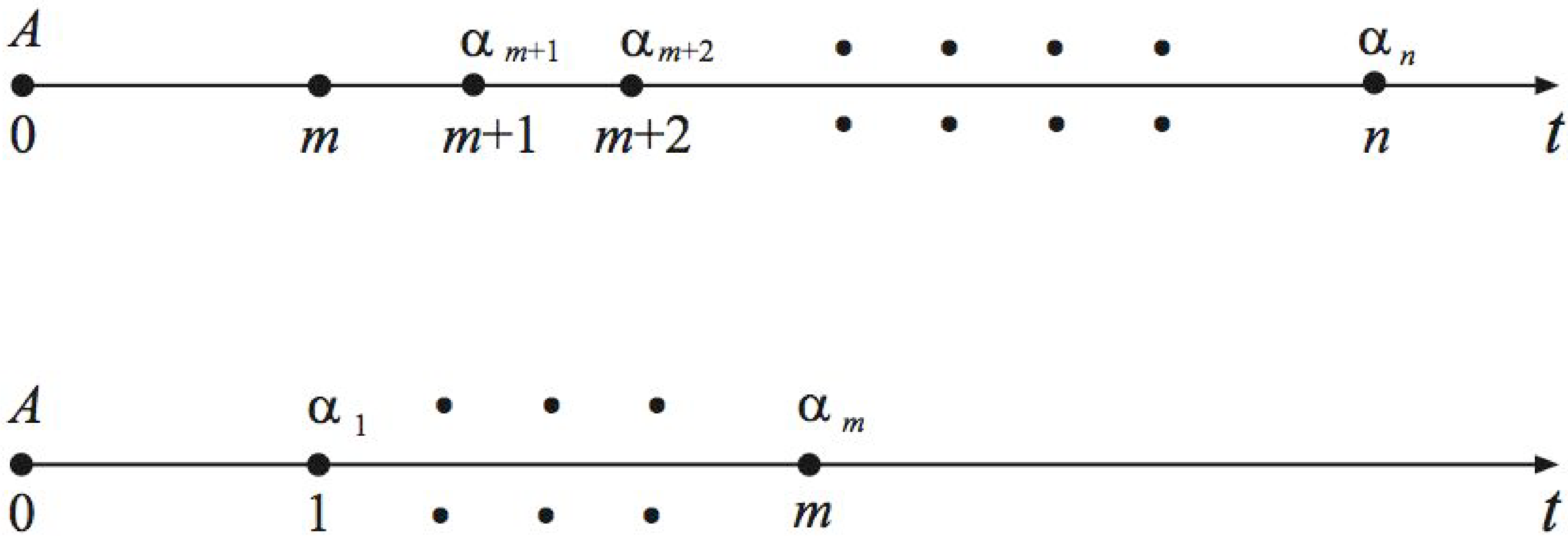
Dipartimento di Scienze Statistiche Università di Bologna

Matematica finanziaria aa 2013-2014

lezione 11: 5 marzo 2014

professor Daniele Ritelli

www.unibo.it/docenti/daniele.ritelli


A
α m+1
α m+2
α n
0
m
m+1
m+2
n
t
A
α 1
α m
0
1
m
t

Formalizziamo: il debito residuo prospettivo in m, δ_m^p è il valore attuale in m delle rate $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ non ancora scadute:

$$\boldsymbol{\delta_m^p = \sum_{s=1}^{n-m} \frac{\alpha_{m+s}}{(1+i)^s}}$$

Formalizziamo: il debito residuo prospettivo in m, δ_m^p è il valore attuale in m delle rate $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ non ancora scadute:

$$\boldsymbol{\delta_m^p = \sum_{s=1}^{n-m} \frac{\alpha_{m+s}}{(1+i)^s}}$$

il debito residuo retrospettivo in m, δ_m^r è:

$$\boldsymbol{\delta_m^r = A\,(1+i)^m - \sum_{s=1}^{m} \alpha_s\,(1+i)^{m-s}}$$

Teorema

$$\delta_m^r = \delta_m^p$$

Dunque nel regime composto ha senso parlare semplicemente di **debito residuo all'epoca m**. Poniamo:

$$\delta_m := \delta_m^r = \delta_m^p$$

DIMOSTRAZIONE

$$\boldsymbol{\delta^r_m - \delta^p_m = A\,(1+i)^m - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\,(1+i)^{m-k} - \sum_{k=1}^{n-m} \alpha_{k+m}\,(1+i)^{-k}}$$

Dimostrazione

$$\boldsymbol{\delta^r_m - \delta^p_m = A\,(1+i)^m - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\,(1+i)^{m-k} - \sum_{k=1}^{n-m} \alpha_{k+m}\,(1+i)^{-k}}$$

Nel terzo addendo cambiamo gli indici $h = k + m$:

$$\boldsymbol{\delta^r_m - \delta^p_m = A\,(1+i)^m - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\,(1+i)^{m-k} - \sum_{h=m+1}^{n} \alpha_h\,(1+i)^{-(h-m)}}$$

Dimostrazione

$$\boldsymbol{\delta_m^r - \delta_m^p = A\,(1+i)^m - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\,(1+i)^{m-k} - \sum_{k=1}^{n-m} \alpha_{k+m}\,(1+i)^{-k}}$$

Nel terzo addendo cambiamo gli indici $h = k + m$:

$$\boldsymbol{\delta_m^r - \delta_m^p = A\,(1+i)^m - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\,(1+i)^{m-k} - \sum_{h=m+1}^{n} \alpha_h\,(1+i)^{-(h-m)}}$$

$$\boldsymbol{\delta_m^r - \delta_m^p = A\,(1+i)^m - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\,(1+i)^{m-k} - \sum_{h=m+1}^{n} \alpha_h\,(1+i)^{m-h}}$$

Dimostrazione

$$\delta^r_m - \delta^p_m = A\,(1+i)^m - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\,(1+i)^{m-k} - \sum_{k=1}^{n-m} \alpha_{k+m}\,(1+i)^{-k}$$

Nel terzo addendo cambiamo gli indici $h = k + m$:

$$\delta^r_m - \delta^p_m = A\,(1+i)^m - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\,(1+i)^{m-k} - \sum_{h=m+1}^{n} \alpha_h\,(1+i)^{-(h-m)}$$

$$\delta^r_m - \delta^p_m = A\,(1+i)^m - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\,(1+i)^{m-k} - \sum_{h=m+1}^{n} \alpha_h\,(1+i)^{m-h}$$

$$\delta^r_m - \delta^p_m = A\,(1+i)^m - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\,(1+i)^{m-k} - \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k\,(1+i)^{m-k}$$

$$\boldsymbol{\delta^r_m - \delta^p_m = A\,(1+i)^m - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\,(1+i)^{m-k}}$$

$$\boldsymbol{\delta_m^r - \delta_m^p = A\,(1+i)^m - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\,(1+i)^{m-k}}$$

d'altra parte si può scrivere:

$$\boldsymbol{\delta_m^r - \delta_m^p = A\,(1+i)^m - (1+i)^m \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\,(1+i)^{-k}}$$

$$\delta_m^r - \delta_m^p = A\,(1+i)^m - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\,(1+i)^{m-k}$$

d'altra parte si può scrivere:

$$\delta_m^r - \delta_m^p = A\,(1+i)^m - (1+i)^m \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\,(1+i)^{-k}$$

cioè

$$\delta_m^r - \delta_m^p = (1+i)^m \left(A - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\,(1+i)^{-k} \right)$$

$$\delta_m^r - \delta_m^p = A\,(1+i)^m - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\,(1+i)^{m-k}$$

d'altra parte si può scrivere:

$$\delta_m^r - \delta_m^p = A\,(1+i)^m - (1+i)^m \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\,(1+i)^{-k}$$

cioè

$$\delta_m^r - \delta_m^p = (1+i)^m \left(A - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\,(1+i)^{-k} \right)$$

ma per la natura stessa delle rate allora

$$\delta_m^r - \delta_m^p = 0$$

Definizione

Se $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ è un prestito se $\boldsymbol{m \in \{1, 2, \ldots, n\}}$ e se $\boldsymbol{m < \tau < m + 1}$ chiameremo:

1. **debito residuo prospettivo** il valore attuale in $\boldsymbol{\tau}$ delle rate non scadute da $m + 1$ al termine del prestito;

Definizione

Se $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ è un prestito se $\boldsymbol{m} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n}\}$ e se $\boldsymbol{m < \tau < m + 1}$ chiameremo:

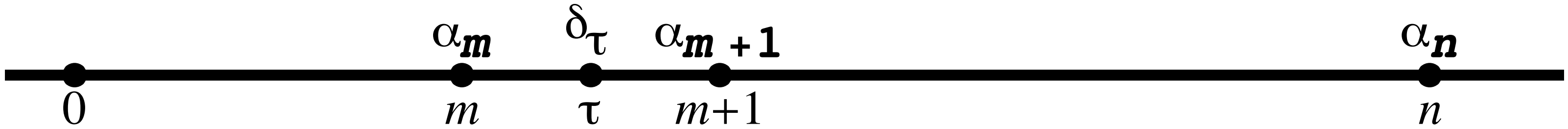
1. **debito residuo prospettivo** il valore attuale in $\boldsymbol{\tau}$ delle rate non scadute da $m+1$ al termine del prestito;

2. **debito residuo retrospettivo** la differenza, valutata in $\boldsymbol{\tau}$ fra il montante della prestazione $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{\tau}$ e il montante in $\boldsymbol{\tau}$ delle rate pagate $\boldsymbol{\alpha_1, \ldots, \alpha_m}$

Traducendo le parole in formule abbiamo:

$$\boldsymbol{\delta_\tau^p = \sum_{h=1}^{n-m} \alpha_{m+h}(1+i)^{-(m+h-\tau)}},$$

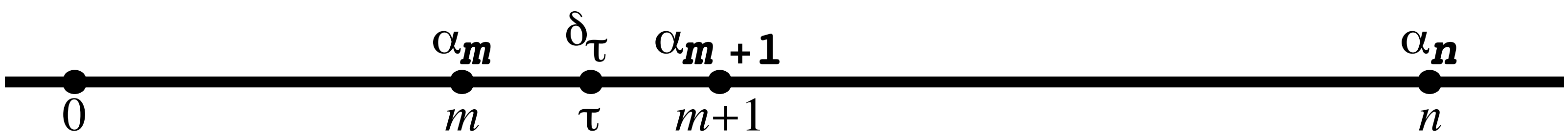
$$\boldsymbol{\delta_\tau^r = A(1+i)^\tau - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(1+i)^{\tau-k}}$$



Traducendo le parole in formule abbiamo:

$$\delta_\tau^p = \sum_{h=1}^{n-m} \alpha_{m+h}(1+i)^{-(m+h-\tau)},$$

$$\delta_\tau^r = A(1+i)^\tau - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (1+i)^{\tau-k}$$



anche in questo caso si dimostra che

$$\delta_\tau^r = \delta_\tau^p$$

Anche nel caso di valute comprese fra due scadenze ha senso parlare di un solo debito residuo.

Infine, se $m < \tau < m + 1$ si ha che:

$$\boldsymbol{\delta_\tau = (1 + i)^{\tau - m} \delta_m}$$

debito estinto = parte di prestito rimborsata all'epoca m

Simbolo $\boldsymbol{\varepsilon_m}$

$$\boldsymbol{\varepsilon_m = A - \delta_m}$$

Piani di ammortamento

La rata α_k scadente al tempo k è decomposta in **quota capitale** e **quota interessi** :

$$\boldsymbol{\alpha_k = c_k + h_k}$$

Piani di ammortamento

La rata α_k scadente al tempo k è decomposta in **quota capitale** e **quota interessi** :

$$\boldsymbol{\alpha_k = c_k + h_k}$$

condizione di chiusura

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} c_k = A}$$

ogni quota capitale pagata va a incrementare il debito estinto e a diminuire il debito residuo

$$\begin{cases} \varepsilon_m = \varepsilon_{m-1} + c_m \\ \delta_m = \delta_{m-1} - c_m \\ \varepsilon_0 = 0 \\ \delta_0 = A \end{cases}$$

ogni quota capitale pagata va a incrementare il debito estinto e a diminuire il debito residuo

$$\begin{cases} \varepsilon_m = \varepsilon_{m-1} + c_m \\ \delta_m = \delta_{m-1} - c_m \\ \varepsilon_0 = 0 \\ \delta_0 = A \end{cases}$$

Le quote interessi sono determinate proporzionalmente al debito residuo al pagamento precedente dal tui

$$h_m = i\,\delta_{m-1}$$

ogni quota capitale pagata va a incrementare il debito estinto e a diminuire il debito residuo

$$\begin{cases} \varepsilon_m = \varepsilon_{m-1} + c_m \\ \delta_m = \delta_{m-1} - c_m \\ \varepsilon_0 = 0 \\ \delta_0 = A \end{cases}$$

Le quote interessi sono determinate proporzionalmente al debito residuo al pagamento precedente dal tui

$$h_m = i\,\delta_{m-1}$$

$$\boldsymbol{h}_1 = \boldsymbol{i}\,\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{h_1 = i\,A,}$$

$$\boldsymbol{h_2 = i\,[A - c_1]}$$

$$\boldsymbol{h_1 = i\, A,}$$

$$\boldsymbol{h_2 = i\, [A - c_1]}$$

$$\boldsymbol{h_3 = i\, [A - (c_1 + c_2)]}$$

$$\boldsymbol{h_1 = i\,A,}$$

$$\boldsymbol{h_2 = i\,[A - c_1]}$$

$$\boldsymbol{h_3 = i\,[A - (c_1 + c_2)]}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$h_1 = i\,A,$$

$$h_2 = i\,[A - c_1]$$

$$h_3 = i\,[A - (c_1 + c_2)]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$h_n = i\,[A - (c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1})]$$

Il **piano di ammortamento** è la tabella riepilogativa del rimborso del prestito.

Esplicita, per ogni scadenza, la rata pagata, la quota capitale, la quota interessi, il debito estinto e il debito residuo.

Queste quantità sono dette, gli **elementi** del piano di ammortamento

Esempio La somma $A = €\,1\,000$ viene rimborsata in un anno mediante quattro rate trimestrali al tasso $i = 0,04060401$

Sapendo che le prime tre rate pagate sono state di € 250 si determini l'ultima rata e si compili il piano di ammortamento

Esempio La somma $A = €\,1\,000$ viene rimborsata in un anno mediante quattro rate trimestrali al tasso $i = 0,04060401$

Sapendo che le prime tre rate pagate sono state di € 250 si determini l'ultima rata e si compili il piano di ammortamento

passo zero: il tasso annuo va trasformato in trimestrale

$$\boldsymbol{i_4 = 0,0100000000000000007}$$

possiamo tranquillamente prendere $i_4 = 0,01$

passo uno: scomposizione della prima rata

$$\boldsymbol{h_1 = i_4,\ \delta_0 = i_4\,A = 0,01 \times 1\,000 = 10}$$

passo uno: scomposizione della prima rata

$$h_1 = i_4,\ \delta_0 = i_4\,A = 0,01 \times 1\,000 = 10$$

$$c_1 = \alpha_1 - h_1 = 250 - 10 = 240$$

passo uno: scomposizione della prima rata

$$h_1 = i_4,\ \delta_0 = i_4\, A = 0{,}01 \times 1\,000 = 10$$

$$c_1 = \alpha_1 - h_1 = 250 - 10 = 240$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + c_1 = 0 + 240 = 240$$

$Trimestre$	α_k	c_k	h_k	δ_k	ε_k
0				$1\,000,00$	0
1	$250,00$	$240,00$	$10,00$	$760,00$	$240,00$

passo due: scomposizione della seconda rata

$$h_2 = i_4,\, \delta_1 = 0,01 \times 760 = 7,6$$

passo due: scomposizione della seconda rata

$$\begin{aligned} h_2 &= i_4\,\delta_1 = 0,01 \times 760 = 7,60 \\ c_2 &= \alpha_2 - h_2 = 250 - 7,60 = 242,40 \end{aligned}$$

passo due: scomposizione della seconda rata

$$
\begin{aligned}
h_2 &= i_4\,\delta_1 = 0,01 \times 760 = 7,60 \\
c_2 &= \alpha_2 - h_2 = 250 - 7,60 = 242,40 \\
\delta_2 &= \delta_1 - c_2 = 760 - 242,40 = 517,60
\end{aligned}
$$

passo due: scomposizione della seconda rata

$$
\begin{aligned}
h_2 &= i_4\,\delta_1 = 0,01 \times 760 = 7,60 \\
c_2 &= \alpha_2 - h_2 = 250 - 7,60 = 242,40 \\
\delta_2 &= \delta_1 - c_2 = 760 - 242,40 = 517,60 \\
\varepsilon_2 &= \varepsilon_1 + c_2 = 240 + 242,40 = 482,40
\end{aligned}
$$

$Trimestre$	α_k	c_k	h_k	δ_k	ε_k
0				$1\,000,00$	0
1	$250,00$	$240,00$	$10,00$	$760,00$	$240,00$
2	$250,00$	$242,40$	$7,60$	$517,60$	$482,40$

passo tre: scomposizione della terza rata

$$h_3 \quad = \quad i_4,\ \delta_2 = 0,01 \times 517,60 = 5,176$$

passo tre: scomposizione della terza rata

$$
\begin{aligned}
h_3 &= i_4\,\delta_2 = 0,01 \times 517,60 = 5,176 \\
c_3 &= \alpha_3 - h_3 = 250 - 5,176 = 244,824
\end{aligned}
$$

passo tre: scomposizione della terza rata

$$
\begin{aligned}
h_3 &= i_4\,\delta_2 = 0,01 \times 517,60 = 5,176 \\
c_3 &= \alpha_3 - h_3 = 250 - 5,176 = 244,824 \\
\delta_3 &= \delta_2 - c_3 = 517,60 - 244,824 = 272,776
\end{aligned}
$$

passo tre: scomposizione della terza rata

$$
\begin{aligned}
h_3 &= i_4\,\delta_2 = 0,01 \times 517,60 = 5,176 \\
c_3 &= \alpha_3 - h_3 = 250 - 5,176 = 244,824 \\
\delta_3 &= \delta_2 - c_3 = 517,60 - 244,824 = 272,776 \\
\varepsilon_3 &= \varepsilon_2 + c_3 = 482,40 + 244,824 = 727,224
\end{aligned}
$$

Trimestre	α_k	c_k	h_k	δ_k	ε_k
0				$1\,000,00$	0
1	$250,00$	$240,00$	$10,00$	$760,00$	$240,00$
2	$250,00$	$242,40$	$7,60$	$517,60$	$482,40$
3	$250,00$	$244,824$	$5,176$	$272,776$	$727,224$

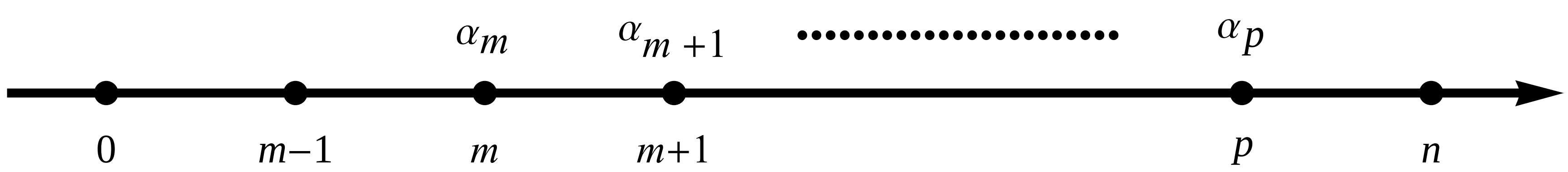
possiamo finalmente determinare l'ultima rata

$$\alpha_4 = \delta_3 + i_4\delta_3 = 1,01 \times 272,776 = 275,50376$$

Trimestre	α_k	c_k	h_k	δ_k	ε_k
0				$1\,000,00$	0
1	$250,00$	$240,00$	$10,00$	$760,00$	$240,00$
2	$250,00$	$242,40$	$7,60$	$517,60$	$482,40$
3	$250,00$	$244,824$	$5,176$	$272,776$	$727,224$
4	$275,50376$	$272,776$	$2,72776$	0	$1\,000$

Somma degli interessi

Per ragioni fiscali, per certe tipologie di rimborso, serve conoscere l'ammontare degli interessi pagati in un determinato periodo. Se n è il numero di pagamenti, consideriamo due scadenze con valute m, p. Supponiamo che $1 \leq m < p \leq n$. La quota interessi della scadenza m è determinata dal debito residuo in $m-1$ mentre al pagamento della rata di valuta p il debito residuo è δ_p. Indichiamo con $H(m,p)$ l'ammontare degli interessi pagati fra il pagamento m e il pagamento p.



La differenza fra il debito residuo in $m-1$, che è il debito in essere prima del pagamento della rata m, ed il debito residuo in p, che si genera al pagamento della rata p, indica la diminuzione del debito a seguito dei pagamenti fra la scadenza m e la scadenza p. Dall'altro lato nello stesso periodo il debitore ha versato $\alpha_m + \cdots + \alpha_p$.

La differenza fra il debito residuo in $m-1$, che è il debito in essere prima del pagamento della rata m, ed il debito residuo in p, che si genera al pagamento della rata p, indica la diminuzione del debito a seguito dei pagamenti fra la scadenza m e la scadenza p. Dall'altro lato nello stesso periodo il debitore ha versato $\alpha_m + \cdots + \alpha_p$.

La differenza fra queste due quantità è la remunerazione del creditore nel periodo fra m e p quindi è la somma delle quote interessi pagate, ed è data dalla formula:

$$\boldsymbol{H(m,p) = \sum_{k=m}^{p} \alpha_k - (\delta_{m-1} - \delta_p)} \tag{1}$$