Title: Projektowanie rynków w oparciu o algorytmy kojarzenia

Author: Marek Szopa

Citation style: Szopa Marek. (2018). Projektowanie rynków w oparciu o algorytmy kojarzenia. "Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach" (Nr 364 (2018), s. 167-184)

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 364 · 2018

Marek Szopa

Uniwersytet Śląski w Katowicach
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii
Instytut Fizyki
marek.szopa@us.edu.pl

PROJEKTOWANIE RYNKÓW W OPARCIU O ALGORYTMY KOJARZENIA

Streszczenie: W pracy przedstawiono teorię stabilnego dopasowania algorytmu odroczonej akceptacji (AOA) oraz algorytmy TTC i TTCC wraz z ich zastosowaniami do np. kojarzenia uczelni i studentów, domów i właścicieli czy dawców i biorców nerek do przeszczepu. Dzięki tym algorytmom można projektować tzw. rynki kojarzenia, dla których optymalna alokacja dóbr jest możliwa bez wykorzystania mechanizmów finansowych charakterystycznych dla rynków towarowych. Omówiono właściwości algorytmów kojarzenia, m.in. ich stabilność, Pareto optymalność i odporność na manipulacje, oraz cechy algorytmu TTCC, dzięki którym krzyżowe transplantacje można zastąpić łańcuchowymi, co dzięki osiągnięciu głębszego rynku, pozwala na bardziej optymalne wykorzystanie nerek do przeszczepu.

Słowa kluczowe: rynki kojarzenia, stabilne dopasowanie, Pareto optymalność, wymiana nerek.

JEL Classification: C7, C78, D47.

Wprowadzenie

Tradycyjne rynki, takie jak rynek towarów, działają na zasadzie zrównoważenia podaży i popytu, który jest regulowany przez cenę towaru. Kupujący wybiera towar, ale dla sprzedawcy nie ma znaczenia, kim jest kupujący, byle zapłacił właściwą cenę. Przez *rynek kojarzeń* będziemy rozumieli rynek, na którym wzajemne przyporządkowanie pewnych zasobów następuje na zasadzie: „wybieram i jestem wybrany". Przykładem takiego rynku jest dobór par małżeńskich. Również na rynku pracy nie wystarczy, że wybraliśmy pracodawcę, u którego chcemy pracować – on musi również wybrać (lub zaakceptować) nas jako swojego pracownika. Podobnie z wyborem szkół i uczelni. Rynek kojarzeń może więc mieć formę przyporządkowania „jeden do jednego" (jak rynek matrymonialny) oraz „wiele do jednego", jak w przypadku rynku pracy, naboru do szkół. Tego typu rynki są znane od zarania dziejów, natomiast systematyczne ich badanie rozpoczęło się stosunkowo niedawno [Gale, Shapley, 1962]. Innym typem rynków kojarzenia są rynki, na których relacja „wybieram – jestem wybrany" nie jest symetryczna, tylko łańcuchowa: podmiot A wybiera B, podmiot B wybiera C itd., a ostatni w łańcuchu podmiot, powiedzmy X, wybiera A. Każdy z nich „wybiera", ale i „jest wybrany". Przykład tego typu rynku znajdziemy w zastosowaniach medycznych – alokacji nerek do transplantacji. Na tym rynku uczestnikami są pary dawca–biorca[1], dobór odbywa się na zasadzie jeden do jednego, z tym że za wyjątkiem prostej wymiany para z parą, najlepsze wyniki alokacji uczestnicy rynku uzyskują, kiedy wymieniają nerki, tworząc długie łańcuchy dawców i biorców.

Praca ma charakter przeglądowy, przedstawiono w niej kilka przykładów rynków kojarzeń wraz z teoriogrowymi podstawami ich budowy. Zwrócono uwagę na stabilność skojarzeń, która przejawia się brakiem tzw. par czy jednostek blokujących i ma zasadnicze znaczenie dla trwałości skojarzeń w dłuższym okresie. Zbadano optymalność i Pareto efektywność skojarzeń związane z kolejną ważną cechą kojarzeń, jaką jest ich wrażliwość na manipulacje. Rynki kojarzeń wrażliwe na manipulacje dają możliwość działań strategicznych, dzięki którym podanie nieprawdziwych preferencji może przynosić jednej stronie korzyści. Znajomość mechanizmów manipulacji pozwala, poprzez odpowiednie zaprojektowanie konkretnego rynku, na zminimalizowanie ich niepożądanych skutków. Celem publikacji jest zapoznanie czytelnika z tymi zagadnieniami, które choć znane specjalistom, a prace nad nimi zostały uhonorowane np. nagrodą im. A. Nobla w dziedzinie nauk ekonomicznych, to nie trafiły jeszcze w Polsce do świadomości potencjalnych projektantów rynków kojarzeń[2].

1. Rynek kojarzeń matrymonialnych

W tym rozdziale przedstawiono podstawowe założenia i twierdzenia gry kojarzeń dla rynku matrymonialnego. Warto zwrócić uwagę, że wykorzystanie skojarzenia z dobieraniem się ludzi w pary ma wyłącznie charakter poglądowy –

[1] Tzw. pary niekompatybilne. Chodzi o znające się osoby, najczęściej krewnych, z których jedna potrzebuje nerki do przeszczepu, a druga chce nerkę oddać, ale ze względów medycznych przekazanie między nimi nerki nie jest możliwe.

[2] To subiektywna opinia autora wynikająca z dyskusji tych zagadnień po wielu krajowych seminariach oraz po rozmowach z wysokiej rangi urzędnikami, np. Ministerstwa Edukacji Narodowej.

przez co ułatwia zrozumienie definicji i twierdzeń, oraz historyczny – oryginalnie problem też został sformułowany w taki właśnie sposób [Gale, Shapley, 1962]. W szczególności w żaden sposób nie chcemy sugerować, że „rynek kojarzeń matrymonialnych" może mieć zastosowanie do kojarzenia małżeństw w realnym świecie, co nie zmienia jednak faktu, że niektóre z omawianych poniżej strategii mogą i są w tym świecie wykorzystywane.

Rozważmy dwa rozłączne zbiory, których elementy będziemy chcieli do siebie dopasować: zbiór kobiet $K = \{k_1, k_2, \dots, k_{n_K}\}$ i zbiór mężczyzn $M = \{m_1, m_2, \dots, m_{n_M}\}$, $K \cap M = \emptyset$. Każdy członek tych zbiorów ma swój indywidualny zbiór preferencji wobec wszystkich przedstawicieli zbioru przeciwnego. Dodatkowo dopuszczamy możliwość, aby na dowolnej pozycji listy preferencji wskazał siebie jako deklarację pozostania singlem. Każda kobieta $k \in K$ określa więc swoje *preferencje* na zbiorze $M \cup \{k\}$, gdzie k oznacza chęć pozostania singlem; analogicznie każdy mężczyzna określa swoje preferencje na zbiorze $K \cup \{m\}$. Przykładowy zbiór preferencji kobiety k (zaczynając od najbardziej pożądanej opcji, do najmniej pożądanej) można zapisać jako:

$$P(k) = m_1, m_2, m_3, k, m_4, \dots, m_{n_M}$$

Każda opcja mniej preferowana od pozostania singlem k jest nieistotna, ponieważ pozostanie singlem jest zawsze możliwe, możemy więc zapisać ten zbiór preferencji jako $P(k) = m_1, m_2, m_3$, zakładając, że w następnej kolejności kobieta będzie wolała pozostać singlem. W ten sposób pomijamy *nieakceptowalnych* kandydatów, czyli takich, którzy są mniej preferowani od pozostania singlem. Analogicznie wygląda zapis listy *preferencji* mężczyzn. Zbiór (profil) *preferencji wszystkich osób* zapiszemy jako:

$$P = \{P(m_1), \dots, P(m_{n_M}), P(k_1), \dots, P(k_{n_K})\}$$

Definiujemy również relacje preferencji przykładowej kobiety k poprzez: $m_1 >_k m_2$ lub $m_1 \geq_k m_2$ lub $m_1 =_k m_2$, co oznacza, że kobieta k preferuje mężczyznę m_1 nad m_2 lub m_1 co najmniej tak jak m_2 lub m_1 tak samo jak m_2, analogicznie dla mężczyzn. Jeżeli w preferencjach osoby będą występowały tylko silne nierówności, to mówimy, że ich preferencje są *ścisłe*. W ten sposób, za pomocą trzech wielkości $(M, K; P)$, określiliśmy *rynek kojarzeń matrymonialnych*, tzn. rynek, na którym dopasowanie dóbr odbywa się poprzez uwzględnienie preferencji dwu stron – „nie tylko wybieram, ale też muszę zostać wybrany". Zdefiniujmy teraz skojarzenie ϕ, dzięki któremu będziemy mogli przyporządkować elementy z obu tych zbiorów [Roth, Sotomayor, 1992].

Definicja 1

Skojarzeniem $\phi \in \Phi$ nazywamy wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie ze zbioru $K \cup M$ w siebie, takie że $\phi^2(x) = x$, oraz jeżeli $\phi(m) \neq m$, wtedy $\phi(m)$ jest w zbiorze K, a jeśli $\phi(k) \neq k$, wtedy $\phi(k)$ jest w zbiorze M. Jak wynika z tej definicji, istnieją dwa typy skojarzeń: takie, dla których $\phi(x) \neq x$ – w tym przypadku parę $(x, \phi(x))$, nazywamy *parą skojarzoną* (mężczyzna m jest skojarzony z kobietą $\phi(m)$ lub kobieta k jest skojarzona z mężczyzną $\phi(k)$), oraz takie, dla których $\phi(x) = x$ – wówczas mówimy, że x pozostaje *singlem*. Skojarzenie ϕ można explicite zapisać w postaci:

$$\phi = \begin{matrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 \\ m_2 & m_4 & m_1 & m_3 & k_5 \end{matrix}$$

co oznacza skojarzenie kobiety k_1 z mężczyzną m_2 itd. oraz kobiety k_5 pozostającej singlem, $\phi(k_1) = m_2,\ldots, \phi(k_5) = k_5$.

Skojarzenie ϕ jest *stabilne*, jeśli nie zachodzi żaden z dwu przypadków:

- istnieje osoba, zwana *jednostką blokującą*, która woli od obecnego skojarzenia pozostanie singlem: $x >_x \phi(x)$,
- istnieje para (m, k), zwana *parą blokującą*, która nie została z sobą skojarzona $\phi(m) \neq k$ przez ϕ, a znajdują się wyżej na swoich listach preferencji niż ich obecne skojarzenia, tj. $m >_k \phi(k)$ oraz $k >_m \phi(m)$.

Pojęcie stabilnego skojarzenia jest naturalne, dla takiego skojarzenia nie może zachodzić przypadek, że jednostka od obecnie skojarzonego partnera woli pozostanie singlem. Nie może też być tak, że wśród skojarzonych par istnieją nieskojarzeni z sobą mężczyzna i kobieta, którzy jednak wolą siebie wzajemnie bardziej niż skojarzonych partnerów. Taka sytuacja prowadziłaby do niestabilności systemu skojarzeń, mówiąc językiem potocznym, byłaby pokusą do zdrady.

Dla przykładu określmy grupę kobiet i mężczyzn z następującymi ścisłymi preferencjami:

$$P(m_1) = k_1, k_2, k_3 \qquad P(k_1) = m_1, m_2, m_3$$

$$P(m_2) = k_1, k_2, k_3 \qquad P(k_2) = m_1, m_3, m_2$$

$$P(m_3) = k_1, k_3, k_2 \qquad P(k_3) = m_1, m_2, m_3$$

Wtedy skojarzenie:

$$\phi = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ k_2 & k_3 & k_1 \end{matrix}$$

nie jest stabilne, ponieważ zawiera parę blokującą (m_1, k_1), k_1 jest wyżej niż k_2 na liście preferencji m_1, oraz m_1 jest wyżej niż m_3 na liście preferencji k_1.

Rynek kojarzeń $(M, K; P)$ wraz z skojarzeniami $\phi \in \Phi$ tworzy *grę kojarzeń*, którą oznaczamy jako $(M, K; P; \Phi)$. Dla każdego $x \in M \cup K$ w zbiorze skojarzeń Φ można wprowadzić relację: $\phi >_x \psi$ (*ϕ dominuje dla x nad ψ*), jeśli tylko $\phi(x) >_x \psi(x)$. Powiemy, że dowolny podzbiór Ψ zbioru skojarzeń $\Psi \subset \Phi$ jest *rdzeniem* gry kojarzeń, jeżeli dla żadnego $x \in M \cup K$ żadne z skojarzeń $\psi \in \Psi$ nie jest zdominowane.

Zbiór stabilnych skojarzeń w oczywisty sposób zawiera rdzeń. Zachodzi również twierdzenie odwrotne, więc rdzeń gry kojarzeń jest równy zbiorowi stabilnych skojarzeń [Roth, Sotomayor, 1992].

Twierdzenie [Gale, Shapley, 1962]: Zbiór stabilnych skojarzeń jest niepusty. Jeśli preferencje mężczyzn i kobiet są ścisłe, to zawiera on podzbiór M-optymalnych stabilnych skojarzeń (które są preferowane przez wszystkich mężczyzn, co najmniej tak jak pozostałe stabilne skojarzenia) i podobnie, podzbiór K-optymalnych stabilnych skojarzeń.

Dla poprzedniego przykładu można znaleźć stabilne skojarzenia, które są M-optymalne – ϕ_M i K-optymalne – ϕ_K:

$$\phi_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{matrix}$$

$$\phi_K = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ k_1 & k_3 & k_2 \end{matrix}$$

2. Algorytm odroczonej akceptacji

Rozważmy dowolny rynek kojarzeń $(M, K; P)$ ze ścisłymi preferencjami. Jeśli jakieś preferencje $P(m_i)$ lub $P(k_j)$ nie są ścisłe, np. $k_r =_{m_i} k_s$, to osoby o tych samych preferencjach ustawiamy w dowolnej (np. alfabetycznej) kolejności, tak aby uzyskać ścisłe preferencje, np. $k_r >_{m_i} k_s$. Takie uściślenie preferencji nie jest oczywiście jednoznaczne.

Algorytm odroczonej akceptacji dla oświadczyn mężczyzn:

1-a. Każdy mężczyzna oświadcza się najbardziej preferowanej kobiecie (jeśli taką ma, w przeciwnym przypadku pozostaje singlem).

1-b. Każda kobieta, która została poproszona, odrzuca nieakceptowalnych kandydatów, a z pozostałych akceptuje „warunkowo”[3] najbardziej preferowanego, odrzucając, jeśli są, mniej preferowanych.

[3] Warunkowa akceptacja straci ważność, jeśli w kolejnych krokach algorytmu pojawią się bardziej pożądani kandydaci. Stąd nazwa „algorytm odroczonej akceptacji”.

n-a. Mężczyźni odrzuceni w kroku n-1 oświadczają się akceptowalnym, najbardziej preferowanym kobietom, które ich dotychczas nie odrzuciły (jeśli takich kobiet nie ma, pozostają singlami).
n-b. Każda kobieta warunkowo akceptuje najbardziej preferowanego kandydata, a pozostałych odrzuca.
Koniec. Jeśli skończyły się oświadczyny, każda kobieta zostaje skojarzona z ostatnim warunkowo akceptowanym (jeśli był) kandydatem. Pozostali (kobiety i mężczyźni) pozostają singlami.

Analogicznie do powyższego, można sformułować algorytm odroczonej akceptacji, dla którego stroną oświadczającą się są kobiety.

AOA zakończy się po skończonej liczbie kroków, gdyż długość algorytmu jest wyznaczona przez liczbę oświadczyn, a danej kobiecie mężczyzna oświadcza się tylko raz. Zauważmy również, że AOA prowadzi do skojarzenia stabilnego. Rzeczywiście, żaden mężczyzna nie oświadcza się nieakceptowalnym kobietom, a kobiety nie akceptują oświadczyn nieakceptowalnych mężczyzn, co oznacza, że nie ma blokujących jednostek. Z drugiej strony, jeśli jakaś kobieta jest wyżej na liście mężczyzny niż przydzielona przez algorytm partnerka, to kobieta ta musiała na jednym z etapów algorytmu odrzucić tego mężczyznę na rzecz innego lub wolała od niego pozostanie singlem. Tak czy inaczej, mężczyzna ten nie jest bardziej pożądany niż jej przypisany algorytmem wybór. Podobnie kobieta, która wolałaby od przydzielonego partnera innego mężczyznę, nie może być na liście tego mężczyzny wyżej niż jego obecna partnerka, gdyż mężczyzna ten oświadczał się w kolejności od najbardziej preferowanych kandydatek. Oznacza to, że w wyniku AOA nie mogą powstawać pary blokujące, czyli prowadzi on do skojarzenia stabilnego. Z drugiej strony AOA jest w przypadku oświadczyn mężczyzn M-optymalnym skojarzeniem, a w przypadku oświadczyn kobiet jest K-optymalnym skojarzeniem [Gale, Shapley, 1962].

Weźmy pod uwagę rynek kojarzeń matrymonialnych o ścisłych preferencjach. W zbiorze stabilnych skojarzeń można wprowadzić częściowy porządek ze względu na jedną ze stron. Dla różnych skojarzeń $\phi \neq \psi$ powiemy, że $\phi >_M \psi$, jeśli dla każdego mężczyzny $m \in M$ mamy $\phi(m) >_m \psi(m)$ albo $\phi(m) =_m \psi(m)$.

Zauważmy, że dla różnych skojarzeń $\phi \neq \psi$ zawsze istnieje ich wspólne ograniczenie górne $\eta \geq_M \psi$ i $\eta \geq_M \phi$. Rzeczywiście, jeżeli każdy mężczyzna m wybierze lepszą spośród dwu opcji $\phi(m)$ lub $\psi(m)$, to zdefiniuje to nowe odwzorowanie, nazwijmy je η. Żeby udowodnić, że η jest skojarzeniem, wystarczy pokazać, że jest ono różnowartościowe, tj. jeżeli $m_1 \neq m_2$, to $\eta(m_1) \neq \eta(m_2)$, czyli że dwaj różni mężczyźni nie mogą wskazać tej samej kobiety. Rzeczywiście, gdyby tak było, to ta kobieta musiałaby preferować tylko jednego z nich i tworzyć parę blokującą wobec jednego ze skojarzeń ϕ lub ψ z tym mężczyzną. Prowadzi to do następującego twierdzenia.

Twierdzenie [Knuth, 1976]: Na rynku kojarzeń matrymonialnych o ścisłych preferencjach zbiór skojarzeń stabilnych stanowi kratę uporządkowaną poprzez relację „$>_M$”. Maksymalnym elementem tej kraty jest ϕ_M skojarzenie M-optymalne, a minimalnym ϕ_K skojarzenie K-optymalne i odwrotnie dla relacji „$>_K$”.

Rezultat ten wydaje się porządkować problem poszukiwania skojarzeń, przynajmniej w przypadku ścisłych preferencji, jednak odnosząc to do realnego rynku, powinniśmy wziąć pod uwagę ich *odporność na manipulacje*. Innymi słowy, czy komuś może opłacać się podawanie nieprawdziwych preferencji lub czy może się opłacać tworzenie koalicji graczy, którzy (wszyscy lub niektórzy) uzyskają lepsze skojarzenia poprzez podanie nieprawdziwych preferencji. Rozważmy najpierw następujący zestaw preferencji.

Przykład 1

$$P(m_1) = k_1, k_2, k_3 \qquad P(k_1) = m_3, m_2, m_1$$

$$P(m_2) = k_1, k_2, k_3 \qquad P(k_2) = m_1, m_3, m_2$$

$$P(m_3) = k_2, k_1, k_3 \qquad P(k_3) = m_3, m_2, m_1$$

Dla tego przykładu optymalnymi skojarzeniami są:

$$\phi_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ k_2 & k_3 & k_1 \end{matrix} \textbf{ oraz } \phi_K = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ k_2 & k_3 & k_1 \end{matrix}$$

Jak widać, $\phi_M = \phi_K$, więc na mocy poprzedniego twierdzenia wnioskujemy, że jest to jedyne stabilne skojarzenie. Zauważmy, że jest ono mniej korzystne dla panów niż dla pań. Panowie (m_1, m_2, m_3) zostali skojarzeni ze swoimi odpowiednio $(2, 3, 2)$ preferencjami, panie (k_1, k_2, k_3) zaś mają preferencje odpowiednio $(1, 1, 2)$. Wystarczy jednak, że Panowie zmówią się i m_2 poda fałszywe preferencje $P'(m_2) = k_3, k_1, k_2$, aby, przy niezmienionych preferencjach pozostałych osób, optymalnymi skojarzeniami były:

$$\phi'_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ k_1 & k_3 & k_2 \end{matrix} \textbf{ oraz } \phi_K = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ k_2 & k_3 & k_1 \end{matrix}$$

Jak widać, w tym przypadku optymalne skojarzenia uzyskane w wyniku AOA zależą od kolejności oświadczyn. O ile skojarzenia optymalne dla pań są takie same jak w przypadku prawdziwych preferencji, to panowie wyraźnie zyskują, otrzymując w stosunku do swoich prawdziwych preferencji odpowiednio $(1, 3, 1)$ preferencję. Pan m_2, podając nieprawdziwe preferencje, co prawda sam nic nie zyskał, ale spowodował, że obaj jego wspólnicy uzyskali bardziej preferowane partnerki. Zauważmy, że skojarzenie ϕ'_M nie jest (bo nie może być) stabilne i ma parę blokującą (m_2, k_1), więc m_2, mimo poświęcenia się dla partnerów, może w przyszłości chcieć zmienić skojarzenie.

Na szczęście nie jest możliwe podanie fałszywych preferencji tak, aby wszyscy panowie (lub panie) na tym zyskali. Mówi o tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie [Roth, 1982a]: M-optymalne stabilne skojarzenie jest w zbiorze wszystkich skojarzeń *słabo Pareto optymalne* dla mężczyzn (analogicznie dla K-optymalnych stabilnych skojarzeń dla kobiet). Oznacza to, że nie istnieje (nawet niekoniecznie stabilne) skojarzenie, dzięki któremu wszyscy mężczyźni mogliby zyskać w stosunku do ich optymalnego skojarzenia.

Prostym przykładem manipulacji, dzięki której zyskuje bezpośrednio osoba podająca nieprawdziwe preferencje, daje następujący zbiór preferencji.

Przykład 2

$$P(m_1) = k_1, k_2 \qquad P(k_1) = m_2, m_1$$

$$P(m_2) = k_2, k_1 \qquad P(k_2) = m_1, m_2$$

Jak łatwo sprawdzić, ten profil preferencji ma 2 stabilne skojarzenia:

$$\phi_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 \\ k_1 & k_2 \end{matrix} \text{ oraz } \phi_K = \begin{matrix} m_1 & m_2 \\ k_2 & k_1 \end{matrix}$$

Pierwsze skojarzenie ϕ_M w pełni satysfakcjonuje mężczyzn, a ϕ_K jest dobre dla kobiet. Załóżmy jednak, że kobieta k_1 poda nieprawdziwe preferencje $P'^{(k_1)} = m_2$, tzn. że woli zostać singlem, niż zaakceptować partnera m_1. W tej sytuacji jedynym stabilnym skojarzeniem pozostaje ϕ_K. A zatem manipulacja kobiety k_1 dała obu kobietom konkretną korzyść, polegającą na tym, że z dwu stabilnych skojarzeń pozostało tylko jedno – bardziej dla nich korzystne. Powyższa sytuacja została uogólniona przez twierdzenie.

Twierdzenie [Roth, Sotomayor, 1990]: Dowolny mechanizm produkujący stabilne skojarzenia na rynku matrymonialnym o ścisłych preferencjach i więcej niż jednym stabilnym skojarzeniu można zmanipulować w ten sposób, że jeden z uczestników rynku skończy swoją listę preferencji na najlepszej, możliwej do osiągnięcia partii, podczas gdy pozostali podadzą swoje prawdziwe preferencje.

3. Kojarzenie uczelni i studentów

Rozważmy dwa skończone i rozdzielne zbiory $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{n_U}\}$ oraz $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n_S}\}$, odpowiednio uczelni i studentów. Każdy ze studentów ma swoje preferencje odnośnie uczelni $P(s)$, a każda uczelnia ma swoje preferencje odnośnie do studentów określone przez $P(u)$, tak jak w modelu matrymonialnym, z tym że uczelnie mają możliwość skojarzenia większej liczby, maksymalnie q_u studentów. Taki model kojarzenia będziemy nazywali „jeden do wielu", a słowo „kojarzenie" zastąpimy słowem „dopasowanie". Po przeprowadzeniu dopasowania każdy ze studentów zostanie dopasowany do najwyżej jednej z uczelni, a do każdej uczelni u zostanie dopasowane najwyżej q_u studentów. Każdego studenta, który nie zostanie dopasowany do uczelni, uznaje się za dopasowanego do samego siebie, jak w modelu stabilnego małżeństwa, a w przypadku, gdy uczelnia nie będzie miała zajętych wszystkich miejsc, na każdym wolnym miejscu zostanie przyporządkowana do samej siebie. Dopasowanie jest dwustronne, ponieważ student zostaje dopasowany do uczelni, tylko kiedy sam ją preferuje oraz gdy uczelnia preferuje danego studenta u siebie.

Model dopasowania uczelni i studentów różni się od modelu matrymonialnego tym, że relacja preferencji uczelni jest określona na podzbiorach zbioru studentów, a nie na pojedynczych osobach. Aby wykorzystać wyniki poprzedniego modelu, trzeba zdefiniować, jak z preferencji indywidualnych wynikają preferencje zespołowe. Istotnym założeniem jest tu własność responsywności.

Definicja 2

Preferencje $\hat{P}(u)$ uczelni u odnośnie grup studentów są *responsywne* względem preferencji $P(u)$ odnośnie do pojedynczych studentów, jeżeli dla każdego zbioru studentów $S' \subset S$, o liczebności $|S'| < q_u$ i każdej pary studentów nienależących do S' takich, że dla $P(u)$ jest $s_1 <_u s_2$, dla $\hat{P}(u)$ jest to, że $S' \cup s_1 <_u S' \cup s_2$.

Zauważmy także, że dla każdego $P(u)$ może istnieć wiele różnych responsywnych relacji odnośnie do par, dla przykładu, jeżeli preferencje indywidualne są $s_1 <_u s_2 <_u s_3 <_u s_4$, to responsywność pociąga za sobą to, że $\{s_1, s_2\} <_u \{s_1, s_3\}$ lub $\{s_1, s_2\} <_u \{s_3, s_4\}$, jednak nie daje żadnych wskazówek, czy ma być $\{s_1, s_4\} <_u \{s_2, s_3\}$, czy $\{s_1, s_4\} >_u \{s_2, s_3\}$. Obie te nierówności są dopuszczalne. Nie możemy wymagać zatem, aby nawet ścisłe preferencje odnośnie do indywidualnych studentów jednoznacznie generowały preferencje dotyczące ich grup.

Responsywność preferencji odnośnie do grup powoduje, że studenci są *zastępowalni*, a nie *uzupełniający* (tzn. preferencje dotyczące danego studenta nie zależą od składu już posiadanych studentów). Taka własność pozwala traktować rynek dopasowania uczelni i studentów podobnie jak rynek kojarzeń matrymonialnych, na którym dana uczelnia u jest reprezentowana przez q_u identycznych kopii mających ten sam zestaw $P(u)$ preferencji, z których każda szuka skojarzenia z jednym studentem. W preferencjach danego studenta q_u kopii uczelni u ma dowolny, np. leksykograficzny porządek. W taki sposób dopasowanie „jeden do wielu" można wzajemnie jednoznacznie wyrazić w postaci skojarzeń matrymonialnych [Roth, 2007] i zastosować do nich wyniki dotyczące skojarzeń, w szczególności podstawowe twierdzenie [Gale, Shapley, 1962]. Stosując tę wzajemnie jednoznaczną relację, trzeba jednak uważać, kiedy badamy jej konsekwencje dla preferencji odnośnie do grup. W szczególności zachodzi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie [Roth, 1985]: Jeśli preferencje uczelni i studentów są ściśle, to optymalne dla studentów stabilne dopasowanie jest słabo Pareto optymalne, lecz optymalne dla uczelni stabilne dopasowanie nie musi być dla nich słabo Pareto optymalne.

Drugą część tego twierdzenia można pokazać na nieco zmodyfikowanym przykładzie 1, gdzie $u_1 = \{m_1, m_2\}$ oraz $u_2 = \{m_3\}$, a kobiety będą odgrywały role studentów. Preferencje indywidualne pozostaną takie same. Podobnie jak w przykładzie matrymonialnym, jedynym stabilnym dopasowaniem będzie $\phi_U = \begin{matrix} u_1 & u_1 & u_2 \\ s_2 & s_3 & s_1 \end{matrix}$, jednak dopasowanie niestabilne $\phi'_U = \begin{matrix} u_1 & u_1 & u_2 \\ s_1 & s_3 & s_2 \end{matrix}$ jest dla obu uczelni korzystniejsze $\{s_2, s_3\} <_{u_1} \{s_1, s_3\}$ oraz $s_1 <_{u_2} s_2$, czyli ϕ_U nie jest nawet słabo Pareto optymalne.

Podobnie jak w modelu matrymonialnym, największą słabością modelu kojarzenia uczelni i studentów jest brak odporności na manipulacje. Słabość ta nie jest jednak aż tak bardzo dotkliwa w zastosowaniach modelu. Wynika to z tego, że aby zmanipulować wyniki, studenci bądź uczelnie powinny dysponować pełną informacją na temat preferencji innych stron. Taka sytuacja zazwyczaj się nie zdarza i dlatego model ten znalazł dużo realnych zastosowań. Uczelniami są w tych przykładach dowolne instytucje ogłaszające listy preferencji, studentami zaś kandydaci do tych instytucji składający do systemu swoje listy preferencji. Dla przykładu wymieńmy systemy praktyk studentów medycyny w szpitalach USA i Kanady (NRMP i CaRMS), system naboru do pracy ekonomistów z doktoratem, system naboru uczniów do szkół średnich w Nowym Jorku, Bostonie, Denver i innych miastach [Roth, 2014]. W tych programach stosuje się najczęściej AOA optymalny dla instytucji [Roth, 1985]. Podobne modele i ich zastosowania do rekrutacji były badane również w Polsce [Anholcer, 2006; Świtalski, 2008, 2015].

4. Program wymiany nerek

Jednym z ciekawszych rynków kojarzeń jest rynek wymiany nerek. Nerki do transplantacji mogą pochodzić z dwu źródeł: od dawców nieżyjących lub żyjących. Ci ostatni mogą oddać jedną z dwu posiadanych nerek bez uszczerbku dla swojego zdrowia. Oczywiście zwiększają w ten sposób ryzyko, że w przyszłości jedyna posiadana nerka może zawieść, dlatego oddanie drugiej nerki jest poświęceniem, na które zazwyczaj decydują się osoby spokrewnione, chcące pomóc komuś ze swoich bliskich. Jednak nawet wtedy, kiedy w otoczeniu osoby, która potrzebuje nerki (biorcy), pojawi się potencjalny dawca, do przeszczepu zazwyczaj nie dochodzi. Powody są natury medycznej, związane z niezgodnością grup krwi, niezgodnością tkankową HLA lub immunizacją biorcy (wysoki procent aktywnych przeciwciał PRA > 80%). Takie *niekompatybilne pary* dawca–biorca są jednak potencjalnym źródłem nerek do przeszczepu.

Według oficjalnych danych liczba przeszczepów nerek w Polsce w 2016 r. wyniosła 978 od zmarłych i 50 od żywych dawców [Poltransplant, 2016], przeszczepy od żywych dawców stanowią więc w Polsce zaledwie ok. 5% wszystkich przeszczepów nerek. Z drugiej strony liczby potrzebujących są ogromne. W USA na nerkę do przeszczepu czeka ok. 100 000 osób, z których wielu nie doczeka transplantacji. Rocznie ok. 7 000 osób z tej kolejki umiera lub osiąga stan zbyt poważny do transplantacji [Roth, 2014]. Możliwość zwiększenia liczby przeszczepów od żywych dawców jest więc kwestią życia dla wielu osób. Liczba przeszczepów od dawców żyjących wynosi w USA ok. 6000, czyli jest 120 razy wyższa niż w Polsce [Roth, 2014], co, nawet biorąc pod uwagę stosunek populacji obu krajów (ok. 8,5), świadczy o istnieniu ogromnego niewykorzystanego potencjału nerek żywych dawców w Polsce.

Niekompatybilne pary mogą wymieniać się nerkami w taki sposób, że dawca z jednej pary oddaje nerkę biorcy z innej pary, w zamian za przeszczepienie nerki od dawcy z tej pary. Pobranie i przeszczepienie nerek odbywa się w tym samym czasie. Dochodzi do tzw. transplantacji krzyżowej, których kilka już w Polsce przeprowadzono. Jednak, jak wykazuje praktyka, transplantacje krzyżowe są trudne w realizacji, gdyż wymagają odpowiedniego skoordynowania działań lekarzy, czterech sal operacyjnych i odpowiedniego do operacji stanu czworga zaangażowanych osób. Większe możliwości daje odsunięcie w czasie kolejnych pobrań i przeszczepów oraz wykorzystanie większej liczby zaangażowanych dawców i biorców. Dochodzi wówczas do tzw. transplantacji łańcuchowej, której mechanizm przedstawimy w dalszej części pracy. Najpierw omówimy jednak inne pomocne algorytmy wymiany.

Algorytm TTC (*Top Trading Cycles*) pozwala wyznaczyć optymalne dopasowanie dóbr pewnej liczbie osób posiadających po jednym dobru, przy założeniu, że mogą się oni nimi wymienić [Shapley, Scarf, 1974]. Weźmy dla przykładu domy i ich właścicieli. Oznaczmy dwa równoliczne zbiory $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ oraz $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ jako zbiór domów i ich właścicieli. Każdy dom jest przyporządkowany swojemu właścicielowi, a zatem tworzą oni system par $\{(d_1, w_1), ..., (d_n, w_n)\}$. Każdy właściciel w_i ma swoje preferencje P_i w zbiorze wszystkich domów – włącznie z jego własnym. Algorytm TTC polega na tym, że tworzymy graf składający się z właścicieli i domów w taki sposób, że każdy właściciel wskazuje najbardziej preferowany (spośród wszystkich, włącznie z jego własnym) dom, a każdy dom wskazuje swojego właściciela. W powstałym w ten sposób skierowanym grafie szukamy (zamkniętych) cykli. Takie cykle zawsze istnieją [Shapley, Scarf, 1974]. Następnie każdy właściciel należący do cyklu dostaje dom, który wskazał i jest usuwany (wraz z tym domem) z listy. Jeśli na liście wciąż są jacyś właściciele, to procedurę tworzenia grafu i przydziału domów powtarza się, aż wszyscy właściciele znajdą swoje domy. Algorytm TTC ma dużą zaletę, bowiem dla ścisłych preferencji właścicieli daje im jednoznaczne przyporządkowanie domów, które jest dla każdego podzbioru właścicieli optymalne [Roth, Postlewaite, 1977]. Ponadto system TTC jest odporny na manipulacje – podanie swoich prawdziwych preferencji jest dla każdego właściciela strategią dominującą [Roth, 1982b].

Procedura TTC nie jest jednak w przypadku kojarzenia nerek wystarczająca, gdyż, z natury problemu, pacjenci mogą mieć preferencje tylko w pewnym podzbiorze zbioru wszystkich nerek – tych, które ze względów medycznych są dla nich odpowiednie. Jeśli właścicieli domów w_i zastąpimy pacjentami p_i, a domy d_i nerkami n_i, to każdy pacjent ma swój zbiór kompatybilnych nerek, który oznaczymy $N_i \subset N = \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$, oraz zbiór ścisłych preferencji P_i, który określimy na zbiorze $N_i \cup \{n_i, k\}$. W wyniku zastosowanie systemu wymiany nerek nastąpi skojarzenie każdego pacjenta p_i z nerką $N_i \cup \{n_i\}$ (opcja n_i oznacza, że pacjent nie korzysta z wymiany) lub listą kolejkową k. Opcja listy kolejkowej oznacza, że pacjent, nie znajdując odpowiedniej nerki w systemie wymiany, wpisuje się do kolejki oczekujących poza tym systemem na nerki pochodzące np. od zmarłych dawców, uzyskując na tej liście pierwszeństwo za to, że jego sparowana nerka pozostaje w systemie wymiany. Każda nerka zostanie przyporządkowana co najwyżej jednemu pacjentowi. Taka procedura została opracowana i nazwana TTCC (*Top Trading Cycles and Chains*) [Roth, Sömnez, Ünver, 2004].

Algorytm TTCC (podobnie jak w TTC) składa się ze skończonej liczby rund, w każdej z nich powstaje graf, w którym pacjent p_i wskazuje najwyżej preferowaną w danej rundzie opcję ze zbioru $N_i \cup \{n_i, k\}$, a każda nerka n_i wskazuje sparowanego ze swoim dawcą pacjenta p_i. Przez *cykl* będziemy rozumieli uporządkowaną listę nerek i pacjentów $\{n_{i_1}, p_{i_1}, n_{i_2}, p_{i_2}, \dots, n_{i_m}, p_{i_m}\}$, w której każda nerka wskazuje sparowanego pacjenta z każdym pacjentem, p_{i_k} wskazuje nerkę $n_{i_{k+1}}$, przy czym ostatni pacjent p_{i_m} wskazuje pierwszą nerkę n_{i_1}. Każdy cykl, składający się więcej niż z jednej pary, daje możliwość wymiany nerek w obrębie pacjentów i sparowanych z nimi dawców cyklu. W przypadku dwu par będzie to wymiana krzyżowa. Preferencje pacjentów są ścisłe, więc każda nerka i każdy pacjent mogą być tylko w jednym cyklu i cykle się nie przecinają. Przez *k-łańcuch* będziemy rozumieli uporządkowaną listę nerek i pacjentów $\{n_{i_1}, p_{i_1}, n_{i_2}, p_{i_2}, \dots, n_{i_m}, p_{i_m}\}$, w której każda nerka wskazuje sparowanego pacjenta, a każdy pacjent p_{i_k} wskazuje nerkę $n_{i_{k+1}}$, przy czym ostatni pacjent p_{i_m} wskazuje opcję listy kolejkowej k – oznacza to, że czeka on na nerkę od zmarłego lub altruistycznego dawcy. Zauważmy, że w tradycyjnym systemie przeszczepów od zmarłych dawców biorca pobiera nerkę z puli nerek pochodzących od zmarłych dawców, nie dając nic w zamian; w systemie k-łańcuchów na końcu jest zawsze nerka, która pozostaje w tej puli. Im dłuższe k-łańcuchy, tym większa szansa na optymalne wykorzystanie nerek. W przeciwieństwie do cykli łańcuchy mogą się przecinać. Dla algorytmu TTCC istotny jest następujący lemat.

Lemat [Roth, Sömnez, Ünver, 2004, s. 467]: „Rozważmy graf, na którym pacjenci i nerki każdej pary są różnymi węzłami, osobnym węzłem jest opcja listy oczekujących k. Załóżmy, że każdy pacjent wskazuje albo pożądaną przez siebie nerkę, albo listę k, każda nerka wskazuje swojego sparowanego pacjenta. Wówczas na mocy lematu istnieje cykl lub każda para znajduje się na końcu jakiegoś k-łańcucha".

Algorytm TTCC składa się z następujących kroków:

1. Początkowo wszystkie nerki są dostępne i wszyscy pacjenci są aktywni. Na każdym etapie procedury każdy pozostały aktywny pacjent p_i wskazuje najbardziej pożądaną nerkę innej pary lub opcję listy kolejkowej k, każdy pozostały *pasywny* pacjent wskazuje nerkę swojej pary. Każda nerka n_i wskazuje swojego sparowanego pacjenta p_i.
2. Na mocy lematu w powstałym grafie istnieją cykle i/lub k-łańcuchy:
   a) jeśli brak cykli, przechodzimy do punktu 3;

   b) jeśli są cykle, to realizujmy wymianę zdefiniowaną przez cykle i usuwamy tych pacjentów oraz wykorzystane nerki z systemu;
   c) pozostali po zrealizowaniu punktu 2b) pacjenci wskazują najbardziej pożądane nerki, a one sparowanych pacjentów, szukamy nowo powstałych cykli, przeprowadzamy możliwe wymiany i usuwamy. Powtarzamy do wyczerpania wszystkich cykli.
3. Jeśli nie ma par, to kończy się procedura. Jeśli są, to na mocy lematu każda para jest na końcu jakiegoś k-łańcucha. Korzystając z reguł wyboru łańcuchów, wybieramy jeden z nich (to przyporządkowanie jest dla pacjentów tego łańcucha ostateczne). Reguła wyboru łańcuchów mówi również, czy:
   a) k-łańcuch jest usuwany po zrealizowaniu wszystkich wymian (w szczególności jedna nerka z końca łańcucha jest oddawana do puli wolnych nerek);
   b) k-łańcuch pozostaje nieaktywny łącznie z tworzącymi go pacjentami.
4. Po wyborze k-łańcucha mogą powstać nowe cykle. Powtarzamy punkty 2 i 3 z pozostałymi aktywnymi pacjentami i nieprzypisanymi nerkami do wyczerpania wszystkich pacjentów.

Przedstawiony algorytm zależy od reguły wyboru łańcuchów. Reguły te mogą być różne, każda ma swoje specyficzne cechy, a wybór konkretnej reguły zależy od priorytetów systemu. Dla przykładu podajmy regułę zastosowaną w pracy [Roth Sömnez, Ünver, 2004].

Reguła wyboru dla TTCC. Wybierz najdłuższy k-łańcuch, w przypadku, gdy istnieje kilka najdłuższych k-łańcuchów, wybierz k-łańcuch zawierający pacjenta o najwyższym priorytecie; jeśli pacjent o najwyższym priorytecie jest częścią kilku łańcuchów, wybierz k-łańcuch zawierający pacjenta o drugim najwyższym priorytecie itd. Zachowaj wybrane k-łańcuchy do chwili zakończenia procedury.

Ostatnie zdanie, mówiące o zachowaniu łańcuchów, jest bardzo istotne. Okazuje się, że k-łańcuchy niezrealizowane do zakończenia procedury mogą rosnąć, zanim zostaną usunięte, zwiększając tym samym efektywność procedury. Dla danego problemu wymiany nerek kojarzenie jest **Pareto efektywne**, jeżeli nie ma innego kojarzenia, które jest silnie preferowane przez co najmniej jednego pacjenta, a słabo preferowane przez wszystkich pozostałych pacjentów. Efektywność TTCC z przedstawioną regułą wyboru gwarantuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie [Roth Sömnez, Ünver, 2004, s. 472]: „Algorytm TTCC jest Pareto efektywny, jeśli reguła wyboru k-łańcuchów, które zostały wybrane przed ostatnią rundą algorytmu, zachowuje je (nie realizując wymiany) do następnej rundy. W przeciwnym przypadku algorytm może nie być Pareto efektywny".

Program wymiany nerek odniósł ogromny sukces w Stanach Zjednoczonych, a liczba przeszczepionych tą drogą nerek wzrosła od 2 w 2000 r., kiedy go zapoczątkowano, do 590 w 2013 r. Większość przeszczepów dla pacjentów o wysokim PRA > 80% odbyła się za pomocą tej metody. Za przeszczepami od żyjących dawców świadczą również statystyki medyczne przeżywalności. Średni czas życia pacjentów z nerką od zmarłego dawcy wynosi 5-15 lat, podczas gdy w przypadku żywych dawców wynosi on 10-30 lat [American Society of Transplantation, 2012]. Główny patron i twórca programu Alvin Roth został uhonorowany w 2012 r., wraz z Lloydem Shapleyem za „teorię stabilnych alokacji i praktykę projektowania rynków", nagrodą im. A. Nobla w dziedzinie nauk ekonomicznych.

Podsumowanie

W pracy przedstawiono przykłady rynków kojarzeń, które różnią się od tradycyjnych rynków towarów tym, że nie wystarczy „wybrać", ale trzeba również „zostać wybranym". Jako modelowy zdefiniowano rynek skojarzeń matrymonialnych, dla którego wprowadzono pojęcie skojarzenia stabilnego oraz skojarzeń K- i M-optymalnych. Zdefiniowano algorytm odroczonej akceptacji, który, w zależności od strony, która jako pierwsza się oświadcza, generuje dla niej optymalne skojarzenia stabilne. Wszystkie skojarzenia stabilne rynku o ścisłych preferencjach mają, względem relacji słabego porządku, strukturę kraty z elementami ekstremalnymi danymi przez skojarzenia K- i M-optymalne. Rynek skojarzeń matrymonialnych okazuje się nieodporny na manipulacje. Może się opłacać tworzenie koalicji graczy, którzy podając nieprawdziwe preferencje, mogą uzyskać niestabilne (względem prawdziwych preferencji) skojarzenia dla nich korzystniejsze. Jednak nie dla wszystkich. Optymalne skojarzenia stabilne są, dla danej strony, przynajmniej słabo Pareto optymalne w zbiorze wszystkich skojarzeń. W przypadku istnienia kilku stabilnych skojarzeń istnieje również indywidualny mechanizm osiągania bardziej korzystnych skojarzeń, dzięki podaniu nieprawdziwej – ograniczonej listy preferencji.

Algorytmy dopasowania studentów i uczelni, uczniów i szkół można w prosty sposób uzyskać z algorytmów skojarzeń matrymonialnych przy jednym wszakże założeniu, że preferencje zespołowe są w przypadku tych instytucji responsywne, tzn. że preferencje odnośnie do danego studenta nie zależą od składu już posiadanych studentów. W tym przypadku, dla ścisłych preferencji uczelni i studentów, optymalne dla studentów stabilne dopasowanie jest słabo Pareto optymalne, lecz optymalne dla uczelni stabilne dopasowanie nie musi być dla nich słabo Pareto optymalne. Ten brak odporności na manipulacje jest jednak skompensowany tym, że na tym rynku zazwyczaj nie ma pełnej informacji o preferencjach obu stron.

Pełną odpornością na manipulacje mają skojarzenia uzyskane dzięki algorytmowi TTC, który jest jednym ze składowych algorytmu TTCC wykorzystywanego w programach wymiany nerek. W pracy zdefiniowano ten algorytm wraz z nieodzowną regułą wyboru, która określa zasady postępowania z tzw. k-łańcuchami. Łańcuchy te określają sposoby postępowania w przypadkach, kiedy znalezienie nerki do przeszczepu jest najtrudniejsze. Dla wprowadzonej reguły wyboru algorytm TTCC jest Pareto efektywny, a zatem odporny na manipulacje.

We współczesnym świecie rynki kojarzeń będą nabierały na znaczeniu. Jest coraz więcej transakcji, dla których istotnym zagadnieniem jest optymalizacja wykorzystania posiadanych zasobów. Istotną cechą tych rynków jest ich głębokość, czyli liczba dóbr (nerek, szkół, domów), które podlegają kojarzeniu. Im głębszy rynek, tym większa szansa optymalnego wykorzystania istniejących zasobów. Na wielu rynkach jest teoretycznie możliwe zastosowanie do kojarzenia mechanizmów finansowych, podobnych do tych stosowanych na rynkach towarowych. Jednak nie chcemy przecież dopuścić do sytuacji, żeby można było sobie kupić żonę/męża, nerkę do transplantacji czy miejsce w prestiżowej szkole publicznej. Takie transakcje są w naszej kulturze niedozwolone.

Rynki, aby sprawnie działały, muszą być dobrze zaprojektowane, zapewniające, gdzie to możliwe, Pareto optymalność skojarzeń. Rynki towarowe kształtowały się przez setki lat. Rynki kojarzeń wymagają dobrych algorytmów i w tej dziedzinie jest jeszcze wiele do zrobienia. Teoria gier coraz częściej pomaga ludziom rozwiązywać problemy, o których jej twórcy, w połowie XX w., nawet nie myśleli.

Literatura

American Society of Transplantation (2012), *Organ Procurement and Transplantation Network and Scientific Registry of Transplant Recipients 2010*, https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1111/j.1600-6143.2011.03886.x (dostęp: 06.07.2018).

Anholcer M. (2006), *O różnych uogólnieniach dwustronnego zagadnienia przydziału* [w:] T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie Preferencji a Ryzyko '06*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego w Katowicach, Katowice, s. 181-192.

Gale D., Shapley L. (1962), *College Admissions and the Stability of Marriage*, "American Mathematical Monthly", Vol. 69, s. 9-15.

Knuth D.E. (1976), *Mariages Stables*, Les Presses de l'Universite de Montreal, Mortreal.

Poltransplant (2016), *Statystyka przeszczepiania narządów od zmarłych/żywych dawców w miesiącach*, http://www.poltransplant.org.pl/statystyka_2016.html (dostęp: 6.07.2018).

Roth A.E. (1982a), *Incentive Compatibility in a Market with Indivisibilities*, "Economics Letters", Vol. 9, s. 127-132.

Roth A.E. (1982b), *The Economics of Matching: Stability and Incentives*, "Mathematics of Operations Research", Vol. 7, s. 617-628.

Roth A.E. (1985), *The College Admissions Problem is not Equivalent to the Marriage*, "Journal of Economic Theory", Vol. 36, s. 277-288.

Roth A.E. (2007), *Deferred Acceptance Algorithms: History, Theory, Practice, and Open Questions*, http://www.nber.org/papers/w13225 (dostęp: 6.07.2018).

Roth A.E. (2014), *Introduction to Matching Markets and Market Design*, https://goo.gl/VGtgF4 (dostęp: 06.07.2018).

Roth A.E., Postlewaite A. (1977), *Weak versus Strong Domination in a Market with Indivisible Goods*, "Journal of Mathematical Economics", Vol. 4, s. 131-137.

Roth A.E., Sotomayor M. (1990), *Two-sided Matching: A Study in Game-theoretic Modeling and Analysis*, Econometric Society Monograph Series, Cambridge University Press, Cambridge.

Roth A.E., Sotomayor M. (1992), *Two-sided Matching* [w:] R.J. Aumann, S. Hart (eds.), *Handbook of Game Theory*, Vol. 1, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, s. 486-541.

Roth A.E., Sömnez T., Ünver U.M. (2004), *Kidney Exchange*, "Quarterly Journal of Economics", Vol. 119(2), s. 457-488.

Shapley L., Scarf H. (1974), *On Cores and Indivisibility*, "Journal of Mathematical Economics", Vol. 1, s. 23-37.

Świtalski Z. (2008), *O pewnym algorytmie poszukiwania stabilnych skojarzeń* [w:] T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie Preferencji a Ryzyko '08*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego w Katowicach, Katowice, s. 101-112.

Świtalski Z. (2015), *Some Properties of Competitive Equilibria and Stable Matchings in a Gale–Shapley Market Model*, „Studia Ekonomiczne, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach", nr 248, s. 222-232.

MARKET DESIGN BY MATCHING ALGORITHMS

Summary: The paper presents the theory of stable allocations of deferred acceptance algorithms (DAA), as well as TTC and TTCC algorithms together with their applications to matching, e.g. universities and students, homes and owners or donors and transplant patients. These algorithms design so-called matching markets, for which optimal allocation of goods is possible without the use of financial mechanisms specific to commodity markets. Discussed are properties of matching algorithms: their stability, Pareto's optimality and resistance to manipulation. The TTCC algorithm allows to replace the pairwise exchange by the chain exchange transplantations, which due to the thickness of market improve match quality of transplanted kidneys.

Keywords: matching markets, stable matching, Pareto optimal, kidney exchange.