y_{KN-1} \cdot t^0$$

Funkcija ϕ izgleda ovako:

$$\phi(x_0, x_1, \ldots, x_5) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

U slučaju da koordinate broja $(x_0, x_1, \ldots, x_5)$ imaju zapis u dekadskom brojevnom sustavu jednake indeksu elemenata koji u Prohuetovom binarnom nizu na tom

mjestu imaju jedinicu, funkcija će taj $(x_0, x_1, \ldots, x_5)$ preslikati u isti, a u suprotnome preslikat će ga u komplement binarnog zapisa koordinata $(x_0, x_1, \ldots, x_5)$. Definicija Prohuet-ovog niza, koju smo dali, kaže da je to beskonačni binarni niza nula i jedinica $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$, gdje je $a_n = 1$ u slučaju da je broj jedinica u binarnom zapisu broja n paran.
Gledamo posebno koordinate koje u svom binarnom zapisu imaju paran i neparan broj jedinica te kako na njih djeluje matrica A iz jednadžbe (2.6).

$$\phi(x_0, x_1, \ldots, x_5) = (2 \cdot x_0 + x_1 + \ldots + x_5, x_0 + 2 \cdot x_1 + \ldots + x_5, \ldots, x_0 + x_1 + \ldots + 2 \cdot x_5)$$

Označit ćemo sa $S = x_0 + x_1 + \ldots + x_5$.

$$\phi(x_0, x_1, \ldots, x_5) = (S + x_0, S + x_1, \ldots, S + x_5)$$

Ako uzmemo da je broj jedinica u binarnom zapisu paran, onda je $S \equiv 0 (\text{mod } 2)$ pa

$$\phi(x_0, x_1, \ldots, x_5) = (x_0, x_1, \ldots, x_5)$$

U slučaju da je broj jedinica u binarnom zapisu neparan, imamo da je $S \equiv 1 (\text{mod } 2)$ pa

$$\phi(x_0, x_1, \ldots, x_5) = (1 + x_0, 1 + x_1, \ldots, 1 + x_5)$$

što je komplement od $(x_0, x_1, \ldots, x_5)$.
Ovim postupkom dobit ćemo sljedeću magičnu kocku čiji elementi su zapisani u binarnoj bazi.

000000	111110	111101	000011
111011	000101	000110	111000
110111	001001	001010	110100
001100	110010	110001	001111

101111	010001	010010	101100
010100	101010	101001	010111
011000	100110	100101	011011
100011	011101	011110	100000

011111	100001	100010	011100
100100	011010	011010	100111
101000	010110	010101	101011
010011	101101	101110	010000

110000	001110	001101	110011
001011	110101	110110	001000
000111	111001	111010	000100
111100	000010	000001	111111

Slika 2.13: Magična 3-kocka reda 4 u bazi 2

Ako elemente magične kocke sa slike 2.13 prebacimo u dekadski sustav dobit ćemo sljedeću magičnu kocku čija magična suma iznosi 126.

0	62	61	3	47	17	18	44	31	33	34	28	48	14	13	51
59	5	6	4	20	42	41	23	36	26	25	39	11	53	54	8
55	9	10	52	24	38	37	27	40	22	21	43	7	57	58	4
12	50	49	15	35	29	30	32	19	45	46	16	60	2	1	63

Slika 2.14: Magična 3-kocka reda 4

Podsjetimo se prvog primjera iz ovog odjeljka. Imali smo magični kvadrat reda 4. Budući da kvadrat reda 4 zadovoljava 3 uvjeta potrebna da bi se mogla konstruirati magična N-kocka, možemo i na njega primijeniti gore navedenu metodu. Formulom

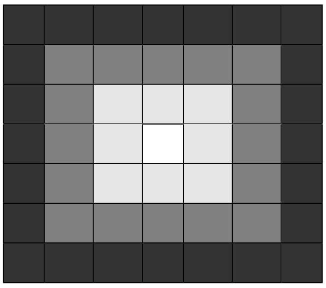
$$\phi(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

možemo dobiti magični kvadrat. Koordinate kvadrata zapisati ćemo kao 4-znamenkasti broj u bazi 2. Funkcija ϕ će djelovati na koordinate 0, 3, 5, 6, 9, 10, 12 i 15 tako da taj broj preslika u isti, budući da su to indeksi elemenata u Prohuetovom nizu koji na tom mjestu imaju broj 1. Ostale koordinate preslika u komplement tog broja.

2.3 Metoda uokvirivanja

Ovu metodu je objasnio Ibrahim az-Zinjani u 13. stoljeću. Koristimo je za konstruiranje magičnih kvadrata neparnog reda. Kako i samo ime kaže, metoda se sastoji od toga da označimo okvire unutar kvadrata, od vanjskog (najvećeg) prema unutrašnjem do mjesta koji označava središte kvadrata. Zatim okvire punimo brojevima od $1, 2, \ldots, M^2$ od vanjskog sve do središnjeg mjesta kvadrata u koji ćemo upisati broj $\frac{M^2+1}{2}$.
Metodu ćemo ilustrirati na kvadratu dimenzije 7×7. Način na koji gradimo okvire u našem kvadratu je prikazan na slici 2.15. Vanjski okvir, ili najtamnije sivo obojeni kvadratići čine prvi okvir. Sljedeći unutrašnji okvir čini drugi okvir. Zatim treći okvir čine svijetlo siva mjesta. I naposljetku, bijeli kvadratić čini četvrti ili zadnji okvir.

Zbog karakteristika arapskog pisma, kod ove metode stupce ćemo brojati od desna prema lijevo. Magični kvadrat ćemo popunjavati tako da prvo popunimo mjesta u vanjskom okviru. Zatim ćemo popunjavati okvire prema unutrašnjosti sve do središnjeg mjesta. Na slici 2.16 smo ubacili prva tri broja na sljedeći način.



Slika 2.15: Uokvirivanje

1 postavimo na sredinu 1. stupca, broj 2 stavimo ispod 1, broj 3 ispod 2. Zaustavljamo se u trenutku kad popunimo mjesto iznad dijagonale.

						1
						2
						3

Slika 2.16: Konstruiranje

Na slici 2.17 ćemo ubaciti sljedbenike zadnje upisanog broja u kvadrat na sljedeći način. U zadnji stupac u zadnjem retku zapisat ćemo sljedeći broj, broj 4. Nadalje, desno od broja 4 zapisujemo njegove sljedbenike, sve do srednjeg stupca, kojeg ostavimo praznog. Tako smo upisali broj 5 i 6. Sljedeći broj, broj 7 zapisujemo na sredini prvog retka.

			7			
						1
						2
						3
4	5	6				

Slika 2.17: Konstruiranje

Nadalje, sljedeće brojeve ćemo smjestiti u zadnji stupac, od mjesta koje se nalazi iznad središnjeg kvadratića u stupcu, pa prema gore, do vrha tj. do prvog retka.

Tako ćemo smjestit brojeve 8, 9 i 10. Sljedeće brojeve (broj 11 i sljedbenike) ćemo smjestit u prvi red na mjesta desno od središta i tako prema desnom kraju s tim da prvo mjesto ostavimo prazno. Na slici 2.18 možemo vidjeti kako to izgleda.

10			7	11	12	
9						
8						
						1
						2
						3
4	5	6				

Slika 2.18: Konstruiranje

Pri konstruiranju kvadrata reda M, popunit ćemo prvo vanjski okvir kvadrata tako da suma dva međusobno suprotna polja bude jednaka $M^2 + 1$. U našem slučaju suma sva suprotna polja mora biti jednaka 50. Suma dva elemenata u kutovima koji su dijagonalno suprotni također mora biti 50. Tako ćemo vanjski okvir popunjavati brojevima od 49,48 pa do 38. To možemo vidjeti na slici 2.19.

10	45	44	7	11	12	46
9						41
8						42
49						1
48						2
47						3
4	5	6	43	39	38	40

Slika 2.19: Konstruiranje

Kad smo popunili prvi okvir, istim načinom punimo i ostale unutrašnje okvire. U zadnjem okviru mora se nalaziti element 25. Na slici 2.20 možemo vidjeti konačnu magičnu kocku.

Sada ćemo generalizirati konstrukciju magičnih kvadrata reda M. Neka je $M = 2k + 1$, red kvadrata. Broj redova označavamo brojevima od 1 do M počevi od vrha prema dnu kvadrata, a broj stupaca također označavamo istim brojevima od 1 do M od desna prema lijevo. Na primjer, (p, q)-to mjesto se nalazi u p-tom retku i q-tom stupcu (od desna). Prvi okvir sadrži $4(2k + 1) - 4 = 8k$ mjesta za popuniti.

10	45	44	7	11	12	46
9	19	34	17	20	35	41
8	18	24	23	28	32	42
49	37	29	25	21	13	1
48	36	22	27	26	14	2
47	15	16	33	30	31	3
4	5	6	43	39	38	40

Slika 2.20: Magični kvadrat

Tehnika konstruiranja magičnog kvadrata se sastoji od popunjavanja prvog okvira uzastopnim cijelim brojevima $1, 2, 3 \ldots, 4k$ na sljedeći način:

- Smjestit ćemo cijele brojeve $1, 2, \ldots, k$ u prvi stupac, krajnji desni, popunjavajući kvadrat od središnjeg mjesta prema dolje, zauzimajući sljedeća mjesta $(k+1, 1), (k+1, 1), \ldots, (2k, 1)$.
- Smjestit ćemo cijele brojeve od $k+1$ do $2k$ u zadnji redak ,od krajnjeg lijevog mjesta prema sredini zauzimajući sljedeća mjesta $(M, M), (M, M-1), \ldots$ $, (M, M-k+1)$
- Smjestimo broj $2k+1$ na mjesto $(1, k+1)$.
- Smjestimo brojeve od $2k+2$ do $3k+1$ u krajnju lijevu kolonu na mjesta $(k, M), (k-1, M), \ldots, (1, M)$ respektivno.
- Smjestimo brojeve $3k+2$ do $4k$ u prvi redak od lijeva na desno na sljedeća mjesta $(1, k), (1, k-1), \ldots, (1, 2)$ respektivno.

Nakon završetka ovih 5 koraka, broj popunjenih mjesta je $k+k+1+k+(k-1) = 4k$ a to je pola popunjenih mjesta od ukupnog broja u prvom okviru. Vidimo da su ostala prazna ona mjesta nasuprot horizontalno, vertikalno i dijagonalno upisanih brojeva $1, 2, \ldots, 4k$. Prazna mjesta ćemo popuniti komplementima elemenata koja se nalaze nasuprot. Komplement cijelog broja x definiramo obzirom na M^2+1, a to je broj $(M^2+1)-x$.
Nakon što smo popunili prvi okvir, isti način popunjavanja koristimo i za sljedeće unutrašnje okvire. Drugi okvir koji ćemo popunjavati sadrži $8(k-1)$ mjesta. Operacije su iste kao za prvi okvir samo se razlikuje prvi element koji upisujemo u okvir a to je $4k+1$. Konstanta za računanje komplementa ostaje ista.

Lako se vidi da je početna vrijednost koju prvu upisujemo u pojedini okvir različita. Ako je red kvadrata jednak $M = 2k+1$, broj okvira je $k+1$, a početnu vrijednost u i-tom okviru ćemo označiti s u_i, pa imamo:

$$u_1 = 1$$
$$u_{i+1} = 2i(n-i) + 1.$$

Element koji se nalazi u središnjem mjestu je $u_{k+1} = \frac{(M^2+1)}{2}$.

Procedura konstruiranja rubova kvadrata sadrži dodatno svojstvo koje kaže da ako maknemo uzastopne okvire opet ćemo dobiti magičnu kocku. Imajući u vidu način kako su uzastopni okviri konstruirani,broj koji ostaje u središtu je $\frac{M^2+1}{2}$, gdje je M red početnog kvadrata. Zato, kad izbacimo r okvira, imamo kvadrat reda $M - 2r = m$ i ako želimo da je središnji element broj $\frac{m^2+1}{2}$ tada moramo oduzeti $2r(M-r)$ od svih brojeva u kvadratu.
To nas dovodi do zaključka da jedino moramo provjeriti da je suma u krajnjim stupcima i recima jednaka sumi $\frac{M(M^2+1)}{2}$. Ako to bude zadovoljeno, ovom konstrukcijom zaista dobivamo magični kvadrat. Na sljedećoj slici možemo vidjeti skicu dokaza.

<table>
<tr><td>$3k+1$</td><td colspan="2"></td><td>$2k+1$</td><td>$3k+2$</td><td>...</td><td>$4k$</td><td></td></tr>
<tr><td>.
.
.</td><td colspan="2" rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td colspan="3" rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$2k+2$</td></tr>
<tr><td>M^2</td><td colspan="2"></td><td></td><td colspan="3"></td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">M^2-k+1</td><td colspan="2" rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td colspan="3" rowspan="2"></td><td>2</td></tr>
<tr><td>.
.
.
k</td></tr>
<tr><td>$k+1$</td><td>...</td><td>$2k$</td><td>M^2-2k</td><td colspan="3"></td><td>M^2-3k</td></tr>
</table>

Slika 2.21: Skica dokaza

Provjerit ćemo sada je li suma u 1. stupcu jednaka $\frac{M(M^2+1)}{2}$. Imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{M-1} a_{ij} &= \Big[1+\ldots+k\Big] + (M^2-3k) + (M^2-k) + \Big[\Big(M^2+1-(2k+2)\Big) \\
&\quad + \Big(M^2+1-(2k+3)\Big)\ldots + \Big(M^2+1-(2k-2)\Big)\Big(M^2+1-(2k+k)\Big)\Big] = \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + 2(2k+1)^2 - 4k + (2k+1)^2(k-1) - 2k(k-1) - \frac{k(k-1)}{2} = \\
&= (2k+1)^2(k-1+2) - 4k - 2k(k-1) + k = ... = \\
&= (2k+1)\big[2k^2+2k+1\big] = (2k+1)\big[\frac{(2k+1)^2+1}{2}\big] = \frac{M(M^2+1)}{2} \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Vidimo da je suma jednaka $\frac{M(M^2+1)}{2}$. Analogno se može provjeriti da je suma po zadnjem stupcu, prvom retku i zadnjem retku također jednaka magičnoj sumi.

Poglavlje 3

Množenje magičnih kvadrata

U ovom poglavlju objasnit ćemo kako množenjem dvije magične kocke možemo dobiti treću. To množenje definiramo kao još jednu metodu konstrukcije magičnih kocki. Također, pokazat ćemo skup svih magičnih kvadrata ima strukturu monoida čiji neutralni element je kvadrat reda 1.
Označit ćemo s $\mathcal{M}_2$ skup svih magičnih kvadrata. Definirati ćemo operaciju na $\mathcal{M}_2$ sa $*$ i nazvat ćemo ju magično množenje. Prije nego formalno definiramo operaciju magičnog množenja na $\mathcal{M}_2$, ilustrirati ćemo metodu na sljedećem primjeru. Neka je A magični kvadrat 3×3 i neka je B magični kvadrat 4×4 sa slike 3.1.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Slika 3.1: Magični kvadrati A i B

Da bi konstruirali magični kvadrat $A * B$, prvo ćemo napraviti veliki okvir praznog kvadrata dimenzije 4×4 (slika 3.2) i svako mjesto tog kvadrata puniti ćemo magičnim kvadratima dimenzije 3×3, istom metodom kojom smo konstruirali magični kvadrat reda 3 (slika 3.2), tj. Loubére-ovom metodom.

Locirajmo mjesto u kvadratu B koji sadrži broj 1 te prekopirajmo magičnu kocku A u odgovarajući okvir koji smo konstruirati kao na desnom kvadratu na slici 3.2. Ovo možemo gledati kao brojanje 9 prvih uzastopnih brojeva.
Sada locirajmo mjesto u magičnom kvadratu B koji sadrži broj 2. U odgovarajući okvir na slici 3.2 upišemo kvadrat reda 3, koji se sastoji od sljedećih 9 uzastopnih brojeva smještenih u taj kvadrat istom metodom kojom smo punili magični

8	1	6									
3	5	7									
4	9	2									

Slika 3.2: Drugi korak konstrukcije

kvadrat A sa slike 3.1. To je isto da kažemo da svakome elementu u magičnom kvadratu A dodamo broj 9, te dobivenu magičnu kocku smjestimo u odgovarajući okvir, na mjestu gdje se nalazi broj 2 u kvadratu *B*.
Lociramo sada broj 3 u magičnom kvadratu B sa slike 3.1. Sada ćemo na to mjesto u kvadratu sa slike 3.2 staviti kvadrat ispunjen uzastopnim brojevima od 19 do 27 Loubéreovom metodom. Nastavljajući ovim postupkom, dobit ćemo 12×12 magični kvadrat sa slike 3.3:

8	1	6	134	127	132	125	118	123	35	28	33
3	5	7	129	131	133	120	122	124	30	32	34
4	9	2	130	135	128	121	126	119	31	36	29
107	100	105	53	46	51	62	55	60	80	73	78
102	104	106	48	50	52	57	59	61	75	77	79
103	108	101	4	54	47	58	63	56	76	81	74
71	64	69	89	82	87	98	91	96	44	37	42
66	68	70	84	86	88	93	95	97	39	41	43
67	72	65	85	90	83	94	99	92	40	45	38
116	109	114	26	19	24	17	10	15	143	136	141
111	113	115	21	23	25	12	14	16	138	140	142
112	117	110	22	27	20	13	18	11	139	144	137

Slika 3.3: Konstrukcija

Sada ćemo dati općenitu metodu za konstruiranje magičnog kvadrata umnoškom dvaju magičnih kvadrata, te pokazati ćemo koju strukturu zadovoljavaju magični kvadrati zajedno s operacijom množenja $*$.
Nekad je $\mathcal{G}$ Abelova grupa, fiksirajmo neki element $u \in \mathcal{G}$. Neka je $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ skup svih kvadratnih nizova elemenata iz $\mathcal{G}$. Definirati ćemo operaciju na skupu svih kvadratnih nizova sa elementima iz $\mathcal{G}$. Neka su

$$A = (a_{ij}), 0 \leq i, j \leq M - 1$$

i

$$B = (b_{kl}), 0 \leq i, j \leq N - 1$$

elementi od $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ veličine $M \times M$ odnosno $N \times N$, njihov produkt $A * B$ je također element $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ tj. kvadrat reda MN. Sada možemo definirati novi kvadrat $E = (e_{\alpha\beta})$ sljedećom formulom

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= M \cdot (k, l) + (i, j) \\ e_{\alpha\beta} &= a_{ij} + M^2(b_{kl} + u) \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdje $0 \leq i, j \leq M - 1$ i $0 \leq k, l \leq N - 1$. Primijetimo da vrijedi $0 \leq \alpha, \beta \leq MN - 1$. Tada pišemo $E = A * B$.
Ako uzmemo $A, B \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$ tada je iz definicije (3.1) očito da vrijedi $A * B \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$, gdje je $*$ binarna operacija na $\mathcal{A}(\mathcal{G})$. To znači da je $(\mathcal{A}(\mathcal{G}), *)$ grupoid. Sada ćemo dokazati asocijativnost.

Lema 3.0.1. *Neka je $\mathcal{G}$ Abelova grupa. Skup $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ svih kvadratnih nizova sa elementima iz $\mathcal{G}$ zajedno s operacijom $*$ čini grupoid. Tada je $*$ asocijativna operacija na $\mathcal{A}(\mathcal{G})$.*

Dokaz. Neka su $A, B,$ i C kvadratni nizovi takve da je $A = (a_{ij})$, $0 \leq i, j \leq M - 1$, reda M, $B = (b_{kl})$, $0 \leq k, l \leq N - 1$, reda N i $C = (c_{\alpha\beta})$, $0 \leq \alpha, \beta \leq P - 1$, reda P. Definirati ćemo nove kvadratne nizove E i F na sljedeći način: $E = (A * B) * C$ i $F = A * (B * C)$, te neka je $E = (e_{rs})$ i $F = (f_{tv})$. Po definiciji (3.1) operacije $*$ imamo

$$\begin{aligned} e_{rs} &= (a_{ij} + M^2(b_{kl} - 1)) + (MN)^2(c_{\alpha\beta} - 1) \\ &= a_{ij} + M^2 b_{kl} - M^2 + (MN)^2 c_{\alpha\beta} - (MN)^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

za $r = (i + (k-1)M) + (\alpha - 1)MN$ i $s = (j + (l-1)M) + (\beta - 1)MN$.

$$\begin{aligned} f_{tv} &= a_{i'j'} + M^2((b_{k'l'} + N^2(c_{\alpha'\beta'} - 1)) - 1) \\ &= a_{i'j'} + M^2 b_{k'l'} + (MN)^2 c_{\alpha'\beta'} - (NM)^2 - M^2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

za $t = i' + ((k' + (\alpha' - 1)N) - 1)M$ i $v = j' + ((l' + (\beta' - 1)N) - 1)M$. Da bi dokazali jednakost zadanih kvadratnih nizova mora vrijediti da je $e_{rs} = f_{tv}$ za $r = t$ i $s = v$.

$$r = i + kM - M + \alpha MN - MN = i' + k'M - M + \alpha' MN - MN = t \tag{3.4}$$

Očito je da jednakost (3.4) vrijedi ako je $i = i', j = j', k = k', l = l', \alpha = \alpha', \beta = \beta'$. Iz jednakosti indeksa, (3.2) i (3.3) slijedi da je $e_{rs} = f_{rs}\ \forall\ r, s$. □

Dokazali smo da je $*$ asocijativna operacija na $\mathcal{A}(\mathcal{G})$,prema tome $(\mathcal{A}(\mathcal{G}), *)$ je polugrupa. Lako se vidi da je operacija $*$ nije komutativna na $\mathcal{A}(\mathcal{G})$, tj. vrijedi $A * B \neq B * A\ \forall\ A, B \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$. budući da je važan poredak magičnih kvadrata u definiciji. Sada ćemo dokazat ćemo da je $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ monoid.

Lema 3.0.2. *Neka je $\mathcal{G}$ Abelova grupa. Skup $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ svih kvadratnih nizova sa elementima iz $\mathcal{G}$ je monoid sa neutralnim elementom $\boxed{\text{-u}}$ uzimajući u obzir operaciju $*$ definiranu s* (3.1).

Dokaz. Neka je $A = (a_{ij}),\ 0 \leq i, j \leq M - 1$ kvadratni niz reda M. Trebamo dokazati sljedeće

$$\exists E \in \mathcal{A}(\mathcal{G}) \text{ td. } A * E = E * A = A, \forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{G}).$$

Za $E = \boxed{\text{-u}}$

$$A * E = a_{ij} + M^2(e_{kl} + u) = a_{ij} + M^2(-u + u) = a_{ij} = A$$

$$E * A = e_{kl} + N^2(a_{ij} + u) = -u + a_{ij} + u = a_{ij} = A$$

Slijedi da postoji neutralni element i on je jednak $E = \boxed{\text{-u}}$ □

Kada govorimo o umnošku magičnog kvadrata reda M i magičnog kvadrata N koji su ispunjeni elementima $\{1, 2, \ldots M\}, \{1, 2, \ldots N\}$ respektivno, u definiciju umnoška magičnih kvadrata (3.1) uzimamo za $u = -1$. Time dobivamo da je neutralni element $\boxed{1}$.
U slučaju da smo imali umnožak magičnih kocki koje su ispunjene elementima $\{0, 1, \ldots M - 1\}$ i $\{0, 1, \ldots N - 1\}$ u definiciju umnoška magičnih kvadrata uzimamo $u = 0$, a onda će neutralni element biti $\boxed{0}$.

Definicija 3.0.3. *Ako je S monoid sa neutralnim elementom s obzirom na asocijativnu operaciju $\circ$, tada je podskup T od S podmonoid od S ako T sadrži neutralni element od S i zatvoren je na operaciju $\circ$.*

Propozicija 3.0.4. *Označimo sa $\mathcal{M}_2$ skup svih magičnih kvadrata. Neka $\mathcal{A}(Z)$ označava monoid dobiven iz prethodne leme uzimajući da je $\mathcal{G}$ skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ a za neutralni element ćemo uzeti $E = \boxed{\text{-}u}$. Tada je $\mathcal{M}_2$ podmonoid od $\mathcal{A}(Z)$.*

Dokaz. Dokaz slijedi iz tvrdnje da je podskup od monoida s neutralnim elementom podmonoid ako sadrži neutralni element monoida i zatvoren je na operaciju $*$. □

Sada ćemo dokazat da je produkt dvije magične kocke magična kocka. U sljedećem teoremu magičnu sumu po redovima, odnosno stupcima i dijagonalama za magični kvadrat A označavat ćemo na sljedeći način

$$\|A\| = \sum_{j=0}^{M-1} a_{ij} = \sum_{i=0}^{M-1} a_{ij} = \sum_{i=0}^{M-1} a_{ii} = \sum_{i=0}^{M-1} a_{i,n-i-1}.$$

Teorem 3.0.5. *Ako su $A, B \in \mathcal{M}_2$ tj. magični kvadrati tada je i njihov umnožak $A * B \in \mathcal{M}_2$.*

Dokaz. $A \in \mathcal{M}_2$ je magični kvadrat reda M,

$$A = (a_{ij}),\ 0 \leq i, j \leq M - 1$$

i $B \in \mathcal{M}_2$ je magični kvadrat reda N,

$$B = (b_{kl}),\ 0 \leq k, l \leq N - 1.$$

Tada je $A * B$ kvadrat reda $MN \times MN$. Sada ćemo provjeriti je li

$$A * B = (e_{\alpha\beta}), 0 \leq \alpha, \beta \leq MN - 1$$

zapravo magični kvadrat. Po definiciji magičnog kvadrata tvrdimo da je suma

$$\sum_{\beta=0}^{MN-1} e_{\alpha\beta}$$

neovisna o izboru α, za sve $\alpha = 0, 1, 2, \ldots MN - 1$. Znamo da vrijedi $(\alpha, \beta) = M(k, l) + (i, j)$ po (3.1). Vidimo da koordinate k i i ovise o α, što znači da prethodna suma mora biti neovisna o izboru k i i. Imamo:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\beta=0}^{MN-1} e_{\alpha\beta} &= \sum_{\beta=0}^{MN-1} \left[M^2(b_{kl}-1)+a_{ij}\right] \\
&= \sum_{\beta=0}^{MN-1} M^2 b_{kl} - \sum_{\beta=0}^{MN-1} M^2 + \sum_{\beta=0}^{MN-1} a_{ij} \\
&= M^2 \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} b_{kl} - \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} M^2 + \sum_{l=0}^{N-1}\underbrace{\sum_{j=0}^{M-1} a_{ij}}_{\|A\|} \\
&= M^2 \sum_{j=0}^{M-1}\underbrace{\sum_{l=0}^{N-1} b_{kl}}_{\|B\|} - M^3N + \sum_{l=0}^{N-1}\|A\| \\
&= M^2 \sum_{j=0}^{M-1} \|B\| - M^3N + N\|A\| \\
&= M^3\|B\| - M^3N + N\|A\|
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Vidimo da je suma neovisna o i i k, pa je neovisna i o α. Analogno ide dokaz za stupce i dijagonale kvadrata $A * B$. Znači da je $A * B$ magični kvadrat reda MN. □

Osim što smo dokazali teorem, dobili smo i opću formulu kojom možemo izračunati magičnu sumu za $A * B$ ukoliko imamo magične kvadrate A i B. Ovaj dokaz vrijedi za magične kvadrate koje su ispunjeni brojevima $1, 2, \ldots, M^2$, odnosno $1, 2, \ldots, N^2$, budući da smo koristili da je $u = -1$. Da smo koristili magične kvadrate koji su ispunjeni brojevima $0, 1, 2, \ldots, M^2$, odnosno $0, 1, 2 \ldots, N^2$, tada bi formula za magičnu sumu $A * B$ bila sljedeća:

$$M^3\|B\| + N\|A\|.$$

Ovime smo pokazali da skup magičnih kvadrata $\mathcal{M}_2$ podmonoid od $\mathcal{A}(Z)$.

Bibliografija

[1] Jean-Luc Chabert, *A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip*, Springer, 1999.

[2] W. S. Andrews, *Magic Squares and Cubes* , Open Court Publishing Company, 1917.

[3] Allan Adler, *Magic Cubes and the 3-Adic Zeta Function*, Mathematical Intelligencer, Summer 1992, Volume 14, Issue 3, pp 14-23.

[4] Allan Adler i S.-Y. Robert Li, *Magic N-Cubes and Prouhet Sequences*, American Mathematical Monthly, Vol. 84, No.8, October 1977, pp. 618-627

[5] Allan Adler, *Magic N-Cubes Form a Free Monoid*, Electronic J. Combinatorics 4, No. 1, R15, 1-3, 1997

Sažetak

Magične kocke i kvadrati su proučavani kroz povijest, ne samo u matematičkom smislu nego i u filozofskom i religijskom kontekstu. Prema legendi, prvi magični kvadrat je otkriven u Kini oko 2800.g.pr.Kr.. Unatoč činjenici da su magične N-kocke izučavane od davnina, one su još uvijek predmet istraživanja i proučavanja. Magičnu 2-kocku ili magični kvadrat reda M definiramo kao kvadrat dimenzije $M \times M$ koji se sastoji od različitih cijelih brojeva $1, 2, \ldots, M^2$ raspoređeni tako da suma brojeva po svim redovima, stupcima i na dijagonali jednaka i naziva se magična suma. Magična N-kocka reda M je N-dimenzionalna generalizacija magičnog kvadrata, čija se magična suma računa po sljedećoj formuli $S = \frac{M(M^N+1)}{2}$. Cilj ovog diplomskoj je bio objasniti neke od metoda konstrukcije magičnih N-kocki. Postoji puno različitih metoda, ali u principu se dijeli na dvije grupe, konstrukcije magične N-kocke parnog reda i konstrukcije magične N-kocke neparnog reda. Objasnili smo dvije metode kojom se konstruiraju magične N-kocke neparnog reda, a to su Loubéreova metoda i metoda uokviravanja. Konstrukcije magičnih N-kocki parnog reda se dijele na one djeljive sa 4 i one koje nisu djeljive sa 4. Spomenuli smo metodu konstrukcije pomoću Prohuet-ovog niza. Ovom metodom se konstruiraju magične N-kocke parnog reda koje su djeljive sa 4. Na kraju, definirali smo množenje magičnih kvadrati te objasnili koju algebarsku strukturu čine.

Summary

Magic squares and cubes turned up throughout history, not only in mathematical context, but also in philosophical and religious contexts. According to a legend, the first magic square was discovered in China around 2800. BC.. Despite the fact that magic N-cubes have been studied for a long time, they are still the subject of many research projects.
We define magic square as square array of distinct integers $1, 2, \ldots, M^2$ arranged such that the sum of M numbers in any horizontal, vertical or main diagonal line is always the same number, known as magic constant. Magic N-cube is N-dimensional generalization of magic square whose magical constant is calculated by the following formula $S = \frac{M(M^N+1)}{2}$. Althought there are many different methods, they can be divided into two groups: construction od magic N-cube of even order and construction od magic N-cube of odd order. We've explained two methods for constructing magic N-cube od odd order. The first one is Loubére method and the second one is technique of borders. Magic N-cubes of even order are classified into doubly even (n divisible by four) and singly even (n even, but not divisible by four). We've mentioned method using Prohuet series. This method is used for constructing magic N-cubes of doubly even order. In the end, we've defined multiplication of magic squares and explained which stucture they form.

Životopis

Rođena sam 12. veljače 1992. u Mostaru. Osnovnu školu sam završila u Širokom Brijegu te u istom gradu upisala opći smjer gimnazije fra Dominika Mandića. Maturirala sam 2010. godine, nakon čega sam upisala Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Godine 2013. sam stekla titulu univ. bacc. math i iste upisala Diplomski sveučilišni studij Matematička statistika.