Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Svjetlana Prgomet

Samokomplementarni grafovi

Diplomski rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Svjetlana Prgomet

Samokomplementarni grafovi

Diplomski rad

Mentor:
doc.dr.sc. Snježana Majstorović

Osijek, 2017.

Sadržaj

1 Uvod

Samokomplementarni grafovi su jednostavni grafovi koji su izomorfni svome komplementu. Iako je struktura takvih grafova vrlo specijalna, oni su vrlo netrivijalni. Štoviše, prepoznavanje samokomplementarnih grafova i ispitivanje jesu li dva samokomplementarna grafa izomorfna su problemi koji su ekvivalentni dobro poznatom problemu o izomorfnosti dvaju grafova. Problem izomorfnosti dvaju grafova odnosi se na ispitivanje izomorfnosti neka dva grafa, a njegova posebnost je u tome što se za takav problem još uvijek ne zna postoji li algoritam koji će u polinomijalnom vremenu dati odgovor na pitanje jesu li neka dva grafa izomorfna. Također se ne zna ni pripada li taj problem klasi NP-potpunih problema. To su, pak, problemi za koje ne postoji algoritam koji bi ih riješio u polinomijalnom vremenu, ali ako se zna rješenje problema, onda se provjera ispravnosti rješenja može obaviti u polinomijalnom vremenu. Iako su samokomplementarni grafovi relativno rijetki u odnosu na proizvoljne jednostavne grafove s istim brojem vrhova, njihovo prepoznavanje je i dalje vrlo izazovan problem.
Samokomplementarni grafovi čine beskonačnu klasu grafova s vrlo jakim svojstvima. Glavni inicijator u proučavanju takvih grafova bio je H. Sachs sa svojim zanimljivim radom [21] iz 1962. godine. Danas se broj radova o samokomplementarnim grafovima broji u stotinama, a osim za neusmjerene grafove, svojstvo samokomplementarnosti se proučava i u slučaju usmjerenih grafova. Znanstvenici su također pokušavali 'mjeriti' koliko je neki jednostavan graf blizu toga da postane samokomplementaran, ograničili su se na regularne samokomplementarne grafove, modificirali definiciju samokomplementarnosti u slučaju bipartitnih grafova i štošta drugo.
Ovaj rad se uglavnom temelji na rezultatima matematičara koji su proučavali samokomplementarne grafove duži niz godina: Sachsa [21], Ringela [20] i Readea [19]. Područja koja su obrađena vezana su za udaljenosti i povezanosti, konstrukcije, planarnost, kromatski broj te cikluse i puteve u samokomplementarnim grafovima. Glavni cilj rada je upoznavanje samokomplementarnih grafova kroz definiciju i analizu njihovih osnovnih svojstava. No, rad sadrži i rezultate koji se odnose na konstrukciju samokomplementarnih grafova te su navedena i neka njihova složenija svojstva.
Odjeljci su organizirani tako da prvi sadrži osnovne pojmove iz teorije grafova koji su potrebni za razumijevanje rada. U drugom odjeljku su definirani samokomplementarni grafovi te su navedena neka njihova osnovna svojstva. Treći odjeljak o konstrukcijama je opsežniji. Naglasak je na samokomplementarnim grafovima s 8 vrhova te konstrukcijama nekih specijalnih klasa samokomplementarnih grafova, a sav tekst popraćen je slikama radi boljeg uočavanja njihovih svojstava. Odjeljak o udaljenosti i povezanosti u samokomplementarnim grafovima sadrži mnoštvo tvrdnji koje dobro prikazuju specifičnu strukturu samokomplementarnih grafova, a većina ih je i dokazana. Posljednji odjeljci su nešto kraći i daju manji broj tvrdnji o kromatskom broju, planarnosti te ciklusima (s naglaskom na 3-cikluse) i putevima u samokomplementarnim grafovima (posebno se ističu rezultati o Hamiltonovim grafovima u samokomplementarnim grafovima).

2 Osnovni pojmovi i tvrdnje iz teorije grafova

U ovom poglavlju ćemo navesti definicije osnovnih pojmova iz teorije grafova koji su neophodni za analizu i razumijevanje svojstava samokomplementarnih grafova.

Definicija 2.1. *Graf G je uređena trojka $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ koja se sastoji od nepraznog skupa V=V(G), čiji su elementi vrhovi od G, skupa E=E(G) disjunktnog s V(G), čiji su elementi bridovi od G i funkcije incidencije ψ_G koja svakom bridu od G pridružuje neuređeni par vrhova od G.*

Za graf G kažemo da je *konačan* ako su mu skupovi V i E konačni. Naglasimo da ćemo se u ovome radu baviti isključivo s konačnim grafovima.

Vrhove nekog grafa najčešće označavamo malim slovima u, v, w itd., a bridove označavamo malim slovima e, f, g itd. Ako je bridu e pridružen par vrhova $\{u, v\}$, onda kažemo da su u i v krajevi brida e, odnosno da je vrh u (v) incidentan bridu e, a brid u tom slučaju označavamo s $e = uv$ ili $e = vu$.

Ako za neki graf G funkcija incidencije ψ_G nije injekcija, tj. postoje najmanje dva brida e i f grafa G takva da $\psi_G(e) = \psi_G(f) = uv$, onda kažemo da postoji *višestruki brid* između vrhova u i v.

Petlja je brid koji spaja vrh sa samim sobom.

Graf H je *podgraf* od G, u oznaci $H \subseteq G$, ako je $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, a $\psi_H = \psi_G|_{E(H)}$ (tj. ψ_H je restrikcija od ψ_G na $E(H)$). Podgraf grafa G nastao uklanjanjem vrha v iz G označavamo s $G - v$.

Neka je $\emptyset \neq V' \subseteq V(G)$. Podgraf od G čiji je skup vrhova V' i koji sadrži najveći mogući broj bridova naslijeđen iz G zove se podgraf induciran s V' te označava s $G[V']$. Kažemo još da je $G[V']$ *inducirani podgraf* od G.

Razapinjujući podgraf H grafa G je podgraf od G s istim skupom vrhova kao i G. Pravi razapinjujući podgraf H od G je razapinjujući podgraf za koji vrijedi $H \neq G$.

Jednostavan graf je graf koji ne sadrži petlje ni višestruke bridove.

Stupanj vrha v grafa G je broj $d_G(v)$ bridova u G incidentnih s v. Ako je $d_G(v)= 0$, onda za vrh v kažemo da je *izolirani vrh.*

Niz stupnjeva grafa G je niz $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$, $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \cdots \geq d(v_n)$, gdje su $v_1, \ldots, v_n$ vrhovi grafa G. U takvom nizu, stupnjevi vrhova su obično poredani od najvećeg do najmanjeg.

Definicija 2.2. *Grafovi G i H su izomorfni, u oznaci $G \cong H$, ako postoje bijekcije $\theta : V(G) \to V(H)$ i $\phi : E(G) \to E(H)$ tako da vrijedi:*

$$\psi_G(e) = uv \Leftrightarrow \psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v).$$

Par (θ, ϕ) zove se izomorfizam s G u H.

Šetnja u grafu G je netrivijalan konačan niz $W = v_0e_1v_1e_2v_2...e_kv_k$ čiji su članovi naizmjence vrhovi v_i i bridovi e_i tako da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i v_i za svako i, $1 \leq i \leq k$. Šetnja je zatvorena ako je $v_0 = v_k$.

Šetnja u kojoj su svi bridovi međusobno različiti zove se *staza*.

Zatvorena šetnja u kojoj su svi vrhovi osim početnog i krajnjeg međusobno različiti zove se *ciklus*. Ciklus s n vrhova označavamo s C_n.

Hamiltonov ciklus na G je ciklus na G koji sadrži sve vrhove od G. Graf G je Hamiltonov ako sadrži Hamiltonov ciklus.

Put je šetnja s međusobno različitim vrhovima. Put s n vrhova označavamo s P_n.

Hamiltonov put na G je put koji sadrži sve vrhove od G.

Udaljenost $d(v, w)$ dvaju vrhova v i w je duljina najkraćeg puta između v i w. Ako takav put ne postoji, onda vrijedi $d(v, w) = \infty$. Jasno je da je $d(v, w) = 1$ ako i samo ako su v i w susjedni vrhovi.

Graf G je *povezan* ako $d_G(u, v) < \infty \ \forall u, v \in V(G)$. U suprotnom kažemo da je G *nepovezan*, a maksimalne povezane podgrafove tog grafa zovemo *komponentama povezanosti* grafa G.

Vrh v u povezanom grafu G nazivamo *reznim vrhom* ako je $G - v$ nepovezan graf.

Za povezan graf G kažemo da je *k-povezan* ako uklanjanjem manje od k vrhova dobiveni podgraf i dalje ostaje povezan. *Vršna povezanost* grafa G je najmanji broj vrhova koje je potrebno ukloniti iz G da bi on postao nepovezan graf. Povezanost grafa G označavamo s $\kappa(G)$. Dakle, ako G ima rezni vrh, onda je on 1-povezan, preciznije $\kappa(G) = 1$, a ako nema rezni vrh, onda je 2-povezan, tj. $\kappa(G) \geq 2$.

Za povezan graf G kažemo da je *k-bridno povezan* ako uklanjanjem manje od k bridova dobiveni podgraf i dalje ostaje povezan. *Bridna povezanost* grafa G je najmanji broj bridova koje je potrebno ukloniti iz G da bi on postao nepovezan graf. Bridnu povezanost grafa G označavamo s $\kappa'(G)$.

Ekscentricitet $e(v)$ vrha v povezanog grafa G je

$$\max_{u \in V(G)} d(v, u).$$

Dijametar $diam(G)$ grafa G je

$$\max_{v \in V(G)} e(v).$$

Radijus $r(G)$ od G je

$$\min_{v \in V(G)} e(v).$$

Vrh v grafa G za koji vrijedi $e(v) = diam(G)$ zovemo *perifernim vrhom* u G.

Vrh v grafa G za koji vrijedi $e(v) = r(G)$ zovemo *centralnim vrhom* u G.

Potpun graf je jednostavan graf u kojem je svaki par vrhova spojen bridom. Oznaka za potpun graf s n vrhova je K_n.

Za graf kažemo da je *r-partitan* ako mu se skup vrhova može particionirati u r skupova pri čemu svaki brid ima svojstvo da mu se krajevi nalaze u različitim particijama. U slučaju $r = 2$ govorimo o *bipartitnom* grafu.

Kažemo da je graf *planaran* ako ga je moguće nacrtati u ravnini tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima. Graf koji je na takav način smješten u ravninu zovemo ravninskim grafom.

Genus grafa je najmanji prirodan broj n za koji se graf može smjestiti na sferu s n ručki tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima.

Unija $G \cup H$ grafova G i H je graf sa skupom vrhova $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ i skupom bridova $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.

Za $k \in \mathbb{N}$ definiramo k-bojenje vrhova grafa G kao funkciju $c : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ koja svakom vrhu iz G pridružuje jednu od k boja označenih s nekim brojem iz $\{1, 2, \ldots, k\}$. Za k-bojenje kažemo da je pravilno ako su svaka dva susjedna vrha grafa G obojena različitim bojama.

Za graf kažemo da je k-obojiv ako dopušta pravilno k-bojenje vrhova.

Kromatski broj $\chi(G)$ grafa G je najmanji prirodan broj k za koji je G k-obojiv.

3 Definicija i osnovna svojstva samokomplementarnih grafova

Najprije ćemo iskazati definiciju komplementiranja kao specijalnu unarnu operaciju nad jednostavnim grafovima. Napomenimo da će svi grafovi koje budemo spominjali u ovome radu biti jednostavni.

Definicija 3.1. *Komplement G^c jednostavnog grafa G je jednostavan graf s istim skupom vrhova $V(G)$ kao i G, pri čemu vrijedi da su dva vrha susjedna u G^c ako i samo ako nisu susjedna u G, odnosno*

$$\forall u, v \in V(G) \quad uv \in E(G) \Leftrightarrow uv \notin E(G^c).$$

Samokomplementaran graf G je graf koji je izomorfan svom komplementu, tj. to je graf za koji vrijedi $G \cong G^c$.
Važno je napomenuti da, iako su G i G^c izomorfni grafovi s istim skupom vrhova, oni su ipak različiti. Zapravo, oni i nemaju zajedničkih bridova. Stoga G i G^c zbog izomorfnosti imaju ista svojstva, ali proizvoljan podskup skupa vrhova će općenito imati različita svojstva u G u odnosu na svojstva u G^c. Sada ćemo navesti osnovna svojstva samokomplementarnih grafova.

Propozicija 3.1. *Ako je G samokomplementaran graf s n vrhova, onda je $|E(G)| = \dfrac{n(n-1)}{4}$ i $n \equiv 0$ ili 1(mod 4).*

Dokaz. Kako je unija grafa G s n vrhova i njegovog komplementa G^c potpun graf K_n, to je

$$|E(G \cup G^c)| = |E(K_n)| = \binom{n}{2}.$$

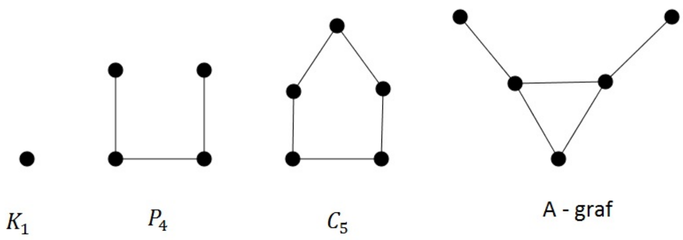
Budući da je G samokomplementaran, vrijedi

$$|E(G^c)| = |E(G)| = \frac{1}{2}\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4}.$$

Broj bridova je cijeli broj pa zaključujemo da je broj vrhova n ili djeljiv s 4 ili pri dijeljenju s 4 daje ostatak 1.

□

Ova propozicija je jako korisna u dokazivanju da neki grafovi nisu samokomplementarni: samo treba prebrojati sve vrhove i bridove. Ako barem jedan od dobivenih brojeva ne ispunjava svojstva Propozicije 3.1, odmah zaključujemo da graf nije samokomplementaran.
Propozicija 3.1 je također vrlo korisna i u pronalaženju grafova koji jesu samokomplementarni, ali imaju vrlo malen broj vrhova (pritom mislimo na grafove kod kojih je broj vrhova najviše 7).
Za $n \leq 7$ jedini samokomplementarni grafovi imaju 1, 4 i 5 vrhova s redom 0, 3 i 5 bridova, tj. imamo samo četiri samokomplementarna grafa i oni su prikazani na Slici 1. Potpun graf K_1 poznat je i pod nazivom trivijalan graf, graf P_4 je put s 4 vrha, graf C_5 je ciklus s 5 vrhova, a A-graf je još poznat i kao tzv. Bull graf (u prijevodu Bik graf).
Slijedi osnovno svojstvo o povezanosti samokomplementarnih grafova:



Slika 1: Mali samokomplementarni grafovi

Propozicija 3.2. *Svaki samokomplementaran graf je povezan.*

Dokaz. Tvrdnja propozicije je posljedica općenitijeg rezultata o povezanosti komplemenata grafova:

Lema 3.1. *Barem jedan od grafova G i G^c je povezan.*

Dokaz. Ako je G povezan, nemamo što dokazivati. Moguće je da će komplement od G biti nepovezan graf, kao što je slučaj s npr. komplementom potpunog grafa K_n, ili će pak komplement biti povezan graf kao što je npr. komplement ciklusa C_n s $n \geq 5$ vrhova.
Pretpostavimo da G nije povezan graf i pokažimo da je G^c povezan. Neka su u i w dva proizvoljna vrha grafa G. Ako u i w nisu spojeni bridom u G, onda su spojeni bridom u G^c pa imamo puteve (duljine jedan) u G^c između svaka takva dva vrha u G. Ako je uw brid u G, onda u i w nisu spojeni bridom u G^c. No, u i w se nalaze u istoj komponenti povezanosti grafa G, pa će u G^c postojati najmanje jedan vrh v iz svake od preostalih komponenti povezanosti takav da uv i wv nisu bridovi u G, ali će biti bridovi u G^c, odnosno postoji put uvw u G^c za svaka dva susjedna vrha u i w iz G. □

Sada je jasno da iz Leme 3.1 odmah slijedi da je svaki samokomplementaran graf povezan. □

3.1 Nizovi stupnjeva u samokomplementarnim grafovima

Navedimo još neka elementarna svojstva samokomplementarnih grafova koja se odnose na pripadne nizove stupnjeva:

Propozicija 3.3. *Neka je G samokomplementaran graf s n vrhova. Niz stupnjeva $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ od G je simetričan obzirom na $\frac{n-1}{2}$, tj. vrijedi*

$$d_i + d_{n+1-i} = n - 1, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Posebno, vrijede sljedeće tvrdnje:

a) ako je $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, točno pola vrhova grafa G ima paran stupanj, a točno pola vrhova ima neparan stupanj;

b) ako je $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, onda G sadrži najmanje jedan vrh stupnja $\frac{n-1}{2} = 2k$.

Dokaz. Neka je v proizvoljan vrh samokomplementarnog grafa G i neka mu je stupanj jednak d. Tada prema definiciji komplementa grafa G nužno vrijedi $d_{G^c} = n - 1 - d$. Stoga, ako je $s = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, gdje $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$, niz stupnjeva u G, onda je $n-1-d_1 \leq n-1-d_2 \leq \cdots \leq n-1-d_n$ pa je $s' = (n-1-d_n, n-1-d_{n-1}, \dots, n-1-d_1)$ niz stupnjeva u G^c. No, jer je G samokomplementaran, to nizovi s i s' moraju biti jednaki, odnosno, mora vrijediti $d_i = n-1-d_{n-(i-1)}$ $\forall i = 1, \dots, n$ pa zaključujemo da vrijedi

$$d_i + d_{n+1-i} = n - 1, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Dokažimo tvrdnje pod a) i b).
a) Neka je $n = 4k$. Obzirom da u svakom grafu broj vrhova neparnog stupnja mora biti paran broj, odmah je jasno da će za ovakav samokomplementaran graf i broj vrhova parnog stupnja biti paran broj. Jedino trebamo zaključiti da se ti brojevi podudaraju.
Ako je za neki i stupanj d_i paran, onda je zbog neparnosti broja $n-1$ i jednakosti $d_i = n-1-d_{n-(i-1)}$ nužno $d_{n-(i-1)}$ neparan broj. Isto tako zaključujemo da ako je d_i neparan, onda je $d_{n-(i-1)}$ paran. Dakle, svakom parnom stupnju odgovara točno jedan neparan stupanj u nizu stupnjeva od G, te svakom neparnom stupnju odgovara točno jedan paran stupanj u danom nizu. Iz ovoga odmah zaključujemo da su parni i neparni stupnjevi u bijekciji, a to znači da ih ima jednako mnogo.
b) Ako je $n = 4k+1$, a zbog činjenica koje smo naveli u prethodnom slučaju: broj vrhova neparnog stupnja je paran broj, zaključujemo da je broj vrhova parnog stupnja nužno neparan broj. Stoga, ako je za neki i stupanj d_i paran, onda zbog parnosti broja $n-1$ i jednakosti $d_i = n-1-d_{n-(i-1)}$ nužno vrijedi da je $d_{n-(i-1)}$ paran broj. Isto tako zaključujemo da ako je d_i neparan, onda je i $d_{n-(i-1)}$ neparan. Zbog simetričnosti niza stupnjeva, a zbog činjenice da sadrži neparan broj vrhova, jasno je da će postojati vrh čiji je stupanj fiksna točka simetrije, tj. postoji stupanj u nizu koji će se preslikati u samog sebe i taj je stupanj jednak $\frac{n-1}{2} = 2k$. Svi preostali stupnjevi imat će svog "para" u danom nizu koji im odgovara po parnosti. □

3.1.1 Nizovi stupnjeva i antimorfizmi

O nizovima stupnjeva samokomplementarnih grafova možemo reći i više nego što je ponuđeno u Propoziciji 3.3, ali prije toga moramo definirati i objasniti značenje pojma antimorfizma.

Definicija 3.2. *Izomorfizam σ zadanog grafa G na njegov komplement G^c nazivamo antimorfizam. Preslikavanje σ je permutacija skupa vrhova $V(G)$ takva da vrijedi:*

$$\forall v, w \in V(G),\ vw \in E(G) \iff \sigma(v)\sigma(w) \in E(G^c) \iff \sigma(v)\sigma(w) \notin E(G).$$

Iz ove definicije slijedi da je σ također izomorfizam s G^c na G.

Ako je skup vrhova S fiksan pri permutaciji σ, tj. vrijedi $\sigma(S) = S$, tada ekvivalencije iz definicije vrijede čak i ako napravimo restrikciju od σ na S. To je vrlo važna opservacija jer iz nje zaključujemo da S inducira samokomplementaran podgraf grafa G s antimorfizmom $\sigma|_S$, tj. vrijedi:

$$\sigma(S) = S \Rightarrow |S| = 4s \text{ ili } 4s+1 \text{ za neki } s. \tag{1}$$

Ipak treba naglasiti da u općenitom smislu, podgrafovi ili inducirani podgrafovi samokomplementarnog grafa G nisu i sami samokomplementarni grafovi. Jedan takav jednostavan primjer podgrafa je potpun graf K_2. Stoga nije moguće izvesti karakterizaciju samokomplementarnih grafova pomoću zabranjenih podgrafova ili zabranjenih induciranih podgrafova.

Permutacije ćemo najčešće prikazivati kao produkte disjunktnih ciklusa. Tako stupnjevi vrhova u svakom ciklusu antimorfizma alterniraju između s i $n-1-s$ za neki prirodan broj s.
Sada ćemo koristeći pojam antimorfizma dokazati leme koje govore o parnosti broja vrhova određenog stupnja u samokomplementarnom grafu. Prva lema se odnosi na prebrojavanje vrhova nekog stupnja koji je različit od broja $\dfrac{n-1}{2}$, a druga o broju vrhova čiji je stupanj upravo jednak tom broju.

Lema 3.2. *U samokomplementarnom grafu G s n vrhova vrijedi da je broj vrhova danog stupnja d, pri čemu $d \neq \dfrac{n-1}{2}$, paran broj.*

Dokaz. Pretpostavimo da samokomplementaran graf G ima točno r vrhova stupnja d i neka vrijedi $d \neq \dfrac{n-1}{2}$. Tada znamo da G ima točno r vrhova stupnja $n-1-d$ pa svaki antimorfizam preslikava te vrhove jedan u drugoga. Stoga iz (1) zaključujemo da imamo $2r$ vrhova koji induciraju samokomplementaran graf, a kako je $2r$ paran broj, to jedino ima smisla $2r \equiv 0 (mod\, 4)$, tj. $r \equiv 0 (mod\, 2)$. □

Lema 3.3. *U samokomplementarnom grafu G s $4k+1$ vrhova vrijedi da je broj vrhova stupnja $2k$ jednak $4s+1$ za neki s.*

Dokaz. Ako samokomplementaran graf G s $4k+1$ vrhova ima r vrhova stupnja $2k$ $\left(= \dfrac{n-1}{2}\right)$, onda ih svaki antimorfizam mora preslikati u same sebe pa prema (1) vrijedi $r = 4s$ ili $r = 4s+1$ za neki s. No, ako bi vrijedilo $r = 4s$, onda bi prema Lemi 3.2 broj vrhova svakog stupnja bio paran broj, što je nemoguće. Stoga zaključujemo da vrijedi $r = 4s+1$ za neki s, tj. vrhova stupnja $2k$ u samokomplementarnom grafu s $4k+1$ vrhova ima neparno mnogo. □

Na kraju ovog poglavlja ćemo iskazati i dokazati jedan poznati i nadasve zanimljiv rezultat G. Ringela [20] i H. Sachsa [21] o strukturi antimorfizama.

Teorem 3.1. *Svaki ciklus antimorfizma σ ima duljinu djeljivu s 4, osim u slučaju fiksnog vrha kada je $n = 4k+1$.*

Dokaz. Ako je $(v_1, v_2, \dots, v_r)$ neki ciklus antimorfizma σ na grafu G, onda prema (1) imamo $r = 4s$ ili $r = 4s+1$. Neka je $(v_1, v_2, \dots, v_r)$ ciklus od σ pri čemu je $r = 4s+1$ za neki $s \geq 1$. Tada imamo

$$v_1 v_2 \in E(G) \;\Leftrightarrow\; v_2 v_3 \notin E(G) \;\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow\; v_{4s+1} v_1 \in E(G) \;\Leftrightarrow\; v_1 v_2 \notin E(G),$$

pa smo dobili kontradikciju s pretpostavkom da su v_1 i v_2 susjedni u G. Stoga svaki neparan ciklus mora biti fiksan vrh. Štoviše, antimorfizam ne može fiksirati neka dva različita vrha x i y jer bi onda vrijedilo

$$xy \in E(G) \;\Leftrightarrow\; \sigma(x)\sigma(y) \notin E(G) \;\Leftrightarrow\; xy \notin E(G).$$

Dakle, svi ciklusi moraju imati duljinu koja je višekratnik broja 4, osim eventualno ciklusa koji je fiksan vrh. Očito je da je ukupan broj vrhova paran ili neparan u ovisnosti o pojavljivanju tog jednog neparnog ciklusa pa slijedi tvrdnja. □

4 Konstrukcija samokomplementarnih grafova

Pri proučavanju samokomplementarnih grafova, posebno je važno ustanoviti koliko su brojni takvi grafovi, odnosno na koji način broj neizomorfnih samokomplementarnih grafova s n vrhova ovisi o n. U ovom ćemo poglavlju objasniti kako se konstruiraju neki samokomplementarni grafovi i reći nešto o tome koliko je neizomorfnih samokomplementarnih grafova s n vrhova za neke specijalne n.
R.C. Read [19] je davne 1963. godine proučavao problem prebrojavanja samokomplementarnih grafova s n vrhova, koristeći pritom rezultate N.G. de Brujina [9]. Tako je otkriveno da postoji točno 10 samokomplementarnih grafova s 8 vrhova. Premda je postupak za konstrukciju samokomplementarnih grafova dao R. Ringel [20] 1963. godine, samokomplementarni grafovi s 8 vrhova nisu se pojavili u literaturi sve do 1975. godine kada je Ronald Alter [7] predstavio svih 10 takvih grafova te je dokazao njihovu jedinstvenost.

4.1 Samokomplementarni grafovi s 8 vrhova

Neka je G samokomplementaran graf s 8 vrhova. Prema Propoziciji 3.1 on ima 14 bridova pa slijedi da je suma stupnjeva vrhova u G jednaka 28. Koristeći rezultate o nizovima stupnjeva samokomplementarnih grafova, zaključujemo da postoji jedino 6 različitih načina na koje možemo formirati niz stupnjeva vrhova u G. Sljedeća tablica prikazuje te slučajeve, pri čemu smo uzeli da je $V(G) = \{v_i : i = 1, \ldots, 8\}$:

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
1	1	1	1	6	6	6	6
1	1	2	2	5	5	6	6
1	1	3	3	4	4	6	6
2	2	2	2	5	5	5	5
2	2	3	3	4	4	5	5
3	3	3	3	4	4	4	4

Prva dva niza, (1, 1, 1, 1, 6, 6, 6, 6) i (1, 1, 2, 2, 5, 5, 6, 6), ne mogu biti nizovi stupnjeva nekog jednostavnog grafa. Evo zašto: ako bismo htjeli konstruirati graf s nizom stupnjeva (1, 1, 1, 1, 6, 6, 6, 6), onda bi vrh v_8 stupnja 6 spojili s npr. vrhovima v_i, $i = 2, \ldots, 7$. No, vrh v_7 je također stupnja 6 pa ga trebamo spojiti s 5 vrhova jer je već spojen bridom s v_8. Jedino ga možemo spojiti s vrhovima v_1, v_5 i v_6, jer su preostali vrhovi, ne računajući v_8, stupnja 1 i oni su već spojeni s v_8. Dakle, v_7 ne može biti stupnja 6 pa se takav graf ne može konstruirati. Na sličan način zaključujemo da ne postoji jednostavan graf s nizom stupnjeva (1, 1, 2, 2, 5, 5, 6, 6). Za preostale slučajeve je ustanovljeno sljedeće:

A : (1, 1, 3, 3, 4, 4, 6, 6) postoji samo jedan samokomplementaran graf

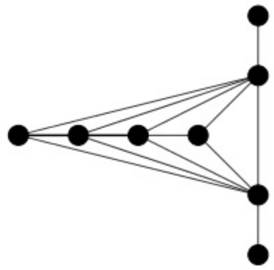
B : (2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5) postoje dva samokomplementarna grafa

C : (2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5) postoje tri samokomplementarna grafa

D : (3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4) postoje četiri samokomplementarna grafa

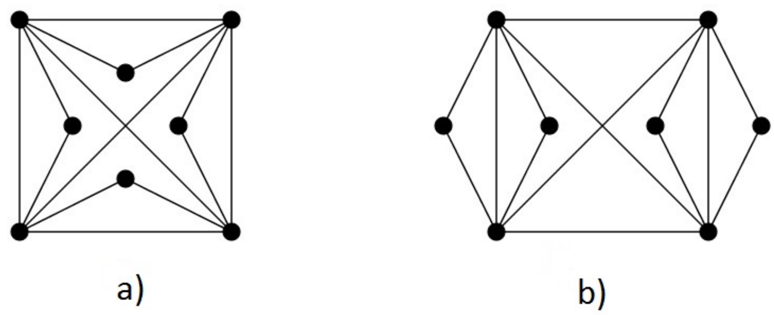
Da broj samokomplementarnih grafova s 8 vrhova nije otprije poznat, onda bi se svaki od ovih slučajeva morao posebno proučavati kako bi se pokazalo da ne postoji više od navedenog broja takvih grafova. Sada je dovoljno proučiti ovih deset grafova i pokazati da nikoja dva nisu međusobno izomorfna. U nastavku ćemo se baviti dokazom o neizomorfnosti, pri čemu ćemo svaki graf prikazati grafički i to tako da je najlakše uočiti njegova svojstva.

Promatrajući grafove na Slikama 2-5 lako je zaključiti da su oni samokomplementarni. Preostaje uočiti da među njima nikoja dva nisu izomorfna. Uočimo sljedeće:
graf na Slici 2 je jedinstven jednostavan graf s nizom stupnjeva (1, 1, 3, 3, 4, 4, 6, 6), a ujedno i samokomplementaran. Dokažimo neizomorfnost ostalih grafova koji imaju iste nizove stupnjeva.



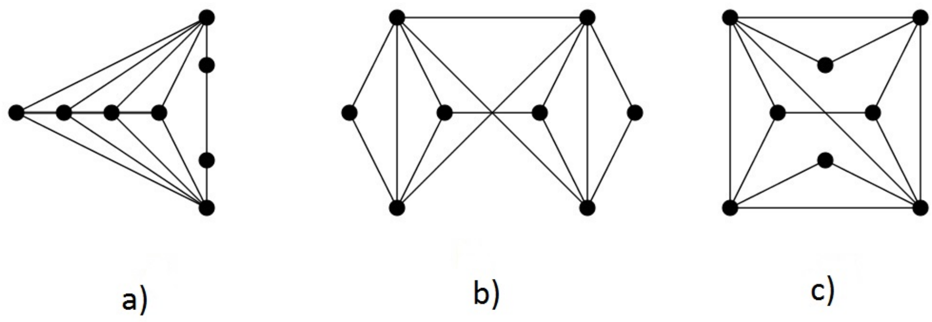
Slika 2: Slučaj A : (1, 1, 3, 3, 4, 4, 6, 6)

Promotrimo grafove iz slučaja B prikazane na Slici 3. Graf na Slici 3 a) je Hamiltonov, dok graf na Slici 3 b) nije Hamiltonov pa ti grafovi ne mogu biti izomorfni.



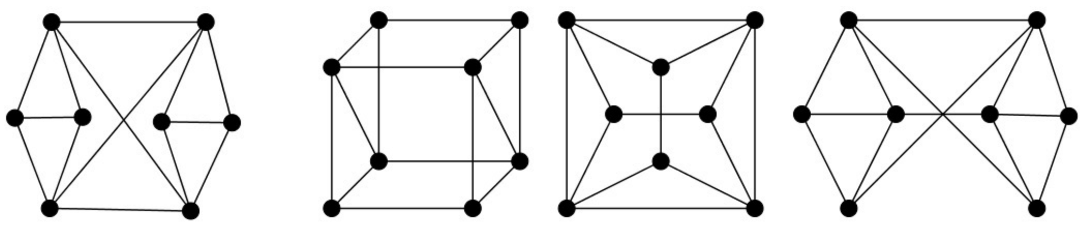
Slika 3: Slučaj B : (2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5)

Slučaj C prikazan je na Slici 4. U grafu na Slici 4 a) dva vrha stupnja 5 nisu susjedna, dok su u grafovima na Slici 4 b), odnosno na Slici 4 c) vrhovi stupnja 5 susjedni pa stoga graf 4 a) nije izomorfan s tim grafovima. Preostaje još pokazati kako grafovi 4 b) i 4 c) nisu međusobno izomorfni. U grafu 4 b) su vrhovi stupnja 4 spojeni s vrhom stupnja 2 i vrhom stupnja 3 pri čemu su ti vrhovi spojeni s istim vrhom stupnja 5 kao vrh stupnja 4. Uočimo kako graf 4 c) nema to svojstvo pa zaključujemo da ova dva grafa nisu izomorfna.



Slika 4: Slučaj C : (2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5)

Promotrimo grafove iz posljednjeg slučaja. U grafu 5 a) svaki vrh stupnja 4 je susjedan s dva susjedna vrha stupnja 3. U grafovima 5 b) i c) svaki vrh stupnja 4 je susjedan s dva nesusjedna vrha stupnja 3. U grafu 5 d) dva vrha stupnja 4 su susjedna s dva susjedna vrha stupnja 3, dok preostala dva vrha stupnja 4 su susjedna s dva nesusjedna vrha stupnja 3. Sada još primijetimo kako su u grafu 5 b) po dva susjedna vrha stupnja 4 susjedna s ista dva vrha stupnja 3, dok graf 5 c) nema to svojstvo pa ova dva grafa nisu izomorfna. Time smo pokazali kako nikoja dva grafa među njih 10 koje smo naveli nisu međusobno izomorfni.



Slika 5: Slučaj D : (3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4)

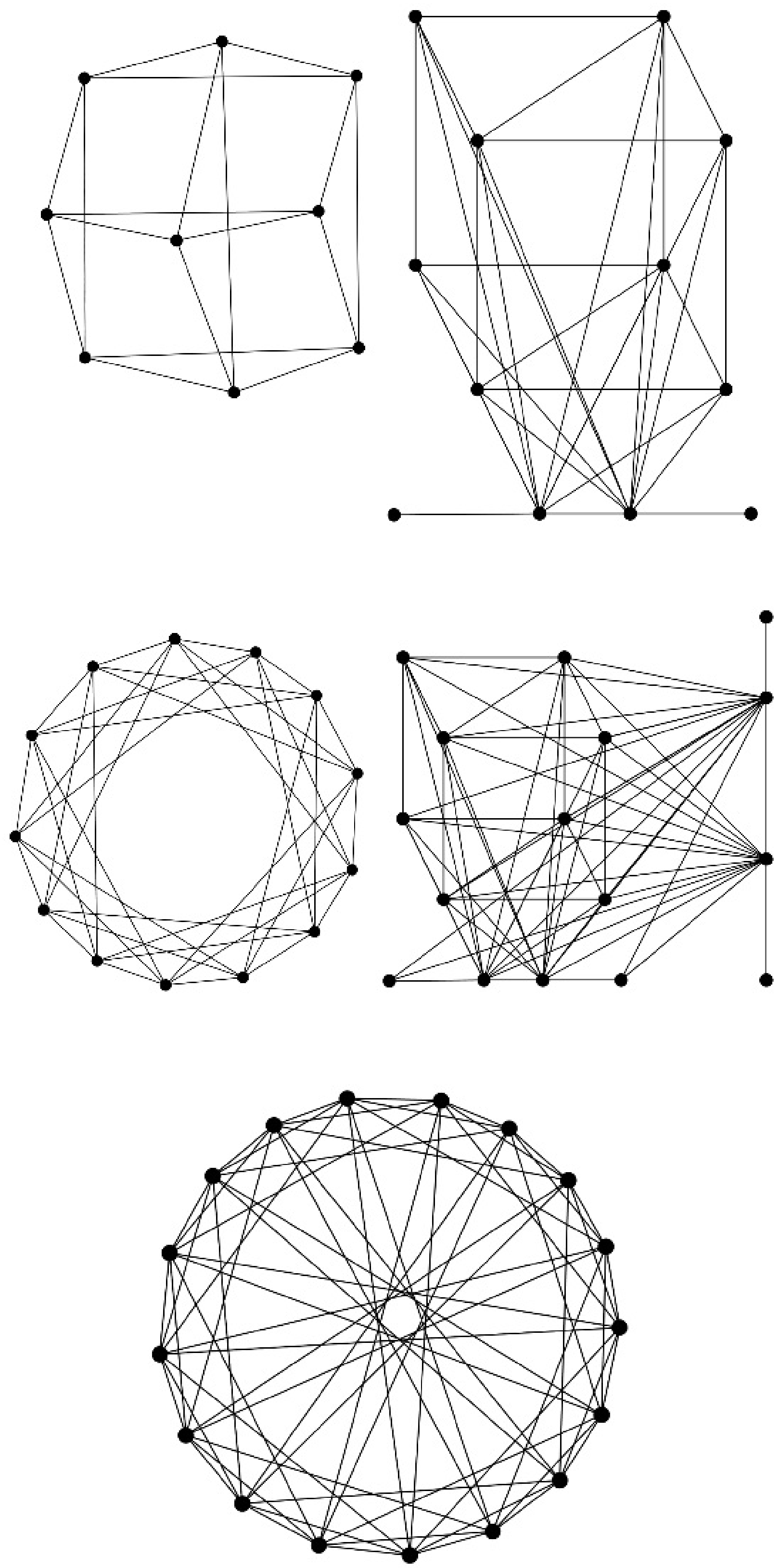
4.2 Samokomplementarni grafovi s $9 \leq n \leq 17$ vrhova

Proces konstrukcije i kategorizacije samokomplementarnih grafova tekao je vrlo sporo. Kao što smo već napomenuli, Read [19] je 1963. godine izveo fromulu za prebrojavanje samokomplementarnih grafova, no, mi ju ovdje nećemo navoditi jer je dosta komplicirana kao i njen dokaz.

Nakon nekoliko godina, točnije 1970., u svom radu [16] E. M. Palmer daje asimptotske formule za broj samokomplementarnih grafova s $n = 4k$ i $n = 4k + 1$ vrhova. Njegove formule nisu jednostavne, ali daju bolji uvid u ponašanje broja samokomplementarnih grafova kao funkcije broja vrhova, iz čega proizlazi ključan rezultat o njihovoj brojnosti: među svim neizomorfnim jednostavnim grafovima s $n = 4k$ ($n = 4k + 1$) vrhova, samokomplementarni grafovi s $n = 4k$ ($n = 4k+1$) vrhova su relativno rijetki. To znači da njihov broj u odnosu na ukupan broj neizomorfnih jednostavnih grafova s istim brojem vrhova n konvergira prema nuli kada n teži u beskonačnost. Isti zaključak vrijedi i kada dodatno fiksiramo broj bridova u grafu. Ipak, pojam 'relativno rijetki' treba shvatiti s oprezom. Naime, već iz sljedeće tablice je vidljiv porast broja samokomplementarnih grafova u odnosu na broj vrhova pa tako već za $n = 17$ imamo više od milijun neizomorfnih samokomplementarnih grafova!

Broj vrhova	4	5	8	9	12	13	16	17
Broj samokomplementarnih grafova	1	2	10	36	720	5600	703760	1122000

Obzirom da smo samokomplementarne grafove s manje od 9 vrhova već prikazali i analizirali, sada ćemo prikazati samokomplementarne grafove s $n = 9, 12, 13, 16$ i 17 vrhova, po jedan primjer za svaki navedeni n:



Slika 6: Neki samokomplementarni grafovi s 9, 12, 13, 16 i 17 vrhova

4.3 Konstrukcije nekih specijalnih klasa samokomplementarnih grafova

U ovom ćemo pododjeljku predstaviti tri jednostavne metode za konstrukciju samokomplementarnih grafova. Prve dvije će ilustrirati kako od samokomplementarnog grafa s n vrhova možemo izgraditi samokomplementaran graf s $n+4$ vrhova, dok će treća metoda graditi samokomplementarne grafove s $n = 4k$, odnosno $n = 4k+1$ vrhova od dvije kopije proizvoljnog grafa H s k vrhova i dvije kopije komplementa H^c.

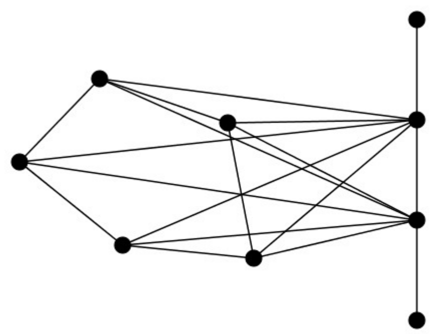
4.3.1 Konstrukcija 1

Postupak je sljedeći:

- Uzmimo proizvoljan samokomplementaran graf H s n vrhova i put $P_4 = v_1v_2v_3v_4$.

- Vrhove puta P_4 koji su stupnja 2 spojimo sa svakim od n vrhova grafa H.

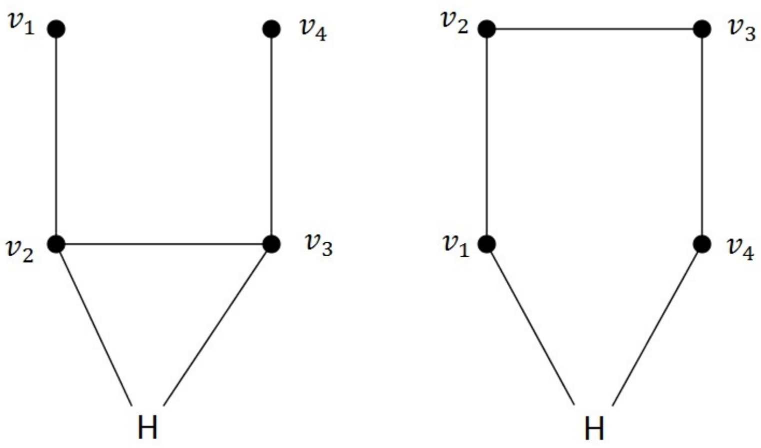
Označimo samokomplementaran graf dobiven ovim postupkom s $(H, P_4)_1$. Na sljedećoj slici je prikazan samokomplementaran graf $(C_5, P_4)_1$:



Slika 7: Samokomplementaran graf s 9 vrhova nastao od ciklusa C_5 i puta P_4

Primijetimo da je i graf na Slici 2 dobiven na ovaj način. Tu smo krenuli od samokomplementarnog grafa P_4 pa mu spojili sve vrhove s vrhovima stupnja dva u novom P_4 i tako dobili samokomplementaran graf s 8 vrhova. Na Slici 8 lijevo prikazan je opći oblik grafa $(H, P_4)_1$.
Pri komplementiranju grafa $(H, P_4)_1$ dobit ćemo graf u kojem će na mjestu grafa H biti H^c, vrh v_2 bit će spojen samo s v_4, vrh v_3 samo s v_1, v_1 i v_4 će biti spojeni bridom, a svaki od njih će biti spojen i sa svim vrhovima grafa H^c. Dobiveni graf je samokomplementaran!

Ako krenemo npr. od $G_0 = P_4$ i formiramo $G_1 = (G_0, P_4)_1$ pa nastavimo formirati grafove G_i po pravilu $G_i = (G_{i-1}, P_4)_1$, onda možemo generirati beskonačnu familiju samokomplementarnih grafova s $n \equiv 0(mod\, 4)$ vrhova koji sadrže točno dva vrha stupnja jedan. Slično, ako krenemo npr. od C_5, možemo generirati beskonačnu familiju samokomplementarnih grafova s $n \equiv 1(mod\, 4)$ vrhova koji također sadrže točno dva vrha stupnja jedan.



Slika 8: $(H, P_4)_1$ i $(H, P_4)_2$

4.3.2 Konstrukcija 2

Postupak je sljedeći:

- Uzmimo proizvoljan samokomplementaran graf H s n vrhova i put $P_4 = v_1v_2v_3v_4$.

- Vrhove puta P_4 koji su stupnja 1 spojimo sa svakim od n vrhova grafa H.

Označimo samokomplementaran graf dobiven ovim postupkom s $(H, P_4)_2$. Na Slici 8 desno prikazan je opći oblik grafa $(H, P_4)_2$ pri čemu smo s v_1 i v_4 označili vrhove puta P_4 koji su stupnja jedan. Primijetimo da je graf na Slici 4 dobiven upravo na ovaj način. Krenuli smo od samokomplementarnog grafa P_4 pa mu spojili sve vrhove s vrhovima stupnja jedan u novo dodanom grafu P_4 i tako dobili samokomplementaran graf s 8 vrhova, odnosno dobili smo graf $(P_4, P_4)_2$.

Pri komplementiranju grafa $(H, P_4)_2$ dobit ćemo graf u kojem će na mjestu grafa H biti H^c, vrh v_1 bit će spojen jedino s v_3 i v_4, vrh v_4 jedino s v_2 i v_1, v_2 i v_3 neće biti susjedi, a bit će još spojeni sa svim vrhovima iz H^c. Dobiveni graf je samokomplementaran!
I pomoću ove konstrukcije možemo generirati beskonačne familije samokomplementarnih grafova s $n \equiv 0, 1 (mod\, 4)$ vrhova i to sa svojstvom da ne sadrže vrhove stupnja jedan!

4.3.3 Konstrukcija 3

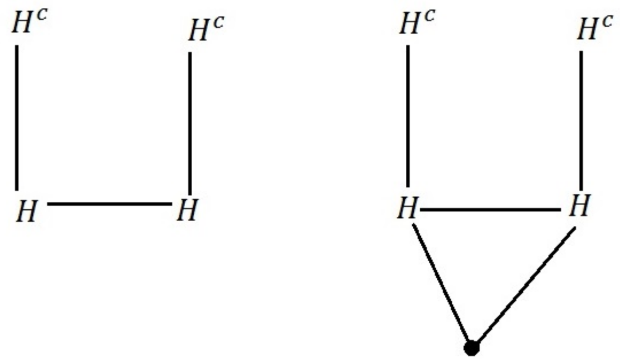
Sada ćemo opisati metode konstrukcije samokomplementarnih grafova s $n = 4k$ $(n = 4k+1)$ vrhova koje koriste proizvoljan jednostavan graf i njegov komplement. Postupak je sljedeći:

- Uzmimo put P_4 i proizvoljan jednostavan graf H s $k \geq 1$ vrhova.

- Zamijenimo vrhove stupnja dva u P_4 s kopijama grafa H, a vrhove stupnja jedan u P_4 zamijenimo s kopijama grafa H^c.

- Ako su dva vrha x i y u P_4 bila spojena bridom, nakon zamjene, svi vrhovi grafa koji zamjenjuje x bit će spojeni bridom sa svim vrhovima grafa koji zamjenjuje y.

Označimo samokomplementaran graf dobiven ovim postupkom s $(H, H^c, P_4)_1$ (Slika 9 lijevo). Jasno je da ovaj graf ima $4k$ vrhova, a za $k \neq 1$ u njemu ne postoje vrhovi stupnja jedan. (Za $k = 1$ imamo P_4.)



Slika 9: Konstrukcija 3

Ukoliko ovakvom konstrukcijom želimo dobiti samokomplementaran graf s $n = 4k+1$ vrhova, onda prethodno opisanom postupku trebamo dodati još jedan korak, a taj je:

- Dodamo novi vrh i spojimo ga sa svim vrhovima u obje kopije grafa H.

Ovakav samokomplementaran graf označit ćemo s $(H, H^c, P_4)_2$ (Slika 9 desno). Jasno je da ovaj graf ima $4k + 1$ vrhova, nema vrhova stupnja jedan, osim u slučaju $k = 1$ kada je dobiveni graf A-graf.

5 Udaljenosti i povezanost u samokomplementarnim grafovima

Ovaj odjeljak posvećen je jednostavnim, ali vrlo bitnim tvrdnjama o udaljenosti i povezanosti vrhova u samokomplementarnom grafu. Neki od pojmova, koji su potrebni za razumijevanje iskaza i dokaza narednih tvrdnji, već su definirani na početku rada, a sada ćemo definirati pojam dominantnog brida. On ne pripada osnovnim pojmovima iz teorije grafova, ali je sastavni dio nekih tvrdnji u ovom odjeljku.

Definicija 5.1. *Brid vw grafa G je dominantan brid grafa G ako su svi vrhovi grafa G susjedni ili s v ili s w ili s oba vrha.*

5.1 O udaljenostima

Za iskaz i dokaz glavnog rezultata o udaljenostima vrhova u samokomplementarnom grafu trebat će nam neki pomoćni rezultati koji se odnose na proizvoljne jednostavne grafove.

Lema 5.1. *Ekscentricitet vrha v u grafu G je najmanje 3 ako i samo ako v u G^c leži na dominantnom bridu i ekscentricitet mu je najviše 2.*

Dokaz. Iz definicije ekscentriciteta e vrha v slijedi da ako je $e(v) \geq 3$ u G, onda postoji neki vrh w u G takav da je $d_G(v, w) \geq 3$. Budući da vrhovi v i w nisu susjedni u G i ne postoji vrh koji je susjedan obojici (jer bi u suprotnom udaljenost vrhova v i w bila manja od 3), to u G^c vrhovi v i w jesu susjedni, a svaki vrh koji je bio susjed s v u G, u komplementu će biti susjed s w, odnosno svaki susjed od w u G će u komplementu G^c biti susjed s v. Ostali vrhovi koji u G nisu susjedni ni s v ni s w, bit će spojeni bridom s oba vrha. Prema tome, vw je dominantan brid u G^c i v ima ekscentricitet najviše 2.
Obratno, neka v leži na dominatnom bridu e u G^c i neka je drugi kraj od e vrh w. Tada su svi vrhovi u G^c susjedi ili s v ili s w ili s oba vrha. Jer je ekscentricitet vrha v najviše dva, jasno je da je svaki vrh u G^c ili susjed s v ili je od njega udaljen za 2 brida, tj. s njim ima najmanje jednog zajedničkog susjeda.
Ako je $e(v) = 1$ u G^c, to znači da su mu svi vrhovi susjedni pa će mu ekscentricitet u G biti beskonačan. Ako postoji vrh koji je od v udaljen za 2, onda on mora biti susjed s w jer je $e = vw$ dominantan brid. Ako su svi vrhovi osim w na udaljenosti dva od v u G^c, onda je w izolirani vrh u G pa je ekscentricitet od v u G beskonačan. Slično zaključujemo i u slučaju kada su svi vrhovi zajednički susjedi od v i w. Pretpostavimo stoga da postoje različiti vrhovi x i y takvi da je x susjed od v, $x \neq w$ i y susjed od w, $y \neq v$. Ako x i y nisu spojeni bridom u G^c, onda će u G biti susjedi te će x biti susjed od w, y susjed od v, a kako v i w neće biti susjedni, imat ćemo $d(v, w) \geq 3$. Ako su x i y susjedi u G^c, onda oni nisu susjedi u G, ali je x susjed s w i y je susjed s v. Ovdje je moguće da ne postoji put od v do w pa je $e(v) = \infty$ ili pak postoji neki vrh z koji je susjed od w, gdje $z \neq y$, tako da postoji put $vyzxw$ u G pa je opet ispunjen uvjet $d(v, w) \geq 3$. Zaključujemo da je ekscentricitet u G najmanje 3. □

Korolar 5.0.1. *Za svaki graf G vrijede sljedeće tvrdnje:*

a) Ako je $rad(G) \geq 3$, onda je $rad(G^c) \leq 2$.

b) $Diam(G) \geq 3$ ako i samo ako G^c ima dominantan brid.

c) Ako je $diam(G) \geq 3$, onda je $diam(G^c) \leq 3$.

d) Ako je $diam(G) \geq 4$, onda je $diam(G^c) \leq 2$.

Dokaz.
a) Ako je $rad(G) \geq 3$, onda svaki vrh ima ekscentricitet najmanje 3 pa prema Lemi 5.1 vrijedi da svaki vrh u G^c ima ekscentricitet najviše 2.
b) Za neki graf G vrijedi $diam(G) \geq 3$ ako i samo ako postoji vrh v u G ekscentriciteta najmanje 3, a prema Lemi 5.1 ta tvrdnja je ekvivalentna tvrdnji da G^c sadrži dominantan brid.
c) Kao i u b): za neki graf G vrijedi $diam(G) \geq 3$ ako i samo ako postoji vrh v u G ekscentriciteta najmanje 3. Prema Lemi 5.1, to je ekvivalentno tvrdnji da u G^c vrh v leži na dominantnom bridu. Sada treba zaključiti da dijametar grafa koji sadrži dominantni brid ne može biti veći od 3. No, to se lako ustanovi obzirom na definiciju dominantnog brida. Dakle, ako postoje nesusjedni vrhovi x i y, pri čemu $x \neq y$, takvi da je x susjed samo jednom kraju dominantnog brida, a y je susjed samo drugom kraju, onda je dijametar takvog grafa jednak 3. Ako takvi vrhovi ne postoje, dijametar će biti manji od 3.
d) Ako $diam(G) \geq 4$, onda postoji vrh v čiji je ekscentricitet najmanje 4. Neka je T_i skup svih vrhova u G čija je udaljenost od v jednaka i, $i = 1, 2, 3$ i stavimo da je $T_{\geq 4}$ skup svih vrhova u G čija je udaljenost od v najmanje 4. Jasno je da nema bridova između skupova T_1 i T_3, odnosno T_2 i $T_{\geq 4}$ te T_1 i $T_{\geq 4}$. Također, vrh v nije susjed niti jednom od skupova T_i, $i = 2, 3$ i $T_{\geq 4}$. U G^c vrijedi sljedeće: vrh v je spojen bridom sa svakim vrhom iz skupova T_2, T_3 i $T_{\geq 4}$. Svaki vrh iz T_1 spojen je bridom sa svakim vrhom iz T_3 i iz $T_{\geq 4}$. Stoga od vrha v do svih vrhova iz T_1 možemo doći putem duljine 2 i to preko vrhova iz npr. skupa T_3. Stoga je ekscentricitet vrha v jednak 2. Svi vrhovi skupa T_1 će biti povezani s T_2 preko vrhova iz $T_{\geq 4}$ pa će njihovi ekscentriciteti biti najviše 2. Svi vrhovi iz T_2 će preko v biti povezani sa skupom T_3, a preko $T_{\geq 4}$ s T_1 pa im je ekscentricitet najviše 2. Slično zaključujemo za vrhove skupova T_3 i $T_{\geq 4}$. Unutar svakog skupa T_i će vrijediti sljedeće: ako neki vrhovi nisu susjedi u G, bit će u G^c, a ako jesu susjedi u G, onda će u G^c biti spojeni putem duljine 2 preko određenih vrhova iz nekih od preostalih skupova. Sva ova razmatranja vode do zaključka da je $diam(G^c) \leq 2$. □

Sada je sve spremno za iskaz i dokaz glavne tvrdnje:

Teorem 5.1. *Neka je G netrivijalan samokomplementaran graf. Tada vrijedi:*

a) Radijus od G je 2, a dijametar od G je 2 ili 3.

b) Dijametar od G je 3 ako i samo ako G sadrži dominantan brid.

c) Broj vrhova ekscentriciteta 3 nikad nije veći od broja vrhova ekscentriciteta 2.

Dokaz.
a) Najprije treba uočiti da samokomplementaran graf G s n vrhova ne sadrži vrh ekscentriciteta 1, odnosno ne postoji vrh stupnja $n-1$. U suprotnom bi komplement grafa G bio nepovezan graf jer bi sadržavao izolirani vrh, a prema Propoziciji 3.2 svaki samokomplementaran graf je povezan pa zbog $G \cong G^c$, to nije moguće. Stoga i radijus i dijametar grafa G moraju biti najmanje 2. Kada bi radijus od G^c bio veći od 2, onda bi prema Korolaru 5.0.1a vrijedilo $rad(G) < 3$, a to ne može biti. Stoga $rad(G) = 2$.
Ako je dijametar od G^c veći od 2, onda prema Korolaru 5.0.1d vrijedi $diam(G) < 4$ pa

zaključujemo da jedino može vrijediti $diam(G) = 3$. Inače je dijametar jednak 2.
b) Tvrdnja vrijedi prema Korolaru 5.0.1b i obzirom na zaključke dobivene u a).
c) Prema a) i b) je jasno da su vrhovi samokomplementarnog grafa ekscentriciteta 2 ili 3. Ako je t vrhova u G ekscentriciteta 3, svi oni će u G^c biti vrhovi ekscentriciteta 2 pa je tvrdnja dokazana. □

Ove jednostavne, ali svakako jake tvrdnje mogle bi ukazati na to da je samokomplementarne grafove teško pronaći, pa čak i da ih ima samo konačan broj. No, već smo se u odjeljku vezanom za konstrukcije samokomplementarnih grafova uvjerili da je to daleko od istine.

5.2 O povezanosti

Kao što smo već pokazali, svi samokomplementarni grafovi su povezani. Sada ćemo vidjeti koliko jako su oni povezani. S $v_1(G)$ ćemo označiti broj vrhova stupnja jedan u G. Sljedeća lema daje nužne i dovoljne uvjete da vršna povezanost nekog samokomplementarnog grafa bude jednaka jedan:

Lema 5.2. *Samokomplementaran graf G sadrži rezne vrhove ako i samo ako sadrži vrhove stupnja jedan.*

Dokaz. Svaki samokomplementaran graf koji sadrži vrhove stupnja jedan mora sadržavati i rezne vrhove, a oni su upravo susjedi tog vrha stupnja jedan. Dokažimo da vrijedi i obrat ove tvrdnje.
Neka je G samokomplementaran graf koji sadrži rezni vrh v, a ne sadrži vrhove stupnja jedan. Tada $G - v$ ima barem dvije komponente povezanosti. Neka je jedna od tih komponenata A i neka je $G - v = A \cup B$. Tada $(G - v)^c$ sadrži razapinjujući bipartitan podgraf s particijama A i B. Kako G nema vrhova stupnja jedan, oba skupa A i B sadrže po najmanje 2 vrha, a vrh v mora imati stupanj najmanje 2 u G, a zbog samokomplementarnosti i u G^c. No, tada je G^c 2-povezan graf, što je u kontradikciji s pretpostavkom da G sadrži rezni vrh. Zaključujemo da svaki samokomplementaran graf koji sadrži rezni vrh, mora sadržavati i vrhove stupnja jedan. □

Sada ćemo obratiti pažnju na odnos broja vrhova stupnja jedan u grafu G i njegovom komplementu G^c.

Lema 5.3. *Ako graf G sadrži najmanje dva vrha stupnja jedan, onda graf G^c sadrži najviše dva vrha stupnja jedan.*

Dokaz. Neka su v i w vrhovi stupnja jedan u grafu G i neka su susjedni vrhovima x i y (slučaj $x = y$ nije isključen). Tada su jedini kandidati za vrhove stupnja jedan u G^c upravo vrhovi x i y jer su ostali vrhovi stupnja najviše $n - 3$ u G. □

Slijedi teorem koji karakterizira sve grafove G sa svojstvom da i G i G^c imaju točno dva vrha stupnja jedan.

Teorem 5.2. *U grafu G s $n \geq 4$ vrhova vrijedi $v_1(G) = v_1(G^c) = 2$ ako i samo ako vrijedi $G = (H, P_4)_1$, gdje je H graf s $n - 4$ vrhova.*

Dokaz. Odmah je jasno da u grafu $G = (H, P_4)_1$ vrijedi $v_1(G) = v_1(G^c) = 2$.
Obratno, neka za neki graf G vrijedi $v_1(G) = v_1(G^c) = 2$. Neka su v_1 i v_4 vrhovi stupnja jedan u grafu G i neka su susjedni redom s v_2 i v_3. Kao u dokazu Leme 5.3, vrhovi v_2 i v_3 su jedini mogući vrhovi stupnja jedan u G^c pa oni moraju biti različiti vrhovi i to stupnja $n-2$ u G. Tada, ako definiramo graf H s $H = G - \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, onda je $G = (H, P_4)_1$. □

Navedimo glavni rezultat ovog pododjeljka:

Teorem 5.3. *Za samokomplementaran graf G s n vrhova sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) G ima rezne vrhove,

b) G ima vrhove stupnja jedan,

c) $G = (H, P_4)_1$, gdje je H samokomplementaran graf s $n-4$ vrhova pa G ima točno dva rezna vrha, točno dva vrha stupnja jedan i dijametar mu je jednak 3.

Dokaz. a) $\Leftrightarrow$ b) je dokazano u Lemi 5.2 a odmah je jasno i c) $\Rightarrow$ a) i c) $\Rightarrow$ b).
Ostaje pokazati da b) $\Rightarrow$ c). Neka samokomplementaran graf G sadrži vrhove stupnja jedan. Tada prema Lemi 3.2 znamo da tih vrhova mora biti paran broj, pa onda u G svakako imamo najmanje dva takva vrha. Iz Leme 5.3 slijedi da G ne može imati više od dva vrha stupnja jedan. Zaključujemo da G ima točno dva vrha stupnja jedan. Sada tvrdnja c) slijedi direktnom primjenom Teorema 5.2. □

Iz svih do sada navedenih rezultata o svojstvima samokomplementarnih grafova, možemo izvesti neke zaključke o particiji skupa svih samokomplementarnih grafova s istim brojem vrhova. S G_n^c ćemo označiti broj svih neizomorfnih samokomplementarnih grafova s n vrhova, s $(G_n^c)^{1,1}$ broj svih neizomorfnih samokomplementarnih grafova s n vrhova koji sadrže vrhove stupnja jedan, a s $(G_n^c)^2$ broj svih neizomorfnih samokomplementarnih grafova s n vrhova koji ne sadrže vrhove stupnja jedan. Iz Teorema 5.3 i činjenice da je pridruživanje $H \to (H, P_4)_1$ bijekcija, dobivamo sljedeće rezultate:

Korolar 5.3.1. *Za sve dopustive prirodne brojeve $n \geq 4$ vrijedi:*

$$G_n^c = (G_n^c)^{1,1} + (G_n^c)^2.$$

□

Dakle, skup svih samokomplementarnih grafova s n vrhova možemo particionirati u dva skupa: jedan skup čine svi oni grafovi koji sadrže vrhove stupnja jedan, a drugi skup čine svi grafovi koji nemaju takvih vrhova.

Nadalje, zbog Teorema 5.3 imamo $(G_n^c)^{1,1} = G_{n-4}^c$ iz čega proizlazi

$$(G_n^c)^2 = G_n^c - G_{n-4}^c.$$

Ako se osvrnemo na odjeljak o konstrukcijama nekih klasa samokomplementarnih grafova, onda možemo zaključiti sljedeće: svi samokomplementarni grafovi koji sadrže vrhove stupnja jedan nužno su tipa $(H, P_4)_1$ i imaju dijametar 3, ali to nisu jedini grafovi dijametra 3. Drugu klasu samokomplementarnih grafova dijametra 3 čine grafovi tipa $(H, H^c, P_4)_1$ i $(H, H^c, P_4)_2$. Tako znamo da samokomplementarni grafovi dijametra 3 postoje za sve izvodive n.
Svi grafovi tipa $(H, P_4)_2$ su dijametra 2 pa znamo i da samokomplementarni grafovi dijametra 2 postoje za sve izvodive n.

Ove ćemo rezultate formalno iznijeti u sljedećem teoremu. Dijelove od a) i b) je prvi dokazao Ringel.([20])

Teorem 5.4.

a) Samokomplementaran graf dijametra 2 *s* n *vrhova postoji za sve* $n \equiv 0$ *ili 1(mod 4),* $n \geq 5$*. Svaki samokomplementaran graf s* n *vrhova je inducirani podgraf Hamiltonovog samokomplementarnog grafa dijametra* 2 *s* $n+4$ *vrhova.*

b) Samokomplementaran graf dijametra 3 *s vrhovima stupnja jedan postoji za sve* $n \equiv 0$ *ili 1(mod 4),* $n \geq 4$*. Svaki samokomplementaran graf s* n *vrhova je inducirani podgraf samokomplementarnog grafa dijametra* 3 *s* $n+4$ *vrhova i s vrhovima stupnja jedan.*

c) Samokomplementaran graf dijametra 3 *bez vrhova stupnja jedan postoji za sve* $n \equiv 0$ *ili 1(mod 4),* $n \geq 8$*.*

Označimo s $\delta(G)$ minimalan stupanj grafa G. Whitneyev teorem o vezi između minimalnog stupnja te vršne i bridne povezanosti glasi:

Teorem 5.5. *(Whitney [11]) Za graf G vrijedi:*

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G).$$

□

Ako u Konstrukciji 3 za H uzmemo potpun graf K_k, dobit ćemo samokomplementaran graf G s $\delta(G) = 2k-1$ i $\kappa(G) \leq k$, pa prva nejednakost u Whitneyevom teoremu može biti stroga čak i za samokomplementarne grafove. No, u slučaju druge nejednakosti, Rao [18] je pretpostavio, a N. Vijayaditya dokazao sljedeći rezultat:

Teorem 5.6. *Ako je* G *samokomplementaran graf, onda je* $\kappa'(G) = \delta(G)$*.*

□

Ovo je još jedno zanimljivo svojstvo samokomplementarnih grafova: znamo da ćemo ga rastaviti na dvije komponente povezanosti ako uklonimo točno $\delta(G)$ bridova!

Na kraju ovog pododjeljka još ćemo se malo baviti s dijametrom, ali i radijusom samokomplementarnih grafova. Ukoliko su radijus i dijametar nekog grafa G jednaki, to znači da je svaki vrh u G i centralni i periferni, a za takav graf kažemo da je *samocentralan graf.*

Antipodalan (centrirani) graf grafa G, $A(G)$ ($C(G)$), je graf s istim skupom vhova kao i G, a dva vrha su susjedna u $A(G)$ ($C(G)$) ako i samo ako je njihova udaljenost u G jednaka dijametru (radijusu) grafa G.
Neka je G samokomplementaran graf. Ako je G dijametra 2, tada vrijedi

$$A(G) = C(G) = G^c \cong G,$$

pa kažemo da je G *samoantipodalan* i *samocentriran.*
Ako je G dijametra 3, tada on ne može biti samoantipodalan ili samocentriran jer su u tom slučaju i $A(G)$ i $C(G)$ pravi razapinjujući podgrafovi od G^c pa $A(G) \neq G^c$ i $C(G) \neq G^c$. Dakle, samokomplementaran graf je samoantipodalan ako i samo ako je samocentriran ako i samo ako je samocentralan.
Za graf kažemo da je antipodalan ako je antipodalan graf $A(H)$ nekog grafa H. Poznato je [8] da je graf antipodalan ako i samo ako je antipodalan graf svog komplementa. Stoga, samokomplementaran graf je antipodalan ako i samo ako je samoantipodalan.

Hendry [13] je pokazao da je za samokomplementarne grafove dijametra 3 graf $A(G)$ bipartitan, dok su Acharya i Acharya [1] pokazali da je bipartitan graf samoantipodalan ako i samo ako je bipartitan samokomplementaran graf dijametra 3.
Također, Nair [14] je pokazao (dodavajući ili brišući izolirane vrhove) da je svaki graf antipodalan nekog (Hamiltonovom) grafa dijametra 2. Rao [17] je pokazao da je svaki graf G centralan graf od:

a) Hamiltonovog

b) Eulerovog[1]

c) k-povezanog

d) k-kromatskog (gdje je $k = \chi(G)$) i

e) totalnog grafa.[2]

[1]Za graf G kažemo da je Eulerov ako sadrži zatvorenu Eulerovu stazu, tj. stazu koja prolazi svakim bridom od G.

[2]Totalni graf $T(G)$ grafa G je graf sa skupom vrhova koji odgovara vrhovima i bridovima od G, a dva vrha su susjedna u T ako i samo ako su odgovarajući vrhovi i bridovi u G susjedni, odnosno incidentni.

6 Planarnost samokomplementarnih grafova

U uvodnom dijelu rada definirali smo planarne grafove kao grafove koji se mogu smjestiti u ravninu tako da im se bridovi sijeku samo u vrhovima te smo definirali genus grafa kao najmanji pozitivan cijeli broj n takav da je graf smjestiv na sferu s n ručki, na način da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima. Sada ćemo vidjeti što znamo o planarnosti u samokomplementarnim grafovima.
Prvih nekoliko samokomplementarnih grafova prikazanih na Slici 1 jesu planarni, ali oni su češće iznimka nego pravilo. Samokomplementarni grafovi općenito imaju previše bridova da bi bili planarni, a isto vrijedi i ako ih želimo smjestiti na druge plohe. Ovaj odjeljak će biti vrlo kratak, iskazat ćemo i dokazati propoziciju koja se bavi prebrojavanjem samokomplementarnih grafova danog genusa ili debljine. Navedimo definiciju debljine nekog grafa.

Definicija 6.1. *Debljina grafa G, u oznaci $t(G)$, je najmanji broj planarnih grafova na koje se mogu particionirati bridovi grafa G, tj. najmanji broj planarnih podgrafova grafa G koji nemaju zajedničkih bridova, a čija unija daje graf G.*

Propozicija 6.1. *Za bilo koji nenegativan cijeli broj c, postoji konačan broj samokomplementarnih grafova s genusom $g(G) \leq c$ ili debljine $t(G) \leq c$. Posebno, svaki samokomplementaran graf s najmanje 9 vrhova nije planaran.*

Dokaz. Prema Ringel-Youngovim i Eulerovim formulama ([22],[2],[3]) granice za genus grafa G s $n \geq 4$ vrhova su sljedeće:

$$\left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil \geq g(G) \geq \left\lceil \frac{|E(G)| - 3n + 6}{6} \right\rceil,$$

dok je donja granica za debljinu grafa dana s

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{|E(G)|}{3(n-2)} \right\rceil.$$

Za samokomplementarne grafove dobivamo:

$$\left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil \geq g(G) \geq \left\lceil \frac{n^2 - 13n + 24}{24} \right\rceil$$

i

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{n(n-1)}{12(n-2)} \right\rceil.$$

Obje nejednakosti nam govore da G svakako nije planaran za $n^2 - 13n + 24 \geq 0$,tj. za $n \geq 11$. Bolja donja granica, $n \geq 9$, dobivena je u [14]. □

7 Kromatski broj samokomplementarnih grafova

Pravilno k-bojenje vrhova nekog grafa te kromatski broj grafa definirali smo u uvodnom dijelu rada.
U jednom od najkraćih i najpoznatijih znanstvenih radova iz teorije grafova, Nordhaus i Gaddum [15] dokazali su sljedeće granice za kromatski broj grafa i pokazali da ih postiže beskonačno mnogo grafova:

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{\chi(G)\chi(G^c)} \leq \frac{\chi(G)+\chi(G^c)}{2} \leq \frac{n+1}{2}.$$

Kako je graf G r-partitan ako i samo ako je $\chi(G) = r$, dobivamo sljedeći teorem:

Teorem 7.1. *Neka je G samokomplementaran graf. Tada vrijedi:*

$$\sqrt{n} \leq \chi(G) \leq \frac{n+1}{2}.$$

Posebno, za svaki prirodan broj r, postoji konačan broj samokomplementarnih grafova koji su r-partitni.

□

Teorem 7.2. *(Chao i Whitehead 1979.)*

a) Za svaki m postoji samokomplementaran graf s $\chi(G) = m$ koji postiže donju granicu u Teoremu 7.1.

b) Za svaki $m \geq 2$ postoji samokomplementaran graf dijametra 3 s $\chi(G) = m$ koji postiže gornju granicu u Teoremu 7.1.

c) Za svaki $m \geq 3$ postoji samokomplementaran graf dijametra 2 s $\chi(G) = m$.

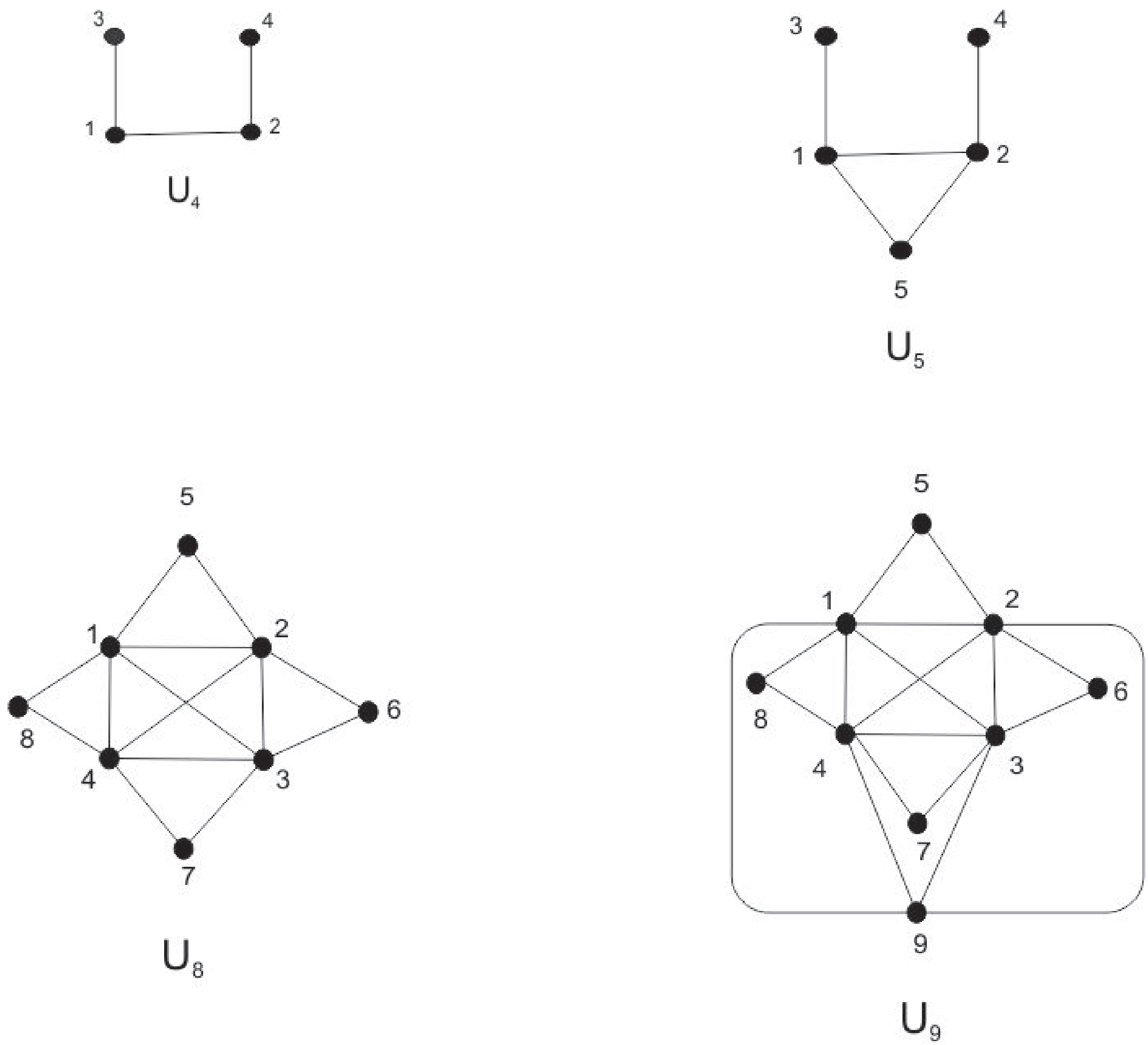
Dokaz.
Dokazat ćemo tvrdnje b) i c). Konstruirat ćemo beskonačnu klasu samokomplementarnih grafova U_n na sljedeći način: za $n = 4k$ uzimamo $V(U_n) = \{1, 2, \dots, 4k\}$. Vrhovi $1, 2, \dots, 2k$ induciraju potpun graf, dok je vrh $2k+1$ susjed s vrhovima $\{1, 2, \dots, k\}$, $2k+2$ je susjed s $\{2, 3, \dots, k+1\}$ i tako redom. Konstrukcija je ilustrirana na Slici 10.
Ako je $n = 4k+1$, dodamo vrh $4k+1$ i spojimo ga s vrhovima $\{1, 2, \dots, 2k\}$. Dijametar grafa U_n jednak je 3 jer vrhovi $3k$ i $4k$ nisu susjedni i nemaju zajedničkih susjeda. Dodatno vrijedi:

$$\chi(U_n) = \begin{cases} \text{2k} & \text{ako je n=4k,} \\ \text{2k+ 1} & \text{ako je n=4k + 1.} \end{cases}$$

Sada konstruiramo W_n, $n \geq 8$. Za svaki U_{n-4}, dodajemo P_4 kao na Slici 8, spajajući vrhove stupnja jedan sa svakim vrhom od U_{n-4}. Graf W_n je samokomplementaran i dijametar mu je 2. Vrijedi sljedeće:

$$\chi(W_n) = \chi(U_{n-4}) + 1 = \begin{cases} \text{2k-1} & \text{ako je n=4k,} \\ \text{2k} & \text{ako je n=4k + 1.} \end{cases}$$

Konačno, za $n = 5$ definiramo W_5 kao pentagon, odnosno C_5. □



Slika 10: Grafovi $U_n, n = 4, 5, 8, 9$

8 Ciklusi i putevi u samokomplementarnim grafovima

Pri proučavanju samokomplementarnih grafova, zanima nas egzistencija nekih specijalnih podgrafova u njima, kao što su putevi i ciklusi. Mi ćemo se u ovom odjeljku samo dotaknuti te teme jer je njena opsežnost takva da se o njoj mogu pisati knjige.

Budući da smo pokazali kako od manjih samokomplementarnih grafova možemo proizvesti veće samokomplementarne grafove, postavlja se pitanje možemo li pronaći način kako od većih samokomplementarnih grafova možemo konstruirati manje, odnosno hoćemo li moći testirati samokomplementarnost nekog grafa pomoću nekih manjih samokomplementarnih grafova. Primjerice, samokomplementarni grafovi su bogati podgrafovima P_4.
Alavi, Liu i Wang [4] su pokazali da svaki povezan graf, čiji je komplement također povezan, mora sadržavati inducirani podgraf P_4. U slučaju samokomplementarnog grafa možemo reći i više:

Teorem 8.1. *(Teorem o dekompoziciji [Gibbs 1974.])*
Samokomplementaran graf s $4k$ ili $4k+1$ vrhova sadrži k disjunktnih induciranih podgrafova P_4.

□

Nažalost, za pronalazak grafova P_4 bez upotrebe grube sile, ne samo da moramo znati da je graf samokomplementaran, nego također moramo poznavati eksplicitni izomorfizam s grafa G na njegov komplement G^c, tj. moramo poznavati antimorfizam. Štoviše, uklanjanjem jednog od podgrafova P_4, nećemo nužno dobiti samokomplementaran podgraf s $n-4$ vrhova. Prema tome, Teorem 8.1 ili barem malo pomaže, ili uopće ne pomaže u pronalasku učinkovitog testa za samokomplementarnost.

Iz Ramseyeve teorije je poznato da ako graf s najmanje 6 vrhova nema trokut, onda će ga imati njegov komplement. Ovo nam odmah govori da samokomplementarni grafovi s najmanje 6 vrhova sadrže trokute. Prema Albertsonu [5] slijedi da G mora sadržavati trokut s dva vrha istih stupnjeva, a prema Albertsonu i Bermanu [6] slijedi da G mora sadržavati trokut kojemu se stupnjevi svakog para vrhova ne razlikuju za više od 5.

Mi ćemo iskazati teorem koji se odnosi na broj trokuta, odnosno 3-ciklusa u samokomplementarnom grafu.

Broj trokuta $t(v)$ ($t(e)$) vrha v (brida e) u grafu G je broj trokuta u grafu G koji sadrže v (e), dok je $t(G)$ ukupan broj trokuta u G.

Teorem 8.2. *(Rao 1979.) Broj trokuta u samokomplementarnom grafu G ovisi jedino o nizu stupnjeva i jednak je:*

$$t(G) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\binom{d_i}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{24}.$$

□

Još ćemo se baviti egzistencijom Hamiltonovih puteva i Hamiltonovih ciklusa u samokomplementarnim grafovima.

Chvátal [10] je pokazao da vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 8.3. *Neka je G konačan graf s $n \geq 3$ vrhova i nizom stupnjeva $d_1 \leq \ldots \leq d_n$ tako da vrijedi*

$$d_i \leq i < \frac{n}{2} \Rightarrow d_{n-i} \geq n - i.$$

Tada G ima Hamiltonov ciklus.

□

Teorem 8.4. *(Clapham 1974, Camion 1975.)*
Svaki samokomplementaran graf G ima Hamiltonov put.

Dokaz. Niz stupnjeva grafa G zadovoljava

$$d_i \leq i - 1 < \frac{n+1}{2} \Rightarrow d_{n+1-i} \geq n - i.$$

Ako grafu G dodamo vrh v te ga spojimo sa svim preostalim vrhovima grafa, dobivamo graf koji zadovoljava uvjete Chvátalova teorema pa mora imati Hamiltonov ciklus. Prema tome, G sadrži i Hamiltonov put. □

Literatura

[1] B. D. Acharya, M. Acharya, On self antipodal graphs, *Nat. Acad. Sci. Lett 8, 151–153, 1985.*

[2] J. Akiyama, F. Harary, A graph and its complement with specified properties. VII. A survey, in The theory and applications of graphs *(Kalamazoo, Mich.,1980.), Wiley, New York,1–12, 1981.*

[3] J. Akiyama, F. Harary, P. Ostrand A graph and its complement with specified properties VI. Chromatic and achromatic numbers*, Pacific J. Math, 104, 15–27, 1983.*

[4] Y. Alavi, J. Liu, J.F. Wang, On linear vertex-arboricity of complementary graphs*, J. Graph Theory 18, 315–322, 1994.*

[5] M. O. Albertson, People who know people*, Math. Mag., 67, 278–281, 1994.*

[6] M. O. Albertson,D. M. Berman, Ramsey graphs without repeated degrees*, Congr. Numer., 83, 91–96, 1991.*

[7] R. Alter, A characterization of self-complementary graphs of order *, Portugaliae mathematica, Vol. 34, 157–161, 1975.*

[8] R. Aravamudhan, B. Rajendran, On antipodal graphs*, Discrete Math, 49, 193–195, 1984.*

[9] N. G. de Bruijn, Generalisation of Polya's Fundamental Theorem in Enumerative Combinatorial Analysis*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser., A 62. 59–69, 1959.*

[10] V. Chvátal, On Hamilton's ideals, *J. Combin. Theory (B) 12, 163–168, 1972.*

[11] R. Diestel, Graph Theory, *Electronic Edition 2000, Springer-Verlag, New York, 1997, 2000.*

[12] A. Farrugia, Self-complementary graphs and generalisation: a comprehensive reference manual*, University of Malta, 1999.*

[13] G. R. T. Hendry, On mean distance in certain classes of graphs*, Networks, 19, 451–457, 1989.*

[14] B. R. Nair Studies on triangle number in a graph and related topics, Ph. D. Thesis, School of Mathematical Sciences,*, Cochin University of Science and Technology, India, 1994.*

[15] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum, On complementary graphs*, Amer. Math. Monthly 63, 175–177, 1956.*

[16] E. M. Palmer, Asymptotic formulas for the number of self-complementary graphs and digraphs*, Mathematika, Vol. 17, 85–90, 1970.*

[17] S. B. Rao, The centre and diameter graphs of connected graph, announced in Graph Theory News Letter 3 (3)*, 1974.*

[18] S. B. Rao, Explored, semi - explored and unexplored territories in the structure theory of self - complementary graphs and digraphs in Proc. Symposium on Graph Theory, Indian statist. Inst.,Calcutta, 1976., *ISI Lecture Notes, MacMillan, India, 4, 10–35, 1979.*

[19] R. C. Read, On the Number of Self-complementary Graphs and Digraphs , *J. London Math. Soc., 38, 99–104, 1963.*

[20] G. Ringel, Selbstkomplementäre Graphen*, Arch. Math. 14, 354–358, 1963.*

[21] H. Sachs, Über selbstkomplementäre graphen*, Publ. Math. Drecen 9, 270–288, 1962.*

[22] R. J. Wilson, Introduction to Graph Theory Longman*, 166pp, 1994.*

Sažetak

Samokomplementarni grafovi su zanimljivi jer čine beskonačnu klasu grafova i imaju jaka strukturna svojstva. Na primjer, samokomplementaran graf mora imati točno $\frac{n(n-1)}{4}$ bridova, radijus 2, dijametar 2 ili 3 i oni postoje za sve izvodive n. U radu su predstavljeni rezultati brojnih matematičara koji su proučavali samokomplementarne grafove u proteklih 50 godina. Vidjeli smo da su neki od njih korisniji pri dokazivanju da graf nije samokomplementaran. Zapravo, ne postoji jednostavan način kojim bismo dokazali da je neki graf samokomplementaran. Kod ovakvih grafova problem predstavalja ne samo njihovo prepoznavanje, nego općenito brojnost i međusobna izomorfnost.

Ključne riječi: samokomplementaran graf, dijametar, radijus, antimorfizam

Summary

Self-complementary graphs are interesting because they form an infnite class of graphs and have strong structural properties. For example, self-complementary graphs must have exactly $\frac{n(n-1)}{4}$ edges, radius 2 and diameter 2 or 3 and they exist for every feasible value n. In this paper we present results discovered by the mathematicians who studied self-complementary graphs during the last 50 years. We have shown that some of them are more useful in proving that some graph is not self-complementary rather than it is self-complementary. In fact, there is no an easy way to prove that graph is self-complementary. The problem is not just in recognision of those graphs, but also in their number and mutual isomorphism.

Key words: self-complementary graphs, diameter, radius, antimorphism

Životopis

Rođena sam u Vinkovcima 10.11.1993. Osnovnu školu Mate Lovraka u Županji završila sam 2008. godine te nakon toga upisujem Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Županji. 2012. godine upisujem Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.