SVEUČILIŠTE J.J. STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA FIZIKU

KATARINA MARJANOVIĆ

LEGENDREOVI POLINOMI

Završni rad

Osijek, 2016.

SVEUČILIŠTE J.J. STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA FIZIKU

KATARINA MARJANOVIĆ

LEGENDREOVI POLINOMI

Završni rad

predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku radi stjecanja zvanja prvostupnice fizike

Osijek, 2016.

Ovaj završni rad je izrađen u Osijeku pod vodstvom doc. dr. sc. Zvonka Glumca u sklopu Sveučilišnog preddiplomskog studija fizike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za fiziku

Završni rad

LEGENDREOVI POLINOMI

Katarina Marjanović

Sažetak: Legendreovi polinomi rješenja su Legendreove diferencijalne jednadžbe $(1-x^2)P''x-2xP'(x)+\lambda P(x)=0$. Pomoću ove diferencijalne jednadžbe također se može dobiti funkcija izvodnica. Nadalje, ona će nam pomoći u izračunu rekurzivnih relacija. Legendreovi polinomi imaju široku primjenu u mnogim granama fizike. Nalazimo ih u elektrodinamici te u kvantoj mehanici.

Rad je pohranjen u knjižnici Odjela za fiziku
Ključne riječi: Legendreovi polinomi/rekurzivne relacije/funkcija izvodnica
Mentor: doc. dr. sc. Zvonko Glumac
Ocjenjivači:
Rad prihvaćen:

University J.J. Strossmayer Osijek
Department of Physics

Bachelor of Physics Thesis

LEGENDRE POLYNOMIALS

Katarina Marjanović

Abstract: Legendre polynomials are solution to Legendre differential equation $(1-x^2)P''x-2xP'(x)+\lambda P(x)=0$. From Legendre differential equation we can calculate generating function. Further, from generating function we can calculate recurrence formulas. Legendre polynomials are widely used in many branches of physics. They are used in electrodynamics as well as in quantum physics.

Thesis deposited in Department of Physics library
Keywords: Legendre polynomials/recurrence formulas/generating function
Supervisor: Zvonko Glumac Ph.D.,Assistant Profesor
Reviewers:
Thesis accpeted:

Sadržaj

1 Uvod

Legendreovi polinomi (ili Legendreove funkcije prve vrste) su važni u fizici jer se oni javljaju kada se Laplaceova ili Helmholtzova jednadžba, kod problema središnjih sila, rastave pomoću sfernih koordinata. Pojavljuju se i kod opisa valnih funkcija atoma, u različitim elektrostatskim problemima te u mnogim drugim kontekstima. Dodatno, Legendreovi polinomi predviđaju prikladan skup funkcija koje su ortogonalne na intervalu $(-1, +1)$ što je zapravo raspon i trigonometrijskih funkcija sinusa i kosinusa.

Kao što smo već ukazali, s Legendreovim polinomima se susrećemo kada je jednadžba napisana pomoću sfernih koordinata (r, θ, φ) kao što je, npr.

$$-\nabla^2\psi + V(r)\psi = \lambda\psi.$$

Ovakvu vrstu jednadže rješavamo metodom separacije varijabli.

2 Legendreovi polinomi

Legendreovi polinomi rješenja su Legendreove diferencijalne jednadžbe drugog reda

$$(1 - x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \lambda P(x) = 0. \tag{2.1}$$

Diferencijalna jednadžba (2.1) ima regularne singularitete[1] u točkama $x = \pm 1$ te u $x = \infty$. Rješenje Legendreove diferencijalne jednadžbe može se dobiti razvojem u red oko točke $x = 0$ koje ima područje konvergencije unutar jedinične kružnice, odnosno niz rješenja će konvergirati za $|x| < 1$.

Ako λ ima vrijednost $n(n+1)$, gdje je n konstanta, niz biva prekinut nakon člana x^n ostavljajući polinom stupnja n.

Nakon što smo dobili željena rješenja Legendreove diferencijalne jednadžbe kao polinome uzastopnog stupnja, koje zovemo Legendreovi polinomi i označavamo ih sa P_n.

[1]Neka je $\psi'' + P(x)\psi' + Q(x)\psi = 0$ homogena diferencijalna jednadžba drugog reda. Ako ili $P(x)$ ili $Q(x)$ divergiraju kada $x \to x_0$, ali $(x - x_0)P(x)$ i $(x - x_0)^2Q(x)$ ostaju konačni kada $x \to x_0$, tada se x_0 zove regularna točka ili nebitni singularitet.

3 Funkcija izvodnica

Kako bismo odredili funkciju izvodnicu, kao primjer, iskoristit ćemo Legendreovu diferencijalnu jednadžbu (2.1):

$$(1-x^2)P''x - 2xP'(x) + \lambda P(x) = 0$$

Diferencijalna jednadžba (2.1) je samoadjungirana, sa funkcijom težišnicom $w(x) = 1$. Iz funkcije izvodnice, temeljene na Schlaeflijevu integralu[2], izaberimo da je $c_n = (-1)^n/2^n n!$ što će nam dati

$$g(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n t^n}{2^n n!} \right) \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{(1-z^2)^n}{(z-x)^{n+1}} dz$$

.

Zamijenimo li radoslijed sumacije i integracije, faktori ovisni o n čine geometrijski niz, koji dalje pišemo kao

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(z^2-1)t^n}{2(z-x)} \right) \frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-x-\frac{1}{2}(z^2-1)t} = -\frac{2}{t}\left[z^2 - \frac{2z}{t} + \frac{2x-t}{t} \right]^{-1}$$

Uvrstimo li dobiveni rezultat u formulu za $g(x,t)$, slijedi

$$\begin{aligned} g(x,t) &= -\frac{2}{t}\frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[z^2 - \frac{2z}{t} + \frac{2x-t}{t} \right]^{-1} dz \\ &= -\frac{2}{t}\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdje su z_1 i z_2 nultočke oblika

$$z_1 = \frac{1}{t} - \frac{\sqrt{1-2xt+t^2}}{t}, \qquad z_2 = \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{1-2xt+t^2}}{t}.$$

Kako bi jednadžba (3.1) bila valjana, mora se opravdati zamjena sumacije i integracije. Zamjena je moguća kada je sumacija ravnomjerno konvergentna (s obzirom na z) za sve točke na krivulji C. To je pogodno za proučavanje konvergencije za mali t i x i za krivulju gdje je $|z| = 1$.

[2]Jedno od svojstava Rodriguesove formule je da se višestruki diferencijali mogu pretvoriti u odgovarajuću formu koristeći Cauchyevu integralnu formulu. Ta forma je dana u obliku relacije $y_n(x) = \frac{1}{w(x)\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{w(z)[p(z)]^n}{(z-x)^(n+1)}} dz$ gdje krivulja C obuhvaća točku x i mora biti takva da je $w(z)\,[p(n)]^n$ analitička na i unutar krivulje C. Ova je formula poznata kao Schlaeflijev integral

Za pretpostavljenu krivulju, i za mali x, postoji granica gdje je $|t| << 1$ za koju

$$\left|\frac{(z^2-1)t}{2(z-x)}\right| < 1,$$

jamči konvergenciju geometrijskog niza.
Integral iz izraza (3.1) ima dva pola: u $z = z_1$ i $z = z_2$. Za mali x i $|t|$, z_2 će približno biti iznosa $\frac{2}{t}$ što predstavlja vanjštinu krivulje dok će, s druge strane, z_1 biti blizu "početka" z. Dakle, ostatak od integranta u $z = z_1$ će doprinijeti krivuljnom integralu koji će poprimiti vrijednost

$$g(x,t) = -\frac{2}{t}\frac{1}{z_1 - z_2}$$

Budući da je

$$z_1 - z_2 = -\frac{2}{t}\sqrt{1 - 2xt + t^2},$$

funkcija izvodnica Legendreovih polinoma je oblika

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n. \tag{3.2}$$

3.1 Parnost Legendreovih polinoma

Razmotrimo što se događa zamijenimo li x sa $-x$ te t sa $-t$ u funkciji izvodnici. Vrijednost $g(x,t)$ u izrazu (3.2) se ne mijenja sa ovom zamjenom, ali desna strana izraza (3.2) će biti drugačijeg oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = g(x,t) = g(-x,-t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x)(-t)^n$$

što pokazuje da je

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

Iz prethodnog izraza očito je da $P_n(-1) = (-1)^n$ te da će $P_n(x)$ biti iste parnosti kao x^n.

Nadalje, definirat ćemo još neke od vodećih pojmova Legendreovih polinoma. Primjenjujući binomni teorem na funkciju izvodnicu

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-2xt + t^2)^n \tag{3.3}$$

iz koje vidimo da će najveća potencija od x koja može množiti t^n biti x^n, a dobivena je iz izraza

$(-2xt)^n$ u razvoju konačnog faktora. Tada će koeficijent uz x^n u $P_n(x)$ biti

$$\binom{-1/2}{n}(-2)^n = \frac{(2n-1)!!}{n!}.$$

Iz činjenice da je $P_n(x)$ stupnja n jasno je da su $P_0(x) = C$ i $P_1(x) = Cx \to C = konst.$. Iz uvjeta o ograničavanju $P_0(x)$ i $P_1(x)$ moraju biti 1 i x redom. Vratimo li se u razvoju funkcije izvodnice (3.3) pomoću binomnog teorema, dobit ćemo izraz za Legendreove polinome u zatvorenom obliku

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!}(t^2-2xt)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!/(2n)!!}{(2n)!!}(2xt-t^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(2xt-t^2)^n.$$

Razvijemo li $(2xt-t^2)^n$ u binomni red

$$(2xt-t^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(2xt)^{n-k}(-1)^k t^{2k}$$

te uvrstimo u razvoj funkcije izvodnice

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(2xt-t^2)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(2xt)^{n-k}(-1)^k t^{2k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(2n)!(2x)^{n-k}}{2^{2n}n!k!(n-k)!}t^{n+k}.$$

Uvedimo sljedeću oznaku

$$f(n,k) = \frac{(-1)^k(2n)!(2x)^{n-k}}{2^{2n}n!k!(n-k)!}$$

kako bismo lakše raspisali i uočili članove s istom potencijom t

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2} = t^0 f(0,0)$$

$$+t^1 f(1,0)$$

$$+t^2\left[f(2,0)+f(1,1)\right]$$

$$+t^4\left[f(4,0)+f(3,1)+f(2,2)\right]$$

$$+t^5\left[f(5,0)+f(4,1)+f(3,2)\right]$$

$$+...+t^n\sum_{k=0}^{[l/2]} f(n-k,k)+...$$

gdje je $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n}{2}$ za parni n,a $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}$ za neparni n. Vratimo li se sada izrazu funkcije izvodnice

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty} t^n\sum_{k=0}^{[n/2]} f(n-k,k)=\sum_{n=0}^{\infty} t^n\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!(2x)^{n-2k}}{2^{2n-2k}(n-k)!k!(n-2k)!}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

iz koje dobivamo formulu za Legendreove polinome u eksplicitnom obliku

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}. \tag{3.4}$$

3.2 Rekurzivne relacije

Kako bismo dobili rekurzivne relacije, parcijalno ćemo derivirati funkciju izvodnicu. Krenimo najprije s derivacijom po varijabli t

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}=\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}.$$

Pomnožimo li gornji izraz sa $(1-2xt+t^2)$ dobivamo

$$(x-t)(1-2xt+t^2)^{-1/2}=(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} \tag{3.5}$$

Nadalje, uvrstimo li funkciju izvodnicu (3.2) u lijevu stranu jednadžbe (3.5) te dobiveni izraz uredimo, slijedi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}\left[(n+1)P_n(x)\right]-x\sum_{n=0}^{\infty} t^n\left[(2n+1)P_n(x)\right]=0$$

Kako bismo svugdje imali istu potenciju t, preimenovat ćemo indekse zbrajanja

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n\left[nP_{n-1}(x)+(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)\right]=0^3$$

[3] Izraz je primjer općenite relacije $\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(t)\alpha_n=0$. U našem slučaju je $\phi_n(t)=t^n$ linearno nezavisan skup funkcija. Relacija je zadovoljena kada je svaki od $\alpha_n=0$ što daje izraz (3.6).

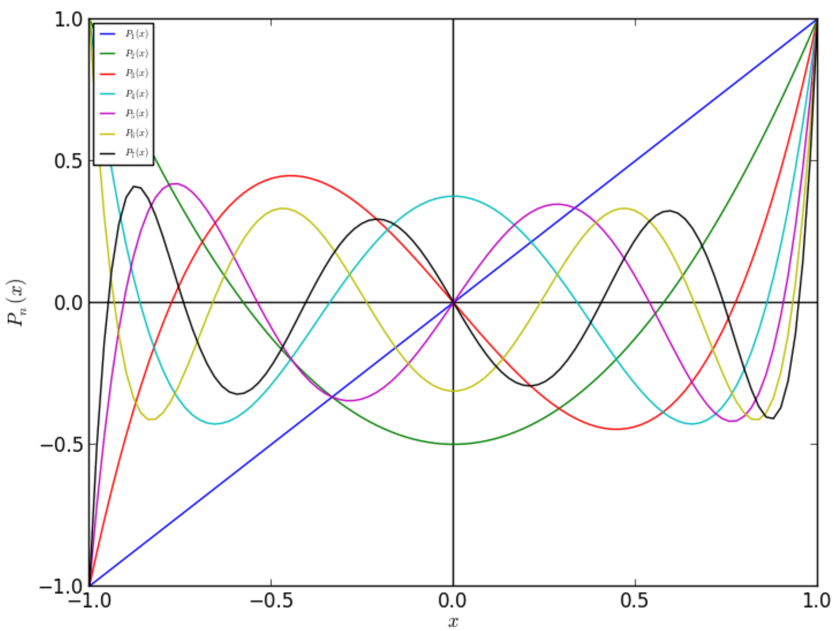
što daje željenu rekurziju

$$nP_{n-1}(x) + (n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) = 0, \quad n = 1, 2, 3... \tag{3.6}$$

U odjeljku 3.1 smo odredili $P_0(x)$ i $P_1(x)$ kao C i Cx redom. Neka je $C = 1$. Tada pomoću rekurzivne formule možemo odrediti neke od preostalih Legendreovih polinoma koji su prikazani u tablici 1.

Tablica 1: Legendreovi polinomi

$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 15x)$
$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x))$
$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$
$P_7(x) = \frac{1}{16}(492x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$



Slika 1: Legendreovi polinomi

Sada nam preostaje derivirati funkciju izvodnicu po varijabli x

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial x} = \frac{t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'} t^n.$$

Pomnožimo li gornji izraz sa $(1-2xt+t^2)$ dobivamo

$$t(1-2xt+t^2)^{-1/2} = (1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)t^n \tag{3.7}$$

Identično kao kod parcijalne derivacije po varijabli t i ovdje ćemo u lijevu stranu jednadžbe (3.7) uvrstiti funkciju izvodnicu te je dodatno urediti

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)t^{n-1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)t^{n+1}$$

Preimenujemo li indekse zbrajanja kako bismo dobili iste potencije za t slijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \left[P_{n-1}^{'}(x) - 2xP_n^{'}(x) + P_{n+1}^{'}(x) - P_n(x)\right] = 0.$$

Primjenjujući isti postupak kao kod prethodne rekurzije o linearnoj nezavisnosti skupa gdje sve uglate zagrade moraju biti jednake nuli

$$P_{n-1}^{'}(x) + P_{n+1}^{'}(x) = 2xP_n^{'}(x) + P_n(x) \tag{3.8}$$

Još jedna korisnija relacija može se dobiti diferenciramo li (3.6) po varijabli x te pomnožimo s 2 zatim zbrojimo s relacijom (3.8) koju prije pomnožimo s $(2n+1)$ kako bismo poništili $P_n^{'}$ članove. Na kraju dobivamo

$$P_{n+1}^{'}(x) - P_{n-1}^{'}(x) = (2n+1) + P_n(x) \tag{3.9}$$

Krećući od relacija (3.8) i (3.9) mogu se razviti dodatne relacije uključujući i

$$\frac{1}{2}\left[P_{n+1}^{'}(x) + P_{n-1}^{'}(x) - 2xP_n^{'}(x) - P_n + P_{n+1}^{'}(x) - P_{n-1}^{'}(x) - 2nP_n(x) - P_n(x)\right] = 0$$

$$P_{n+1}^{'}(x) = xP_n^{'}(x) + (n+1)P_n(x) \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{2}\Big[P'_{n+1}(x)+P'_{n-1}(x)-2xP'_n(x)-P_n-P'_{n+1}(x)+P'_{n-1}(x)+2nP_n(x)+P_n(x)\Big]=0$$

$$P'_{n-1}(x)=xP'_n(x)-nP_n(x) \tag{3.11}$$

$$(3.10)_{n\to n+1}+x(3.11)\Rightarrow(1-x^2)P'_n(x)=nP_{n-1}(x)-nxP_n(x) \tag{3.12}$$

Deriviramo li relaciju (3.12) po x te ju zbrojimo sa $n\cdot(3.11)$ slijedi

$$(1-x^2)P''_n(x)-2xP'_n+n(1+n)P_n=0 \tag{3.13}$$

Dobili smo Legrendeovu diferencijalnu jednadžbu iz koje smo odredili funkciju izvodnicu $g(x,t)$ koju smo dalje koristili za rekurzivne formule. Ipak je od važnosti zaključiti da bilo koji skup funkcija koji zadovoljava rekurzivne formule će biti skup rješenja Legendreove diferencijalne jednadžbe. Derivacije u gornjoj diferencijalnoj jednadžbi se odnose na varijablu $x=\sin\theta$ pa kada se prijeđe na varijablu θ diferencijalna jednadžba je sljedećeg oblika

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{dP_n}{d\theta}\right]+n(1+n)P_n=0 \tag{3.14}$$

3.3 Gornja i donja granica za $P_n(\cos\theta)$

Funkciju izvodnicu možemo iskoristiti za postavljanje gornje i donje granice za $|P_n(\cos\theta)|$. Imamo

$$(1-2t\cos\theta+t^2)^{-1/2}=(1-te^{i\theta})^{-1/2}(1-te^{-i\theta})^{-1/2}$$
$$=\Big(1+\frac{1}{2}te^{i\theta}+\frac{3}{8}t^2e^{2i\theta}+...)(1+\frac{1}{2}te^{-i\theta}+\frac{3}{8}t^2e^{-2i\theta}+...\Big). \tag{3.15}$$

Možemo iznijeti dva neposredna opažanja iz relacije (3.15). Prvo, kada bilo koji član unutar prve zagrade pomnožimo sa bilo kojim članom iz druge zagrade, potencija od t će uvijek biti parna ako i samo ako je m u eksponencijalnoj funkciji $e^{im\theta}$ paran. Drugo, za svaki izraz oblika $t^ne^{im\theta}$, postoji drugi izraz oblika $t^ne^{-im\theta}$ i ta dva izraza dolaze sa istim koeficijentom koji mora biti pozitivan (jer je svaki član u obje sume zasebno pozitivan). Ova dva opažanja znače:

(1) Možemo pisati koeficijent t^n kao linearnu kombinaciju oblika

$$\frac{1}{2}a_{nm}(e^{im\theta} + e^{-im\theta}) = a_{nm}\cos m\theta$$

gdje su svi a_{mn} pozitivni

(2) m i n moraju biti iste parnosti (ili su oba parna ili neparna) što znači da

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{m=0ili1}^{n} a_{nm}\cos m\theta.$$

Prethodna relacija, očito, postiže maksimum[4] kada je $\theta = 0$. Maksimum Legendreovih polinoma se može vidjeti na Slici 1.

4 Ortogonalnost

Budući da je Legendreova diferencijalna jednadžba samoadjungirana i koeficijent $(1-x^2)$ uz $P_n''(x)$ iščezava u $x = \pm 1$, rješenja za različite n će biti ortogonalna na intervalu $(-1, 1)$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0, \qquad (n \neq m). \tag{4.1}$$

P_n se često koristi s argumentom $\cos\theta$ tada prethodna relacija ekvivalentna relaciji

$$\int_{0}^{\pi} P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta = 0, \qquad (n \neq m)$$

Definicija P_n ne jamči njihovu normiranost što zapravo niti nisu. Jedan od mogućih načina normiranja počinje sa kvadratiranjem funkcije izvodnice

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n\right]^2 \tag{4.2}$$

Integrirajmo prethodni izraz od $x = -1$ do $x = 1$ te ispuštajući mješovite članove koji iščezavaju zbog ortogonalnosti (4.1), imamo

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx. \tag{4.3}$$

[4] Legendreovi polinomi $P_n(x)$ imaju globalni maksimum na intervalu (-1,1) u $x = 1$ sa vrijednošću $P_n(1) = 1$. Ako je n paran također postižu maksimum u $x = -1$. Ako je n neparan, $x = -1$ će biti globalni minimum na intervalu (-1,1) za $P_n(-1) = -1$.

Uvedimo supstituciju $y = 1 - 2xt + t^2$ gdje je $dy = -2tdx$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 - 2tx + t^2} = \frac{1}{2t} \int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{t} ln\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big).$$

Razvijemo li dobiveni rezultat u red

$$\frac{1}{t} ln\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} \tag{4.4}$$

te izjednačimo koeficijente uz t u relacijama (4.3) i (4.4) moramo dobiti

$$\int_{-1}^{1} \Big[P_n(x)\Big]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \tag{4.5}$$

Nadalje, kombinirajući (4.1) i (4.5) imamo uvjet za ortogonalnost

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2\delta_{nm}}{2n+1}$$

5 Legendreovi polinomi u kvantnoj mehanici

U kvantnoj mehanici komponente operatora kutne količine gibanja (L) su označene kao L_x, L_y i L_z. Cilj nam je pronaći zajedničke svojstvene funkcije φ_{lm} za operator kutne količine gibanja L te komponente z L_z koji podrazumijeva rješavanje sljedećih jednadžbi

$$L^2 \varphi_{lm} = \hbar^2 l(l+1) \varphi_{lm} \qquad L_z \varphi_{lm} = m\hbar \varphi_{lm}. \tag{5.1}$$

Kako bismo dobili svojstvene funkcije φ_{lm} prijeći ćemo iz Kartezijeva u sferni koordinatni sustav pomoću sljedećih transformacija

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi$$

$$z = r \cos\theta,$$

što za rezultat daje

$$L_x = -i\hbar\Big(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\Big) \quad \Rightarrow \quad L_x = i\hbar\Big(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \cot\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)$$

$$L_y = -i\hbar\Big(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\Big) \quad \Rightarrow \quad L_y = i\hbar\Big(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \cot\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)$$

$$L_z = -i\hbar\Big(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\Big) \quad \Rightarrow \quad L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad \Rightarrow$$

$$L^2 = -\hbar^2\Big[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big] \tag{5.2}$$

Nakon što smo prešli u sferni koordinatni sustav možemo potražiti rješenja jednadžbi (5.1). Ta rješenja su zajednička za mnoge grane fizike i nazivmo ih sfernim harmonicima uobičajeno označenih sa Y_n^m. Stoga sa obilježavanja sa φ_{nm} prelazimo na Y_n^m. Sada jednadžba za L_z u (5.1) postaje

$$L_z Y_n^m = \hbar m Y_n^m \quad \Rightarrow \quad -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_n^m = \hbar m Y_n^m$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_n^m = imY_n^m. \tag{5.3}$$

Vidimo da prethodna relacija ovisi samo o varijabli φ pa možemo pretpostaviti

$$Y_n^m(\vartheta,\varphi) = \Phi_m(\varphi)\Theta_n^m(\vartheta)$$

Rješenje prethodne diferencijalne jednadžbe je

$$\Phi_m(\varphi) = Ce^{im\varphi}$$

Konstantu C izračunat ćemo normiramo li $\Phi_m(\varphi)$

$$\int_0^{2\pi}|\Phi_m|^2 d\varphi = 1$$

$$|C|^2\int_0^{2\pi}e^{-im\varphi}e^{im\varphi}d\phi = 1$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Primjenit ćemo isti postupak i za L^2

$$L^2 Y_n^m = \hbar^2 n(n+1)Y_n^m.$$

Rješenje je oblika

$$Y_n^m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \Theta_n^m(\vartheta)$$

Uvrštavanjem dobivenog rješenja u izraz za L^2 u (5.1) te, također, uvrštavanjem L^2 kako smo ranije izračunali, slijedi

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right]\Theta = 0.$$

Uvedemo li supstituciju $\mu = \cos\vartheta$

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\Theta}{d\mu}\right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right]\Theta = 0 \tag{5.4}$$

$$-1 \leq \mu \leq 1$$

Postavimo li da je $m = 0$ i $n(n+1) = \lambda$ u relaciji (5.3) dobivamo Legendreovu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\Theta_n}{d\mu}\right] + \lambda\Theta_n = 0, \qquad \Theta_n^0 = \Theta_n \tag{5.5}$$

U odnosu na relaciju (5.2) vidimo da je (5.5) jednadžba svojstvenih vrijednosti za $L^2/\hbar$ sa svojstvenom vrijednoštu λ. Rješenje za (5.5) može se potražiti kao razvoj u red. Zahtjev razvoja da rješenja ostanu ograničena unutar intervala $-1 \leq \mu \leq 1$ podrazumijeva da svojstvena vrijednost λ mora biti oblika $n(n+1)$ gdje je $n \geq 0$ konstanta ta da niz rješenja za Θ_n sadrži, najviše, konačan broj članova koji čine Θ. Drugi zaključak ukazuje da je Θ_n polinom stupnja n i to su upravo Legendreovi polinomi koje u ovom slučaju možemo i označiti sa $\Theta_n = P_n(\mu)$. Rješenja možemo zapisati u sažetom obliku pomoću tzv. Rodriguesove formule

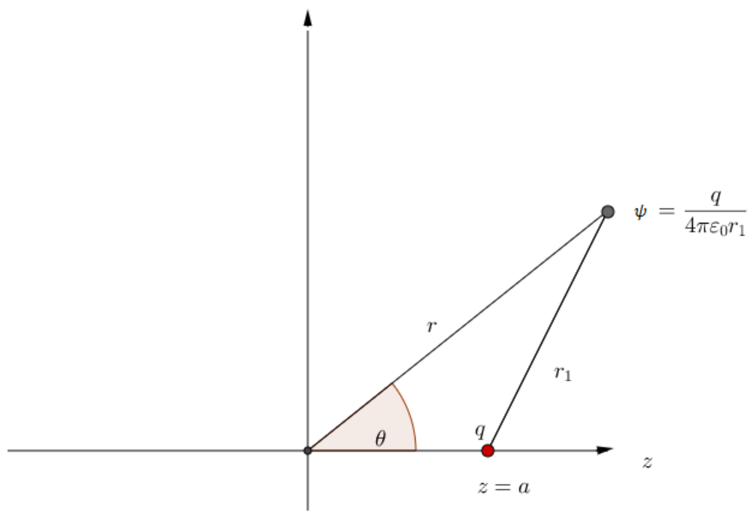
$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n$$

6 Legendreovi polinomi u elektrodinamici

6.1 Fizikalna interpretacija funkcije izvodnice

Funkcija izvodnica Legendreovih polinoma ima važnu i zanimljivu interpretaciju. Uvedimo sferne koordinate (r, θ, φ). Postavimo naboj q u točku a na pozitivnom dijelu osi z, kako je prikazano na slici 2. Potencijal u točki (r, θ), koji je neovisan o φ, može biti izračunat kao (gdje smo r_1 izračunalo pomoću kosinusovog poučka)

$$\psi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}} \tag{6.1}$$



Slika 2: Elektrostatski potencijal

Prethodni izraz je u biti funkcija izvodnica. Kako bismo primjetili podudarnost, napišimo relaciju kao

$$\psi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 - 2\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} g\left(\cos\theta, \frac{a}{r}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n \tag{6.2}$$

Niz u (6.2) kovergira kada je $r > a$. Poželimo li izraz za $\psi(r,\theta)$ kada je $r < a$ preudredit ćemo (6.1) u

$$\psi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - 2\frac{r}{a}\cos\theta + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2},$$

gdje opet prepoznajemo razvoj funkcije izvodnice, ali sada u sljedećem obliku

$$\psi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\Big(\frac{r}{a}\Big)^n \tag{6.3}$$

koji vrijedi kada je $r < a$.

6.2 Razvoj $\frac{1}{|\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}|}$

Jednadžbe (6.2) i (6.3) opisuju interakciju naboja q na položaju $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e_z}$ te jediničnog naboja na položaju $\boldsymbol{r}$. Neka je $\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r}$, a $\boldsymbol{r_2} = \boldsymbol{a}$. Činjenica da je $\boldsymbol{a}$ paralelno sa z osi nam nije od velike važnosti za izračun $1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|$; bitne veličine su r,a i kut θ između $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{a}$. Sada možemo prepisati ili (6.2) ili (6.3) s neutralnijom notacijom kako bismo odredili vrijednost $1/|\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}|$ u uvjetima veličina $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}$ i kuta između njih (χ). Definiramo li $r_>$ i $r_<$ koji su redom veći i manji od r_1 i r_2 relacije (6.2) i (6.3) možemo iskombinirati u jednu jednostavnu jednadžbu

$$\frac{q}{|\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}|} = \frac{1}{r_>}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n P_n(\cos\chi) \tag{6.4}$$

koja će konvergirati svugdje osim u $r_1 = r_2$.

Razmotrimo slučaj kada je $r_1 > r_2$. Uz prethodnu pretpostavku napišimo $\frac{1}{r_{12}}$ [5] kao

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2\cos\chi}} = \frac{1}{r_1\sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\cos\chi}} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}|} = \frac{1}{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n P_n(cos\chi). \tag{6.5}$$

Budući da je $r_1 > r_2$ relaciju za $\frac{1}{r_{12}}$ možemo razviti u konvergentan red po binomnom poučku (uz pretpostavku da je $r_1 > 0$)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + ...$$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + ... = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n. \tag{6.6}$$

Uvrstimo

$$x = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\cos\chi$$

[5] $\frac{1}{r_{12}}$ smo izračunali pomoću kosinusovog poučka kao u relaciji (6.1) s iznimkom da ćemo u ovom odjeljku, kako je već rečeno, koristiti neutralnu notaciju.

u relaciju (6.6) za $\frac{1}{r_{12}}$ ćemo dobiti

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{r_1}\Big\{1 - \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{r_2}{r_1}\Big)^2 - 2\Big(\frac{r_2}{r_1}\Big)\cos\chi\Big] + \frac{3}{8}\Big[\Big(\frac{r_2}{r_1}\Big)^2 - 2\Big(\frac{r_2}{r_1}\Big)\cos\chi\Big]^2 - \frac{5}{16}\Big[\Big(\frac{r_2}{r_1}\Big)^2 - 2\Big(\frac{r_2}{r_1}\Big)\cos\chi\Big]^3$$

$$+\xi\Big(\frac{r_2}{r_1}\Big)^4\Big\}.$$

Preuredimo li prethodni izraz tako da grupiramo članove s istom potencijom $\frac{r_2}{r_1}$ dobivamo

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{r_1}\Big\{1 + \frac{r_2}{r_1}\cos\chi + \Big(\frac{r_2}{r_1}\Big)^2\Big[\frac{3}{2}\cos^2\chi - \frac{1}{2}\Big] + \Big(\frac{r_2}{r_1}\Big)^3\Big[\frac{5}{2}\cos^3\chi - \frac{3}{2}\cos\chi\Big] + \xi\Big(\frac{r_2}{r_1}\Big)^4\Big\}. \quad (6.7)$$

Razvoj nam pokazuje da su P_n ništa drugo nego Legendreovi polinomi. Ovaj rezultat ne bi trebao biti iznenađujući jer je zapravo $\frac{1}{|\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}|}$ funkcija izvodnica Legendreovih polinoma. Drugim riječima, razlika vektora $\boldsymbol{r_1}$ i $\boldsymbol{r_2}$ daje jednostavnu geometrijsku interpretaciju funkcije izvodnice. Iz relacije (6.7) možemo iščitati Legendreove polinome kao koeficijente koji su grupirani uz potencije r_2/r_1 jednako kao u tablici 1, ali sada s varijablom $x = \cos\chi$.

7 Električni multipoli

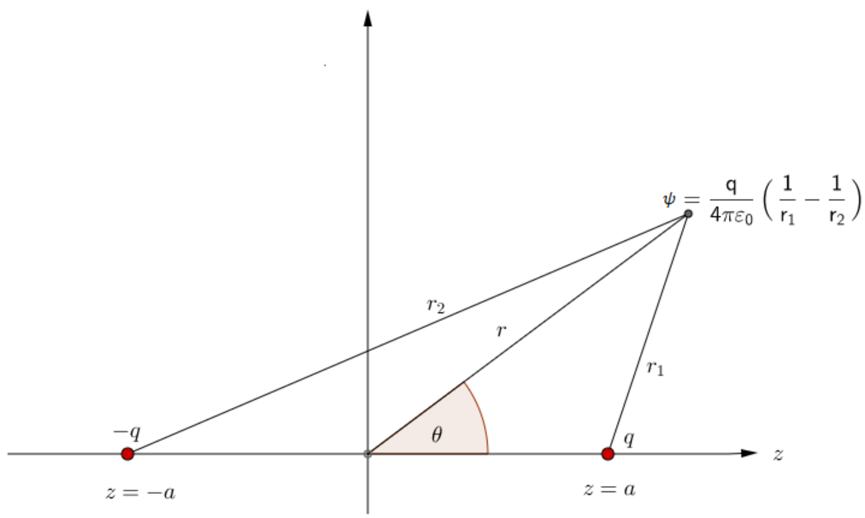
Vratimo li se u (6.2) te se ograničimo na razmatranje $r > a$, možemo primjetiti da početni član (sa $n = 0$) daje potencijal koji bismo dobili kada bi naboj q bio u ishodištu i da sljedeći članovi moraju opisati korekcije koje proizlaze iz stvarnog položaja naboja. Jedan od načina za dobivanje i razumijevanje drugog i sljedećih članova razvoja je razmotriti što bi se dogodilo dodamo li drugi naboj $-q$ u točku $z = -a$ (Slika 3). Potencijal koji nastaje zbog drugog naboja dat će izraz sličan izrazu (6.1) s iznimkom da oznake za q i $\cos\theta$ moraju biti preokrenute (kut nasuprot r_2 je $\pi - \theta$). Sada imamo

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Big(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\Big) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Big[\Big(1 - 2\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\Big)^{-1/2} - \Big(1 + 2\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\Big] \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\Big(\frac{a}{r}\Big)^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\Big(-\frac{a}{r}\Big)^n\Big]\end{aligned}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Bigg[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\Big(\frac{a}{r}\Big)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n P_n(\cos\theta)\Big(\frac{a}{r}\Big)^n\Bigg]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\Big(\frac{a}{r}\Big)^n\Big[1+(-1)^{n+1}\Big]$$

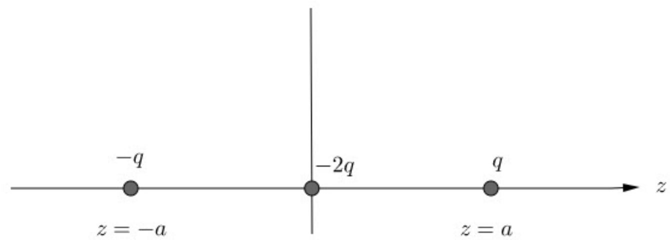
$$\psi = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Big[\frac{a}{r}P_1(\cos\theta) + \frac{a^3}{r^3}P_3(\cos\theta) + ...\Big]. \tag{7.1}$$



Slika 3: Električni dipol

Ovakav sustav naboja nazivamo električni dipol gdje je vodeća ovisnost o r ide kao $1/r^2$. Jakost dipola (zvanog još i dipolni moment) može biti definirana kao $2qa$, koji je jednak jakosti svakog naboja pomnoženog sa $2a$. Pustimo li da $a \to 0$ prevladat će prvi član razvoja

$$\psi = \frac{2aq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P_1(\cos\theta)}{r^2} \tag{7.2}$$



Slika 4: Linearni električni kvadripol

Zbrajajući funkcije izvodnice svakog pojedinog naboja naš razvoj poprima oblik

$$\psi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\Big[\sum_i q_i + \sum_i \frac{q_i a_i}{r} P_1(\cos\theta) + \sum_i \frac{q_i {a_i}^2}{r^2} P_2(\cos\theta) + ...\Big]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\Big[\mu_o + \frac{\mu_1}{r} P_1(\cos\theta) + \frac{\mu_2}{r^2} P_2(\cos\theta) + ...\Big] \tag{7.3}$$

gdje su μ_i multipolni momenti raspodjele naboja; μ_0 je 2^0-pol ili monopolni moment. Njegova vrijednost je jednaka ukupnoj mreži naboja u raspodjeli. μ_1 je 2^1-pol ili dipolni moment jednak $\sum_i q_i a_i$;μ_2 je 2^2-pol ili kvadripolni moment dan kao $\sum_i q_i {a_i}^2$ itd. Naš općeniti (linearni) multipolni razvoj će konvergirat za vrijednosti kada je r veći od svih a_i za svaki pojedini naboj. Drugim riječima, razvoj će konvergirati u točkama dalekim od koordinatnog početka u svim dijelovima raspodjele naboja.

Dalje se pitamo što se dogodi ako pomaknemo ishodište koorinatnog sustava. Ili razmotrimo pomicanje r za $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_p}|$. Za $r < r_p$ binomni razvoj od $1/|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_p}|^n$ će imati opći oblik

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_p}|^n} = \frac{1}{r^n} + C\frac{r_p}{r^{n+1}} + ..., \tag{7.4}$$

s rezultatom takvim da na prvi član različit od nule jednadžbe (7.3) neće utjecati pomak od ishodišta što bi značilo da najniži moment razvoja različit od nule bit će neovisan od našeg izbora ishodišta. Ali svi viši momenti će se promijeniti ukoliko pomjerimo ishodište. Osobito, ukupna mreža naboja (monopolni moment) će uvijek biti neovisna od toga kako smo izabrali ishodište. Dipolni moment će biti neovisan od točke razvoja samo kada je mreža naboja nula; kvadripolni moment će imati takvu neovisnost samo ako i dipolni momenti i mreža naboja iščezava.

8 Zaključak

Legendeovi polinomi jednostavan su i koristan matematički alat koji se pojavljuje u rješenjima mnogih fizičkih problema sa sfernom simetrijom. Javljaju se i kada riješimo diferencijalnu jednadžbu u kojoje je Laplaceov operator izražen preko sfernih koordinata. Budući da se Laplaceov operator javlja u mnogim bitnim relacijama, kao što su valna, Schr$\ddot{o}$dingerova jednadžba, elektrostatika,Legendreovi polinomi pokrivaju vrlo široko područje fizike.

9 Dodatak

Slika 1 rađena je u programskom jeziku Python 3.2. U nastavku se nalazi kod

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-1,1,100)

def P_1(x):
y=x
return y
y_1=P_1(x)
plt.plot(x,y_1)

def P_2(x):
y=0.5*(3*x**2-1)
return y
y_2=P_2(x)
plt.plot(x,y_2)

def P_3(x):
y=0.5*(5*x**3-3*x)
return y
```

```
y_3=P_3(x)
plt.plot(x,y_3)

def P_4(x):
y=0.125*(35*x**4-30*x**2+3)
return y
y_4=P_4(x)
plt.plot(x,y_4)

def P_5(x):
y=0.125*(63*x**5-70*x**3+15*x)
return y
y_5=P_5(x)
plt.plot(x,y_5)

def P_6(x):
y=0.0625*(231*x**6-315*x**4+105*x**2-5)
return y
y_6=P_6(x)
plt.plot(x,y_6)

def P_7(x):
y=0.0625*(429*x**7-693*x**5+315*x**3-35*x)
return y
y_7=P_7(x)
plt.plot(x,y_7)

plt.ylim(-1,1)

plt.axvline(color="black", zorder=-1)
plt.axhline(color="black", zorder=-1)

plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("$P_n(x)$")
```

plt.legend(['$P\_1(x)$','$P\_2(x)$','$P\_3(x)$','$P\_4(x)$','$P\_5(x)$','$P\_6(x)$','$P\_7(x)$'], loc = "upper left", prop='size':6)

plt.show()

Preostale slike su rađene u alatu GeoGebra sa sljedećeg linka: https://www.geogebra.org/apps

Literatura

[1] Arfken, George B.; Weber, Hans J.; Harris, Frank E. Mathematical methods for physicists

[2] Liboff, Richard L. Introductory quantum mechanics; URL: http://goo.gl/n3VUUL (16.08.2016.)

[3] WolframMathWorld; URL: http://mathworld.wolfram.com/LegendrePolynomial.html (10.08.2016.)

[4] Glumac Z. Matematičke metode fizike; URL:http://gama.fizika.unios.hr/~zglumac/ummf.pdf

[5] Wang, Frank Y. Physics with MAPLE; URL:http://goo.gl/nd1vtS (06.09.2016.)

Životopis

Katarina Marjanović rođena je 03.02.1994. godine u Ozimici, Žepče. Prebiva u mjestu Brankovići gdje je pohađala i završila osnovnu školu "Fra Grga Martić". 2009. godine upisuje srednju školu KŠC "Don Bosco" u Žepču smjer Ekonomski tehničar. 2013. godine upisuje studij fizike u Osijeku koji pohađa i danas.