UNIVERSIDADE DE LISBOA
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

A APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS ATRAVÉS DAS CONEXÕES ENTRE AS SUAS REPRESENTAÇÕES: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO NO 2.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Hélia Margarida Gaspar Lopes Ventura

DOUTORAMENTO EM EDUCAÇÃO

DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

2013

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

A APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS ATRAVÉS DAS CONEXÕES ENTRE AS SUAS REPRESENTAÇÕES: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO NO 2.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Hélia Margarida Gaspar Lopes Ventura

Tese orientada pela Professora Doutora Hélia Margarida Oliveira, especialmente elaborada para a obtenção do grau de doutor em Educação na especialidade de Didática da Matemática

2013

Trabalho realizado no âmbito do Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática financiado pela FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia através do contrato PTDC/CPE–CED/098931/2008.

Apoio financeiro da Fundação para a Ciência e a Tecnologia que concedeu uma bolsa para a realização deste doutoramento (SFRH/BD/43642/2008).

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Resumo

Esta investigação procura compreender a evolução dos alunos, de uma turma de 5.º ano, na aprendizagem do conceito de número racional, tendo por base uma experiência de ensino, que procurou criar um contexto favorável ao estabelecimento de conexões entre as várias representações dos números racionais, através de uma sequência de tarefas matemáticas que promoveu o uso da barra numérica. Este estudo pretende também analisar as potencialidades da sequência de tarefas proposta para a aprendizagem dos alunos relativamente ao referido conceito, em particular no que diz respeito ao papel atribuído aos modelos.

O enquadramento teórico centra-se em duas vertentes: os números racionais e a aprendizagem dos números racionais. A primeira abarca o sentido de número, a construção do conceito de número racional e os seus vários significados. A segunda reporta-se ao papel das representações e dos modelos na aprendizagem dos racionais, bem como às estratégias de resolução de problemas e às dificuldades e erros dos alunos mais comuns neste domínio.

Este estudo segue o paradigma metodológico de *design research*, assumindo a forma de uma experiência de ensino planeada colaborativamente com a professora de matemática da turma (Inês), a partir da qual se elaborou um estudo de caso de um grupo de quatro alunos. Foi também analisado o desempenho da turma no tema dos números racionais num teste antes e num teste após a realização da sequência de tarefas pelos alunos.

Deste estudo é possível concluir que os alunos evoluíram na sua aprendizagem do conceito de número racional, pois, na sua maioria, conseguem resolver com sucesso os problemas propostos, para os significados de parte-todo, quociente, operador e medida, e evidenciam capacidade para trabalhar com o valor de posição dos números, com as múltiplas representações dos números racionais e suas conexões, assim como flexibilidade com as unidades de referência. Os resultados da presente investigação evidenciam que a integração do modelo da barra numérica nas tarefas propostas levou a que, para os alunos, este progredisse de um *modelo de* para se transformar num *modelo para* raciocinar, uma vez que o usam, de forma espontânea, como estratégia de resolução de grande parte das tarefas. Ainda assim, muitos alunos revelam dificuldades no significado razão e alguns deles na concetualização da unidade quando está subjacente o significado operador.

Palavras-chave: Números racionais; Representações; Conexões; Modelo da barra numérica; Experiência de ensino; 5.º ano.

Abstract

This research aims to understand the students' progress in learning the rational number concept, based on a teaching experiment with a grade 5 class that attempted to create a favorable context to the establishment of connections between different representations of rational numbers, through one sequence of mathematical tasks that promoted the use of the numerical bar. In addition, this study also aims to examine the potential of that sequence of tasks for the students learning of that such concept, in particular in respect to the role assigned by students to the models.

The theoretical framework focuses on two dimensions: the rational numbers and the learning of rational numbers. The first comprises number sense, the construction of rational number and its various meanings. The second focuses on the role of representations and models in rational numbers learning, as well as on the strategies for solving problems and the difficulties and mistakes that students often make when learning rational numbers.

This study follows the methodology paradigm of design research, developed as a teaching experiment which was planned collaboratively with the mathematics teacher of the class (Inês). A case study was developed concerning one group of four students. The class performance on rational numbers was also analyzed from one test applied before the teaching experiment and another after.

From this study it is possible conclude that the students progressed in their learning about the rational number concept, as they can successfully solve the problems proposed, concerning part-whole, quotient, operator, and measure constructs, and show the ability to work with numbers place value, with the multiple representations of rational numbers and their connections, as well as the flexibility with the reference units. The results of this research show that the integration of the model of number bar in the proposed tasks allowed that it progressed from a *model of* to become a *model for* reasoning, since students resort to it spontaneously as a strategy for solving most of the tasks. Nevertheless, many students have difficulties in ratio construct and some of them on the unit conceptualization when the underlying construct is the operator.

Keywords: Rational numbers; Representations; Connections; Model of the number bar; Teaching experiment; Grade 5.

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Hélia Oliveira por toda a dedicação, paciência e apoio que me prestou ao longo dos cinco anos da realização deste trabalho, com quem muito aprendi, e por me ter dado a conhecer este lado do mundo académico, que desconhecia.

À Professora Doutora Leonor Santos, por ter sido a primeira pessoa dentro da Faculdade de Ciências que respondeu aos meus contactos permitindo-me iniciar este percurso académico.

À Professora Inês, a professora da turma do 5.º ano de escolaridade, com quem tive o prazer de trabalhar, pela sua grande disponibilidade para aceitar este desafio de modo a proporcionar a realização desta investigação.

Aos elementos que estiveram na direção da escola da professora Inês, durante o ano letivo 2008/2009, aos alunos da turma onde a investigação decorreu e respetivos encarregados de educação, por terem permitido que este estudo se pudesse realizar.

À Fundação para a Ciência e Tecnologia, pela bolsa que me concedeu para a realização deste doutoramento (SFRH/BD/43642/2008).

A todos com quem me cruzei em encontros de investigação, seminários e conversas informais, que contribuíram com críticas pertinentes e sugestões de melhoria para a presente investigação.

À escola onde pertenci nos anos letivos 2009/2010, 2010/2011 e 2011/2012, pela disponibilidade e flexibilidade que tiveram de modo a permitirem algumas ausências da minha parte, para que eu pudesse ampliar os meus conhecimentos de modo a desenvolver este trabalho.

Aos colegas e amigos, em especial à Ana Sofia, que souberam ouvir muitos dos meus desabafos e inquietações, tendo-me confortado com palavras de ânimo e incentivo.

Aos meus pais por terem transmitido o valor inestimável que o ensino tem, tendo-me feito valorizar muito um percurso académico, e olhar para o Doutoramento como uma meta a atingir, permitindo o meu enriquecimento profissional e realização pessoal.

Ao Hélder, que acompanhou este percurso e ao maior tesouro da minha vida, à Helena, a quem dedico o meu trabalho, pelo orgulho e felicidade de a ter como filha, e por, apesar da sua pouca idade, ter compreendido e nunca ter cobrado algumas ausências da mãe, recebendo-me sempre de braços abertos e com um enorme sorriso nos lábios.

Índice Geral

Índice de Quadros

Índice de Figuras

Índice de Anexos

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Este capítulo começa por contextualizar a investigação que realizei, e simultaneamente, justificar a sua pertinência. Posteriormente são apresentados os objetivos e as questões que nortearam a presente investigação, terminando com uma breve descrição da estrutura da dissertação.

1.1. Enquadramento e pertinência do estudo

Os Números Racionais constituem um tema curricular onde os alunos do ensino básico apresentam amiúde muitas dificuldades, devido à complexidade dos conceitos e tópicos envolvidos, sendo, contudo, fundamentais no seu desenvolvimento matemático. A importância do conceito de número racional é visível no avolumar de estudos centrados no ensino e aprendizagem do tema[1], nas últimas décadas (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Behr, Harel, Post & Lesh, 1993; Confrey, 2009; Kieren, 1980; Lamon, 2007; Oliveira, 1994; Pinto, 2011; Ponte & Quaresma, 2011a; Steffe, 2004). A investigação na área dos números racionais tem grande relevância no panorama da educação matemática e tem tido diversas incidências, destacando-se duas que me despertaram a atenção quando comecei a tentar dar sentido a este enorme volume de estudos nesta temática. Uma delas foca-se nos possíveis significados dos racionais (medida, quociente, razão, operador e relação parte-todo), que Kieren (1988) considera serem a chave para a construção do conhecimento deste conceito, perspetiva que deu origem a numerosos estudos. Outra diz respeito às várias representações de um número racional no ensino, uma vez que se vem reconhecendo que uma abordagem isolada das frações, dos decimais e das percentagens é uma das fontes de dificuldades por parte dos alunos neste tema (Sweeney & Quinn, 2000). É neste âmbito que Moss (2005) vinca a importância de os alunos compararem quantidades através das diferentes

[1] Ao longo deste trabalho são apenas considerados os números racionais não negativos.

representações. Além disso, a autora também aponta como dificuldades o facto de, frequentemente, este tema não ser desenvolvido com os alunos segundo um modelo adequado (Moss, 2005).

Estas ideias contribuíram de forma decisiva para delinear uma proposta de ensino com o objetivo de apoiar os alunos a desenvolver um conceito mais sólido de número racional que não os deixe reféns de procedimentos que efetuam sem sentido.

A introdução deste conceito está longe de ser trivial (Merlini, 2005), tanto do ponto de vista do ensino, como da aprendizagem, até porque alguns professores manifestam dificuldades na lecionação deste tema, uma vez que não estão habituados a olhar para a multiplicidade de significados que os números racionais comportam (Cardoso & Mamede, 2011). No entanto as orientações curriculares nacionais (ME, 2007), e a vasta investigação empírica sobre os racionais (Lamon, 2006, 2007; Moss, 2005; Sweeney & Quinn, 2000; White & Mitchelmore, 2005), têm mostrado que é importante que os alunos trabalhem as várias representações destes números, justificando o seu raciocínio e fazendo generalizações. Além disso, a necessidade da existência de contextos que permitam aos alunos visualizar e compreender a relação entre as representações dos números racionais é de extrema importância (Huinker, 2002), pois estes facilitam o desenvolvimento de uma compreensão gradual mas sustentada destes números (Carvalho 2005; Confrey, 2009; Duval, 2006; Lembke & Reys, 1994). Assim, o seu conhecimento não se torna redutor e compartimentado (Panaoura, Gagatsis, Deliyianni & Elia, 2009), o que pode conduzi-los a experimentar uma série de dificuldades (Lamon, 2006), mas, pelo contrário favorece o recurso a diversas estratégias aquando da resolução de problemas (Panaoura et al., 2009; Seufert, 2003).

A importância dada às representações, tal como foi referido, deve-se ao facto de estas serem uma realidade da matemática e do ensino que ajudam a dar sentido à mesma, pois complementam o conceito que lhe está subjacente e ajudam na interpretação de outras representações (Ainsworth, 2006). No entanto, a utilização, por parte de um aluno, das diferentes representações de um mesmo conceito, não é comum. Ao invés, os alunos tendem a centrar-se na que lhes é mais familiar ou concreta (Ainsworth, 2006; Cox & Brna, 1995). Deste modo, é importante que no ensino, mesmo numa fase inicial, se explorem as várias representações dos números racionais, para que os alunos compreendam que estas não são entidades distintas, mas que dizem respeito ao mesmo conceito.

A nível nacional, no momento em que este estudo se inicia, no ano de 2008, vivia-se uma mudança a nível curricular com a experimentação do programa de Matemática (ME, 2007), que iria entrar em vigor no ano letivo seguinte (2009/2010). Este programa "apresenta-se como um reajustamento dos programas anteriores" (Ponte, 2009, p. 97) do ensino básico, onde o ensino dos números e das operações se encontra agora associado ao desenvolvimento do sentido de número, ao invés de uma introdução precoce dos algoritmos convencionais. Deste modo, considera-se que

> em vez de se começar a ensinar os algoritmos das diversas operações, desde muito cedo, e na sua forma convencional, procura-se que os alunos desenvolvam, desde o início, os seus processos próprios para resolver problemas aritméticos. (Ponte, 2009, p. 99)

Neste contexto de renovação curricular, a introdução dos números e operações só faz sentido se permitir o desenvolvimento do sentido do número e a fluência de cálculo (Brocardo, Serrazina & Kraemer, 2003; ME, 2007). No âmbito dos números racionais diversos estudos mostram que, de facto, é muito importante que os professores coloquem mais ênfase na compreensão conceptual dos números racionais, em vez de introduzirem precocemente regras, procedimentos algorítmicos (Berh et al., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006; Lamon, 2006) e linguagem simbólica (Behr et al., 1983) para que os alunos operem com frações. É nesse sentido que é sugerido um trabalho paralelo com frações e decimais, partindo do significado parte-todo, contrariando a tendência dos programas anteriores, que começavam pela representação decimal e onde o primeiro significado a ser enfatizado era o de operador (Ponte, 2009).

O programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007) refere, deste modo, que os alunos precisam não só de compreender as várias representações dos números racionais como também de relacioná-las.

> Os alunos têm de compreender que existe uma variedade de representações [pois a] capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra é tão importante como saber (…) interpretar a informação apresentada. (p. 9)

Muitas vezes, as conexões entre as várias representações dos racionais que recorrem a imagens ou símbolos favorecem a compreensão dos alunos (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992). Deste modo, a utilização de material concreto "como tiras de papel que representem partes fracionárias (…) fornecem aos alunos representações concretas de ideias abstratas, facilitando a utilização das representações com compreensão e a flexibilidade na conversão [entre elas]" (NCTM, 2007, p. 54). Torna-se assim importante que os conceitos matemáticos sejam, sempre que possível, introduzidos através de modelos. Além disso, o professor deve enfatizar sempre as relações entre as várias representações dos números racionais, quando aborda este tema. Por exemplo, segundo Moss (2005), quando se abordam as percentagens deve-se colocar em evidência a sua relação com os decimais e com as frações, bem como o facto de serem uma forma natural de pensar acerca das proporções (Moss & Case, 1999), uma vez que são uma espécie de razão em que a segunda quantidade é sempre 100 (Lamon, 2006).

Em síntese, o meu interesse pela aprendizagem dos números racionais baseia-se em vários aspetos. Primeiro porque tinha conhecimento pessoal das dificuldades que os alunos têm no âmbito dos números racionais; depois porque é um tema que se reveste de grande importância para a investigação a nível internacional. Também a sua atualidade no nosso país, dadas as alterações curriculares ocorridas no momento em que iniciei este trabalho, e o facto de a nível nacional existir investigação que se focava principalmente no campo dos significados, operações, estratégias, erros e dificuldades dos alunos (Garcia, 2008; Mamede, 2007; Monteiro & Costa, 1996; Monteiro & Pinto, 2006; Oliveira, 1994; Pinto, 2004), foram motivos que me impulsionaram a realizar um estudo incidindo sobre as conexões entre as várias representações dos números racionais. No entanto, no decorrer da realização deste estudo, foram surgindo outros trabalhos também focalizados nas conexões entre as representações dos números racionais (Macieira, 2011; Quaresma, 2010), bem como nas suas operações (Pinto, 2011), os quais permitem começar a traçar um quadro das aprendizagens dos alunos no contexto da renovação curricular que ocorreu no nosso país (ME, 2007), bem como contribuir de uma forma mais global para a compreensão desta problemática.

1.2. Objetivos e questões do estudo

Este estudo centra-se nos alunos e segue a modalidade de uma experiência de ensino que foi planificada baseada numa conjetura (Lesh & Kelly, 2000). Esta conjetura assenta em duas dimensões, a dimensão de conteúdo e a dimensão pedagógica. A primeira baseia-se no desenvolvimento do conceito de número racional através de uma abordagem paralela das várias representações dos números racionais, do estabelecimento de conexões entre elas, e dos vários significados dos números racionais, ao longo dos primeiros anos de escolaridade (ME, 2007), bem como na utilização de modelos que favorecem a compreensão (van Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen & Keijer, 2008). A segunda dimensão tem em conta o ambiente de trabalho na sala de aula, as tarefas propostas e as aprendizagens realizadas com compreensão.

Procurando seguir estas dimensões associadas à conjetura, foi delineada colaborativamente com a professora titular da turma (Inês) uma experiência de ensino na disciplina de Matemática e no tema Números Racionais, com uma turma de 5.º ano de escolaridade, no ano letivo 2008/2009. Nesse momento, o programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) ainda não estava em vigor, encontrando-se em fase de experimentação em algumas turmas-piloto, entre as quais se encontrava a turma do presente estudo. Deste modo, a experiência destes alunos com os números racionais, centrava-se essencialmente na representação decimal dos mesmos. Neste contexto foi planeada e levada à prática uma sequência de tarefas, baseada nos seguintes pressupostos:

- O ensino dos números racionais deve preconizar uma abordagem paralela das suas várias representações e encorajar os alunos a estabelecer conexões entre estas (ME, 2007; NCTM, 2007);
- O ensino dos números racionais deve partir de tarefas simples (partilha equitativa) e ir, progressivamente, abarcando os vários significados destes números (ME, 2007);
- A aprendizagem da Matemática deve ser feita com compreensão (NCTM, 2007), sendo favorecida se os conceitos matemáticos forem introduzidos através de modelos de situações concretas, nomeadamente da barra numérica (van Galen et al., 2008; van den Heuvel-Panhuizen, 2003) e de contextos familiares para os alunos (Ball, 1993);
- A aprendizagem da Matemática envolve o desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas, raciocínio e comunicação, pelo que os momentos de discussão/reflexão com os alunos se tornam fundamentais (ME, 2007).

Além dos aspetos mencionados ainda se teve em atenção na experiência de ensino a diversificação do tipo de tarefas propostas aos alunos, de acordo com as orientações metodológicas gerais do programa de Matemática (ME, 2007). Deste modo, os alunos realizaram tarefas de exploração e problemas, de acordo com a designação dada por Ponte (2005).

Considerando os pressupostos enunciados e a diversificação do tipo de tarefas, a experiência de ensino baseou-se numa sequência de tarefas que têm por base um contexto significativo e familiar para os alunos e que envolvem o uso de modelos que suportam o seu raciocínio. As tarefas contemplam diferentes tipos de unidades (discretas e contínuas), percorrem os vários significados de número racional, assim como as suas várias representações, surgindo estas em simultâneo, para que os alunos compreendam que são formas equivalentes de representar o mesmo número, promovendo assim a flexibilidade na conversão entre as mesmas. Deste modo, tentou-se criar um contexto favorável ao estabelecimento de conexões entre as várias representações dos racionais, através de tarefas e do uso de modelos, principalmente a barra numérica. É de salientar que esta sequência de tarefas foi sendo reajustada pela investigadora e pela professora Inês, em função do trabalho desenvolvido na aula.

Tendo por base esta experiência de ensino no tema dos números racionais, realizada no 5.º ano do ensino básico, este estudo tem dois objetivos: (1) compreender como os alunos de um grupo, em particular, e mais globalmente da turma evoluem na aprendizagem do conceito de número racional; e (2) analisar as potencialidades de uma sequência de tarefas elaborada para a aprendizagem dos alunos relativamente ao conceito de número racional.

Relativamente ao primeiro objetivo, pretende-se dar resposta às seguintes questões:

- Que capacidades revelam os alunos relativamente à concetualização da unidade, ao uso de sistemas de referência e à densidade e valor de posição dos números?
- Que compreensão revelam os alunos das múltiplas representações de um número racional, em particular, que conexões estabelecem entre elas?
- Que estratégias utilizam os alunos na resolução de tarefas com os vários significados de um número racional?

Relacionado com o segundo objetivo surge a questão:

- Quais as potencialidades da sequência de tarefas proposta, para a aprendizagem dos números racionais, em particular no que diz respeito ao papel atribuído aos modelos?

As orientações curriculares (ME, 2007) e a investigação em educação matemática têm recomendado o estudo dos números racionais, nas várias representações, e de forma paralela. Assim, esta investigação procura contribuir para um melhor conhecimento das possibilidades e implicações de uma nova abordagem ao estudo dos números racionais, visando a flexibilidade na utilização das suas várias representações, ao longo do ensino básico.

1.3. Estrutura da dissertação

Esta dissertação encontra-se estruturada em duas grandes partes: a primeira diz respeito ao enquadramento teórico que fundamenta o estudo e a outra à parte empírica do mesmo.

A primeira parte é constituída por três capítulos, começando com uma fundamentação e pertinência do estudo, bem como a apresentação dos seus objetivos e respetivas questões no presente capítulo. Os capítulos seguintes (Capítulo II e III) abordam os temas centrais desta investigação. O tema central do Capítulo II são os números racionais, onde se começa por abordar o desenvolvimento do sentido de número de acordo com o modelo de McIntosh, Reys e Reys (1992), passando-se de seguida para a construção do conceito de número racional e posteriormente para a multiplicidade de significados que este conceito comporta. Embora a compreensão das representações esteja intrinsecamente ligada ao conceito de número racional, dada a centralidade deste tópico na presente investigação, este será abordado no capítulo seguinte da fundamentação teórica.

O terceiro capítulo debruça-se sobre a aprendizagem dos números racionais, sendo feita uma abordagem ao papel das representações na aprendizagem da Matemática, particularizando-se de seguida as representações dos números racionais. Aborda-se, ainda, o papel dos modelos na aprendizagem destes números, passando-se posteriormente para as estratégias dos alunos, assim como as suas dificuldades e erros, aquando do seu processo de aprendizagem.

A segunda parte comporta os restantes quatro capítulos, começando por apresentar e justificar as opções metodológicas de acordo com os objetivos do estudo, bem como os participantes do mesmo e os métodos de recolha e análise de dados (Capítulo IV). De seguida surge o Capítulo V com a descrição da experiência de ensino, onde se apresentam os aspetos que orientaram a sua construção, assim como uma descrição das tarefas que a constituem e a sua implementação. A análise dos dados é realizada no Capítulo VI, onde se caracterizam os elementos que constituem o grupo estudo de caso, e se faz uma análise do trabalho que desenvolveram durante a experiência de ensino, assim como dos resultados obtidos por eles no teste inicial e final. Ainda neste capítulo, surge uma análise quantitativa evolutiva da turma, que procura analisar de forma comparativa os resultados do teste inicial com os do teste final de todos os alunos da turma.

Finalmente surge o Capítulo VII que diz respeito às conclusões da presente investigação. Aqui começa-se por fazer uma breve síntese do estudo e de seguida discutem-se os resultados desta investigação que permitem dar resposta às questões do estudo, sendo estes articulados com a literatura apresentada na primeira parte desta dissertação. Ainda neste capítulo, a terminar a dissertação, é realizada uma reflexão pessoal acerca da investigação realizada.

CAPÍTULO II

NÚMEROS RACIONAIS

O conceito de número racional é fundamental no desenvolvimento matemático dos alunos no ensino básico. No entanto, este reveste-se frequentemente de grande dificuldade motivando o interesse dos investigadores, como se evidencia pelo avolumar de estudos centrados no ensino e aprendizagem dos racionais, nas últimas décadas (Lamon, 2007). A investigação na área dos números racionais tem grande relevância no panorama da educação matemática e tem seguido direções diversas, tais como incidência nas operações, nos erros, nas dificuldades, nas várias representações e significados.

Este capítulo tem início com uma apresentação das ideias de alguns autores que tentam caracterizar a expressão "sentido de número", assim como algumas perspetivas sobre a construção do conceito de número racional. Finalmente faz-se uma descrição dos vários significados do número racional, identificando-se possíveis relações entre eles.

2.1. O sentido de número

2.1.1. O modelo de McIntosh, Reys e Reys

A expressão "sentido de número" surge como substituta do termo "numeracia", uma vez que este já não é coerente com a visão atual e dinâmica da matemática (McIntosh et al., 1992). De acordo com os autores, o termo "numeracia" era utilizado para descrever o modo como se lidava com a matemática do quotidiano, e atualmente a matemática não é mais vista apenas como fórmulas e regras, mas sim como um processo de dar sentido a todos esses aspetos.

Desde o final dos anos 80, diversos autores têm procurado caracterizar o "sentido de número", focando-se na sua natureza intuitiva, no seu desenvolvimento gradual e no modo como se manifesta nos alunos (Greeno, 1991; Markovits & Sowder, 1994; McIntosh et al., 1992; Sowder, 1992).

O sentido de número está aberto a uma variedade de interpretações, pois pode referir-se a várias capacidades onde se incluem o cálculo mental flexível, a estimativa de quantidades numéricas e os julgamentos quantitativos (Greeno, 1991), ou a conhecimentos matemáticos observáveis em contextos educativos ou ligados à vida ativa de qualquer cidadão (Brocardo, Serrazina & Rocha, 2008). Já Yang, Hsu e Huang (2004) definem "sentido de número" conjugando estas duas interpretações pois de acordo com estes autores, esta expressão "refere-se à compreensão geral que uma pessoa tem sobre os números e as operações e a capacidade de lidar com situações do dia-a-dia que envolvem números" (p. 408). Além disso, o "sentido de número" também envolve a destreza para usar essa compreensão de uma forma flexível, com o intuito de se conseguir fazer juízos matemáticos e desenvolver estratégias úteis (incluindo o cálculo mental e as estimativas) para lidar com números e operações (McIntosh et al., 1992; Reys & Yang, 1998; Yang, 2003). Em suma, "o sentido de número é um processo complexo que envolve as muitas diferentes componentes dos números, operações e as suas relações" (Yang, Reys & Reys, 2009, p. 384).

O sentido de número tem assim um grande destaque no campo da Educação Matemática, constituindo uma atividade matemática com sentido (*sense-making activity*) (NCTM, 1994), existindo mesmo quem diga que "o ensino e aprendizagem do sentido de número tem sido (…) o tema fulcral da educação matemática no século vinte e um" (Yang et al., 2004, p. 426).

Com o intuito de clarificar a definição de sentido de número, McIntosh et al. (1992) apresentam um modelo suscetível de classificar esta definição, reconhecendo três componentes fundamentais: **a)** conhecimento e destreza com os números; **b)** conhecimento e destreza com as operações e **c)** aplicação do conhecimento e da destreza com os números em situações de cálculo. De acordo com os autores, cada uma das componentes apresentadas envolve várias capacidades que os alunos devem desenvolver para que, consequentemente desenvolvem o sentido de número (Quadro 1).

Componentes do Sentido de Número	Capacidades a Desenvolver	Aspetos Específicos
Conhecimento e destreza com os números	Compreender o sentido da regularidade dos números	Valor de posição
		Relações entre tipos de números
		Ordenação de números do mesmo tipo ou entre tipos de números
	Compreender o sentido das grandezas, relativa e absoluta dos números	Comparação com referentes físicos
		Comparação com referenciais matemáticos
	Reconhecer as múltiplas	Gráficas/simbólicas

	representações dos números	Formas numéricas equivalentes (incluindo decomposição/recomposição)
		Comparação com números de referência
	Reconhecer os sistemas de referência para pensar sobre os números	Matemáticos
		Pessoais
Conhecimento e destreza com as operações	Compreender o efeito das operações	Operações com números inteiros
		Operações com frações/decimais
	Compreender as relações entre as operações	Adição/Multiplicação
		Subtração/divisão
		Adição/subtração
		Multiplicação/divisão
	Compreender as propriedades matemáticas	Comutativa
		Associativa
		Distributiva
		Identidades
		Inversa
Aplicação do conhecimento e da destreza com os números em situações de cálculo	Compreender a relação entre o contexto de um problema e os cálculos necessários	Reconhecer dados exatos ou aproximados
		Ter consciência que as soluções podem ser exatas ou aproximadas
	Reconhecer a existência de múltiplas estratégias	Capacidade para criar e/ou inventar estratégias
		Capacidade para identificar estratégias diferentes
		Capacidade para selecionar a estratégia adequada
	Identificar representações e/ou métodos eficazes	Agilidade com vários métodos (mentais, calculadoras, papel e lápis)
		Destreza para escolher números eficazes
	Rever os dados e o resultado	Reconhecer a razoabilidade dos dados
		Reconhecer a razoabilidade dos cálculos

Quadro 1 – Modelo de caracterização do sentido de número (adaptado de McIntosh et al., 1992).

De acordo com McIntosh et al. (1992) para que os alunos tenham conhecimento e destreza com os números, precisam não só de compreender o *sentido da regularidade dos números*, e o *sentido das suas grandezas, relativa e absoluta*, como também de reconhecer as *múltiplas representações dos números* e os *sistemas de referência* para pensar sobre os números.

Compreender o *sentido de regularidade dos números* implica a compreensão da organização do sistema decimal de posição, abrangendo os números inteiros, os números racionais e suas representações, uma vez que auxilia os alunos a comparar e ordenar números (McIntosh et al., 1992). Estes autores mencionam que o recurso à calculadora pode ajudar os alunos a identificar e repetir padrões e que a linha numérica é um modelo essencial para que os mesmos compreendam as relações que existem entre as representações decimais. À medida que os alunos vão desenvolvendo o sentido de regularidade (incluindo a ordenação), conseguem identificar um número que compreendido entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{5}$ (McIntosh et al., 1992).

Compreender as *grandezas relativas e absolutas dos números*, significa que os alunos conhecem o valor relativo e absoluto dos números, ou seja, por exemplo, quando os alunos comparam frações, não precisam de estar dependentes de regras como encontrar o mínimo denominador comum (Behr, Wachsmuth, Post & Lesh, 1984; Cramer, Post & Delmas, 2002). De acordo com McIntosh et al. (1992), para que os alunos desenvolvam esta compreensão em vários contextos, os mesmos devem ter a oportunidade de refletir sobre números grandes contextualizados a nível pessoal, ou seja, devem refletir sobre questões do género "viveste mais ou menos de 1000 dias?" (p. 6).

Reconhecer as *múltiplas representações dos números*, envolve a manipulação dos números de diversas formas, incluindo a flexibilidade na utilização das várias representações dos números, conseguindo passar de uma representação para outra. Por exemplo, de acordo com McIntosh et al. (1992), um aluno que reconheça que 2+2+2+2=4x2 possui um conhecimento concetual importante da relação entre a adição e a multiplicação. De acordo McIntosh et al. (1992) e Huinker (2002) compor e decompor números é uma capacidade de escrever os números de forma equivalente, bastante útil para operar com os números. Ou seja, perante a adição entre 27 com 25, um aluno que compreenda que 27=25+2, facilmente calcula a soma, fazendo 25+25=50 e depois 50+2=52 (McIntosh et al., 1992). Além disso, compreender que os números se podem representar de várias formas ($\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ ou $\frac{3}{4}=75\%$) e reconhecer que algumas delas são mais úteis que outras em determinadas situações, é um aspeto importante para o desenvolvimento matemático (McIntosh et al., 1992; Huinker, 2002). Segundo McIntosh et al. (1992) o reconhecimento e a utilização de âncoras para comparar e fazer avaliações são um aspeto comum no nosso sistema de numeração (compreender que $\frac{5}{8}$ é maior que metade, porque metade seria $\frac{4}{8}$). De acordo com Cruz e Spinillo (2004), os alunos também podem efetuar adições recorrendo a âncoras, como por exemplo, metades:

Operação: $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

C: $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ dá um bolo (nomeia as frações corretamente)

E: Como você sabe?

C: Porque $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ dá a *metade*. Mais $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, dá um bolo. (Cruz & Spinillo, 2004, p. 17)

Desenvolver um *sistema de referência* numérica, implica que os alunos tenham flexibilidade para escolher números de referência (1, $\frac{1}{2}$ e 50% ou 100) que os ajudem a resolver problemas. Por exemplo, quando é pedido a um aluno para estimar o resultado de $\frac{21}{32}$ x $\frac{7}{16}$, se o aluno souber que $\frac{21}{32}$ é menor que 1 e que $\frac{7}{16}$ é menos que $\frac{1}{2}$, poderá concluir que o resultado tem de ser menor que $\frac{1}{2}$ (McIntosh et al., 1992; Yang et al., 2004). De acordo com McIntosh et al. (1992), o recurso a uma variedade de referentes numéricos para dar resposta às situações, é um indicador de que o aluno possui um bom sentido de número.

Para que os alunos tenham <u>conhecimento e destreza com as operações</u>, devem compreender o *efeito das operações* e as *relações entre as mesmas*, bem como as *propriedades matemáticas*.

Compreender o efeito das *operações com os números* significa que o aluno deve reconhecer o efeito que as quatro operações têm sobre estes. Por exemplo, quando se pede aos alunos que façam a melhor estimativa de 391x0,95, estes não precisam de estar dependentes do algoritmo, para encontrarem a resposta (McIntosh et al., 1992), eles devem conseguir aplicar estratégias de estimação para resolver problemas, sem utilizarem o cálculo escrito (McIntosh et al., 1992; Sowder, 1992). Devem conseguir dar significado às operações e compreender que a multiplicação nem sempre tem como resultado um número maior que qualquer um dos fatores e que a divisão nem sempre produz números de valor mais pequeno que o dividendo (Graeber & Tirosh, 1990; Greer, 1987).

Compreender cada uma das quatro operações é fundamental para que os alunos compreendam as *relações entre as operações* permite que o aluno consiga pensar de diversas formas para resolver um problema (McIntosh et al., 1992), uma vez que "o uso dessas relações contribui para o desenvolvimento de estratégias e algoritmos por parte dos alunos, com recurso a cálculos básicos" (Huinker, 2002, p. 74). Por exemplo, diante da questão "quantas rodas existem em seis carros?", o aluno pode pensar de diversas formas para dar uma resposta, recorrendo a: **a)** um procedimento de contagem (contar as rodas uma a uma); **b)** uma adição sucessiva (adicionando as rodas de cada carro → 4+4+4+4+4+4); **c)** uma contagem por grupos (faz quatro grupos de dois carros cada: 8+8+8+8); ou a **d)** uma multiplicação (4x6 ou 6x4). Outra relação que McIntosh et al. (1992) mencionam é a relação entre a operação e a sua inversa, ou seja, de acordo com os autores, o quociente entre 100 e 4 (100:4) pode ser interpretado não apenas como uma divisão, como também como uma multiplicação onde se desconhece um dos fatores (? x4=100). Compreender as relações que existem entre a multiplicação e a divisão, não só com os números inteiros, como também com os números racionais (4,5x0,1=4,5:10 e 4,5:0,1=4,5x10), permitem ao aluno ter à sua disposição, um maior leque de estratégias (McIntosh et al., 1992).

Além da compreensão das operações, bem como das suas relações, *compreender as propriedades matemáticas*, é uma capacidade que Huinker (2002) e McIntosh et al. (1992) referem que os alunos devem desenvolver de forma a aplicarem as propriedades aritméticas da adição e da multiplicação de forma a facilitar as estratégias de cálculo. Por exemplo, de acordo com McIntosh et al. (1992), quando um aluno multiplica mentalmente 33 por 4, ele pode recorrer à propriedade comutativa (4x33); à propriedade distributiva, compondo o número (33=30+3, logo 33x4=30x4+3x4); ou ainda a outras formas equivalentes, tais como: 33=40–7, logo 33x4=40x4–4x7.

Além das três capacidades apresentadas por McIntosh et al. (1992), na componente da destreza com as operações, Huinker (2002) refere ainda mais três capacidades que os alunos devem desenvolver neste âmbito para que desenvolvam a longo prazo, uma compreensão flexível das operações e das suas relações, ou seja, o sentido das operações. Segundo a autora, os alunos têm também de ser capazes de: **a)** compreender os diferentes significados das operações; **b)** utilizar diferentes modelos de representação e **c)** dar significado aos símbolos e à linguagem matemática formal.

A compreensão dos diferentes significados e modelos das operações, é um aspeto fundamental para o desenvolvimento do sentido das operações (Huinker, 2002). De acordo com a autora, estas capacidades desenvolvem-se por meio de tarefas que envolvam os diferentes significados das operações ("a adição é introduzida como unir quantidades, … a multiplicação é introduzida como uma combinação de grupos iguais, e a divisão é discutida como separar uma quantidade em grupos iguais – [partilha]" – p. 72) e os diferentes modelos de representação dos números (modelos circulares, retangulares e lineares – linha numérica).

A capacidade de "dar significado aos símbolos e à linguagem matemática formal desenvolve-se quando os alunos realizam conexões entre a sua compreensão concetual e a linguagem informal" (Huinker, 2002, p. 73). Os símbolos transformam-se em instrumentos de raciocínio, quando os alunos os relacionam com as suas ações e com aspetos que lhes são familiares. Sem esta compreensão, o conhecimento simbólico "fica altamente dependente da memorização e está sujeito à deterioração" (Kieren, 1988, p. 178), pois os alunos manipulam os símbolos sem sentido, em vez de pensarem neles como quantidades, ações a realizar ou já realizadas (Huinker, 2002). Aliás, Kieren (1988) refere que a introdução prematura dos símbolos conduz os alunos a limitações que os impedem de desenvolver o sentido das operações, e consequentemente o sentido de número, pelo facto destes não conseguirem ligar os símbolos ao mundo real.

Em suma, de acordo com Huinker (2002), o sentido das operações, é reforçado "através da ênfase sobre as conexões entre o mundo real, a linguagem oral e as representações concretas, pictóricas e simbólicas" (p. 74) dos números.

Para que os alunos desenvolvam a componente relativa à aplicação do conhecimento e da destreza com os números em situações de cálculo, os mesmos devem *compreender a relação entre o contexto de um problema e os cálculos necessários*, *reconhecer a existência de múltiplas estratégias*, *identificar representações e/ou métodos eficazes* e *rever os dados e o resultado* (McIntosh et al. 1992).

De acordo com os autores, *compreender a relação entre o contexto de um problema e os cálculos necessários*, requer que os alunos, perante a situação com que são confrontados, consigam através da análise do seu contexto, identificar a(s) operação(ões) adequadas para resolverem o problema, bem como a solução mais provável. Deste modo, McIntosh et al. 1992 referem que perante uma situação do género, "O António gastou 2,88€ na compra de maças, 2,38€ na compra de bananas e 3,76€ na compra de laranjas", os alunos podem ser questionados sobre a quantia monetária que o António gastou na compra de toda a fruta (onde os alunos terão de recorrer a métodos de cálculo para darem uma resposta exata), ou sobre o facto de 10€ ser ou não suficiente para pagar a despesa (onde basta os alunos efetuarem uma estimativa).

McIntosh et al. (1992) referem que mais importante do que chegar a um resultado é o aluno *reconhecer a existência de múltiplas estratégias* para resolver determinada questão. De acordo com os autores, os alunos devem reconhecer não só que existem diferentes estratégias para resolverem determinada questão, como também ter a capacidade de reformular a estratégia inicial ou utilizar uma outra alternativa, caso a primeira não resulte.

Os alunos podem reconhecer que existem múltiplas estratégias para resolver determinada questão, no entanto, de acordo com McIntosh et al. (1992), isso não é suficiente para que os alunos desenvolvam o sentido de número. Além desse reconhecimento, os alunos devem ter consciência de que, tal como as representações (aspeto já mencionado anteriormente), algumas estratégias são mais produtivas que outras. De acordo com os autores, um aluno com pouco sentido de número utiliza estratégias mais difíceis e morosas. Por exemplo, para adicionar sete com oito, muitos alunos recorrem à contagem de um em um, em vez de recorrerem à contagem de sete em sete ($7+8=7+7+1=15$).

Depois de obterem uma resposta, os alunos devem ter a capacidade para *rever os dados e o resultado*, ou seja, devem analisar a solução e refletir sobre a sua razoabilidade em função do enunciado, verificando se a solução faz ou não sentido (Huinker, 2002; McIntosh et al., 1992). Isto implica que os alunos tenham a capacidade de utilizar, mentalmente, estratégias para estimar resultados sem terem de recorrer ao papel e lápis (McIntosh et al., 1992) e ao mesmo tempo verificar se o resultado a que chegaram é ou não aceitável (Yang et al., 2004). Por exemplo, quando é pedido aos alunos que, usando a estimativa, coloquem a vírgula no número "162179", que é o produto de 638,5x0,254, eles não precisam de recorrer ao papel e lápis, nem às regras memorizadas, mas podem saber que multiplicar 600 por 0,254 (que é aproximadamente $\frac{1}{4}$) é cerca de 150, logo a resposta "16,2179" (por exemplo) não é aceitável (Yang et al., 2004).

Em suma, McIntosh et al. (1992) referem que o sentido de número engloba não só os números e operações como as suas relações e aplicação a situações de cálculo. Por sua vez, o NCTM (2007) define o sentido de número como a capacidade de decompor e compor números, utilizar números de referência, utilizar as relações entre as operações na resolução de problemas, compreender o sistema de base dez, estimar e reconhecer a grandeza absoluta e relativa dos números. Além disso, Yang et al. (2004) afirmam que o sentido de número deve incluir a compreensão do significado dos números, o reconhecimento da sua magnitude, utilização de "benchmarks", o conhecimento do efeito das operações sobre os números e a capacidade para verificar a razoabilidade dos resultados.

2.1.2. Desenvolvimento do sentido de número

O desenvolvimento do sentido de número é um processo gradual e evolutivo, que começa muito antes do ensino formal (McIntosh et al., 1992), e que se realiza por etapas (Verschaffel, Greer & Corte, 2002). Ele resulta de um conjunto de atividades da educação matemática efetuadas dentro e fora da sala de aula, isto é, o sentido de número é mais "um produto de outras aprendizagens do que um objetivo do ensino intencional" (Greeno, 1991, p. 173).

Não há dúvida que é importante que desde a Educação Pré-Escolar os alunos desenvolvam uma compreensão do significado dos números inteiros, no entanto, para que isso aconteça, os alunos têm de conseguir reconhecer o algoritmo matemático mais elementar, ou seja, terão de conseguir indicar o número de um determinado conjunto pequeno de objetos "sem contar e também através da contagem" (NCTM, 2006, p. 11). Além destes aspetos, para que os alunos consigam resolver problemas, é também importante que dominem certos aspetos, tais como: estabelecer uma correspondência biunívoca, combinar conjuntos, comparar e ordenar números e contar números para além de dez e a própria noção de cardinalidade (NCTM, 2006).

Brocardo, Serrazina e Kraemer (2003) descrevem um conjunto de desafios que ajudam a desenvolver a "aptidão para efetuar cálculos mentalmente, com os algoritmos de papel e lápis ou usando a calculadora" (p. 11), cujas suas condições permitem que os alunos "desenvolvam instrumentos que lhes permitem inventar, formalizar e flexibilizar progressivamente métodos e técnicas de cálculo adequados à resolução de problemas colocados pela vida de todos os dias" (p. 14). Segundo as autoras, introduzir os algoritmos formais, só faz sentido se o seu trabalho permitir o desenvolvimento do sentido de número, ou seja, se for acompanhado de "estratégias de cálculo mental, tendo por base a composição e decomposição dos números" (p. 15). Deste modo, segundo as autoras, para que o professor consiga ajudar os seus alunos a desenvolver o sentido de número, é necessário **a)** que as atividades sejam implementadas com objetos concretos, que envolvam a exploração de situações do dia-a-dia; **b)** ligar estruturalmente o desenvolvimento dos métodos e técnicas de cálculo com a estrutura do sistema de numeração de posição e **c)** retardar a aprendizagem dos algoritmos, para os alunos poderem aperfeiçoar o desenvolvimento do sentido de número.

Existem muitos estudos efetuados sobre o desenvolvimento do sentido de número. Enquanto uns têm como objetivo avaliar o sentido de número dos alunos, que muitas vezes é feita após uma experiência de ensino e aprendizagem em sala de aula, onde são propostas tarefas que pretendem contribuir para esse desenvolvimento (McIntosh & Dole, 2000; Reys & Yang, 1998; Yang, 2003, 2005). Outros destinam-se à construção e validação de instrumentos que permitem ao professor um diagnóstico rápido e aparentemente eficaz do sentido de número que os alunos possuem (Yang, Li & Li, 2008; Yang, Li & Lin, 2008). No estudo de McIntosh e Dole (2000) com alunos de oito e 14 anos, verificou-se que estes têm um sentido de número fraco, principalmente no que respeita à compreensão das noções relacionadas com a representação decimal e muito fraco quanto à compreensão da noção de fração. Por sua vez, o estudo de Reys e Yang (1998), que avaliou o sentido de número de alunos do 6.º e 8.º anos relacionando-o com as competências de cálculo dos alunos, mostra que estes não relacionam as competências do cálculo escrito (algoritmos) com o sentido de número. Ou seja, o desempenho dos alunos em aspetos relativos ao sentido de número foi muito mais baixo do que nas questões que exigiam o cálculo escrito associado ao algoritmo. Também Yang (2005) efetuou um estudo com alunos do 6.º ano, onde por meio de entrevistas individuais e das estratégias que os alunos utilizavam para resolver problemas, procurou identificar as categorias do sentido de número aí existentes. O estudo mostra que os alunos têm um fraco sentido de número e não têm estratégias de estimação, porque ao longo do seu percurso escolar, a ênfase foi colocada meramente na transmissão de regras e algoritmos escritos, dificultando a capacidade de raciocínio dos alunos.

De acordo com a investigação, o desenvolvimento do sentido de número deve ser relacionado com situações do dia-a-dia, para que os alunos possam utilizar os números em contextos reais, uma vez que nestas situações, estes adquirem um significado para os alunos

(Fosnot & Dolk, 2001a). Quando a aprendizagem proporciona contextos realistas, a investigação prova que os alunos desenvolvem aspetos do sentido de número (compreensão e significado dos números e das operações), através do estabelecimento de conexões entre os problemas propostos na aula e as situações do dia-a-dia (Yang, 2003).

De facto, nos últimos anos tem existido uma grande preocupação, explícita em diversos documentos de natureza curricular (ME, 2007; NCTM, 1994, 2007), em desenvolver o "sentido de número" nos alunos.

Apesar de em 1999, o Ministério da Educação ter publicado um documento curricular que evidenciava a importância de todos os alunos desenvolverem o sentido de número (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999), só nos últimos anos tem sido desenvolvida a discussão sobre esta temática, a nível do currículo em Portugal com um projeto centrado no sentido de número (Serrazina, Canavarro, Guerreiro, Rocha & Portela, 2006; Serrazina, Canavarro, Guerreiro, Rocha, Portela & Saramago, 2005). Mais recentemente, nas orientações curriculares de 2007 (ME, 2007), é referido que no tema Números e Operações (transversal a todos os ciclos) deve-se "promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência no cálculo" (p. 7). Visto ser um conceito novo para os professores do 1.º ciclo, as orientações curriculares fazem questão de o definir:

> O sentido de número é aqui entendido como a capacidade para decompor números, usar como referência números particulares, tais como 5, 10, 100 ou $\frac{1}{2}$, usar relações entre operações aritméticas para resolver problemas, estimar, compreender que os números podem assumir vários significados (designação, quantidade, localização, ordenação e medida) e reconhecer a grandeza relativa e absoluta de números. (ME, 2007, p.13)

Este documento também realça outros aspetos característicos do sentido de número, tais como a flexibilidade de os alunos utilizarem diferentes estratégias de cálculo, selecionando-as de acordo com o problema, a estimação e a verificação da razoabilidade dos resultados:

> devem ser trabalhadas diferentes estratégias de cálculo baseadas na composição e decomposição de números, nas propriedades das operações e nas relações entre números e entre as operações (…) Progressivamente, os alunos devem ser capazes de utilizar as suas estratégias de modo flexível e de selecionar as mais eficazes para cada situação. É também importante que os alunos estimem resultados e ajuízem acerca da sua razoabilidade. (ME, 2007, p. 14)

Finalmente, estas orientações (ME, 2007) focam um aspeto, relativo ao sentido de número que norteia esta investigação, isto é, a importância de considerar os números (naturais e racionais) nas suas diferentes representações, assim como o estabelecimento de conexões entre as mesmas. Esta tem sido uma grande lacuna na promoção do desenvolvimento do sentido de número racional, pois segundo Moseley (2005) o que pode estar na origem das inúmeras dificuldades que surgem na aprendizagem dos números racionais é o facto de o seu ensino ser feito de uma forma muito compartimentada. As representações dos racionais, aspeto focado nas categorias de Yang et al. (2004), são a base do raciocínio dos alunos e por isso eles devem ter a sensibilidade para compreender o seu significado relativamente ao contexto em que elas surgem, bem como as operações necessárias para trabalharem com cada representação (Moseley, 2005). Para que isso aconteça, o ensino deve-se focalizar no desenvolvimento do sentido de número e consequente compreensão dos números racionais, ou seja, o ensino deve encorajar os alunos a desenharem diagramas para os ajudarem a compreender e a ler frações (Cramer, Post e delMas, 2002; Yang, 2003). Uma abordagem dos vários significados[2] dos números racionais é também um importante aspeto do desenvolvimento do sentido de número (Yang et al., 2004) e pode ter efeitos globais no desenvolvimento do sentido de número racional, tanto na organização do seu conhecimento, como nas conexões entre os vários conceitos matemáticos (Moseley, 2005).

Tal como já foi referido anteriormente, o desenvolvimento do sentido de número envolve também o sentido das operações, pois estas revelam o modo como os alunos raciocinam e por isso é fundamental que os alunos desenvolvam ao longo da sua aprendizagem uma compreensão flexível não só das operações, como também das relações que existem entre elas (Huinker, 2002). Deste modo, não basta uma apresentação de regras e algoritmos aos alunos com posteriores aplicações na resolução de problemas rotineiros, uma vez que este facto se tornará num obstáculo ao desenvolvimento do sentido de número.

Flores (2002) e Huinker (2002) referem que se os alunos compreenderem os diferentes significados das operações (a divisão como partilha equitativa, por exemplo) são capazes de reconhecer e descrever situações do quotidiano.

Os diferentes modelos de representação são também importantes no desenvolvimento do sentido da operação, mas para que os alunos os consigam compreender, têm de trabalhar com a sua diversidade – físicos, pictóricos, esquemáticos, verbais e simbólicos (Flores, 2002).

---

[2] Entende-se por significados os vários significados que os números racionais podem assumir: parte-todo; quociente; razão; operador e medida – ver secção 2.3.

Quando se estabelece uma ligação entre a compreensão concetual e a linguagem informal dos alunos está-se a dar oportunidade aos mesmos de desenvolverem a sua capacidade de lidar com os símbolos e com a linguagem matemática formal, que desta forma se transformam (os símbolos) em ferramentas com sentido para os alunos, uma vez que são baseadas nos seus conhecimentos informais, que eles vão utilizar para os ajudar a pensar (Flores, 2002; Fosnot & Dolk, 2002; Huinker, 2002).

O ensino e aprendizagem dos números racionais, também deve proporcionar aos alunos oportunidades para estes estabelecerem ligações entre as situações do quotidiano e os modelos (pictóricos, físicos, esquemáticos e representações simbólicas), para que os mesmos consigam facilmente passar de uma representação para outra (Flores, 2002; Fosnot & Dolk, 2002). Se os alunos adquirirem esta capacidade, conseguem usar de forma flexível os seus conhecimentos matemáticos (Huinker, 2002), optando pela representação que lhes é mais favorável num determinado contexto.

Compreender como é que as operações se relacionam[3], também é um aspeto importante na promoção do desenvolvimento do sentido da operação, uma vez que faz com que os alunos desenvolvam a compreensão dos algoritmos no cálculo (Flores, 2002; Huinker, 2002). De acordo com estes autores, quando isto acontece, os alunos desenvolvem estratégias onde a capacidade para compor e decompor números, utilizando as propriedades das operações, está subentendida.

Compreender que uma operação envolve conhecer o efeito que ela tem sobre os números é um aspeto importante no desenvolvimento do sentido de número e das operações. Deste modo, os alunos devem ser incentivados a pensar sobre possíveis resultados das operações com racionais sem as efetuarem (razoabilidade dos resultados), para que consigam ter uma ideia do que é esperado (Fosnot & Dolk, 2002; Huinker, 2002). Por exemplo, os alunos devem ter a noção de que **a)** numa multiplicação o produto nem sempre é superior a qualquer fator; **b)** numa divisão o quociente nem sempre é inferior ao dividendo; e que **c)** dividir uma quantidade inferior por uma superior é possível (Huinker, 2002).

Assim sendo, a aprendizagem dos números racionais, para que seja significativa deve colocar a ênfase no desenvolvimento do sentido de número e das operações, em situações contextualizadas e significativas, e não na exposição de regras e algoritmos, pois só assim, segundo Huinker (2002) os alunos "desenvolvem a capacidade para produzirem estratégias flexíveis para o cálculo e para a resolução de problemas" (p. 78).

[3] Esta relação diz respeito, por exemplo, ao facto de a divisão ser a operação inversa da multiplicação. É de salientar que a multiplicação e a divisão, ambas implicam raciocínio multiplicativo e que por isso se incluem no mesmo campo conceptual – o das estruturas multiplicativas (Vergnaud, 1988).

2.2. Construção do conceito de número racional

O conceito de número racional é tão importante quanto complexo, existindo inúmera investigação que procura problematizar a situação, tentando solucionar esta complexidade (Martinie, 2007). Apesar das várias direções tomadas pela investigação, parece ser claro que há muitos fatores a ter em conta no ensino aprendizagem do conceito de número racional, como por exemplo, os seus vários significados, assim como o conhecimento informal dos alunos, entre outros, sendo por isso necessário explorá-lo em várias situações e em diferentes contextos.

Neste ponto começa-se por falar sobre o conceito de número racional, onde se abordam aspetos importantes na construção deste conceito. Posteriormente apresentam-se as conceções que alguns autores consideram fundamentais os alunos desenvolverem, para que estes consigam construir o conceito de número racional. Finalmente fala-se ainda nos esquemas que intervêm nesta construção.

2.2.1. Conceito de número racional

Quando chegam à escola, os alunos possuem conhecimento informal sobre vários conteúdos matemáticos (Ball, 1993; Kieren, 1988), nomeadamente sobre partição[4] e equivalência (Pothier & Sawada, 1983) e também sobre "juntar" e "separar" conjuntos, bem como estimar quantidades que envolvam frações (Behr, et al, 1983; Behr, Wachsmuth & Post, 1985).

Mack (1990) refere que o conhecimento informal sobre os números racionais é, em grande parte, alheio ao conhecimento dos símbolos e procedimentos matemáticos, não sendo claro como os alunos usam este conhecimento na compreensão dos símbolos e procedimentos durante o ensino. Também de acordo com Behr, Harel, Post & Lesh (1992), este conhecimento inicial que os alunos têm dos conceitos matemáticos, é muito limitado e distinto daquele que é necessário para dominar a complexidade dos vários conteúdos matemáticos, tal como evidencia o estudo de Mack (1990) com oito alunos do sexto ano. Neste estudo os alunos que possuíam um conhecimento limitado sobre frações, quando lhes foram propostos determinados problemas,

> todos os oito alunos se sentiram tentados a usar o seu conhecimento informal sobre frações para construir algoritmos com sentido para os problemas representados simbolicamente (…) Em geral, isto aconteceu quando os problemas eram, primeiro, apresentados num contexto do mundo real e só depois de uma forma simbólica estritamente relacionada com o problema. (Mack, 1990, p. 23)

[4] *Partitioning* no original, cujo significado é dividir o todo (a unidade) em partes iguais, podendo também ser visto como partilha equitativa.

Embora possa existir um desfasamento entre o conhecimento formal e informal, os conhecimentos informais dos alunos devem servir de base para o desenvolvimento dos símbolos e procedimentos matemáticos, independentemente do conteúdo abordado (Hiebert, 1988).

O conhecimento informal dos alunos, analisado em diversos estudos (Mack, 1990, 2001), pode ser caracterizado como o conhecimento aplicado e circunstancial construído pelos indivíduos como resposta às suas experiências da vida real, ou seja, o conhecimento informal (prático) que os alunos possuem dos números racionais, pode ajudá-los a resolver problemas reais com sucesso (Kieren, 1988; Mack, 1990).

É com base no conhecimento informal dos alunos e por meio de situações-problema, que os mesmos podem começar a construir determinados conceitos matemáticos, através de um processo de construção de esquemas que, habitualmente se prolonga no tempo (Vergnaud, 1993). Deste modo, segundo o autor (1983) um conceito é constituído por um conjunto de situações (S), de conhecimentos em ação (I) e de representações (R), que devem ser considerados no seu conjunto e não de forma isolada, ou seja, **C = (S, I, R)**, onde:

- **S** – é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito (realidade ou referente);
- **I** – é um conjunto de invariantes, nas quais assenta a operacionalidade do conceito (objetos, propriedades e relações);
- **R** – é um conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para representar simbolicamente o conceito, suas propriedades e as situações.

No campo dos números racionais, de acordo com Santos (2005), (S) refere-se a problemas contextualizados (só assim os alunos conseguem atribuir significado aos conceitos envolvidos nos mesmos) que envolvam os cinco significados dos números racionais (parte-todo, quociente, medida, razão e operador); (I) diz respeito às propriedades do conceito de número racional (equivalência e ordenação) e (R) são os símbolos matemáticos que permitem ao aluno representar determinada situação (representação pictórica, decimal, percentagem ou fração). De acordo com Santos (2005), (S) só tem significado se estiver relacionado com as estratégias dos alunos (I) e com as representações (R) que estes utilizam. Para exemplificar esta perspetiva, Santos (2005) dá-nos o seguinte exemplo: "dividir duas barras de chocolate por três pessoas". À primeira vista podemos encarar esta situação com o significado quociente ($2:3=\frac{2}{3}$), no entanto, de acordo com o autor, pode recorrer-se à divisão do todo (cada barra de chocolate) em três partes iguais (três pessoas) e tendo como apoio a "correspondência de um para um e a dupla contagem" (p. 36), para dar uma resposta correta, estando aqui envolvido o significado parte-todo e não o de quociente (Figura 1).

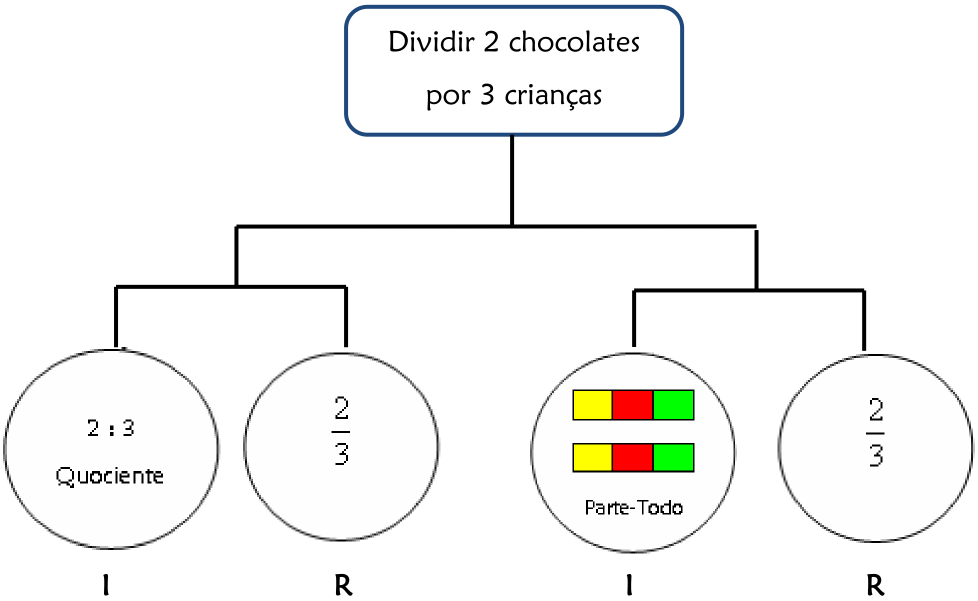


Figura 1 – Representação da situação quociente (adaptado de Santos, 2005).

Sendo que os conceitos matemáticos são construídos através de esquemas que emergem de situações contextualizadas, Kieren (1988) apresenta-nos um modelo intuitivo de construção (dinâmico e interativo) do conhecimento de número racional, segundo quatro níveis representados por anéis concêntricos (Figura 2). O anel interno é descrito como conhecimento Etnomatemático (E) e refere-se ao conhecimento básico que o aluno adquire como resultado da sua vivência num determinado ambiente (metade; quarta parte; ...). O segundo anel refere-se ao nível Intuitivo (I), e diz respeito ao conhecimento adquirido no ambiente escolar que envolve a conjunção de mecanismos do pensamento, bem como o uso da linguagem informal, podendo ser construído por meio de experiências diárias. O terceiro anel representa a aquisição da linguagem técnica simbólica que envolve o uso de uma linguagem padrão, símbolos e algoritmos (TS). Para que este conhecimento seja válido, tem de fazer referência ao real ou apresentar uma sequência lógica que é validada no próximo nível. O quarto anel representa o conhecimento axiomático dos números racionais (A). Isto implica o conhecimento formal dos números racionais, mas mais particularmente, descreve as relações entre os números racionais, por meio da simbologia matemática.

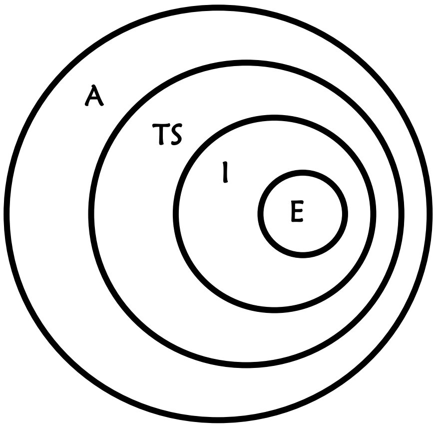


Figura 2 – Modelo intuitivo da construção do conhecimento (adaptado de Kieren, 1988).

Segundo Kieren (1988) um aluno só desenvolve o seu conhecimento de números racionais se for capaz de tomar decisões e de resolver problemas em cada um dos níveis apresentados na Figura 2. Certamente o último nível apenas é acessível aos alunos de níveis de escolaridade mais avançados. No entanto não existe uma separação rígida entre o conhecimento dos vários níveis. Por exemplo, perante a situação de comparar "a partilha de três pizas por oito pessoas" e "a partilha de uma piza por três pessoas", de acordo com Kieren (1988) as respostas dos alunos podem ser diversificadas, havendo algumas que se podem incluir em dois níveis: **a)** "Cada um recebe um bocado e a mãe coloca o resto no frigorífico" (E – resposta baseada na sua experiência pessoal); **b)** "A pessoa A recebe um terço e um quarto de um quarto" (I – resposta baseada numa atividade matemática, partição e corte); **c)** "Cada um recebe um terço e mais um bocado" (EI); **d)** "$\frac{6}{4}$ vs. $\frac{9}{6}$, ambos receberam $1\frac{1}{2}$, por isso é igual" (TS – resposta que envolve simbolismo padrão e propriedades de comparação); **e)** numa situação ITS o aluno recorre aos símbolos, mas eles são utilizados apenas para indicarem resultado da partição.

Conforme é evidenciado pelo modelo de Kieren (1988), o primeiro nível de construção do conhecimento diz respeito ao conhecimento informal dos alunos e segundo Mack (1990) é apoiando-se neste conhecimento que os alunos desenvolvem uma compreensão dos símbolos e dos procedimentos das frações. No entanto, para compreenderem os números racionais devem, primeiro, desenvolver uma conceção básica do que é um número racional para depois prosseguirem através de uma sequência de tópicos dentro de cada vertente dos números racionais que se baseiam em conceções matemáticas importantes (Behr et al. 1983, 1984, 1985).

A compreensão dos números inteiros e racionais desenvolve-se basicamente de forma semelhante (Resnick & Singer, 1993). As diferenças entre o desenvolvimento da compreensão dos números inteiros e racionais residem na natureza das unidades psicológicas e no nível de desenvolvimento no qual estas são primeiro integradas num único esquema (Moss & Case, 1999). Se para os números inteiros estas unidades são esquemas de contagem verbal e esquemas para comparações globais, para os números racionais são estruturas globais da avaliação proporcional (Resnick & Singer, 1993) e estruturas numéricas para "dividir" ou "duplicar" (Confrey, 1994, citado por Moss & Case 1999).

Não é por isso estranho que muitos autores argumentem que o conhecimento dos números inteiros exerce uma grande influência, positiva ou negativa, na aprendizagem do conceito de número racional (Moskal & Magone, 2000; Steffe & Olive, 2010). No entanto, o conhecimento das frações[5], apesar de não ser uma simples extensão do conhecimento dos números inteiros, pode surgir através da reorganização do conhecimento que o aluno tem destes números (Steeffe & Olive, 2010), por isso os autores criticam a separação que se faz entre o conhecimento dos números inteiros e das frações. Por exemplo, as crianças na experiência de Post, Cramer, Lesh, Behr e Harel (1992) aprenderam a comparar duas frações ($\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$) através do tamanho das partes que resultam da divisão do todo, recorrendo a materiais manipulativos (círculos de fração, material *Cuisenaire*, dobragem de papel[6]). Ou seja, na fração $\frac{1}{2}$ a unidade está dividida em duas partes, e na fração $\frac{1}{3}$ a unidade está dividida em três partes. Utilizando o conhecimento dos números inteiros, é referido que três partes são mais que duas partes. No entanto, nas frações, se estas "são ordenadas pelo tamanho das partes, então a relação é inversa entre o número de partes e o tamanho de cada parte" (Post et al., 1992, p. 239), surgindo assim, que um meio é maior que um terço.

Para formar esta relação inversa, as crianças têm necessidade de, pelo menos, comparar o número e o tamanho das partes em duas situações, o que envolve o seu conhecimento dos números inteiros (Steffe & Olive, 2010).

2.2.2. Conceções importantes na construção do conceito de número racional

Embora os números racionais compreendam uma multiplicidade de significados, "existem vários elementos unificadores que os ligam" (Wheeldon, 2008, p. 24). São conceções fundamentais em torno das quais os alunos desenvolvem e constroem o conceito de número racional (Martinie, 2007). Entre as referidas conceções, e de acordo com as duas autoras supramencionadas, está: **a)** raciocínio multiplicativo, **b)** densidade e valor de posição, **c)** concetualização de unidade, **d)** partição, **e)** equivalência e ordenação, e **f)** estruturas comuns para adicionar ou subtrair.

Behr e Post (1992) fundamentam a importância do ***raciocínio multiplicativo***, no facto de os números racionais serem um conjunto de números que não se baseia em nenhum

[5] Conhecer números racionais é diferente de conhecer frações, uma vez que o primeiro pertence a um nível de compreensão mais elevado que o segundo, contudo o primeiro abrange o segundo (Steffe & Olive, 210).
[6] *Paper folding* no original.

tipo de algoritmo de contagem. Por seu lado, Smith III (2002) argumenta a sua importância pelo facto de os números racionais representarem relações entre duas grandezas discretas ou continuas.

Lamon (2006) refere-se ao raciocínio multiplicativo diferenciando este do raciocínio aditivo, para tal distingue quantidades absolutas e relativas. Isto é, a noção de quantidade absoluta, que é a base do pensamento aditivo, centra-se no facto de que a quantidade é independente e não se relaciona com nenhuma outra. Já no raciocínio multiplicativo, os alunos têm de compreender que as quantidades são relativas. Por exemplo, Lamon (2006) dá-nos um exemplo para ilustrar a diferença entre estes dois tipos de raciocínio. Supondo que temos uma caixa com quatro rebuçados e outra com dez, os alunos podem utilizar o raciocínio aditivo para responder a questões do tipo "Quantos rebuçados há na primeira caixa" ou "Quantos rebuçados a segunda caixa tem a mais que a primeira". No entanto, para utilizarem o raciocínio multiplicativo, os alunos terão de responder a questões do género "Que parte de uma dúzia representam os rebuçados de cada caixa" ou "O número de rebuçados da segunda caixa é quantas vezes maior que o número de rebuçados da primeira caixa". Ou seja, o raciocínio multiplicativo é relativo a algo, as quantidades são relativas, ao contrário do raciocínio aditivo, onde as quantidades são contáveis (Behr & Post, 1992).

O raciocínio multiplicativo é um aspeto particular das estruturas multiplicativas às quais os números racionais pertencem (Wheeldon, 2008). As estruturas multiplicativas dos números racionais são uma noção complexa que requer a composição de unidades (Lamon, 1994). Por exemplo, para encontrar $\frac{2}{3}$ de 12 rebuçados, implica que os alunos organizem a sua unidade em três grupos de quatro rebuçados e que depois considerem dois desses grupos, ou seja, têm de compor a unidade em três grupos de rebuçados. Este aspeto serve para evidenciar que o raciocínio multiplicativo é baseado nas relações entre quantidades e não na sua contagem podendo envolver a composição e decomposição da unidade, bem como a sua partição (Wheeldon, 2008).

O conceção de ***densidade e valor de posição*** dos números racionais exige que quando se trabalha com números racionais, na sua representação fracionária, os alunos têm de compreender que existe uma relação entre o numerador e o denominador e que por isso cada fração deve ser vista como uma quantidade única e não como dois números distintos (Wheeldon, 2008). Se os alunos não compreenderem esta noção é difícil aceitarem que entre dois racionais existe sempre outro racional (noção de densidade), ao contrário do que acontece com os números inteiros (Martinie, 2007).

Quando os números racionais são abordados como uma extensão dos números inteiros sem que haja uma adequada compreensão do valor de posição dos números (Martinie, 2007), faz com que os alunos comparem e ordenem racionais, de forma errada.

Por exemplo, no número 219, os alunos têm de compreender que o dois vale 200 unidades e que o um vale dez unidades. Sem entender isto, é normal que os alunos, quando trabalham com a representação decimal, pensem que "quanto mais algarismos estão à direita da vírgula, maior é o número" (Martinie, 2007, p. 21), ou seja, para os alunos 0,351 é maior que 0,45, porque 351 é maior que 45. Também quando comparam frações é normal que assumam que $\frac{5}{8}$ é maior que $\frac{1}{3}$ porque cinco e oito são maiores que um e três (Wheeldon, 2008).

De acordo com Martinie (2007) este trabalho pode ser facilitado se o aluno for levado a pensar onde poderá localizar uma fração numa linha numérica, pois, de acordo com Post, Wachsmuth, Lesh e Behr (1985), a comparação e ordenação de frações obriga o aluno a um conjunto de conhecimentos complexos: **a)** a grandeza da fração depende da relação entre os termos da mesma, **b)** existe uma relação inversa entre o número de partes do todo (denominador) e o tamanho das partes e **c)** perante duas frações com o mesmo denominador, a grandeza das mesmas tem uma relação direta com o número de partes tomadas (numerador). Um aspeto que pode colmatar esta dificuldade é os alunos poderem escolher a representação com que se sentem mais à vontade, mas para isso os alunos têm de compreender que os números racionais se podem representar de várias formas. Para isso tem de se proporcionar aos alunos um ensino que permita não só a utilização das várias representações em diferentes contextos, como também a oportunidade de os mesmos escolherem uma representação para trabalhar (Martinie, 2007).

De qualquer forma, compreender que os números racionais, na sua representação fracionária expressam uma relação entre números inteiros e que os procedimentos efetuados com números inteiros podem não ser válidos para as frações, são a base da compreensão quantitativa de um número racional (Wheeldon, 2008). Compreendendo este aspeto, facilmente os alunos comparam e ordenam frações, estando estas duas conceções muito interligadas (densidade/valor de posição e equivalência/ordenação), no entanto a noção de unidade é essencial para esta compreensão, uma vez que a unidade é o que permite dar sentido à quantidade representada (Wheeldon, 2008).

A ***concetualização da unidade*** é uma noção complexa que diz respeito à interpretação da unidade – *unitizing*, sendo este aspeto considerado muito importante para a compreensão dos números racionais (Clarke, Fisher, Marks & Ross, 2010). Neste âmbito, Lamon (2006) refere que é importante que os alunos aprendam a trabalhar com unidades de vários tipos e que as suas experiências não se limitem apenas a uma delas. Deste modo a autora identifica três tipos de grandezas, as contínuas (uma pizza, uma tablete de chocolate), as discretas (um conjunto de rebuçados, um conjunto de berlindes) e as compostas (uma caixa com 6 ovos pode ser interpretada como uma caixa ou como um conjunto de objetos discretos, onde cada ovo é uma unidade simples).

A noção de *unitizing* é ampla referindo-se não só à interpretação da unidade como também à compreensão flexível que se tem da mesma (Martinie, 2007), abarcando ainda a noção de *reunitizing* e *reversing* (Baturo, 2004). Esta flexibilidade espelha-se na capacidade para decompor e recompor a unidade, competências essenciais para uma compreensão completa do significado parte-todo (Baturo, 2004) e que, de acordo com Charalambous e Pitta-Pantazi (2006) permitem ao aluno reconstruir o todo[7] a partir das suas partes (por exemplo reconstruir a unidade quando são dados $\frac{3}{8}$ da mesma), bem como reorganizá-lo (*reunitizing*) quando ele já se encontra previamente fracionado (por exemplo, construir ou identificar $\frac{3}{8}$ a partir de um conjunto fracionado em quartos, ou identificar $\frac{3}{4}$ num conjunto que está fracionado em oitavos). Devido à sua polivalência, a noção de *unitizing* é de extrema importância na equivalência e comparação de frações e prepara os alunos para a sua adição e subtração (Lamon, 2006). Além disso, todos os aspetos abarcados pela noção de *unitizing*, juntamente com a noção de partição são competências essenciais para a compreensão dos racionais na sua representação decimal (Martinie, 2007).

A noção de ***partição*** é fundamental na construção inicial do conceito de número racional (Mack, 1990; Ball, 1993, Baturo, 2004) e é definida como a divisão de uma quantidade contínua em partes iguais (Martinie, 2007). A ideia de Ball (1993) e Baturo (2004) é reforçada pelo estudo de Mack (1995a) onde os alunos do terceiro e quartos anos utilizaram o seu conhecimento de partição para relacionar as operações com frações com o seu conhecimento dos números inteiros. Este facto permitiu-lhes resolver problemas de adição e subtração com denominadores comuns. No entanto, embora possa ter ajudado os alunos, está a limitar as suas conceções sobre frações, o que faz com que as comecem a tratar como números inteiros, acontecendo o mesmo com as representações decimais (Martinie, 2007). No entanto esta autora refere-se a Mack (2000) para relembrar que a construção do conhecimento da multiplicação baseado na noção de partição tem efeitos duradouros, indicando quatro motivos: **a)** os alunos recorrem à partição para reorganizarem a unidade[8]; **b)** não existe uma forte ligação entre a noção de partição e as expressões simbólicas; **c)** depois da introdução do algoritmo para multiplicar frações, a confiança que os alunos tinham no seu conhecimento informal sobre partição é alterado; **d)** os alunos recorrem ao conhecimento informal de partição para explicar os seus procedimentos e **e)** os alunos utilizam os seus conhecimentos informais sobre partição para justificarem os algoritmos utilizados.

[7] Baturo (2004) refere-se ao processo de reconstrução da unidade como *reversing*.

[8] *Reconceptualize units*, no original.

Pothier e Sawada (1983) falam-nos em cinco níveis de partição: **a)** partilha, **b)** metade algorítmica, **c)** uniformidade[9], **d)** imparidade[10] e **e)** composição. No primeiro nível de partição os alunos conseguem dividir regiões circulares e retangulares para mostrarem metades e quartos. No entanto estes alunos podem dividir o objeto em partes desiguais, fazer um número errado de divisões ou então dividirem apenas uma parte da do mesmo. No segundo nível os alunos conseguem dividir uma região retangular ou circular num determinado número de partes, que sejam potências de dois, através de partições sucessivas em metades. No entanto, também neste nível as partes resultantes da partição podem não ter o mesmo tamanho. Os alunos que compreendam que o tamanho das partes, resultantes da partição, interessa, encontram-se no terceiro nível de partição. Quando os alunos se apercebem que o processo de divisão do objeto em metades não funciona com frações cujos denominadores são ímpares (e pequenos, tais como três, cinco ou sete), encontram-se no quarto nível. Aqui os mesmos também têm consciência que o tamanho das partes interessa e por isso podem sentir necessidade de ajustar as linhas, que simbolizam as divisões, efetuadas, para que possam obter partes iguais. No último nível encontram-se os alunos que consigam realizar divisões sucessivas do objeto, quando estão perante uma fração com denominadores ímpares, que sejam maiores que três, cinco ou sete, por exemplo. Ou seja, para fazer a partição de um objeto em nove partes, o aluno pode efetuar a partição do objeto de modo a obter terços e posteriormente fazer novamente a partição de cada terço em terços. Um aluno que consiga utilizar este algoritmo multiplicativo consegue construir qualquer fração da unidade (Pothier & Sawada, 1983).

De acordo com os autores, as experiências de partição ajudam os alunos na construção do conceito de número racional, facilitando a resolução de problemas e auxiliando os alunos na confirmação dos cálculos com frações. Estes cálculos podem surgir, por exemplo, na determinação de frações equivalentes, para se comparar e ordenar frações.

A ***equivalência e ordenação*** estão relacionadas com a conceção de quantidade que já abordámos quando falámos sobre densidade e valor de posição. Compreender que os racionais são números que podem ser comparados e ordenados, mas não através do mesmo processo que se utiliza para ordenar números inteiros é um aspeto que suscita dificuldades em muitos alunos (Wheeldon, 2008). Os alunos podem ter de comparar frações com o mesmo denominador (a maior é a que tiver maior numerador), onde os alunos podem seguir a "estratégia partes do mesmo tamanho" (Lamon, 2006). Se estiverem perante frações com o mesmo numerador (a maior é a que tiver menor denominador, pois o tamanho das partes é maior), os alunos podem seguir a "estratégia mesmo número de partes" (Lamon, 2006). Quando as frações não têm nem numeradores, nem denominadores iguais, os alunos

[9] *Evenness*, no original.
[10] *Oddness*, no original.

podem operar com frações (se optarem pela representação fracionária) de modo a determinarem frações equivalentes. A equivalência de frações pode ser interpretada como nomes diferentes que se atribuem à mesma quantidade (Mack, 1995b, citado por Wheeldon, 2008) e por isso não existe uma única fração para representar uma determinada quantidade (Lamon, 2006).

A conceção de partição ajuda os alunos a desenvolver a noção de equivalência (Wheeldon, 2008), senão veja-se o exemplo que a autora nos dá. Quando uma determinada área está dividida por exemplo em quatro partes iguais, pode-se afirmar que cada parte representa $\frac{1}{4}$ da unidade. Sombreando essa parte e subdividindo cada parte em duas, obtemos uma nova fração para representar a mesma quantidade – $\frac{2}{8}$, ficando assim ilustrado que $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$ são frações equivalentes.

Deste modo "dividir objetos em um número igual de partes, em que estas são do mesmo tamanho também ajuda na construção da noção de ***estruturas comuns para a adição e subtração***" (Wheeldon, 2008, p. 37). A adição e subtração de frações pode ser relativamente fácil se os alunos compreenderem que quando estas se adicionam ou subtraem, o denominador determina o tamanho das partes e por isso tem de ser o mesmo em ambas as frações (Wheeldon, 2008).

Em suma, existe um conjunto de conceções fundamentais que devem ser compreendidas e que são transversais aos vários significados dos números racionais, que estão na base da construção do conceito de número racional.

2.2.3. Os esquemas na construção do conceito de número racional

Que o conhecimento dos números inteiros interfere na aprendizagem dos números racionais, é um facto que a literatura não descura. No entanto, ver esse facto como um aspeto negativo, é algo que Steffe e Olive (2010) não concordam:

> É óbvio que tinham de fazer mais, mas isso é suficiente para estabelecer a nossa posição de que o conhecimento dos números inteiros das crianças, está de forma constitutiva envolvido no seu conhecimento das frações e não deve ser visto como uma interferência. (p. 4)

A este "fazer mais", Steffe e Olive (2010) chamam de reorganização de esquemas[11] anteriores, que pode ser entendida de duas formas. A primeira é que os alunos constroem um novo esquema operando sobre o esquema anterior (que eles já têm), usando operações

[11] Steffe e Olive (2010) utilizam a palavra esquema para se referirem a um instrumento de interação, ou seja, "é uma ferramenta conceptual que nós usamos para analisar a linguagem dos alunos e a forma como os alunos interagem connosco" (p. 18).

que podem ou não ser do mesmo tipo do esquema anterior. Nesta situação o novo esquema substitui o antigo, pois resolve problemas que o anterior não resolvia e os problemas que o anterior resolvia, o novo resolve-os ainda melhor. Ou seja, inicialmente a criança só consegue contar objetos que estejam no seu campo visual, mas se ela se conseguir abstrair dos objetos, efetuando uma contagem mental, ela consegue contar objetos que não estão no seu campo visual.

> A criança continua a resolver os antigos problemas que envolvem contagem, mas agora através do cálculo mental. E a criança consegue resolver novos problemas, tais como contar o número de bolinhos, em que cinco bolinhos estão à vista e depois são-lhe apresentados mais três que posteriormente são escondidos. (Steffe & Olive, 2010, p. 1)

A segunda forma de compreender esta reorganização é que os alunos podem operar sobre materiais novos em situações que não fazem parte de esquemas anteriores e por isso o novo esquema não substitui o antigo, uma vez que este resolve situações que o anterior não resolvia, mas não as resolve todas. Mesmo assim ainda pode ser visto como uma reorganização do esquema anterior, porque as operações dos esquemas anteriores surgem mas com um propósito diferente (Steffe & Olive, 2010).

Steffe e Olive (2010), citando von Glasersfeld (1980), referem que um esquema é constituído por três partes: uma *situação experimental*[12], que ativa uma determinada atividade; uma *atividade específica* associada a essa situação e depois o *resultado da atividade*, produzido pela criança. Na primeira parte do esquema, as operações memorizadas numa atividade passada, quando ativadas, produzem o reconhecimento de um modelo[13] que é usado na criação de uma situação experimental, que pode ser fruto da imaginação ou de algo que o aluno perceciona (Steffe & Olive, 2010). A Figura 3 é um diagrama que dá uma ideia do que é um esquema para estes autores, que "ajuda a destacar os aspetos essenciais" (Steffe & Olive, 2010, p. 22) do mesmo.

[12] *Experiential situation*, no original (Steffe & Olive, 2010).

[13] "Refiro-me ao reconhecimento de um modelo como uma estrutura de assimilação e às operações que produzem essa estrutura como operações de assimilação" (Steffe & Olive, 2010, p. 20).

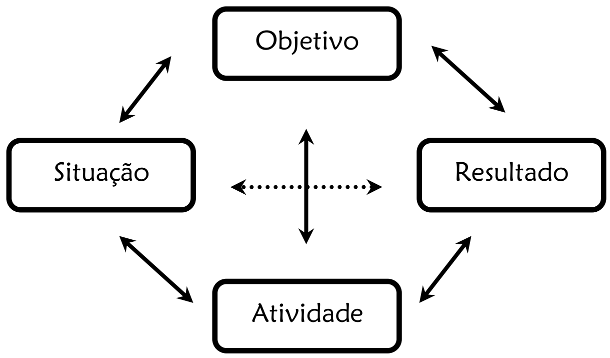


Figura 3 – Diagrama da estrutura de um esquema reversível (adaptado de Steffe & Olive, 2010).

De acordo com os autores, as duplas setas significam que qualquer um dos componentes do esquema pode ser comparado ou relacionado com os outros. A seta a tracejado deve ser interpretada como uma expetativa de resultado do esquema. Estes autores expõem uma situação, onde procuram mostrar esta reversibilidade de um esquema. Imagine-se uma criança perante a seguinte tarefa:

- é-lhe dado um pedaço de corda e solicita-se que a corte ao meio;

- agora pede-se que pegue numa metade e que a divida em quatro partes;

- finalmente é-lhe colocada a questão "esse pedaço corresponde a que parte da corda inteira?"

As crianças que são bem-sucedidas no corte de $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2}$ da corda, pois produzem um resultado do seu esquema de fração, tendo satisfeito o seu objetivo, de fazer $\frac{1}{4}$. Quando lhes é colocada a questão, esta pode servir para as mesmas estabelecerem um novo objetivo e uma nova situação, utilizando o resultado do esquema anterior. Para encontrarem $\frac{1}{8}$, as crianças podem primeiro "remontar", em pensamento, as quatro peças da corda e depois vê-las como uma metade da corda partida. De seguida podem produzir outra metade da corda (em pensamento) também dividida em quatro partes iguais. Para fazer isto a criança precisa de um esquema de fração reversível, onde é capaz de começar de um resultado do esquema anterior e restabelecer a situação utilizando operações inversas. Isto significa que num esquema reversível o resultado pode ser usado para criar uma situação através de uma atividade reversível do esquema. Contudo, estas relações só são possíveis para alguns esquemas, pois outros são totalmente unidirecionais, ou seja, resultam de uma situação para a atividade e depois para o resultado (Steffe & Olive, 2010) (Figura 4).

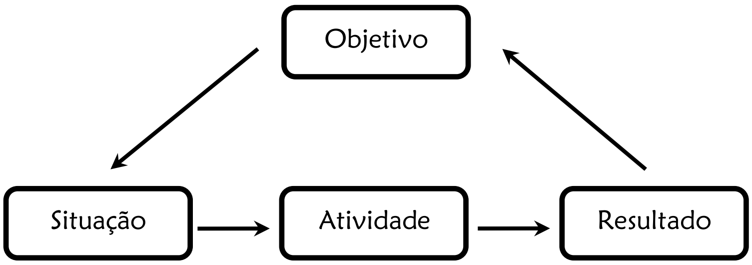


Figura 4 – Diagrama da estrutura de um esquema não reversível.

Steffe e Olive (2010) retratam um episódio de ensino onde aparentemente os esquemas utilizados por dois alunos não são reversíveis. Depois de Arthur e Nathan terem trabalhado para encontrar frações equivalentes a um terço e de conseguirem, aparentemente[14], generalizar, os autores envolveram os alunos numa atividade simbólica com o "objetivo de transformar as potenciais ações de produzir frações equivalentes a um terço numa ação simbólica" (Steffe & Olive, 2010, p. 301). Neste episódio, os alunos tinham de encontrar frações equivalentes $\frac{1}{3}$, encontrando o numerador de uma determinada fração, após lhes ser facultado o seu denominador. Por exemplo, tendo a fração $\frac{1}{18}$, Arthur refere que o numerador será o seis, "porque três vezes seis é dezoito" (Steffe & Olive, 2010, p. 301). Nathan dá a mesma explicação para o 22 como numerador da fração $\frac{1}{66}$, "22! Porque três vezes 22 é 66" (Steffe & Olive, 2010, p. 301). Na continuação da tarefa, enquanto Arthur escolhe para denominador o 69, Nathan escolhe para numerador o 23, tendo sido desafiados a fazer o modelo da fração do colega (Nathan faz o modelo para $\frac{22}{66}$ e Arthur para $\frac{23}{69}$), no entanto, nenhum aluno recorreu à fração unitária ($\frac{1}{3}$) "para a produzir a sua nova fração, mesmo depois de o professor lhes ter dito que o podiam fazer para os ajudar" (Steffe & Olive, 2010, p. 302).

Nathan utilizou uma barra[15] dividida em trinta e três partes, depois tirou dez partes das 33 e dividiu cada uma (dez partes) em duas, tendo repetido esta barra três vezes (Figura 5). Depois fez uma cópia de seis partes das sessenta e juntou-as ao final da barra, perfazendo uma barra com 66 partes, para depois assinalar as 22.

[14] O termo aparentemente é utilizado, porque, segundo os autores, apesar de Nathan ter encontrado várias frações equivalentes a um terço, a noção de fração equivalente parecia restrito, no sentido em que o aluno havia recorrido às operações para produzir essa pluralidade de frações equivalentes. Deste modo, não há indicação que ele conseguisse avaliar se quaisquer duas frações eram equivalentes. Por exemplo, dando $\frac{13}{39}$ e $\frac{18}{51}$, não havia indicação que o aluno conseguisse avaliar a sua equivalência.

[15] No texto original os autores chamam-lhe *stick* – uma espécie de vara (linha).

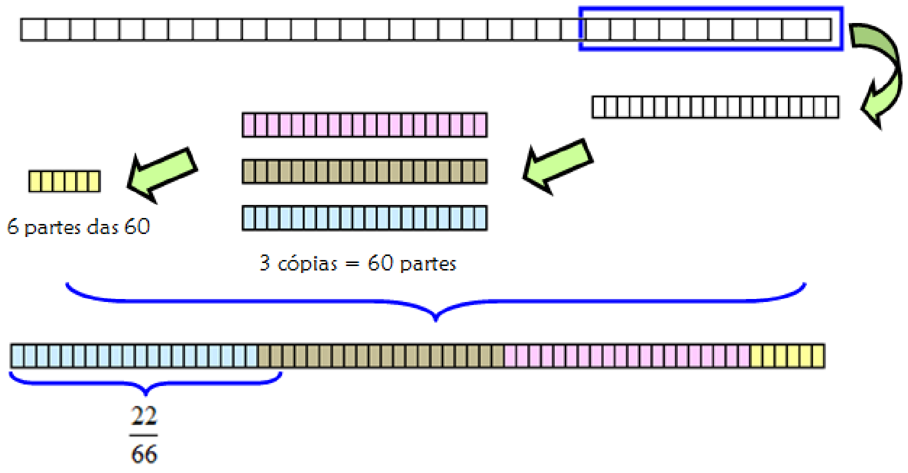


Figura 5 – Esquema da estratégia do Nathan.

Por sua vez, Arthur partiu a barra em 23 partes tendo posteriormente partido oito dessas partes em três, ficando com 24. Depois, dessas 24 partes, tirou dez ($\frac{10}{69}$), repetiu este "dez" e tirou mais três para juntar aos 20 e obter $\frac{23}{60}$ (Figura 6).

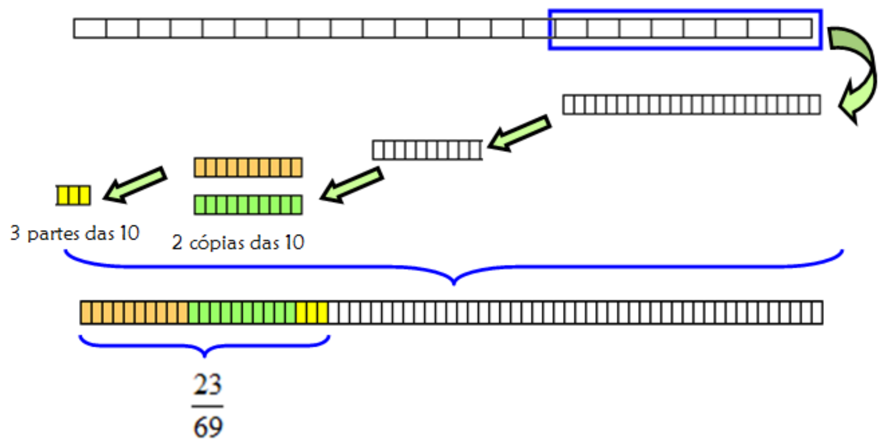


Figura 6 – Esquema da estratégia do Arthur.

De acordo com Steffe e Olive (2010), as ações do Arthur mostram uma coordenação das unidades de três e 23 para fazer 69 partes, no entanto nada indica que ele utiliza conscientemente o seu esquema de fração unitária ("um terço"). Do ponto de vista dos autores, os alunos construíram um sistema de fração equivalente, pois o método mais provável para obter $\frac{22}{66}$ e $\frac{23}{69}$ seria a divisão do *stick* ($\frac{1}{3}$) em 22 e 23 partes respetivamente. Deste modo parece que os seus esquemas de fração equivalente são unidirecionais, não sendo ainda reversíveis (Steffe & Olive, 2010).

O desenvolvimento do conceito de número racional é um processo complexo e demorado que, por esse motivo, requer tempo e o estabelecimento de múltiplas conexões entre os seus vários significados e representações (Behr & Post, 1992; Behr, Post, Silver & Mierkiewicz, 1980; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006). No entanto e como já foi mencionado a compreensão dos números racionais pressupõe a "assimilação de um esquema" (Thompson & Saldanha, 2003, p. 11), sendo por isso importante que os professores estejam atentos aos esquemas que os alunos utilizam. Os esquemas podem ser interpretados como níveis para caracterizar o pensamento dos alunos (McCloskey & Norton, 2009), encontrando-se dispostos hierarquicamente, onde cada esquema precedente é reorganizado dando origem a um novo esquema, onde as ações que os alunos conseguem realizar são mais complexas do que no esquema anterior (Norton & Wilkins, 2009; Steffe & Olive, 2010), no entanto, estes não estão dependentes uns dos outros, ou seja, um aluno pode chegar a um esquema superior sem ter manifestado um raciocínio característico de um esquema anterior (Norton, 2008). Perante uma determinada situação os alunos podem desenvolver várias ações que qualificam o seu raciocínio, permitindo ao professor identificar o esquema em que o aluno se encontra, e consequentemente caracterizar o seu raciocínio. Entre essas ações encontram-se: **a)** a identificação da unidade – tratar um objeto ou uma coleção de objetos como a unidade (o todo); **b)** a partição – dividir a unidade (o todo) em partes iguais; **c)** o desencaixe[16] – imaginar uma parte do todo e representá-la, deixando o todo intacto; **d)** a iteração – repetir uma parte do todo, de forma a reproduzir cópias e **e)** a divisão[17] – combinação de duas ações, a partição e a iteração – Figura 7 (McCloskey & Norton, 2009).

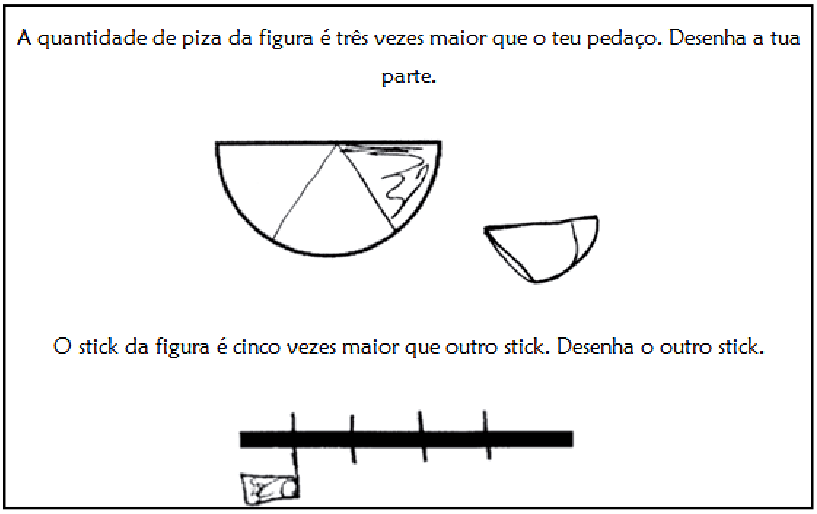


Figura 7 – Respostas de alunos que evidenciam a ação "divisão" (Wilkins & Norton, 2011).

Os exemplos evidenciados na Figura 7 são tarefas que, não obrigam a utilização da linguagem formal por parte do aluno, mas exigem que este utilize a partição ao serviço de

[16] *Disembedding*, no original.
[17] *Splitting*, no original.

um objetivo de iteração, onde o mesmo tem de encontrar uma peça, que, quando iterada um determinado número de vezes, produz o todo (piza ou stick).

A opção por organizar os esquemas de que Steffe (2002; 2003) nos fala em forma de pirâmide (Figura 8), decorre do facto da complexidade das ações realizadas pelos alunos dentro de cada esquema ir aumentando da base para o topo.

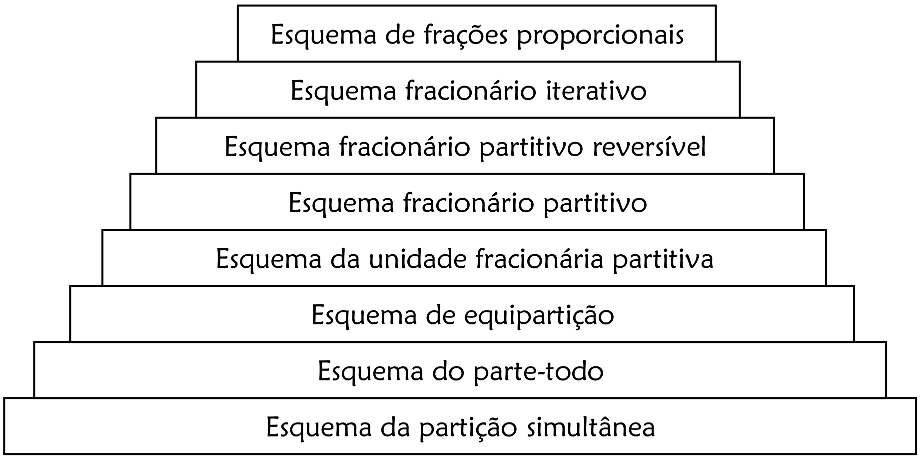


Figura 8 - Esquemas utilizados para caracterizar o raciocínio dos alunos.

A partição é a ação básica do esquema de partição simultânea, onde o aluno projeta na unidade contínua, uma unidade composta e utiliza-a como uma "forma de partição" (Steffe, 2003, p. 239), para gerar partes iguais de forma simultânea. Por exemplo, perante uma tarefa onde o aluno deve mostrar como pode partilhar equitativamente algo por um determinado número de pessoas, ele pode seguir dois caminhos, partir a unidade que lhe é dada em seis partes iguais de imediato – encontrando-se no esquema de partição simultânea, ou então, produzir uma parte do todo (fração unitária) e utilizar essa parte, como "unidade de medida" para dividir a restante unidade – encontrando-se no esquema de equipartição, de acordo com Steffe (2002).

Um aluno que utilize o esquema parte-todo interpreta um número racional como um número de partes que foram retiradas (desencaixadas) da unidade que foi fracionada em partes iguais (Norton, 2008). Por exemplo, o aluno interpreta $\frac{3}{5}$ como três partes retiradas das cinco partes que constituem o todo (Norton, 2008). Deste modo, este esquema baseia-se em três ações fundamentais: a identificação da unidade, a partição da mesma e o desencaixe das partes.

Num esquema da unidade fracionária partitiva (PUFS), os alunos compreendem não só que qualquer parte da unidade fracionada pode ser iterada tantas vezes quantas necessário para reproduzir a unidade, como também essas iterações determinam o tamanho da fração relativamente à unidade (Norton, 2008). Ou seja, neste esquema os alunos utilizam uma equipartição para fracionar a unidade de forma a produzir uma parte da mesma e compreendem que iterando essa parte um determinado número de vezes, obtém a unidade (Wilkins & Norton, 2011) – Figura 9. Este esquema "estabelece uma relação de um para muitos entre a parte e a unidade fracionada" (Steffe, 2002, p. 292), em que essa relação é expressa por meio de uma linguagem formal.

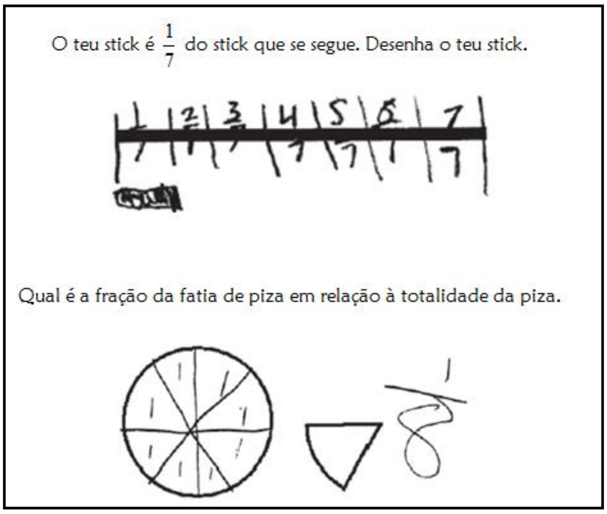


Figura 9 – Resposta de um aluno que evidencia um PUFS (Wilkins & Norton, 2011).

O esquema fracionário partitivo (PFS) é o primeiro esquema que Steffe (2002) considera ser um verdadeiro esquema de fração. Este esquema é uma generalização do anterior, onde os alunos podem gerar frações próprias, através da partição da unidade em partes iguais, iterando uma dessas partes um determinado número de vezes para obter a fração e outro número de vezes para obter a unidade (Wilkins & Norton, 2011) – Figura 10. Ou seja, "$\frac{3}{5}$ é um conjunto de três partes fracionadas, e o todo é uma unidade formada por cinco partes fracionadas" (Norton, 2008, p. 407).

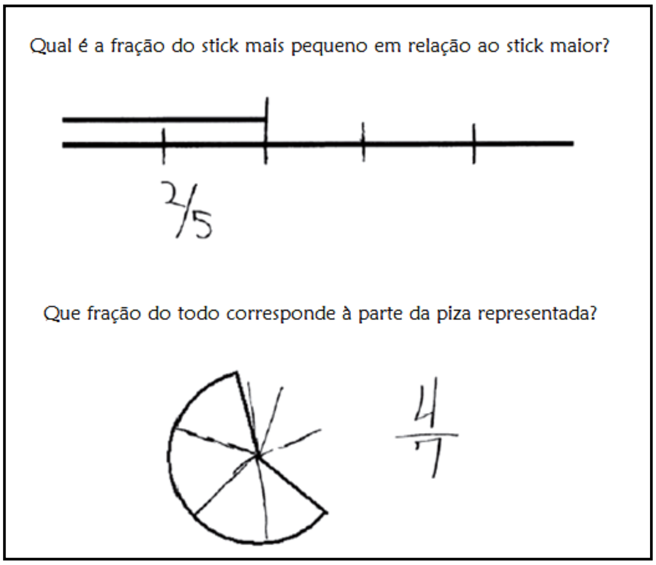


Figura 10 – Resposta de um aluno que evidencia um PFS (Wilkins & Norton, 2011).

Nesta tarefa, o aluno determina o tamanho da peça que lhe é apresentada, relativamente ao todo, através de iterações na peça que lhe é apresentada (duas no primeiro exemplo e quatro no segundo) e de um outro número de iterações no todo (cinco no primeiro exemplo e sete no segundo). Estes dois exemplos "dão uma visão mais clara da diferença entre um raciocínio entre parte-todo e um raciocínio mais complexo, uma vez que elas requerem alguma estimação" (Wilkins & Norton, 2011, p. 395).

Um aluno que tenha construído este tipo de esquema, consegue visualizar um quinto de uma barra de chocolate como uma parte que iterada cinco vezes irá produzir a totalidade da barra – cinco quintos (Hackenberg, 2007). Além disso, segundo o autor, para produzir três quintos dessa barra, o aluno pode dividi-la em cinco partes iguais, retirar uma delas e iterá-la três vezes. Assim, a compreensão do aluno vai além da noção parte-todo, uma vez que consegue desencaixar uma parte do todo fracionado, iterar essa parte e construir outra parte do todo (Hackenberg, 2007). No entanto, segundo o autor, a compreensão do aluno continua muito ligada à noção parte-todo, uma vez que para ele $\frac{3}{5}$ é uma parte do todo e não consegue interpretar a fração como $3 \times \frac{1}{5}$. Deste modo, os alunos que desenvolveram apenas o PFS, não conseguem produzir, por exemplo $\frac{8}{5}$ de uma barra, dividindo-a em cinco partes iguais, desencaixando uma delas e iterando-a oito vezes (Steffe, 2002). Resumindo, embora os PFS sejam cruciais para a construção do conhecimento das frações, eles não são suficientes, pois mesmo que os alunos particionem a unidade e iterem uma das suas partes, o seu "mundo matemático" não vai além da unidade (Hackenberg, 2007) – Figura 11.

Figura 11 – Resposta de um aluno que evidencia um contra exemplo do esquema fracionário partitivo reversível (Norton & Wilkins, 2009).

A tarefa da Figura 11 promove o recurso a um esquema fracionário partitivo reversível, no entanto, a resposta do aluno evidencia que ele interpreta a questão como tendo de desenvolver uma ação de partição, encontrando um quinto da barra. Para o aluno o denominador representa sempre o número de partes iguais em que o todo é dividido

(Norton & Wilkins, 2009). Para resolver esta questão, "o aluno precisa de compreender os $\frac{4}{5}$ como quatro vezes $\frac{1}{5}$ e fazer a partição da barra em quatro partes, com o objetivo de iterar uma dessas partes para produzir o todo" (Norton & Wilkins, 2009, p. 153). Quando o aluno efetua a partição simultaneamente com a iteração está a desenvolver a ação da divisão (*splitting*), que é a base do esquema fracionário partitivo reversível, sendo este esquema o primeiro da hierarquia onde intervém esta ação (Hackenberg, 2007).

Os alunos podem utilizar os esquemas fracionários partitivos para estimar o tamanho de uma fração própria ou produzir a unidade a partir daí, no entanto, com estes esquemas "os alunos não conseguem produzir frações impróprias, porque quando a fração é maior que a unidade, esta é perdida" (Norton & Wilkins, 2009, p. 154). É por isso usual que os alunos interpretem $\frac{4}{3}$ de uma barra como $\frac{4}{4}$ ou $\frac{3}{4}$ da mesma (Tzur, 1999), redefinindo a unidade. Apesar dos esquemas fracionários partitivos serem essenciais para que os alunos construam o seu conhecimento sobre frações, eles não incluem as frações impróprias (Hackenberg, 2007), para tal é necessário o esquema fracionário iterativo (Steffe, 2002), como é evidenciado pela resposta do aluno na Figura 12.

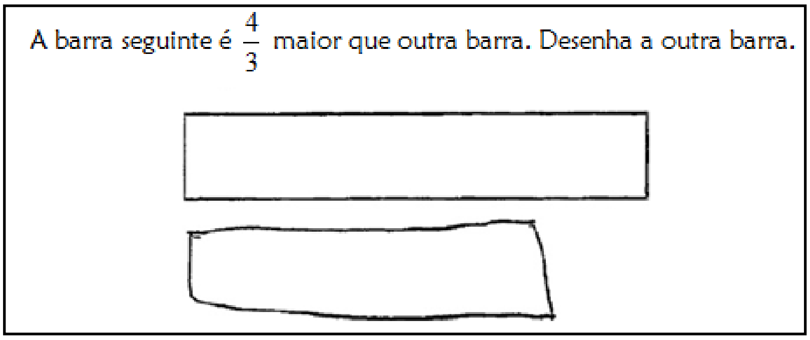


Figura 12 – Resposta de um aluno que evidencia um esquema fracionário iterativo (Norton & Wilkins, 2009).

Ser capaz de produzir qualquer fração através de iterações de uma parte da unidade (construir $\frac{8}{9}$ a partir de oito iterações de $\frac{1}{9}$) e ainda assim manter a sua relação com o todo (compreender que $\frac{9}{8}$ do todo é $\frac{8}{8}$ mais $\frac{1}{8}$) significa que as frações têm significado por si, sem ser necessário recorrer à sua relação com o todo, mesmo que essa exista (Hackenberg, 2007). Realizar estas ações, ou seja, evidenciar um esquema facionário iterativo, é um grande progresso no conhecimento dos alunos sobre as frações (Olive & Steffe, 2002; Steffe, 2002; Tzur, 1999).

"Os esquemas progridem de forma geral do raciocínio parte-todo, onde as frações são vistas como razões entre a parte e o todo, para o raciocínio fracionário, onde as frações se tornam comparações relativas de tamanho" (Norton, 2008, p. 408). É neste âmbito, que quando um aluno consegue compreender porque é que $\frac{6}{8}$ é equivalente a $\frac{3}{4}$, se encontra num esquema de frações proporcionais (Norton, 2008). Neste esquema, os alunos interpretam $\frac{3}{4}$ como sendo três partes cujo tamanho é $\frac{1}{4}$, em que cada uma é equivalente (em tamanho) a $\frac{2}{8}$ (Norton, 2008). De acordo com o autor, "este tipo de raciocínio envolve três níveis de coordenação de unidades de frações – os oitavos dentro dos quartos dentro dos $\frac{3}{4}$" (Norton, 2008, p. 408).

2.3. Multiplicidade de significados do número racional

O ensino/aprendizagem dos números racionais é complexo e um dos fatores que contribui para essa complexidade é o facto de estes contemplarem uma multiplicidade de significados (Behr et al., 1992; Lamon, 2006).

No programa de Matemática do 2.º ciclo é referido que a aprendizagem deve aprofundar a compreensão das operações elementares e a destreza de cálculo com os números naturais e racionais não negativos, na forma de decimal, "ampliando-as aos números inteiros e racionais não negativos na forma de fração, considerada nos seus múltiplos significados (…) tendo sempre em vista o desenvolvimento do sentido de número." (ME, 2007, p. 32)

No entanto, há que ter em conta que os termos "fração" e "número racional" não são sinónimos, deve-se pensar nas frações como uma representação possível dos números racionais (Lamon, 2007).

> Números Racionais são elementos de um campo infinito de quocientes que consiste em classes de equivalência e os elementos dessas classes de equivalência são frações. (Behr et al., 1992, p. 296)

De acordo com Lamon (2007), esta distinção formal entre número racional e frações, pode resumir-se dizendo que as frações são um subconjunto dos números racionais. Isto é, são uma forma de representar os racionais, e podem ter vários significados. Descrever estes significados com suficiente profundidade e clareza, de modo a que as experiências de aprendizagem tenham uma firme fundamentação teórica para as crianças (Behr et al., 1992, p. 296), é um dos grandes problemas da investigação.

Durante as últimas três décadas importantes fatores têm sido identificados como contribuintes para as dificuldades de aprendizagem dos números racionais (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006). Investigadores concordam que um dos fatores que contribui para a complexidade do ensino/aprendizagem dos números racionais reside no facto destes contemplarem uma multiplicidade de significados[18] (Behr et al., 1992; Kieren, 1988; Lamon, 2006; Llinares & Sánchez, 2000).

Segundo Pirie, Martin, e Kieren (1994), quando se pergunta aos alunos "O que é uma fração?", as respostas são as mais variadas: "uma quantidade dividida por outra quantidade" (noção de divisão); "uma secção de uma coisa inteira" (noção de parte-todo); "um número que não foi escrito sob a forma de decimal" (noção de número) e "um número debaixo de outro número" (noção da forma de escrever).

Os números racionais podem assim ser interpretados de várias formas, constituindo-se por diferentes sub-conceitos. Kieren (1980) foi o primeiro a defender que os números racionais são um conceito que envolve vários significados: relação parte-todo; razão; operador; quociente e medida. Segundo o autor, uma compreensão completa dos números racionais requer não só uma compreensão de cada um dos significados separados, mas também da forma como eles se relacionam.

A capacidade de resolver problemas que envolvam os vários significados dos números racionais depende da compreensão de um conjunto de conceções apontadas por Martinie (2007) e Wheeldon (2008), que são fundamentais para a construção do conceito de número racional. Com base no modelo teórico de Behr et al. (1983) e tendo em conta as referidas conceções que atravessam os vários significados, surge um modelo que esquematiza essa transversalidade (Figura 13).

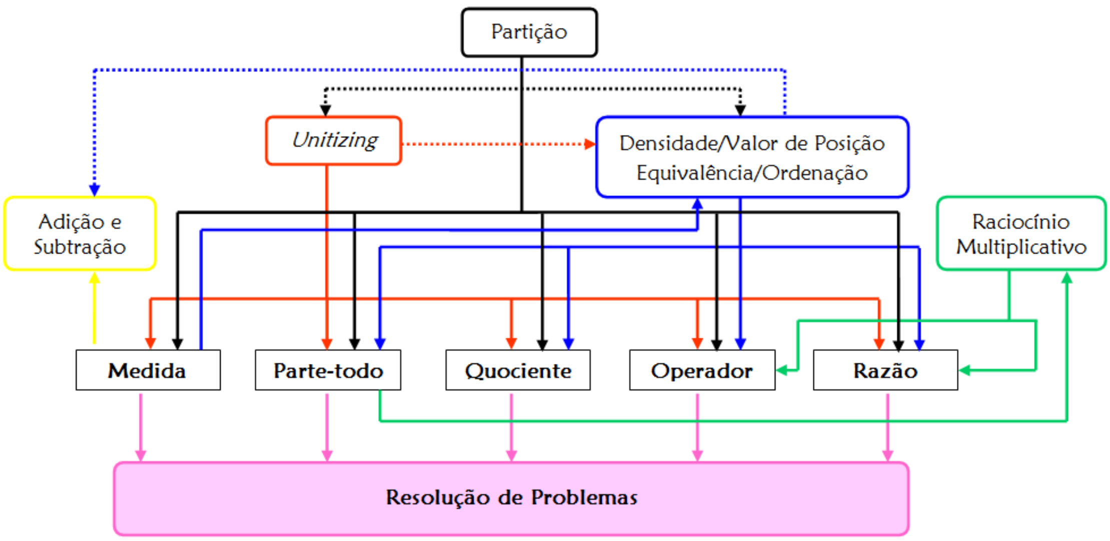


Figura 13 – Modelo de transversalidade entre as conceções fundamentais para o desenvolvimento do SNR e os significados dos números racionais.

O modelo anterior deixa bem claro que a partição é a base para se desenvolver o conhecimento de todos os significados dos números racionais (linhas pretas), tal como

[18] Kieren (1980) atribui a designação de sub-construtos aos vários significados dos números racionais.

também defendem Ni e Zhou (2005). No entanto esta noção é também fundamental para que outras conceções tais como o *unitizing*, a equivalência e ordenação, se possam desenvolver (linhas pretas tracejadas). Tal como a noção de partição, também a noção de *unitizing* é fundamental para a compreensão de todos os significados dos números racionais (linhas vermelhas) e da equivalência de frações (linha vermelha tracejada).

A densidade/valor de posição e equivalência/ordenação são outras noções importantes para que os alunos consigam compreender os cinco significados dos racionais (linhas azuis). Além disso, a equivalência de frações é também uma noção fundamental para que os alunos consigam adicionar e subtrair frações (linha azul tracejada), em que o significado de medida os pode auxiliar (linha amarela).

O significado parte-todo é considerado por Powell e Hunting (2003) a base para o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo e este é considerado fundamental para a compreensão dos significados razão e operador (linhas verdes). Talvez por esse motivo, por ser um significado que permite abordar várias conceções e servir de base a outras, o significado parte-todo tem ocupado a "linha da frente" dos currículos de diferentes países (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006).

Finalmente, o modelo apresentado na Figura 13, revela ainda que, tal como Behr et al. (1983) também defendem, a compreensão de todos os cinco significados é a base para que o aluno consiga resolver problemas que envolvam números racionais (setas cor de rosa).

2.3.1. Significado parte-todo

Este significado é normalmente representado sob a forma de fração ($\frac{1}{n}$), em que esta representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais (Lamon, 2006). Neste significado, a fração representa uma comparação entre o número de partes da unidade fragmentada que se toma (numerador) e entre o número total de partes em que a unidade foi dividida (denominador).

Para que a unidade (discreta ou contínua) seja dividida em partes iguais, os alunos têm de perceber a noção de partição (Berhr et al. 1983; Martinie, 2007). Ou seja, têm de compreender que as partes em que o todo é dividido, devem ter o mesmo tamanho (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006; Lamon, 2006), a mesma área ou o mesmo comprimento (Lamon, 2006).

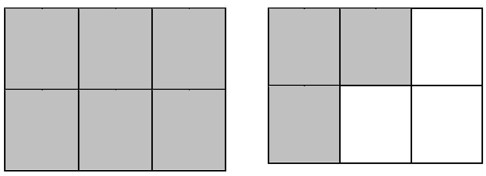
Neste significado é também necessário que os alunos tenham um determinado número de ideias associadas às relações entre as partes e o todo, tais como: **a)** as partes, todas juntas, devem perfazer o todo, **b)** quanto mais o todo é dividido, mais pequenas as partes se tornam, e **c)** a relação entre as partes e o todo é conservada, independentemente do tamanho, da forma, do arranjo, ou da orientação das partes equivalentes (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006).

Além da noção de partição, também a noção de *unitizing* é de extrema importância, uma vez que permite ao aluno identificar a unidade de referência, reorganizá-la e eventualmente reconstruí-la, baseando-se nas partes do todo (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006). Esta aptidão permite aos alunos um caminho alternativo na resolução de problemas com este significado quando as figuras não os ajudam (Lamon, 2006) e também fazer com que as operações com frações tenham sentido (Tarp, 2012).

Segundo Monteiro e Pinto (2005), há professores que referem que quando mostram $\frac{3}{5}$ pintados de uma figura aos alunos e lhes perguntam que parte está sombreada, as respostas comuns são $\frac{3}{2}$, o que evidencia a relação entre as duas partes, a pintada e a não pintada. De acordo com estas autoras e com Wheeldon (2008), um ensino que não vai além deste significado traz sérias dificuldades para os alunos, uma vez que estes facilmente confundem a relação parte-todo, com a relação parte-parte. No entanto, lamentavelmente este significado é muito sobrevalorizado pelos professores, que chegam a referir que é o único significado a ser explorado nas aulas do 1.º ciclo (Cardoso & Mamede, 2011).

Este significado é de facto muito importante (Behr et al., 1983; Lamon, 2006; Powel & Hunting, 2003) e é por isso comum que seja o primeiro a ser abordado no ensino dos números racionais. No entanto, um ensino limitado a este significado faz com que os alunos aprendam as frações apenas como uma rotina em que têm de nomear uma parte de um todo, não se apercebendo de aspetos muito importantes para a compreensão deste conceito (Nunes, Campos, Magina & Bryant, 2005), o que conduz a uma série de limitações (Kerslake, 1986).

De acordo com este significado, o numerador da fração deverá ser menor que o denominador. No entanto esta ideia torna-se "desastrosa" quando é apresentado aos alunos uma fração maior que a unidade. Na figura que se segue a parte sombreada distribuída por duas unidades ($\frac{9}{6}$) pode ser interpretada como $\frac{9}{12}$ (adaptado de Monteiro & Pinto, 2005).



Deste exemplo pode surgir uma outra forma de representação, para o mesmo número, os numerais mistos, preconizados pelo programa (ME, 2007), uma vez que temos uma unidade completa e mais $\frac{3}{6}$ de outra unidade igual, assim sendo, temos $1\frac{3}{6}$. Isto facilita a compreensão dos alunos para o facto de poderem existir frações maiores que a unidade e permite realçar a relação entre as várias representações (Monteiro & Pinto, 2005).

2.3.2. Significado quociente

O significado quociente surge muitas vezes associado a problemas de partilha (Wheeldon, 2008), onde a fração representa o quociente entre dois números inteiros, com denominador diferente de zero. Neste significado, os alunos precisam de compreender a função do dividendo e do divisor na operação da divisão, por isso, dividir em partes iguais é a base para que se entendam os números racionais como quociente (Lamon 2006). Deste modo a partição também desempenha um papel importante neste significado (Lamon, 2006), aliás, Post, Behr e Lesh (1982), identificam esta noção como a principal estrutura cognitiva envolvida no significado quociente. De acordo com os últimos autores, a noção de equivalência é também importante para uma completa compreensão deste significado. Ou seja, compreender que $\frac{3}{6}$ e $\frac{1}{2}$ representam a mesma quantidade pois quando são interpretados como uma divisão, o quociente das duas frações (0,5), é equivalente.

Neste significado não há restrições a respeito do tamanho da fração, ou seja, o numerador pode ser mais pequeno, igual ou maior que o denominador, e consequentemente a quantidade que resulta da atividade de dividir, pode ser menor, igual ou maior que a unidade (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006).

Segundo Santos (2005) este significado extrapola as ideias presentes no significado parte-todo, uma vez que aqui existem duas variáveis (o que se vai dividir e o número pelo qual se vai dividir, por exemplo, pizzas e pessoas). Na situação de quociente, a fração corresponde à divisão (quatro pizzas para 12 pessoas), mas também ao resultado da mesma (cada pessoa vai receber $\frac{1}{3}$ de pizza). Isto é, existem dois tipos de quantidades, as contínuas (Foram divididas igualmente para quatro crianças, três pizzas. Cada criança recebe uma pizza inteira? Que fração de pizza receberá cada criança?) e as discretas (Tenho uma caixa com 30 bolachas que vou dividir igualmente por cinco crianças. Quantas bolachas cada criança receberá? Que fração representa essa quantidade?). De acordo com Lamon (2006) quando as frações surgem como operadores associados a quantidades discretas e o resultado é um número inteiro, pode levar ao aparecimento de conflitos concetuais. Este conflito é evidenciado no estudo de Macieira (2011) quando ao trabalharem com este tipo de quantidades, o raciocínio dos alunos direcionou-se para os "números inteiros, levando-os a ter resistência em considerar um conjunto de objetos como uma unidade" (p. 179).

2.3.3. Significado operador

O significado operador está associado ao papel de transformação, ou seja, é uma ação que se deve realizar sobre um número, através da qual se transforma o seu valor – quantidades discretas, ou ainda a ideia de ampliação/redução – quantidade contínuas (Lamon, 2006; Santos, 2003).

De uma forma mais simples, a noção de operador dos números racionais é sobre "encolher/esticar"; "contrair/expandir"; "ampliar/reduzir" ou "multiplicar/dividir" (Lamon, 2006). Assim sendo, os operadores são transformadores que alargam/encurtam um segmento de linha; aumentam/diminuem o número de itens de um conjunto discreto de objetos; transformam uma figura noutra, com a mesma forma, mas de dimensões maiores ou menores (Lamon, 2006).

Compreender frações como operadores, requer raciocínio multiplicativo, nomeadamente a interpretação caracterizada como "tomar a parte da parte de um todo", ou seja, encontrar $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$ (Behr et al., 1993), mas significa também, segundo Lamon (2006), que:

a) o aluno consegue interpretar o multiplicador fracionário de várias formas: $\frac{3}{4}$ significa 3 ($\frac{1}{4}$ da unidade); $\frac{3}{4}$ significa $\frac{1}{4}$ de (três vezes a unidade).

b) quando duas operações (multiplicação e divisão) são realizadas com o resultado da outra, o aluno pode "eleger" apenas uma fração para descrever as operações compostas: multiplicar a unidade por $\frac{3}{4}$; dividir a unidade por quatro e depois multiplicar o resultado por três é a mesma coisa que multiplicar a unidade por $\frac{3}{4}$.

c) o aluno consegue identificar os *outputs* (saídas) e os *inputs* (entradas): $\frac{3}{4}$ simboliza um operador que encolhe, que resulta do *input* quatro e do *output* três; o *output* é $\frac{3}{4}$ do *input*.

d) o aluno consegue utilizar modelos para identificar uma composição simples que caracteriza a composição de composições: $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ da unidade $= \frac{3}{8}$ da unidade.

2.3.4. Significado medida

O significado medida é uma reconceptualização do significado parte-todo (Behr et al., 1983), pois também aqui se considera uma quantidade em relação a uma determinada unidade quantitativa (Wheeldon, 2008),

A construção do sentido de medida baseia-se em três princípios fundamentais: **a)** existe uma relação inversa entre o tamanho da unidade de medida e o número de vezes que essa unidade é utilizada para medir determinado objeto; **b)** o objeto (unidade) pode ser dividido em partes mais pequenas até ficarmos próximos da quantidade desejada e **c)** a unidade de medida pode ser repetida várias vezes, de uma ponta à outra do objeto que se pretende medir (Stephan & Clements, 2003, citado por Yanik, Helding & Flores, 2008).

No campo dos números racionais, de acordo com Lamon (2006) a compreensão do significado de medida abarca todos estes princípios, tais como identificar a unidade de medida, determinar um comprimento, e medir um comprimento através da repetição da unidade de medida (iteração). Por exemplo, quando se considera a fração $\frac{3}{8}$, esta pode ser interpretada como três repetições (iterações) da fração unitária ($\frac{1}{8}$) (Martinie, 2007). Também já foi mencionado que neste significado pode estar envolvida a divisão sucessiva de uma unidade (comprimento por exemplo) em partes menores (Lamon, 2006; Martinie, 2007), sendo, deste modo, o *unitizing* e a partição duas noções importantes para a compreensão deste significado. É neste âmbito que Martin, LacRoix e Fownes (2005) referem que quando se usam os racionais no contexto de medida, é mais apropriado vê-los como um ponto numa linha numérica.

Neste significado, a fração é associada a duas noções próximas e interdependentes. Primeiro ela é considerada um número, que conduz à personalidade quantitativa das frações, depois é vista como a medida atribuída a um intervalo (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006). Não admira por isso, tal como já foi referido, que este significado esteja sistematicamente associado ao uso da linha numérica ou a outros instrumentos de medida (por exemplo as réguas), para determinar distâncias de um ponto a outro expressas por $\frac{1}{x}$ unidades. Yanik et al. (2008), quando investigaram as dificuldades dos alunos em compreender a noção de unidade, associado ao significado de medida dos números racionais, implementaram uma experiência de ensino, cujo trabalho se desenvolveu em torno do modelo da linha numérica.

O trabalho com as frações através da linha numérica deve ajudar os alunos a concetualizar as relações parte-todo num contexto e reconhecer contextos equivalentes que procedem de novas divisões da unidade (Llinares & Sánchez, 2000). É por isso importante que os alunos sejam capazes de representar frações como $\frac{5}{8}$ em vários locais da linha numérica, uma vez que esta é um modelo que facilita a adição e subtração de frações, além de ser útil nas noções de ordenação e equivalência (Behr et al., 1992), bem como a noção de densidade dos números racionais (Lamon, 2006; Martinie, 2007). Estas noções devem ser dominadas pelos alunos para que estes desenvolvam, de uma forma completa, o significado de medida (Smith III, 2002).

Localizar frações na linha numérica, pode requerer sucessivas partições da mesma, no entanto Lamon (2006) reconhece que efetuar divisões sucessivas da unidade não é um processo fácil para os alunos, pelo que este significado deve ser introduzido depois de os mesmos terem experiência com outros significados, nomeadamente, parte-todo e quociente.

Para que os alunos desenvolvam este significado, eles também devem ser capazes de usar uma unidade de intervalo para medir qualquer distância da origem (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006). Deste modo os alunos devem não só conseguir localizar um número numa linha numérica, mas também identificar um número representado por algum ponto numa linha numérica (Smith III, 2002).

2.3.5. Significado razão

Este significado surge da noção de comparação entre duas quantidades, onde é indispensável o raciocínio multiplicativo. No entanto, há que fazer uma distinção entre a noção de razão "parte-parte", ou seja, a razão entre duas quantidades do mesmo tipo ("ratio"), que se referem a duas partes de um todo, por exemplo, a razão entre o número de meninos e meninas de uma turma (parte-parte); e a noção de razão entre duas grandezas de tipos diferentes ("rate"), que dá origem a uma nova grandeza, por exemplo, a razão entre a distância e o tempo necessário para a percorrer – velocidade (Lamon, 2006; Monteiro & Pinto, 2005).

Lamon (2006) ilustra este facto através de um par de abordagens alternativas que os alunos perseguem ao tentar resolver o seguinte problema: "A mistura A levou dois copos de água e três copos de sumo de laranja concentrado. A mistura B levou três copos de água e cinco copos de sumo de laranja concentrado. Qual mistura sabe mais a laranja?" (p. 181). Se os alunos compararem o número de copos de água das duas misturas, usam a noção de "rate". Se, por outro lado, eles comparam os copos de água das duas misturas e os copos de sumo concentrado das mesmas (diluição), estão a empregar a noção de "ratio".

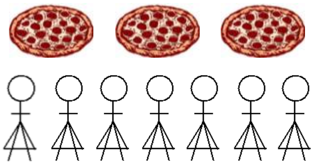
Para que estas noções de relação consigam ser distinguidas pelos alunos, eles devem trabalhar a fim de construir a ideia de quantidades relativas. Os alunos também precisam de concretizar o que significa dizer que existe uma relação entre duas quantidades e compreender a propriedade da covariância–invariância, que implica que as duas quantidades na relação "ratio" mudem simultaneamente, assim esta relação permanece na invariância (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006).

Resumindo, a grande complexidade dos números racionais deve-se a uma vasta multiplicidade de significados de que estes se revestem e que nem sempre são abordados na sua totalidade, nem da forma mais adequada com a necessária profundidade. Desta forma conduzem os alunos a visões redutoras de determinados significados, e a generalizações erradas.

2.3.6. Relação entre os significados

Trabalhar com uma única interpretação dos números racionais de forma pormenorizada, durante o processo de aprendizagem, não permite que os alunos consigam mobilizar e ajustar a sua forma de raciocinar quando estão perante um novo problema (Lamon, 2007). A suportar esta evidência encontra-se um outro estudo (Lamon, 1996) onde muitos alunos, cujo ensino teve início com situações de partilha (significado quociente), de acordo com Lamon (2007) demoraram dois anos até conseguirem responder às seguintes questões:

> Se cada rapariga receber a mesma porção de cada pizza, quanto vai receber cada uma? Ao todo, que quantidade de pizza recebe cada menina? (Lamon, 2007, p. 660)



Devido a todos os cortes desnecessários que os alunos fizeram (cada pizza foi cortada em inúmeras partes muito pequenas), eles não conseguiram remontar as muitas peças que compunham cada unidade (pizza) para determinar a porção de pizza que cada menina recebia ($\frac{3}{7}$ de pizza), até terem alguma noção de equivalência e de que podiam distribuir pedaços maiores por cada pessoa. Compreender a questão também exige que os alunos saibam que quando sete pessoas partilham algo, cada um vai receber $\frac{1}{7}$ da unidade, independentemente da unidade considerada (Lamon, 1996).

Mamede (2007) realizou um estudo com alunos do 1.º ciclo que nunca tinham trabalhado com frações em contexto escolar, onde tentou averiguar que significado pode facilitar a compreensão da noção de equivalência e ordenação de frações. Como resultado, observou que os alunos apresentam um melhor desempenho em situações que envolvem os significados de quociente e operador, do que o significado parte-todo. Estes resultados são corroborados por outros estudos mais recentes onde os alunos evidenciam compreender as frações quando os racionais são introduzidos com o significado de quociente (Mamede & Oliveira, 2011) e demonstraram que, apesar de terem abordado as frações apenas em situação parte-todo, um número significativo de alunos utiliza a divisão para justificar a equivalência de frações (Cardoso & Mamede, 2009). Deste modo, o significado de quociente parece ser o que mais sentido faz para os alunos, uma vez que o seu conhecimento dos números racionais é construído a partir do seu conhecimento informal (Mamede, 2007), contudo a autora adverte para a dificuldade das crianças em transferir os seus conhecimentos deste significado para o parte-todo, tal como Lamon (2006) também já havia evidenciado.

Para que o conceito de número racional se desenvolva é necessário que os cinco significados sejam abordados (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006). De acordo com os autores, é razoável afirmar que as diferenças no desempenho dos alunos nos cinco significados espelham o desequilíbrio que existe na ênfase que o ensino coloca em cada um.

Por exemplo, apesar de os significados de medida e quociente poderem ser explicados através de outras noções, tais como a definição de unidade (Behr et al., 1993), isso não é tido em conta no ensino. Além disso, quando se comparam quantidades, a tendência é a de envolver apenas os significados parte-todo, razão e operador, pois considera-se que esta noção (comparação) não é necessária para desenvolver a compreensão dos significados quociente e medida (Lamon, 2006).

De acordo com Charalambous e Pitta-Pantazi (2006), mesmo que os alunos desenvolvam a compreensão do significado parte-todo, se o ensino não for além deste significado, eles podem encontrar dificuldades significativas na aquisição dos outros significados, que dificilmente serão superadas.

Em suma, a investigação mostra que o significado parte-todo é necessário, mas não é condição suficiente para desenvolver a compreensão da noção de fração (Baturo, 2004; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006). Além disso a opção de escolher este significado para fazer a introdução dos números racionais é questionável, pois Mamede, Nunes e Bryant (2005) chegam mesmo a referir que talvez seja bom "repensar qual a melhor situação para introduzir às crianças as frações na sala de aula" (p. 287).

Os resultados de várias investigações são unânimes, ao afirmarem que os professores não devem apressar-se a proporcionar aos alunos vários algoritmos para que estes possam operar sobre as frações, mas sim que o ensino deve colocar uma maior ênfase na compreensão conceptual dos vários significados dos números racionais (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006; Lamon, 2006). Apesar de ser importante trabalhar os cinco significados, o professor deve ter bastante cuidado, dando aos alunos tempo suficiente para que compreendam cada um em profundidade e proporcionando o estabelecimento das conexões entre eles (Lamon, 2007). Por exemplo, o significado parte-todo tem um papel muito importante no desenvolvimento da compreensão dos números racionais, desde que seja relacionado com os outros significados (Baturo, 2004; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006).

Logicamente que os cinco significados não surgem simultaneamente, os alunos precisam de um ponto de partida para a sua aprendizagem dos números racionais, ou seja, precisam começar por um dos cinco significados (Lamon, 2007). De acordo com a autora, para que os alunos venham a compreender os vários significados dos números racionais, precisam de desenvolver a ideia de equivalência de frações, bem como técnicas de comparação para poderem ajuizar o tamanho relativo dos números racionais.

Segundo Lamon (2007), apesar de os significados se relacionarem entre si, cada um tem as suas características particulares e nem todos são um bom ponto de partida; os significados de operador e quociente são menos poderosos que os significados de medida, razão e parte-todo, para se iniciar a aprendizagem dos números racionais.

Lachance e Confrey (1995) defendem que o ensino dos números racionais se deve iniciar com experiências com frações com o significado de razão, uma vez que são uma boa base para a compreensão da notação decimal. Também Lamon (2007) refere que os alunos cuja primeira interpretação dos racionais abordada é a razão, desenvolvem uma noção de equivalência muito forte e facilmente fazem comparações entre razões e frações (parte-todo). Muitos deles desenvolvem as suas próprias formas de raciocinar sobre a multiplicação e divisão. "Por exemplo, para multiplicar $\frac{3}{8} \times \frac{2}{3}$, eles utilizam o conhecimento proporcional: $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{8}$ é igual a $\frac{1}{8}$, então $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{8}$ é igual a $\frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{4}$. A maioria da turma desenvolveu um bom conhecimento de razão, parte-todo e operador" (Lamon, 2007, p. 659).

Para que os alunos tenham uma sólida compreensão do significado medida, é necessário que os mesmos compreendam a propriedade da densidade dos números racionais. Para desenvolver este significado, os alunos também devem ser capazes de utilizar uma determinada unidade de um intervalo para medir qualquer distância da origem (por exemplo, zero). Isto significa que os alunos devem conseguir localizar um número na linha numérica e, inversamente identificar um número representado por um determinado ponto na linha numérica (Hannula, 2003). No entanto, este modelo é difícil de manipular (Hannula, 2003) e por isso a sua introdução deve ser contextualizada para que os alunos lhe consigam atribuir um significado e se apropriem dela como uma ferramenta que lhes pode ser útil para pensar, nomeadamente no que diz respeito às frações equivalentes, numerais mistos e frações impróprias (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006).

Steffe e Olive (2010) retratam vários episódios de uma experiência de ensino onde foram propostas aos alunos uma sequência de tarefas envolvendo os números racionais. Estes autores começaram o seu trabalho com os alunos através da divisão de uma vara em partes iguais (significado quociente), pedindo posteriormente aos alunos que pegassem numa das partes da vara (significado parte-todo) e que a subdividissem de forma a encontrarem $\frac{1}{3}$ de uma dessas partes (significado operador). Posteriormente os alunos tiveram de explicar porque é que um terço da vara podia ser medido com quatro doze avos (significado medida). É através deste ponto que os autores trabalham com os alunos outras noções, tais como a multiplicação, a concetualização da unidade (*unitizing/reunitizing*) e a equivalência de frações.

Charalambous e Pitta-Pantazi (2005, 2006), com o objetivo de investigar o desempenho dos alunos nas operações com frações, construíram um teste com tarefas que abrangiam os vários significados dos racionais, assim como as operações. Desse estudo, os autores defendem que dominar os cinco significados contribui para que aluno consiga adquirir proficiência nas operações com frações, bem como no trabalho com a equivalência de frações. O estudo de Charalambous e Pitta-Pantazi (2005) refere que: **a)** o significado parte-todo resultante de um processo de partição é a base para o desenvolvimento e compreensão dos outros quatro significados; **b)** a noção de razão é associada à equivalência; **c)** o significado operador está ligado às operações multiplicativas das frações. No entanto, o estudo suporta dois outros caminhos: um deles estabelece uma ligação entre o significado quociente e as operações multiplicativas e outro estabelece ligação entre o significado parte-todo e as operações aditivas das frações (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005).

É importante, aceitando a ideia dos vários autores (Baturo, 2004; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005, 2006; Lachance & Confrey, 1995; Lamon, 2007; Steffe & Olive, 2010) que os alunos trabalhem os vários significados dos racionais. No entanto, relativamente à ordem que deve ser dada à abordagem dos vários significados dos números racionais no ensino destes números, a minha opinião relativamente às ideias dos vários autores, aponta em duas direções. Isto é, concordo que seja vantajoso que o ensino dos números racionais se inicie pelos significados quociente e parte-todo em simultâneo (por exemplo, interpretar três quartos como sendo três partes da divisão da unidade em quatro) (Lamon, 2007; Steffe & Olive, 2010), de forma a evitar os resultados do estudo de Lamon (1996), onde os alunos evidenciaram grandes dificuldades em exprimir uma relação parte-todo, antes de terem a noção de equivalência. Seguindo as ideias de Steffe e Olive (2010), concordo que a abordagem dos números racionais siga com os significados de operador e medida, mas considero mais produtivo que a abordagem da fração com o significado razão deva ser o último significado a ser abordado, uma vez que é o mais complexo de todos. No entanto, se nos outros significados é de grande importância que se trabalhem as várias representações dos racionais, neste significado o trabalho com as representações decimal e percentagem não devem nunca ser descuradas, porque sendo a razão uma comparação entre duas quantidades, nada torna essa comparação mais fácil do que estas duas representações.

Em suma, o desenvolvimento de sentido de número racional é de facto um processo complexo (Yang et al., 2009) que abarca vários aspetos mencionados por vários autores (McInstosh et al., 1992; Yang et al., 2004). Tendo em conta os aspetos do sentido de número enunciados por estes autores e devido a toda a complexidade do conceito de número racional (Behr et al., 1992; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006; Lamon 2007; Martinie, 2007), o desenvolvimento do sentido de número racional deve englobar os diferentes significados dos números racionais, as suas múltiplas representações, a compreensão das unidades de referência, da densidade dos números e o seu valor de posição, assim como a utilização de sistemas de valores de referência. Além disso, os alunos devem ser capazes de aplicar este conhecimento e ter destreza com estes números, utilizando múltiplas estratégias e predisposição para utilizar uma ou outra representação e/ou método, em função da situação com que se deparam.

CAPÍTULO III

APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS

As aprendizagens em torno deste tema são das tarefas mais difíceis para as crianças, o que não é surpreendente devido à complexidade do conceito de número racional (Bezuk & Cramer, 1989). Ao começarem a trabalhar com os números racionais, os alunos apresentam inúmeras dificuldades, uma vez que devem adotar novas regras que entram em conflito com algumas das ideias que desenvolveram nos números inteiros (Bezuk & Cramer, 1989; Empson, 1999; Moss & Case, 1999; Pitkethly & Hunting, 1996), que foram durante muito tempo os únicos com o estatuto de número para eles (Ni & Zhou, 2005). Isto faz com que os alunos generalizem, por vezes abusivamente, o conhecimento dos números inteiros para os racionais (Ni & Zhou, 2005) e, em particular, rejeitem as frações como números, uma vez que não se integram nos esquemas de contagem a que estavam habituados (Lamon, 2006).

Este capítulo começa por fazer uma abordagem à noção de representação, assim como ao seu papel no processo de ensino e aprendizagem, em particular dos números racionais. De seguida faz-se uma abordagem às várias representações simbólicas (frações, decimais, percentagens e numerais mistos) e pictóricas dos números racionais e à sua presença nas orientações curriculares, bem como às conexões que podem ser estabelecidas entre elas. Posteriormente, este capítulo faz uma abordagem à noção de modelo, onde se aborda o papel dos modelos no ensino da matemática, descrevendo-se dois destes que têm grande visibilidade neste estudo: a barra numérica e a dupla linha numérica. Ainda neste capítulo são também apresentadas algumas estratégias de resolução de tarefas que os alunos podem adotar quando trabalham com os números racionais em vários contextos.

Finalmente apresenta-se uma secção dedicada à investigação sobre as dificuldades e erros dos alunos quando trabalham com os racionais, assim como as estratégias que desenvolvem perante determinada tarefa envolvendo estes números.

3.1. As representações na aprendizagem da Matemática

3.1.1. As representações

Compreender matemática significa que os alunos são capazes de utilizar as representações matemáticas para expressar suas ideias e problemas e também que são capazes de estabelecer conexões entre representações (Putnam et al., 1990). De facto estas desempenham um papel preponderante na forma como os alunos desenvolvem os conceitos matemáticos (Sfard, 1991), pois são uma importante ferramenta para pensar e comunicar matematicamente.

As representações são utilizadas para descrever processos de resolução de problemas na aprendizagem da Matemática (Cifarelli, 1998), uma vez que são "uma estrutura cognitiva construída pelo resolvedor quando interpreta o problema" (Yackel, 1985, p. 7), tendo por base o seu conhecimento. Deste modo, as representações construídas pelos alunos descrevem os conhecimentos que os mesmos mobilizam na resolução de problemas e situações matemáticas, cujo sucesso depende da sua capacidade de construir representações adequadas do problema e de as utilizar como meios auxiliares para compreender a informação (Cifarelli, 1998). Estas fornecem informação sobre o que estes pensam, servindo de ferramentas tanto para os alunos como para professores (Kalathil & Sherin, 2000). Tendo em conta que as representações servem para "transpor o problema verbal para uma forma visual, ligar o real ao abstrato [e/ou] confirmar um resultado após utilização ou não de um algoritmo" (Valério, 2005, p. 60), estas devem ser encaradas como ferramentas para o desenvolvimento da compreensão, para comunicar informação e para demonstrar raciocínio (NCTM, 2007).

As representações são inerentes a uma parte da matemática e do ensino que ajudam a dar sentido à mesma (Ball, 1993). Por um lado, porque podem complementar-se no que diz respeito ao conceito que lhe está subjacente e ajudar os alunos na sua eficiência computacional, ao optarem por aquela que preferirem e/ou em que se sentem mais seguros. Por outro lado, as representações podem ajudar à interpretação de outras representações (Ainsworth, 1999), uma vez que

> as combinações das várias representações que se complementam e condicionam mutuamente permitem aos alunos lidar com o material de diferentes perspetivas e com diferentes estratégias e, por isso, pode ter efeitos de evolutivos na construção coerente de um conhecimento estruturado. (Seufert, 2003, p. 228)

Segundo Vergnaud (1987) as representações têm um papel de extrema importância, uma vez que utilizam sistemas simbólicos (sintaxe e semântica) que são universais. De acordo com o autor (1998), um conceito não é uma mera definição, pois refere-se a um conjunto de situações e envolve uma série de diferentes invariantes operacionais (conceitos e teoremas em ação), cujas suas propriedades podem ser expressas por diferentes representações simbólicas e linguísticas.

Para Goldin (2008), uma representação trata-se de uma configuração que

> pode representar qualquer coisa de um determinado modo. Por exemplo, uma palavra pode representar um objeto da vida real, um numeral pode representar um cardinal de um conjunto, ou o mesmo número pode representar uma posição na linha numérica. (p. 178)

DeWindt-King e Goldin (2003) acrescentam que as representações são configurações de "caracteres, imagens, objetos concretos, etc., que podem simbolizar qualquer coisa" (p. 2). De acordo com Schnotz (2002) as imagens são informação visual que fazem parte das representações simbólicas[19], e segundo Carney e Levin (2002) elas podem até servir diversos propósitos: representação (ilustram uma parte ou todo o conteúdo do texto), organização (fornece um enquadramento útil estrutural para o conteúdo do texto), interpretação (ajudam a clarificar as dificuldades do texto) e transformação (incluem as componentes mnemónicas que visam melhorar a recolha de informação por parte do leitor).

Deste modo, as representações podem-se referir a expressões do conhecimento matemático que ajudam a explicar conceitos, relações, processos ou resolução de problemas (Cai & Wang, 2006) e podem ser internas ou externas. As primeiras referem-se aos modelos mentais dos alunos da realidade; as segundas referem-se a registos visíveis que expressam as opiniões particulares da realidade (Cai & Wang, 2006). De acordo com Goldin (2008), "as palavras escritas, numerais, gráficos, ou equações algébricas, são exemplos de representações externas" (p. 179), por sua vez, as representações internas "incluem a linguagem natural dos indivíduos, simbolização pessoal dos constructos, imagens visuais e espaciais, heurística da resolução de problemas" (p. 181).

Toda a Matemática envolve a representação de ideias, estruturas ou informação, de forma a permitir a resolução de problemas (Putnam, Lampert & Peterson, 1990), envolvendo sistemas de representação.

> Um sistema de representação tem estruturas maiores e mais complexas, tais como redes, configurações de configurações, ordenação parcial ou total das classes de configurações, operações matemáticas, regras lógicas ou linguagem natural, sistemas de produções, e assim por diante. (Goldin, 2008, p. 180)

[19] As representações simbólicas incluem sinais icónicos que estão associados a um conteúdo que estes representam por meio de características comuns a um nível concreto e a um nível mais abstrato (Elia, Panaoura, Eracleous, & Gagatsis, 2007, p. 659).

Podem identificar-se cinco sistemas distintos de representação que são convocados na aprendizagem da matemática sendo eles: *sistemas verbais* que dizem respeito à linguagem oral utilizada pelos alunos (Goldin, 2008; Lesh et al., 1987); *sistemas visuais* que se referem a figuras ou esquemas que os alunos utilizam para representarem situações (Lesh et al., 1987; Goldin, 2008); *sistemas de planificação e execução* que se relacionam com a resolução dos problemas, incluindo as estratégias (Goldin, 2008); *símbolos escritos*, que abarcam a escrita de números (representação fracionária, decimal, percentagens, por exemplo) ou expressões algébricas (Goldin, 2008; Lesh et al., 1987) e *sistemas manipulativos*, tais como material *cuisenaire*, barras fracionadas ou linha numérica.

Os conceitos matemáticos só são compreendidos pelos alunos se as suas representações mentais (internas) fizerem parte de uma rede de representações, estando o grau de compreensão relacionado com o número de conexões que conseguem estabelecer (Hiebert & Carpenter, 1992). Como referem estes autores, as representações internas podem conectar-se entre si, no entanto, "só podem ser inferidas apenas como representações de si mesmas, que são influenciadas por atividades externas, [e] (…) podem ser estimuladas pela construção de conexões entre representações externas correspondentes" (p. 66).

A forma como os alunos lidam com as representações, segundo Hiebert e Carpenter (1992), evidencia como têm representada a informação internamente, uma vez que, segundo Goldin (2008), não conseguem compreender as palavras, os números ou os gráficos (representações externas) sem que elas estejam incluídas em sistemas de representação. Deste modo, torna-se importante distinguir os sistemas de representação que são externos ao indivíduo e as representações internas da pessoa (DeWindt-King & Goldin, 2003).

Dado que apenas uma representação não pode descrever plenamente um conceito matemático e que cada representação tem as suas vantagens, combinar as múltiplas representações para a mesma situação matemática, além de estar no cerne da compreensão matemática (Duval, 2006), pode ter efeitos significativos na construção de um conhecimento coerente, permitindo aos alunos trabalhar diferentes perspetivas e com diferentes estratégias (Seufert, 2003).

As representações são, desde sempre, um tema importante na investigação sobre o ensino e aprendizagem da Matemática (Janvier, 1987), mais especificamente os processos mentais das representações (Janvier, 1987; Yackel, 1985). Nestes estudos os processos de representação ajudam a explicar a capacidade do aluno em compreender a situação ou a tarefa que tem em mãos. Deste modo, os professores devem permitir que os alunos utilizem simultaneamente representações simbólicas e pictóricas na resolução de um problema, pois são estas últimas que muitas vezes dão sentido às primeiras (Lima, Freire & Souza, 2012) e permitem a evolução no conhecimento dos alunos (Ponte & Quaresma, 2011b). Esta evolução pode ser classificada por níveis de construção de um conceito: **a)** mistura incoerente de diferentes representações do conceito; **b)** identificação de diferentes representações de um conceito; **c)** conversão com a preservação do significado de um sistema de representação para outro; **d)** articulação coerente entre os dois sistemas das representações e **e)** articulação coerente entre os dois sistemas de representações na solução de um problema, ou seja, flexibilidade com as diferentes representações (Hitt, 1998).

Esta flexibilidade depende largamente do ensino que é proporcionado aos alunos, uma vez que o simples contacto com um grande número de representações externas não vai resultar numa grande reestruturação da compreensão, dado que esta só se desenvolve através da articulação entre as diferentes representações internas (Barmby, Harries, Higgins & Suggate, 2009). De acordo com os autores, compreender que um conceito tem múltiplas representações, sendo capaz de raciocinar entre elas, resulta numa maior reestruturação do conhecimento. Deste modo, e de acordo com Simon (2006), a "capacidade dos alunos para pensar e perceber as relações matemáticas (...) [origina] uma mudança significativa nas estruturas de assimilação que os alunos têm disponíveis" (pp. 363-364).

Quando é facultado a um aluno, por exemplo, um texto e uma imagem, o mesmo tem de compreender a informação de ambas as fontes (Seufert, 2003). De acordo com o autor, a compreensão do texto inclui a pesquisa de elementos relevantes e a identificação das relações expressas no texto (processo de formação intrarrepresentacional). Além disso, o aluno tem de encontrar elementos correspondentes no texto e na imagem e interligá-los (processo de formação interrepresentacional): "Apenas se os alunos conseguirem estabelecer estas relações, (...) é que conseguem desenvolver uma compreensão profunda e como tal são capazes de construir um conhecimento coerente" (Seufert, 2003, p. 228).

Este processo é complexo e muito exigente a nível de competências cognitivas e metacognitivas para os alunos, principalmente se estes tiverem poucos conhecimentos prévios, pois nestes casos há dificuldades na coordenação e integração das várias representações (Ainsworth, 1999). Combinar múltiplas representações é, no entanto, um processo complexo porque exige a compreensão da relação existente entre as mesmas (Elia et al., 2007), não sendo uma situação comum aos alunos, uma vez que os mesmos tendem a centrar-se apenas numa representação que lhes é mais familiar ou concreta (Ainsworth, 2006; Cox & Brna, 1995). No entanto, ao combinarem as representações, não ficam limitados pelos pontos fortes e fracos de uma representação específica. Para tal, devem estabelecer conexões entre as representações (externas) e construir uma representação mental (interna) coerente de forma a complementar as várias representações (Seufert, 2003).

O uso de várias representações pode ajudar muito na aprendizagem, existindo uma forte convicção entre a comunidade de educação matemática que os alunos conseguem entender conceitos matemáticos através da experiência matemática com as múltiplas representações (Lesh, Post & Behr, 1987; NCTM, 2007; Patterson & Norwood, 2004). De acordo com Panaoura et al. (2009), numerosos estudos sobre o uso de representações têm tentado explicar a sua contribuição para a aprendizagem de conceitos e na eficiência na resolução de problemas. Noble, Nemirovsky, Wright e Tierney (2001) referem que as várias representações permitem aos alunos atingir altos níveis cognitivos de raciocínio funcional. "Os alunos compreendem um determinado conceito matemático (…) se as representações internas fizerem parte de um sistema de conhecimento simbólico" (Patterson & Norwood, 2004, p. 9). Deste modo, e de acordo com os autores, uma abordagem que privilegie as representações dá a oportunidade aos alunos de criarem representações mentais de conceitos, que os ajudam a estabelecer conexões.

A combinação de diferentes representações pode ser um suporte para aprendizagem. Neste contexto, Ainsworth (1999) identifica três funções principais das representações externas que podem ser uma mais-valia para a aprendizagem: **a)** a primeira função é a utilização de representações que complementam ou apoiam processos cognitivos; **b)** a segunda, é a utilização de representações que coagem a interpretação de outras e, **c)** a terceira, é a utilização de representações como incentivo à construção de um conhecimento mais aprofundado de determinadas situações. Cada uma destas funções pode ser subdividida em várias subclasses (Figura 14).

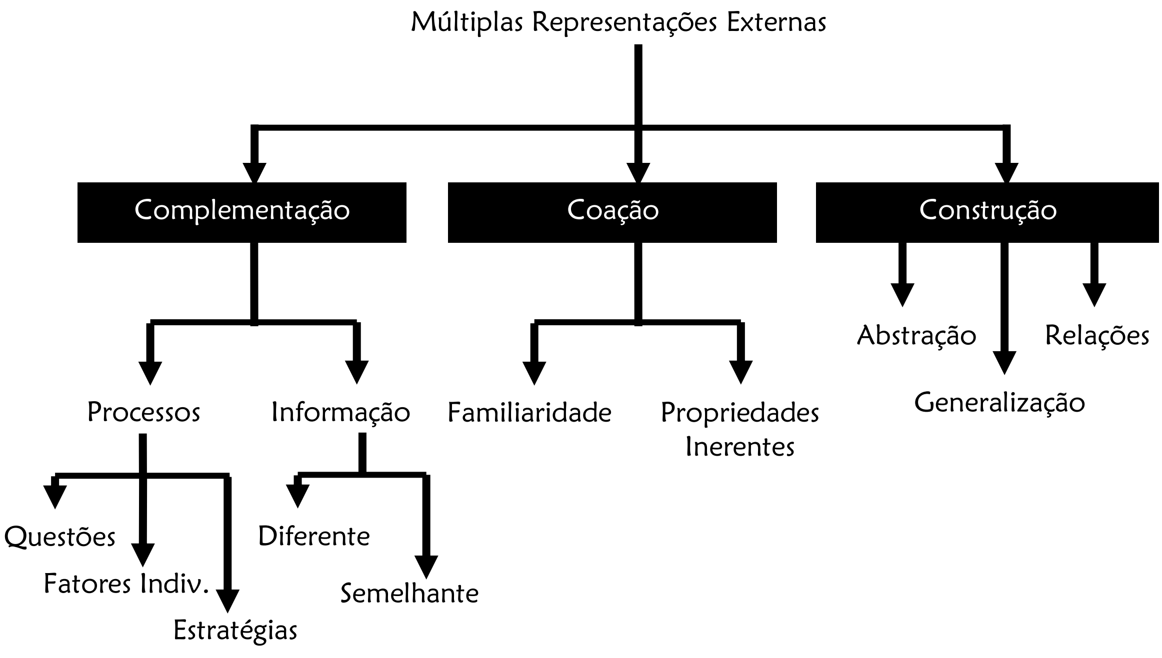


Figura 14 – Taxonomia funcional das múltiplas representações (adaptado de Ainsworth, 1999).

Relativamente à função de complementação, trabalhar num ambiente multirrepresentacional pode ser vantajoso, na medida em que os papéis das várias representações podem complementar, quer na informação que transmitem, quer nos processos que suportam (Ainsworth, 1999). De acordo com a autora, a justificação mais apontada para o uso das múltiplas representações é que um contexto deste tipo promove o recurso a diferentes estratégias computacionais, fomentadas pelas diferentes preferências dos alunos.

> Se um ambiente de aprendizagem apresenta uma variedade de representações, os alunos podem trabalhar com a que preferem. Quando os alunos têm vários graus de experiência e conhecimento das várias representações, uma combinação adequada permite que cada um escolha e trabalhe com a [representação] que lhe é mais familiar. (Ainsworth, 1999, p. 5)

Esta preferência pode advir não só da experiência que o aluno tem em sala de aula, que é influenciada pela realização de uma série de questões diferentes com as várias representações, mas também dos seus fatores individuais, como por exemplo, a idade e raciocínio espacial que desenvolveu (Ainsworth, 1999).

A utilização das múltiplas representações também permite a exploração da informação que cada uma comporta, seja em relação às suas diferenças ou às suas semelhanças (Ainsworth, 1999). Ou seja, as múltiplas representações devem ser utilizadas, no contexto sala de aula, para que os alunos possam combinar toda a informação que estas contêm e assim ter um conhecimento mais completo de determinado conceito. De acordo com Ainsworth (1999), uma única representação não é suficiente para transmitir toda a informação de um determinado conceito, pois "cada representação reúne aspetos únicos de um determinado conceito, apresentando informação [única e diferente] e, [ao mesmo tempo] informação redundante semelhante a outra representação" (p. 5).

A utilização das múltiplas representações ajuda os alunos a compreender melhor um determinado conceito, uma vez que uma representação pode coagir os alunos a utilizarem outra (Ainsworth, 1999). Esta coação pode ocorrer de duas formas: através de uma representação familiar que suporta outra menos familiar ou mais abstrata, ou através da exploração das propriedades inerentes de uma representação, que conduz à interpretação da outra. Ou seja, uma representação pode compelir e auxiliar a interpretação de outra, devido às suas características.

De acordo com Ainsworth (1999), as múltiplas representações também permitem a construção de um conhecimento mais amplo, promovendo a abstração, encorajando a generalização e o estabelecimento de relações entre as representações. De acordo com a autora, se o aluno compreender o conceito que está subjacente a uma representação (representação gráfica da aceleração, por exemplo), esse conhecimento é generalizado para outra representação (representação em tabela). Mais tarde, o mesmo pode dar lugar à abstração, onde uma representação simbólica (equação) tem significado por si, sem estar necessariamente associada a uma representação concreta (gráfica, por exemplo) (Ainsworth, 1999). Sendo assim, "os alunos devem estabelecer conexões entre as representações externas e construir ativamente uma representação mental coerente, a fim de beneficiar da complementaridade e coação das múltiplas representações" (Seufert, 2003, p. 228).

3.2. As representações dos números racionais

3.2.1. Representações dos números racionais e suas conexões

A aprendizagem dos números racionais é complexa, devido à multiplicidade de significados que este conceito abarca, às múltiplas representações que o mesmo comporta, e, nomeadamente às conexões entre estas (simbólica-simbólica e simbólica-pictórica). Deste modo, torna-se fundamental que o ensino preconize situações que permitam estabelecer e compreender tais conexões, tal como é preconizado no Programa de Matemática do Ensino Básico:

> Os alunos têm de compreender que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas, e a capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra é tão importante como saber reconhecer as convenções inerentes a cada tipo de representação e interpretar a informação apresentada. (ME, 2007, p. 9)

O programa salienta assim que é importante que sejam estabelecidas relações entre os conceitos matemáticos, e que estas sejam compreendidas pelos alunos, de modo que lhes possam atribuir significado. Neste âmbito, para que os alunos apreendam plenamente o conceito de número racional, devem conseguir compreender que um número racional pode representar-se por uma fração, um numeral misto, um numeral decimal ou uma percentagem e o ensino deve preconizar esta perspetiva ajudando-os a estabelecer conexões entre estas representações (Lembke & Reys, 1994).

As frações e os numerais decimais têm desempenhado importantes papéis no currículo da matemática, contudo, habitualmente os alunos passavam pouco tempo a explorar as relações entre frações e decimais (Markovits & Sowder, 1991). Essa situação também é evidente pelo facto de, na década de 80, os estudos darem relevo aos numerais decimais (Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson & Peled, 1989; Wearne, 1990) e às frações (Behr et al., 1983), mas pouca atenção à capacidade de relacionar estas duas representações dos números racionais (Markovits & Sowder, 1991). Contudo, nas décadas seguintes, surgiram diversos estudos sobre as várias representações dos números racionais (Fosnot & Dolk, 2002; van Galen et al., 2008), bem como das conexões entre elas

(Lachance & Confrey, 2002; Moss, 2005; Moss & Caswell, 2004; Oppenheimer & Hunting, 1999; Sweeney & Quinn, 2000).

Segundo Markovits e Sowder (1991) o progresso dos alunos, no que concerne às conexões entre frações e decimais, faz-se de acordo com diferentes níveis de compreensão, que se tornam úteis para o professor, na medida em que permitem diagnosticar as suas dificuldades e assim ajudá-los a ultrapassá-las:

- Nível um: compreensão rudimentar de que existe uma ligação entre frações e decimais e de que estas representações podem coexistir numa expressão (por exemplo, $0{,}5+\frac{1}{2}$ é reconhecido pelo aluno como uma adição, mesmo que não as saiba efetuar);

- Nível dois: a compreensão de que é possível a conversão de uma representação simbólica para a outra (passar de $\frac{1}{2}$ para 0,5 e, vice versa, para resolver problemas);

- Nível três: a plena compreensão da relação entre frações e decimais, ou seja, a capacidade de escolher a representação mais favorável para uma determinada situação.

Uma descontextualização e uma abordagem "isolada" dos conteúdos matemáticos conduzem, muitas vezes, os alunos ao desenvolvimento de uma série de conteúdos matemáticos distintos e estanques (Lachance & Confrey, 2002). Os autores argumentam que, apesar de no ensino de Matemática se tentar ajudar os alunos a estabelecer conexões entre decimais, frações e percentagens, através de um conjunto de experiências, "esses esforços têm sido, muitas vezes, reduzidos e tardios para ajudarem os alunos a desenvolver as conexões entre as noções matemáticas, uma vez que estes passaram muito tempo a construí-los separadamente" (p. 507).

Ensinar frações e numerais decimais como tópicos separados e esperar que os alunos estabeleçam conexões entre estas representações, é irrealista. Essa abordagem surge por vezes nos manuais, não proporcionando qualquer base concetual para que o aluno consiga passar de uma representação para outra (Markovits & Sowder, 1991). No mesmo sentido, também é contraproducente dar a conhecer aos alunos os numerais mistos e mecanizá-los para a sua conversão em frações ou decimais, sem que haja uma compreensão dos mesmos.

As percentagens são uma outra representação que os números racionais podem assumir e são consideradas muito úteis pelo currículo da matemática, uma vez que são inúmeras as situações em que são utilizadas na sociedade (Lembke & Reys, 1994). Segundo os autores, os alunos que conseguem representar pictoricamente as percentagens têm vantagem em resolver problemas numéricos, sob aqueles que ainda não compreenderam plenamente esta representação. Para que os alunos consigam trabalhar com problemas com percentagens e desenvolvam uma boa representação gráfica das mesmas (representação pictórica), o currículo deve realçar o significado da percentagem (partes de 100), assim como as relações entre percentagens, frações e decimais (Lembke & Reys, 1994). É, por isso, importante que o ensino preconize não só as várias representações dos números racionais (simbólicas e pictóricas), mas também as suas conexões, para que o conhecimento dos alunos não se torne redutor e limitado, levando-os a uma série de dificuldades.

Todas as representações simbólicas podem ser representadas pictoricamente e vice-versa e as representações simbólicas também se podem converter umas nas outras, ou seja, as conversões podem ocorrer entre o mesmo sistema de representação ou entre sistemas de representação diferentes (van Galen et al., 2008). De acordo com o autor, as percentagens e os numerais decimais são representações simbólicas padronizadas, por se basearem no sistema decimal (Figura 15).

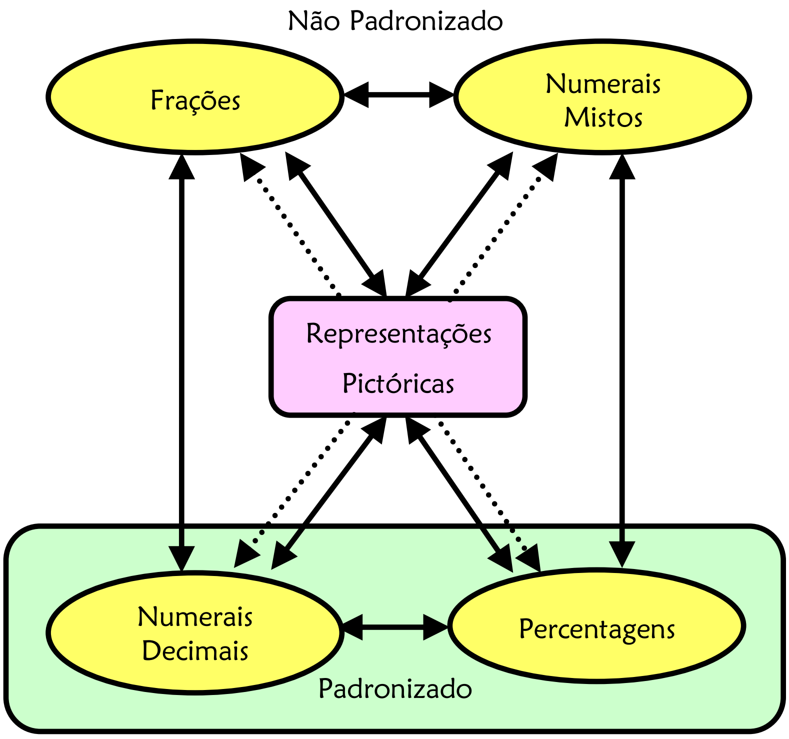


Figura 15 – Relação entre as representações dos racionais.

As representações pictóricas ocupam o lugar central no esquema da Figura 15, porque são estas que ajudam a dar sentido às representações simbólicas (Lima, Freire & Souza, 2012), sendo por isso um bom ponto de partida para o trabalho em torno dos números racionais.

De acordo com van Galen et al. (2008), as percentagens e os numerais decimais fazem parte de uma sistema decimal padrão, em que a unidade é sempre a mesma, daí a designação de números padronizados (Figura 15). As frações não são consideradas números padronizados porque o valor da sua unidade depende do contexto (van Galen et al., 2008). Quando se fala em percentagens devemos colocar os alunos a interpretá-las "como o número de partes em 100" (ME, 2007, p. 35) e, por isso, solicitar aos alunos conversões entre percentagens, frações, numerais decimais e numerais mistos. Além dos comuns exercícios de sombreamento (representação pictórica), os alunos devem também resolver problemas associados a descontos e à descoberta de um valor desconhecido, onde está envolvido o significado operador (Parker & Leinhardt, 1995). De acordo com o esquema da Figura 15, as frações conduzem a numerais decimais, segundo van Galen et al. (2008), através de "aumentos de dez", e a percentagens, quando descrevem uma razão ("determinada quantidade, para 100").

No nosso país a representação dos números racionais sob a forma de numeral misto é pouco frequente (Monteiro & Pinto, 2005). No entanto, o recurso às representações pictóricas e consequentemente à sua conversão em numerais mistos pode contribuir para a compreensão de que existem frações maiores que a unidade.

As várias representações que o número racional pode assumir, desde que estejam bem compreendidas, podem também auxiliar na resolução de problemas simples como os exemplificados a seguir:

> A) Se quisermos calcular 9% de algo, podemos fazê-lo introduzindo $\times 0{,}09$ na calculadora (de percentagem a decimal);
> B) Para adicionar $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}$, é mais fácil transformarmos as frações em decimais. Depois adicionamos $0{,}5+0{,}8=1{,}3$ (de fração para decimal);
> C) Se nos falarem em 75% de algo, precisamos de pensar em $\frac{3}{4}$ (de percentagem para fração);
> D) três em cada cinco pessoas é 60% (de proporção a percentagem);
> E) $\frac{2}{3}$ de 75 pessoas é "duas em cada três pessoas", ou "dez em cada 15", ou "50 em cada 75 (de fração para proporção). (van Galen et al., 2008, p.33)

Apesar de estes exemplos mostrarem que, por vezes, é mais fácil resolver determinada situação mudando de uma representação para outra (A e E), é também evidente que essa facilidade nem sempre existe (C) (van Galen et al., 2008).

Para tornar visíveis estas relações para os alunos, a forma como o assunto é abordado não se pode resumir à mecanização de como passar de uma representação para outra (van Galen et al., 2008), mas sim a uma compreensão concetual das representações. É neste âmbito que o estudo de Moss e Case (1999), sobre o desenvolvimento da compreensão dos números racionais, dá a conhecer um programa experimental onde se partiu de exercícios em que os alunos deviam descrever recipientes com diferentes quantidades de água visando a terminologia das percentagens. Posteriormente recorreu-se a vários exercícios e jogos para que os alunos tomassem consciência de pequenos intervalos de tempo, que foram depois ampliados e apresentados como percentagens, numerais decimais e frações do segundo. Com este programa, os alunos mostraram facilidade em estabelecer equivalência entre as várias representações simbólicas:

> Investigador: Qual é o número decimal que corresponde a $\frac{1}{8}$?
> S1: Zero, vírgula cento e vinte e cinco.
> Investigador: Como chegaste a esse valor?
> S1: Bem, $\frac{1}{4}$ é 25% … e $\frac{1}{8}$ é metade disso, por isso é $12\frac{1}{2}\%$ … Por isso, $12\frac{1}{2}\%$ é o número decimal 0,12 $\frac{1}{2}$ … ou 12,5. Não eu acho que é apenas 0,125. (Moss & Case, 1999, p. 139)

Este diálogo evidencia o raciocínio do aluno na conversão de uma fração num decimal. Este começa por determinar o dobro da fração que lhe é dada, à qual faz corresponder uma percentagem, em forma de numeral misto ("$12\frac{1}{2}\%$"), para no fim voltar a converter em decimal. A partir dos resultados deste estudo, os autores consideram que há vantagem de se trabalhar com quantidades contínuas e em contextos de medida, bem como de se enfatizar as relações entre as diferentes formas de representação de uma mesma quantidade – frações, numerais decimais e percentagens (Moss & Case, 1999).

No estudo de Quaresma (2010), incidindo sobre uma unidade de ensino no 5.º ano de escolaridade, a autora apostou nas conexões entre as várias representações dos números racionais, com o intuito de proporcionar o desenvolvimento da compreensão destes números, em particular no que se refere à comparação e ordenação. Os resultados mostram que os alunos melhoraram a sua compreensão no que diz respeito às várias representações simbólicas (fração, decimal, percentagem e numerais mistos), e que para comparar e ordenar frações convertem-nas em percentagens ou numerais decimais, sendo esta última representação a que mais privilegiam.

Num contexto puramente matemático e de oralidade lúdica (jogo), Martins (2007), solicita a alunos do 4.º ano de escolaridade, que escrevam os números que vão sendo proferidos oralmente e verifica que os mesmos preferem as frações em detrimento dos numerais decimais. Este resultado é surpreendente, uma vez que o contacto destas crianças com frações limita-se quase somente às tarefas do seu estudo, enquanto o trabalho com numerais decimais é feito desde o 3.º ano de escolaridade. O facto de durante o trabalho com frações, ter sido feito um paralelo com os numerais decimais, levou a que os alunos compreendessem a relação entre ambas as representações e optassem por aquela com que se sentiam mais à vontade.

Em suma, para a aprendizagem de um determinado conceito é fundamental que o aluno compreenda que o mesmo se pode representar de diversas formas e que desenvolva a capacidade para utilizar essas representações de forma flexível, estabelecendo conexões entre elas (Even, 1998; Lesh et al., 1987). Assim sendo, é muito importante proporcionar aos alunos um ensino que envolva múltiplas representações, nomeadamente as pictóricas

(Cramer, Post & delMas, 2002), uma vez que estas são ferramentas que apoiam uma aprendizagem significativa e que mais tarde apoiam o seu trabalho num nível simbólico (Cramer & Wyberg, 2009).

3.2.2. A sua presença nas orientações curriculares nacionais

O programa de Matemática (ME, 2007) recomenda que as frações e os decimais surjam em simultâneo (Tarp, 2012). As orientações curriculares de 2007, referem mudanças apontando que

> uma alteração importante em relação ao programa anterior é que as representações fracionária e decimal dos números racionais surgem agora em paralelo. Em cada situação o aluno deve ser capaz de usar a representação mais adequada, mas deve igualmente ser capaz de passar com facilidade de uma representação para outra. (ME, 2007, p. 7)

É importante que as conexões entre frações e decimais sejam exploradas e que estas representações não sejam abordadas de forma separada, como vinha sendo feito. Proporcionando estas conexões, os alunos podem desenvolver uma compreensão mais sólida destas representações e do conceito de número racional, permitindo-lhes optar por aquela que lhes seja mais favorável para resolver determinado problema.

O reconhecimento de que o conceito de número racional é muito complexo, exige um trabalho prolongado no tempo e realizado em várias etapas, pelo que o Programa de Matemática do Ensino Básico refere que,

> os números racionais começam a ser trabalhados nos dois primeiros anos com uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, recorrendo a modelos e à representação em forma de fração nos casos mais simples. É nos 3.º e 4.º anos que o estudo destes números vai ser aprofundado, quer recorrendo a problemas que permitam trabalhar outros significados das frações, quer introduzindo números representados na forma decimal (usualmente designados por números decimais) a partir de situações de partilha equitativa ou de medida, refinando a unidade de medida. (ME, 2007, p. 15)

Deste modo, o programa menciona que os números racionais devem ser introduzidos de uma forma gradual, partindo de tarefas simples (situações de partilha equitativa) e aumentando progressivamente o seu nível de exigência, envolvendo os vários significados de um número racional.

As orientações curriculares presentes nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) vão também no mesmo sentido, defendendo que é importante que os alunos sejam encorajados a trabalhar as diversas representações dos números racionais, justificando o seu raciocínio e fazendo generalizações. Neste sentido, o também programa de Matemática (ME, 2007) refere que devem ser dadas oportunidades aos alunos para estabelecerem ligações entre as várias representações matemáticas.

> No estudo dos números racionais (…) devem ser exploradas situações para ampliação do conhecimento de estratégias de cálculo mental e escrito, incluindo a realização de algoritmos. Devem ser também proporcionadas situações que permitam aos alunos relacionar a representação fracionária e a decimal. Neste ciclo, o trabalho com os números racionais, deve incluir também a exploração de situações que, de uma forma intuitiva, contribuam para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos de razão e de proporção. (p. 15)

Além da exploração de situações que permitam aos alunos exercitar o cálculo mental e escrito assim como a realização de algoritmos, as conexões entre frações e decimais também devem ser preconizadas, assim como, as conexões entre estas representações e o significado de razão e a noção de proporção, embora num nível de ensino posterior.

No 1.º ciclo, passa assim a ser desejável que os alunos iniciem

> o trabalho intuitivo com frações e trabalhem com números em representação decimal até à milésima, (,,,) desenvolvam a compreensão das operações elementares e a destreza de cálculo com números naturais e racionais não negativos na representação decimal. (ME, 2007, p. 32)

Este tipo de trabalho intuitivo durante o primeiro ciclo é fundamental para que no segundo ciclo, tal como o programa refere (ME, 2007), os alunos possam aprofundar a sua compreensão e destreza destes números, trabalhando os seus vários significados, com o objetivo de desenvolverem o sentido de número.

> No 2.º ciclo, a aprendizagem deve aprofundar esta compreensão e destreza, e ampliando-as aos números inteiros e racionais não negativos na forma de fração, considerada nos seus múltiplos significados, como, quociente entre dois números inteiros, relação parte-todo, razão, medida e operador, tendo sempre em vista o desenvolvimento do sentido de número. (ME, 2007, p. 32)

É de salientar ainda que um dos objetivos específicos destas orientações curriculares é também a tradução de uma fração por uma percentagem, assim como a sua interpretação como um número de partes em 100. Deste modo, "o professor deve dar oportunidade aos alunos para que estes representem percentagens pictoricamente, usem o símbolo %, e relacionem percentagens, frações e decimais" (ME, 2007, p. 35).

Em suma, as várias representações que os números racionais podem assumir, assim como as conexões entre as mesmas, além de serem evocadas nas orientações curriculares internacionais, são também um ponto forte nas orientações curriculares nacionais (ME, 2007). Como foi mencionado, estas dão grande ênfase não só a um trabalho em paralelo com as várias representações dos números racionais, como também ao estabelecimento de conexões entre elas, evidenciando um trabalho contínuo e gradual na introdução do conceito de número racional.

3.3. Os modelos e a aprendizagem dos números racionais

O conhecimento que os alunos trazem quando chegam à escola (conhecimento informal), embora seja rudimentar e de senso comum, é importante para a construção de um conhecimento mais estruturado dos vários conteúdos matemáticos (Behr et al., 1992). Efetivamente, deve ser a partir do conhecimento informal que se deve iniciar a abordagem de um conteúdo matemático (Hiebert, 1988) e, posteriormente, efetuar-se a ponte para o conhecimento formal, uma vez que, deste modo o aluno pode atribuir significado às novas aprendizagens. De acordo com Treffers (1991), citado por Gravemeijer (1999), é essencialmente através do recurso a modelos que os alunos estabelecem a ponte entre o conhecimento informal e formal. No processo de aprendizagem, os modelos desempenham um papel importante (van Galen et al., 2008) uma vez que são facilitadores da aprendizagem (Behr, Post & Lesh, 1981). Deste modo, são utilizados como ferramentas didáticas no ensino da matemática (van den Heuvel-Panhuizen, 2003, p. 29), para representarem os aspetos abstratos da matemática que devem ser ensinados (Gravemeijer, 1999).

Para pensar sobre e comunicar as ideias matemáticas é necessário representá-las de alguma forma, isto é, para se conseguir comunicar matematicamente, o que é abstrato precisa ser representado sob a forma de linguagem oral, símbolos escritos, figuras ou objetos físicos (Lesh, Post & Behr, 1987).

3.3.1. Os modelos na Matemática Realista

Em Matemática, uma representação é utilizada para expressar qualquer objeto matemático, conceito ou teorema (Dreyfus & Eisenberg, 1996, citado por Cai & Wang, 2006). De acordo com a perspetiva da Educação Matemática Realista, os modelos são vistos como representações de situações problemáticas, que refletem aspetos essenciais de conceitos matemáticos e que, por isso, podem transformar-se em ferramentas muito úteis na resolução de problemas se a sua introdução não for desprovida de significado, ou seja, quando surgem, estes modelos devem estar relacionados com situações do quotidiano (Lesh et al., 1987). Contudo, os modelos podem assumir várias formas. Isto significa que o termo "modelo" não é visto de uma forma muito restrita, podendo englobar materiais manipulativos, desenhos, esquemas e, até mesmo, símbolos (van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Portanto, nesta perspetiva todo o modelo é uma representação.

Segundo Lesh et al. (1987), os modelos podem emergir com maior facilidade se o conhecimento do aluno for organizado em torno de situações reais, baseadas no quotidiano, que serviram como contextos gerais para a interpretação e resolução de vários tipos de situações problemáticas (Lesh et al., 1987), conduzindo-os ao processo da matematização.

A matematização é a chave do processo da Educação Matemática Realista (EMR), baseada na atividade de resolver problemas, por dois motivos. O primeiro motivo tem a ver com o facto de a matematização não ser a principal atividade somente dos matemáticos, mas também familiarizar os alunos com uma abordagem matemática às situações do quotidiano. O segundo motivo prende-se com a perspetiva de que a matemática deve ser reinventada pelos alunos, sendo a matematização um processo através do qual o pensamento vai evoluindo e se torna cada vez mais formal e abstrato (Freudenthal, 1973).

Treffers (citado por van den Heuvel-Panhuizen, 2003) refere-se a dois tipos de matematização: a horizontal, em que os alunos transformam um problema do quotidiano num problema matemático, ou seja, produzem modelos para organizarem e resolverem problemas do dia-a-dia (conexão entre o quotidiano e o mundo dos símbolos); e a vertical, que se refere à reorganização do conhecimento e às operações matemáticas realizadas pelos alunos, descobrindo conexões entre conceitos e estratégias de resolução de problemas (reorganização dos símbolos).

Keijzer (2003) ao analisar o processo de matematização considera os seguintes processos: *modelação*, *simbolização*, *generalização*, *formalização* e *abstração*. Relativamente à *modelação*, o autor refere que aqui os alunos já não se interessam por aspetos irrelevantes da situação e representam-na por um modelo (por exemplo, utilizam um círculo para representar uma piza), que lhes permite raciocinar sobre ele. Na fase da *simbolização* o aluno já utiliza linguagem matemática para se referir, por exemplo, a um quarto de uma piza. Quando os alunos aplicam os símbolos a vários contextos, estão na fase da *generalização*. Por exemplo, $\frac{1}{4}$ de piza pode ser generalizado a outras situações onde uma unidade está dividida em quatro partes e se toma uma dessas partes. Uma extensão desta fase é designada por *formalização*, onde os objetos sobre os quais se opera, já não são concretos, mas são números e quando o aluno toma consciência do que é invariante nas relações, então encontra-se num processo de *abstração*[20].

[20] Estes três últimos processos (fase formal), não obedecem a uma hierarquia, pois se na formalização já se trabalha com entes abstratos, então compreende-se que a abstração pode surgir antes da formalização (Keijzer, 2003).

Seguindo uma abordagem realista, estes procedimentos só podem fluir se o ensino conduzir à comparação e explicação das estratégias dos alunos, o que é possível quando a sequência de ensino tem como ponto de partida o contexto dos problemas que permitam uma grande variedade de procedimentos que conduzem à solução (Gravemeijer, 1994). É esta variedade que facilita as discussões adequadas e eficientes, que por sua vez conduzem a uma reflexão sobre os procedimentos utilizados.

Ainda que o processo ascendente pressuponha que os modelos sejam inventados pelos próprios alunos, os educadores devem ter o cuidado de selecionar situações-problema que sejam adequadas para a construção de modelos e que se encaixem numa trajetória que permite a evolução do modelo para um modelo didático que abre caminho a níveis mais elevados de compreensão (van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Isto é, de acordo com os autores, as situações-problema devem poder ser facilmente esquematizadas pelos alunos fazendo com que sintam a necessidade de construir um modelo. As situações-problema devem permitir aos alunos identificar as estruturas e conceitos matemáticos, mas para que estas possam fazer um modelo emergir, têm de incluir atividades que incitem à sua construção, como por exemplo, planear e executar passos que os conduzem a soluções, gerando explicações, identificando semelhanças e diferenças e fazendo previsões (van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Para que sejam viáveis e consigam dar apoio aos processos de aprendizagem, os modelos têm de ter duas características fundamentais. Por um lado, devem ser concretos e estar inseridos num contexto realista, baseando-se no conhecimento prévio e nas estratégias informais dos alunos, para que possam ser facilmente explorados e reinventados pelos próprios tornando-se facilmente adaptáveis a novas situações (Middleton, van den Heuvel-Panhuizen & Shew, 1998; van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Por outro lado, o modelo deve ser flexível para que possa ser utilizado num nível formal. Isto significa que o modelo deve apoiar a progressão na matematização vertical sem impedir o aluno de voltar à fonte que originou a estratégia (van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Ou seja, os alunos devem conseguir retroceder ao nível anterior e é esta característica bidirecional que torna os modelos ferramentas tão poderosas.

De acordo com Gravemeijer (1994), o ensino baseado nas ideias da Educação Matemática Realista, pode ser explicado através de uma "reinvenção guiada" ou "matematização progressiva", onde os procedimentos informais podem ser interpretados como uma antecipação aos procedimentos formais; através da "fenomenologia didática"; ou então através de um princípio baseado no papel que os modelos têm na construção da ponte entre o conhecimento informal e formal. Neste último princípio, onde assenta a presente investigação, podem apontar-se quatro níveis: *situações*; *modelo de*; *modelo para* e *matemática formal* (Figura 16).

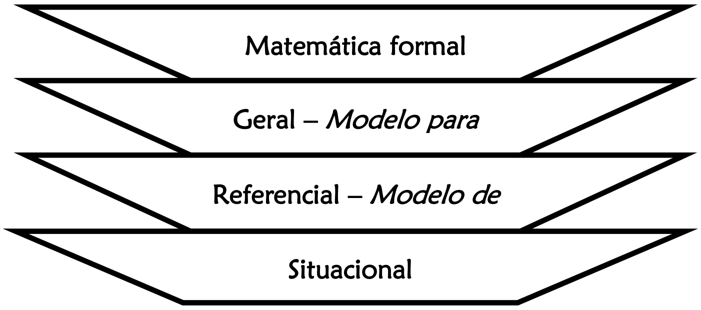


Figura 16 – Níveis do papel dos modelos da EMR (adaptado de Gravemeijer, 1994).

b) numa atividade num nível de *situacional*, as interpretações e resoluções dependem da compreensão do contexto, uma vez que a tarefa se encontra associada a uma situação real, sem o recurso ao papel ou lápis;
c) numa atividade de nível referencial cada *modelo de*, refere-se a atividades em situações descritas pelas atividades de ensino;
d) numa atividade de nível geral, os *modelos para*, já se referem a um quadro de representações matemáticas, onde o foco são as estratégias;
e) no último nível, o *conhecimento formal*, não está dependente de qualquer apoio de modelo e diz respeito ao algoritmo padrão.

De acordo com Gravemeijer (2005), a "mudança de um *modelo de* para um *modelo para* corresponde a uma alteração na forma de pensar do aluno, (…) [sobre a] situação do contexto modelizado para um enfoque nas relações matemáticas" (p. 95). A função dos modelos é então estabelecer a ponte entre o nível informal (*modelo de*) e o nível formal (*modelo para*). Isto é, no início do processo de aprendizagem o *modelo de* tem uma relação muito estreita com a situação problemática que se tem em mãos e, mais tarde, é generalizado para outras situações e torna-se num *modelo para* que pode ser utilizado para organizar situações relativas a um novo problema e para apoiar o raciocínio.

Os modelos são assim, de acordo com Fosnot e Dolk (2001a), "mapas mentais [que os matemáticos utilizam] para organizar a sua atividade, resolver problemas ou explorar relações" (p. 77). Por exemplo, "quando os matemáticos pensam em números, eles podem usar uma reta numérica, pensando na posição dos números nessa reta e imaginando andar para a frente e para trás ao longo dela" (Brocardo et al., 2008, p. 142). Deste modo, pode dizer-se que os modelos[21] são esquemas que os alunos utilizam para exteriorizar a sua compreensão das situações (Lesh, Carmona & Post, 2002), no decurso da sua aprendizagem.

[21] De acordo com Brocardo, et al. (2008), os modelos que os alunos utilizam para transmitir o seu raciocínio podem incluir gráficos, diagramas, palavras escritas ou verbais, notação formal (matemática), etc.

A atividade no nível situacional está associada à interpretação da tarefa e às consequentes soluções obtidas pelos alunos que surgem de uma ação direta sobre o contexto (Figura 17).

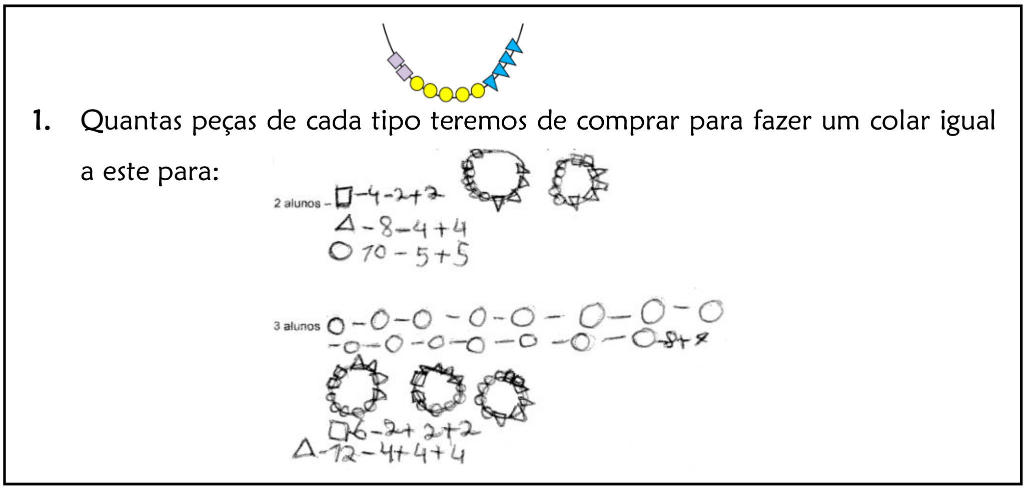


Figura 17 – Atividade a nível situacional (adaptado de Brocardo et al., 2008, p. 143).

A resolução da aluna, descrita na figura anterior, evidencia que esta representa os colares para dois e três alunos, trabalhando com a imagem do colar (ação direta sobre o contexto), desenhado por ela própria.

No nível referencial, por sua vez, a atividade com o modelo decorre do significado do contexto de cada situação, ou seja, aqui os modelos apoiam-se na compreensão que os alunos têm das suas experiências que decorrem em contextos reais. Neste nível os alunos já não estão dependentes da imagem específica (neste caso a imagem do colar) e conseguem utilizar um modelo abstrato que represente aquela situação (*modelo de*) – Figura 18.

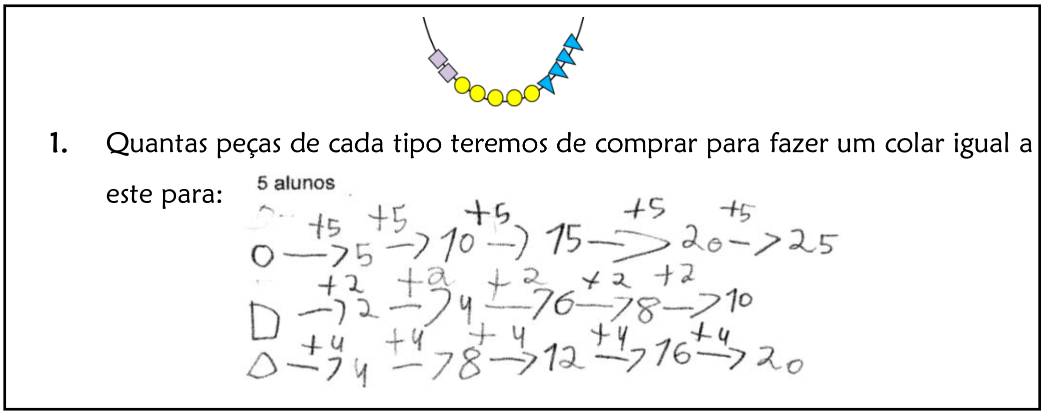


Figura 18 – Atividade de nível referencial (adaptado de Brocardo et al., 2008, p. 144).

É também exemplo de uma situação que evidencia um nível referencial, as resoluções de três alunos, perante a questão "que porção de chocolate cada uma das seis crianças vai receber se forem partilhadas entre elas cinco barras uniformemente?" (Fosnot &

Dolk, 2002). Uma das alunas efetuou o seu modelo de distribuição em papel (Figura 19), desenhando setas que indicam a porção da barra que fica para cada criança (*modelo de*). Primeiro divide as primeiras barras em terços para que cada criança receba um terço da barra e, como se pretende que a distribuição seja justa, divide a última barra em seis partes. Assim, a aluna chega à resposta $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$.

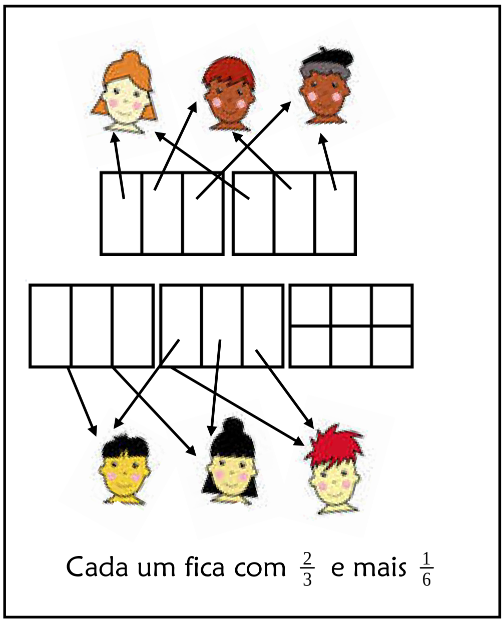


Figura 19 – Resolução da Joanie (adaptado de Fosnot & Dolk, 2002).

Outros dois alunos, embora tenham optado por outra estratégia de resolução, também se aproximam muito de um nível referencial. Rebecca acrescenta nomes para as crianças e escreve-os em cada tira da barra (Figura 20) e Vicki faz a distribuição através de números (Figura 21).

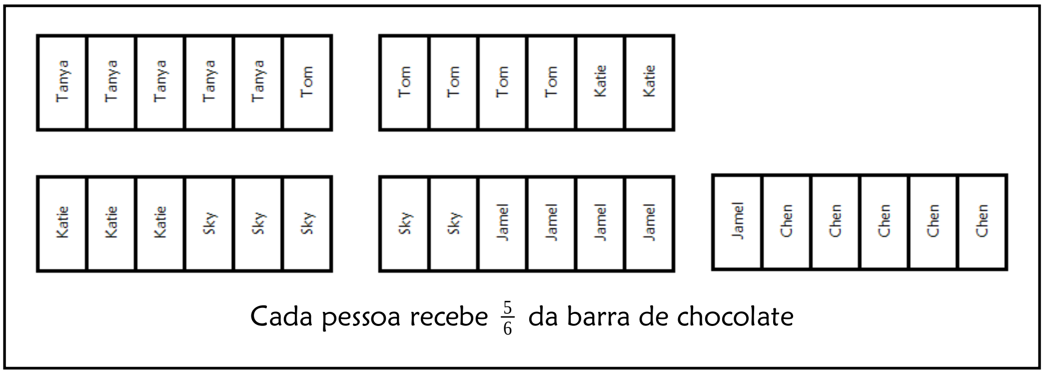


Figura 20 – Resolução da Rebecca (adaptado de Fosnot & Dolk, 2002).

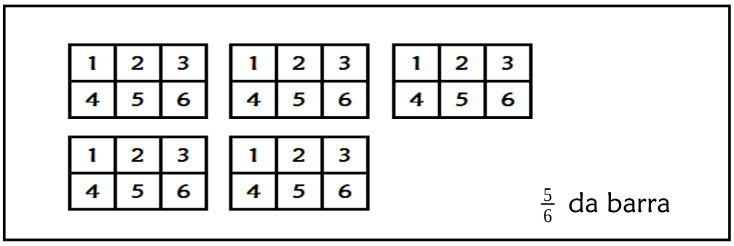


Figura 21 – Resolução do Vicki (adaptado de Fosnot & Dolk, 2002).

Numa atividade de nível geral, os modelos que surgem já não são específicos daquela situação, sendo generalizáveis para qualquer situação, desde que esta envolva as mesmas relações matemáticas, encontrando-se nesse caso o aluno numa situação de *modelo para* tal como se exemplifica na Figura 22. Nesta situação o aluno parte do número 28 (28€ no enunciado do problema) e adiciona-lhe sucessivamente grupos de dez até chegar ao valor mais próximo de 69, adicionando, em seguida, uma unidade. Deste modo, o aluno observa que efetuou quatro saltos de dez unidades (4x10=40) e um salto de uma unidade. Assim sendo, conclui que, tendo a Ana 28€, para ter dinheiro para comprar o relógio (69€), precisa de poupar ainda 41€.

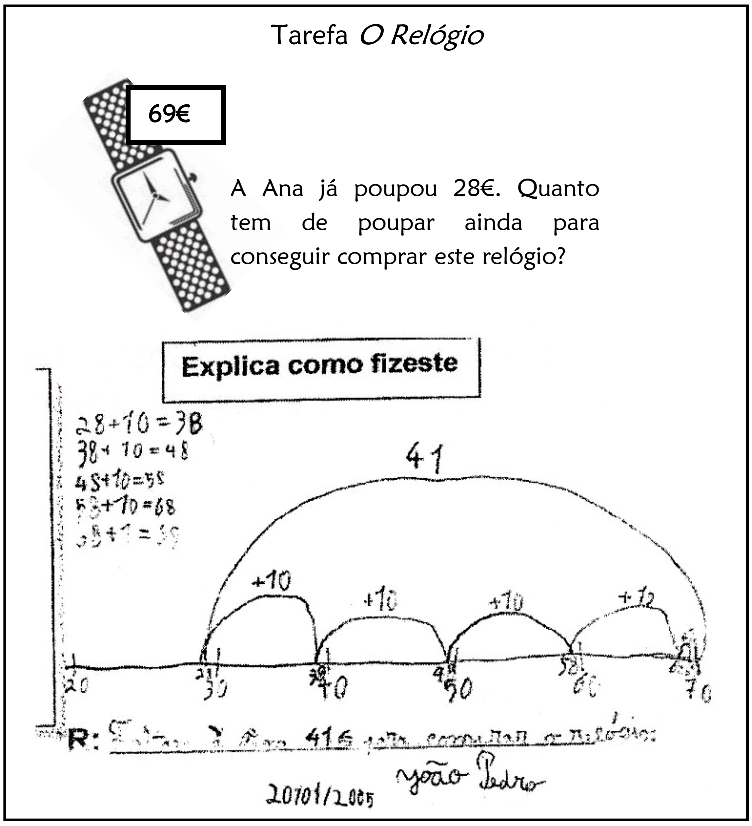


Figura 22 – Atividade de nível geral (adaptado de Brocardo et al., 2008, p. 138).

O modelo que este aluno utilizou para resolver a tarefa do relógio, pode ser utilizado em qualquer situação que envolva adições e subtrações de números naturais, ou seja, não é um modelo específico desta situação, mas que se pode generalizar a todas as situações que envolvam as mesmas relações matemáticas.

Neste nível, as estratégias que são utilizadas para resolver um problema já não estão relacionados com uma situação específica, mas refletem um ponto de vista mais geral (van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Num nível formal o raciocínio dos alunos não depende de modelos que sustentem a sua atividade matemática, em vez disso apoia-se nas propriedades e relações dos objetos matemáticos.

Em suma, no processo de aprendizagem, os primeiros modelos que os alunos utilizam são geralmente representações das suas ações e são muito semelhantes às situações de contexto (*modelo de*), isto é, são representações das suas interações com o objeto, em vez do objeto em si, que, gradualmente se transformam em *modelos para* que são mais generalizáveis e mais abstratos (Fosnot & Dolk, 2002). Em termos globais, nesta perspetiva, pode dizer-se que os modelos formais são desenvolvidos a partir de modelos de situações concretas e que gradualmente se transformam em modelos para raciocinar matematicamente (van Galen et al., 2008).

Os exemplos apresentados por Brocardo et al. (2008) vão ao encontro das ideias de Gravemeijer (1999) que refere que os modelos utilizados pelos alunos além de serem uma forma de estes comunicarem o seu raciocínio, são também ferramentas que os apoiam de forma progressiva, acompanhando o desenvolvimento dos seus conhecimentos e, por isso, os modelos vão-se tornando mais generalizados.

Um ensino que proporcione modelos flexíveis possibilita uma maior compreensão dos conceitos matemáticos e apoia uma matematização vertical (van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Para que tal seja possível, os problemas apresentados aos alunos devem ser contextualizados, uma vez que as atividades em torno destes não produzem um modelo único, mas sim uma cadeia de modelos (van den Heuvel-Panhuizen, 2003). De acordo com os autores, quando os alunos estão perante problemas contextualizados, analisam-nos e descrevem-nos através de modelos que se tornam presentes em situações mais complexas. Assim sendo, não são apenas os modelos por si só que tornam possível o crescimento da compreensão matemática, mas sim a atividade que os alunos realizam quando são confrontados com problemas (van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

3.3.2. O ensino dos racionais através de modelos

No ensino dos Números Racionais é fundamental recorrer a várias formas de representação destes números, incluindo as gráficas, que personifiquem a natureza das grandezas (discreta e contínua), e que possam ser utilizadas como um modelo de forma a facilitar a sua compreensão (Middleton et al., 1998).

Uma vez que o foco deste estudo são as conexões entre as representações de um número racional, privilegiou-se os modelos da barra numérica e da dupla linha numérica, por influência das perspetivas da Educação Matemática Realista. O primeiro destes modelos porque possibilita a utilização das diferentes representações em simultâneo, dando oportunidade de explorar as conexões entre as várias representações de um número (van Galen et al., 2008). O segundo modelo porque lhe é reconhecida grande vantagem no ensino dos números racionais, nomeadamente na comparação e ordenação de números (Keijzer, 2003; Lamon, 2006).

Um outro modelo bastante referido na literatura sobre os números racionais é o modelo de área retangular. Este parece ser um recurso com bastantes potencialidades para a multiplicação e divisão de números racionais (Pinto, 2011), uma vez que é um modelo "pelo qual, tanto a nível informal como formal, as ligações entre as várias representações são estabelecidas" (Barmby et al., 2009, p. 220) e, a partir do qual, o aluno deduz conclusões e avalia outras a partir do que já conhece (Christou & Papageorgiou, 2007). Contudo, este modelo não foi utilizado na presente investigação porque a mesma não tratou explicitamente as operações com números racionais.

Modelo da barra numérica

Entre os modelos que têm sido descritos como potenciadores do desenvolvimento do conceito de número racional, encontra-se a barra numérica, presente em diversos estudos no âmbito da EMR (van den Heuvel-Panhuizen, 2003). O modelo da barra numérica é uma representação matemática que facilita a abordagem dos números racionais, sendo uma extensão de materiais que alguns professores já utilizam, tais como *tiras de fração* e réguas, mas que podem ser desenvolvidos de forma a abranger situações mais complexas (Middleton et al., 1998). Este tem a vantagem de poder ser usado para expressar o aspeto proporcional das frações, percentagens e numerais decimais através das diferentes representações escritas acima e abaixo da linha.

Este modelo permite que os alunos explorem relações entre números e contribui para a compreensão das relações entre as várias representações simbólicas dos números racionais (van Galen et al., 2008). Bright, Behr, Post e Wachsmuth (1988) enumeram algumas das suas vantagens: **a)** o comprimento representa uma extensão da unidade e, simultaneamente, de todas as subdivisões da unidade; **b)** é um modelo contínuo; e **c)** requer o uso de símbolos para transmitir o significado pretendido. Deste modo, este modelo é apontado como sendo particularmente útil numa fase inicial de exploração das várias representações simbólicas dos números racionais, em contextos que envolvam medida e divisão.

Durante o processo de crescente compreensão, a barra numérica vai mudando de uma representação concreta e contextualizada, para um modelo de representação mais abstrato que vai orientar os alunos na escolha dos cálculos que têm que ser feitos. A barra numérica torna-se também numa forma de mostrar como se raciocinou numericamente. Um uso eficiente da barra numérica permite que esta evolua de um *modelo de* para um *modelo para* (van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Ou seja, os alunos que inicialmente utilizam a barra numérica para representar uma situação (*modelo de*), posteriormente, utilizam-na como um modelo para pensar (*modelo para*), onde podem surgir em simultâneo as várias representações simbólicas dos números racionais, reforçando-se, de acordo com van Galen et al. (2008) a compreensão das relações entre as representações fração, percentagem e decimal. Segundo os autores, utilizando a barra numérica com estas três representações de número racional – bem como com as proporções – pode estabelecer-se uma ligação clara entre as diferentes partes do currículo (van Galen et al., 2008).

No contexto dos números racionais, Middleton et al. (1998) defendem que os alunos facilmente se familiarizaram com a barra numérica através da divisão de objetos do quotidiano ou alimentos e de outros modelos lineares (Quadro 2).

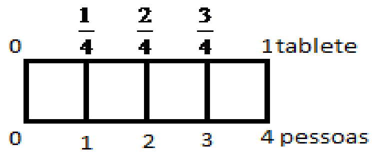
Problema	Representação	Modelo
O Nicolau e a Luana querem partilhar as suas tabletes de chocolate com os seus amigos. A Luana partiu a sua tablete em duas partes iguais e o Nicolau em quatro partes iguais. Com quem preferias partilhar a tablete?	Objetos Reais	
	Substituição do Objeto Real	| 1 | 2 | | 1 | 2 | 3 | 4 |

Quadro 2 – A barra numérica como modelo de uma situação de partilha equitativa (adaptado de Middleton et al., 1998).

Os alunos podem caracterizar qualquer situação de partilha na barra numérica e contar o número de pedaços do todo que cada pessoa recebe, assim como comparar o tamanho dos pedaços, atribuindo novo significado a esta representação.

A barra numérica é dividida em frações como $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, e a sua visualização torna-se muito importante para estas frações, uma vez que os alunos podem com facilidade identificá-las num contexto que compreendem de forma intuitiva, associada à partilha de alimentos ou outros objetos familiares (Ball, 1993). Sendo assim, o modelo da barra numérica pode surgir facilmente após a utilização de um retângulo que simboliza determinada situação real (van den Heuvel-Panhuizen, 2003), pelo que, de acordo com

Middleton et al. (1998), de início, o nível de abstração no uso deste modelo não é muito elevado, pois é utilizado para representar uma situação concreta (Quadro 3A). Ou seja, ao trabalharem numa situação de partilha equitativa, a barra numérica pode servir para os alunos imaginarem o processo de dividir algo em partes iguais, sendo a barra numérica a unidade e, ao mesmo tempo, o objeto a ser dividido (van Galen et al. 2008).

Representação	Modelo	Problema
Partilha equitativa de parte-todo		O Nicolau tinha uma tablete de chocolate que partilhou igualmente por ele e três amigos. Que porção receberá cada um?

Quadro 3A – Contextos da utilização da barra numérica (adaptado de Middleton et al., 1998).

Quando o modelo da barra numérica começa a ser mais abstrato, pode ser utilizado pelos alunos para fazer estimativas, para efetuar cálculos ou ainda para raciocinar (van den Heuvel-Panhuinzen, 2003). Tal como ilustra a resolução seguinte de um problema (Figura 23), o aluno recorre ao modelo da barra numérica para comparar dois grupos, através de uma estimativa:

Foram entrevistados dois grupos de fãs de duas equipas de basebol, para saber que recordação gostariam de ter. Um grupo de 123 fãs dos *Giants*, de um total de 310, disseram que gostariam de ter o boné da equipa e um grupo de 119 fãs dos *Dodgers*, de um total de 198, deu a mesma resposta. Qual o grupo de fãs que mostram maior preferência pelos bonés?"

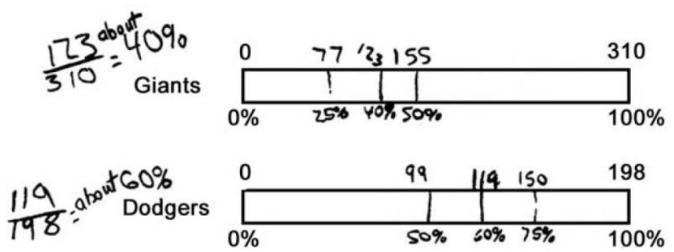
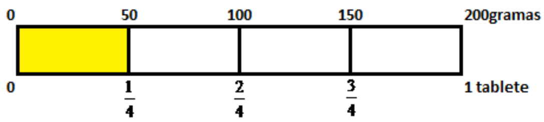
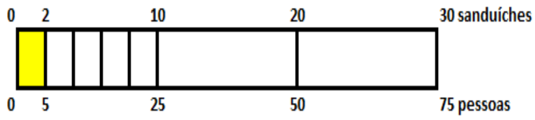


Figura 23 – Utilização da barra numérica como um modelo para estimar (van den Heuvel-Panhuinzen, 2003).

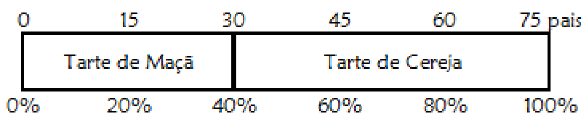
Segundo Middleton et al. (1998), os alunos também podem recorrer ao modelo da barra numérica, para efetuar cálculos, quando estão perante uma situação mais complexa, num contexto menos familiar, onde tenham de relacionar um número racional com uma propriedade física, como por exemplo o peso (Quadro 3B. Representação a).

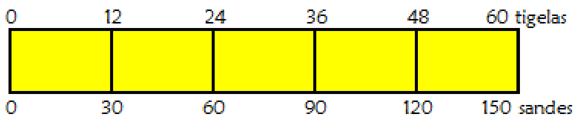
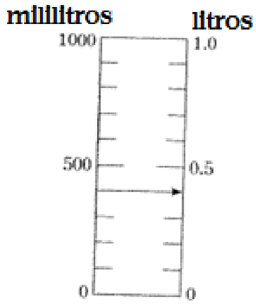
A barra numérica também pode ser utilizada para representar uma quantidade que não é mensurável na própria representação (Quadro 3B. Representação b). Neste exemplo, ao partilhar equitativamente 30 sanduíches por 75, os alunos podem recorrer ao raciocínio proporcional para dividir em partes iguais a barra numérica descobrindo que cinco pessoas partilham duas sanduíches entre si. Aqui, os alunos dividem a barra numérica em três terços e depois cada terço em quintos. Deste modo, com a ajuda do modelo, os alunos podem começar a ver a relação entre $\frac{30}{75}$; $\frac{20}{50}$; $\frac{10}{25}$ e as frações com termos menores, tais como $\frac{2}{5}$.

Representação	Modelo	Problema
a) Relacionando frações com propriedades de objetos		Cada tablete pesa 200g. Se cada amigo recebe $\frac{1}{4}$ da tablete, quantos gramas de chocolate cada um recebe?
b) Relação entre dois conjuntos de objetos		Houve um lanche no cineteatro, onde estavam 30 sanduíches para serem distribuídas por 75 pessoas. Quanto vai receber cada uma?

Quadro 3B – Contextos da utilização da barra numérica (adaptado de Middleton et al., 1998).

Compreender que a barra numérica pode ser utilizada para representar diversos contextos, pode ser um grande progresso no conhecimento para alguns alunos (Middleton et al., 1998), levando-os, de acordo com van den Heuvel-Panhuinzen (2003), a utilizarem-na em diversas situações, como suporte ao seu raciocínio, tal como se ilustra no Quadro 3C, a partir de exemplos apresentados por Middleton et al. (1998).

Representação	Modelo	Problema
Relação entre duas ou mais quantidades	**Percentagem** 	Existem 30 pedaços de tarte de maçã e 45 pedaços de tarte de cereja para distribuir por 75 pais. Qual a percentagem de cada tipo de tarte que cada pai vai receber?

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Razão

</td>
<td>Pretende-se comprar 12 tigelas de salada para cada 30 sandes. Se forem compradas 150 sandes, quantas tigelas de salada têm de se comprar?</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Decimal

</td>
<td>A Sofia tem 400ml de sumo que sobrou da sua festa de aniversário. Ela só tem uma garrafa de um litro para guardar esse sumo. Quão cheia ficará essa garrafa?</td>
</tr>
</table>

Quadro 3C – Contextos da utilização da barra numérica (adaptado de Middleton et al., 1998).

Quando se estende a barra numérica para uma representação de relações entre duas ou mais quantidades (Quadro 3C), esta torna-se um apoio para os alunos estabelecerem conexões entre os diferentes significados dos racionais através de uma base visual das proporções. Torna-se assim num instrumento de trabalho importante porque as representações simbólicas dos racionais (fração, percentagem, numeral decimal e numerais mistos) surgem de uma base comum e podem ser vistas como uma ocorrência do mesmo conceito matemático (Middleton et al., 1998).

Tendo em conta que os modelos proporcionam aos alunos oportunidades de progresso, sem bloquear o caminho de volta para as fontes onde a compreensão começou a ser construída (van den Heuvel-Panhuizen, 2003), o modelo da barra numérica pode ser utilizada em diferentes níveis de compreensão, e pode acompanhá-los no processo de aprendizagem que têm de percorrer (Middleton et al., 1998). A barra numérica pode constituir também um suporte importante para o desenvolvimento de rotinas de cálculo, porque proporciona uma forma rápida de verificar a razoabilidade de uma resposta.

Os conceitos matemáticos, como o conceito de número racional, devem ser introduzidos por meio de modelos que estejam inseridos em contextos reais, de modo que não se tornem "vazios" de significado (Lachance & Confrey, 2002). Ou seja, os modelos não devem ser "abandonados", dando lugar ao ensino dos "procedimentos", sem que se garanta uma boa conexão entre ambos. O modelo da barra numérica é importante no ensino dos números racionais, no entanto, de acordo com Middleton et al. (1998), não deve ser imposto aos alunos. Ao invés, deve surgir enraizado em problemas que naturalmente possam ser caracterizados por um modelo linear, para depois se tornar numa forma de mostrar o pensamento dos alunos e facilitar a sua comunicação. Por isso, os contextos bem escolhidos permitem aos alunos fazer a transição do trabalho com a barra numérica para outro modelo mais formal.

Em suma, o modelo da barra numérica é de facto o mais próximo da representação física dos objetos do dia-a-dia que surge nos problemas que os alunos têm de resolver e permite estabelecer relações entre números racionais bem como conexões entre as suas várias representações (van Galen et al., 2008). No entanto, estes aspetos também são comuns ao modelo da dupla linha numérica uma vez que o modelo da barra numérica pode sofrer uma alteração física, sendo este último reduzido ao primeiro (van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Linha numérica

Muitos autores defendem a linha numérica como um recurso importante na abordagem dos números racionais (Lamon, 2006; Martin, Lacroix & Fownes, 2005; Mitchell, 2005), chegando a ser considerada a chave para a comparação e ordenação de frações, através de situações que são apresentadas aos alunos que os levam a utilizar as frações equivalentes quando comparam (Keijzer, 2003).

A importância da linha numérica na aprendizagem dos números racionais decorre de esta constituir um modelo de medida e não de contagem, uma vez que os números que se encontram sobre as marcas da linha são representações de comprimentos e não "etiquetas" Fuson (1984). Por sua vez, Herbst (1997) refere que a linha numérica é um sistema numérico que tem uma unidade que se repete e que, por isso, cada segmento corresponde a um número. Deste modo, de acordo com o autor, a linha numérica pode ser vista como uma representação do sistema numérico e como uma ferramenta de "resolução e justificação" que pode ajudar na resolução de um problema, assim como apoiar a explicação de um raciocínio. Gray e Doritou (2008) referem-se, pois, à linha numérica como "uma representação matemática sofisticada caracterizada como uma metáfora do sistema numérico" (p. 97).

A linha numérica tem sido também encarada como um modelo didático para adicionar e subtrair números inteiros (Hannula, 2003; Michaelidou et al., 2004), para além de ser usada para representar números inteiros e racionais (Berh et al., 1983; Lesh et al., 1987). Segundo Bright, Behr, Post e Wachsmuth (1988), a linha numérica enquanto modelo para representar frações, difere dos outros modelos (diagramas circulares) em vários aspetos:

> Primeiro, porque o comprimento representa a unidade e o modelo da linha numérica sugere não só interação com a unidade, mas também simultaneamente subdivisões de todas as unidades, ou seja, a linha numérica pode ser vista como uma régua. Segundo, na linha numérica não há separação visual entre duas unidades consecutivas (…) o modelo é contínuo. (…). Terceiro, a linha numérica requer o uso de símbolos para transmitir o significado pretendido[22]. (Bright et al., 1988, p. 215).

Na Geometria Euclidiana a linha numérica pode servir como um modelo de adição, subtração, multiplicação e divisão de números racionais (Michaelidou et al., 2004):

> Uma linha reta com uma escala pertence a um tipo misto de representações. Por um lado, funciona como um modelo geométrico com os números racionais a corresponder não aos segmentos (…), mas também a um conjunto de pontos distintos da linha. Por outro lado (…) os pontos sobre a linha podem ser numerados para que as diferenças entre os números meçam distâncias entre os pontos correspondentes. (p. 306)

Uma vez que as operações com números podem ser representadas como operações nos segmentos da linha (Michaelidou et al., 2004), a linha numérica tem sido reconhecida como uma ferramenta adequada para avaliar até que ponto os alunos desenvolvem o significado de medida dos números racionais; para realizar operações aditivas com frações (Keijzer & Terwel, 2003) e no ensino das operações básicas dos números inteiros e da aritmética em geral (Klein, Beishuizen & Treffers, 1998).

Esta ambiguidade na definição da linha numérica surge muitas vezes pelo facto de esta não ser uma representação padrão, mas um modelo geométrico (Michaelidou, Gagatsis & Pitta-Pantazi, 2004) que envolve um intercâmbio contínuo entre uma representação geométrica (os números representados na linha correspondem a vetores) e algébrica (os números correspondem a pontos na linha) (Deliyianni, Panaoura, Elia & Gagatsis, 2008; Gagatsis & Elia, 2004). Deste modo, ao ser usada para representar números reais "a linha numérica é uma estrutura com uma dualidade concetual pois tem uma componente geométrica que permite a visualização e uma componente algébrica, dada pela introdução da noção de distância" (Pelczer, Singer & Voica, 2011, p. 9).

Apesar de ser uma importante ferramenta pedagógica, a linha numérica tem de ser bem compreendida quer pelos alunos quer pelos professores (Cobb, Yackel, & Wood, 1992), pois sem essa compreensão, existirão dificuldades na sua utilização, nomeadamente quando está envolvida a reconstrução e extensão do conceito de número inteiro para número racional, na representação de fração e decimal (Lesh et al., 1987). De facto, pode tornar-se

[22] Os autores referem que um "ponto A numa linha numérica não tem significado numérico até haver, pelo menos, um número na linha". (p. 215)

um modelo demasiado complexo e não permitir a conexão com outros modos de representação, se não for feito um trabalho continuado em torno da noção de unidade (Oliveira, 1994).

As dificuldades dos alunos com a linha numérica derivam precisamente da dualidade deste modelo e a sua persistência ao longo do tempo deve-se ao facto "do currículo não se focar explicitamente nesta dualidade" (Pelczer, Singer & Voica, 2011, p. 10). Isto é, de acordo com os autores, nos primeiros anos de escolaridade, os alunos trabalham com a linha numérica apenas como um modelo geométrico, usando a álgebra de forma intuitiva. Mais tarde, quando a álgebra é introduzida formalmente, por norma os alunos não são relembrados dos aspetos geométricos da linha numérica (direção, origem e unidade de medida) o que faz com que a estrutura deste modelo se revele muito abstrata para os alunos.

As linhas numéricas com segmentos marcados são designadas por linhas numéricas estruturadas (Diezmann & Lowrie, 2006) e são valiosas em atividades de sequências numéricas (Weigel, 1998). No entanto, identificar uma sequência de números através de uma linha numérica vai além de se saber a ordem e a designação dos números, porque os números são representações de comprimentos e não, simplesmente, pontos (Fuson, 1984).

A linha numérica estruturada tem vantagens cognitivas para a compreensão de vários aspetos da matemática, principalmente na sequência numérica (Wiegel, 1998) e na concretização das operações (Davis & Simmt, 2003). Estas vantagens são, nomeadamente, a sua variabilidade matemática, a sua variabilidade da perceção (Diezmann & Lowrie, 2006) e a sua transferência representacional (Novick, 1990). A variabilidade matemática é demonstrada na linha numérica com o seu uso como uma representação genérica ou uma ferramenta que pode demonstrar muitos conceitos matemáticos, incluindo a posição de uma fração numa sequência numérica e a densidade dos números racionais (Diezmann & Lowrie, 2007). A variabilidade da perceção na matemática é ilustrada pela linha numérica quando é usada como uma das várias representações para mostrar diferentes aspetos do mesmo conceito. Por exemplo, um meio pode ser representado na linha numérica, num gráfico circular, ou numa grelha (Diezmann & Lowrie, 2007). O processo de transferência representacional consiste em saber como usar uma representação de uma tarefa rotineira numa nova tarefa (Diezmann & Lowrie, 2007).

De acordo com Mackinlay (1999), a linha numérica é um diagrama onde as posições individuais codificam informação quantitativa através da sua posição em eixos verticais ou horizontais. Assim sendo, os alunos têm de desenvolver duas noções muito importantes sobre a estruturação da linha numérica: como um gráfico e como um modelo de medição (Diezmann & Lowrie, 2006). De acordo com estes autores, a linha numérica é uma linguagem gráfica que usa uma única posição para codificar a informação através da colocação de uma marca no eixo.

No exemplo abaixo (Figura 24) as distâncias entre as cidades estão codificadas na linha através de uma marca no eixo (linguagem gráfica), que corresponde a uma determinada distância e que o aluno tem de compreender para dar resposta à questão.

No percurso mostrado acima, a distância entre *Bay City* e *Exton* é 60 quilómetros.
Qual é a distância de *Bay City* a *Yardville*?

Figura 24 – Exemplo de uma tarefa com a linha numérica (adaptado de *National Centre for Educational Statistics*, 2003).

Nas salas de aula a linha numérica pode ser vista como a representação de um conceito mais abstrato, ou seja, pode ser utilizada para representar, ordenar e comparar números racionais, nomeadamente na sua representação na forma de fração (Martins, 2007). No entanto, de acordo com o estudo da autora, se este modelo surgir numa situação contextualizada e familiar para os alunos, estes deixam de a utilizar como forma de comprovar o seu raciocínio e passam a utilizá-la como um modelo que suporta o seu raciocínio, ou seja, como um *modelo para* raciocinar (Martins, 2007). Progressivamente os alunos também vão conseguir utilizar símbolos e compreender adições de frações na linha numérica (Monteiro & Pinto, 2006; Monteiro, Pinto & Figueiredo, 2005), assim como estabelecer equivalência entre frações, que surgem num contexto de operadores partitivos, e compreender um determinado comprimento (Carvalho, 2005). É por esse motivo que Lesh et al., (1987) identificam-na como um modelo manipulável embutida de relações e operações que podem representar todas as situações da vida quotidiana.

O modelo da linha numérica é aberto, uma vez que qualquer denominador pode ser escolhido e utilizado (Fosnot & Dolk, 2002), revelando-se assim uma mais-valia para a aprendizagem dos números racionais. Apesar de ser uma ferramenta com grandes potencialidades, a investigação sugere que os alunos enfrentam algumas dificuldades em colocar números na linha numérica (Izsák, Tillema & Tunç-Pekkan, 2008; Pearn & Stephens, 2007). Particularmente, verifica-se que contabilizam as marcas da linha numérica e não os intervalos em que esta está dividida; utilizam a unidade errada, em particular quando a linha numérica tem duas subdivisões diferentes, e marcam erradamente uma fração na linha numérica quando esta está dividida em partes iguais a um múltiplo ou submúltiplo do denominador da fração dada (Baturo, 2004). Os alunos têm, por exemplo, dificuldades em marcar a fração $\frac{3}{4}$ na linha numérica, quando esta está dividida em 12 partes iguais.

A utilização da linha numérica pode levar a enfatizar o seu uso como um instrumento processual em detrimento da sua estrutura concetual (Doritou & Gray, 2009), o que leva a dificuldades na reconstrução de conhecimentos necessários para se lidar com números inteiros e números racionais (Gray & Doritou, 2008). Uma compreensão baseada unicamente no uso da linha numérica, para descrever e atuar com números inteiros, não proporciona uma base para a reconstrução do conhecimento necessário quando se trabalha com frações (Doritou & Gray, 2007).

Um modelo didático relativamente recente e eficaz para a aprendizagem é a linha numérica vazia (Gravemeijer, 1994; Klein et al., 1998). Segundo Beishuizen (1997), a linha numérica vazia é um modelo de ensino que melhora a flexibilidade do cálculo mental dos alunos, sendo neste sentido que a EMR aponta cinco razões para utilizá-la como um modelo central no ensino. Primeiro, porque proporciona uma representação linear dos números, tornando-se num modelo natural de contagem para os alunos (Gravemeijer, 1994). Segundo, porque está próxima das estratégias intuitivas dos alunos, permitindo a articulação com soluções de procedimentos informais (Gravemeijer, 1994; Klein et al., 1998). Terceiro, porque permite o desenvolvimento de estratégias mais sofisticadas, aumentando o nível de atividade dos alunos (Gravemeijer, 1994). Quarto, porque tem um caráter natural e transparente (Treffers & De Moor, 1990, citados por Klein et al. 1998), uma vez que o seu formato vazio estimula a representação mental dos números e da adição e subtração (Gravemeijer, 1994).

As linhas numéricas podem também ser duplas, quando na mesma surgem duas unidades, uma na sua parte superior, outra na sua parte inferior, sendo estabelecida uma relação entre ambas, no contexto da situação-problema que representam. Este modelo é apresentado por Fosnot e Dolk (2002) como um instrumento útil, por exemplo, no desenvolvimento de estratégias aditivas.

Partindo da adição repetida, caracterizada por saltos ao longo da linha numérica, este modelo também permite chegar à multiplicação, servindo deste modo como um modelo para os alunos raciocinarem em contextos multiplicativos (Küchemann, Hodgen & Brown, 2011), tais como conversões ou razões (escalas). O exemplo da Figura 25 permite evidenciar a utilização da dupla linha numérica no cálculo de uma percentagem. Nesta situação os alunos representam na parte superior da linha a unidade (40) e na sua parte inferior a percentagem correspondente.

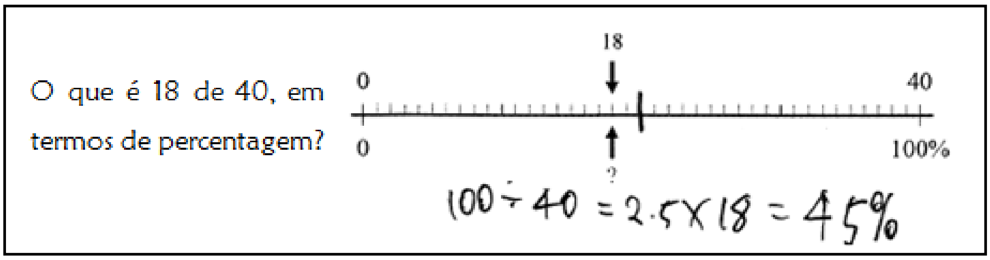


Figura 25 – Utilização da linha numérica em contextos multiplicativos (adaptado de Küchemann, Hodgen & Brown, 2011).

Apesar de a linha numérica estruturada ser muito utilizada, a linha numérica vazia parece ser mais promissora (Diezmann & Lowrie, 2006). Segundo os autores, apesar de ambas parecerem ser modelos diferentes, a relação entre elas tem de ser estabelecida, uma vez que são dois modelos poderosos que estimulam os alunos no desenvolvimento de cálculos e estratégias.

Uma vez mais, a importância das conexões na matemática está bem visível neste ponto, como sendo um aspeto fundamental para o sucesso do aluno na compreensão dos conceitos matemáticos e na consequente resolução de tarefas. É também de salientar a importância de o ensino não se limitar a um único modelo, devendo propiciar experiências variadas com diversos modelos (Küchemann, Hodgen & Brown, 2011), uma vez que cada um tem as suas potencialidades e limitações, sendo uns mais apropriados a umas situações e outros a outras.

De acordo com van Galen et al. (2008), as relações entre as representações dos números racionais são enfatizadas quando estas são visualizadas numa barra numérica ou numa dupla linha numérica. Uma vez que estes modelos partilham uma linguagem simbólica, são uma mais-valia ao desenvolvimento da linguagem das frações, percentagens, numerais decimais (van Galen et al., 2008) e numerais mistos, por parte dos alunos.

Em suma, os modelos, onde se incluem a barra numérica e a linha numérica, são uma forma de representar conceitos matemáticos que fazem a ponte entre o conhecimento informal e formal. Um ensino que preconize uma abordagem dos conceitos matemáticos por meio de modelos contribui para uma maior compreensão dos alunos. Contudo, não basta a utilização dos modelos apenas na introdução dos conceitos, porque se, posteriormente, estes forem esquecidos e derem lugar a um conjunto de procedimentos e regras, não adquirem significado para os alunos e, deste modo, não se poderão transformar em ferramentas para pensar matematicamente.

3.4. Estratégias de resolução de problemas

Quando um aluno resolve um problema, primeiro formula a representação do problema, baseando-se na sua interpretação e nas condições do mesmo, a partir da qual, determina metas e traça objetivos (Cai & Wang, 2006). De acordo com os autores, depois de resolver o problema, o aluno pode ainda utilizar uma determinada representação para expressar o seu processo de resolução, com a finalidade de transmitir o raciocínio envolvido na procura da solução (registos visíveis). Deste modo, pode afirmar-se que as representações da solução estão intimamente relacionadas com as estratégias de resolução, uma vez que as primeiras podem ser encaradas como um esquema organizado de uma série de estratégias que o resolvedor utilizou no processo de resolução (Cai & Wang, 2006).

3.4.1. Estratégias flexíveis

Ao longo dos tempos os educadores matemáticos vêm valorizando a flexibilidade no desenvolvimento de estratégias cognitivas para a resolução de problemas e tarefas matemáticas (Verschaffel, Luwel, Torbeyns & Dooren, 2009). Reconhece-se também que as estratégias primitivas, que decorrem dos conhecimentos informais dos alunos, são uma mais-valia na promoção do pensamento flexível (Beishuizen, 1997). No âmbito do cálculo mental, de acordo com Threlfall (2009), as estratégias podem ser divididas em dois grupos: estratégias de abordagem e estratégias de transformação numérica. Segundo o autor, uma estratégia de abordagem refere-se a "uma forma geral de cognição matemática utilizada para [resolver] o problema – por exemplo contar, (…) aplicar um método aprendido, visualizar um processo, ou explorar relações numéricas conhecidas" (p. 541). Por exemplo, perante a questão "Como resolves 45–28?" (2009, p. 541), Threlfall refere que os alunos podem raciocinar de diferentes formas: **a)** Uma abordagem de um método escrito: "transformo o quatro em três, depois tiro oito dos quinze e dá sete, depois tiro dois dos três e dá um, logo um e sete, dezassete" (p. 541), raciocínio que pode ser traduzido por $45=10\text{x}(3+1)+15$; $28=2\text{x}10+8$; $3–2=1$; $15–8=7$; 17; **b)** Uma abordagem de contagem: "começo pelo 45, tiro-lhe dez e dá 35, depois tiro sete de uma vez para dar 28" (p. 542), ou seja, subtraiu sucessivamente até chegar ao 28, depois terá somado os números que subtraiu (dez e o sete); ou **c)** A aplicação de um método conhecido ou a exploração de relações numéricas conhecidas: "tiro 20 aos 45 para dar 25, depois tiro cinco e depois tiro três e isso dá 17" (p. 542), ou seja, decompôs o subtrativo ($28=20+5+3$) e subtraiu sucessivamente o 20, o cinco e o três, ao aditivo.

No âmbito das estratégias de abordagem relativamente à adição e subtração de numerais decimais, Rezat (2011) refere que os alunos podem recorrer à linha numérica (onde o aluno resolve o problema com recurso à linha ou barra numérica), ao modelo do balanço de uma conta bancária (onde o aluno resolve o problema com recurso a contextos monetários de depósitos e levantamentos), ao modelo de uma escala de temperatura (em que o aluno resolve o problema com recurso a contextos que envolvem temperaturas) e modelo de altitude (em que o aluno resolve o problema com recurso a contextos que envolvem altitudes). Segundo o autor, estas estratégias de abordagem são utilizadas na resolução de problemas que envolvem adição e subtração de números racionais na sua representação decimal, contudo as duas primeiras estratégias de abordagem podem ser utilizadas para resolver todo o tipo de problemas que envolvam as outras representações dos números racionais.

Uma estratégia de transformação numérica "é a forma detalhada por meio da qual os números vão sendo transformados até se chegar à solução" (Threlfall, 2009, p. 542). Apesar de o autor fazer uma distinção entre estes dois tipos de estratégias, o mesmo evidencia uma ligação entre elas, uma vez que refere que cada estratégia de transformação numérica reflete uma estratégia de abordagem, apesar de nem todas as estratégias de abordagem determinarem as primeiras.

> Por exemplo, quando é adotada uma estratégia de abordagem que envolve a visualização de um problema como uma soma escrita, a estratégia de transformação surge praticamente ao mesmo tempo que o procedimento escrito. Por outro lado, quando a estratégia de abordagem envolve a exploração de relações entre os números, a estratégia de transformação não é decidida pela estratégia de abordagem. (p. 542)

Em suma, as estratégias de transformação numérica que Threlfall (2009) menciona, dizem respeito às várias formas de compor e de decompor números de forma a facilitar o cálculo. Segundo Heinze, Star e Verschaffel (2009), apesar de estas estratégias se centrarem nos números naturais, também podem ser alargadas aos números racionais, embora isso só seja possível se os alunos tiverem desenvolvido o sentido de número.

Neste campo, os alunos podem alternar sem dificuldades, entre diferentes estratégias para um mesmo problema, mostrando o que Verschaffel, Luwel, Torbeyns e van Dooren (2009) designam por flexibilidade, ou "selecionar a estratégia mais apropriada" (p. 337), que designam por adaptabilidade. De acordo com os autores, a escolha da estratégia mais apropriada é caracterizada pela "seleção consciente ou inconsciente e pela utilização da estratégia mais adequada a um determinado item matemático ou problema, para um determinado individuo, num determinado contexto sociocultural" (p. 343). Deste modo, uma estratégia adaptada depende das características da tarefa, das condições do aluno e do seu próprio meio sociocultural (Rezat, 2011).

Para que os alunos possam desenvolver flexibilidade e adaptabilidade nas suas estratégias, devem, não só, ter oportunidade de escolher os seus próprios caminhos de resolução de um problema – desenhar, concretizar a situação usando diferentes tipos de materiais ou inventar estratégias (Brocardo et al., 2003) –, como também de os apresentar e discutir, para que assim possam adquirir um leque variado de estratégias (ME, 2007). É neste sentido que a sala de aula pode ser "uma comunidade de jovens matemáticos a trabalhar [e como é constituída por diversos indivíduos] é uma área rica em diversidade" de estratégias (Fosnot & Dolk, 2002, p. 45). De acordo com estes autores, as estratégias a que os alunos recorrem, como forma de demonstrar o seu raciocínio, vão-se aprimorando ao longo do tempo, tornando-se uma etapa fundamental do processo de matematização.

Perante uma determinada tarefa existem várias estratégias de resolução, às quais os alunos podem recorrer, sejam elas relacionadas somente com procedimentos de cálculo (onde se incluem os algoritmos e as estratégias de transformação numéricas referidas por Threfall (2009) e por Heinze et al. (2009)), com a representação simbólica (fração, decimal e percentagens), com a representação gráfica (gráfico circular, barra numérica ou linha numérica, onde se incluem as estratégias de abordagem mencionadas por Rezat (2011)), ou com uma combinação de duas ou três destas estratégias (Oliveira & Ramalho, 1994). A esta última categoria de estratégias, em que perante um determinado problema, os alunos mostram a capacidade de o resolver de várias formas (flexibilidade), de acordo com Verschaffel et al. (2009), chamaremos por *estratégias flexíveis*.

É a variedade de estratégias que podem surgir no trabalho com os números racionais que se pretende evidenciar nas subsecções seguintes. Estas são apresentadas em função de quatro vertentes consideradas fundamentais para uma boa compreensão dos números racionais: **a)** partição; **b)** equivalência, **c)** concetualização da unidade (*unitizing*/*reunitizing* e *reversing*) e **d)** densidade e valor de posição.

3.4.2. Estratégias associadas à partição

Tal como foi mencionado anteriormente, a partição é uma noção importante para a compreensão dos números racionais (Behr et al., 1983; Martinie, 2007), sendo considerada a base a partir da qual os alunos desenvolvem a compreensão dos outros significados (Ni & Zhou, 2005).

A partição surge, frequentemente, num contexto de partilha equitativa, onde se pretende repartir igualmente algo por um determinado número de pessoas. Lamon (1996) identifica diferentes estratégias que os alunos podem seguir, numa situação de partilha equitativa, classificando-as e categorizando-as de acordo com a sua sofisticação, de forma decrescente. A situação apresentada diz respeito à partilha de quatro pizas por três pessoas e promove uma representação pictórica e simbólica da crescente fragmentação da piza:

- *Estratégia das Peças Preservadas* (PP – *Preserved-pieces*). Quando cada pessoa recebe mais que uma unidade do que vai ser partilhado (neste caso mais de uma piza), onde os alunos efetuam cortes apenas na "peça" (piza) necessária. Ou seja, os alunos fazem o menor número de cortes possível. Neste caso, três pizas ficam intactas e apenas a quarta piza vai ser cortada em três partes, para que cada pessoa receba uma piza mais $\frac{1}{3}$ da quarta piza (Figura 26).

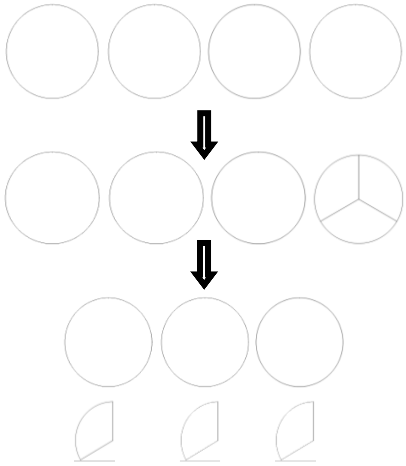


Figura 26 – Estratégia das *peças preservadas* (adaptado de Lamon, 1996).

Estratégias semelhantes são utilizadas quanto se faz a partilha equitativa de grandezas compostas. Por exemplo, quando a partilha inclui um pacote de rebuçados, este será desenhado sem indicação das unidades individuais que o compõem (Lamon, 1996).

- *Estratégia de todas [as peças] marcadas* (MA – *Mark-all*). Nesta estratégia, os alunos marcam todas as peças (pizas), mesmo aquelas que ficam intactas, mas apenas serão cortadas as que exigem o corte (Figura 27).

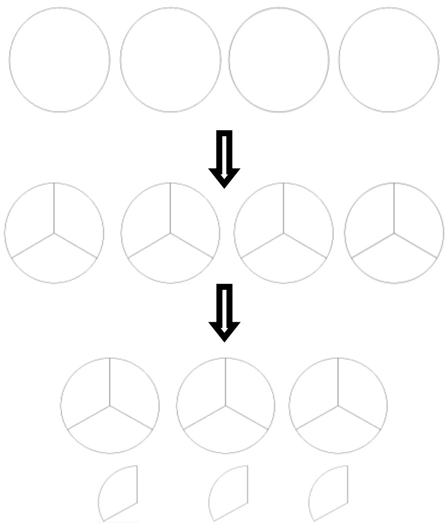


Figura 27 – Estratégia de *todas marcadas* (adaptado de Lamon, 1996).

- *Estratégia da distribuição* (D). Todas as peças são marcadas e cortadas e as peças mais pequenas são então distribuídas (Figura 28).

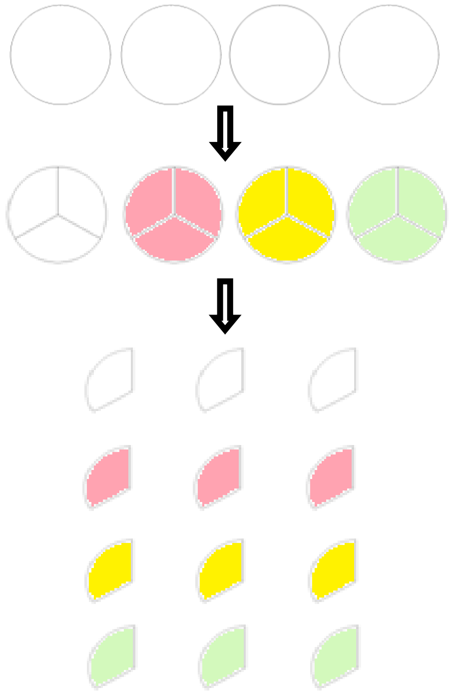


Figura 28 – Estratégia da *distribuição* (adaptado de Lamon, 1996).

A marcação das peças em cada uma das três estratégias apresentadas (PP, MA ou D) pode ou não ser económica. Por exemplo, um aluno pode escolher fazer seis marcas iguais em cada piza, quando se pretende distribuí-la por três pessoas – marcação excessiva – OM (*overly marked*); ou então pode apenas efetuar as três marcas necessárias – marcação económica – EM (*economically marked*) (Lamon, 1996).

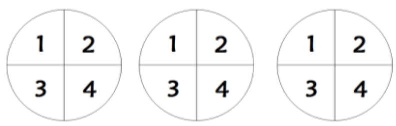
Na estratégia da *distribuição* (D), as peças são sempre cortadas conforme estão marcadas, mas na estratégia das *Peças Preservadas* (PP) e na estratégia de *Todas Marcadas* (MA), o corte nem sempre é feito de acordo com a marcação. Por exemplo, se o aluno tem a piza marcada em seis partes iguais (numa distribuição por três pessoas), pode cortar as peças duas a duas, como se a piza estivesse marcada em terços e não em sextos (Lamon, 1996). Segundo a autora, deste modo, as estratégias PP e MA podem ser classificadas como CE – cortar economicamente depois da marcação, ou CM – cortar conforme está marcado (Quadro 4).

- Peças Preservadas (PP)
  - Marcação económica (EM) → Corte pelas marcas (CM)
  - Marcação excessiva (OM)
    - → Corte económico (CE)
    - → Corte pelas marcas (CM)
- Todas Marcadas (MA)
  - Marcação económica (EM) → Corte pelas marcas (CM)
  - Marcação excessiva (OM)
    - → Corte económico (CE)
    - → Corte pelas marcas (CM)
- Distribuição (D)
  - Marcação económica (EM)
  - Marcação excessiva (OM)

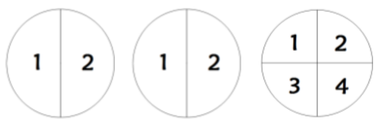
Quadro 4 – Hierarquia das estratégias de partilha equitativa (adaptado de Lamon, 1996).

Em situações onde se pretende estudar a fração como quociente de dois números inteiros, podemos abordar o seguinte problema: "Quatro amigos foram a um restaurante e pediram três pizas. Dividiram igualmente as três pizas. Que parte de piza comeu cada amigo?" (Monteiro & Pinto, 2006, p. 183). Perante este problema, e segundo o estudo das autoras, os alunos podem seguir várias estratégias, que são apresentadas por ordem decrescente de frequência em que surgiram:

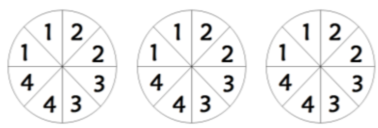
A. dividir as 3 pizas em quartos e darem três fatias a cada aluno (estratégia D – EM – CM, de acordo com Lamon, 1996):



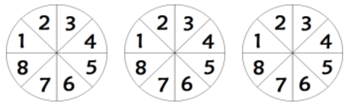
B. dividir duas pizas em metades e a terceira piza em quartos, dando metade mais um quarto a cada aluno (estratégia PP – EM – CM, de acordo com Lamon, 1996):



C. dividir as três pizas em oitavos e dar $\frac{2}{8}$ a cada aluno (estratégia MA – OM – CE, de acordo com Lamon, 1996):



D. dividir as três pizas em oitavos, contar os oitavos de cada piza (oitp) e multiplicar por três, dando 24, que posteriormente dividiram por quatro (número de amigos), dando seis fatias ($\frac{6}{8}$):



E. dividir três por quatro, obtendo 0,75 e igualmente 75%.

Diversos estudos sobre o uso de estratégias de resolução de problemas de partilha equitativa mostram que: **i)** as crianças tendem a utilizar uma variedade de estratégias intuitivas quando são confrontados com estes problemas (Lamon, 1996; Pothier & Sawada, 1983); **ii)** a seleção das estratégias depende não só do conhecimento prévio dos alunos e das suas experiências, mas também do contexto da tarefa, do tipo e do número de objetos que estão envolvidos na partilha (Lamon, 1996; Pothier & Sawada, 1983); e **iii)** a utilização de novas estratégias de partilha depende das situações, o que demonstra uma forte adesão à prática social (Lamon, 1996).

Charles e Nason (2000), no seu estudo sobre situações de partilha equitativa, referem doze estratégias que emergiram e que distinguem em três grupos: **i)** estratégias de quociente partitivo; **ii)** estratégias multiplicativas; e **iii)** estratégias de partilha interativa.

Todas as estratégias incluídas no primeiro grupo têm uma característica comum: utilizam a relação entre o número de pessoas da partilha e o nome da fração que deu origem a cada porção partilhada. Por exemplo, se duas, três ou mais pizas são partilhadas por cinco pessoas, o valor de cada pedaço é expressado em quintos. Nesta categoria, Charles e Nason (2000) identificam cinco estratégias com quocientes partitivos, que envolvem determinadas etapas:

1ª) *quociente partitivo fundamental* – reconhecer o número de pessoas; gerar o nome da fração de acordo com o número de pessoas (quintos, por exemplo); reconhecer a relação entre o nome da fração e o número de peças iguais em cada objeto inteiro (cinco peças iguais, por exemplo); partir cada objeto inteiro em peças iguais (cinco peças iguais, por exemplo); distribuir as peças ($\frac{1}{5}$ de cada objeto para uma pessoa) e quantificar cada distribuição (adicionar todos os quintos que cada pessoa recebeu).

2ª) *quociente partitivo procedimental* – reconhecer o número de pessoas (y); reconhecer o número de objetos (x); quantificar o que cada pessoa recebe ($\frac{x}{y}$). Esta estratégia deriva da estratégia anterior, mas o número de passos para se chegar a uma solução foi reduzido.

3ª) *partilha e quantificação através da noção parte-todo* – reconhecer o número de pessoas (y); dividir cada objeto inteiro em peças iguais (y peças iguais); partilhar uma peça de cada objeto com cada pessoa; quantificar o que cada pessoa recebe através da aplicação do sistema parte-todo e nomear a fração.

4ª) *reagrupar* – reconhecer o número de pessoas (y); reconhecer que o número de pessoas dá o nome à fração; ter a perceção de que o nome da fração apresenta o número de peças da unidade inteira; ter a perceção que o número total de objetos partilhados pode ser gerado através da multiplicação do número de objetos pelo número de peças que compõem cada unidade; e quantificar cada partilha através do reconhecimento de que o número de peças de cada pessoa pode ser calculado através da divisão do número total de peças pelo número de pessoas.

5ª) *partilha horizontal* – reconhecer o número de pessoas (y); gerar o nome da fração através do número de pessoas; reconhecer a relação entre o nome da fração e o número de peças em cada objeto inteiro; distribuição horizontal de cada objeto inteiro (em y partes); quantificar cada ação ($\frac{1}{y}$ partes); e reconhecer que as partes não são iguais.

Uma das estratégias multiplicativas (segundo grupo) é mostrada em Pothier e Sawada (1983), onde os alunos usam a estratégia da partilha por composição, recorrendo à multiplicação para gerar um número ímpar de divisões. Por exemplo, quinze avos podem ser gerados por quintos, onde cada terço é dividido em cinco partes. De acordo com Pothier e Sawada (1983) as estratégias multiplicativas são muito eficientes para dividir um objeto num número ímpar de partes. Esta estratégia tem seis passos: reconhecimento do número de pessoas (y); reconhecimento do número de objetos (x); o número de peças em cada unidade é gerado multiplicando (y) por (x); dividir cada unidade em (yx) peças; partilhar as peças pelas pessoas; e quantificar cada partilha.

No grupo das estratégias de partilha interativa, Charles e Nason (2000) identificaram quatro estratégias:

1.ª) *reduzir o objeto para metade e depois dividi-lo outra vez ao meio e assim sucessivamente* – compreende as seguintes etapas: reduzir cada objeto para metade; reconhecer o valor de cada peça; distribuir as peças; quantificar cada partilha.

2.ª) *distribuir metade dos objetos por metade das pessoas* – que tem os seguintes passos: reconhecer o número de pessoas; reconhecer o número de objetos; constatação que metade dos objetos vão gerar peças suficientes para partilhar por todas as pessoas; dividir os objetos ao meio; distribuir as metades por todas as pessoas; e quantificar cada partilha.

3.ª) *repetir a dimensão* – esta estratégia tende a confirmar a teoria de Lamon (1996), de que as crianças mostram uma forte aderência à prática social, uma vez que os mesmos dividem a unidade em partes desiguais (que é o que acontece na realidade em muitos restaurantes, no corte de pizas). Aqui os alunos passam por duas etapas: dividir cada objeto inteiro num número ímpar de peças diferentes e partilhar as peças utilizando o atributo da área de cada peça em vez do número de peças, numa tentativa de efetuar uma partilha justa.

4.ª) *repetir a metade/repetir a dimensão* – esta é uma estratégia composta e tem as seguintes etapas: aplicar a estratégia de reduzir o objeto para metade, uma e outra vez e aplicar a estratégia anterior (*repetir a dimensão*).

Em suma, perante as tarefas que envolvem uma situação de partição, de acordo com Charles e Nason (2000), as estratégias de resolução dos mesmos podem ser agrupadas em três grupos de estratégias que se subdividem em estratégias específicas (Quadro 5).

Grupos de Estratégias	Estratégias Específicas
Estratégias de partilha equitativa	Peças Preservadas
	Todas Marcadas
	Distribuição
Estratégias de quociente partitivo	Quociente partitivo fundamental
	Quociente partitivo procedimental
	Partilha e quantificação através da noção parte-todo
	Reagrupamento
	Partilha horizontal
Estratégias multiplicativas	Partilha por composição
Estratégias de partilha interativa	Reduzir o objeto para metade e depois dividi-lo outra vez ao meio e assim sucessivamente
	Distribuir metade dos objetos por metade das pessoas
	Repetir a dimensão
	Repetir a metade/repetir a dimensão

Quadro 5 – Estratégias de partição (Charles & Nason, 2000).

3.4.3. Estratégias associadas à equivalência

A noção de equivalência é "uma das ideias mais importantes e abstratas da matemática" (Ni, 2001, p. 400), sendo muito complexa, devido não só à existência de múltiplas representações dos números racionais (Martinie, 2007), como também às suas "regras" que são diferentes das dos números inteiros (Smith III, 1995). A compreensão desta noção é interiorizada de forma diversa dependendo do significado de número racional (Ni, 2001), pelo que a sua abordagem deve ser feita gradualmente ao longo do ensino dos números racionais e não de uma forma isolada (Tobias, 2009).

A abordagem desta noção num contexto de razão além de enfatizar a natureza aditiva e multiplicativa das frações também permite aos alunos criarem uma boa base para o desenvolvimento de algo mais complexo que é o pensamento proporcional (Post et al., 1985) e o raciocínio multiplicativo, bem como o desenvolvimento de estratégias que podem ser utilizadas em situações de proporção (Vanhille & Baroody, 2002).

Perante problemas que envolvem uma situação de razão, existem vários estudos que evidenciam e caracterizam as estratégias a que os alunos recorrem para os resolver (Silvestre & Ponte, 2009). Post, Behr e Lesh (1988) identificaram como estratégias: **a)** *Razão unitária*, conhecida por "quanto para um", como a estratégia mais intuitiva atendendo ao facto de os alunos a usarem desde os primeiros anos de escolaridade; **b)** *Comparação de razões*, relacionada com problemas que envolvem a comparação de razões por meio de duas divisões, e **c)** *Algoritmo do produto cruzado* (regra de três simples) que só adquire significado se estiver contextualizado no problema. Post et al. (1988) ainda reconhecem a estratégia da interpretação gráfica, uma vez que segundo os autores, os diagramas e esquemas podem ser utilizados para identificar razões equivalentes ou para resolver problemas de valor omisso.

Fosnot e Dolk (2002) apresentam exemplos de diversas estratégias seguidas pelos alunos, partindo de uma mesma situação que contextualiza o significado de razão. Nesta situação os alunos têm de identificar qual a melhor compra: a opção A (comprar 20 latas por 23€) ou a opção B (comprar 12 latas por 15€). Todos os alunos cujas estratégias foram analisadas estabeleceram uma comparação por unidade (uma lata), no entanto, as estratégias seguidas para determinar o valor de uma lata em cada situação, foi diferente. Lucy e Helaina dividiram para encontrarem o valor da unidade (Figura 29) – método da unidade (Lamon, 2006) –, enquanto Josephine e Chloe tentaram encontrar frações equivalentes (Figura 30) – denominador comum.

12 latas por 15€ → 15 : 12 = 1,25 $1\frac{1}{4}$

20 latas por 23€ → 23 : 20 = 1,15 (escolhia esta, porque aqui cada lata é mais barata)

Figura 29 – Estratégia de Lucy e Helaina (adaptado de Fosnot & Dolk, 2002).

$\frac{15}{12} = \frac{5}{4} = \frac{1,25}{1}$ → 4 latas por 5€

$\frac{23}{20} = \frac{4,6}{4}$ → 4 latas por 4,60€ (esta opção é a melhor)

Figura 30 – Estratégia de Josephine e Chloe (adaptado de Fosnot & Dolk, 2002).

Dylan e Tristan utilizaram ainda outra estratégia (Figura 31). Utilizando a tabela de razão, os alunos conseguiram combinar quantidades e estabelecer uma equivalência, tendo a interessante ideia de recorrer ao conceito de múltiplo comum. Depois de um dos alunos sugerir que "podemos experimentar 60 latas! O 12 e o 20 podem ambos transformar-se em 60!", acrescentaram uma linha na sua tabela e determinaram o preço de 60 latas para as duas opções (Fosnot & Dolk, 2002, p. 44).

Opção A

Latas	Preço (€)
12	15
6	7,5
3	3,75
1	1,25
60	75

12x5=60 60x1,25=75

Opção B

Latas	Preço (€)
20	23
10	11,5
5	5,75
1	1,15
60	69

20 x3=60 60x1,15=69

Figura 31 – Estratégia de Dylan e Tristan (adaptado de Fosnot & Dolk, 2002).

Lamon (2006) apresenta um problema envolvendo também um contexto de razão (Figura 32) onde os alunos têm de descobrir qual das árvores, A ou B, cresceu mais, durante um certo período de tempo.

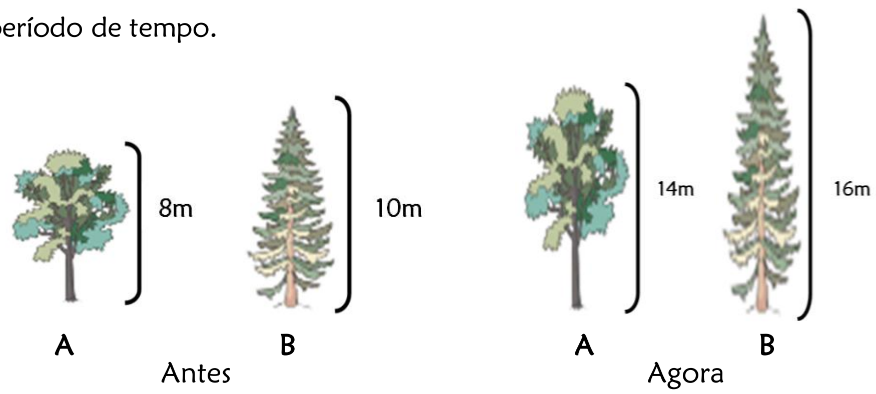


Figura 32 – Problema envolvendo a razão (adaptado de Lamon, 2006).

Dan (Figura 33) transforma o crescimento de cada árvore em termos de percentagens, concluindo deste modo que a árvore A cresceu mais (75%) que a árvore B (65%). Dan terá determinado a percentagem correspondente a um metro de cada árvore (A – 12,5% e B – 10%) e depois multiplicou por seis, uma vez que cada uma cresceu efetivamente 6 metros, no entanto, o seu tamanho inicial era diferente, tendo deste modo, uma percentagem de crescimento diferente.

A árvore A cresceu 75% da sua altura. Mas a B cresceu um bocadinho menos, 60% na sua altura.

Figura 33 – Estratégia de Dan (adaptado de Lamon, 2006).

É de salientar que perante um problema deste género, muitas vezes os alunos não estabelecem qualquer relação de equivalência, neste caso entre o tamanho das duas árvores, tal como é evidente na resposta de Pete (Figura 34) e de Robert (Figura 35). Enquanto Pete resolve a questão olhando apenas para o "agora" das duas árvores, dizendo que a que cresceu mais é a que tem agora o maior comprimento, Robert tem em conta o tamanho inicial e final das árvores, mas não utiliza um raciocínio proporcional para as relacionar entre si. Este aluno efetua uma subtração entre o tamanho final e o tamanho inicial de ambas as árvores (14–8=6 e 16–10=6), concluindo que ambas cresceram o mesmo.

A árvore B cresceu mais porque cresceu até aos 16m. É mais do que a árvore A cresceu.

Figura 34 – Estratégia do Pete (adaptado de Lamon, 2006).

Ambas as árvores cresceram o mesmo: 6 metros. A árvore B tem sempre 2m a mais que a árvore A.

Figura 35 – Estratégia do Robert (adaptado de Lamon, 2006).

Em síntese, perante um problema que envolva a noção de equivalência, independentemente do significado dos números racionais envolvido, os alunos podem recorrer a uma variedade de estratégias, tal como ficou evidenciado: **a)** a razão unitária, que Lamon (2006) designa como método da unidade; **b)** a comparação entre razões (que neste ponto se encontra evidenciado pela construção de uma tabela de razões); **c)** representações equivalentes, em que os alunos transformam, por exemplo, as razões em percentagens para poderem estabelecer uma relação de equivalência; e **d)** denominador comum. De acordo com Post et al. (1988), além destas estratégias os alunos, perante um problema que envolva a noção de equivalência, também podem recorrer à **e)** regra de três simples; e à **f)** interpretação gráfica.

3.4.4. Estratégias associadas à concetualização da unidade (*unitizing/reunitizing e reversing*)

A concetualização da unidade é um processo natural em que os alunos devem ter liberdade para agrupar a sua unidade de forma a facilitar o seu raciocínio. De acordo com Lamon (2006), a concetualização da unidade é uma alternativa para a resolução de problemas que envolvem o significado parte-todo, quando a subdivisão das figuras facultadas não é aquela que permite uma rápida resolução do mesmo. Ou seja, se for pedido a um aluno que identifique dois sextos de uma grandeza contínua cuja unidade está previamente dividida em três partes, só o consegue fazer se conseguir concetualizar a unidade e reorganizá-la, isto é, fazer mais divisões na mesma. Relativamente às grandezas discretas, Lamon (2006) refere que um aluno, por exemplo, pode pensar em seis pacotes de leite como uma embalagem ou pensar em cinco dedos como uma mão, explicando como está a pensar sobre determinada quantidade. Em cada caso a quantidade é sempre a mesma, apenas a forma como se pensa sobre essa quantidade é que muda (Lamon, 2006). De acordo com a autora, é importante e vantajoso que o aluno consiga pensar de forma flexível sobre as quantidades que lhe são apresentadas, uma vez que, dependendo do contexto em que surgem, se tiver esta flexibilidade, conseguem escolher o melhor caminho para resolver o problema, o que representa uma clara vantagem sobre apenas conseguir olhar para determinada quantidade de uma única forma.

A compreensão de que a unidade pode ser reagrupada de formas diferentes é uma mais-valia para o aluno quando este se encontra perante um problema onde se pretende a reconstrução da unidade, conhecimento que Post et al. (1992) consideram importante para a compreensão da noção de unidade.

Uma questão onde os alunos têm de reconstruir a unidade surge muitas vezes associada ao significado parte-todo, uma vez que podem recorrer à representação pictórica da parte e repeti-la de forma a reconstruir a unidade. Tal estratégia é evidenciada por Leonor e Amélia (Figura 36) no estudo de Quaresma (2010).

A figura seguinte representa $\frac{3}{4}$ de uma tira de papel.

Representa $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{3}$ dessa tira.

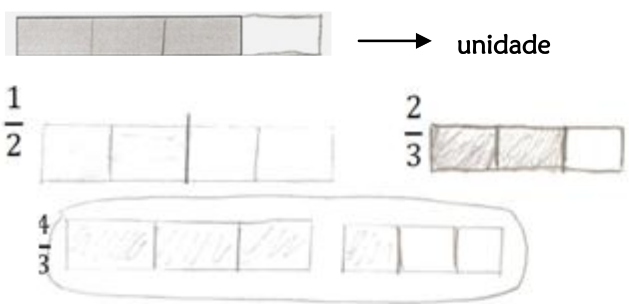
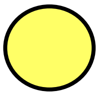


Figura 36 – Estratégia de Leonor e Amélia (Quaresma, 2010).

Para resolver esta tarefa, as alunas compreendem que a figura que lhes é apresentada é apenas parte da unidade e sentem necessidade de a identificar, recorrendo primeiro à identificação de $\frac{1}{4}$ através da partição da figura que lhes é dada em três partes. Depois disso completam a figura acrescentando a parte que lhe faltava ($\frac{1}{4}$).

Ainda no estudo de Quaresma (2010), perante outra tarefa, onde é dada uma fração unitária e é solicitada a representação da unidade, Leonor também compreende que a figura apresentada é apenas uma parte da unidade que é constituída por três partes iguais àquela, e que se repetir essa parte mais duas vezes, obtém a unidade completa (Figura 37).

Se a figura seguinte representar $\frac{1}{3}$ da unidade, desenha a figura completa.



(…)
Leonor: a figura toda são mais três bolas.
Professora: são mais três bolas?
Leonor: (…) não (…) tenho de acrescentar mais duas.
Professora: (…) mais duas ou mais três?
Leonor: (…) mais duas.
Professora: porquê?
Leonor: porque é um terço.
Professora: (…) que quer dizer um terço?
Leonor: (…) são três … e está pintada uma.

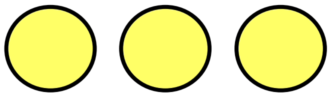
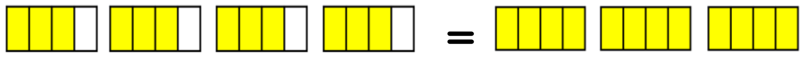


Figura 37 – Estratégia de Leonor (Quaresma, 2010).

Envolvendo também a reconstrução da unidade, mas sem uma figura que represente a situação em causa, Lamon (2006) apresenta aos alunos um problema, onde lhes solicita uma resposta sob a forma de fração: “Tens uma foto no teu computador e tu transformaste-a em $\frac{3}{4}$ (75%) do seu tamanho original. Depois mudaste de ideias e agora queres voltar atrás para o seu tamanho original. Que fração deves introduzir no computador para que ele transforme a foto reduzida na foto original?” (p. 150).

Bright representa a foto sob a forma de um retângulo (representação gráfica), que subdivide em quatro partes iguais, de onde toma três (significado parte-todo de $\frac{3}{4}$) depois copia esta representação quatro vezes (“quatro vezes maior”). Ao juntar as partes tomadas de cada retângulo, totaliza 12 partes, o que (agrupando quatro a quatro – a sua unidade) perfaz três unidades inteiras (Figura 38). Contudo, a aluna responde $\frac{1}{3}$ como a fração a introduzir, sendo que este valor teria também de ser multiplicado por quatro, para obter $\frac{4}{3}$, o que não fez.

Primeiro posso transformá-la numa foto quatro vezes maior.



E fico com três unidades. Depois divido por três para obter a foto no seu tamanho original. Introduzi $\frac{1}{3}$.

Figura 38 – Estratégia da Brigth (adaptado de Lamon, 2006).

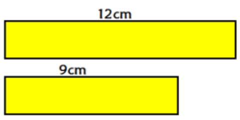
Outros alunos deram a resposta sob a forma de fração, Elliot (Figura 39) e Stella (Figura 40). Elliot conseguiu compreender que se a foto tem $\frac{3}{4}$ do seu tamanho original, lhe foi retirado 25%. No entanto, este aluno incorre num erro muito comum o de achar que 25% de qualquer tamanho (neste caso) corresponde sempre ao mesmo valor, o que é evidente quando diz que basta "aumentá-la em 25%" e como a nova foto ($\frac{3}{4}$) é agora a sua unidade (100%), então tem "de introduzir 125%".

Reduzir a foto para $\frac{3}{4}$, significa que retiro 25% à foto original. Para voltar a colocar a foto no seu tamanho original, posso aumentá-la em 25%, logo tenho de introduzir 125%.

Figura 39 – Estratégia de Elliot (adaptado de Lamon, 2006).

Stella concretiza o problema com uma tira de papel e com as respetivas medidas. A aluna interpretou a transformação a fazer, como uma multiplicação, então tentou descobrir por quanto teria de multiplicar a sua foto atual (9cm) para que ela volte ao seu tamanho inicial (12cm). Assumiu que a sua foto atual (9cm) era agora a unidade (100%). Tendo 9cm, faltam-lhe 3cm para obter 12cm, então Stella foi descobrir por quanto tinha de multiplicar nove para obter três, chegando a $\frac{1}{3}$ (33,33333%). Deste modo, Stella concluiu que teria de introduzir 133,333% ($\frac{4}{3}$) no computador para que a foto voltasse ao seu tamanho inicial (Figura 40).

Se eu supuser que esta tira de papel tem 12cm, $\frac{3}{4}$ dela terão 9cm.



Logo eu tenho de fazer o seguinte $9 \times ? = 12$

$9 \times 1 = 9$ 100% $9 \times \frac{1}{3} = 3$ 33,333%

Então terei de introduzir 133,33%.

Figura 40 – Estratégia da Stella (adaptado de Lamon, 2006).

Apesar de o problema não apresentar uma figura representativa da situação, as resoluções dos alunos mostram uma tendência em representar essa situação graficamente, havendo inclusive quem a personifique com um exemplo muito concreto (Stella). Seja qual for a estratégia que os alunos seguiram, os exemplos apresentados por Lamon (2006) evidenciam uma diversidade de estratégias na resolução do problema, sendo notório que todos compreenderam que a foto atual é apenas uma parte da original e que para a reverterem ao seu tamanho inicial, excetuando Bright (Figura 38), têm de introduzir um número racional maior que a unidade.

Fosnot e Dolk (2002) apresentam aos alunos uma questão de resposta aberta, envolvendo uma situação de partilha equitativa, que tem subjacente a identificação e reconstrução de unidades que variam consoante o número de pessoas envolvidas na partilha. A informação que é dada aos alunos é apenas que cada pessoa do grupo recebe $\frac{3}{4}$ de uma panqueca. A partir dessa informação os alunos têm de analisar como pode variar o número de pessoas que podem estar no grupo, em relação ao número de panquecas que têm de ser partilhadas.

Teddy utiliza a adição repetida, tendo tentado adicionar várias vezes $\frac{3}{4}$, no entanto parou. Finalmente, adicionou uma panqueca e duas crianças de cada vez, tendo produzido uma tabela errada (Figura 41).

$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$	duas panquecas e três crianças
$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$	três panquecas e cinco crianças
quatro panquecas e sete crianças	cinco panquecas e nove crianças
seis panquecas e 11 crianças	sete panquecas e 13 crianças
E assim sucessivamente	

Figura 41 – Estratégia do Teddy (adaptado de Fosnot & Dolk, 2002).

Embora manifeste saber que a adição repetida é uma forma de resolver o problema, ainda não desenvolveu uma estratégia para adicionar frações ou para manter a relação constante.

Perante a mesma situação, Laura, Tiffany e Lara começam a resolução duplicando as quantidades. Laura (Figura 42) sabe que duplicar é uma estratégia que vai manter a razão equivalente (como mostra o que escreveu). No entanto continua confusa sobre aquilo que deve duplicar (as crianças ou as panquecas) e, por isso, as suas respostas não são equivalentes.

quatro crianças e três panquecas
seis crianças e oito panquecas (dupliquei as panquecas, deu seis; dupliquei as crianças, deu oito)
16 crianças e 12 panquecas
24 crianças e 32 panquecas
64 crianças e 48 panquecas
96 crianças e 128 panquecas

Figura 42 – Estratégia da Laura (adaptado de Fosnot & Dolk, 2002).

Tiffany (Figura 43) compreende que duplicar é uma estratégia que mantém o valor da razão constante, como é evidente pela sua resolução e pelo que escreve: "O que tu tens de fazer é só duplicar para sempre" (Fosnot & Dolk, 2002, p. 67). No entanto, e de acordo com as autoras, esta aluna ainda não consegue fazer uma generalização do seu raciocínio, de forma a estabelecer uma relação de equivalência entre as duas grandezas (panquecas e crianças).

1	1	1	4
2	2	2	4
3	3	3	4

três panquecas quatro crianças

O que tu tens de fazer é só duplicar

seis panquecas oito crianças
12 panquecas 16 crianças

Figura 43 – Estratégia da Tiffany (adaptado de Fosnot & Dolk, 2002).

Outros alunos utilizaram os múltiplos e a razão. Por exemplo, Vicki diz que "O número de panquecas tem de ser um múltiplo de três. O número de crianças tem de ser um múltiplo de quatro." Por sua vez, Daniel e Ned apresentam as mesmas estratégias, mas enquanto o Daniel mantém a razão constante (três para quatro) e diz "ela continua sempre assim", Ned tem um discurso mais estruturado, referindo que "O número de panquecas cresce três, em cada quatro crianças" (Fosnot & Dolk, 2002). Utilizando a razão três para quatro, estes alunos conseguiram mostrar mais possibilidades de resposta do que as estratégias anteriores.

Tom e Elsa, por sua vez, encontraram uma forma de generalizar a resposta (Figura 44). Eles utilizaram a razão $\frac{3}{4}$ como um operador, tendo a Elsa escrito que "$\frac{3}{4}$ x, x é igual ao número de pessoas".

quatro crianças e três panquecas, porque se for quatro crianças temos $\frac{3}{4} \text{x} 4 = \frac{12}{4} = 3$

ou 24 panquecas e 32 crianças, 24 é $\frac{3}{4}$ de 32.

ou 96 panquecas e 128 crianças, porque 96 é $\frac{3}{4}$ de 128.

Muitas possibilidades, mas tem de haver uma proporção de três para quatro!

$\frac{3}{4}$ x   x → número de pessoas

Figura 44 – Estratégia do Tom e da Elsa (adaptado de Fosnot & Dolk, 2002).

> Esta estratégia permite descobrir quantas panquecas são necessárias para qualquer grupo de pessoas, por exemplo, $3\frac{3}{4}$ de panquecas para cinco pessoas. Ela pode-se generalizar ainda mais quando se percebe que a multiplicação cruzada mantém a razão constante, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ad = bc. (Fosnot & Dolk, 2002, p. 70)

A estratégia seguida por estes alunos vai além de uma simples concretização da situação. Aqui os alunos recorrem à fração $\frac{3}{4}$ utilizando-a como um operador, generalizando a situação, encontrando uma expressão geral "$\frac{3}{4}$x" em que o x é o número de pessoas. Neste momento, os alunos conseguem determinar a porção de panquecas que tem de existir para qualquer número de pessoas.

Esta secção tornou evidente que o leque de estratégias a que os alunos recorrem, no âmbito da concetualização da unidade, pode percorrer as quatro categorias de estratégias enunciadas anteriormente: estratégias gráficas (Figura 38 por exemplo), simbólicas (Figura 39, por exemplo), procedimentos de cálculo (método das unidade, Figura 41 e 44, por exemplo) e flexíveis (Figura 40, por exemplo).

3.4.5. Estratégias associadas à densidade e ao valor de posição

A densidade dos números racionais envolve o reconhecimento de, por exemplo, a existência de números racionais entre duas frações consecutivas, com o mesmo denominador. Por sua vez, o valor de posição dos números racionais envolve aspetos como a representação de números na linha numérica, a comparação e a ordenação de números racionais.

A representação dos números na linha numérica encontra-se associada ao significado de medida, que pode ser pensado como uma régua, onde o número racional representa determinado comprimento (Martinie, 2007). Este significado pode ainda envolver a identificação de uma unidade fixa de medida (um comprimento) que depois pode ser utilizada, repetidamente, para obter outra quantidade.

Neste contexto, Steffe e Olive (2010) mostram uma situação em que o aluno tem de encontrar a linha que é $\frac{1}{5}$ da linha azul escura. Foi apresentado a um aluno, Joe, quatro linhas de diferentes cores (Figura 45), tendo sido a professora que criou a linha azul escura.

Figura 45 – Linhas apresentadas ao Joe (adaptado de Steffe & Olive, 2010).

Depois de olhar para as quatro opções, o Joe escolheu a linha verde, uma vez que após ter copiado essa linha, iterou-a cinco vezes, tendo verificado que obtinha a linha azul escura (Steffe & Olive, 2010). Segundo os autores, "esta forma espontânea de verificar se a linha verde é $\frac{1}{5}$ da linha azul escura implica uma noção de fração interativa: um quinto de uma determinada quantidade é aquela que repetida cinco vezes vai gerar a quantidade dada" (p. 181).

Lamon (2006) solicita aos alunos, embora indiretamente, que localizem um determinado número numa linha, relativo à posição da tartaruga. Este problema requer a divisão sucessiva da linha até que uma marca se sobreponha ao ponto onde a tartaruga se encontra. De acordo com a autora, o objetivo desta atividade é fazer com que os alunos compreendam como as frações se relacionam entre si, em particular, onde elas se localizam relativamente ao meio ($\frac{1}{2}$) e à unidade. Uma aluna, Barb, ilustra a ideia de Lamon (2006), fazendo comentários à medida que vai efetuando as subdivisões (Figura 46). Segundo a autora, a tartaruga encontra-se a uma distância aproximada de 0,335 da origem da linha e Barb identifica um valor muito próximo deste (0,34375).

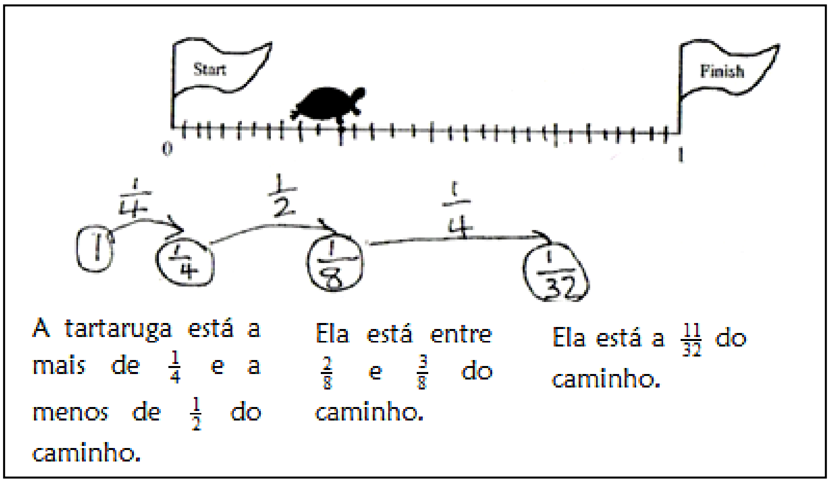


Figura 46 – Estratégia da Barb (adaptado de Lamon, 2006).

Na investigação de Yanik, Helding & Flores (2008), sobre as dificuldades dos alunos relativamente à compreensão da unidade associada ao significado de medida dos números racionais, utilizando a linha numérica, emergiram várias estratégias para a interpretação das frações como medidas. Os autores facultaram aos alunos uma linha numérica com a identificação do valor zero e do cinco, e solicitaram-lhes que identificassem uma determinada fração. Perante esta tarefa surgiram diferentes estratégias: **a)** "fazer metades sucessivas de toda a linha numérica[23]" (Figura 47); **b)** "fazer metades sucessivas de partes da linha numérica[24]" (Figura 48) e **c)** "iterar unidades" (Figura 49).

Quando foi pedido a Jéssica para localizar $\frac{3}{4}$, a aluna dividiu a linha numérica em duas metades e depois dividiu cada metade em duas outras metades para encontrar $1\frac{1}{4}$ (Yanik et al., 2008). Jéssica utilizou esta medida ($1\frac{1}{4}$) para localizar a posição do valor um, que posteriormente dividiu em quatro partes para encontrar a sua fração unitária ($\frac{1}{4}$) que iterada três vezes lhe permitiu encontrar a posição de $\frac{3}{4}$ (Yanik et al., 2008).

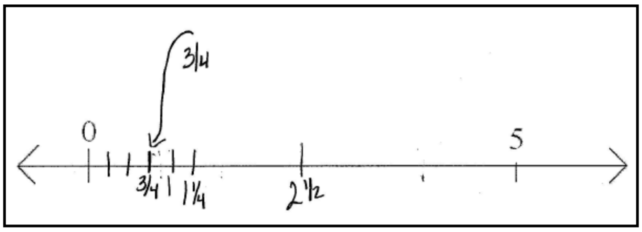


Figura 47 – Estratégia da Jéssica (Yanik et al., 2008).

Perante a mesma questão, o Carlos seguiu outra estratégia, tendo optado por dividir a linha em cinco partes iguais, encontrando unidades de "um" (um, dois, três e quatro). Depois subdividiu o primeiro espaço ao meio para encontrar $\frac{1}{2}$ e depois dividiu uma parte do que encontrou, novamente ao meio, para encontrar $\frac{3}{4}$ (Yanik et al., 2008).

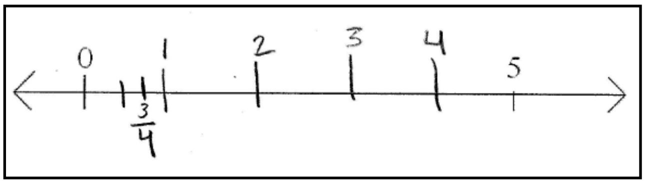


Figura 48 – Estratégia do Carlos (Yanik et al., 2008).

[23] *Repeated halving of entire number lines*, no original (Yanik et al., 2008).

[24] *Repeated halving pre-unitized number lines*, no original (Yanik et al., 2008).

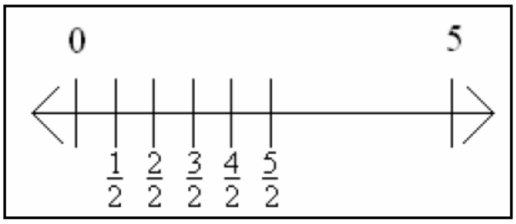


Figura 49 – Iteração de $\frac{1}{2}$ para encontrar $\frac{5}{2}$ (Yanik et al., 2008).

Diante a mesma linha numérica, sem qualquer marcação, foi proposto aos alunos que marcassem $\frac{5}{2}$ e os alunos, conseguiram reconhecer $\frac{1}{2}$ como a fração unitária da fração dada e depois de a localizarem na linha, iteraram-na cinco vezes para localizarem os $\frac{5}{2}$ na linha numérica (Yanik et al., 2008).

No âmbito da comparação e ordenação de números racionais, Fosnot e Dolk (2002) solicitam aos alunos que estudem a relação entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{8}$. Quando se fazem comparações entre frações, é importante ter bem presente a noção de que a unidade interessa, senão veja-se o caso da Tanya (Figura 50). Esta aluna dizia que $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$, no entanto, devido ao facto das barras que a própria desenhou não terem o mesmo tamanho, acabou por concluir que $\frac{5}{8}$ superior a $\frac{2}{3}$ (Fosnot & Dolk, 2002).

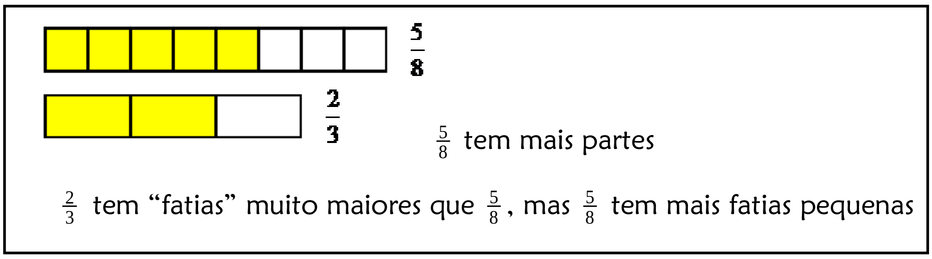


Figura 50 – Estratégia da Tanya (adaptado de Fosnot & Dolk, 2002).

Steve e Walter mostraram várias estratégias para provarem o seu raciocínio sobre qual das frações é maior, se $\frac{5}{8}$, se $\frac{2}{3}$. Enquanto Steve utiliza a linha numérica, frações equivalentes, as representações de fração e decimal (Figura 51), Walter utiliza grandezas contínuas e discretas, frações equivalentes, as representações sob a forma de fração, decimal e percentagem (Figura 52).

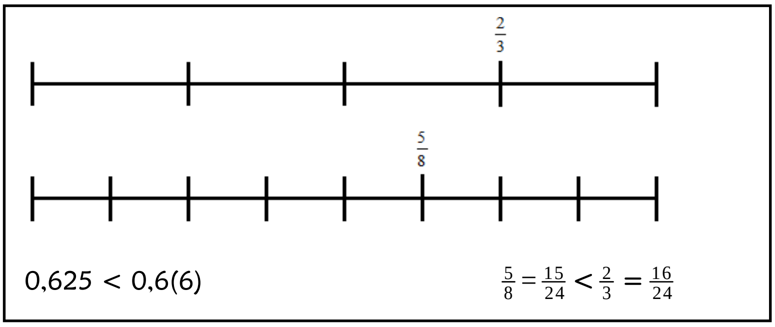


Figura 51 – Estratégia do Steve (adaptado de Fosnot & Dolk, 2002).

Uma das estratégias adotadas por estes alunos é representar as frações graficamente: o Steve por meio de uma reta e o Walter por meio de gráficos circulares. Steve utiliza um modelo linear, e consegue comparar as frações examinando aquela que se encontra mais à direita na linha. Por sua vez, Walter consegue comparar as duas frações recorrendo à comparação da porção ocupada por cada parte da unidade (Figura 52). Este aluno representa as frações com um gráfico circular (interpretando cada fração como unidades contínuas), com numerais decimais e percentagens. De acordo com Lamon (2006) este aluno revela uma boa compreensão da concetualização da unidade, uma vez que consegue interpretar uma fração através de quantidades discretas, conseguindo fazer um reagrupamento diferente da unidade.

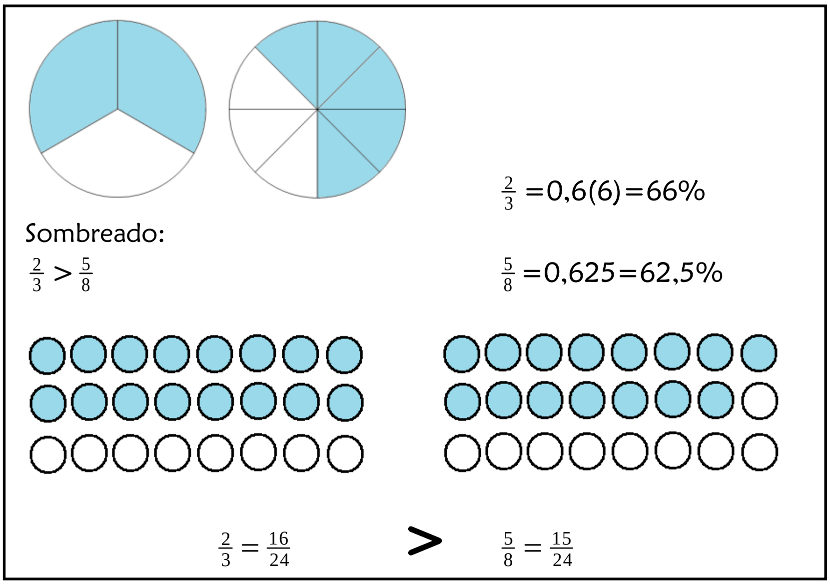


Figura 52 – Estratégia do Walter (adaptado de Fosnot & Dolk, 2002).

A comparação de dois números racionais, através da comparação das suas respetivas frações equivalentes, de acordo com Bezuk e Cramer (1989), não é comum entre os alunos do 5.º ano, sendo mais usual recorrerem à sua representação sob a forma decimal ou até mesmo à reta numérica. Neste âmbito, Behr et al (1984) ainda identificam a utilização de manipulativos, onde os alunos comparam frações através da representação pictórica das mesmas.

Para comparar frações os investigadores referem que, frequentemente, os alunos utilizam estratégias que são pouco prováveis que tenham sido especificamente ensinadas (Clarke & Roche, 2009): *pensamento residual* (Post & Cramer, 1987), *valores de referência*[25] (Clarke & Roche, 2009), *pensamento diferencial*[26] (Mitchell & Horne, 2011; Pearn & Stephens, 2004).

Numa situação onde se pretende que os alunos comparem $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{6}$, estes podem recorrer a uma estratégia intuitiva informal, designada por *pensamento residual*, onde a base para a comparação é a parte que falta em cada número para terem o todo (Clarke & Roche, 2009; Cramer & Wyberg, 2009). Deste modo, consideram que $\frac{2}{3} > \frac{3}{6}$, porque à primeira apenas lhe falta uma parte para a unidade, enquanto à segunda ainda lhe faltam três partes. A utilização de *valores de referência* envolve a comparação de duas frações com uma terceira fração de referência (Clarke & Roche, 2009). Ou seja, quando é pedido a um aluno que compare $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{7}$, o mesmo pode utilizar a fração $\frac{1}{2}$ como referência, dizendo que $\frac{5}{8} > \frac{3}{7}$ porque a primeira fração ($\frac{5}{8}$) é maior que $\frac{1}{2}$ e a segunda ($\frac{3}{7}$) é menor que $\frac{1}{2}$. De acordo com Clarke, Mitchell e Roche (2007), o *pensamento residual* e a utilização de *valores de referência* são duas estratégias utilizadas pelos alunos, que revelam compreensão conceitual sobre o tamanho das partes do todo.

Por outro lado, muitos alunos referem que $\frac{2}{3} = \frac{3}{4}$ porque em ambas as frações, lhes falta uma parte para o todo (Post et al., 1985). Esta forma de pensar tem sido observada em vários estudos (Clarke & Roche, 2009; Cramer & Wyberg, 2009; Mitchell & Horne, 2010; Pearn & Stephens, 2004), onde os alunos centram a sua atenção na diferença entre os denominadores e os numeradores (três e dois; quatro e três), e não consideram o tamanho real de cada parte (Clarke & Roche, 2009). Esta estratégia, designada por *pensamento diferencial* (Pearn & Stephens, 2004) é uma forma de pensar característica dos números naturais. Esta forma de pensar, embora errada, pode conduzir a respostas corretas, sendo por isso fundamental que o aluno explique o seu raciocínio, para que o professor possa perceber se o aluno está a pensar corretamente. Por exemplo, quando se pede aos alunos para compararem $\frac{4}{5}$ e $\frac{4}{7}$, o *pensamento diferencial* permite que os alunos deem uma resposta correta, dizendo que $\frac{4}{5} > \frac{4}{7}$, seguindo um raciocínio errado (Mitchell & Horne, 2011). Isto é, os alunos referem que $\frac{4}{5}$ é maior porque a diferença de um (4–5) é menor que a diferença de três (4–7).

[25] *Benchmarking*, no original.
[26] *Gap thinking*, no original.

Reconhecer a existência de números entre dois racionais é fundamental para uma boa compreensão do significado de medida dos números racionais (Martinie, 2007). No estudo da autora, menos de 25% dos alunos reconhece a existência de uma infinidade de frações entre duas frações. Perante a questão "Existem frações entre $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$? Quantas?" (p. 217), apenas um aluno respondeu "sim, existem algumas se não utilizarmos o mesmo denominador" (p. 154), tendo havido outro a responder que havia uma ($\frac{7}{10}$). De acordo com a autora, "parece que este aluno foi capaz de utilizar uma representação equivalente a $\frac{3}{5}$ e a $\frac{4}{5}$, convertendo-as em $\frac{6}{10}$ e $\frac{8}{10}$, no entanto parece que as representações equivalentes deste aluno se limitam aos décimos" (p. 154). Os resultados do estudo de Martinie (2007) indicam que os alunos não compreendem a densidade dos números racionais, o que tem um impacto negativo na sua compreensão do significado de medida dos números racionais.

Todas as situações evidenciadas neste ponto permitem-nos verificar que sempre que os alunos se encontram perante uma tarefa que envolve a densidade e o valor de posição, podem recorrer a várias estratégias (Quadro 6).

<table>
<tr><th colspan="2">Noções envolvidas</th><th>Estratégias</th></tr>
<tr><td rowspan="10">Valor de Posição</td><td rowspan="3">Representação de números racionais na linha numérica</td><td>Fazer metades sucessivas de toda a linha</td></tr>
<tr><td>Fazer metades sucessivas de partes da linha</td></tr>
<tr><td>Iterar unidades</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Comparação e ordenação de números racionais</td><td>Denominador comum</td></tr>
<tr><td>Valores de referência</td></tr>
<tr><td>Manipulativos (representação pictórica)</td></tr>
<tr><td>Linha numérica</td></tr>
<tr><td>Pensamento residual</td></tr>
<tr><td>Pensamento diferencial</td></tr>
<tr><td>Representações equivalentes (fração, decimal e percentagem</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Densidade</td><td rowspan="2">Identificação de racionais entre dois racionais</td><td>Denominador comum</td></tr>
<tr><td>Representações equivalentes (fração, decimal e percentagem</td></tr>
</table>

Quadro 6 – *Síntese das estratégias de resolução de problemas que envolvam as noções de densidade e valor de posição.*

3.5. Dificuldades e erros dos alunos

No contexto escolar, o erro é, muitas vezes, considerado como algo que deve ser corrigido e, por isso, quando surge é de imediato acompanhado de uma correção e de uma conotação negativa para o aluno, sendo por isso interpretado por ele como algo a evitar (Paias, 2009; Vale, 2010). Contudo, os erros são inerentes à aprendizagem e fornecem informação sobre a compreensão e conhecimentos dos alunos, pelo que devem ser considerados como ferramentas importantes para "diagnosticar e identificar as dificuldades e obstáculos [para que sejam delineadas estratégias] que favoreçam o desenvolvimento cognitivo do aluno" (Souza, 2002, p. 8). Deste modo, o professor deve estar atento aos erros que os alunos cometem, fazer uma reflexão de modo a compreendê-los, para poder intervir no sentido de ajudar os alunos a ultrapassar as suas dificuldades (Dullius, Furlanetto & Quartieri, 2009).

3.5.1. Dificuldades

Diante da complexidade que caracteriza o ensino do conceito de número racional, bem como as dificuldades que lhes estão associadas, torna-se relevante compreender a natureza das dificuldades que as crianças apresentam. Estas têm sido objeto de várias investigações, que têm identificado alguns fatores que podem estar na sua origem. É um fato que as frações são utilizadas com pouca regularidade no dia-a-dia (Hasemann, 1981 – citado por Keijzer, 2003), o que leva os alunos a não estarem tão familiarizados com esta representação dos números racionais como estão com os números naturais. Como vimos, o conceito de número racional abarca também uma multiplicidade de significados dos números racionais, sendo por si só uma fonte de dificuldades (Monteiro & Costa, 1996). Além disso, a própria escrita das frações é relativamente complicada (Hasemann, 1981 – citado por Keijzer, 2003) e as regras que existem para o cálculo de racionais são mais complexas que as dos números naturais (Hasemann, 1981 - citado por Keijzer, 2003).

A investigação evidencia que os alunos manifestam grandes dificuldades na transição do conjunto dos números inteiros para as representações em forma de fração do conjunto dos racionais (Pinto, 2004), levando-os a utilizar, erradamente, os conhecimentos que têm dos números inteiros, nos números racionais (Oliveira, 1994; Pitkethly & Hunting, 1996). Também o fato de, ao longo do tempo, os programas de matemática dedicarem muito tempo ao ensino de procedimentos para se "manipular" os racionais e muito pouco tempo ao ensino do significado do conceito (Moss & Case, 1999), bem como a falta de experiências concretas necessárias para que o aluno construa o seu conhecimento (compreensão) concetual (Vanhille & Baroody, 2002), são outros aspetos que conduzem a uma série de obstáculos. Além disso, muitas vezes os professores não têm em conta as tentativas espontâneas dos alunos para darem sentido aos números racionais, uma vez que se o resultado não é o esperado, não procuram perceber o que está por detrás daquela resposta (Moss & Case, 1999).

Muitas vezes as dificuldades dos alunos decorrem também do fato de não estarem familiarizados com o raciocínio multiplicativo necessário para a compreensão das frações (Vanhille & Baroody, 2002), bem como da noção de equivalência. Por exemplo, os alunos que não compreendam a noção de equivalência têm dificuldade em resolver em situações em que a subdivisão da unidade não iguala o denominador da fração com que têm que trabalhar (Behr et al., 1983). De facto, é mais fácil para os alunos resolverem situações em que as subdivisões da unidade são diretamente percetíveis no desenho, do que aquelas em que "as subdivisões da unidade são fatores ou múltiplos do denominador da fração" (Behr et al., 1983, p. 118).

Oliveira (1994) procurou investigar o pensamento dos alunos quando estes resolvem situações ligadas à matemática, em particular aos números racionais (noção de fração, noção de unidade, a adição e a noção de equivalência de frações). Como conclusão deste estudo, a autora enumera quatro dificuldades principais na apropriação do conceito do número racional: **a)** transferência das conceções dos números inteiros para os números racionais; **b)** incompreensão da relação parte todo; **c)** o não reconhecimento da unidade de referência; e **d)** não ter em conta o sentido da covariação.

Além disso, os alunos têm grandes dificuldades em identificar a unidade na linha numérica (Behr et al., 1983) e, consequentemente, em ordenar frações nesse modelo (Hasemann, 1981 – citado por Keijzer, 2003).

Outra dificuldade na aprendizagem dos racionais está relacionada com a concetualização da unidade (Behr et al., 1992; Monteiro & Costa, 1996). Por exemplo, na seguinte questão: "A Sofia deu $\frac{1}{2}$ dos seus rebuçados à sua irmã e o João deu também à sua irmã $\frac{1}{4}$ dos seus rebuçados. Quem deu mais rebuçados?". Os alunos muitas vezes comparam as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, sem terem atenção à unidade de referência, que pode não ser a mesma. (Monteiro & Costa, 1996).

Ainda no âmbito dos números racionais, mas relativamente à representação sob a forma de percentagem, Parker e Leinhardt (1995) apontam como um dos motivos da dificuldade de ensinar e aprender percentagens, o facto destas, normalmente, se fixarem na relação parte todo e em percentagens de referência. Uma vez que a percentagem está associada a uma relação, esta torna-se de difícil compreensão para os alunos que tendem a compará-las sem ter em conta uma referência (van Den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Uma outra razão apontada para as dificuldades na aprendizagem dos números racionais é a utilização precoce das regras que muitas vezes não são compreendidas (Monteiro & Costa, 1996), mas sim memorizadas. Este é um fator que prejudica a compreensão dos números racionais, uma vez que os alunos não reconhecem a ligação entre o seu conhecimento dos números e os respetivos algoritmos (Monteiro & Costa, 1996).

3.5.2. Erros

Enquanto as dificuldades são obstáculos à compreensão de determinados conceitos, os erros são respostas incorretas (cujas origens podem ser diversas) que devem ser encaradas de uma "forma natural como pontos de partida para novas aprendizagens" (ME, 2007, p. 12), pois facultam informações valiosas sobre o pensamento das crianças e jovens.

Investigação sobre o pensamento das crianças sobre frações tem documentado erros persistentes (Behr et al., 1984; Ni & Zhou, 2005). Desde muito cedo é explicado aos alunos que, numa sequência numérica, o número consequente é sempre maior que o antecedente, não sendo por isso de estranhar que quando lhes é pedido para ordenarem frações, o façam em termos do tamanho do denominador, reportando-se aos números inteiros. Por exemplo, quando é pedido às crianças pequenas que comparem $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ a resposta mais frequente é "$\frac{1}{2}$ é menor que $\frac{1}{4}$ porque dois é menor que quatro" (Empson, 1999). De acordo com Post, Behr e Lesh (1986), os alunos não compreendem que o valor de uma fração é definido pela relação entre o numerador e o denominado, uma vez que olham para o valor absoluto dos respetivos termos de cada fração, de forma independente. Existe uma generalização do conhecimento dos números inteiros para os números racionais, em que os alunos encaram uma fração como dois números inteiros (Lamon, 2006).

Esta generalização incorreta, mas bastante comum, leva os alunos a cometer vários erros quando trabalham com os números racionais: **a)** interpretar a divisão como um modelo partitivo – o divisor deve ser um número inteiro e o divisor e o quociente devem ser mais pequenos que o dividendo (Tirosh, 2000); **b)** inverter os termos da fração antes de multiplicar frações (Ashlock, 1990; Barash & Klein, 1996 – citados por Tirosh, 2000) e/ou **c)** referirem que não existe nenhum número racional entre 0,1 e 0,2; **d)** confundirem as décimas com as centésimas (não distinguem 2,5 e 2,05); e **e)** confundirem o número de algarismos com a grandeza (1,345 é maior que 1,5 porque tem mais algarismos) (Monteiro & Pinto, 2007). Também é comum os alunos estabelecerem uma equivalência errada entre uma fração e um decimal, separando o numerador do denominador com uma vírgula, considerando deste modo que 1,2 é um meio (Carvalho, 2005).

Estes erros podem ser agravados se a abordagem às frações utilizar os modelos parte-todo apenas como significado primário das frações (Kieren, 1988) e pelo uso prematuro dos símbolos das frações (Mack, 1990). Facultar aos alunos diferentes modelos que os podem auxiliar no seu raciocínio e dar atenção à forma como os significados dos racionais e as suas representações são abordadas, poderá resultar de diferentes formas para a compreensão e ajudar a minorar os erros mais comuns (Mack, 2001).

O treino em atividades rotineiras e a excessiva hierarquização das etapas de aprendizagem ou níveis de dificuldade das operações, pode ter um efeito negativo e indesejado, levando o aluno a fazer generalizações e a criar regras com base em casos particulares que não são generalizáveis (David & Machado, 1996). Este tipo de atividades apenas leva à mecanização de procedimentos e não à compreensão do conceito que lhes está subjacente.

Quando os alunos simplesmente aplicam regras memorizadas, e mecanizam procedimentos, como acontece nas operações com frações, podem ter tendência a interpretar a fração como dois números distintos (o numerador e o denominador) e como consequência, adicionam os numeradores e os denominadores (Behr et al. 1984; Cramer & Wyberg, 2009; Cruz & Spinillo, 2004; Empson, 1999).

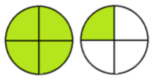
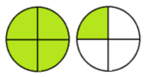
De acordo com o estudo de Cruz e Spinillo (2004), as crianças por vezes adicionam conjuntamente todos os números contidos numa fração, resultando um número natural:

> Operação $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$
> C: Vinte (escreve 20 no papel).
> E: Como você fez?
> C: Porque 4 + 1 dá 5. E 5 + 5 dá 10. Mais 5, dá 15. E mais 5, dá 20. (soma o numerador e o denominador da primeira parcela, chega a um resultado, procedendo desta mesma forma em relação às demais parcelas, contando, então, de 5 em 5). (Cruz & Spinillo, 2004, p. 15)

Os erros que os alunos cometem nem sempre se devem à generalização que fazem dos conhecimentos que têm dos números inteiros, podendo estes surgir pelo facto de não conseguirem identificar a unidade. Por exemplo, no estudo de Mack (1990), uma aluna, perante dois gráficos circulares, ambos divididos em quatro partes iguais, estando sombreadas no total cinco partes, numa primeira resposta referiu que a parte sombreada correspondia a $\frac{5}{8}$, evidenciando que identificou a unidade como sendo o conjunto dos dois gráficos. Tomando este mesmo exemplo, por vezes os alunos também podem referir que a parte sombreada corresponde a $\frac{5}{3}$ o que evidencia a relação entre as duas partes, a pintada e a não pintada (Monteiro & Pinto, 2005).

Quando os alunos trabalham com outra representação dos números racionais, mais especificamente a percentagem, de acordo com Parker e Leinhardt (1995) é comum os mesmos cometerem três tipos de erros: **a)** ignorar o símbolo da percentagem – o aluno não distingue 10 de 10%; **b)** regra do numerador – o aluno substitui o símbolo "%" por uma vírgula à esquerda do número, o que o faz admitir que 50%=0,5 e que 120%=0,120 e o **c)** algoritmo aleatório – os alunos referem que 8=4% de 32, determinando o quatro através da divisão de 32 por oito. Para evitar este tipo de erros, Lembke e Reys (1994) referem, entre outros aspetos, que o ensino deve preconizar a representação pictórica da percentagem, as percentagens de referência e a conversão entre frações, decimais e percentagens.

Em suma, os erros que as crianças comentem quando operam com frações podem ser organizados em dois grupos principais: erros baseados no algoritmo e/ou erros baseados nos seus conhecimentos prévios sejam eles informais ou não, devido a conceções limitadas da noção de fração e um conhecimento inadequado relativamente às operações (Quadro 7).

Tipo de Erro	Exemplo
Adicionar numeradores e denominadores (Empson, 1999; Behr et al. 1984; Cruz & Spinillo, 2004).	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=9$ (adiciona de forma conjunta todos os números).
	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=36$ (adiciona de forma separada os numeradores e denominadores, originando um n.º inteiro).
	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ (adiciona de forma separada os numeradores e denominadores, originando uma fração).
Identificar a unidade incorretamente (Mack, 1990).	 Corresponde a $\frac{5}{8}$.
Identificar a relação parte-parte e não a relação parte-todo (Monteiro & Pinto, 2005).	 Corresponde a $\frac{5}{3}$.
Admitir que uma fração passa para decimal, juntando o numerador e o denominador e colocando uma vírgula a separá-los (Carvalho, 2005).	$\frac{1}{2}$ = 1,2 $\frac{5}{3}$ =5,3
Comparar e ordenar frações em termos do tamanho dos termos da fração (Epson, 1999).	$\frac{1}{2}$ é menor que $\frac{1}{4}$ porque 2 é menor que 4.
O divisor (d) tem de ser inteiro, e o divisor e quociente (q) tem de ser inferior ao dividendo (D) (Tirosh, 2000).	- 2:0,5=4, não é possível, porque o d não é inteiro e porque o q > D. - 0,5:2=0,25, não é possível porque o d < D.

Inverter os termos de uma fração antes de multiplicar (Ashlock, 1990; Barash & Klein, 1996 – citados por Tirosh, 2000).	$\frac{1}{2} \text{x} \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \text{x} \frac{4}{3}$
Não reconhecer a existência de um racional entre dois racionais (Monteiro & Pinto, 2007).	- Entre 0,1 e 0,2 não existe nenhum racional. - Entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ não existe nenhum racional.
Confundir as décimas com as centésimas (Monteiro & Pinto, 2007).	2,5 = 2,05.
Confundir o número de algarismos com a grandeza do número (Monteiro & Pinto, 2007).	1,345 é maior que 1,5 porque tem mais algarismos.
Ignorar o símbolo da percentagem (Parker & Leinhardt, 1995).	10 = 10%
Regra do numerador (Parker & Leinhardt, 1995).	50% = 0,5 120% = 0,120
Algoritmo aleatório (Parker & Leinhardt, 1995).	8 = ? % de 32 → 32:8

Quadro 7 – Síntese de alguns erros que os alunos podem cometer quando trabalham com os números racionais.

CAPÍTULO IV

METODOLOGIA

Este estudo tem como ponto de partida a realização de uma experiência de ensino com uma turma do 5.º ano, promovendo as conexões entre as várias representações dos números racionais, e tem como objetivo compreender o modo como os alunos evoluem na aprendizagem do conceito de número racional.

Neste capítulo começo por caracterizar as principais opções metodológicas seguidas, de acordo com os objetivos do estudo. Posteriormente faço uma apresentação da turma onde se desenvolveu a experiência de ensino, bem como os alunos que constituem o grupo estudo de caso, referindo os critérios que levaram à sua seleção.

De seguida, descrevo os métodos de recolha de dados, assumindo a observação participante como o principal método neste estudo, sendo complementado com outros, tais como a recolha documental e a entrevista.

Posteriormente, neste capítulo, surge ainda uma secção dedicada ao processo de análise dos dados, onde apresento e discuto as estratégias utilizadas nesta fase da investigação.

4.1. Opções metodológicas

Os estudos na área da educação são complexos e de abordagem delicada, exigindo caminhos metodológicos diversos, devendo-se, por isso, antes de tomar qualquer opção, clarificar qual é o problema ou finalidade da investigação (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003). Uma vez que se pretendia, com esta investigação, estudar a evolução da aprendizagem do conceito de número racional, no que diz respeito à compreensão das suas várias representações e ao modo como os alunos as relacionam, optei por realizar uma experiência de ensino (Cobb, Stephan, McClain & Gravemeijer, 2001; Cobb et al., 2003; Steffe & Thompson, 2000) que foi implementada na sala de aula, dado que esta abordagem não é habitual no contexto nacional. Esta experiência de ensino baseia-se numa conjetura de ensino e aprendizagem (Lesh & Kelly, 2000) que se encontra explicada no capítulo seguinte. Tendo em conta as suas caraterísticas, a experiência de ensino insere-se numa metodologia de investigação designada por *design research*[27] (Bereiter, 2002), de natureza principalmente qualitativa, que tem vindo a ser utilizada na Educação Matemática, com o objetivo de estudar o processo de ensino e aprendizagem (Confey, 2006; Molina, 2006; Swayer, 2006).

4.1.1. Conceções influentes no desenvolvimento do *Design Research*

Os estudos desenvolvidos no âmbito deste tipo de metodologia têm, segundo Confrey (2006), um interesse continuado na compreensão de como as crianças pensam, independentemente de serem influenciados por pensadores como Piaget, Vygotsky ou Dewey, uma vez que assumem que é "na formação do pensamento dos alunos que se encontra a génese do processo que pode ser a chave para a caracterização da aprendizagem" (p. 137).

A influência de Piaget neste tipo de metodologia reside na introdução de três ideias que requerem uma nova metodologia, nomeadamente o método clínico, que tem influenciado de uma forma significativa os estudos no âmbito do *design research* (Confrey, 2006). As três ideias podem ser sintetizadas da seguinte forma: **a)** o que a criança e os adultos veem não está em sintonia; **b)** o processo através do qual a criança adquire proficiência cognitiva exige que a sua compreensão se vá aperfeiçoando, de forma progressiva, por meio de uma série de tarefas que conduzem a mudanças concetuais, envolvendo coordenação entre o processo de assimilação e de acomodação; **c)** para que a criança torne as suas ideias exequíveis, tem de as avaliar quanto à sua viabilidade, utilidade e durabilidade por meio de um processo de abstração reflexiva. Estas ideias, em conjunto com o facto de que o conhecimento das crianças envolve as suas interações com o meio exterior, conduziram ao método clínico, enquanto metodologia empírica, que depende da observação direta e ajuda a compreender o conhecimento detido pelas crianças (Confrey, 2006).

Também os trabalhos de Vygotsky têm influenciado a metodologia de *design research*, pelo destaque atribuído ao papel dos indivíduos em ambientes socioculturais. Para Vygotsky as atividades culturais são a primeira fonte do conhecimento e são estas que o moldam. De acordo com Confrey (2006), uma das influências de Vygotsky neste tipo de metodologia liga-se, por um lado, com a atenção dada à seleção das unidades de análise e à análise das relações entre o conhecimento informal e científico. Por outro lado, apesar de Vygotsky ter estudado o desenvolvimento concetual por meio de entrevistas, reconheceu

[27] Este tipo de investigação também pode ser designada por *investigación de diseño* (Molina, 2006), que pode ser traduzida como "investigação de desenho", contudo vamos continuar a utilizar o termo em inglês (*design research*), por ainda não existir um termo em português que lhe seja correspondente.

que eram necessárias novas metodologias para analisar conceitos pormenorizadamente, sendo a oralidade fundamental (Confrey, 2006).

Dewey é outro autor que Confrey (2006) identifica como sendo influente no desenvolvimento recente da metodologia de *design research*. Este autor defendia que uma teoria só é válida quando é testada experimentalmente e conduz a resultados, sendo que os seus argumentos devem ser válidos para várias situações, ao longo do tempo, tornando esses resultados mais estáveis. No entanto, Dewey argumentava que os resultados obtidos através da experimentação de uma hipótese são apenas um conjunto possível (Confrey, 2006).

Em suma, as ideias de Piaget, Vygotsky e Dewey fornecem os fundamentos teóricos para recorrer ao *design research* como um paradigma metodológico que leva à produção de teorias que orientam o ensino (Confrey, 2006).

4.1.2. *Design Research*

A abordagem de *design research* surgiu para tentar dar resposta a várias questões centradas no estudo da aprendizagem, nomeadamente, a partir da necessidade de: abordar questões teóricas sobre a natureza da aprendizagem em contexto; de estudar a aprendizagem no mundo real e não no laboratório, e de testar e refinar práticas educativas baseadas em princípios teóricos de investigações prévias (Collins et al., 2004). Apesar de o *design research* constituir uma boa ferramenta para dar resposta a estas necessidades, a generalização dos seus resultados é arriscada, pois cada turma, cada aluno, tem as suas particularidades e o que resulta com uns pode não resultar com outros. Deste modo, esta abordagem acarreta vários desafios relacionados com a

> complexidade de situações do mundo real e a sua resistência deste ao controle experimental; a grande quantidade de dados que resultam da necessidade de combinar análise etnográfica e quantitativa; a comparação com outros projetos. (Collins et al., 2004, p. 16)

De acordo com Collins et al. (2004), o termo *design research* é a evolução do termo *design experiment*, surgido no início dos anos 90, cujo intuito era aperfeiçoar projetos educativos, tendo por base pressupostos teóricos. Segundo Cobb et al. (2003) o *design experiment* tem como finalidade compreender, de forma minuciosa, um sistema complexo e interativo que envolve vários aspetos, tais como: **a)** as tarefas propostas aos alunos; **b)** os tipos de discurso que surgem; **c)** as regras de participação estipuladas; **d)** os materiais utilizados, e **c)** as práticas do professor. Por sua vez, o *design research* tem como objetivo desenvolver uma teoria sobre o modo como se processa a aprendizagem dos alunos sobre determinado conteúdo matemático, assim como as atividades que suportam essa aprendizagem e que promovem as mudanças no pensamento dos alunos (Gravemeijer & van Eerde, 2009).

Apesar do *design experiment* e o *design research* não designarem o mesmo tipo de investigação, de acordo com Cobb et al. (2003), eles têm características em comum. O *design experiment* e o *design research* têm como objetivo desenvolver um conjunto de teorias que suportam o desenvolvimento de determinadas aprendizagens, pelo que pretendem investigar aspetos educativos inovadores, tendo, deste modo, uma natureza muito intervencionista (Cobb et al., 2003; diSessa & Cobb, 2004; van den Akker, Gravemeijer, McKenney & Nieveen, 2006). De acordo com Cobb et al. (2003) e Gravemeijer e Cobb (2006), um aspeto comum a estas investigações é que ambas assentam em três fases: a planificação da experiência, a sua implementação e a análise retrospetiva. Além disso, são reflexivas e prospetivas, uma vez que partem de conjeturas de que certas abordagens educativas levam a determinadas aprendizagens (Cobb et al., 2003). Uma outra característica comum ao *design experiment* e ao *design research* é o facto de serem investigações interativas na medida em que as conjeturas formuladas são testadas e quando refutadas, novas conjeturas são formuladas, com o objetivo que as teorias que resultam do processo tenham utilidade para o ensino (Cobb et al., 2003; diSessa & Cobb, 2004; van den Akker et al., 2006).

O *design research* tem também alguma proximidade com a investigação-ação, uma vez que estas abordagens partilham alguns fundamentos metodológicos (Anderson & Shattuck, 2012). No entanto, a investigação-ação é frequentemente realizada por um professor sozinho, não beneficiando, por isso, de um trabalho em equipa, que é uma característica destacada do *design research* (Anderson & Shattuck, 2012). Deste modo, há quem defenda a integração destes dois tipos de investigação, juntando uma componente de reflexão ao *design research* (Cole, Purao, Rossi & Sein, 2005), contudo, para Anderson e Shattuck (2012) essa reflexão está presente em todas as fases desta abordagem. De acordo com Barab e Squire (2004), o que diferencia o *design research* da investigação-ação, é que a primeira não atende apenas às necessidades locais, mas tenta também avançar com uma teoria que permite descobrir relações teóricas.

Este paradigma metodológico está muito presente na comunidade de aprendizagem das ciências, mas tem enfrentado alguns obstáculos dentro da comunidade científica mais ampla, existindo alguma resistência à introdução de uma nova abordagem metodológica no campo da investigação (Collins et al., 2004). Apesar de existirem inúmeras referências que evidenciam as vantagens do *design research*, também existem diversas críticas (Barab & Squire, 2004). Estes autores argumentam que o profundo envolvimento do investigador "na conceção, desenvolvimento e implementação de uma abordagem pedagógica" pode constituir um desafio garantir que as suas afirmações sejam "credíveis e de confiança" (p. 10).

De acordo com Anderson e Shattuck (2012), este desafio é, aliás, comum a muitas formas de investigação qualitativa, onde alguns defensores deste tipo de investigação argumentam, que, nestes casos, os próprios investigadores são "a melhor ferramenta da investigação" (p. 18). Apesar de terem surgido formas para minimizar este obstáculo, Anderson e Shattuck (2012) afirmam que "o envolvimento do investigador acrescenta tanto como retira validade à investigação" (p. 18).

Deste modo, o *design research* exige sabedoria para se seguir pela linha ténue entre a objetividade e a imparcialidade (Anderson & Shattuck, 2012), pois se, por um lado, uma boa pesquisa exige ceticismo, empenho e alheamento (Norris, 1997), também requer companheirismo, entusiasmo e disposição interventiva (Anderson & Shattuck, 2012). De acordo com Anderson e Shattuck (2012), esta flexibilidade para colocar em ação todas estas capacidades é não só um desafio como também uma característica que define um *design research* de qualidade. De acordo com Collins et al. (2004), todos os obstáculos referidos podem ser apaziguados se a comunidade científica aceitar este paradigma metodológico como uma mais-valia para o ensino, criando padrões que o tornem reconhecido e acessível a outros investigadores.

Tendo em conta que a abordagem de *design research* pretende "produzir uma forma diferente de conhecimento que envolve a criação e a melhoria dos meios de apoio à aprendizagem e entender como eles funcionam" (Cobb & Gravemeijer, 2008, p. 86), os investigadores preocupam-se em criar estratégias de ensino que melhorem a aprendizagem dos alunos mas não têm qualquer intenção de os avaliar de forma sumativa (Kelly, Baek, Lesh & Bannan-Ritland, 2008). Deste modo, tendo em conta as suas características, este tipo de investigação é extremamente importante para as reformas educacionais (Anderson & Shattuck, 2012). Por permitir melhorias na investigação educacional o *design research* é cada vez mais utilizado em contextos educativos (Anderson & Shattuck, 2012) e "tem-se mostrado útil em complexos ambientes de aprendizagem, onde a avaliação formativa desempenha um papel importante" (Anderson & Shattuck, 2012, p. 24). Deste modo, os produtos do *design research* raramente se podem reduzir a simples hipóteses que são testadas ou a questões que são respondidas, pois deste tipo de investigação muitas vezes resultam modelos ou ferramentas concetuais cujo sucesso depende da sua reutilização e utilidade (Lesh, Kelly & Yoon, 2008).

Apesar de muitos autores, encararem o *design research* como uma metodologia de investigação (Cobb et al., 2003; Gravemeijer & Cobb, 2006; Kelly, 2003), neste estudo, à semelhança de Mendes (2012), Molina (2006), e Molina, Castro e Castro (2007) este é encarado como um paradigma metodológico que envolve estudos do tipo experiências de ensino (Cobb et al., 2001; Cobb et al., 2003; Steffe & Thompson, 2000).

A presente investigação foi desenvolvida no âmbito deste paradigma metodológico, através de uma experiência de ensino, uma vez que estes estudos procuram

> documentar que recursos e conhecimentos prévios os alunos utilizam na resolução da tarefa, como interagem [com] o professor (…), que conceções surgem e quais são alteradas, que recursos são utilizados e como o ensino é realizado, através de uma análise do trabalho dos alunos, [que envolve] gravações vídeo e avaliações em sala de aula. (Confrey, 2006, pp. 135, 136)

Assim sendo, a experiência de ensino construída e levada à prática constituiu-se como um processo interativo que engloba uma sequência de tarefas, a sua aplicação na sala de aula, bem como um conjunto de métodos de recolha de dados que permite avaliar a eficácia das tarefas (Wheeldon, 2008) para a evolução na aprendizagem do conceito de número racional dos alunos da turma selecionada.

Neste tipo de estudo existe uma colaboração do investigador com o professor, em que ambos partilham a responsabilidade do ensino na sala de aula (Gravemeijer & Cobb, 2006; Schoenfeld, 2002; van den Akker et al., 2006). Deste modo, seguindo as ideias destes autores, considerei adequado optar por um trabalho de natureza colaborativa com uma professora, com a qual delineei uma experiência de ensino. Este tipo de trabalho, que permite a experimentação de práticas inovadoras e a partilha de experiências (Nunes & Ponte, 2011), tem vindo a ser defendido como uma prática que facilita o surgimento de um contexto favorável à investigação sobre os processos de aprendizagem. Efetivamente, uma vez que o investigador e o professor trabalham colaborativamente no planeamento das experiências de aprendizagem, observam, interpretam e refletem, em conjunto, sobre o desenvolvimento dos alunos (English, 2003) e "casos concretos da prática educativa" (Freebody, 2003, p. 81).

Contrariamente aos métodos da Psicologia, no *design research* estes não são fixos, sendo continuamente ajustados em função das aprendizagens dos alunos, pelo que Collins et al. (2004) sugerem que os investigadores documentem com detalhe as alterações significativas que são efetuadas na experiência de ensino de modo a conseguirem relatá-la e analisá-la da forma mais fidedigna possível. Deste modo, a identificação de dados que marcam a fase inicial e a fase final do processo são de extrema importância (Collins et al., 2004). Estes autores também advertem para o facto de que "qualquer avaliação de uma inovação educacional deve realizar uma avaliação quantitativa e qualitativa" (p. 39). Deste modo, seguindo esta sugestão, optei pela realização de um teste inicial e um teste final com entrevista, aplicados, respetivamente, antes e após a experiência de ensino, bem como uma análise quantitativa que permite ter uma perspetiva geral sobre a evolução dos alunos da turma que participou neste estudo.

4.1.3. Experiência de ensino

Os estudos realizados no âmbito do *design research* são investigações de práticas educativas, baseadas num conjunto de tarefas curriculares, cuidadosamente sequenciadas, cujo objetivo é estudar como um determinado conceito é aprendido pelos alunos, mediante as suas interações sob orientação do professor (Molina, 2006). Estes estudos têm um duplo objetivo, como foi referido, uma vez que visam aperfeiçoar a teoria e melhorar a prática (Collins, Joseph & Bielaczyc, 2004; Edelson, 2002). Uma das modalidades referidas são as experiências de ensino que podem assumir diversas formas: a testagem de hipóteses conjeturadas inicialmente (Steffe & Thompson, 2000); um estudo longitudinal que é desenhado de forma a tornar mais provável a observação de um determinado acontecimento (Lesh & Kelly, 2000); uma intervenção planeada e concretizada num contexto real, onde se vão recolher dados que demonstrem e expliquem a existência de acontecimentos importantes (Schoenfeld, 2002), ou uma forma de dar resposta à necessidade de investigar sobre práticas de ensino e aprendizagem, no contexto da Educação Matemática (Lesh & Kelly, 2000; Schoenfeld, 2002).

Deste modo, e de acordo com esta última visão, a experiência de ensino ajuda a criar e ampliar o conhecimento sobre o desenvolvimento de ambientes de aprendizagem inovadores (Baumgartner, Bell, Brophy, Hoadley, Hsi, Joseph, Orrill, Puntambekar, Sandoval & Tabak, 2003; Gravemeijer & Cobb, 2006). De acordo com Gravemeijer e Cobb (2006), o papel do educador matemático não se deve limitar à análise do ensino, invocando "recomendações negativas (...) do tipo: "Não faças isto, não faças aquilo" (p. 46), mas, principalmente, à criação de "ambientes de sala de aula mais produtivos (...) durante um período de tempo alargado" (p. 46), sendo nesta ótica que utilizo o termo "experiência de ensino" nesta investigação.

Este tipo de *design* pode ser avaliado através da sua capacidade de melhorar a prática educacional (Baumgartner et al., 2003), sendo considerado uma mais-valia: **a)** na exploração de possibilidades para criar novos ambientes de ensino e aprendizagem, onde se enquadram os esforços para projetar, usar e investigar sobre ferramentas e materiais educacionais em situações reais de forma a poder facilitar a adoção de inovações; **b)** no desenvolvimento de teorias de ensino e aprendizagem contextualizadas, baseadas na natureza da aprendizagem, através de intervenções na sala de aula e dos seus efeitos; **c)** na construção de um *design* cumulativo de conhecimento, podendo levar a uma compreensão de conhecimentos e práticas relevantes em situações naturalistas, ou seja, da experiência de ensino podem resultar, por meio das narrativas do que foi planeado e concretizado, exemplos comuns, padrões e conhecimento que se podem aplicar a outros contextos, e **d)** no desenvolvimento da capacidade de inovação educacional, uma vez que proporciona inúmeras oportunidades para o intercâmbio de conhecimentos. A necessidade de inovação no ensino é tão importante que se torna crucial o recurso a parcerias, onde ocorre partilha de experiências e de técnicas de análise. Estas parcerias têm implicações naturais no âmbito da investigação, uma vez que possibilitam uma aprendizagem dos participantes (incluindo o investigador) que podem encontrar novas experiências educativas, fazendo com que estas cheguem aos educadores, por exemplo, sob a forma de práticas de ensino.

Uma boa experiência de ensino deverá então possuir cinco características: **i)** os objetivos centrais da criação dos ambientes de aprendizagem e o desenvolvimento de teorias têm de estar interligados; **ii)** o desenvolvimento de ambientes de aprendizagem e a investigação constituem um ciclo contínuo de análise e de recriação; **iii)** deve conduzir a teorias que ajudem a esclarecer implicações relevantes para outros investigadores; **iv)** deve explicar como funciona em ambientes reais, ou seja, não deve apenas documentar os sucessos e insucessos mas também as interações, o que deve aperfeiçoar a compreensão sobre a aprendizagem das questões envolvidas no estudo, e **v)** o desenvolvimento de tais situações baseia-se em métodos que podem documentar e melhorar os processos de aprendizagem (Baumgartner et al., 2003).

Seguindo as ideias de vários autores (Baumgartner et al., 2003; Cobb et al., 2003; Gravemeijer & Cobb, 2006), esta experiência de ensino percorreu três fases: foi <u>planeada</u> como um todo de forma a criar um novo ambiente de ensino e aprendizagem, baseada na promoção de conexões entre as várias representações dos números racionais, no entanto foi sendo ajustada de acordo com os resultados da sua implementação. No fim, após a sua completa <u>experimentação</u>, ela foi <u>analisada</u> de uma forma retrospetiva.

A intenção da experiência de ensino desenvolvida na presente investigação é levar os alunos a progredir na sua aprendizagem do conceito de número racional, através de uma sequência de tarefas e simultaneamente analisar a aprendizagem proporcionada a toda a turma, a partir da qual é selecionado um grupo de alunos que se vai constituir como estudo de caso.

4.1.4. Estudo de caso coletivo

Como se pretende recolher dados em profundidade sobre a atividade dos alunos em sala de aula, decidi selecionar apenas um grupo de quatro alunos, que constituem o grupo estudo de caso. De facto, a construção de um estudo de caso permite uma análise intensiva e, em profundidade, de diversos aspetos de uma determinada situação que ocorre no seu ambiente real (Yin, 2004; Ponte, 2006), que no caso do presente estudo é a sala de aula. É nesta ótica que recorri à construção de um estudo de caso coletivo.

O estudo de caso é uma metodologia de investigação essencialmente qualitativa, adequada quando se pretende responder a questões de natureza descritiva e explicativa (como e porquê), tornando evidentes a sua unidade e identidades próprias (Merriam, 1988;

Ponte, 1994; Yin, 2003). São também adequados quando se pretende: **a)** estudar uma situação complexa onde não é possível separar as variáveis do fenómeno do seu contexto; **b)** descrever pormenorizadamente um fenómeno e o seu contexto; **c)** descobrir como se relacionam os fatores significativos que caracterizam um fenómeno ou entidade, e/ou **d)** compreender como se realiza um determinado processo (Merriam, 1988; Yin, 2003).

Uma investigação de cunho interpretativo pretende dar relevo à "interpretação em contexto" (Ludke & André, 1986), uma vez que para se compreender melhor alguns fenómenos estes não podem ser separados dos respetivos contextos. No presente estudo procurei investigar situações complexas inseridas num contexto real (aprendizagem no contexto sala de aula) que inclui múltiplos elementos (a tarefa em si, a interação entre os alunos, o papel da professora e o papel da investigadora) potencialmente importantes para a compreensão do fenómeno em causa.

Atendendo que o principal objetivo deste estudo se centra na compreensão de processos de aprendizagem, centrei-me numa situação específica, de forma a procurar "descobrir o que há nela de mais essencial e característico e assim contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse" (Ponte, 2006, p. 2). Ou seja, o estudo de caso deve ser produtivo, descritivo e interpretativo, para que acrescente algo de significativo ao conhecimento existente e seja, tanto quanto possível, esclarecedor.

De acordo com Stake (2007), os investigadores que realizam estudos deste tipo procuram não só um processo de aprendizagem acerca de um caso, mas também o resultado desse processo definido à priori pelo interesse num caso em particular. Segundo o próprio, os estudos de caso decorrem dos diferentes objetivos que o investigador tem em mente: **a)** *estudo de caso intrínseco* que é utilizado quando se quer compreender melhor um caso particular de grande interesse; **b)** *estudo de caso instrumental* que surge quando um caso particular é investigado para proporcionar *insight* numa questão ou refinamento da teoria – o caso tem um interesse secundário pois facilita a compreensão de outro fenómeno, ou seja, aqui o objetivo é mais do que conhecer a compreensão daquele caso em especial, pois a sua compreensão vai permitir compreender melhor outros casos, ou **c)** *estudo de caso coletivo*, que surge quando se pretende pesquisar melhor um fenómeno (estudo instrumental alargado a vários casos que podem ser semelhantes ou distintos). Opta-se por um caso ou por outro, principalmente, porque se sente "uma necessidade de compreensão global (…) que poderemos alcançar (…) se estudarmos um caso em particular" (Stake, 2007, p. 19).

Relativamente à sua intenção, os estudos de caso podem também ser: **a)** *exploratórios*, quando pretendem "retratar" o que se deseja estudar sem que haja uma preocupação analítica; **b)** *analíticos*, quando o objetivo é "teorizar", ou seja, quando se pretende analisar e dar um contributo acrescido para a teoria, ou **c)** *avaliativos*, quando se pretende "ajuizar", isto é, emitir um juízo avaliativo (Merriam, 1988).

Tendo por base as características definidas por Stake (2007), este estudo de caso insere-se no tipo de estudos de caso coletivos, uma vez que tem como objetivo principal analisar o percurso de aprendizagem de um grupo de quatro alunos. Trata-se de um estudo do tipo analítico (Merriam, 1988), uma vez que o seu objetivo é compreender melhor o fenómeno em estudo, no âmbito de uma experiência de ensino, e contribuir para a reflexão sobre a aprendizagem de números racionais e a prática profissional que lhe está associada.

4.2. Participantes

A escolha da professora e, consequentemente, da turma para este estudo não obedeceu a critérios de representatividade, pois a questão da generalização dos seus resultados não se coloca na investigação interpretativa. A seleção dos participantes teve em consideração o fácil acesso ao campo (Stake, 2007), neste caso, a escola da professora e respetiva turma, assim como as qualidades profissionais e disponibilidade da professora para colaborar na experiência de ensino.

De forma a observar a aprendizagem do conceito de número racional nos alunos de uma turma de 5.º ano, optei por acompanhá-los durante uma parte do ano letivo, pois é neste nível de ensino que se faz uma abordagem mais aprofundada do conceito de Número Racional. Para tal observei todas as aulas de Matemática do 5.º ano, aquando da implementação da experiência de ensino.

4.2.1. A professora Inês

A decisão de contactar a professora Inês, uma professora do 2.º ciclo do Ensino Básico, decorreu do conhecimento de que, por um lado, participava na experimentação do programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), o qual preconiza o desenvolvimento das conexões entre as várias representações dos números racionais, indo ao encontro dos objetivos desta investigação, e, por outro lado, tinha grande familiaridade com a investigação sobre a prática de sala de aula, o que poderia facilitar a sua concordância e disponibilidade para participar no estudo de forma empenhada.

No momento em que participou no estudo, Inês tinha 31 anos de experiência profissional, 23 dos quais na escola onde se realizou a experiência de ensino. A professora possui uma licenciatura em Economia, concluída em 1980, pelo Instituto Superior de Economia da Universidade Técnica de Lisboa, tendo-se profissionalizado, em exercício da sua função, no ano de 1985, para o magistério do 4.º grupo do 2.º ciclo do Ensino Básico (atual 230). No início dos anos 90, realizou um curso de especialização no ensino da Matemática na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Poucos anos depois, realizou o mestrado em Educação, na área de especialização de Didática da Matemática, na mesma instituição.

É uma professora que habitualmente participa em projetos de investigação e desenvolvimento curricular, acompanhando a evolução do ensino, e que se mostra sempre disponível para aprender e refletir sobre temáticas que visem a melhoria do seu desempenho enquanto professora e a qualidade das aprendizagens dos seus alunos. É sua prática letiva habitual a realização de tarefas de investigação com os alunos, as quais, na sua opinião, proporcionam uma experiência viva e gratificante – levando-os a aprender processos como generalizar, considerar casos particulares, simbolizar, comunicar, analisar, explorar, conjeturar e provar.

Tendo em consideração as suas características profissionais e o facto de lecionar, em 2008/2009, uma turma de 5.º ano, que se encontrava a fazer a pilotagem do programa de Matemática (ME, 2007), propus-lhe um trabalho conjunto no âmbito do estudo que pretendia desenvolver, convite que aceitou prontamente. Desde o princípio fui responsável pela elaboração das tarefas que integram a experiência de ensino, contudo todas elas foram negociadas e discutidas com Inês, pois a sua experiência profissional e o conhecimento da turma, era uma mais-valia para a criação, reformulação e adaptação destas aos seus alunos.

De acordo com Boavida e Ponte (2002), a colaboração professor-investigador não é um fim mas um meio para atingir determinado objetivo, neste caso, o desenvolvimento de uma investigação no contexto de uma experiência de ensino. Para a sua concretização, ficou acordado entre mim e a professora reunirmo-nos de modo a aperfeiçoar as tarefas a serem exploradas na aula de Matemática, e a refletir-mos, posteriormente, sobre essa exploração, os seus resultados e as dificuldades manifestadas pelos alunos. Esse trabalho decorreu de acordo com o calendário que se encontra no Anexo 1.

Um trabalho de colaboração, como o que foi desenvolvido no âmbito deste estudo, pode ocorrer entre "(…) atores com estatutos e papéis diferenciados, por exemplo, entre professores e investigadores (…)" (Boavida & Ponte, 2002, p. 4), permitindo, de acordo com os autores, uma reflexão e interpretação dos dados mais abrangente. Deste modo, uma vez que este estudo ocorre no contexto de uma experiência de ensino numa turma de 5.º ano, é importante definir e descrever a colaboração desenvolvida com a professora Inês, tal como se apresenta no capítulo cinco, referente à experiência de ensino.

4.2.2. A turma

A presente investigação desenvolve-se com uma turma do 2.º ciclo do Ensino Básico duma escola do Concelho de Sintra (Distrito de Lisboa), da qual Inês é professora de Matemática. Foram pedidas autorizações ao Conselho Executivo da escola (Anexo 2), assim como aos Encarregados de Educação dos alunos (Anexo 3), para participação dos alunos na investigação e consequente recolha de dados, através da observação participante da investigadora, de gravações áudio e vídeo, assim como dos documentos escritos pelos alunos. Nestas autorizações deixei explícita a salvaguarda do anonimato de todos os participantes, bem como a confidencialidade relativamente à informação recolhida, sendo por isso utilizados pseudónimos. A minha introdução na turma ocorreu numa aula no final do 1.º período, onde fui apresentada como alguém que estaria na sala para observar a forma como os alunos trabalhavam e para perceber quais as suas dificuldades enquanto realizavam uma sequência de tarefas sobre os Números Racionais.

A turma selecionada é constituída por 20 alunos (11 do género feminino e nove do género masculino), cujas idades variam entre os nove e os 11 anos. É de salientar que nesta turma existiam quatro alunos com Necessidades Educativas Especiais de Carácter Permanente, permanecendo, por esse motivo, mais uma professora na sala de aula para fazer o acompanhamento a este grupo de alunos. Deste modo, e uma vez que estes quatro alunos possuíam um currículo escolar próprio, onde o tema Números Racionais não é abordado da mesma forma, a professora Inês sugeriu que estes não fossem integrados na experiência de ensino e que trabalhassem nessas aulas sob a supervisão da outra professora. Assim sendo, a recolha de dados incidiu apenas sobre os restantes 16 elementos da turma.

Os alunos desta turma provêm de famílias com um nível de instrução elevado, uma vez que a maioria dos pais possui um curso superior. De um modo geral, os alunos são interessados e participativos, sendo incentivados constantemente pela professora Inês, a comunicar e a fundamentar as suas ideias, tanto oralmente como por escrito. Assim sendo, e uma vez que manifestam um grande envolvimento no trabalho desenvolvido na sala de aula, na sua maioria, os alunos da turma são bons informantes.

Na área da Matemática os alunos têm um desempenho bom (quatro alunos com nível quatro) e muito bom (três alunos com nível cinco), havendo nove alunos com um desempenho classificado como razoável, de acordo com as classificações obtidas no final do primeiro período. Destes nove alunos, segundo a professora, a maioria deles (seis) tem um desempenho razoável, no entanto, por vezes, revelam-se inseguros, precipitando-se nos momentos de avaliação (o que justifica o seu nível três). Este desempenho torna-se evidente na forma positiva como os alunos reagem ao tipo de trabalho que é habitual na sala de aula. Aquando da resolução de qualquer tarefa a professora habitualmente incentiva os alunos a explicar o seu raciocínio, prática que estes aceitam sem manifestar qualquer desagrado ou incómodo.

4.2.3. Seleção dos alunos

Com o objetivo de compreender alguns dos conhecimentos prévios dos alunos dos Números Racionais, efetuei um teste escrito à turma (Teste inicial – Anexo 4), incidindo sobre a representação de um número racional nas várias formas (fração, numeral decimal e percentagem) e a resolução de problemas simples envolvendo números racionais.

A partir dos resultados obtidos neste teste agrupei os alunos em três níveis (bom – A; médio – B e reduzido – C), de acordo com o seu desempenho. Para a definição destes níveis, analisei cada questão e convencionei uma pontuação para cada uma delas, de acordo com objetivos pré-definidos (Anexo 5). Posteriormente estipulei uma escala de acordo com a pontuação total que poderia ser obtida no teste inicial (A – 26 a 36 pontos; B – 15 a 25 pontos e C – 0 a 14 pontos).

A seleção dos quatro alunos a integrarem o grupo estudo de caso coletivo, obedeceu aos seguintes critérios: **a)** diversidade relativamente aos níveis obtidos no teste inicial; **b)** diversidade de género; **c)** diversidade dos níveis obtidos no final do 1.º período, tendo em conta que não se pretendia selecionar alunos, e **d)** selecionar alunos que potencialmente poderiam formar um grupo de trabalho em que houvesse boa capacidade de comunicação e argumentação, partilha de ideias e em que não se antevisse a existência de conflitos entre os seus elementos. Este último critério é fundamental pois, segundo Stake (2007), num estudo desta natureza, que decorre num tempo limitado, a seleção dos participantes deverá ter em conta a possibilidade de recolha de dados que permita compreender o problema em estudo.

Como o desempenho dos alunos no teste inicial foi não foi além do nível B, e como havia várias hipóteses de escolha, de acordo com os primeiros critérios, recorri ao quarto critério para decidir que alunos selecionar. Assim sendo, tendo em conta os alunos que, de acordo com a professora Inês, possuíam as características mencionadas no quarto critério, optei por selecionar um aluno com nível B e três alunos com nível C (Anexo 6). Este grupo de alunos pareceu dar garantias de que colaborariam na partilha de ideias, aquando da resolução das tarefas, e sem grandes conflitualidades. Deste modo a seleção dos alunos a integrarem o estudo de caso coletivo recaiu sobre:

- Cristiano, com nível C no teste inicial e nível três no final do 1.º período na disciplina de Matemática;

- Dinorah, com nível C no teste inicial e nível quatro no final do 1.º período na disciplina de Matemática;

- Mariana, com nível B no teste inicial e nível quatro no final do 1.º período na disciplina de Matemática;

- Aida, com nível C no teste inicial e nível cinco no final do 1.º período na disciplina de Matemática.

O grupo aceitou a composição que foi proposta pela professora e manteve-se estável até ao fim da experiência de ensino.

Para além da recolha de dados com este grupo, trabalhando no seu ambiente natural (sala de aula) na resolução de tarefas propostas, recolhi também alguns dados de toda turma, em particular do momento de discussão das tarefas, tal como é referido mais à frente.

4.3. Método de recolha de dados

Nesta experiência de ensino, para além do papel que assumi na elaboração das tarefas, em colaboração com a professora, recolhi dados em todas as aulas da EE, tendo sido o principal instrumento de recolha de dados. Sendo que a presente investigação é predominantemente qualitativa, os dados foram recolhidos a partir de um número alargado de fontes de informação, para que se pudesse tecer conclusões fidedignas, como defendem alguns autores (Cobb et al., 2001; Molina, Castro & Castro, 2007).

Deste modo, os principais métodos de recolha de dados foram a observação participante, complementada pelas gravações vídeo e áudio, bem como a recolha documental. Além disso também foram realizadas várias conversas informais entre mim e os alunos e uma entrevista aos mesmos que acompanhou o teste final (Quadro 8). As fontes de recolha de todos os dados são as aulas observadas durante a experiência de ensino, as reuniões com a professora Inês, e as produções dos alunos, onde é possível observar os processos e as estratégias utilizadas em cada tarefa proposta.

Método de Recolha	Fonte de Recolha	Momento
Recolha documental	Teste inicial	- Antes da Experiência de ensino.
	Produções dos alunos	- Resolução das tarefas propostas durante a experiência de ensino.
	Teste final	- Após a experiência de ensino.
Observação participante com gravação áudio e vídeo	Aulas Reuniões com Inês	- Todas as aulas decorridas durante a experiência de ensino.
Entrevista e conversas informais com gravação vídeo e/ou áudio	Alunos	- Durante a experiência de ensino (conversas informais). - Após a experiência de ensino, como complemento ao teste final.

Quadro 8 – Métodos de recolha de dados.

Estas fontes de dados facultaram-me um leque diversificado de informação que se constituiu como o *corpus* de dados para análise.

4.3.1. Observação participante

A observação ocupa um lugar destacado nas abordagens qualitativas, instituindo-se como uma ferramenta fundamental de trabalho que permite obter informação que normalmente não se encontra acessível por outros métodos (Creswell, 2003; Lichtman, 2006). Segundo estes autores, em conjunto com outras técnicas, esta permite que o investigador consiga ter um contacto pessoal e próximo com o fenómeno que está a investigar. Podendo assumir vários formatos, neste estudo foi privilegiada a observação participante em sala de aula, método integrante do *design research* (Molina, Castro & Castro, 2007), uma vez que, para além de ser a mais apropriada para estudar quase todos os aspetos da interação humana, permite documentar detalhadamente as estratégias e apontar para os processos cognitivos dos alunos quando resolvem tarefas matemáticas, assim como as dificuldades que enfrentam (Cobb et al., 2001; Lichtman, 2006).

A realização de um estudo qualitativo exige, por parte do investigador, que vá para o terreno com a predisposição para assumir que "nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 49).

Segundo Yin (2003) a observação participante é "um modo especial de observação na qual o investigador não é meramente um observador passivo" (p. 92), mas que tem um duplo papel, o de *inquiridor-ouvinte*. Este tipo de observação permite ao investigador "compreender a realidade do ponto de vista de alguém «que está dentro» do estudo de caso em vez de estar fora dele" (Yin, 2003, p. 94). O duplo papel de observador e participante, adotado nesta investigação, trata de combinar observação e participação de modo a que seja possível interpretar a situação como alguém que faz parte dela – *insider* – e de a descrever de forma reflexiva como alguém que está de fora – *outsider* (Eisenhart, 1988). Esta situação "esquizofrénica" (Merriam, 1988), muitas vezes é difícil de sustentar e pode expor o investigador a um conjunto de conflitos, uma vez que o mesmo deseja participar no contexto em estudo e ao mesmo tempo tem de se manter suficientemente desligado para observar e analisar (Matos & Carreira, 1994).

A postura inquiridora por parte do investigador é essencial, não só relativamente às questões que coloca aos participantes, mas também às que coloca a si mesmo no decorrer do estudo. O papel de inquiridor, no presente estudo, fazendo perguntas para clarificar os pormenores e registando todas as respostas que ajudem a esclarecer o raciocínio dos alunos, tornou-se fundamental para uma melhor compreensão das estratégias e dos procedimentos usados na realização das tarefas. No entanto, o papel principal do investigador neste contexto é o de ouvinte uma vez que este "tem como missão ouvir e ver em toda a parte" (Merriam, 1988, p. 40).

Neste âmbito, a professora Inês quando me apresentou à turma referiu que estaria ali para a auxiliar no apoio aos alunos sempre que fosse necessário e que a minha função não seria, em momento algum, avaliá-los ou julgá-los pelo que fizessem. Deste modo, os alunos poderiam ver-me como mais uma professora na sala de aula, a quem recorriam sempre que tivessem dúvidas nas tarefas propostas. Foi neste sentido que tentei seguir as características apontadas por Merriam (1988) relativamente ao que um investigador deve ser: *tolerante* (ter consciência que o procedimento correto nem sempre será óbvio e de que pode ter de mudar de direção devido a acontecimentos inesperados, e deve ser discreto); *sensível* relativamente à informação recolhida, aos *timings* da investigação, ao contexto, aos dados e estar consciente da sua interferência na investigação; e um bom *comunicador* (atento), colocando boas questões e estabelecendo alguma empatia com os participantes.

Segundo Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (1990) a observação participante permite a opção entre dois tipos de dados: os dados registados nas "notas de campo" e aqueles que o investigador regista nos seus "diários de bordo". As notas de campo incluem: descrições verbais do ambiente, das pessoas envolvidas, citações diretas e comentários do observador efetuados na sala de aula. Estas podem incluir os sentimentos do investigador, reações, intuições, interpretações iniciais, etc. (Merriam, 1988). Os "diários de bordo" são documentos pessoais onde constam as reflexões do investigador sobre as situações que observou na sala de aula (Zabalza, 1994).

De acordo com este autor pode-se distinguir três tipos de diários: **a)** como *organizador estrutural da aula*, onde se especifica o horário ou a organização e sequência das atividades a realizar; **b)** como *expressão das características dos alunos e dos professores*, que descrevem as características dos alunos e dos professores (o que sentem, como vão progredindo), onde o fator pessoal predomina sobre o fator tarefa, e **d)** como *descrição das tarefas*, onde o foco da atenção se centra nas tarefas que são realizadas, ou seja, estas são descritas minuciosamente. Segundo o autor, "estes três tipos de diários não se excluem mutuamente" (p. 111). É nesta ótica que utilizei os "diários de bordo", onde efetuei reflexões, com base nas "notas de campo", sobre o desenvolvimento das tarefas na sala de aula, assim como as reações e interações dos participantes.

Já Evertson e Green (1986) afirmam que a observação participante pode ser mais ativa ou mais passiva consoante o nível de envolvimento do observador em relação aos acontecimentos e aos pontos de vista dos indivíduos. Na sua forma mais ativa, o observador deve registar os seus dados após a observação. Ao invés, na sua forma mais passiva, esse registo pode ocorrer durante a mesma. Tendo em conta os objetivos deste estudo, adotei as duas formas, a mais ativa, onde, após a observação das aulas, realizei registos tipo "diários de bordo" (relatórios) e a mais passiva, onde registei todo o trabalho desenvolvido pelos alunos durante a sua atividade matemática – "notas de campo".

O método de registo dos dados pode ser diversificado e, segundo Merriam (1988), há três formas principais de registar os dados, sendo o método mais comum fazer uma gravação áudio e/ou vídeo, uma vez que se assegura que tudo o que foi dito é preservado, sendo que o último pode registar os comportamentos não-verbais. Finalmente também se podem registar os dados através da tomada de notas. Este método pode ser pouco fiável, uma vez que depende da capacidade de memória e de escrita, que pode ser perturbada por vários fatores e conduzir a eventuais enviesamentos (Yin, 2003). No sentido de minimizar estes aspetos negativos e considerando que, durante as aulas é impossível tirar notas detalhadas de todas as ocorrências e acontecimentos relevantes, e de forma a complementar as reflexões relativas à recolha documental dos registos dos alunos, todas as aulas foram áudio e vídeo gravadas. Estas gravações tornaram-se significativamente importantes, uma vez que permitiram registar determinados comportamentos e comentários dos alunos ao longo da realização de cada tarefa (interações que ocorrem na sala de aula) e serviram para complementar as notas de campo (Confrey & Lachance, 2000).

Deste modo todos estes instrumentos de recolha são essenciais, uma vez que complementam, clarificam e ajudam a análise dos dados recolhidos por observação (notas de campo, diários de bordo e registos escritos). Foi neste sentido que, no decurso do trabalho dos alunos na experiência de ensino, observei as aulas (Anexo 8) e acompanhei, mais de perto, o grupo selecionado para o estudo de caso coletivo, de modo a conseguir obter o máximo de informação relevante para a investigação. Para tal efetuei notas escritas dos aspetos mais relevantes do seu trabalho na resolução das tarefas e da informação recolhida nas conversas informais com os alunos (notas de campo).

Neste estudo, todas as aulas da experiência de ensino foram gravadas em vídeo e transcritas de imediato. De salientar ainda que existia um gravador na mesa do grupo constituído como estudo de caso, para garantir a recolha de dados relativos ao conteúdo das discussões dentro do grupo e de eventuais comentários que os alunos pudessem fazer relativamente às tarefas matemáticas que realizavam.

Apesar das desvantagens da utilização destes instrumentos associadas à presença pouco comum de material tecnológico na sala de aula (Merriam, 1988), considerei que teria ganhos para a investigação a sua utilização. De forma a minorar estas desvantagens e a facilitar a minha integração na sala de aula, estive presente em algumas aulas antes do início do estudo, onde fui introduzindo, de forma gradual, o vídeo e o gravador. Desta forma, as possíveis perturbações no comportamento dos alunos foram minimizadas.

Num estudo desta natureza é muito importante que a observação seja constante ao longo do tempo de forma a permitir "uma proximidade continuada no tempo com os fenómenos a estudar" (Santos, 2000, p. 209). No entanto, de acordo com a autora, as questões de ordem ética têm de merecer especial atenção, uma vez que a proximidade que se estabelece entre os participantes e o investigador pode influenciar os resultados do estudo. Isto é, se por um lado a confiança estabelecida permite uma interpretação mais fiel dos dados recolhidos, por outro lado, pode enviesá-los. Deste modo reforcei a informação que já tinha sido dada aos alunos, dizendo que a minha presença não tinha como objetivo avaliá-los ou censurar os seus erros, muito pelo contrário, o meu objetivo era conhecer, de forma mais pormenorizada, os seus raciocínios e estratégias de resolução.

4.3.2. Entrevista

Articular a observação participante com outras formas de recolha de dados, permite compreender melhor a situação em estudo (Cohen, Manion & Morrison, 2000). O *design research* recorre à triangulação dos dados recolhidos de modo a tornar os resultados o mais fidedignos possível (Cobb et al., 2003), sendo que esta, usualmente, é feita associando a observação participante e a entrevista (Lessard-Hébert et al., 1990). A entrevista é vista como um "evento social, onde o investigador e o aluno negociam (…) a interpretação da tarefa (…) e o que conta como sendo uma solução legítima e adequada" (Cobb & Yackel, 2010, p. 185).

A entrevista é uma das características do *design research* herdada de estudos de natureza qualitativa (Confrey, 2006), onde a mesma é utilizada para descrever um método que permite ao investigador iniciar um diálogo ou uma conversa com o participante (Lichtman, 2006). A entrevista é assim um método de recolha de dados defendido por vários autores (Cobb et al., 2001; Collins et al., 2004; Molina, Castro & Castro, 2007; Patton, 2002) que tem como principais objetivos recolher descrições de determinadas situações e sequências de ações; procurar conhecimento qualitativo (nomeadamente, estratégias seguidas na realização de determinada tarefa) e compreender as perspetivas dos participantes, mostrando o que não é observável, permitindo que o investigador conheça de forma mais pormenorizada as estratégias e os conhecimentos dos participantes (Silverman, 2000). As entrevistas podem representar a estratégia dominante para a recolha de dados ou podem ser combinadas com a observação participante, a recolha documental e outras técnicas (Bogdan & Biklen, 1994). No caso deste estudo, as entrevistas foram utilizadas tendo por base a última ótica, tendo sido gravadas em vídeo e transcritas de imediato. A gravação em vídeo das entrevistas é uma mais-valia porque com a sua gravação pode-se obter registos mais significativos (expressões faciais), que de outro modo não se poderiam registar de forma fiel.

De acordo com Fontana e Frey (2000), as entrevistas podem ser de três tipos: **a)** *estruturada*, com questões estabelecidas previamente, com uma ordem estabelecida, com categorias de resposta, com perguntas abertas ou fechadas e de fácil quantificação dos resultados; **b)** *semiestruturada*, onde existe um guião com questões, mas não existe uma ordem rígida na exploração das mesmas, ou seja, existe uma maior flexibilidade, e **c)** *não estruturada* (aberta), com maior liberdade, em que existe um guião com linhas orientadoras, mas em que as questões emergem no fluir da conversa.

As entrevistas também podem assumir uma outra forma onde se apresenta uma tarefa ao aluno, que este tem de resolver e onde lhe é pedido que vá explicando o seu raciocínio. O investigador, além de observar a ação do indivíduo, tenta perceber como este desenvolve a compreensão matemática, incluindo a presença e interação de conceitos e procedimentos (Heid, Blume, Zbiek & Edwards, 1999). Estas entrevistas designam-se habitualmente por "entrevistas clínicas", sendo importantes sobretudo quando se pretende: **a)** obter informação que permita avaliar os conhecimentos matemáticos dos alunos; **b)** compreender as capacidades e competências matemáticas dos alunos de modo a adotar estratégias curriculares que facilitem o seu progresso; e **c)** contribuir para o desenvolvimento de conhecimento essencial no ensino e aprendizagem da matemática e sobre as conceções dos alunos (Hunting, 1997).

As entrevistas clínicas são muito importantes no contexto da aprendizagem da Matemática porque proporcionam informações que não são facilmente obtidas através de outras fontes (Long & Ben-Hur, 1991). De acordo com os autores, elas permitem perceber, entre outros aspetos, se os alunos se limitam a uma única estratégia de resolução de problemas, se depositam mais confiança nessa estratégia ou, se pelo contrário, são capazes de usar estratégias alternativas. A opção pela entrevista deste tipo afigura-se vantajosa, uma vez que a fonte de dados (alunos) e a sua análise e interpretação (investigadora-professora) podem surgir naturalmente numa comunicação interativa (Hunting, 1997). De acordo com o autor, estes métodos têm tornado possível o desenvolvimento de teorias explicativas das compreensões individuais das crianças.

Para que este e outros objetivos sejam atingidos, as questões das entrevistas de natureza clínica devem

> ser abertas para dar aos alunos alguma liberdade e escolherem as suas próprias formas de responder; maximizar a oportunidade de discussão ou diálogo para que os processos mentais possam ser revelados, e permitir que, tanto o investigador como os alunos, possam refletir sobre tais processos. (Hunting, 1997, p. 153)

A linguagem não-verbal no decurso da entrevista é importante uma vez que a comunicação também se processa desta forma, por expressões faciais ou corporais (Cohen et al., 2000), que podem de certa forma influenciar os dados, por isso o investigador deve "cingir-se" a ser um bom ouvinte. Para Seidman (2006) esta atitude deve ser tomada a três níveis, ou seja, o investigador deve: **a)** concentrar-se no conteúdo de modo a conseguir compreender e avaliar se o que está a ouvir é suficientemente completo e detalhado quanto o desejável; **b)** ouvir a "voz interior" do entrevistado, ou seja, solicitar a este, sempre que necessário, a explicação de certas expressões que não sejam claras; e **c)** ouvir enquanto permanece consciente do processo e do conteúdo, isto é, tem que estar ciente do tempo de duração da entrevista, do que já foi abordado e do que ainda falta abordar.

Tendo em conta o objetivo deste estudo, optei por realizar uma entrevista, que acompanhou o teste final, englobando duas dimensões: uma parte semiestruturada e outra clínica com algumas questões preparadas com antecedência, havendo, no entanto, flexibilidade de adaptar questões a partir das respostas dos entrevistados (Wengraf, 2001). Para a preparação da entrevista tive em conta o facto de que "os dados dependerão da qualidade e incidência da tarefa" (Hunting, 1997, p. 148).

Além dos tipos de entrevistas mencionados, McNamara (2009) e Patton (2002) falam ainda de um outro tipo de entrevista: as conversas informais (*informal conversational interview*). Este tipo de entrevista é constituída por "questões que emergem a partir do contexto imediato e que seguem um curso natural" (Patton, 2002, p. 349), em que o investigador se baseia na interação com os participantes para orientar a entrevista (McNamara, 2009). Portanto, este tipo de entrevista não obedece a um protocolo onde há um conjunto de questões ou tópicos predeterminados. Apesar de os dados recolhidos com as conversas informais serem difíceis de organizar e de analisar, pela diversidade de informação que podem conter, este tipo de entrevista é uma mais-valia na medida em que aumenta a relevância das perguntas, uma vez que estas emergem a partir das observações que o investigador faz (Patton, 2002).

Embora não tendo sido o principal método de recolha de dados, durante a experiência de ensino recorri frequentemente a este tipo de entrevistas. Estas não obedeceram a um protocolo fixo, uma vez que fui interpelando os alunos à medida que iam resolvendo as questões, sempre que, para mim, o raciocínio destes não estava claro.

Apesar de os alunos estarem esclarecidos, desde o início, do meu propósito na sala de aula, tive sempre algum cuidado na forma como respondi e coloquei as questões. Esta atitude é muito importante porque corre-se o risco de que o aluno, com frequência, tente agradar ao entrevistador e, por isso, sonda-o na tentativa de encontrar sinais de que a resposta está certa ou errada, sendo por isso influenciado. Deste modo, encorajei os alunos com algumas expressões consistentes e sempre com a mesma entoação, tendo colocado várias questões sobre a mesma solução, explicando-lhes que essa atitude não significava que a sua solução não estava correta mas apenas que eu queria saber como tinham chegado à solução.

4.3.3. Recolha documental

A utilização de documentos escritos pode "ajudar o investigador a revelar significado, desenvolver compreensão e a descobrir *insights* relevantes para o problema de investigação" (Merriam, 1988, p. 118). Os documentos são uma importante fonte de recolha de dados, porque também permitem comprovar ou refutar as conclusões apontadas por outras fontes de dados (Yin, 2003). Estes documentos, segundo Merriam (1988), correspondem, geralmente, a "uma grande quantidade de material físico e escrito recolhido pelo investigador" (p. 21), o que também se verifica no presente estudo.

Os documentos produzidos pelos alunos durante a experiência de ensino, ao resolverem as tarefas propostas, desempenham um papel central num estudo deste tipo, uma vez que por serem produzidos habitualmente de forma independente da intervenção do investigador (o que não acontece com as entrevistas), permitem uma posterior análise dos seus procedimentos, estratégias, erros e dificuldades. Desta forma, no presente estudo, a recolha documental permitiu acompanhar a evolução das estratégias e modelos usados pelos alunos e dos seus raciocínios em torno dos números racionais.

Neste estudo foram recolhidos e fotocopiados todos os documentos que incluem produções dos alunos nas aulas observadas, incluindo os documentos produzidos para apresentação das explorações aos restantes elementos da turma. À medida que esta recolha era efetuada, procedia-se à sua análise, e, sempre que necessário, foi feito um confronto direto em aula com os alunos sobre os produtos recolhidos (resoluções das tarefas), tentando-se esclarecer eventuais dúvidas surgidas durante esse processo, o que McNamara (2009) e Patton (2002) designam por conversas informais.

Além dos documentos produzidos pelos alunos (resolução das tarefas), também o teste inicial (5 de fevereiro de 2009) e o teste final (16 de junho de 2009) fazem parte da recolha documental. Após a implementação da experiência de ensino efetuou-se o teste final (Anexo 9), semelhante ao teste inicial, ao que se seguiu uma entrevista que obedeceu a um protocolo (Anexo 11). Neste teste os alunos deviam, paralelamente ao que foi proposto no teste inicial, representar um número racional nas várias formas e resolver problemas simples, envolvendo racionais. Os resultados obtidos através do teste final, à semelhança do que aconteceu com o teste inicial, foram analisados em função dos objetivos pré-definidos para o mesmo (Anexo 10). O objetivo deste teste era aferir, até que ponto, os alunos evoluíram nos seus conhecimentos sobre os números racionais e as suas representações.

4.4. Análise de dados

O objetivo da análise qualitativa é transformar uma grande quantidade de material (dados), que pode ser complicada e sem um significado claro, em algo com sentido (Lichtman, 2006), de forma a aumentar a compreensão do problema em estudo e permitir apresentar aos outros o que se encontrou (Bogdan & Biklen, 1994). Nesse momento, de acordo com Lichtman (2006), o investigador está prestes a fazer a "passagem dos dados brutos a conceitos significativos" (p. 167), o que a autora designa pelos três C's de análise: da codificação para a categorização de conceitos. Ou seja, de acordo com Strauss e Corbin (2008),

> há uma interação com os dados (análise) usando técnicas, tais como: fazendo perguntas sobre os dados, efetuando comparações entre os mesmos, e assim sucessivamente, fazendo surgir conceitos desses dados que depois serão desenvolvidos de acordo com as suas propriedades e dimensões. (p. 66)

Ainda segundo estes autores, estas duas estratégias, o uso de questões e fazer comparações, são a base da análise de dados qualitativos. As questões são uma ferramenta útil em todas as etapas da análise, desde o início até ao fim, pois ajudam o investigador quando está bloqueado e com dificuldades em começar a sua análise. Strauss e Corbin (2008) referem que as questões iniciais não necessitam ser profundas mas têm de colocar o investigador a pensar sobre os dados. Exemplifica-se esta ideia através de um hipotético estudo sobre as repreensões dos professores aos alunos desestabilizadores em que o primeiro parágrafo das notas de campo diz algo do género: "Foi uma decisão muito difícil, a de repreender severamente o Pedro em frente à turma, mas física ou emocionalmente não podia mais aguentar aquilo. Tenho-o na minha sala há oito anos e já tenho 60 anos, estava a começar a ser demais. Mas ele abandonou a escola apenas seis semanas depois de o ter repreendido em frente à turma. Agora desejava tê-lo feito de outra forma" (adaptado de um exemplo de Strauss & Corbin, 2008, p. 70). De acordo com os autores, quando olhamos para uma parte dos dados como esta, podemos fazer perguntas exploratórias, tais como: **a)** O que significa "estava a começar a ser demais"?; **b)** O que será que esta professora está a tentar dizer sobre ela própria, o seu aluno e sobre a sua relação com ele?; **c)** O que significa repreender o Pedro em frente à turma?; **d)** Desejava tê-lo feito de outra forma, e depois? Será que o resultado seria diferente?, e **e)** Se a professora lidasse com o aluno há menos tempo, ou fosse mais jovem, teria condições de lidar com a situação de maneira diferente? Quanto tempo aguentaria ela?.

Todas estas perguntas servem para fazer o investigador pensar sobre como é, para uma professora de 60 anos, ter de lidar com um aluno na sua sala durante oito anos, com comportamentos desestabilizadores e desrespeitadores.

> Fazer perguntas e pensar num vasto leque de possíveis respostas ajuda-nos a colocar no papel do outro para que possamos entender melhor o problema da perspetiva do participante. Quaisquer respostas às perguntas são apenas provisórias, mas fazem-nos começar a pensar sobre as ideias que precisamos para olhar para os dados. (Strauss & Corbin, 2008, p. 70)

Os três C's de análise de Lichtman (2006), segundo ele próprio e Creswell (2003), efetuam-se em seis passos. Primeiro existe uma *codificação inicial*, que consiste em selecionar e organizar os dados em diferentes tipos, dependendo das fontes de informação, antes de lhes dar qualquer significado, por exemplo, transcrever uma entrevista. O segundo passo é realizar uma *revisão da codificação inicial*, onde depois de ler todos os dados, o investigador tenta tirar um sentido geral das informações e refletir sobre o seu significado global, fazendo questões como "quais as ideias gerais dos participantes?". Em terceiro lugar deve existir um *desenvolvimento de uma lista inicial de ideias centrais (categorias)*, onde se dá início a uma análise detalhada para se "etiquetar" os dados e separá-los em função das suas ideias centrais (categorias). Posteriormente, essa lista pode ter uma *modificação através de releituras*, baseado no processo interativo, onde o investigador deve decidir quais as categorias mais importantes e ver se algumas se relacionam. Num próximo passo deve fazer-se uma *revisão das ideias centrais, categorias e subcategorias*, para eliminar redundâncias e elementos críticos.

Numa última etapa, o investigador deve *passar de categorias a conceitos*, ou seja, ele tem de identificar os conceitos chave que refletem o significado atribuído aos dados recolhidos. É nesta altura que o investigador pode "descobrir que reorganizar, reescrever e repensar pode levar, muitas vezes, a ideias mais poderosas" (Lichtman, 2006, p.170). De acordo com Huberman e Miles (2005) para se maximizar os dados e para que a análise dos mesmos seja mais rigorosa, esta deve ser feita segundo um modelo interativo de três componentes, relacionadas e interligadas (Figura 53).

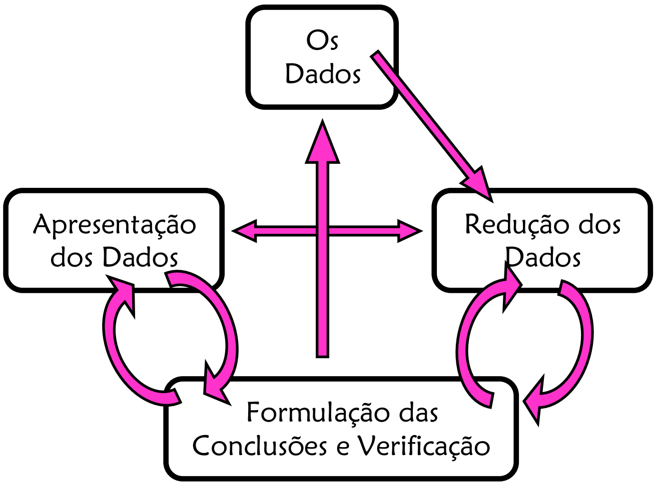


Figura 53 – Modelo interativo de análise dos dados (adaptado de Huberman & Miles, 2005, p. 429).

De acordo com os autores, a redução dos dados é a fase inicial da análise dos mesmos. Neste momento os dados são selecionados, simplificados, avaliados e codificados (nível um), ao que Creswell (2003) e Lichtman (2006) designam por codificação dos dados. Depois surge a apresentação dos dados, onde a informação aparece de forma organizada, resumida e estruturada de modo a permitir apontar conclusões (nível dois), ao que se designa por desenvolvimento de categorias (Creswell, 2003; Lichtman, 2006). Finalmente surge a fase de tecer conclusões (nível três), onde o investigador vai dar significado aos dados que selecionou tendo em conta as regularidades observadas, assim como possíveis explicações passando, de acordo com Creswell (2003) e Lichtman (2006), de categorias a conceitos.

Uma análise de dados que segue o paradigma metodológico *design research*, requer uma reflexão constante (Anderson & Shattuck, 2012), que se realiza em dois momentos, baseada nas particularidades de cada um (Molina, Castro & Castro, 2007). De acordo com os autores, o processo de análise de dados de um *design research* é cíclico e contínuo, uma vez que este é realizado não só no final da experiência de ensino, de uma forma retrospetiva, mas também ao longo de todo o processo de recolha de dados. Embora a análise dos dados que é feita ao longo da sua recolha seja preliminar, ela é fundamental para que se possa refletir sobre cada intervenção de modo a que as próximas tarefas sejam adaptadas, podendo também haver um ajuste na conjetura que norteia a experiência de ensino (Confrey, 2006; Steffe & Thompson, 2000).

Seguindo as recomendações dos autores do *design research* (Anderson & Shattuck, 2012; Confrey, 2006; Steffe & Thompson, 2000) e o modelo de Huberman e Miles (2005), entre fevereiro e junho de 2009, procedi à seleção, simplificação e organização resumida dos dados deste estudo, tendo iniciado o processo de análise dos mesmos durante a sua recolha. Para esta análise preliminar fiz uma leitura cuidada das produções dos alunos relativas a cada tarefa, à medida que estas iam sendo realizadas, dos relatórios resultantes da observação das aulas e das conversas informais com os alunos e ainda das reflexões efetuadas após o visionamento das gravações vídeo das mesmas. Durante esta análise procurei identificar evidências que me permitissem responder às questões do estudo. Deste modo estive particularmente atenta à utilização que os alunos faziam das várias representações dos números racionais, às conexões que estabeleciam entre elas e às estratégias utilizadas na resolução das tarefas. Do ponto de vista da implementação das tarefas em sala de aula, os registos vídeo e áudio, assim como a leitura das produções dos alunos e dos meus relatórios, permitiram levantar questões em relação às observações efetuadas. Estes documentos em conjunto com as reflexões com a professora Inês revelaram aspetos importantes que eram necessários alterar ou aprofundar nas aulas seguintes, tendo por isso sido uma mais-valia na reformulação das tarefas propostas.

As reflexões realizadas sobre a atividade dos alunos em torno de cada uma das tarefas da experiência de ensino tiveram em consideração a flexibilidade evidenciada na utilização das várias representações dos racionais, as dificuldades manifestadas, as estratégias seguidas e os raciocínios explicitados através das discussões em pequeno e grande grupo. Esta análise, de acordo com Amaral (2003), é também muito importante para se perceber a influência da estrutura da tarefa e da forma como ela é apresentada nas estratégias seguidas pelos alunos, assim como o papel das discussões em grande grupo na mobilização e sistematização de conhecimentos.

Depois de terminar o meu trabalho de campo, seguindo as recomendações de Cobb et al. (2003), Confrey (2006), Steffe e Thompson (2000), dei início à fase da análise retrospetiva, onde voltei a ler todas as produções dos alunos e todas as minhas reflexões das aulas observadas, das reuniões com a professora Inês e das conversas informais que tive com os alunos, a visionar todos os registos vídeo e áudio, assim como as respetivas transcrições. Tendo em conta que os dados são, maioritariamente, de natureza qualitativa, a análise realizada evidencia a interatividade do modelo de Huberman e Miles (2005), uma vez que teve um carácter cíclico, tendo os dados sido revistos ao longo de todo o processo de análise, com o intuito de serem encontrados novos conceitos e significados (Denzin & Lincoln, 1998).

Durante todo o processo de análise dos dados foram surgindo as categorias de análise deste estudo, tal como defendem Bogdan e Biklen (1994). Os dados emergiram de todo o material recolhido e foram analisados com base nas componentes do sentido de número evidenciados no modelo de McInstosh et al. (1992), e adaptadas por Mendes (2012), que se ajustam ao presente estudo. Além disso, também se teve em conta na construção das categorias de análise os aspetos fundamentais para a compreensão dos números racionais apontados pelo NCTM (2007), pelo programa de Matemática (ME, 2007) e por vários autores (Clarke & Roche, 2009; Clarke et al., 2010; Cramer & Wyberg, 2009; Lamon, 2006; Martinie, 2007; Moseley, 2005; Post & Cramer, 1987; Yang et al., 2004). Tendo em conta que todas as tarefas partiram da resolução de problemas que contextualizam os vários significados dos números racionais, que envolvem grandezas discretas ou contínuas, e que é na sua resolução que se podem observar as múltiplas estratégias que os alunos utilizam e o tipo de representação que preferem, estas características são transversais a toda a análise. É por isso que se encontram dispostas lateralmente no Quadro 9, de modo a abarcar todas as outras categorias de análise. Estas foram consideradas tendo em conta as capacidades evidenciadas pelos alunos, subjacentes a cada categoria.

	Categorias de Análise	Capacidades Subjacentes às Categorias
- Resolução de problemas que contextualizam os vários significados dos números racionais, envolvendo grandezas discretas ou contínuas. - Múltiplas estratégias utilizadas. - Representação eficaz.	**Concetualização da unidade.**	✰ Interpreta a unidade (*unitizing, reunitizing*) em situações que envolvem grandezas discretas e contínuas.
		✰ Reconstrói a unidade em grandezas discretas e contínuas (*reversing*).
	Múltiplas representações.	✰ Reconhece diferentes formas de representar um número racional (numeral misto, fração, numeral decimal e percentagem).
		✰ Estabelece equivalência entre frações.
		✰ Estabelece conexões entre as diferentes representações com símbolos escritos (fração, decimal e percentagem).
	Sistemas de valores de referência.	✰ Utiliza números de referência.
		✰ Utiliza o pensamento residual.
	Densidade dos números e o seu valor de posição.	✰ Representa números racionais na linha/barra numérica.
		✰ Compara e ordena números racionais.
		✰ Reconhece a existência de números entre dois racionais.

Quadro 9 – Categorias de análise de dados.

a) *Concetualização da unidade*. Este é um dos aspetos particularmente importante nos números racionais (Clarke et al., 2010; Lamon, 2006; Martinie, 2007; Pinto, 2011), e refere-se à capacidade de os alunos interpretarem a unidade que lhes é dada da forma que mais lhes convier (Lamon, 2006), em função do objetivo da situação proposta. Ou seja, o aluno pode pensar em 24 ovos como sendo duas dúzias, ou como quatro caixas com meia dúzia cada, ou simplesmente como 24 ovos individualmente. A este modo flexível de se interpretar a unidade, chama-se *unitizing*. Por sua vez, se o aluno estiver perante uma situação em que a unidade que lhe é dada está estruturada de uma forma que não lhe é favorável para a resolução do problema, ele deve ter a capacidade para a reorganizar (*reunitizing*) de modo a facilitar a sua resolução. Isto é, por exemplo, se o aluno estiver perante um objeto dividido em terços e lhe for pedido que marque, nesse objeto, um sexto ou três nonos, este deve ter a capacidade de reorganizar a sua unidade em sextos ou nonos para marcar as frações mencionadas. Um outro aspeto a ter em conta relativamente à concetualização da unidade é a sua reconstrução, a qual Baturo (2004) designa por *reversing*, e que diz respeito à capacidade para reconstruir a unidade a partir das suas partes.

b) *Múltiplas representações*. Esta característica é um aspeto considerado muito importante no campo dos números racionais (McInstosh et al., 1992; Mendes, 2012; Moseley, 2005; Pinto, 2011; Yang et al., 2004), destacando-se o reconhecimento, pelos alunos, de diferentes formas de representar um número racional (pictoricamente ou através de um numeral misto, fração, numeral decimal, percentagem), estabelecendo conexões entre as representações mencionadas, assim como a capacidade de determinar frações equivalentes. No âmbito deste estudo, o termo conexão é utilizado para nos referirmos às "relações entre frações, percentagens e decimais" (van Galen et al., 2008, p. 15), o que implica a capacidade de "passar de uma [representação] para outra[28]" (idem, p. 14). Este termo engloba a conversão dentro da mesma representação (por exemplo, frações equivalentes) e a conversão entre diferentes representações de um número racional.

É de salientar ainda que, nesta investigação, o foco das múltiplas representações incide nas que se encontram incluídas no sistema dos símbolos escritos, mais concretamente os numerais mistos, as frações, os numerais decimais e as percentagens (Goldin, 2008). No entanto as representações verbais e pictóricas[29] de que Goldin (2008) nos fala, são também tidas em conta, na análise dos dados, dado o papel importante que estas têm nas tarefas propostas na experiência de ensino.

[28] *to move from one from to another*, no original.

[29] As representações pictóricas no âmbito desta investigação dizem respeito a esquemas e figuras que os alunos utilizam para representarem determinadas situações (Goldin, 2008). A barra, a linha numérica e os gráficos circulares, como são representações formais, não fazem parte das representações pictóricas de acordo com Goldin (2008), pelo que as representações formais (barra, linha numérica e gráficos circulares) serão designadas por representações gráficas.

c) *Sistemas de valores de referência.* Esta característica mencionada no modelo de McInstosh et al. (1992), e também pelo NCTM (2007), Yang et al. (2004) e Mendes (2012), no âmbito dos números racionais, relaciona-se com a flexibilidade de os alunos utilizarem valores de referência (Clarke & Roche, 2009; Cramer & Wyberg, 2009; Lamon, 2006) ou o pensamento residual (Post & Cramer, 1987) como estratégias para comparar números racionais. Os alunos apresentam um pensamento residual, na comparação de duas frações, quando comparam a parte que falta a cada uma das frações para terem o todo (Clarke & Roche, 2009; Cramer & Wyberg, 2009).

d) *Densidade dos números e o seu valor de posição.* À luz do que McIntosh et al. (1992) e outros autores consideram (Clarke et al., 2010; NCTM, 2007), este aspeto refere-se à capacidade de os alunos representarem números racionais numa linha numérica, de os comparar e ordenar, bem como à capacidade de os mesmos reconhecerem a existência de números entre dois racionais dados.

À medida que se analisaram os dados, seguindo estas categorias, fez-se também uma análise em paralelo das estratégias utilizadas pelos alunos, sendo classificadas como procedimentos de cálculo, gráficas, simbólicas ou flexíveis. Neste âmbito também se integra a identificação do método utilizado pelos mesmos (mental, calculadora, papel e lápis), aspeto mencionado por McInstosh et al. (1992), ME (2007) e Mendes (2012). A análise das estratégias seguidas prende-se com o facto de esta experiência de ensino fazer uma forte aposta no recurso ao modelo da barra numérica (estratégia gráfica) e, por isso, pretende-se averiguar se este modelo criou uma excessiva dependência nos alunos ou se também lhes facilitou o surgimento de outras estratégias.

Além disso, também se faz, sempre que possível, uma análise paralela à utilização de uma "representação eficaz", uma vez que é um aspeto mencionado no modelo de McInstosh et al. (1992) e pelo programa de Matemática (ME, 2007). Este aspeto refere-se à capacidade de os alunos escolherem, de forma flexível, representações favoráveis para trabalhar, permitindo também averiguar qual é a sua representação preferida.

A análise dos dados do grupo estudo de caso, durante a experiência de ensino, é organizada pelas categorias de análise supramencionadas, fazendo-se uma síntese no fim de cada secção, onde se referem também os erros e dificuldades manifestadas.

No que diz respeito à análise da resolução dos alunos do teste inicial e do teste final optou-se por considerar a "resolução de problemas que contextualizam os vários significados dos números racionais, envolvendo grandezas discretas ou contínuas" como uma categoria de análise, com o objetivo de conhecer o desempenho individual dos alunos do grupo estudo de caso em cada significado, bem como a sua evolução do início para o final da experiência de ensino. Além disso, a particularização desta categoria nos testes, torna-se fundamental para uma análise evolutiva da globalidade da turma, em termos quantitativos, tal como surge na parte dois do capítulo seis. Neste âmbito é de salientar que a capacidade de reconstrução da unidade (*reversing*), bem como a densidade dos números racionais, não foram contempladas no teste inicial por serem um tópico que supostamente os alunos ainda não tinham trabalhado no seu percurso escolar. A sua ausência no teste final justifica-se pelo facto de este teste ter como objetivo comparar a evolução dos alunos relativamente ao seu desempenho nas mesmas questões, pelo que, como não existiam no teste inicial não fazia sentido a sua presença no teste final.

A análise descrita para este estudo teve como objetivo organizar os dados para que as respostas às questões desta investigação pudessem fluir mais facilmente e permitir tecer considerações finais – o que corresponde aos níveis dois e três de Huberman e Miles (2005).

CAPÍTULO V

A EXPERIÊNCIA DE ENSINO

A ideia de que para aprender o aluno apenas necessita de ouvir o que o professor explica e depois efetuar uma série de exercícios de mecanização, tem vindo a ser refutada, dando lugar à ideia de que é este que constrói o seu próprio conhecimento realizando tarefas matemáticas significativas e por meio das interações que ocorrem no processo de ensino e aprendizagem (Ponte, Matos & Abrantes, 1998). Partilhando esta perspetiva, delineei uma experiência de ensino no 5.º ano do ensino básico, constituída por uma sequência de tarefas, no tema dos Números Racionais, que aposta no estabelecimento de conexões entre as várias representações destes números, bem como no uso de modelos, e que proporciona um trabalho em torno dos vários significados de número racional. A construção da experiência de ensino seguiu as orientações programáticas da disciplina de Matemática (ME, 2007) e teve em conta aspetos evidenciados pela literatura e investigação.

Neste capítulo começo por apresentar os aspetos que orientaram a construção desta experiência de ensino. Seguidamente explico as características principais da experiência de ensino, assim como a planificação que foi feita, fazendo uma breve descrição das tarefas, onde se explicam os seus objetivos. Na última secção deste capítulo descrevo ainda a atividade da turma em torno das tarefas propostas, salientando as aprendizagens e dificuldades dos alunos, bem como as intervenções da professora no contexto de sala de aula.

5.1. Orientações para a construção da experiência de ensino

5.1.1. Conjetura da experiência de ensino

Esta investigação seguiu a modalidade de uma experiência de ensino (EE) que foi planificada tendo em conta uma conjetura de ensino (Lesh & Kelly, 2000). Seguindo as ideias dos autores, e tal como já foi referido no capítulo da metodologia, esta conjetura tem em conta não só os conteúdos matemáticos (dimensão de conteúdo) como também o modo como estes vão ser trabalhados na sala de aula (dimensão pedagógica).

No âmbito da dimensão pedagógica, de acordo Smith, Hughes, Engle e Stein (2009) e Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), o modo como o professor dirige as discussões em sala de aula influencia as aprendizagens dos alunos. Estes autores referem cinco práticas a adotar pelos professores que podem reforçar a sua confiança na condução das discussões em sala de aula e permitem que a aperfeiçoem ao longo do tempo: **1)** antecipar as respostas dos alunos às tarefas; **2)** monitorizar o trabalho dos alunos e o seu envolvimento na tarefa; **3)** selecionar determinados alunos para apresentar o seu trabalho matemático; **4)** sequenciar as respostas dos alunos que serão apresentadas à turma por uma ordem específica (por exemplo da mais simples à mais complexa); e **5)** relacionar as diferentes respostas dos alunos, fazendo um paralelo com as ideias matemáticas fundamentais.

Muitas abordagens recentes no campo do desenvolvimento de currículos inovadores de matemática e, também, de investigação no ensino e aprendizagem da matemática, têm tido por base a construção de trajetórias de aprendizagem (Clements & Sarama, 2004). De acordo com os autores, para que se consiga promover uma trajetória de aprendizagem dos alunos, é necessário implementar uma sequência de tarefas que não é fixa nem única, mas sim hipotética, pois é apenas uma hipótese a seguir, em que a contínua transformação é fundamental. Este trabalho é complexo pois requer, em simultâneo, o conhecimento sobre o tópico, o conhecimento das orientações curriculares e decisões sobre o que os alunos têm de aprender e sobre o modo como ensiná-los (Silvestre & Ponte, 2011).

De acordo com Kraemer (2008), a construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem deve ter em conta três aspetos muito importantes:

> (i) determinar o que os alunos podem aprender num determinado momento, a partir do que já sabem e fazem (conteúdos matemáticos a aprender);
> (ii) selecionar e/ou criar problemas e encadeá-los uns nos outros de tal maneira que os alunos possam atingir os objetivos estabelecidos;
> (iii) explicitar aquilo que os alunos vão descobrir/aprender nestas condições e como o vão fazer (aspeto teórico e metodológico da planificação). (p. 5)

Inspirada na ideia de trajetória hipotética de aprendizagem e destas três características, foi delineada uma EE constituída por uma sequência de tarefas, no tema dos Números Racionais, que aposta no estabelecimento de conexões entre as várias representações destes números, bem como no uso de modelos, e que proporciona um trabalho em torno dos vários significados de número racional. Esta EE baseia-se na conjetura de que os alunos desenvolvem a compreensão do conceito de número racional se trabalharem com tarefas de natureza exploratória, em contextos familiares propícios à utilização do modelo da barra numérica, que envolvam: **a)** as várias representações dos números racionais (pictórica, frações, decimais e percentagens), bem como as suas conexões – sendo-lhes dada oportunidade de escolher a representação que usam, **b)** os seus vários significados, e **c)** os diferentes tipos de grandezas envolvidas.

5.1.2. Orientações programáticas

Em Portugal, até 2007, de acordo com o documento Organização Curricular (ME, 2004), a introdução dos números racionais, na sua representação fracionária, iniciava-se no 2.º ano de escolaridade no módulo Números e Operações, através da utilização da notação $\frac{1}{2}\mathrm{x}$ para representar «metade de» e do reconhecimento de $\frac{1}{4}\mathrm{x}$ como o inverso de $4\,\mathrm{x}$ (p. 175). Posteriormente, no 3.º ano de escolaridade, pretendia-se que os alunos explorassem "situações que levem à descoberta de decimais" e que conseguissem "ler e escrever decimais (com um máximo de dois algarismos à direita da vírgula)" (p. 176). Ainda neste ano de escolaridade era desejado que os alunos utilizassem a notação $\frac{1}{3}\mathrm{x}$, $\frac{1}{5}\mathrm{x}$, $\frac{1}{10}\mathrm{x}$ para representar o inverso de $3\mathrm{x}$, $5\mathrm{x}$ e $10\mathrm{x}$, respetivamente. Pretendia-se também que os alunos reconhecessem a equivalência entre $\frac{1}{10}\mathrm{x}$, $0{,}1\mathrm{x}$ e :10. No 4.º ano os alunos deviam "representar números decimais numa reta graduada (até à décima)" (p. 178). Já no módulo Grandezas e Medidas era solicitado aos alunos que determinassem "numa balança de pratos a massa de objetos, utilizando as massas marcadas mais comuns: 1kg; 500 g – $\frac{1}{2}$ kg; 250 g – $\frac{1}{4}$ kg; 125 g e registá-las" (p. 188).

Como se observa, a relação entre estas duas representações simbólicas dos números racionais (frações e decimais) era muito pouco promovida ao longo do 1.º ciclo. Já no 2.º ciclo, o que se observava através de uma análise ao Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem de Matemática (ME, 1991) é que os numerais decimais e as frações faziam parte de duas Unidades praticamente distintas. Na unidade "Números Inteiros e Números Decimais", os alunos deviam ordenar e operar números inteiros e numerais decimais, enquanto na unidade "Números Racionais", tinham de conseguir distinguir um número inteiro e um número representado sobre a forma de fração; de comparar e ordenar números racionais representados de diversas formas e de resolver problemas simples que envolvessem operações – adição e subtração no 5.º ano e multiplicação e divisão no 6.º ano (ME, 1991). No 5.º ano era feita uma abordagem muito ligeira em paralelo das frações e dos numerais decimais, afirmando-se que o aluno deve "comparar e ordenar números racionais representados de diversas formas" (ME, 1991, p. 14).

O programa de matemática (ME, 2007) trouxe uma grande mudança aos objetivos de aprendizagem neste tema. Quando esta EE foi planificada e implementada, este programa de Matemática ainda não se encontrava em vigor a nível nacional, estando numa fase de experimentação com várias turmas-piloto em diferentes pontos do país. Como tal, os alunos que participaram neste estudo tinham frequentado o 1.º ciclo do ensino básico ainda com o programa de Matemática anterior (ME, 1991), sendo por isso a sua experiência com os números racionais essencialmente centrada na representação decimal dos mesmos.

De acordo com o programa de Matemática (ME, 2007), os alunos deveriam ter explorado no 1.º ciclo, de forma intuitiva "situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais (…) [e] representar estas quantidades por palavras, desenhos, esquemas ou frações" devendo também "usar valores de referência representados de diferentes formas" (p. 17). Isto permite que os alunos desenvolvam capacidades ligadas ao sentido de número, que vão além do reconhecimento das múltiplas representações dos números (McIntosh et al., 1992). Com o desenvolvimento desta capacidade, o caminho para o estabelecimento de conexões está facilitado e consequentemente os alunos conseguem optar pela representação e/ou estratégia que consideram mais eficaz perante determinado problema, ou seja, a sua destreza com os números amplia-se. Todos estes aspetos, de acordo com McIntosh et al. (1992), são parte integrante do processo de desenvolvimento do sentido de número.

Tendo em conta que os alunos participantes neste estudo, no 1.º ciclo, não trabalharam com os números racionais à luz deste programa de Matemática (ME, 2007), esta investigação começa com uma tarefa matemática que lhes permite trabalhar com os números racionais, como era desejável terem feito no ciclo anterior. Deste modo, pretende-se contribuir para que os alunos aprofundem o conceito de número racional nas suas várias representações, assente em situações de aprendizagem que abranjam os vários significados das frações (ME, 2007), desenvolvendo-lhes capacidades ligadas ao sentido de número.

Adicionalmente há a referir que, uma vez que a turma participante no estudo se encontrava no processo de experimentação do programa de Matemática, a planificação da sequência de tarefas desta EE para o tema "Números Racionais", no 5.º ano, teve como ponto de partida, os materiais criados no âmbito do programa de matemática que estava a ser implementado nas turmas-piloto (Menezes, Rodrigues, Tavares & Gomes, 2008).

5.1.3. Construção da sequência de tarefas

A construção da sequência de tarefas envolveu três fases: a planificação, a implementação e uma análise retrospetiva continuada, com vista à sua adaptação (Gravemeijer, 2004). A fase da planificação das tarefas, bem como a sua análise retrospetiva com consequente adaptação, foi baseada na conjetura do que estas tarefas iriam permitir aos alunos aprender dos conteúdos programáticos relativos aos números racionais, estabelecendo conexões entre as várias representações. Também se conjeturou que esta aprendizagem pode ser influenciada pela escolha dos contextos e pela articulação entre as tarefas (Mendes, Oliveira & Brocardo, 2011; Mestre & Oliveira, 2012), pelo que o processo de seleção e construção foi realizado de forma cuidadosa.

O termo "sequência de tarefas" é utilizado porque as tarefas não surgiram de forma isolada mas foram sendo criadas tendo em conta as propostas anteriores. Na elaboração desta sequência de tarefas procurou-se ter em conta os números envolvidos na tarefa (Mendes, 2012) que poderiam facilitar o estabelecimento de conexões e o uso de números de referência e propor um contexto comum que ajudasse a dar sentido às situações a trabalhar.

Uma outra preocupação que se teve em conta, na construção da EE, foi o dar ênfase a tarefas que permitam aos alunos desenvolver atividades que os levem a "consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático" (ME, 2007, p. 6) e que contribuam para que compreendam que existem diferentes estratégias para a resolução de uma tarefa matemática (ME, 2007). As tarefas pretendem levar os alunos não só a utilizar estratégias diversificadas, como a resolver de forma criativa alguns problemas, transformando deste modo, a sala de aula numa comunidade matemática, no sentido que lhe é dado por Fosnot e Dolk (2001b).

Adicionalmente, como o estabelecimento de conexões entre as representações dos números racionais é um aspeto importante nesta EE, procurei criar um contexto favorável, através da promoção do uso de modelos pelos alunos, em especial a barra numérica, como descrevo em seguida.

Contextos e modelos

Os contextos das tarefas e os modelos que estas favorecem são aspetos de extrema importância na aprendizagem da matemática com compreensão, uma vez que permitem fazer a ponte entre o conhecimento informal e o conhecimento formal (Gravemeijer, 1994). A barra numérica é um modelo de grande relevância para o desenvolvimento do conceito de número racional uma vez que pode facilitar a compreensão concetual das frações e dos numerais decimais (Sweeney & Quinn, 2000; Scaptura, Suh & Mahaffey, 2007). Contudo esta compreensão, assim como as relações entre as várias representações, tendo em conta a perspetiva da Educação Matemática Realista, podem emergir mais facilmente se as tarefas trabalhadas retratarem um contexto real (van Galen et al., 2008).

Deste modo, seguindo estas orientações, a EE iniciou-se com o apoio de materiais manipulativos, as tiras de papel, que simbolizam barras, no contexto de uma situação de partilha equitativa de tabletes de chocolate, onde os alunos puderam manipular as várias tiras de papel, por meio de dobragens. Deste modo, os alunos puderam resolver a tarefa de uma forma interativa, servindo-se deste modelo para representar a situação em causa, uma vez que fisicamente se assemelhava à situação real (tabletes de chocolate). Segundo van Galen et al. (2008), no processo de ensino e aprendizagem, os modelos podem desempenhar um papel fundamental, se inicialmente estiverem muito próximos da situação real. Numa primeira instância, as tiras de papel eram um *modelo de* uma situação de partilha equitativa de um chocolate, no entanto, esperava-se que ela fosse apropriada como uma ferramenta útil pelos alunos, visto que a mesma permite uma representação flexível dos números racionais, e que evoluísse, de acordo com van den Heuvel-Panhuizen (2003), para um *modelo para* pensar.

A escolha das tarefas da EE também realça a importância da variedade de estratégias, no entanto não são as tarefas por si só que determinam a utilização dos modelos nem a variedade das estratégias, mas sim a interpretação que os alunos fazem das tarefas. Deste modo os contextos que integram as tarefas "sugerem e determinam o uso de determinadas estratégias e modelos" (Mendes, 2012, p. 191) por parte dos alunos. É neste âmbito que as tarefas propostas se baseiam em situações do dia-a-dia, para que os alunos possam utilizar os números em contextos familiares. Deste modo, ao estabelecer uma ponte entre os seus conhecimentos informais e o conhecimento matemático (Fosnot & Dolk, 2001a; van Galen et al., 2008), o aluno pode atribuir significado aos números racionais e ir apurando as suas estratégias, tal como é evidenciado no estudo de Mendes (2012).

As tarefas propostas nesta EE articulam-se com os objetivos da brochura de materiais de apoio ao professor (Menezes et al., 2008)[30] do programa de Matemática (ME, 2007) e visam desenvolver diversas capacidades como observação, confronto de resultados, discussão de estratégias e formalização de conceitos e representações matemáticas.

Fez-se esta opção uma vez que, de acordo com o programa (ME, 2007), é esperado que os alunos consigam desenvolver o sentido de número, a compreensão dos números racionais não negativos nas suas diversas representações, a compreensão das operações de adição e subtração, bem como a capacidade de cálculo mental e escrito. No entanto, estas foram adaptadas tendo em conta que estes alunos não tiveram, no 1.º ciclo, o trabalho com os números racionais que está previsto neste programa.

Uma vez que o contexto presente nas tarefas é tão importante, inicialmente tentou-se adaptar as tarefas da brochura, tentando criar-lhes um contexto comum, desde a primeira até à última, para que pudessem ser encadeadas num todo com significado para os alunos. No entanto, essa tarefa não foi fácil, o que fez com que se adaptassem apenas duas, tendo-se criado todas as outras, também em conformidade com objetivos do programa de Matemática (ME, 2007). As tarefas têm um contexto que é transversal que são os

[30] Esta brochura constituiu uma referência na construção de tarefas para a sala de aula pelos professores das turmas-piloto, no entanto, a professora Inês acedeu em implementar as tarefas adaptadas da presente EE, por considerar que tinham linhas orientadoras comuns àquele documento.

protagonistas: três meninos – Luana, Nicolau e João – que supostamente frequentam a mesma escola e que, ao longo do ano letivo, estão envolvidos em várias atividades escolares, algumas em parceria com a Câmara Municipal do seu concelho, em que por vezes também os seus familiares participam.

Significados e representações dos números racionais

As tarefas foram sequenciadas segundo um progressivo grau de complexidade, de acordo com o significado de número racional explorado, começando-se pelas tarefas mais simples de partilha equitativa, tal como sugere o programa (ME, 2007), onde foi explorado o significado de quociente e parte-todo. Depois passou-se para o significado de operador associado à reconstrução da unidade. Optei por esta sequência, baseando-me no programa que menciona que, logo no 1.º ciclo, os alunos devem "compreender frações com os significados quociente, parte-todo e operador [e] reconstruir a unidade a partir das suas partes" (p. 19) e no facto de estes alunos não terem trabalhado com este programa no 1.º ciclo. Posteriormente foi introduzido o significado "medida", tendo sido a "razão" o último a ser abordado, e com menor incidência, por ser aquele que comporta maior complexidade (Steffe & Olive, 2010), e cuja abordagem está direcionada para o sexto ano, no contexto das proporções.

Esta proposta de ensino aposta assim numa sequência de tarefas que percorrem os diversos significados de número racional (parte-todo, operador, quociente, medida e razão) e que promove uma abordagem paralela das várias representações dos racionais, bem como as conexões entre elas. Deste modo, com esta opção, pretende-se contribuir para um dos objetivos gerais do ensino da Matemática, uma vez que se considera que "o estabelecimento de conexões é essencial para uma aprendizagem da Matemática com compreensão e para o desenvolvimento da capacidade de a utilizar e apreciar" (ME, 2007, p. 6).

5.1.4. Natureza das tarefas

De acordo com Ponte (2005), existem diversos tipos de tarefas: os problemas, os exercícios, as investigações, os projetos e as tarefas de modelação. Segundo o autor, o que distingue as tarefas entre si são: o grau de desafio matemático que elas exigem, que está diretamente relacionado com a dificuldade que o aluno sente quando é confrontado com a questão, podendo variar entre o "reduzido" e o "elevado" e o grau de estrutura, que oscila entre o "fechado" – é dito explicitamente todos os dados e o que se pretende – e o "aberto" – a informação facultada é implícita e o que se pretende é indeterminado.

Cruzando o grau de desafio matemático com o grau de estrutura, bem como as características de cada um dos tipos de tarefas supramencionadas, obtém-se um quadro onde é visível a relação entre os tipos de tarefas (Figura 54).

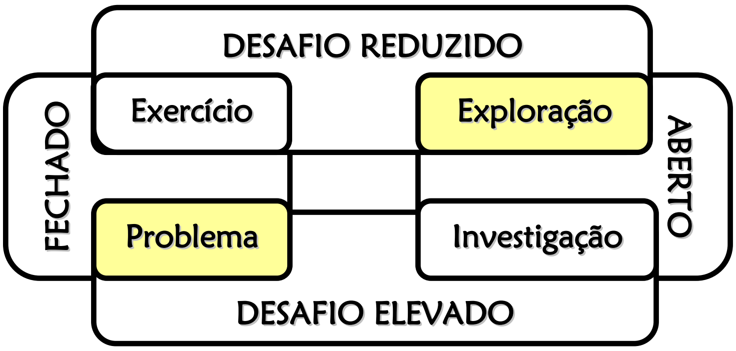


Figura 54 – Relação entre os tipos de tarefas (adaptado de Ponte, 2005).

De acordo com a definição deste autor dos vários tipos de tarefas, esta EE engloba tarefas de exploração e problemas, pois algumas têm uma estrutura fechada com um grau de desafio matemático elevado, outras têm uma estrutura mais aberta, mas com um grau de desafio mais reduzido. É de salientar ainda que a última tarefa da EE enquadra-se naquilo que Ponte (2005) designa por exercício, pois tem como objetivo a aplicação direta de conhecimentos.

5.1.5. Comunicação oral e escrita

A conjetura tem em conta também aspetos relativos ao ambiente na sala de aula, quer a comunicação oral, quer a comunicação escrita, bem como o trabalho em grupo. Deste modo, a seleção das tarefas também se baseou na conjetura de que estas fomentavam a comunicação oral no pequeno grupo e no grupo-turma, permitindo a partilha e argumentação de estratégias, uma vez que as "discussões coletivas focadas nas resoluções dos alunos e que [são] cuidadosamente orquestradas pela professora" (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011, p. 19) contribuem para os alunos refinarem as suas estratégias.

A seleção das tarefas também se baseou na conjetura de que estas permitem uma aprendizagem com compreensão (NCTM, 2007), uma vez que recorrem à utilização de modelos que se podem transformar em ferramentas que apoiam o raciocínio dos alunos (van Galen et al., 2008) e retratam contextos familiares para os mesmos (Ball, 1993).

De uma forma progressiva, logo desde o 1.º ciclo, os alunos devem ser capazes de descrever, explicar, seja oralmente, seja por escrito, as estratégias e procedimentos a que recorrem para darem resposta aos problemas com que se deparam, e devem ainda conseguir argumentar e discutir as argumentações dos outros, pois de acordo com as orientações programáticas (ME, 2007), é

> através da escrita de textos, [que] os alunos têm oportunidade de clarificar e elaborar de modo mais aprofundado as suas estratégias e os seus argumentos; (…) [e é] através da discussão oral na aula, os alunos confrontam as suas estratégias de resolução de problemas e identificam os raciocínios produzidos pelos seus colegas (p.

> 9) (…) [ajudando-os] a construir um reportório de estratégias com os seus próprios limites e flexibilidade. (p. 10)

Só deste modo os alunos conseguirão decidir as estratégias mais apropriadas e proveitosas para a resolução de determinada tarefa, uma vez que esta discussão, assim como o trabalho em grupo, lhes proporcionam oportunidades para descreverem e explicarem as conexões que fazem (Hiebert & Carpenter, 1992) entre as várias representações dos números racionais. Sendo assim, é importante que os alunos tenham uma boa capacidade de argumentação, cuja essência está em convencerem-se "a si próprios e aos outros da validade de determinadas representações, soluções, conjeturas e respostas, [devendo apoiar-se] em argumentos matemáticos para determinar a validade das informações" (NCTM, 1994, p. 48). Deste modo, nos momentos de reflexão sobre o próprio trabalho (estratégias) e de confrontação com outras estratégias que surjam na turma, o aluno deve perceber que o que é mais valorizado não é a resposta correta mas sim a forma como argumenta e explica a sua estratégia e o seu raciocínio.

Assim sendo, outro aspeto que se valorizou nesta EE foi a promoção da comunicação oral, principalmente através das discussões e reflexões no grupo-turma e no trabalho em pequenos grupos, e da comunicação escrita, através dos registos escritos das tarefas concretizadas.

A reflexão no grupo-turma que envolve uma argumentação em torno da explicitação das diversas estratégias seguidas pelos alunos é importante, mas não é menos importante que a mesma seja realizada na mesma aula, de forma a evitar eventuais esquecimentos, por parte dos alunos, dos passos que seguiram. Tendo em conta a importância deste momento, o trabalho autónomo pode ter de ser limitado no tempo, para que se faça uma discussão rica e não aligeirada de cada tarefa. Deste modo a professora Inês tentou, sempre que possível, deixar tempo para que a discussão no grupo-turma fosse feita na mesma aula, permitindo que a resolução da tarefa estivesse presente na memória dos alunos, proporcionando uma discussão mais rica. No entanto, devido ao facto de os alunos ficarem muito envolvidos com a resolução das tarefas, discutindo bastante no pequeno grupo, por duas vezes a discussão em grande grupo teve de passar para a aula seguinte. Essa decisão limitou um pouco a riqueza da discussão, uma vez que alguns alunos já não se lembravam de como tinham raciocinado ao resolverem a tarefa.

5.2. A sequência de tarefas

Com o objetivo de promover o desenvolvimento do conceito de número racional nos alunos, no 2.º ciclo, desenvolveu-se uma sequência de tarefas contextualizadas que promovem uma abordagem dos vários significados dos números racionais, bem como o estabelecimento de conexões entre as suas várias representações (frações, decimais e percentagens), suportadas pela utilização do modelo da barra (partindo da manipulação de tiras de papel), de modo a este vir a constituir-se como um *modelo para* os alunos raciocinarem. Para além deste aspeto, existe um certo encadeamento entre as tarefas, uma vez que os conhecimentos adquiridos com a primeira tarefa facultam aos alunos ferramentas para estes resolverem a segunda e assim sucessivamente. Salienta-se que, embora não fosse proibida a utilização da calculadora em sala de aula, esta não foi pensada como recurso na resolução das tarefas. A implementação decorreu no 2.º e 3.º períodos do ano letivo 2008/2009, numa turma do 5.º ano de escolaridade.

O processo de construção da sequência das tarefas foi faseado. Numa primeira fase, são pensadas algumas tarefas, havendo uma ideia global sobre a sequência de significados que estas abrangem. Após a análise dos resultados obtidos pelos alunos no teste inicial, algumas tarefas que já tinham sido pensadas são adaptadas e outras são construídas de novo. É então definido o primeiro grupo de quatro tarefas a realizar pelos alunos e o seu enunciado é reajustado. Enquanto os alunos vão trabalhando nestas quatro tarefas vão-se ajustando as quatro seguintes (tarefas cinco, seis, sete e oito), tendo em conta a forma como estes evoluem na aprendizagem, mantendo a ideia de continuidade entre as tarefas. Por fim, as últimas três tarefas (nove, dez e 11) são reajustadas à medida que as tarefas cinco, seis, sete e oito vão sendo resolvidas na aula.

A planificação desta sequência de tarefas encontra-se organizada num quadro (Quadro 10), onde são indicados os objetivos, os significados de número racional envolvidos e o tempo sugerido para a realização de cada tarefa.

Tarefa	**Objetivos**	**Significados Envolvidos**	**Sugestão** (minutos)
Tarefa 1 *Partilha de Chocolate*	- Identificar a metade, a quarta e a oitava parte de uma grandeza contínua, e representá-la na forma de fração, decimal, percentagem e numerais mistos. - Comparar quantidades resultantes de uma situação de uma situação de partilha equitativa. - Identificar e dar exemplos de frações equivalentes. - Adicionar números racionais não negativos representados de diferentes formas.	Quociente Parte-todo	180
Tarefa 2 *Adereços Nos Bastidores*	- Identificar partes de uma grandeza discreta. - Recorrer a representações de números racionais por frações, decimais e numerais mistos. - Identificar frações equivalentes. - Reconstruir a unidade a partir das suas partes.	Operador Parte-todo	90

Tarefa 3 *Eventos no Cineteatro*	- Representar um número racional não negativo (escrito de diferentes formas) numa barra. - Determinar uma parte de determinada quantidade, a partir da unidade.	Operador Medida	45
Tarefa 4 *Cenário de Espelhos*	- Resolver problemas envolvendo racionais na sua representação decimal. - Localizar e posicionar números racionais não negativos na linha/barra numérica. - Recorrer a representações de numerais mistos.	Medida Parte-todo	45
Tarefa 5 *Tarde Nas Piscinas Municipais*	- Comparar e ordenar racionais representados de várias formas. - Localizar e posicionar números racionais não negativos na barra numérica, representados através de frações. - Converter frações em decimais e percentagens.	Parte-todo Operador Medida	45
Tarefa 6 *Lanche no Cineteatro*	- Distribuir equitativamente grandezas contínuas e discretas. - Comparar e ordenar números racionais não negativos. - Adicionar racionais não negativos.	Quociente Parte-todo	90
Tarefa 7 *Estacionamento no Cineteatro*	- Representar relações (parte-todo; parte-parte) sob a forma de fração, percentagem e decimal. - Localizar e posicionar na barra numérica um número racional não negativo.	Parte-todo Razão	90
Tarefa 8 *Depósito de Gasolina*	- Resolver problemas envolvendo racionais (frações, decimais e numerais mistos) e um novo modelo.	Parte-todo Medida	45
Tarefa 9 *O Pintor Pedro e as Vitaminas*	- Representar relações parte-parte. - Comparar racionais não negativos.	Razão	90
Tarefa 10 *Compras na Bit-@-byte*	- Compreender a noção de percentagem e relacionar diferentes formas de representar uma percentagem. - Calcular e usar percentagens. - Traduzir uma fração por uma percentagem e interpretá-la como o número de partes em 100.	Parte-todo Operador	90
Tarefa 11 *Descobrindo Comprimentos e Quantidades*	- Reconstruir a unidade a partir das suas partes. - Representar números racionais na dupla linha numérica. - Adicionar e subtrair números racionais não negativos representados em diferentes formas. - Resolver problemas que envolvam números racionais não negativos. - Comparar racionais não negativos.	Parte-todo Medida	90

Quadro 10 – Proposta de planificação.

Inicialmente foi feita uma previsão do tempo que seria necessário para cada tarefa, no entanto, a implementação destas estendeu-se no tempo mais do que o previsto. Primeiro a tarefa um demorou o dobro do tempo previsto pelo facto de os alunos não terem trabalhado com os números racionais conforme o estipulado no programa de Matemática para o 1.º ciclo. Depois os alunos, por serem muito participativos e comunicativos, as discussões (em pequeno grupo e grande grupo) demoraram mais do que o previsto e por isso a resolução de cada tarefa prolongou-se mais do que o esperado.

Apesar de ser da minha responsabilidade a planificação das tarefas, segundo o acordo que foi feito com a professora Inês, estas foram discutidas e ajustadas em conjunto. Deste modo, num primeiro momento apresentei à professora as quatro primeiras tarefas da sequência para que a mesma pudesse avaliar a sua clareza e adequação à turma, bem como dar sugestões sobre a exploração proposta que acompanhava cada tarefa. Esta situação repetiu-se em cada conjunto de quatro tarefas, tendo acontecido mais duas vezes no decurso da EE.

Após a realização de cada tarefa pela turma, eu e a professora Inês reunimos para refletir sobre as dificuldades demonstradas pelos alunos e sobre a adequação da tarefa aos seus propósitos. Nestes encontros tentou-se, pois, compreender o que falhou, o que resultou, as potencialidades de cada tarefa e o trabalho que devia ser desenvolvido à posteriori. Estas discussões tornaram-se fundamentais e produtivas, na medida em que as tarefas seguintes puderam ser reajustadas tendo em conta as ideias gerais que emergiram destes encontros.

Esta EE inicia-se com uma tarefa (Anexo 12) que tem como objetivo mobilizar os conhecimentos informais dos alunos sobre os números racionais, uma vez que retrata uma situação de partição (onde surge o significado parte-todo). Esta parece constituir uma opção adequada uma vez que, segundo Pothier e Sawada (1983), este é um dos conhecimentos informais que os alunos possuem quando chegam à escola e que é fundamental para o trabalho com as frações. Esta partição transforma-se depois numa situação de partilha equitativa, permitindo que os alunos desenvolvam o sentido de quociente (dividir os chocolates em dois, quatro e oito pedaços iguais, que pode ser realizado por esquemas), e que estabeleçam uma relação entre este significado e o significado parte-todo. Para apoiar o raciocínio dos alunos foram facultadas, logo de início, quatro tiras de papel geometricamente iguais (simbolizando as tabletes de chocolate), em que uma serviu de modelo (tablete inteira) e as outras foram divididas (por meio de dobragens) em diferentes partes (em duas, quatro e oito). É de salientar que esta tarefa suscita, desde o início, a utilização das frações, dos numerais decimais e das percentagens.

Depois de estarem familiarizados com o modelo da barra numérica, representado pelas tiras de papel, e com as várias representações que os números racionais podem assumir, estes não são sugeridos aos alunos, na **segunda** tarefa (Anexo 13). Aqui os alunos partem de uma situação de divisão da unidade em partes iguais, envolvendo grandezas discretas. Pretende-se nesta tarefa fazer surgir a representação de uma quantidade sob a forma de um numeral misto. Esta tarefa também tem uma questão (3.1.) que coloca os alunos perante o significado operador, em que têm de determinar a quantidade de objetos que correspondem a três frações que são equivalentes. Com esta questão os alunos podem verificar que as três frações, embora tenham termos diferentes, representam a mesma quantidade. Esta tarefa ainda leva os alunos a reconstruir a unidade, onde o modelo da barra os pode auxiliar, no entanto, não é feita qualquer referência à sua utilização. De salientar que nestas duas tarefas iniciais também houve o cuidado de fazer surgir quer frações próprias quer impróprias.

Depois de trabalharem com o significado operador, surge a **terceira** tarefa (Anexo 14), que permite aos alunos um novo contacto com a barra numérica, mas desta vez desenhada no papel. É-lhes pedido que representem, em barras numéricas, números racionais representados de várias formas (percentagem, decimal e frações). Com esta tarefa pretende-se ainda que os alunos utilizem, como operadores, as representações que lhes são facultadas, seguindo o trabalho desenvolvido na segunda tarefa, para determinarem a quantidade de pessoas presentes em cada evento.

De seguida surge a **quarta** tarefa (Anexo 15) com o intuito de propor aos alunos uma situação problemática, que envolve os significados de medida e parte-todo, uma vez que as tarefas anteriores já lhes facultaram um conjunto de ferramentas que lhes permitem resolver um problema. Nesta tarefa, pretende-se que os alunos utilizem um valor superior a um metro como unidade e prevê-se a utilização do modelo da barra numérica para resolver o problema, sugestionada pela forma do objeto em causa (espelho). É também uma situação adequada para os alunos recorrerem à representação de um número racional sob a forma de numeral misto, a quantidade exata de espelho, de acordo com o objetivo do problema.

Depois desta situação problemática, voltam a surgir as tarefas de exploração, com a **quinta** tarefa (Anexo 16), que vai utilizar conhecimentos da terceira (representação de números racionais na reta – desenhada no papel) e solicitar aos alunos que ordenem frações representando-as numa barra numérica. Ainda nesta tarefa é pedido aos alunos que determinem o número de metros correspondente a cada fração, utilizando a barra. Os alunos devem posicionar a fração (na linha inferior) e a sua correspondente medida (na linha superior), trabalhando com os números racionais, em simultâneo, com os significados de operador e de medida. Nesta tarefa os alunos também são incentivados a descobrir a relação que existe entre as três representações: fração, decimal e percentagem.

Na **sexta** tarefa (Anexo 17), os alunos trabalham com os racionais com o significado quociente, resultante de uma situação de partilha equitativa de sanduíches (como grandeza contínua) e de copos de sumo (como grandeza discreta), sendo-lhes solicitado que comparem e ordenem as quantidades resultantes dessa partilha. Esta tarefa surge na sequência de outras em que este significado foi trabalhado com grandezas contínuas (primeira tarefa), com grandezas discretas (segunda tarefa) e com a ordenação de racionais (quinta tarefa), mas, neste caso, são os próprios alunos que têm de determinar os números em causa. Não são dadas quaisquer indicações quanto à representação que devem utilizar, no entanto, era esperado que trabalhassem com frações dado ser uma representação sugestiva neste tipo de situações de partilha equitativa e que poderia facilitar a comparação das quantidades envolvidas. Posteriormente, é solicitado aos alunos que realizem a redistribuição das sanduíches e que verifiquem se o novo cenário criado é ou não mais justo.

Depois de representarem números racionais de diversas formas, de os compararem e ordenarem, surge a tarefa **sete** (Anexo 18), que utiliza exatamente estes dois aspetos e começa por solicitar aos alunos que representem a parte-todo da ocupação de três parques de estacionamento, por meio de várias representações (fração, decimal, percentagem e pictórica – barra numérica). Na parte final é feita uma primeira incursão no significado de razão, questionando os alunos sobre o parque mais rentável. Aqui os alunos terão de fazer uma comparação da representação parte-parte e não da parte-todo como vinham fazendo até ao momento.

A **oitava** tarefa (Anexo 19) surge com um propósito semelhante ao da quarta, propondo aos alunos uma situação problemática, no entanto, apresenta um novo modelo de representação de números racionais (setor circular) e a noção de densidade dos números racionais. Esta tarefa tem por objetivo a consolidação de conhecimentos, tais como a utilização de um número racional com os significados de parte-todo, envolvendo as várias representações (fração, decimal e percentagem), bem como a resolução de problemas envolvendo numerais mistos.

A **nona** tarefa (Anexo 20) retoma o significado de razão, cuja exploração tinha sido iniciada na tarefa sete. Com esta tarefa pretende-se que os alunos expressem a relação entre duas grandezas através da uma fração e que façam comparações entre as razões obtidas, de modo a que se apercebam da importância do uso de outras representações (percentagens ou decimais) nestas situações. O significado de razão, associado aos números racionais, foi o último a ser contemplado, com esta tarefa, e também aquele onde foi colocada menor ênfase, uma vez que é um objetivo essencialmente do 6.º ano de escolaridade.

Até este momento os alunos trabalharam em paralelo com as várias representações dos números racionais, associadas a quantidades, o que lhes permitiu compreender que determinada quantidade pode ser representada de diversas formas. No entanto, as questões da **décima** tarefa (Anexo 21) dão um enfoque maior à percentagem e à sua representação pictórica, associada a quantias monetárias, contextualizadas em situações de descontos e de iva. Ainda assim, dão liberdade ao aluno para utilizar a representação que lhe for mais favorável e para seguir a estratégia que entender. É por esse motivo que só neste momento surge esta tarefa, depois dos alunos trabalharem com as várias representações em paralelo e perceberem que podem optar pela que preferirem. A utilização da calculadora foi permitida nesta tarefa, uma vez que há um conjunto de cálculos morosos a realizar, no entanto, os alunos são incentivados a efetuar, mentalmente, cálculos simples (por exemplo, produtos de um número por 0,1 ou 0,2).

Finalmente surge a **décima primeira** tarefa (Anexo 22) que visa a consolidação de todos os tópicos abordados nas tarefas anteriores. Aqui os alunos devem recorrer à dupla linha numérica, em substituição da barra, para marcarem comprimentos, depois de recorrerem aos números racionais com o significado de operador. Esta tarefa também possibilita que os alunos identifiquem, por meio da representação que preferirem, a parte de um todo, que comparem, adicionem e subtraiam racionais e que reconstruam a unidade.

É de salientar que algumas tarefas, nomeadamente a oito a 11 e parte da dez (questões dois e três) não foram realizadas na aula de Matemática. As tarefas oito e 11 foram realizadas numa aula de Estudo Acompanhado, tendo a oito sido discutida na mesma aula e a 11 discutida na aula de Matemática. As questões dois e três da tarefa dez foram realizadas em casa, tendo a sua discussão sido efetuada na aula de Matemática.

5.3. Concretização da experiência de ensino

A realização de cada tarefa na aula compreendeu três etapas, começando pela sua apresentação por parte da professora Inês e interpretação por parte dos alunos; a sua realização através do trabalho autónomo dos alunos (em grupos de quatro elementos) e a discussão/reflexão final em grupo-turma (Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998). Relativamente a este último momento da aula, os alunos foram sempre incentivados pela professora Inês a explicar as estratégias utilizadas, analisando-as, comparando-as entre si e, eventualmente, identificando as mais adequadas em cada situação, o que vai ao encontro do que é defendido por Ponte et al. (1998). Este modo de trabalhar na sala de aula de Matemática, dando principal relevo às interações com e entre os alunos, está em sintonia com o ambiente de sala de aula identificado na conjetura pedagógica da EE (Smith et al., 2009; Stein et al., 2008). É importante realçar que este modo de trabalho era já uma prática comum da sala de aula, não tendo a EE perturbado nem modificado os hábitos de trabalho dos alunos ou da professora.

Nesta secção descreve-se, globalmente, a forma como a turma realizou as tarefas, evidenciando-se as estratégias que adotaram e as dificuldades que enfrentaram, bem como algumas intervenções da professora que se revelaram muito importantes para o trabalho com os números racionais.

5.3.1. Partilha de chocolate (Tarefa 1)

Esta tarefa (Anexo 12) estava prevista para duas aulas de 90 minutos, no entanto, pelo facto dos alunos não terem trabalhado com os números racionais no 1.º ciclo, conforme o estipulado no programa de Matemática, a resolução e discussão da mesma durou o dobro do tempo previsto. Apesar deste contratempo, a realização tarefa revelou-se um momento de aprendizagem muito rico e frutífero, uma vez que surgiram muitas ideias-chave acerca dos números racionais que eram desconhecidas para os alunos.

As intervenções da professora[31] nesta tarefa foram fundamentais para que os alunos compreendessem o que se pretendia com a mesma e para a apropriação da barra numérica por parte dos alunos. A professora começou por distribuir quatro tiras de papel por cada grupo, referindo que cada uma representava um chocolate e solicitou aos alunos que escrevessem o nome da Luana numa, do Nicolau noutra e do João noutra, dizendo que a quarta ficaria em branco e propôs que parte da primeira questão (relativa à Luana) fosse realizada em grupo, com a sua orientação.

Logo no início da aula, emergiram as três representações de um número racional quando a professora pegou na tira de papel que não tinha nome e questionou os alunos no grupo-turma sobre quanto valia essa tablete:

Cristiano: 100, 100%!
T1[32]: Um!
T2: 100% é uma unidade!
T3: Ou um traço um!

Os alunos revelam que identificam a tira de papel como uma unidade. Posteriormente, a professora Inês questionou-os sobre o que escreviam na primeira linha da tabela, tendo surgido de imediato a fração, que os alunos não sabem ainda nomear, pois dizem que:

Cristiano: Escrevemos um traço dois! Um em cima, traço …
Dinorah: Traço na horizontal!
Cristiano: E dois em baixo!

[31] A Professora Inês está identificada com a letra (I), a Professora-investigadora está identificada com a letra (H).
[32] A letra "T" representa elementos da turma que não integram o grupo estudo de caso.

Apesar de utilizarem uma linguagem informal, os alunos do grupo identificam a fração que corresponde à situação – "um traço dois" – revelando compreender a ideia subjacente ao significado parte-todo. No entanto, aqui novamente a intervenção da professora é fundamental, uma vez que questiona os alunos sobre o significado dos números que lhe indicaram.

Professora (I): O que representa o dois que vocês escreveram em baixo do traço?
Cristiano: São as duas partes iguais! (apontando para o enunciado)
Aida: Sim! E o um é a parte que cada uma comeu!

Aquando da dobragem das tiras que lhes foram facultadas, para representar de forma concreta as situações, verificou-se uma grande preocupação por parte dos alunos do grupo para que as partes resultantes dessa dobragem tivessem o mesmo tamanho. Este cuidado por parte destes alunos é uma evidência que estão a apreender a relação parte-todo.

Além de os alunos do grupo terem concretizado a esquema de partilha equitativa, através das tiras de papel que lhes foram facultadas, identificam a fração "um traço dois" (como lhe chamam) como uma divisão, uma vez que compreendem que o denominador significa o número de partes iguais em que a unidade tem de estar dividida (Lamon, 2006). Além disso, os alunos do grupo compreendem que o denominador (dois) se refere à porção que se partilha, ao passo que o numerador (um) se refere à parte da unidade que é partilhada (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006).

De seguida a professora pergunta aos alunos o que escreveram na coluna da representação decimal, e os mesmos respondem 0,5 e 0,50. Neste momento a professora questiona a turma sobre qual dos dois valores estará correto, sendo que os alunos rapidamente referem que são a mesma coisa havendo inclusive quem acrescente o 0,500 e diga que também é igual, justificando que o primeiro são décimas, o segundo centésimas e o terceiro milésimas. Deste modo a professora Inês prossegue, passando para a percentagem:

Professora (I): E na percentagem, o que escreveram?
T2: Nós pensámos que se a tablete inteira é a unidade e é igual a 100%, então metade de 100% é 50%!

Depois da orientação da professora Inês na concretização de uma parte da primeira questão, os alunos trabalharam em pequeno grupo na restante parte desta questão e nas questões seguintes. Para terminarem a primeira questão, recorreram às tiras de papel distribuídas de modo a concretizarem a partilha equitativa das tabletes de chocolate e facilitar a comparação de quantidades, nas restantes questões.

Ainda durante a primeira questão, se a partilha da tablete da Luana e do Nicolau, não suscitava grandes dificuldades, por resultar em números familiares para os alunos (metade e a quarta parte), o mesmo não aconteceu com a partilha da tablete do João, uma vez que esta envolvia a oitava parte. Para determinarem o decimal e a percentagem, os alunos compreenderam que deviam dividir a unidade por oito, no entanto, a dificuldade surgiu aquando da concretização do cálculo (1:8), pelo que muitos alunos, depois de várias tentativas com o papel e lápis, recorreram à calculadora.

Passando para a questão seguinte, onde os alunos eram questionados sobre com quem preferiam partilhar chocolate, as respostas foram diversas, dependendo do gosto por chocolate de cada um:

> **Mariana:** Com a Luana. Porque é a que ficou com mais chocolate.
> **T2:** Eu preferia partilhar a tablete com o João porque eu não gosto muito de chocolate, por isso preferia o que me desse menos.
> **T6:** Com o Nicolau. Porque eu gosto mais ou menos de chocolate e o Nicolau nem tem muito nem tem pouco chocolate.

A resposta dos alunos a esta questão evidencia a importância do contexto da tarefa, pois este levou-os a associar a tarefa a situações familiares, atribuindo significado às questões colocadas e, desta forma, facilitando a sua resolução.

A questão seguinte pedia aos alunos que comparassem várias quantidades de tabletes, e estes não revelaram dificuldades, uma vez que utilizaram as tiras de papel que lhes foram facultadas para concretizar as comparações. Os alunos aperceberam-se rapidamente que as partes que lhes pediam para comparar representavam a mesma quantidade, pelo que responderam de forma unânime: “tanto faz”.

Um dos objetivos desta tarefa era fazer surgir a equivalência entre números racionais. No entanto, inicialmente os alunos apenas expressaram a mesma por meio de palavras (“tanto me faz”), pelo que a professora Inês interveio para que os alunos estabelecessem uma relação de equivalência entre números racionais, utilizando números em vez de palavras (Figura 55).

1.2.2. comer uma parte da tablete da Luana ou quatro partes da tablete do João? Explica.

Tanto me faz. Porque 1 parte da tablete da Luana é igual a 4 partes da tablete do joão.

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$$

Figura 55 – Resposta à questão 1.2.2. de T6.

Apesar de os alunos terem estabelecido esta equivalência ($\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$), esta foi uma fase que se revelou problemática, nomeadamente a fase de escrever uma fração que representasse a parte-todo. Depois de os alunos terem interpretado a fração como o quociente (uma unidade dividida em duas, quatro e oito partes iguais), alguns não conseguiam interpretá-la como relação parte-todo, mas com o apoio da professora conseguiram ultrapassar essa dificuldade.

Professora (I): Então como escrevem duas partes da tablete do Nicolau?
T6: Um traço quatro!
Professora (I): Peguem na tablete do Nicolau e olhem! Queremos duas partes.
T2: Um traço quatro mais um traço quatro!
Professora (I): Um quarto mais um quarto! Ok! Mas estás a dar-me duas frações, eu quero só uma!
T5: Um e quatro?!
Professora (I): Nessa fração, um quarto, o que representa o quatro?
T3: O número de bocados da tablete!
Professora (I): Ok! O Nicolau dividiu a tablete em quatro bocados e comeu quantos?
T2: Um!
Professora (I): Muito bem! Então qual é a fração que representa o que o Nicolau comeu?
T6: Um traço quatro!
Professora (I): Sim! Um quarto! E se em vez de comer um bocado, ele comesse dois?
T1: Dois traço quatro!
Professora (I): Muito bem, dois quartos!

A intervenção da professora Inês revelou-se fundamental para que os alunos flexibilizassem a ideia com que tinham ficado aquando da resolução da primeira questão, para compreenderem o significado parte-todo dos números racionais. Apesar de os alunos não saberem nomear as frações, é de salientar que, nesta primeira tarefa, a professora Inês não exige que o façam, mas vai ao longo das suas intervenções na aula, nomeando as frações de forma correta, para que os alunos se vão familiarizando com a leitura das frações, tal como a própria refere, quando diz para os alunos: "Não precisam já de saber ler frações, mas eu vou lendo-as de forma correta para elas vos irem ficando no ouvido".

Finalmente, na última questão (1.6.), que sugere a adição de racionais, surge uma variedade de estratégias. Alguns alunos adicionam as frações pictoricamente, recorrendo ao desenho da barra, outros transformam as frações em percentagens e apresentam o resultado em percentagem e outros utilizam as percentagens e as frações em simultâneo. No entanto, alguns alunos cometem o erro frequente de interpretar uma fração com sendo dois números isolados, adicionando numeradores e denominadores (Behr et al. 1984; Empson, 1999; Cruz & Spinillo, 2004), apesar de terem conseguido representar cada uma das frações numa barra, como é o caso do aluno cuja resposta se apresenta na Figura 56.

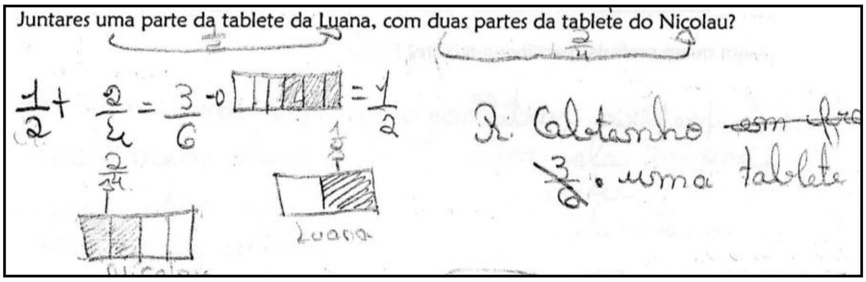


Figura 56 – Resposta à questão 1.6. de T7.

Esta questão fez surgir uma situação imprevista, quando um aluno (T4), no momento da discussão no grupo-turma foi ao quadro e, tentou efetuar a adição das frações $\frac{1}{2}, \frac{2}{4} e \frac{4}{8}$ como se se tratasse de uma adição de números inteiros, através do algoritmo da adição, colocando as frações na vertical. No entanto, o aluno ficou num impasse e como não conseguia apresentar o resultado em fração, resolveu apresentá-lo sob a forma de percentagem (150%). A professora levou a turma a analisar esta estratégia.

Professora (I): É verdade aquilo?
T3: Numa conta se as parcelas são frações a soma tem de ser uma fração!
T2: Ai é?! Então há bocado a T8 disse que um meio mais dois quartos era uma unidade e tu não disseste nada!
T3: Então porque é verdade!
Professora (I): Mas dois quartos e um meio são frações e o resultado não!
T1: O T4 pode fazer aquilo, porque cada fração que ele escreveu vale 50%, por isso as três juntas é 150%!
Professora (I): T3, qual é a tua opinião? O T1 está certo?
T3: Sim, cada fração é 50%, por isso as três juntas é 150%, mas eu pensava que o resultado tinha de vir também em percentagem!
Professora (I): Então e seu eu te perguntar o resultado de $\frac{1}{2} + 1{,}5 + 0{,}5$?
T3: É dois vírgula cinco!
Professora (I): Tens lá uma fração e um decimal! Deste a resposta com um decimal. Não podias ter dado a resposta em fração ou até em percentagem?
T3: Podia, são formas diferentes de se escrever a mesma coisa!
Professora (I): Então vamos todos olhar para aquela adição. Quantas unidades inteiras tenho?
T2: Duas!
Professora (I): Então eu posso escrever o resultado, utilizando um numeral misto, assim $2\frac{1}{2}$, é assim chamado porque tem uma parte inteira e uma parte fracionária.
T2: Isso significa que tenho duas unidades inteiras e uso metade de uma terceira unidade?!

Começa a ser aceite pelos alunos que as várias representações de números racionais podem coexistir numa mesma adição, uma vez que compreendem, tal como T3 refere, que "são formas diferentes de se escrever a mesma coisa". Verifica-se também que os alunos conseguem apresentar o resultado da operação, optando pela representação com que se sentem mais à vontade. Além disso, os alunos também aprenderam a escrever numerais mistos, sendo que alguns alunos evidenciam ter compreendido o seu significado. Para esta aprendizagem contribuíram, significativamente, as intervenções da professora que levaram a discussões mediadas pela própria e a reflexões sobre as conceções de cada um.

Com a primeira tarefa os alunos começaram a compreender que um número racional se pode representar de várias formas (decimal, fração e percentagem) e que a barra pode ser uma ferramenta útil na resolução de algumas questões. Para este último aspeto, contribuiu a exploração que a professora Inês fez das tiras (que os alunos representaram no papel como uma barra), ao dizer que estas podem servir para representar um objeto que não se tem fisicamente e assim facilitar o nosso raciocínio.

5.3.2. Adereços nos bastidores (Tarefa 2)

Esta tarefa (Anexo 13) inicia-se com uma situação em que os alunos tinham que identificar o número de caixas, com seis botões, necessário para colocar cinco botões em quatro casacos com o intuito de os levar a usar um numeral misto. Esta questão não se revelou difícil para os alunos, os quais recorreram a uma multiplicidade de estratégias de resolução, a esquemas, a cálculos, ou a uma combinação das duas. No momento da discussão desta questão no grupo-turma a professora interveio de modo a levar os alunos a representarem a quantidade exata de botões necessários, fazendo surgir os numerais mistos:

Professora (I): São precisas quantas caixas?
T6: Quatro!
Professora (I): Completas?
T3: Não! Três completas e dois botões de outra!
Professora (I): Podem representar isso com um numeral misto?
T3: Sim! Da quarta caixa só usamos um terço!
Dinorah: A parte inteira é 3!
T2: $3\frac{1}{3}$!
Professora (I): Que corresponde a três caixas mais dois botões.

Numa outra questão (2.1.), os alunos revelaram alguma hesitação porque acharam que só conseguiriam resolver a questão se soubessem quantos laços estavam em cada caixa. A professora fez a interpretação da questão, simplificando-a e questionando os alunos, "se uma caixa dá para 16 vestidos, para quantos vestidos dão quatro caixas?", ao que os alunos responderam 64. Então a professora esclareceu, "pois muito bem, mas eu não tenho 64 vestidos, só tenho 30, será que preciso de tanta caixa?". Esta intervenção da professora ajudou-os a compreender a situação e acabaram por resolver a questão corretamente.

Depois de resolverem esta questão, quando chegaram à seguinte (2.2.) alguns alunos voltaram a mostrar insegurança, achando que tinham resolvido incorretamente a questão anterior. Os alunos confundem 30 vestidos com 30 laços, chegando à conclusão que cada vestido leva dois laços, o que se assim fosse, de facto, só seria necessário abrir uma caixa (questão 2.1.). Os alunos ficam num impasse, não resolvendo mais nenhuma questão da tarefa, pelo que a professora interpela a turma:

> **T5:** Então uma caixa tem 32 laços e duas caixas têm 64! Então para 30 vestidos só tem de abrir uma caixa (achando que a questão 2.1. estava errada)
> **Professora (I):** Calma! Quantos laços são precisos para cada vestido?
> **T5:** 2!
> **Professora (I):** Se uma caixa dá para 16 vestidos, quantos laços tem?
> **T8:** 32!
> **Professora (I):** Então para trinta vestidos quantos laços precisa?
> **T8:** 60!
> **Professora (I):** Então e uma caixa é suficiente?
> **T5:** Não! Têm de ser duas! Apesar de sobrarem quatro laços!

A intervenção da professora revela-se fundamental para que estes alunos consigam desbloquear, sentir mais confiança nas suas resoluções e prosseguir na resolução das restantes questões desta tarefa.

Nesta tarefa os alunos ainda tiveram oportunidade de contactar com frações equivalentes, no entanto, a maioria só se apercebeu desse facto depois de calcularem o valor de moedas correspondente a cada uma das frações (significado operador).

A questão que solicitava aos alunos a reconstrução da unidade foi resolvida por todos com recurso à barra numérica. Os alunos desenharam a barra, dividiram-na em cinco partes e compreenderam que quatro partes juntas correspondiam a oito estrelas, logo, a parte que faltava para terem a unidade completa valia duas estrelas, concluindo que a unidade em causa é constituída por dez estrelas.

Esta tarefa permitiu aos alunos um reforço do trabalho com os numerais mistos, proporcionado pela intervenção da professora, que revelam compreender, bem como o contacto com frações equivalentes que inicialmente não são reconhecidas como tal. Além disso, permitiu a utilização do modelo da barra como suporte à reconstrução da unidade, sem que isso tivesse sido incentivado de forma explícita.

5.3.3. Eventos no cineteatro (Tarefa 3)

Esta tarefa (Anexo 14) não suscitou dificuldades nos alunos nem requereu intervenções por parte da professora. Verifica-se que os alunos começam não só a compreender o que são frações equivalentes, como também as colocam "ao serviço" da resolução das questões desta tarefa. Este facto torna-se evidente quando para marcar dois quintos na barra numérica, existem alunos que a dividem em dez partes iguais e apontam a quarta marca, o correspondente a quatro décimos, como a representação de dois quintos.

Esta tarefa revela também que o facto de os números racionais poderem ser representados de diversas formas, é compreendido e aceite pelos alunos, uma vez que as suas preferências divergem entre frações e decimais, compreendendo que podem transformar percentagens e frações em decimais.

5.3.4. Cenário de espelhos (Tarefa 4)

Esta tarefa (Anexo 15) questionava os alunos sobre a quantidade de espelhos necessária (cada um com 1,2m de comprimento) para preencher o fundo de um palco (com 7m de comprimento). As estratégias usadas inicialmente pelos grupos foram essencialmente de dois tipos. Uma das estratégias foi a realização de adições sucessivas do comprimento de cada espelho, até perfazer um total superior ao valor pretendido. A outra estratégia que os alunos seguiram baseou-se inicialmente na estimação de uma resposta (cinco espelhos), mas que ao verificarem pela multiplicação que obtinham um valor inferior ao pretendido, adicionaram o comprimento de mais um espelho, chegando então a 7,2m (seis espelhos).

Os alunos consideraram o número inteiro de espelhos efetivamente utilizados para realizar o trabalho referido, no entanto, aquilo que se pretendia era que eles determinassem com exatidão que quantidade de espelhos estava aqui em jogo. Assim sendo, a professora Inês resolveu fazer um ponto da situação na exploração da tarefa e questionou-os sobre o número de espelhos inteiros presente na sua resposta (cinco espelhos) e sobre a representação possível para a parte utilizada no sexto espelho. Dado que em tarefas anteriores, os alunos já tinham trabalhado com a representação de um número racional sob a forma de numeral misto, tinha-se a expectativa de que essa forma de representação iria surgir nos grupos.

Após os alunos terem trabalhado em pequeno grupo, durante aproximadamente 30 minutos, a professora Inês inteirou-se das respostas dos vários grupos e passou à fase de discussão com o grupo-turma, tendo começado por registar no quadro as respostas de cada grupo, surgindo dois numerais mistos, o $5\frac{5}{6}$ e o $5\frac{10}{12}$. Estes dois números levaram a professora Inês a suscitar uma discussão com a turma sobre a correção das duas respostas, aparentemente diferentes. Os alunos rapidamente evidenciaram reconhecer a equivalência entre as frações presentes nos dois numerais mistos, o que os levou a afirmar com segurança que ambas as respostas estavam corretas.

É de salientar que a parte fracionária dos numerais mistos foi obtida, por todos os grupos, com recurso à barra numérica. A única diferença que se registou entre as resoluções apresentadas foi a quantidade de divisões que efetuaram na barra (seis ou 12), o que os conduziu a frações com termos diferentes mas equivalentes.

Os alunos conseguem resolver com sucesso o problema, sem dificuldades, utilizando a barra numérica como um instrumento para pensar. Além disso reconhecem uma unidade de referência, e desenvolvem estratégias para definir a subunidade e identificar uma relação entre a parte e o todo. As intervenções da professora serviram para orientar os alunos na utilização de numerais mistos e para os focar na equivalência de frações.

5.3.5. Tarde nas piscinas municipais (Tarefa 5)

A primeira questão desta tarefa (Anexo 16) revelou-se um pouco difícil para os alunos. Estes tinham de posicionar na barra numérica quatro frações com denominadores diferentes. Apesar de os alunos conseguirem determinar frações equivalentes nesta questão não conseguiram servir-se desse conhecimento para a resolver. Ou seja, sem a intervenção da professora, eles não converteram as frações apresentadas noutras equivalentes com o mesmo denominador.

As frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ facilmente foram marcadas na barra, no entanto, para marcarem as frações $\frac{2}{10}$ e $\frac{3}{5}$ a maioria dos alunos começou a apagar as divisões feitas anteriormente, uma vez que não conseguiam marcas nas posições desejadas. A partir do momento que os alunos efetuam subdivisões na barra e estas não coincidem com os denominadores das frações que faltam posicionar, têm dificuldades em fazê-lo, o que também foi identificado por Behr et al. (1983).

Nesta altura, a professora Inês interveio fazendo referência às frações equivalentes como facilitadores do trabalho. Após esta intervenção, os alunos ficaram mais elucidados e compreenderam que não precisavam apagar as divisões efetuadas, porque poderiam encontrar frações equivalentes, com denominador vinte, por ser, segundo eles "o número que existe nas quatro tabuadas (do dois, do quatro, do cinco e do dez)", tendo assim resolvido a questão sem dificuldades.

Esta tarefa permitiu ainda aos alunos registar uma regra que permite transformar uma percentagem num decimal e vice-versa, uma vez que, no momento da discussão da última questão no grupo-turma, a professora questionou-os sobre como fazer essa transformação.

5.3.6. Lanche no cineteatro (Tarefa 6)

Inicialmente, esperava-se com esta tarefa (Anexo 17) que os alunos comparassem frações representativas de uma situação de partilha equitativa ($\frac{7}{8}, \frac{4}{5} e \frac{3}{4}$). Contudo, como não foi solicitada nenhuma representação em particular, ficando esta ao critério dos alunos a partir da interpretação do enunciado, todos os alunos optaram pela percentagem. A diferença de estratégia entre os grupos reside no modo como realizaram a partição de cada sandes. Houve alunos que aplicaram a estratégia da distribuição (maioria) e outros a estratégia das peças preservadas (Lamon, 1999).

As intervenções da professora Inês, nesta tarefa, resumem-se à mediação da discussão das estratégias seguidas por cada grupo, no grupo-turma, nomeadamente na elucidação dos alunos sobre a distribuição das sandes (quantidade de pessoas e de sandes em cada mesa). Uma vez que a maioria dos alunos segue a estratégia da distribuição, a professora Inês dá principal relevo à discussão da estratégia peças preservadas, levando-os a associar a cada parte resultante da partição, um decimal e uma fração, uma vez que a percentagem já tinha surgido na resolução de todos os grupos.

5.3.7. Estacionamento no cineteatro (Tarefa 7)

A primeira questão desta tarefa (Anexo 18) suscitou alguma dificuldade na representação em forma de fração da ocupação do parque dois, por parte de alguns alunos. Estes facilmente identificaram o numerador (24) e o denominador (40), no entanto, resistiam a usar uma fração com termos tão grandes. Ainda assim, não utilizaram o conhecimento da equivalência de frações (ao contrário do grupo do aluno T8 – Figura 57) e começaram a sentir-se perdidos, pelo que a intervenção da professora Inês foi fundamental para desbloquear o impasse em que se encontravam.

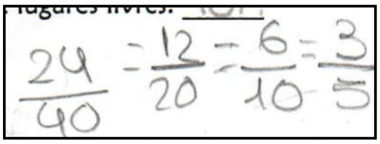


Figura 57 – Resposta à questão 1 do grupo da T8.

Para tentarem encontrar termos menores, os alunos recorreriam à barra numérica, que se encontrava na questão dois, no entanto nas várias tentativas que fizeram, dividiram a barra num número par de partes e por isso obtinham uma marca no vinte e não em vinte e quatro, como precisavam. A professora Inês intervém no sentido de os incentivar a dividir a barra num número ímpar de partes. Depois desta intervenção, os alunos que já tinham dividido a barra em quatro partes, experimentaram dividi-la em cinco partes, encontrando de imediato a fração três quintos.

Os outros alunos recorreram ao quociente de vinte e quatro por quarenta, tendo passado o decimal obtido para uma percentagem (60%). Posteriormente recorreram à barra numérica usada na questão dois e uns dividiram-na em dez partes e outros em cinco, marcando a percentagem e encontrando a fração correspondente.

Para resolverem a questão cinco, a professora Inês teve de intervir e explicar aos alunos que o que se pretendia era que representassem por uma fração a relação entre os lugares ocupados e os lugares livres de cada parque. Os alunos prosseguiram então a resolução sem mais dificuldades.

A intervenção da professora Inês nesta tarefa também se revelou fundamental aquando da discussão da questão quatro, no grupo-turma. Os alunos facilmente identificaram o parque mais rentável porque perceberam que tinham de olhar para a percentagem de ocupação. Contudo, a professora Inês reforçou a importância da percentagem na comparação de partes de unidades diferentes, tendo apresentado aos alunos uma outra questão para pensarem. Deste modo a professora referiu o seguinte: "Quando queremos comparar o insucesso de duas turmas, fazemo-lo comparando a percentagem de negativas de cada turma, porque há turmas com mais alunos e outras com menos. Por isso um aluno numa turma não vale a mesma percentagem que um aluno de outra turma". Depois desta explicação a professora colocou uma nova questão: "Imaginem que têm uma turma com 20 alunos e nessa turma houve cinco negativas. Temos agora outra turma de dez alunos que tem quatro negativas. Onde o insucesso foi maior?". Os alunos apressaram-se a calcular a percentagem de negativas, afirmando que é na segunda turma que o insucesso é maior.

Com esta tarefa percebeu-se que alguns alunos continuam a revelar dificuldade na utilização da equivalência de frações para resolverem algumas das questões propostas. No entanto, aparentemente compreendem a importância da percentagem em situações que envolvem comparações entre partes de todos diferentes (significado de razão).

5.3.8. Depósito de gasolina (Tarefa 8)

Esta tarefa (Anexo 19) coloca os alunos perante um novo modelo – depósito de gasolina representado por um sector circular. Apesar de a tarefa solicitar aos alunos a representação sob a forma de fração, decimal e percentagem da quantidade de gasolina utilizada, os alunos representaram a quantidade de gasolina que ainda restava em cada automóvel, porque era isso que o sector circular mostrava.

É de salientar que, para darem resposta à questão número dois, todos os grupos subdividiram ainda mais o depósito de gasolina dos pais do Nicolau, uma vez que o ponteiro deste se encontrava entre duas marcas. No momento da discussão no grupo-turma, a professora aproveitou esse facto para levar os alunos a compreender que entre dois números racionais se encontram sempre outros números racionais. Deste modo, a professora Inês chamou a atenção dos alunos para o facto de entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{4}$ eles terem encontrado a fração $\frac{3}{8}$. Além disso questionou-os se entre aquelas duas frações não poderiam existir mais, ao que alguns alunos responderam que sim, bastava fazer divisões mais pequenas.

A terceira questão revelou-se complexa para alguns alunos, sendo que apenas dois grupos conseguiram terminar a tarefa. Todos os alunos conseguiriam expressar o numeral misto em termos de quantidade de gasolina, referindo que a cada 30km gasta 2,5 litros ($2\frac{1}{2}$) de gasolina! Além disso, também constataram que os pais do Nicolau chegavam à gasolineira com o depósito vazio, uma vez que ainda se encontravam a 90km da gasolineira, e que por isso iriam gastar 7,5 litros (2,5x3), que era a quantidade de gasolina que lhes restava. Todos os alunos fizeram esta interpretação da questão, no entanto, somente dois grupos conseguiram desenvolver uma estratégia de resolução e completar a tarefa.

Apesar de se ter revelado uma tarefa relativamente difícil pelos obstáculos que suscitou, os alunos lucraram com a mesma, por terem trabalhado com um novo modelo, cujo seu funcionamento passou a fazer parte dos seus conhecimentos e também por terem tomado consciência da densidade dos números racionais.

5.3.9. O pintor Pedro e as vitaminas (Tarefa 9)

Esta tarefa (Anexo 20) contextualizava o significado razão, já aflorado na tarefa sete. As questões desta partiam da representação da relação entre duas grandezas com posterior comparação entre elas. A primeira questão suscitou algumas dificuldades na sua interpretação, revelando que os alunos não compreenderam que deviam representar a relação entre as duas latas de tinta numericamente. Esta dificuldade na compreensão da questão terá decorrido da sua não muito clara formulação, ao questionar sobre como iria variar a tonalidade da tinta, pelo que foi reformulada de imediato. Perante a questão muitos alunos responderam-lhe narrativamente, tendo-se notado que alguns consideravam a tinta mais clara no dia em que existiam mais latas de tinta branca, não as relacionando com o número de latas de tinta azul.

Enquanto a professora Inês esclareceu o objetivo da questão – ordenar os dias de acordo com a tonalidade da tinta –, alguns alunos mostram compreender a necessidade de relacionar as quantidades das duas tintas e rapidamente começam a estabelecer uma relação de "um para um" entre as latas de tinta.

Perante a segunda questão, que envolvia uma situação de diluição, alguns alunos ainda manifestaram alguma dificuldade na compreensão do significado razão, no entanto, outros relembram-nos da importância de considerar as duas grandezas (copos de concentrado e colheres de açúcar). Posto isto, todos os grupos rapidamente dividiram uma grandeza pela outra, havendo, no entanto quem dividisse açúcar por copos e quem fizesse o oposto.

Durante a discussão no grupo-turma, a professora Inês salienta que ambas as opções de cálculo são consideradas válidas, no entanto, a interpretação que se faz dos resultados obtidos tem de ser diferente. Efetivamente, o grupo que dividiu os copos de concentrado por colheres de açúcar considerou que o dia em que o sumo estava mais doce, era a quarta-feira por ser o dia em que o valor obtido era maior – 1,3(3), porém não consideraram o significado do valor obtido de acordo com o contexto.

Ainda no momento da discussão no grupo-turma desta questão, surgem as várias representações em simultâneo, inclusivamente os numerais mistos, pelo que a professora Inês questiona a turma sobre a relação entre todos os valores obtidos, chegando mesmo a dizer que eles chegaram a respostas aparentemente diferentes. Contudo, os alunos revelam compreender as várias representações dos números racionais, pois referem que os grupos, embora tenham apresentado diferentes representações o valor a que se referem é o mesmo.

5.3.10. Compras na bit-@-byte (Tarefa 10)

Esta tarefa (Anexo 21) permitia que os alunos trabalhassem com percentagens em situações de descontos e aumentos, sendo-lhes apresentados pictoricamente por um diagrama circular. Ninguém teve dificuldades em associar a parte sombreada dos diagramas circulares, a 60% (questão um – situação de desconto) e a 120% (questão três – situação de aumento). Houve também alunos que, na situação de aumento, associaram ao diagrama não só uma percentagem, como também um numeral misto.

Os alunos não revelaram dificuldades em utilizar uma percentagem como um operador e calcular uma determinada quantia monetária em função de uma percentagem. A dificuldade que todos os alunos sentiram, foi o facto de não compreenderem que também as percentagens estão associadas a uma relação (van den Heuvel-Panhuizen, 2003), pelo que 20% de desconto não representa sempre a mesma quantia monetária, esta depende do valor inicial do produto.

Ao constatar que todos os alunos estavam com a mesma dificuldade, a professora Inês interveio de modo a levar os mesmos a refletirem sobre a dificuldade apresentada, por meio de exemplos práticos simples. A professora Inês questionou os alunos da seguinte forma: "Tens umas calças que custam 50€ e têm um desconto de 50%, quanto custam?"; "Agora tens um vestido que custa 40€ e que também tem um desconto de 50%, quanto custa?". Após os alunos responderam corretamente a professora reforçou que apesar de ambas as peças terem a mesma percentagem de desconto, numa o desconto foi de 25€ e na outra foi de 20€, pelo que a percentagem não corresponde sempre à mesma quantia monetária, "ela depende da nossa unidade". Apesar da intervenção da professora Inês, um ou outro aluno continuou com relutância em aceitar este facto, pelo que o trabalho em pequeno grupo se revelou de grande importância, uma vez que os alunos se iam ajudando uns aos outros, recorrendo-se de várias estratégias para elucidar os colegas e explicando-lhes a noção de percentagem.

É de salientar que no momento da discussão no grupo-turma, houve alunos que destacaram o facto de existir uma forma mais rápida para se calcular o valor a pagar perante um desconto, ao referirem que se o desconto é de 60%, significa que só pagaria 40%, então bastaria calcular 40% do valor do objeto, para saber quanto se tem de pagar.

Pegando nesta conclusão, e na da segunda questão em que os alunos exercitaram o cálculo de 10% relativamente a vários valores, tendo concluído que basta multiplicar o valor monetário por 0,1, a professora Inês aproveitou para exercitar o cálculo mental, por meio de questões orais que envolviam percentagens, incluindo a multiplicação por 0,1 (10%): "quanto pago a menos por uns cadernos que custam 2,5€, mas que estão com um desconto de 10%?".

5.3.11. Descobrindo comprimentos e quantidades (Tarefa 11)

Esta tarefa percorria de uma forma geral quase todos os conteúdos abordados ao longo da EE, servindo deste modo com um exercício de aplicação dos conhecimentos adquiridos e como fecho da EE. As questões foram resolvidas sem que os alunos evidenciassem quaisquer dificuldades, tendo sido notória alguma diversidade de estratégias. Na primeira questão (1.1.) todos assumiram que a dupla linha numérica correspondia ao comprimento do comboio do Norberto (1,20m) e depois dividiram-na em quatro partes para conseguirem marcar e identificar a medida do comboio da Sofia, uma vez que $\frac{1}{2}$ (Nelson) era facilmente identificado. Foi curioso, que um dos alunos fechou a dupla linha, tendo-a transformado numa barra porque as duas linhas lhe faziam confusão. A quarta questão (1.4.), que envolvia a reconstrução da unidade, também todos os alunos a resolveram sem dificuldades, no entanto, as estratégias seguidas foram diferentes, enquanto alguns recorreram à linha ou à barra numérica, outros recorreram a cálculos.

Na questão dois da tarefa doze os alunos tinham de adicionar, subtrair e comparar diferentes quantidades representadas pictoricamente. Também aqui todos os alunos foram bem-sucedidos, seguindo estratégias diversificadas. Todos os alunos subdividiram os diagramas em partes iguais, de forma a terem sempre o mesmo denominador, posteriormente se uns adicionaram frações, outros transformaram-nas em percentagens e adicionaram-nas. Nesta questão é de salientar que houve ainda quem efetuasse a adição com recurso à linha numérica, aspeto que a professora Inês, aquando da reflexão no grupo-turma, deu bastante realce por ser um modelo que pode ser muito útil na adição e subtração de racionais. Além desta tarefa ter permitido os alunos fazerem uma síntese dos seus conhecimentos, a professora Inês chamou novamente a atenção para a densidade dos números racionais, mencionando que entre duas marcas consecutivas podem surgir outras que correspondem a outro número racional. Assim sendo, entre dois racionais existem outros que podem ser determinados.

CAPÍTULO VI

DESENVOLVIMENTO DO CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL NA TURMA

Neste ponto começa-se por fazer uma breve caracterização de cada elemento que constitui o grupo estudo de caso. Depois, tendo por base as categorias de análise definidas no capítulo da metodologia, analisam-se os conhecimentos que os alunos do grupo estudo de caso revelam antes (teste inicial), durante e depois (teste final) da experiência de ensino, que surgem organizados pelas respetivas categorias de análise. Além disso, entre a análise do teste inicial e a análise do teste final, tendo por base também as mesmas categorias, é realizada uma análise da atividade do grupo estudo de caso durante as tarefas que constituem a experiência de ensino.

Parte I – Cristiano, Dinorah, Mariana e Aida: O Grupo Estudo de Caso

6.1. Caracterização dos elementos do grupo estudo de caso

Cristiano é um rapaz de 11 anos natural do leste europeu, mas que domina muito bem a Língua Portuguesa. Vive com os pais, e com um irmão mais velho, que apesar de serem empenhados no percurso escolar do Cristiano nem sempre o conseguem apoiar no estudo, uma vez que possuem poucas habilitações académicas. É uma criança de olhar meigo, simpática, sociável e enérgica que não descura uma oportunidade de brincadeira, mesmo durante o trabalho. O Cristiano é um aluno com um bom raciocínio, chegando muitas vezes a respostas corretas, no entanto quando lhe são pedidas justificações diz que não sabe explicar. Frequentemente afirma que tem a certeza que o resultado é aquele, mas que o motivo não consegue explicar. É um aluno que por ser um pouco "brincalhão" se distrai muito facilmente e deixa o trabalho de sala de aula para segundo plano, caso não tenha alguém que o envolva ativamente na tarefa. Por esse motivo, realiza as tarefas muito rapidamente, quase de uma forma mecânica, não se apercebendo bem do que a tarefa solicita. Só na altura da discussão, ou quando alguém pede a sua opinião é que ele toma consciência da mesma e de imediato se apercebe de como ela devia ser resolvida.

Dinorah é uma menina de dez anos, com naturalidade portuguesa e que reside no concelho de Sintra. É uma criança simpática, sociável e empenhada, que tem, por parte dos seus progenitores, um acompanhamento constante nas tarefas escolares. Por vezes é uma menina que revela alguma insegurança na resolução das tarefas, pois responde com uma entoação interrogativa. No entanto, quando não compreende algo que um dos elementos do grupo realiza ou diz, a Dinorah não hesita em questionar o que foi feito/dito. Tem um bom raciocínio e consegue exprimir-se e justificar as suas resoluções de forma clara.

Mariana é uma menina de dez anos, com naturalidade portuguesa e que reside no concelho de Sintra. É uma criança simpática, introvertida, atenta e empenhada, que tem, por parte dos seus progenitores, um acompanhamento constante nas tarefas escolares. É uma menina muito reservada, um pouco tímida, mas que participa nas discussões das tarefas em pequeno grupo, já no grupo turma a Mariana retrai-se mais, deixando as suas intervenções somente para quando é solicitada. Tem um raciocínio muito bom e tanto na oralidade como na escrita consegue ser bastante clara nas suas explicações.

Aida é uma menina de 11 anos, com naturalidade portuguesa e que reside no concelho de Sintra. É uma criança simpática, muito extrovertida e empenhada, que tem, por parte dos seus progenitores, um acompanhamento constante nas tarefas escolares. A Aida tem uma boa capacidade de argumentação, conseguindo exprimir-se de forma bastante clara, justificando todo o seu raciocínio. Além disso é uma aluna muito persistente e que tem por hábito verificar a razoabilidade dos resultados que obtém e que se for necessário coloca em causa a sua estratégia, resolvendo, novamente, a tarefa desde o início.

6.2. Teste inicial no grupo estudo de caso

O teste inicial (TI) foi aplicado à totalidade da turma (16 alunos), individualmente, com duração máxima de 90 minutos, antes de se iniciar o estudo dos Números Racionais. Incidiu sobre as várias representações e na resolução de problemas simples com números racionais, para averiguar os conhecimentos dos alunos neste tema. As questões do teste inicial foram pensadas de forma a comtemplar determinadas características do conceito de número racional, que se constituem como categorias de análise, no entanto, dependendo das estratégias que os alunos sigam, estas podem surgir em questões que não foram construídas especificamente para esse fim. Deste modo, o Quadro 11 indica as questões do teste inicial (4.ª coluna) que foram analisadas nesta secção e que permitiram verificar se os alunos possuem determinadas características do conceito de número racional.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Categorias de Análise</th><th>Questões do TI</th></tr>
<tr><td rowspan="10">- Resolução de problemas que contextualizam os vários significados dos números racionais, em situações discretas ou contínuas.
- Múltiplas estratégias utilizadas.
- Representação eficaz.</td><td rowspan="2">Concetualização da unidade.</td><td>✰ Interpreta a unidade (unitizing, reunitizing), em situações que envolvam grandezas discretas e contínuas.</td><td>13b
14a</td></tr>
<tr><td>✰ Reconstrói a unidade, em grandezas discretas e contínuas (reversing).</td><td>Não contemplado[33]</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Múltiplas representações.</td><td>✰ Reconhece diferentes formas de representar um número racional (numeral misto, fração, decimal e percentagem).</td><td>5 e 6</td></tr>
<tr><td>✰ Estabelece equivalência entre frações.</td><td>14a</td></tr>
<tr><td>✰ Estabelece conexões entre as diferentes representações com símbolos escritos (fração, numeral decimal e percentagem).</td><td>3, 4 e 9</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sistemas de valores de referência.</td><td>✰ Utiliza números de referência.</td><td>Não observado</td></tr>
<tr><td>✰ Utiliza o pensamento residual.</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Densidade dos números e o seu valor de posição.</td><td>✰ Representa números racionais na linha/barra numérica.</td><td>14a</td></tr>
<tr><td>✰ Compara e ordena números racionais.</td><td>3, 4 e 14</td></tr>
<tr><td>✰ Reconhece a existência de números entre dois racionais.</td><td>Não observado</td></tr>
</table>

Quadro 11 – Questões do teste inicial analisadas.

6.2.1. Diferentes significados dos números racionais

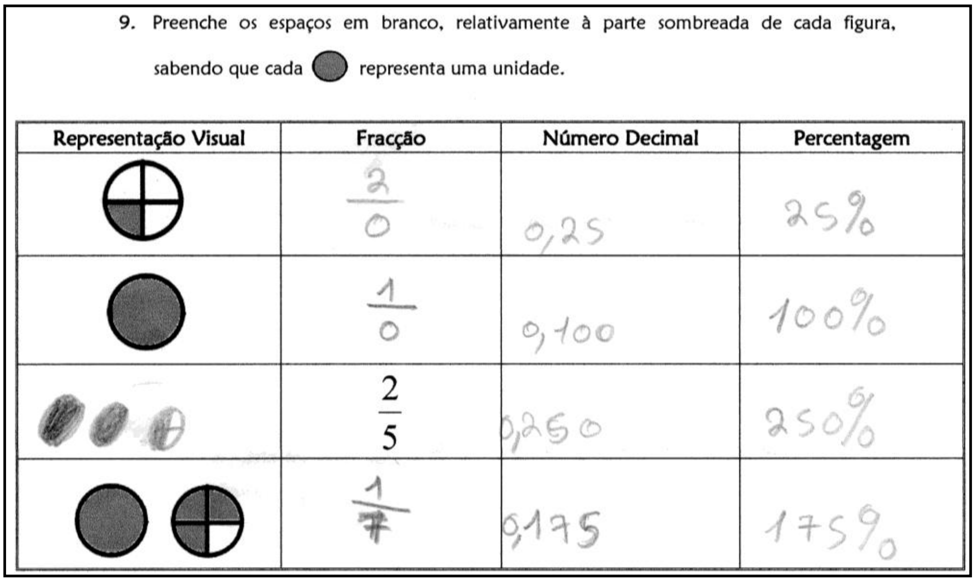
Parte-todo

No teste inicial existiam várias questões que contemplavam o significado parte-todo, e a resolução dos alunos do grupo estudo de caso revela que os mesmos são bem-sucedidos ao representar uma relação parte-todo por meio de uma percentagem (Cristiano, Dinorah e Mariana) e por meio de numerais decimais (Aida).

[33] Este aspeto não foi contemplado no teste inicial porque não é suposto ser uma capacidade que os alunos possuam neste ano de escolaridade.

A questão nove do TI pedia que os alunos expressassem uma relação parte-todo por meio das várias representações dos números racionais e os alunos podiam preencher as colunas em função umas das outras, no entanto todos os alunos as preencheram de forma individual. Ou seja, preencheram a segunda, a terceira e a quarta coluna olhando sempre para a representação visual.

Relativamente a este significado, Cristiano só consegue expressar a relação parte-todo por meio de uma percentagem (Figura 58), uma vez que por meio de frações, em algumas situações ele representa a relação parte-parte (parte sombreada/parte não sombreada e parte não sombreada/parte sombreada) em vez de representar a relação parte-todo, um erro bastante comum conforme comprovam os estudos de Oliveira (1994) e Monteiro e Pinto (2005).


9. Preenche os espaços em branco, relativamente à parte sombreada de cada figura, sabendo que cada ⬤ representa uma unidade.

Representação Visual	Fracção	Número Decimal	Percentagem
	$\frac{2}{0}$	0,25	25%
	$\frac{1}{0}$	0,100	100%
	$\frac{2}{5}$	0,250	250%
	$\frac{1}{7}$	0,175	175%

Figura 58 – Resolução do Cristiano à questão 9 do teste inicial.

Mariana também só consegue ser bem-sucedida na representação da relação parte-todo por meio de percentagens das representações visuais dadas, pois a terceira linha relativa aos $\frac{2}{5}$ é deixada em branco, o que reforça que a aluna preencheu as colunas do quadro tendo sempre por base a representação visual. Mariana também responde corretamente à fração ($\frac{1}{4}$) representada pela primeira representação visual e ao decimal (um) correspondente à segunda representação visual. No entanto, quando se trata de uma situação superior a um (última figura), para escrever uma fração, a Mariana não considera que a unidade é uma figura mas sim duas figuras, ou seja, ela não tem em consideração a unidade, acabando por escrever $\frac{7}{8}$.

Dinorah deixou a questão nove em branco e apenas resolveu as questões oito e dez que também envolviam o significado parte-todo, mas somente com percentagens. Na questão oito, Dinorah parece um pouco confusa ao identificar 20% de uma figura (Figura 59).

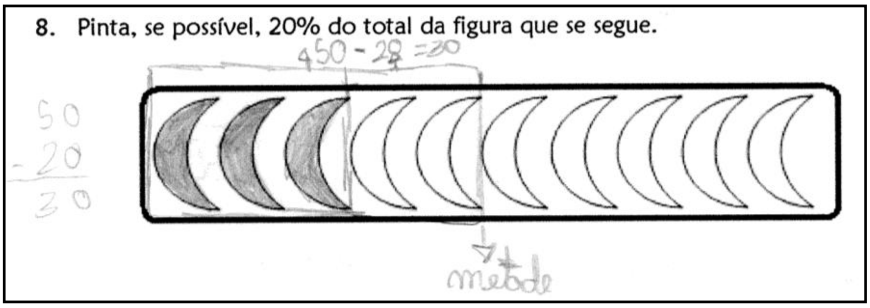


Figura 59 – Resolução da Dinorah à questão 8 do teste inicial.

Nesta questão Dinorah tenta encontrar 20% da figura, identificando primeiro a metade da mesma (50% = 5 luas) e posteriormente assume que cada uma das luas vale 10%. Contudo, apesar de ter pintado três luas (as que representam o resultado da subtração entre 50% e 20%), ela indica com uma seta que 20% são duas luas.

Perante a questão dez, onde é indicado o valor de uma determinada figura e, posteriormente se pede o valor de uma nova figura, tendo por base a unidade dada, Dinorah faz duas tentativas e consegue responder de forma correta (Figura 60).

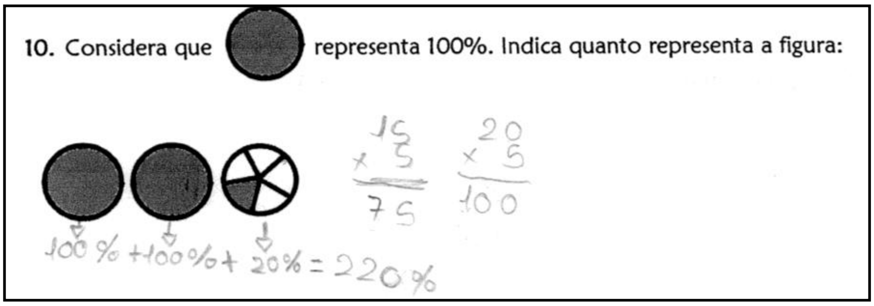
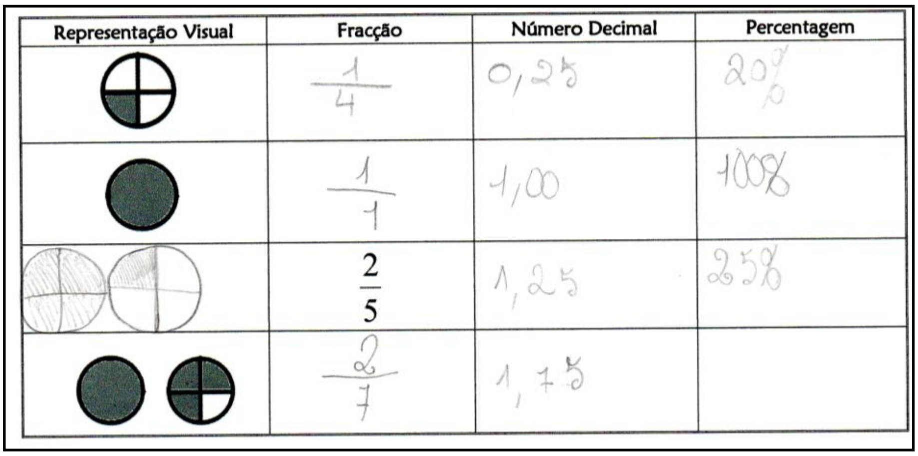


Figura 60 – Resolução da Dinorah à questão 10 do teste inicial.

Dinorah seguiu um procedimento de cálculo, ao utilizar o algoritmo da multiplicação, para encontrar o valor de 20%, correspondente a um quinto do círculo da questão dez. Primeiro ela utilizou o número 15, que multiplicou por cinco (número de partes em que o círculo se encontra dividido) e posteriormente utilizou o número 20, uma vez que com o número 15 não obtinha os 100%.

Enquanto Cristiano, Mariana e Dinorah são bem-sucedidos a representar uma relação parte-todo de uma representação visual por meio de percentagens, Aida é bem-sucedida a fazê-lo mas por meio de numerais decimais (Figura 61).



Representação Visual	Fracção	Número Decimal	Percentagem
	$\frac{1}{4}$	0,25	20%
	$\frac{1}{1}$	1,00	100%
	$\frac{2}{5}$	1,25	25%
	$\frac{2}{7}$	1,75	

Figura 61 – Resolução da Aida à questão 9 do teste inicial.

Apesar de Aida ser bem-sucedida na representação da relação entre a parte sombreada e o todo, por meio de decimais (de salientar que de acordo com a figura que a aluna desenhou na terceira linha da coluna, 1,25 é efetivamente o decimal que representa o que a Aida desenhou), quando deve expressar a mesma relação utilizando a fração, a aluna não consegue responder de forma correta na totalidade da questão. Aida apenas consegue representar a relação parte-todo por meio de uma fração nas duas primeiras figuras. Nas duas últimas linhas da tabela, a aluna parece associar o numerador à quantidade de figuras que tem (duas bolas, neste caso) e o denominador à quantidade de partes pintadas que existem ($\frac{2}{5}$: duas bolas, cinco partes pintadas; $\frac{2}{7}$: duas bolas, sete partes pintadas). Relativamente à percentagem, a aluna também não é bem-sucedida, uma vez que só consegue identificar o 100%.

Quociente

O significado quociente surge contextualizado numa situação de partilha equitativa, onde os alunos têm de distribuir equitativamente uma grandeza discreta (rebuçados) e uma grandeza contínua[34] (tablete de chocolate) por quatro crianças – questão 13.

Todos os alunos conseguem distribuir equitativamente ambas as quantidades, pois dividem a tablete em quatro tiras, cada uma com cinco quadradinhos, dizendo que cada criança come cinco quadradinhos (Cristiano) ou uma barra (Mariana, Dinorah e Aida). Relativamente aos rebuçados, todos fazem grupos de três, mencionando que cada criança recebe três rebuçados (Figura 62). No entanto quando lhes é pedido que expressem as

[34] A imagem da tablete utilizada não foi muito bem-sucedida, uma vez que, por se encontrar já dividida em vinte quadradinhos, pode ter influenciado as respostas dos alunos, permitindo-lhes um rápido acesso ao resultado. Deste modo pode, inclusive, ter sido um obstáculo à representação sob a forma de fração da parte que cada criança terá recebido.

quantidades resultantes da partilha equitativa sob a forma de percentagem (rebuçados – alínea a; chocolate – alínea b), sob a forma de fração (chocolate – alínea b) e sob a forma de decimal (chocolate – alínea b) nenhum é bem-sucedido.

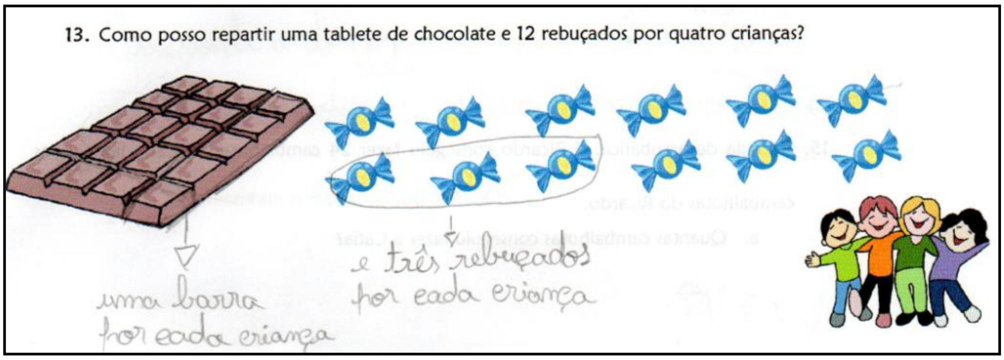


Figura 62 – Resolução da Dinorah à questão 13 do teste inicial.

Cristiano representa a fração de chocolate que cada criança recebe por um número inteiro (cinco), maior que a unidade e não por uma fração, associando-lhe uma percentagem incorreta (100%). O mesmo sucede com a percentagem associada ao número de rebuçados, que o aluno refere como sendo 60% em vez de 25% (Figura 63).

a. Qual a quantidade de rebuçados que cada criança recebe?

Número de Rebuçados	Percentagem
3	60%

b. Qual a quantidade de chocolate que cada criança recebe?

Fracção de Chocolate	Número Decimal	Percentagem
5	0,100	100%

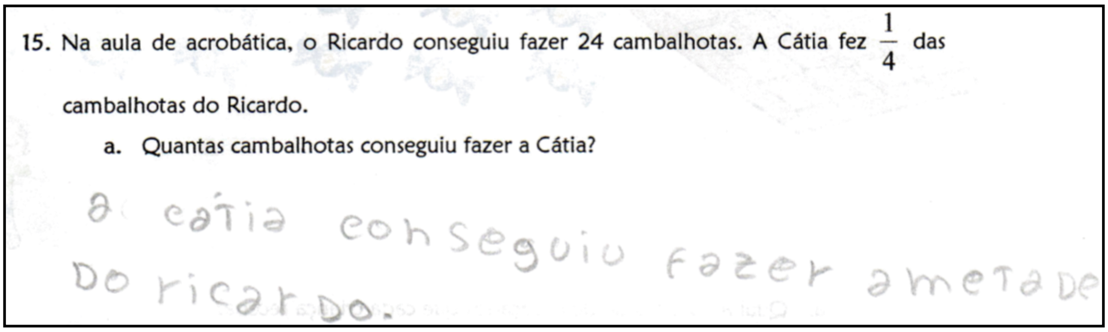
Figura 63 – Resolução do Cristiano à questão 13 do teste inicial.

Dinorah não consegue representar as quantidades resultantes desta partilha, uma vez que nada regista nas tabelas e Aida apenas atribui, erradamente, 20% à quantidade de rebuçados que cada criança recebe. Por outro lado, Mariana apenas faz uma tentativa para representar sob a forma de fração, a quantidade de chocolate que cada criança recebe, no entanto ela acaba por representar uma relação todo-parte ($\frac{4}{1}$) em vez de parte-todo, não conseguindo concluir a tarefa de forma correta.

Operador

A questão 15 do teste inicial contextualiza o significado operador, onde os alunos têm de determinar um quarto de 24.

Cristiano não consegue responder corretamente à questão (Figura 64), no entanto parece evidenciar alguma compreensão deste significado.


15. Na aula de acrobática, o Ricardo conseguiu fazer 24 cambalhotas. A Cátia fez $\frac{1}{4}$ das cambalhotas do Ricardo.

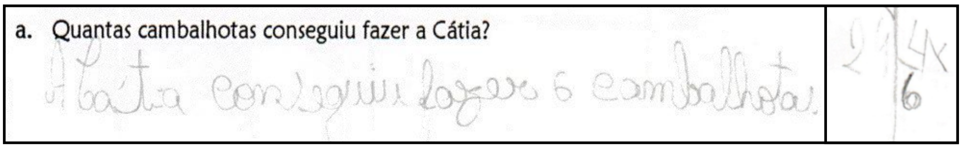
a. Quantas cambalhotas conseguiu fazer a Cátia?

a cátia conseguio fazer ametade do ricardo.

Figura 64 – Resolução do Cristiano à questão 15 do teste inicial.

De acordo com Santos (2003), Cristiano associou o significado operador a uma transformação, ou seja, parece que compreende que tem de realizar uma ação sobre o número 24, através da qual este número vai ser transformado noutro mais pequeno, pois ele refere, embora incorretamente, que $\frac{1}{4}$ de 24 é metade.

Dinorah, Mariana e Aida conseguem responder corretamente à questão compreendendo que $\frac{1}{4}$ representa a quarta parte de algo, seguindo deste modo um procedimento de cálculo, uma vez que todas elas dividem a totalidade de cambalhotas feitas pelo Ricardo por quatro (Figura 65).

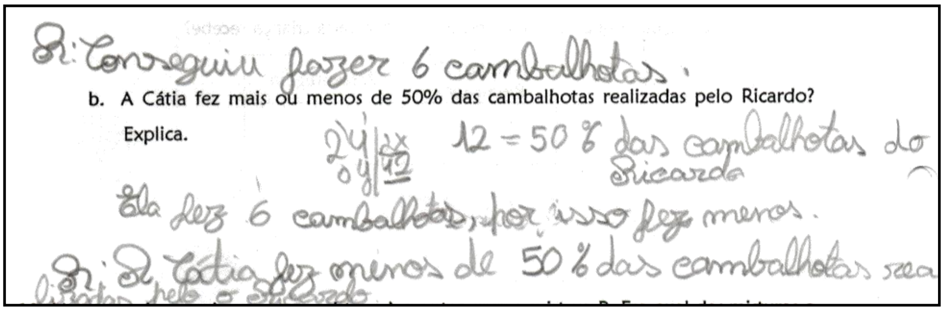

a. Quantas cambalhotas conseguiu fazer a Cátia?

A Cátia conseguiu fazer 6 cambalhotas

24 | 4x
6

Figura 65 – Resolução da Mariana à questão 15a do teste inicial.

Apesar de na alínea a) a Mariana não ter registado o seu raciocínio, a estratégia que utiliza para resolver a alínea b), esclarece sobre a forma como ela raciocinou na alínea anterior, uma vez que é evidente que a aluna recorre ao algoritmo 24:4 (procedimento de cálculo). Pelos registos escritos que Mariana tem nesta questão, é percetível que a mesma compreende o significado de 50% e de $\frac{1}{4}$ de uma determinada quantidade (Figura 66).


R: Conseguiu fazer 6 cambalhotas.

b. A Cátia fez mais ou menos de 50% das cambalhotas realizadas pelo Ricardo? Explica.

24 | 2x
04 | 12

12 = 50% das cambalhotas do Ricardo

Ela fez 6 cambalhotas, por isso fez menos.

R: A Cátia fez menos de 50% das cambalhotas realizadas pelo o Ricardo

Figura 66 – Resolução da Mariana à questão 15b do teste inicial.

Medida

O significado de medida surge contextualizado na questão 14 do teste inicial e os alunos têm de representar num segmento de reta [AB] a posição de cada participante a dado momento da prova. As distâncias percorridas são facultadas através das várias representações (percentagem, decimal e fração), no entanto, não há nenhuma indicação da qual o aluno deve de utilizar.

Aida e Dinorah não realizam a questão, o que nos leva a concluir que as alunas não conseguem associar as várias representações que lhe foram facultadas a um ponto num segmento reta. Por outro lado, Cristiano não assume que deve efetuar sucessivas divisões no segmento para marcar as distâncias, em vez disso serve-se do mesmo para escrever o nome dos participantes, pela ordem que ele acha correta.

Ao observarmos a resolução da Mariana podemos afirmar que a aluna compreende este significado, uma vez que ordena quase corretamente os quatro números racionais que lhe são apresentados (Figura 67).

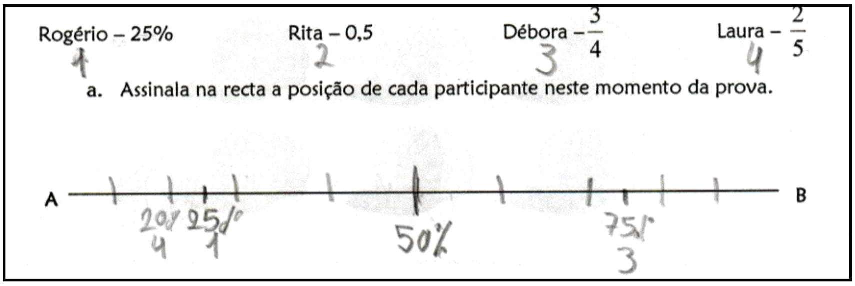


Figura 67 – Resolução da Mariana à questão 14a do teste inicial.

Apesar de não dividir a unidade em partes iguais, depois de identificar a metade do segmento de reta (50%), a Mariana dividiu cada metade em cinco partes, ficando o mesmo dividido em dez partes, onde a mesma atribuiu a cada uma delas o valor de 10%. Posteriormente Mariana marcou as posições de cada participante, tendo a noção que as posições da Débora e do Rogério se situavam entre duas marcas. Mariana apenas errou na marcação da Laura, uma vez que considerou a posição desta como sendo $\frac{1}{5}$ em vez de $\frac{2}{5}$. Nesta questão é evidente a utilização de uma estratégia flexível, uma vez que Mariana utiliza uma estratégia simbólica, porque é notório que converte todos os números racionais dados em percentagens e serve-se do segmento de reta (estratégia gráfica) para ordenar as posições dos participantes.

Razão

O significado razão surge no teste inicial (questão 16), associada à comparação entre duas diluições, relativamente ao sabor a laranja de cada uma (A: quatro copos de sumo e oito copos de água; B: três copos de sumo e cinco copos de água).

Nesta questão Mariana não realizou nenhuma atividade, mas não foi por falta de tempo, uma vez que a aluna ao entregar o teste mencionou que não sabia fazer mais. Cristiano, Dinorah e Aida, apesar de responderem corretamente à questão, não revelam compreender o significado "razão" dos números racionais, uma vez que não estabelecem qualquer relação entre os copos de laranja e de água de cada mistura, mas fazem antes uma comparação entre os copos de água das duas misturas, dizendo: "é a mistura b porque tem menos copos de água" (Cristiano); é a "mistura B porque leva menos água" (Aida); "é a mistura B porque tem menos copos de água do que no grupo A" (Dinorah).

6.2.2. Concetualização da unidade

Para que os alunos sejam bem-sucedidos em qualquer questão que envolva os números racionais, eles têm de conseguir interpretar a unidade envolvida na situação que lhes é apresentada. Na alínea b) da questão 13 pode-se verificar como os alunos trabalham com a unidade de referência (tablete de chocolate), tendo-se observado que todos fizeram uma interpretação correta da unidade, tendo-a organizado conforme lhes foi mais conveniente (*unitizing*). Enquanto Cristiano, Dinorah e Aida organizaram a sua grandeza contínua em quatro filas, tal como mostra a Figura 62, Mariana optou por fazer quatro grupos de cinco quadradinhos (Figura 68).

Figura 68 – *Unitizing* na questão 13b) do teste inicial (Mariana).

Mariana começa por rodear quatro quadradinhos da primeira coluna com mais um quadradinho da segunda coluna. Depois, aos três quadradinhos que sobram na segunda coluna, ela junta dois quadradinhos da terceira coluna e assim sucessivamente.

Além de conseguir interpretar a unidade que lhe é apresentada, Mariana também revela capacidade na sua reorganização (*reunitizing*), como é evidente pela resolução que faz da questão 14a (Figura 67). Nesta questão a aluna reorganiza a sua unidade de modo a marcar todas as posições indicadas, pois numa primeira fase ela encara a sua linha como uma unidade constituída por duas partes. Depois divide cada uma das partes em cinco partes, ficando a sua unidade subdividida em dez partes.

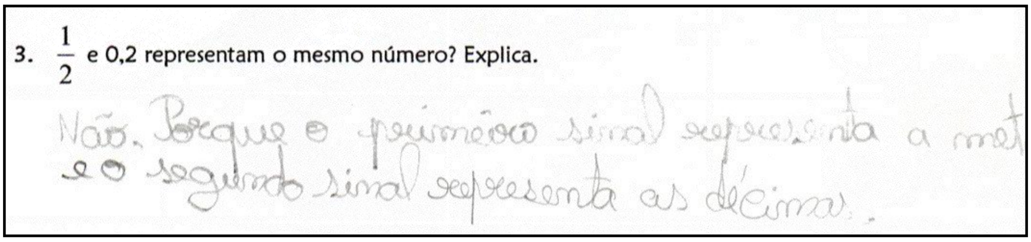
6.2.3. Múltiplas representações

A questão cinco do teste inicial não foi respondida por nenhum aluno. Contudo, perante a questão seis (adição de racionais representados de diferentes formas), apenas

Ainda mencionou que a adição não se podia efetuar, evidenciando que não reconhece diferentes formas de representar um número racional. Os outros alunos, apesar de errarem na resposta, apontaram um valor para a soma da adição, o que ao contrário de Aida, pode indiciar que reconhecem que um número pode ter várias representações.

Relativamente à capacidade de estabelecer equivalência entre frações, não conseguimos observar esta capacidade em nenhum dos alunos, uma vez que a questão 14a apenas foi resolvida por Mariana, mas a aluna optou por recorrer às percentagens em vez de frações equivalentes.

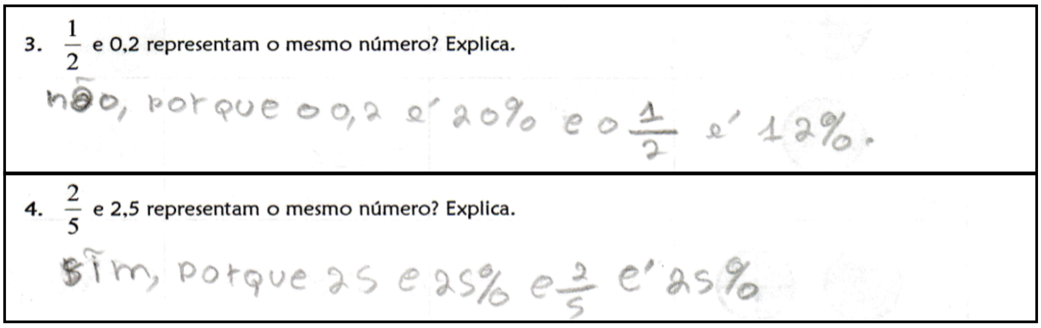
Apesar de, apenas Aida não reconhecer que um número pode ser representado de várias formas, e consequentemente não compreende que existe uma relação entre diferentes representações, também Dinorah não consegue estabelecer conexão entre as diferentes representações, pois não resolve nenhuma questão que permitia observar esta capacidade. Neste âmbito, Aida apenas resolve a questão três, onde manifesta ter a ideia de que uma fração não se transforma em um numeral decimal nem vice-versa, porque apesar de reconhecer que $\frac{1}{2}$ e 0,2 não representam o mesmo número, ela justifica a sua resposta com o facto de $\frac{1}{2}$, mais especificamente o traço de fração, representar um quociente (neste caso metade) e o 0,2, nomeadamente a vírgula, representar "décimas" (Figura 69).


3. $\frac{1}{2}$ e 0,2 representam o mesmo número? Explica.

Não. Porque o primeiro sinal representa a met
e o segundo sinal representa as décimas.

Figura 69 – Resolução da Aida à questão 3 do teste inicial.

Ainda no campo das conexões entre as várias representações, verifica-se que Cristiano apenas responde às questões três e quatro, estabelecendo conexões entre decimais e percentagens (Figura 70), apesar de, por vezes cometer o erro da "regra do numerador" (Parker & Leinhardt, 1995), uma vez que admite que o símbolo % pode ser substituído por uma vírgula à esquerda do número, o que nas situações iguais ou superiores a uma unidade o conduziu a representações erradas: "100% = 0,100"; "250% = 0,250" e "175% = 0,175" (Figura 58).



3. $\frac{1}{2}$ e 0,2 representam o mesmo número? Explica.

não, porque o 0,2 é 20% e o $\frac{1}{2}$ é 12%.

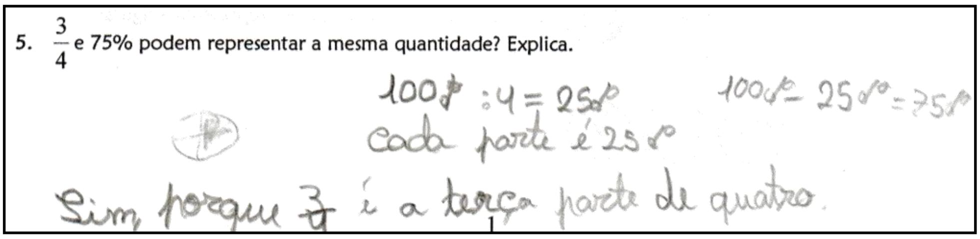
4. $\frac{2}{5}$ e 2,5 representam o mesmo número? Explica.

Sim, porque 25 é 25% e $\frac{2}{5}$ é 25%

Figura 70 – Resolução do Cristiano à questão 5 do teste inicial.

Cristiano tenta passar as frações que lhe são dadas para percentagens, no entanto ele considera que para uma fração passar a percentagem, basta juntar o numerador com o denominador ($\frac{1}{2}$ → 12% e $\frac{2}{5}$ → 25%), e acrescentar o sinal de percentagem (%).

Relativamente à Mariana, quando lhe é apresentada a representação visual e é solicitado que ela escreva o numeral decimal, percentagem e fração correspondente (questão nove), tal como já foi mencionado ela preenche cada coluna da tabela de forma individual. No entanto quando lhe são apresentadas duas representações simbólicas (fração e percentagem), sem a representação visual, ela estabelece conexão entre elas, acabando por reconhecer formas equivalentes de representar um número (Figura 71).



5. $\frac{3}{4}$ e 75% podem representar a mesma quantidade? Explica.

100% : 4 = 25% 100% − 25% = 75%

cada parte é 25%

Sim porque 3 é a terça parte de quatro.

Figura 71 – Resolução da Mariana à questão 5 do teste inicial.

Mariana chega à conclusão que $\frac{3}{4}$ e 75% representam a mesma quantidade, depois de verificar a percentagem que corresponde a $\frac{3}{4}$. Deste modo, para converter a fração em uma percentagem, a aluna divide cem por quatro, e interpreta o resultado como sendo uma parte de algo que está divido em quatro, referindo que “cada parte é 25%”. Posteriormente a Mariana subtrai 25% aos 100%, porque, tal como ela representou, graficamente, é exatamente $\frac{1}{4}$ que não interessa. Pode-se afirmar que a Mariana foi calcular a percentagem do que faltava a $\frac{3}{4}$ para ter a unidade (o valor residual – Post & Cramer, 1987) e depois subtraiu esse valor à unidade (100%). Nesta questão é evidente o recurso a uma estratégia flexível, uma vez que Mariana combina estratégias gráficas (ao representar graficamente $\frac{1}{4}$) e simbólicas (ao recorrer a representações equivalentes).

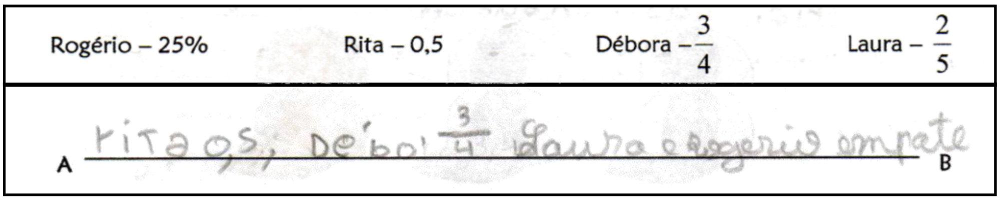
6.2.4. Sistemas de valores de referência

No teste inicial existiam algumas questões onde os alunos poderiam recorrer a números de referência para darem resposta às questões, entre elas encontram-se as questões três, quatro, cinco e seis. Contudo nenhum dos quatro alunos utilizou números de referência para responder a estas questões ou a outras do teste inicial. Apesar disso, Mariana, embora de uma forma muito rudimentar, utiliza o pensamento residual para responder à questão cinco (Figura 71), uma vez que a aluna utiliza o cálculo de um valor residual para resolver a questão.

6.2.5. Densidade dos números e o seu valor de posição

A representação de números na linha numérica é um aspeto contemplado no teste inicial (questão 14a), onde já vimos que apenas a Mariana consegue ser bem-sucedida. A comparação de números racionais surge nas questões três e quatro e a sua ordenação nas alíneas a e b da questão 14.

Como já foi mencionado, Cristiano não consegue representar números racionais num segmento de reta [AB], mas também não os consegue ordenar corretamente (Figura 72).


Rogério – 25% Rita – 0,5 Débora – $\frac{3}{4}$ Laura – $\frac{2}{5}$

A rita 0,5, Débo $\frac{3}{4}$ Laura e Rogerio empate B

Figura 72 – Ordenação das posições dos atletas (questão 14) – Cristiano.

Relativamente à ordenação de números, Cristiano apenas demonstra ter a noção que 0,5 é inferior a $\frac{3}{4}$. No que concerne à comparação, o aluno refere, incorretamente, que 25% e $\frac{2}{5}$ são representações equivalentes, evidenciando o erro que já havia cometido nas questões três e quatro (Figura 70), quando comparou decimais com frações. Apesar de responder de forma errada a estas questões, quando o objetivo das mesmas é comparar racionais, Cristiano segue uma estratégia simbólica, uma vez que tenta converter os números apresentados em percentagens.

Mariana revela compreender o valor de posição dos números racionais, uma vez que resolve de forma quase correta a questão 14, pois a mesma consegue representar e ordenar corretamente os números racionais no segmento de reta [AB] (exceto um deles). Para responder a esta questão, Mariana segue uma estratégia simbólica, pois transforma os números racionais apresentados, em percentagens (Figura 67). Tendo em conta que o único decimal desta questão era um número padrão para os alunos (0,5), Mariana facilmente o identificou como metade, tendo passado os números racionais (frações) para a representação decimal. Quando os decimais envolvidos não são números padrão, Mariana não os consegue comparar com outros números racionais (frações), tal como é evidente pela ausência de resposta às questões três e quatro.

Ainda no âmbito do valor de posição dos números, Dinorah e Aida deixaram as questões em branco, tendo Dinorah referido que não sabia colocar aqueles números por ordem porque eram diferentes (questão 14). Aida também não responde à questão quatro e o modo como responde à questão três (Figura 69), deixa no ar a ideia que não se podem comparar números racionais representados de forma diferente. Deste modo, concluímos que as alunas não compreendem o valor de posição dos números racionais.

6.2.6. SÍNTESE

O desempenho dos alunos do grupo estudo de caso nas questões do teste inicial que abarcavam os diferentes significados dos números racionais, revelou que o significado operador é aquele onde a maioria dos alunos (Dinorah, Mariana e Aida) é totalmente bem-sucedido. O significado parte-todo é compreendido pela maioria dos alunos (Cristiano, Mariana e Dinorah) quando a representação envolvida é a percentagem, sendo que o aluno restante (Aida) é bem-sucedido neste significado quando ele envolve a representação decimal. O significado de medida apenas é compreendido por Mariana, que é a única aluna que consegue marcar números racionais num segmento de reta [AB], depois de o dividir em partes relativamente iguais.

Apesar de todos os alunos conseguirem distribuir equitativamente uma grandeza continua e uma grandeza discreta, nenhum consegue representar o resultado dessa distribuição sob a forma de um quociente, pelo que não podemos afirmar que os alunos são totalmente bem-sucedido neste significado. Relativamente ao significado de razão, os alunos revelam que não o compreendem, uma vez que apenas analisam uma das quantidades e não a colocam em relação com a outra.

Perante o significado parte-todo, tal como a literatura refere, é comum os alunos representarem outras relações em vez da relação parte-todo (Mack, 1990; Monteiro & Pinto, 2005) e estes alunos na fase inicial desta investigação (teste inicial) também evidenciam dificuldades nesse campo, pois chegam a representar uma relação todo-parte (Mariana) em vez de uma relação parte-todo. Além disso também manifestam dificuldades em relacionar duas quantidades (significado razão), por não compreenderem a propriedade da covariância – invariância (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006). A marcação de números racionais num segmento de reta [AB] (significado medida) também é fonte de dificuldades para estes alunos (Dinorah, Aida e Cristiano) o que deste modo, de acordo com Lamon (2006) e

Martinie (2007) pode significar que eles não dominam os noções de *unitizing* e partição, uma vez que estes se encontram envolvidos na divisão sucessiva de uma unidade (comprimento por exemplo) em partes menores, aspeto que estes alunos não concretizam.

Relativamente ao modo como Mariana efetua as divisões sucessivas no segmento de reta [AB], apesar dela não o fazer com rigor, pois as partes que resultam dessa divisão não têm exatamente o mesmo tamanho, de acordo com Pothier e Sawada (1983) ela pode encontra-se no nível quatro de partição (*oddness*) pois ela começa por dividir o segmento de reta [AB] em metades, mas percebe que a divisão deste em metades sucessivas não a vai ajudar e opta por dividir cada metade em quintos, passando a utilizar as percentagens para marcar as posições no segmento de reta [AB], revelando, de acordo com Markovits e Sowder (1991) capacidade de escolher a representação mais favorável para uma determinada situação. Este aspeto revela que a aluna consegue estabelecer conexões entre duas representações (frações e percentagens), aspeto já evidenciado na resolução da questão cinco (Figura 71) quando Mariana reconhece formas equivalentes de se representar um número, transformando uma na outra (fração em percentagem). Por sua vez, Cristiano apenas estabelece conexões entre decimais e percentagens, apesar de incorrer no erro da "regra do numerador" (Parker & Leinhardt, 1995). Além disso, é bastante evidente que este aluno manifesta dificuldades em transformar uma fração numa percentagem, uma vez que para ele basta juntar o numerador com o denominador, acrescentando o sinal de percentagem (%).

Apesar de Mariana e Cristiano aceitarem que um número racional se pode representar com mais do que uma forma, existem evidências de que Aida não aceita este aspeto, encarando numerais decimais, frações e percentagens como entidades distintas, ao mencionar que uma adição entre uma fração, um decimal e um inteiro, não se pode efetuar (questão seis). Além disso, podemos observar que Aida se encontra, de acordo com o modelo intuitivo de construção do conhecimento de Kieren (1988), no nível Etnomatemático, pois ela, tal como Mariana (Figuras 69 e 71, respetivamente) dão respostas às questões três e cinco, respetivamente, evidenciando conhecimento básico que resulta da sua vivência num determinado ambiente ("metade", "a terça parte"). No entanto, as resoluções de Mariana espelham que esta aluna já se encontra num nível mais avançado (Intuitivo) pois existe uma conjugação do conhecimento informal com os conhecimentos adquiridos em contexto escolar (Figura 71).

Ainda no âmbito das múltiplas representações, a capacidade de estabelecer equivalência entre frações, é um aspeto que não foi observado nos alunos durante a resolução das questões do teste inicial. Esta situação talvez seja devida ao facto de nenhum aluno dominar os cinco significados dos números racionais, pois segundo Charalambous e

Pitta-Pantazi (2005, 2006), dominar os cinco significados é fundamental para que aluno tenha capacidade para trabalhar com frações equivalentes.

De uma forma geral, este grupo de alunos manifesta dificuldades em trabalhar com as diferentes representações dos números racionais, uma vez que não conseguem estabelecer um paralelo entre as três representações. Enquanto Cristiano apenas estabelece relação entre numerais decimais e percentagens, Mariana estabelece relação entre frações e percentagens e Aida e Dinorah não estabelecem qualquer tipo de relação entre nenhuma representação, nem reconhecem, juntamente com Cristiano, formas equivalentes de se representar um número.

A concetualização da unidade é uma característica sobre a qual, neste momento, não é fácil tecer conclusões, uma vez que as questões do teste inicial não permitiam que os alunos pudessem concetualizar a unidade. No entanto, penso que podemos afirmar que apenas a Mariana consegue trabalhar de uma forma flexível com as unidades que lhe são apresentadas, uma vez que revelou este aspeto em duas questões diferentes (questão 13b e 14). Apesar de Dinorah, Aida e Cristiano terem conseguido interpretar a unidade da questão 13b, pensamos que o conseguiram influenciados pela imagem apresentada.

O modo como Mariana resolveu a questão 14, evidencia a ideia de Lamon (2006) que afirma que um aluno que tenha a capacidade de concetualizar a unidade tem "um caminho alternativo para resolver problemas (…) quando as figuras não são uteis" (p. 129). Ou seja, inicialmente Mariana tinha a linha dividida em duas partes, o que, não lhe sendo útil, a levou a reorganizar a unidade e a dividi-la novamente em partes mais pequenas de modo a conseguir posicionar os números racionais apresentados na questão.

Ao longo da resolução das questões do teste inicial nenhum aluno recorreu a números de referência e apesar de uma forma muito elementar, apenas Mariana utiliza o pensamento residual (Figura 71). Deste modo, relativamente à categoria "sistemas de valores de referência", não conseguimos encontrar uma evidência clara da sua existência em nenhum dos testes iniciais dos alunos do grupo estudo de caso, pelo que podemos afirmar que os mesmos não são proficientes nesta categoria.

Compreender o conceito de número racional, envolve a representação e ordenação de números racionais na linha, aspeto que apenas Mariana, embora parcialmente, revela compreender, uma vez que consegue marcar corretamente no segmento de reta [AB], três dos quatro números apresentados (Figura 67). Relativamente à comparação de números racionais, Mariana compara-os transformando-os em percentagens (Figuras 67 e 71), tal como Cristiano (Figura 70), embora não seja bem-sucedido na conversão. No entanto Aida e Dinorah têm dificuldades em comparar números racionais representados de formas diferentes, porque pensam que eles não se podem comprar. Este aspeto evidencia uma tendência de Cristiano (Figura 70) e Mariana (Figura 67) para a utilização de percentagens, enquanto, por parte dos outros elementos do grupo não se denota qualquer tendência para a utilização de um determinado tipo de representação.

Durante a análise das respostas dos alunos do grupo estudo de caso às questões do teste inicial, constatamos que somente Mariana tem a capacidade de utilizar várias estratégias na resolução das questões, uma vez que Cristiano, Dinorah e Aida apenas se centram em um tipo de estratégia. Ao longo do teste inicial pode-se observar que Mariana recorre a estratégias flexíveis, uma vez que combina a estratégia gráfica com a simbólica (Figura 71) e também a procedimentos de cálculo (Figuras 65 e 66). Por sua vez, Dinorah (Figura 60) e Aida (questão 15) apenas recorrem a procedimentos de cálculo, em contrapartida, Cristiano opta pelo recurso a estratégias simbólicas (Figura 70).

A análise minuciosa que percorreu todas as categorias de análise dos dados obtidos através do teste inicial, que foi sintetizada neste ponto, encontra-se esquematizada no quadro que se segue – Quadro 12, podendo ser observado um paralelo entre os quatro alunos do grupo estudo de caso.

Categorias de Análise		**Cristiano**	**Dinorah**	**Mariana**	**Aida**
Resolução de problemas que contextualizam os vários significados dos números racionais, em situações discretas ou contínuas.		- parte-todo c/ percentagens	- operador - parte-todo c/ percentagens	- operador - medida - parte-todo c/ percentagens	- operador - parte-todo c/ numerais decimais
Concetualização da unidade.	☆ Interpreta a unidade (*unitizing*, *reunitizing*), em situações que envolvam grandezas discretas e contínuas.	✓ grandezas contínuas	✓ grandezas contínuas	✓ grandezas contínuas	✓ grandezas contínuas
	☆ Reconstrói a unidade, em grandezas discretas e contínuas (*reversing*).	Não contemplado	Não contemplado	Não contemplado	Não contemplado
Múltiplas representações.	☆ Reconhece diferentes formas de representar um número racional (numeral misto, fração, numeral decimal e percentagem).	✓	✓✗	✓	✗
	☆ Estabelece equivalência entre frações.	✗	✗	✗	✗
	☆ Estabelece conexões entre as diferentes representações com símbolos escritos (fração, decimal e percentagem).	✓ decimal – percentagem	✗	✓ fração – percentagem	✗
Sistemas de valores de referência.	☆ Utiliza números de referência.	✗	✗	✗	✗
	☆ Utiliza o pensamento residual.	✗	✗	✓✗	✗
Densidade dos números e o seu valor de posição.	☆ Representa números racionais na linha/barra numérica.	✗	✗	✓	✗
	☆ Compara e ordenar números racionais.	✗	✗	✓✗	✗
	☆ Reconhece a existência de números entre dois racionais.	Não contemplado	Não contemplado	Não contemplado	Não contemplado
Múltiplas estratégias utilizadas.		- estratégia simbólica	- procedimento de cálculo	- procedimento de cálculo, estratégia gráfica, simbólica e flexível	- procedimento de cálculo
Representação eficaz.		- tendência para usar percentagem	✗	- tendência para usar percentagem	✗

Quadro 12 – Capacidades evidenciadas pelos alunos em cada categoria de análise durante o teste inicial.

6.3. O grupo estudo de caso durante a experiência de ensino

Após a análise do teste inicial, tal como foi mencionado, foi delineada e implementada uma experiência de ensino constituída por uma sequência de tarefas contextualizadas e encadeadas em um todo com significado. Nesta secção analisa-se a atividade do grupo estudo de caso em torno da resolução de algumas questões das tarefas, sendo esta análise organizada segundo as categorias de análise definidas, apresentadas no capítulo quatro (Quadro 9), de modo a evidenciar que capacidades associadas ao conceito de número racional desenvolveram estes alunos.

Os quatro alunos que constituem o grupo estudo de caso adotaram uma postura dinâmica na resolução de todas as tarefas, registando-se uma participação ativa de todos eles. A Aida é a aluna mais extrovertida e comunicativa, por isso, por vezes, pode parecer que assume a liderança no grupo. Muitas vezes, é ela também que acaba por dar um impulso inicial para a resolução das tarefas, nem que seja pela leitura que faz em voz alta do enunciado. No entanto, a interpretação da tarefa é feita por todos os elementos do grupo que contribuem com opiniões sobre o que é pedido e sobre o modo como chegar a uma solução. Esta interpretação e contribuição de ideias ocorre com maior incidência nas meninas, pois em contrapartida, o Cristiano, por vezes, distraia-se do propósito da tarefa, levando estas, em uníssono, a repreenderem-no fazendo com que ele assumisse de imediato uma outra postura. Todos discutiam as ideias e cada um registava as estratégias na folha da tarefa, que na maioria das vezes eram iguais. No entanto, das poucas vezes que estas divergiam todos tinham direito a explicar o seu raciocínio e depois, em grupo, analisavam a sua pertinência e validade, registando, em seguida, cada um a sua estratégia de resolução. No momento de discussão da tarefa em grande grupo todos participavam, pois o porta-voz que ia ao quadro era rotativo. Além disso, enquanto este explicava a estratégia do grupo à turma, os restantes elementos também o ajudavam, sempre que sentiam que podiam contribuir para a explicação se tornar mais clara.

6.3.1. Concetualização da unidade

Para que os alunos consigam ser bem-sucedidos na resolução das tarefas têm de identificar a unidade em causa, pelo que esta noção, direta ou indiretamente atravessa todas as tarefas da experiência de ensino. A primeira tarefa desempenhou, no entanto, um papel crucial na concetualização da unidade. Ao ser pedido aos alunos que representem uma parte de uma unidade, por meio de várias representações, estes só o conseguem fazer porque compreendem que a unidade pode tomar várias representações, por exemplo, a unidade pode valer um se falarmos em numerais decimais ou 100% se falarmos em percentagens (aspeto já evidenciado no capítulo cinco, no ponto 5.3.1.).

Nesta tarefa facultou-se aos alunos tiras de papel que ao representarem uma tablete de chocolate ajudou-os a concetualizar a unidade. A manipulação das tiras permitiu que os alunos compreendessem que cada tira pode ser representada por várias frações, em função do número de dobragens definido, como se evidencia no excerto seguinte:

Professora (I): Que fração podem utilizar para representar a tablete da Luana?
Dinorah: Está dividida em duas partes!
Mariana: Dois traço dois!
Professora (I): Porque não é $\frac{1}{2}$?
Cristiano: Isso é o que a Luana comeu … um bocado dos dois!
Professora (I): Ok! E em relação ao Nicolau?
Cristiano: Quatro traço quatro!
Aida: A do João é oito traço oito!
Professora (I): Então mas as tabletes não são todas iguais?
Mariana: São, mas estão divididas de forma diferente!

Este diálogo surge após o grupo ter resolvido a primeira questão da tarefa, evidenciando que os alunos compreendem não só que a fração que utilizam para representar a sua unidade depende do modo como a interpretam, ou seja, das subdivisões que façam nela, como também que o denominador representa o número de partes em que a unidade se encontra subdividida, aspeto de extrema importância para a reconstrução da unidade. O diálogo deixa claro que os alunos compreendem que a unidade tem de ser representada por uma fração em que o numerador e o denominador são iguais.

O desempenho do grupo na tarefa dois vem reforçar esta ideia, sendo que estes revelam a capacidade de identificar (*unitizing*) e reorganizar (*reunitizing*) a unidade de referência. Aquando da resolução da primeira questão, os alunos encararam uma caixa de botões (grandeza composta) como sendo seis objetos discretos, tendo feito a distribuição dos botões de cada caixa por cada um dos casacos, no entanto, surgem no grupo duas estratégias distintas: a de Cristiano e a dos restantes elementos do grupo. Após identificar a quantidade de botões necessária para os quatro casacos, Cristiano adiciona sucessivamente o número de botões de cada caixa, identificando os múltiplos de seis até ter o número suficiente de botões para os quatro casacos.

Cristiano: Uma caixa tem seis botões, mais seis, doze, …
Dinorah: Olha, mas um casaco só precisa de cinco botões, por isso só precisa destes. (rodeando cinco botões da caixa)
Cristiano: Eu sei!
Dinorah: Então estás a fazer seis mais seis! Mas nós queremos saber quantas caixas!
Cristiano: Cada casaco precisa de cinco botões, são quatro casacos, 4x5 são 20. Se cada caixa tem seis botões, três caixas são 18, … mais uma dá … 24 … são quatro caixas!

Os restantes elementos do grupo recorrem ao esquema como estratégia de resolução, desenhando as caixas com os botões e fazendo sucessivos grupos de cinco botões (os necessários para cada casaco). De salientar que os alunos utilizam todos os botões das caixas, completando grupos com botões de outra caixa e assinalando a quantidade de botões que sobra (Figura 73).

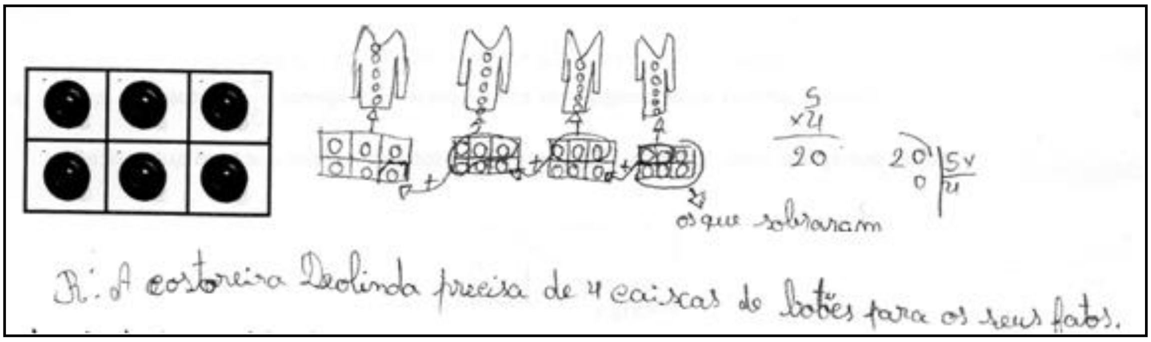


Figura 73 – Resolução da questão 1 – Tarefa 2.

No entanto, quando são questionados pela professora Inês sobre a parte da quarta caixa que é utilizada (com o intuito de fazer emergir o numeral misto), reorganizam a unidade de referência (a caixa) e encaram-na já não como um conjunto de seis objetos discretos, mas como três grupos de dois objetos, como se pode verificar no diálogo seguinte:

> **Professora (I):** São precisas quantas caixas inteiras?!
> **Dinorah:** Três caixas!
> **T2:** E mais dois botões de outra!
> **Professora (I):** E que parte representa esses dois botões?
> **Dinorah:** Um terço!
> **Professora (I):** Na última aula falámos nuns números que eram os numerais mistos. Lembram-se? Que tinham parte …
> **Dinorah:** Parte inteira e parte de fração!
> **Professora (I):** Então a quantidade exata de botões necessários podia ser representada …
> **Mariana:** Três um terço…

Os alunos do grupo identificam a quantidade de caixas inteiras necessárias como sendo a "parte inteira" e uma parte da quantidade de botões de outra caixa, como a "parte de fração". Deste modo, rapidamente se apercebem que podem utilizar uma representação que identifica a quantidade exata de botões necessária (parte-todo).

Também a primeira questão da tarefa cinco pode evidenciar esta capacidade, uma vez que os alunos num primeiro momento dividem a barra (grandeza contínua) em duas partes, depois reorganizam-na e dividiram cada parte em duas (para marcar $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$), num segundo momento, adotam o mesmo esquema de partição, e dividem a barra em dez partes (para marcar $\frac{2}{10}$) e depois em 20 partes para marcarem as outras duas frações (Figura 74).

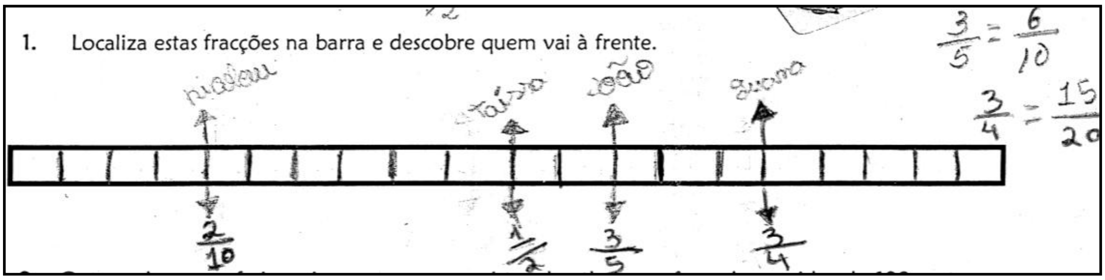


Figura 74 – Resolução do grupo à questão 1 – Tarefa 5.

Após marcarem $\frac{1}{2}$ (dividiram a barra em duas partes) e $\frac{3}{4}$ (dividiram cada metade em duas partes), os alunos começaram a apagar as divisões que tinham e a fazer novas para conseguirem marcar $\frac{2}{10}$ e $\frac{3}{5}$. Nesta situação os alunos apagam tudo e dividem a barra em dez partes iguais, para marcar $\frac{2}{10}$, não conseguindo, posteriormente, identificar os $\frac{3}{4}$, denotando que não reconhecem os contextos como equivalentes. A professora Inês interpela-os então:

Professora (I): Porque dividiram em 10?
Aida: Dava jeito para o Nicolau!
Professora (I): E para os outros, não?!
Aida: Dava para a Taíssa, é ao meio!
Professora (I): E mais? O João?!
Dinorah: Tínhamos de ter a barra dividida em cinco!
Professora (I): Em cinco! Ora vocês têm a barra dividida em dez. Não conseguem marcar a posição do João?
Aida: É aqui!? (apontando para os três décimos)
Professora (I): Em vez de terem a barra dividida em cinco, têm a barra dividida em dez! Qual a relação entre o dez e o cinco?
Mariana: É o dobro!
Professora (I): Então?!
Aida: É na sexta marca, para ser no dobro também! Seis décimos!
Professora (I): É uma fração equivalente!

Em virtude deste diálogo que surgiu com a professora Inês, os alunos compreenderam que o recurso a frações equivalentes é uma estratégia facilitadora do seu trabalho, pelo que resolveram determinar frações equivalentes às dadas. Decorrendo desta estratégia, dividiram a barra em dez partes iguais, para marcar as posições do Nicolau e do João, tendo posteriormente subdividido ao meio cada uma das partes obtidas, ficando deste modo a barra dividida em 20 partes iguais, para marcarem a posição da Luana.

Ainda no âmbito da concetualização da unidade, no caso de um problema que envolvia percentagens (tarefa dez), já na fase final da experiência de ensino, verifica-se que Cristiano e Dinorah manifestam ainda alguma dificuldade em compreender que a percentagem está associada a uma relação. Na questão um solicitava-se aos alunos que verificassem se uma promoção de 20% sobre um artigo que custava 30€, seguida de um desconto de 40%, seria equivalente a uma promoção de 60% sobre o valor inicial.

Como estratégia para responderem à questão, os alunos do grupo recorrem à barra numérica, que dividem em cinco partes iguais e assinalam, na parte superior, as percentagens, às quais fazem corresponder, na parte inferior, as respetivas frações e quantias monetárias (Figura 75).

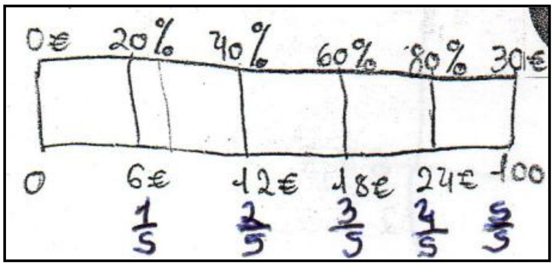


Figura 75 – Estratégia do grupo para determinar 20% de 30€ – Tarefa 10.

Cristiano faz uma leitura precipitada da barra relativamente ao enunciado do problema, cometendo um erro, com o qual Dinorah começa por concordar, mas que depois questiona, revelando incerteza no seu raciocínio:

Cristiano: Então 40% de desconto é 12€!
Professora (H): Como sabes que é 12€?
Cristiano: Está aqui na barra! (Figura 68)
Professora (H): Atenção! O desconto de 40% é sobre o valor já com o desconto de 20%!
Cristiano: Mas não é igual?
Dinorah: É! (fica pensativa) Não é?!

Perante a interpelação da investigadora, Cristiano parece assumir que 40% representa sempre o mesmo valor independentemente da unidade considerada. Duas colegas explicam-lhe então que o seu raciocínio não está correto:

Aida: Não! Um desconto de 20% é 6€, 30€ – 6€ dá 24€! E agora se o MP3 tem outro desconto, …
Mariana: Já não é com os 30€, é com os 24€ que é o novo preço!

Cristiano: Então faz-se 24€ menos 12€!
Mariana: Não podes fazer isso! 12€ é 40% de 30€! Mas nós queremos 40% de 24€!
Cristiano: E não é igual?!
Mariana: Claro que não!
Aida: Olha, vamos fazer outra barra!

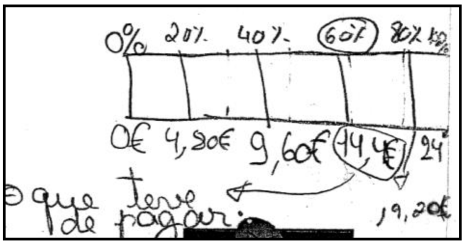


Figura 76 – Estratégia do grupo para determinar 40% de 24€ – Tarefa 10.

Apesar de as colegas tentarem explicar a Cristiano que à noção de percentagem está subjacente uma relação com a unidade que se considera, o aluno não se mostrava muito convencido. Deste modo, Aida sugeriu o recurso a uma barra numérica com o novo valor monetário após a aplicação da primeira percentagem (Figura 76), que também dividiram em cinco partes iguais e onde associam percentagens aos respetivos valores monetários. É através da leitura da nova barra que Cristiano se apercebe que estava errado.

Cristiano: Agora aqui 40% é 9,60€!
Mariana: Vês que não é a mesma coisa?!
Cristiano: Pois não!

Nesta situação, Cristiano não consegue, inicialmente, reconhecer a grandeza relativa das percentagens, uma vez que interpreta 40% como sendo um número absoluto ao qual corresponde sempre o mesmo valor, independentemente da unidade em questão. Somente depois de recorrer à barra, por sugestão da colega, é que parece ficar convencido que de facto 40% representa valores diferentes, dependendo da unidade presente na situação.

Depois de recorrerem a uma estratégia gráfica para resolver a tarefa, os alunos usufruem ao máximo da informação que ela lhes faculta, pois Mariana alerta os colegas para uma forma mais rápida e menos trabalhosa de determinarem o preço a pagar.

Mariana: Esperem lá! (…) 100% menos 20% dá 80%! Que é o que se paga! Assim basta vermos quantos € correspondem aos 80%!
Aida: Olha, pois é! Boa! Assim é mais rápido! (…)
Dinorah: Com um desconto de 60% sobre 30€, basta olharmos para os 40% … que é 12€ – o que se paga!

Os alunos chegam à conclusão de que o que falta numa percentagem de desconto, é a percentagem a pagar, por isso se a percentagem de desconto é 20%, como "100% menos 20% dá 80%", então 80% é a percentagem "que se paga". Tendo em conta esta estratégia e recorrendo à barra, na qual os alunos expressaram uma correspondência entre as percentagens e os valores monetários, conseguem identificar, de imediato, o valor que se paga numa situação de desconto. Além disso concluem de forma direta, por meio da observação das barras a que recorreram, qual a situação de desconto mais favorável.

Verifica-se que, embora não fosse esperado que os alunos recorressem à barra nesta situação de desconto, estes usam-na para calcular 20% de 30€, 40% de 24€ e também para ajudar um dos elementos do grupo a compreender que a percentagem é um valor relativo a uma unidade.

Também a questão 3.2. da tarefa dois requeria que os alunos conseguissem concetualizar a unidade pois colocava-os perante a reconstrução da unidade (*reversing*), tendo subjacente o significado da relação parte-todo, em grandezas discretas. O enunciado apresentava a fração $\frac{4}{5}$ e o seu correspondente valor (oito estrelas). Os alunos do grupo compreendem que o enunciado lhes pede que determinem o valor da unidade e interpretaram a fração dada como uma unidade dividida em cinco partes, onde a quarta parte corresponde a oito estrelas.

Mariana: Queremos a unidade inteira.
Dinorah: É a barra dividida em cinco …
Aida: Quatro quintos são oito estrelas …

A partir do momento que Dinorah se refere à unidade como uma barra dividida em cinco partes, os alunos do grupo desenham-na (Figura 77) e todo o raciocínio seguinte se desenrola em torno da mesma, determinando o número de estrelas que correspondem a um quinto e consequentemente o valor da unidade completa (cinco quintos).

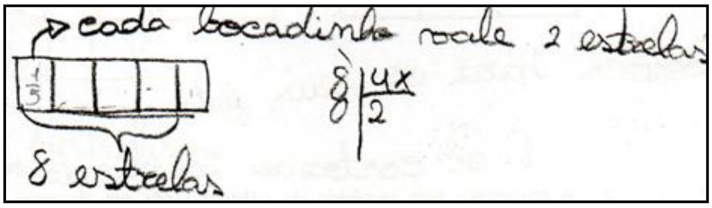


Figura 77 – Resolução da questão 3.2 – Tarefa 2.

Aida: … sobra uma parte então! (referindo-se a um quinto) As oito estrelas são quatro bocados (referindo-se aos quatro quintos).
Cristiano: Só falta um bocado para a unidade.

Aida: Sim! Temos de ver quanto é que vale. (ficam pensativos enquanto Dinorah começa a fazer contas no papel)
Dinorah: Em $\frac{1}{5}$ da unidade são duas estrelas, ao todo vai dar dez estrelas.

Para determinar o valor de um quinto, Dinorah recorre a um procedimento de cálculo efetuando o quociente entre oito e quatro, apercebendo-se de que é esse valor que falta, tal como Cristiano mencionou ("só falta um bocado para a unidade") e que tem de ser adicionado às oito estrelas, para ter a unidade completa ("ao todo vai dar dez estrelas"). Apesar de a unidade envolvida ser uma grandeza discreta, estes alunos recorrem à barra para representar a fração $\frac{4}{5}$ como sendo uma parte (numerador – quatro) do todo (denominador – cinco), dividindo a barra em cinco partes iguais, tendo consciência de que cada parte da barra corresponde a dois objetos (duas estrelas).

Na fase final da experiência de ensino os alunos são novamente confrontados com uma situação de reconstrução da unidade (*reversing*), neste caso numa grandeza contínua. A questão 1.4. da tarefa onze solicitava a reconstrução da unidade sendo dada uma medida de um comprimento (1,6m) que correspondia a uma parte (0,8) de uma certa unidade. Os alunos do grupo recorrem à representação na dupla linha numérica que dividiram em dez partes, onde marcaram o comprimento conhecido, ao qual fizeram corresponder 0,8, conforme explicam à professora Inês:

Aida: Fazemos uma linha e dividimos em dez partes iguais!
Professora (I): Em dez partes? Porquê?
Aida: Porque o enunciado diz que 1,60m são oito décimos!
Professora (I): E …?
Mariana: Décimos vem de dez!
Aida: Sim! Oito em dez!

Os alunos do grupo compreendem o numeral decimal que lhes é facultado pelo enunciado, como a oitava parte da unidade, pois reconhecem que ele representa "oito em dez". Deste modo, optam por recorrer à dupla linha numérica dividindo-a em dez partes iguais, como estratégia para responderem à questão, começando por marcar na oitava marca o comprimento conhecido (1,60m).

Posteriormente, os alunos fazem corresponder uma décima a cada intervalo e a sua respetiva medida, que obtêm através do algoritmo da divisão, como se observa no diálogo seguinte:

Mariana: Fazemos 1,60 a dividir por oito!
Aida: Mas a dividir dá menos! Dá 0,2!
Mariana: Calma! Isso é quanto vale uma parte! (referindo-se a $\frac{1}{8}$ de 1,60)

Aida: Ah! Pois é! Isto é o que vale uma décima!
Mariana: Cada espaço vale 20cm, que foi o que eu disse!
Aida: Agora quanto é que falta aqui?
Dinorah: Faltam dois bocados.
Cristiano: O comboio do Jorge mede 2m!

Os alunos do grupo identificam a unidade dividida em dez partes (*unitizing*), e determinam a medida de comprimento correspondente à fração unitária ($\frac{1}{8}$ de 1,60). Após esta fase, os alunos repetem essa medida, as vezes necessárias, neste caso duas vezes, de forma a reconstruírem a unidade, que corresponde, nesta situação, a dez partes (Figura 78).

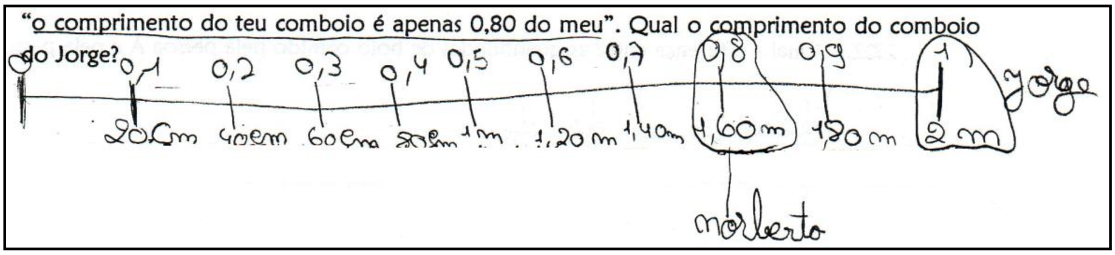


Figura 78 – Resposta do grupo à questão 1.4. – Tarefa 11.

O modo como os alunos resolvem esta questão, recorrendo à dupla linha numérica, evidencia a sua facilidade na reconstrução da unidade (*reversing*), mesmo quando a parte do todo é dada sob a forma de numeral decimal.

SÍNTESE

No âmbito da concetualização da unidade, os alunos do grupo estudo de caso, pelo modo como resolveram as tarefas da experiência de ensino, revelam ter a capacidade de interpretar a unidade (*unitizing/reunitizing*), bem como de a reconstruir (*reversing*), o que de acordo com Martinie (2007), são aspetos fundamentais na compreensão dos significados dos números racionais. Ao longo da realização das tarefas da experiência de ensino, esta capacidade começa a adquirir consistência, uma vez que os alunos recorrem espontaneamente ao modelo da barra numérica (Figuras 75, 76 e 77) e à dupla linha numérica (Figura 78) para resolver os problemas com que se confrontam.

Desde a primeira tarefa que os alunos revelam conhecer como representar numericamente a unidade, por meio de uma fração, apesar de utilizarem uma linguagem informal, por exemplo, "dois traço dois" para se referirem a dois meios. No entanto, a professora Inês foi intervindo no sentido de levar os alunos a usarem a terminologia correta e nas tarefas seguintes já todos os alunos do grupo faziam uma correta leitura das frações.

Relativamente à noção de *unitizing* e *reunitizing*, os alunos do grupo estudo de caso revelaram capacidade não só de interpretar a unidade que lhes era facultada, como também de a reorganizar de forma a dar resposta às questões que emergiam ao longo das tarefas. Um exemplo disso é a primeira questão da tarefa dois, onde Cristiano interpretou a unidade (caixa de seis botões) como sendo uma unidade composta. Por seu turno, a estratégia seguida pelos restantes elementos do grupo, sugere que estes, numa primeira instância interpretaram a unidade como um conjunto discreto de objetos. Contudo, quando interpelados pela professora, com o intuito de identificarem a parte de botões utilizados, os mesmos reorganizaram a unidade (*reunitizing*) e já a interpretaram como sendo uma unidade composta, tornando-se evidente que os alunos têm a capacidade de trabalhar de forma flexível com a unidade. Esta questão também permite verificar que, apesar dos alunos trabalharem em grupo, isso não os limita a uma única estratégia sendo deste modo possível emergirem, de forma natural, várias estratégias de resolução (procedimento de cálculo – Cristiano; estratégia flexível – Aida, Dinorah e Mariana), uma vez que cada um tem a liberdade de seguir aquela com que se sente mais confortável, sendo aceite por todos os elementos do grupo.

Na resolução da questão 1.4. da tarefa 11 (Figura 78), os alunos adotaram um esquema da unidade fracionária partitiva – PUFS (Wilkins & Norton, 2011) para reconstruirem a unidade, revelando que compreendem que uma parte da unidade fracionada pode ser repetida as vezes que forem necessárias para reproduzir a unidade (Norton, 2008). De acordo com Steffe (2002) os alunos utilizam um esquema fracionário iterativo para reproduzirem a unidade, o que segundo vários autores (Olive & Steffe, 2002; Steffe, 2002; Tzur, 1999) é um grande progresso no conhecimento dos alunos sobre as frações.

No conjunto das resoluções analisadas no âmbito desta categoria pode-se ainda observar que os alunos do grupo estudo de caso percorrem os quatro tipos de estratégias elencadas sendo predominante as estratégias flexíveis. Deste modo, os alunos recorrem a uma estratégia gráfica para resolverem a primeira questão da tarefa cinco (Figura 74), sendo esta posteriormente complementada com um procedimento de cálculo, devido à intervenção da professora Inês, que leva os alunos a determinarem frações equivalentes. Os alunos recorrem também a uma estratégia gráfica para resolver algumas questões da tarefa dez (Figura 76), sendo que para resolverem as restantes questões analisadas neste ponto, os alunos seguem uma estratégia flexível, combinando uma estratégia gráfica com um procedimento de cálculo (Figuras 73, 74, 77 e 78) ou então uma estratégia gráfica com uma simbólica (Figura 75).

As resoluções dos alunos permitem-nos observar que a barra numérica que vinham utilizando em tarefas anteriores (Figuras 74, 75, 76 a 77) sofreu uma alteração física (van den Heuvel-Panhuizen, 2003), transformando-se numa dupla linha numérica com a indicação dos números racionais e das medidas que lhes correspondem (Figura 78), que utilizam como suporte ao seu raciocínio – *modelo para*. Deste modo, a utilização que os alunos fazem dos modelos (barra numérica e dupla linha numérica) para resolver as questões que envolvem esta categoria permite-nos afirmar que aquela que começou como *modelo de* uma situação na primeira tarefa proposta (van den Heuvel-Panhuizen, 2003) foi apropriada como uma ferramenta útil para os alunos, potencialmente evoluindo para um *modelo para* pensar. Este aspeto, de acordo com Gravemeijer (2005), significa que a forma de pensar do aluno sofreu alterações, estando agora mais centrada nas relações matemáticas presentes nas situações propostas.

No entanto, ainda se verificam algumas dificuldades quanto a este aspeto do sentido de número racional por parte de dois dos alunos do grupo, Cristiano e Dinorah, em particular quando trabalham com percentagens, pois em algumas situações estes alunos não têm em conta que a percentagem é uma relação. De facto, a concetualização da unidade torna-se de extrema importância para a resolução de qualquer problema que envolva números racionais, sendo este aspeto que torna as percentagens tão complicadas de serem compreendidas (van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

6.3.2. Múltiplas representações

A primeira tarefa da experiência de ensino (partilha de chocolate) tinha a particularidade de fazer emergir as várias representações dos números racionais em paralelo (frações, decimais e percentagens), abordagem com a qual os alunos não estavam, aparentemente, familiarizados. Devido a este facto, a primeira questão da tarefa foi resolvida no grupo turma com orientação da professora Inês. A professora pretendia também aferir os conhecimentos da turma relativamente aos numerais decimais, uma vez que tinha a noção que muitas vezes os alunos têm ainda algumas dificuldades com esta representação dos números racionais. Por exemplo, observa que habitualmente os alunos têm tendência a considerar que 0,50 é maior que 0,5, o que a leva a discutir esse assunto com a turma a partir das várias respostas que os alunos dão.

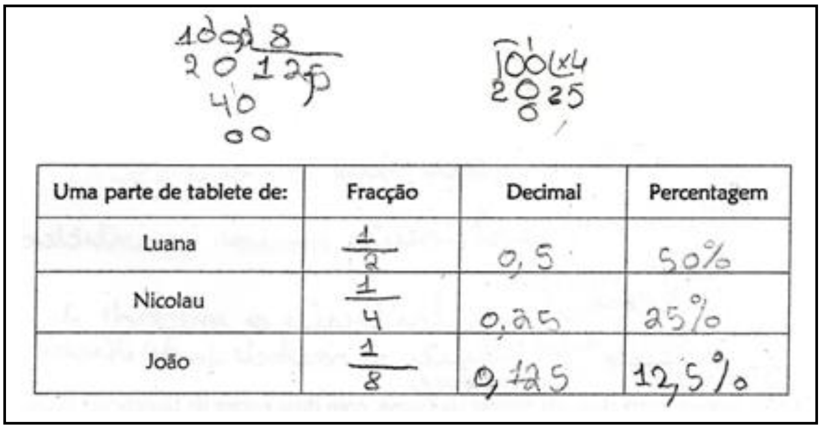
> **Professora (I):** Esta tablete vale (mostrando a tira de papel), em números, que número é que atribuíam a esta tablete?
> **Cristiano:** 100, 100%!
> **T1:** Um!
> **T2:** 100% é uma unidade!
> (…)
> **Professora (I):** Na representação decimal o que escreveram?
> **T1:** 0,50!
> (…)
> **T2:** Nós pusemos 0,5.
> **Professora (I):** Então quem tem certo? É o 0,5 ou o 0,50?

Cristiano: É a mesma coisa!
Dinorah: É o mesmo, 0,500; 0,50; 0,5 é igual!
Aida: 0,5 são as décimas e o 0,50 são as centésimas!

Os alunos do grupo revelam uma boa compreensão dos decimais, através das justificações que apresentam para mostrar que um decimal se pode escrever de várias formas, em função da sua leitura (representação verbal). Além disso, os alunos do grupo estudo de caso ficam a compreender que facilmente podem chegar às percentagens pedidas, efetuando o algoritmo da divisão entre 100 e o número de partes em que cada tablete foi dividida.

Mariana: Então na percentagem a unidade vale 100, se dividirmos por dois sabemos a percentagem da Luana!
Aida: Sim! Podemos fazer o mesmo para os outros!

Evidenciando uma tendência que perdura ao longo da experiência de ensino, os alunos recorrem, em seguida, ao algoritmo da divisão de 100 por quatro e de 100 por oito e preenchem a coluna da percentagem da tabela da primeira questão desta tarefa (Figura 79).



Uma parte de tablete de:	Fracção	Decimal	Percentagem
Luana	$\frac{1}{2}$	0,5	50%
Nicolau	$\frac{1}{4}$	0,25	25%
João	$\frac{1}{8}$	0,125	12,5%

Figura 79 – Resposta dos alunos à questão 1 – Tarefa 1.

Decorrente desta situação e do facto de os alunos compreenderem a concetualização da unidade, percebem que para preencher a coluna referente à representação decimal, a estratégia a seguir pode ser a mesma, mas agora a unidade já não é 100%, mas sim um.

Dinorah: Aqui é igual, só que em vez de 100 é um!
Mariana: Sim!
Cristiano: A unidade agora vale um!

A divisão de um por dois foi imediata pois os alunos já tinham conhecimento de que um meio representa metade e que metade se pode representar por 0,5 (tal como foi evidente no teste inicial). Para realizar a divisão de um por quatro, e de um por oito, os alunos recorreram à calculadora.

> **Aida:** Temos de acrescentar uma vírgula e zeros!
> **Dinorah:** Pois, o um não existe na tabuada do quatro!
> **Cristiano:** Fazemos com a calculadora, é mais fácil!
> **Aida:** Pois é, é mais rápido!

O recurso à calculadora deve-se ao facto de estes cálculos se terem revelado problemáticos para recorrerem ao algoritmo uma vez que os dividendos são menores que os divisores. Para agilizar o cálculo a efetuar, Cristiano propõe às colegas que utilizem a calculadora porque para ele é mais fácil e, segundo Aida, a facilidade está na rapidez com que podem resolver a questão ("é mais rápido").

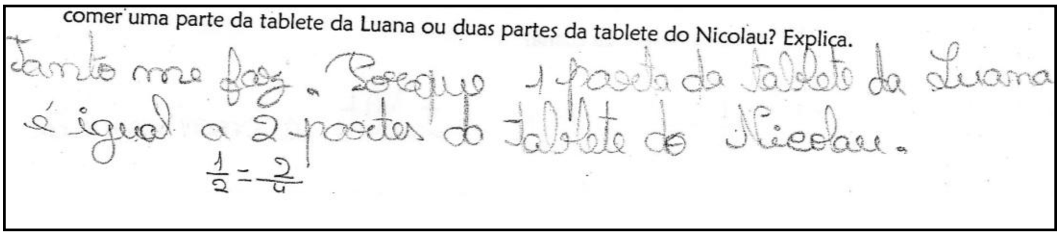
Esta primeira tarefa mostra como os alunos começaram a lidar com a equivalência de frações no início da experiência de ensino, quando lhes era pedido que manifestassem as suas preferências perante a comparação de duas quantidades resultantes de uma partilha equitativa. As tiras de papel distribuídas facilitaram a comparação das quantidades, sem que os alunos sentissem necessidade de representar as mesmas através de números racionais, no entanto, a investigadora solicitou-lhes que representassem as suas respostas numericamente.

> **Professora (H):** Conseguem escrever com números o que escreveram com palavras?
> **Aida:** Metade da Luana é um traço dois!
> **Dinorah:** Duas partes do Nicolau é um traço quatro?!
> **Aida:** Não! Isso era se fosse só uma parte!
> **Dinorah:** Ao todo são quatro!
> **Professora (H):** Como posso representar duas partes?
> **Aida:** Então … a tablete está dividida em quatro partes!
> **Professora (H):** Um quarto são quantos bocados dessa tablete?
> **Aida:** É um!
> **Professora (H):** Eu quero dois bocados!
> **Dinorah:** Um quarto e um quarto?!
> **Cristiano:** Dois quartos!

Apesar de a investigadora não dar orientações sobre a representação a utilizar, os alunos do grupo recorreram à fração para representar parte de uma unidade. É de salientar que a resposta de Cristiano, que esteve calado durante todo o diálogo, mas ao que parece muito atento, revela compreensão dos números racionais sob a forma de fração. Esta compreensão estende-se a todo o grupo, pois todos os restantes elementos concordam de imediato com o que Cristiano disse. A evidência de compreensão da equivalência das frações é reforçada quando a professora os leva a escrever matematicamente essa relação.

Professora (I): Que sinal podem colocar entre essas duas frações?
Aida: Sinal?!
Professora (I): Sim! Vocês têm escrito que uma parte da tablete da Luana é igual a duas partes da tablete do Nicolau! Já têm as frações e agora o que podem colocar entre elas?
Dinorah: Um igual!

Deste modo, e após encontrarem as duas frações respeitantes ao enunciado, os alunos do grupo associam-lhe o sinal de igual, em virtude da pergunta da professora Inês. Estabelecem assim uma relação de equivalência entre duas quantidades, uma vez que já haviam referido que "uma parte da tablete da Luana é igual a duas partes da tablete do Nicolau" (Figura 80), aspeto que também foi reforçado pela professora Inês.


comer uma parte da tablete da Luana ou duas partes da tablete do Nicolau? Explica.

Tanto me faz. Porque 1 parte da tablete da Luana é igual a 2 partes do tablete do Nicolau.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

Figura 80 – Resposta dos alunos à questão 1.2. – Tarefa 1.

Deste modo, os alunos do grupo conseguem traduzir para linguagem matemática o que tinham escrito em linguagem corrente, passando a saber, posteriormente com a intervenção da professora Inês, como podem determinar frações equivalentes.

Professora (I): Vocês escreveram $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}; \frac{1}{2} = \frac{4}{8}; \frac{2}{8} = \frac{1}{4} e \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Como é que conseguem passar da primeira fração para a segunda?
T3: É o dobro!
Aida: Aqui não! (referindo-se a $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$)
Cristiano: É vezes quatro!
Professora (I): Quando eu quero duas frações equivalentes o que tenho de fazer?
Mariana: Multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo número!

Após a professora Inês colocar os pares de frações na horizontal e de questionar a turma sobre a sua particularidade, os alunos do grupo estudo de caso conseguem identificar a forma de transformar umas frações nas outras. Depois de compreenderem estas situações particulares, Mariana esboça uma regra, embora incompleta, que permite determinar frações equivalentes, pelo que a professora Inês intervém de modo a que a "regra" possa ser completada.

Professora (I): Hum! Ok! Então e se eu tiver as frações escritas ao contrário, assim: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$?
Mariana: É metade!
Dinorah: Assim dividimos!
Professora (I): Então para ter frações equivalentes eu posso multiplicar ou dividir o numerador e o denominador pelo mesmo número!

É a professora Inês que completa a "regra" que Mariana começou a esboçar, mas não sem antes serem os próprios alunos a chegarem à conclusão de que dividindo ambos os termos da fração pelo mesmo número, também se podem obter frações equivalentes.

A evidência de que os alunos reconhecem a equivalência entre frações foi surgindo em vários momentos da experiência de ensino. Por exemplo, na tarefa dois, aquando da discussão no grupo turma de uma das questões, surgem dois numerais mistos que representam a mesma quantidade mas que têm partes fracionárias diferentes. Nesta situação, antes que a professora possa questionar a veracidade das duas respostas, Aida apressa-se a esclarecer que são equivalentes:

Professora (I): Então a quantidade exata de botões necessários podia ser representada …
Mariana: $3\frac{1}{3}$ ou $3\frac{2}{6}$!
Aida: São equivalentes!

Os alunos do grupo identificam a quantidade de caixas inteiras necessárias como sendo a "parte inteira" e uma parte da quantidade de botões de outra caixa, como a "parte de fração". Deste modo, rapidamente se apercebem que podem utilizar uma representação que identifica a quantidade exata de botões necessários, chegando inclusive a terem duas opções, uma vez que reconhecem frações equivalentes.

Mais tarde, nesta sequência de aulas, os alunos evidenciam que de facto compreenderam o que são frações equivalentes e como podem obtê-las, tal como é evidente na sua resolução da questão 3.1. da tarefa sete. Aqui os alunos para marcarem 80% numa barra dividem-na em dez partes iguais, contudo, as frações que registaram, fazendo-as corresponder às percentagens e decimais representados na barra, têm denominador cinco e não dez. Esta situação surge depois de um diálogo, onde os alunos verificaram a equivalência entre oito décimos e quatro quintos.

Mariana: Olhem, podemos fazer grupos de dois. (fazendo as marcas mais escuras que se encontram na barra)
Aida: Hã?!
Mariana: A barra podia ficar só com cinco partes!
Dinorah: Assim já não valia 10%! (referindo-se a cada parte)

Mariana: Valia 20%!
Dinorah: Assim em vez de $\frac{8}{10}$ é $\frac{4}{5}$.
Professora (H): Então mas afinal? Duas frações diferentes?!
Cristiano: Não! Valem o mesmo!
Mariana: Sim!
Dinorah: Se dividirmos em dez é $\frac{8}{10}$, se dividirmos em cinco é $\frac{4}{5}$, mas é no mesmo sítio. (referindo-se à sua localização na barra)
Aida: São equivalentes!
Mariana: Posso passar o quatro para oito e o cinco para dez!

Mesmo depois de terminarem a localização dos 80% na barra, Mariana não dá a tarefa por terminada e constata que podiam ter dividido a barra em menos partes (cinco em vez de dez), que assim sendo valem mais (20% e não 10%). Dinorah concorda com a colega, atribuindo outra fração aos 80%, estando todo o grupo consciente que são duas frações equivalentes ("valem o mesmo" – Cristiano; "é no mesmo sítio" – Dinorah; "são equivalentes" – Aida; "posso passar o quatro para oito e o cinco para dez" – Mariana).

Apesar de terem, aparentemente, compreendido a noção de equivalência de frações, aspeto evidente logo na primeira tarefa, os alunos do grupo não têm tendência para colocar este aspeto ao serviço da resolução de outras tarefas, como se torna evidente com a resolução que fazem da questão 3.1. da tarefa dois (Figura 81) e da questão um da tarefa cinco (ver Figura 74).

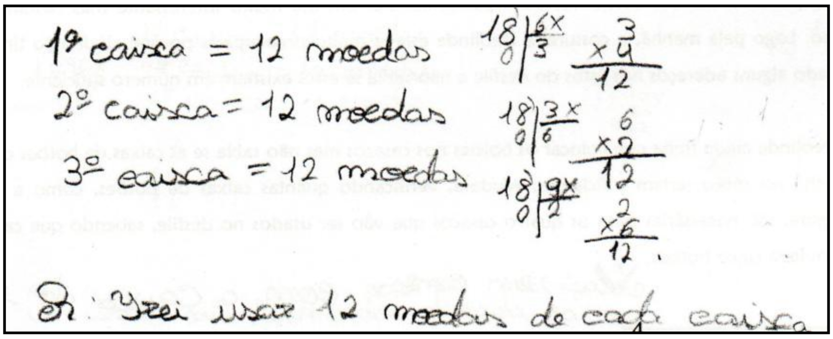


Figura 81 – Resposta do grupo à questão 3.1. – Tarefa 2.

Nesta questão solicitava-se aos alunos que determinassem o número de moedas correspondentes a uma parte de uma unidade composta. Os números racionais apresentados aos alunos encontravam-se sob a forma de fração e eram todas equivalentes, no entanto, só depois de constatarem que chegavam sempre ao mesmo valor (12 moedas) e com a intervenção da professora Inês, compreendem o motivo desse resultado.

Aida: Dá sempre 12!
Professora (I): Porque será? Já olharam bem para as frações?

Mariana: Conseguimos transformar os dois terços em quatro sextos e em seis nonos!
Professor (I): Como se chamam essas frações?
Mariana: Equivalentes!

Só depois de determinarem a quantidade de moedas correspondentes a cada operador, é que os alunos se apercebem que as três frações são equivalentes, pois partindo da fração que tem os termos menores, conseguem obter as outras duas frações.

É de salientar ainda que desde a primeira tarefa é evidente que os alunos reconhecem diferentes formas de representar um número racional, pois perante a questão 1.6., os alunos, embora estejam perante valores conhecidos, fazem coexistir as várias representações nas suas resoluções (Figura 82).

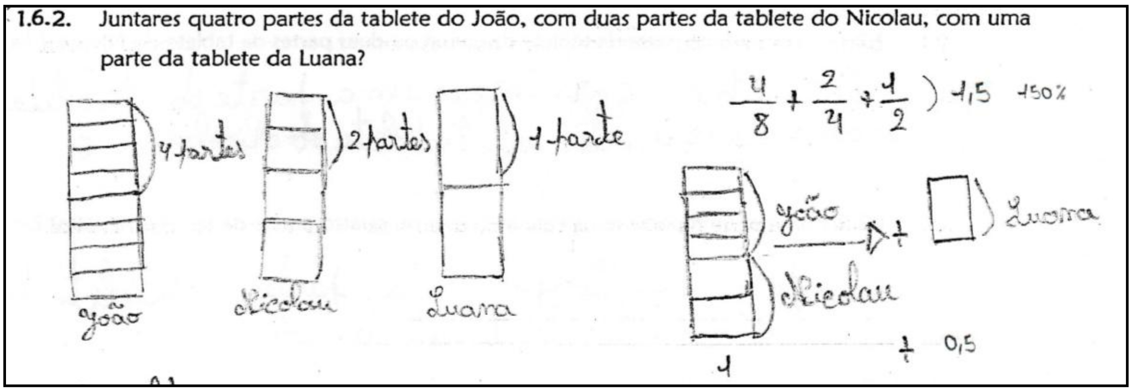


Figura 82 – Resolução do grupo à questão 1.6. – Tarefa 1.

O objetivo desta questão era levar os alunos a adicionarem partes de várias unidades através das tiras de papel que lhes tinham sido facultadas, no entanto os alunos do grupo estudo de caso deixaram-nas de parte e optaram por representá-las pictoricamente no papel. A par desta representação, é notório pela Figura 82 que os alunos aceitam que um número racional se pode representar de várias formas, tendo contribuído para isso a discussão no grupo turma que se fez da primeira questão desta tarefa.

Aida: Quatro partes da tablete de João é 0,5!
Dinorah: É o mesmo que duas partes da tablete do Nicolau!
Aida: E que uma parte da tablete da Luana!
Mariana: Temos três metades!
Cristiano: Três 50%!
Aida: Então é 150%!
Mariana: Sim! É uma tablete inteira e mais meia. (e escreve 1,5 em frente à indicação da soma das três frações)

Este diálogo dá evidência que os alunos reconhecem diferentes formas de representar um número racional, o que é também corroborado pelo facto de representarem a soma de três frações por um numeral decimal ($\frac{4}{8}+\frac{2}{4}+\frac{1}{2}=1{,}5$).

O facto de os alunos reconhecerem que os números racionais se podem representar de diversas formas é um aspeto de extrema importância para que consigam compreender as múltiplas representações destes números e estabelecer conexões entre elas. Deste modo, a forma como os alunos do grupo estudo de caso resolveram a questão 1.6. da primeira tarefa reforça a importância desta e da discussão no grupo turma da sua primeira questão. A partir deste momento os alunos começam a evidenciar boa compreensão das representações dos números racionais e facilidade em converter umas nas outras.

Este aspeto torna-se, uma vez mais evidente na segunda parte da questão dois da tarefa cinco (Figura 83), onde os alunos convertem as frações em numerais decimais, efetuando uma divisão entre o numerador e o denominador da fração.

	Fracção	Decimal	Percentagem
Andreia	$\frac{2}{4}$	0,5	50 %
Bruna	$\frac{4}{5}$	0,8	80 %
Ismael	$\frac{6}{8}$	0,75	75 %
Hugo	$\frac{4}{8}$	0,5	50 %

Figura 83 – Resolução do grupo à segunda parte da questão 2 – Tarefa 5.

Apesar de os alunos na primeira tarefa determinarem a percentagem correspondente a uma fração, através da divisão de 100 pelo denominador da respetiva fração, na tarefa cinco, perante a mesma situação, optaram por se auxiliarem em barras numéricas, pois cada uma representava 100m (Figura 84). Esta opção evidencia que estes alunos usufruem das potencialidades da barra, até mesmo para tornar as suas resoluções mais céleres e menos exaustivas.

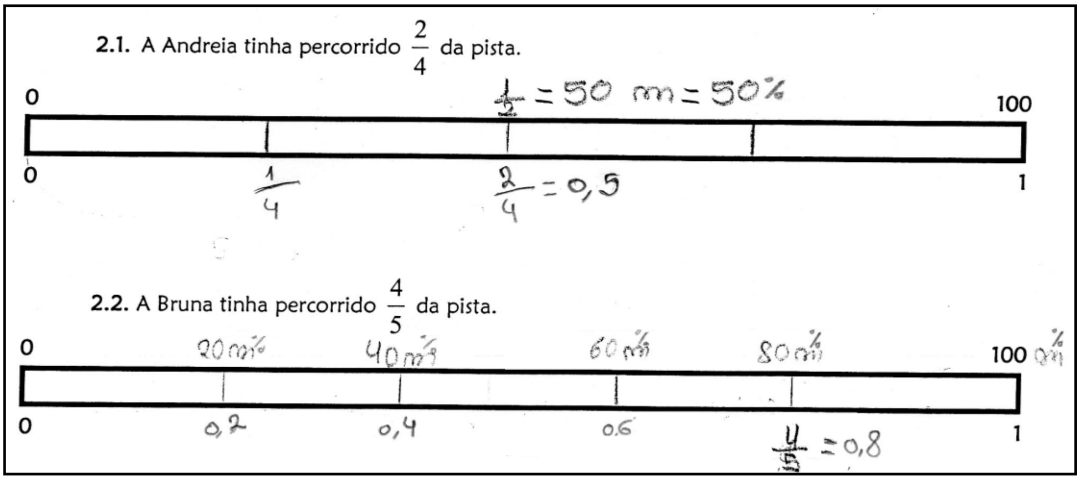


Figura 84 – Resolução do grupo às questões 2.1. e 2.2. – Tarefa 5.

Apesar de o número 100 que se encontrava no final da barra representar o comprimento da pista (100m), tal como é referido no enunciado, os alunos serviram-se dele como se fosse uma percentagem, sabendo que a quantidade de metros percorrida por cada participante equivalia à percentagem da pista percorrida pelo mesmo.

Aida: Os 100m dão jeito, podem ser a percentagem … 100%!
Dinorah: Pois é, a Andreia fez metade, que é 50% e aqui são 50 metros! (referindo-se ao ponto 2.1.)

Neste momento os alunos já têm bastante facilidade em escrever as várias representações e fazem-no simultaneamente com a marcação das posições de cada participante na barra, como é evidente na Figura 84.

Apesar de os alunos evidenciarem que compreendem a relação entre frações e decimais e entre as frações e percentagens, a professora Inês apercebe-se que eles ainda não se tinham apercebido da relação entre decimais e percentagens, pelo que os questionou sobre uma possível forma de transformar diretamente os decimais que registaram na tabela (Figura 83), em percentagens e vice-versa.

Professora (I): Olhando para as duas últimas colunas, será que existe forma de transformar uma na outra? (os alunos ficam pensativos durante alguns segundos)
Aida: Sim! Se dividirmos por 100 … é o que a palavra percentagem significa … por cento … por cem!
Mariana: E ao contrário multiplica-se por 100! (referindo à conversão de decimal para percentagem)

Após a intervenção da professora Inês é notório que os alunos compreendem não só como passar de uma fração para numeral decimal (dividindo o numerador pelo denominador) e para uma percentagem (dividir 100 pelo denominador da fração), como também conseguem, como é evidente na última questão da tarefa cinco, descobrir e registar a "regra" que lhes permite converter uma percentagem em um numeral decimal (Figura 85).

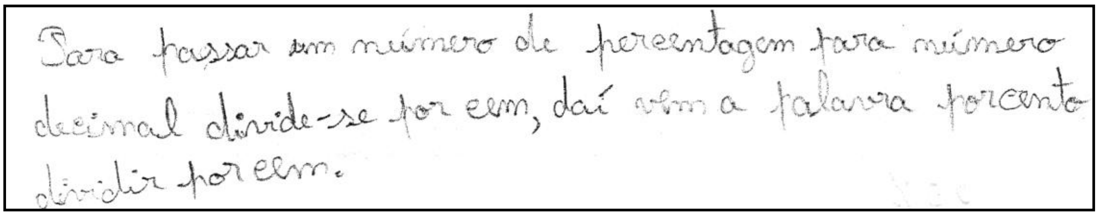

Para passar um número de percentagem para número decimal divide-se por cem, daí vem a palavra porcento dividir por cem.

Figura 85 – Registo da conclusão do grupo – Tarefa 5.

A flexibilidade que os alunos do grupo estudo de caso revelam na conversão entre as várias representações dos números racionais começou a tornar-se evidente logo na primeira questão da terceira tarefa, onde os mesmos colocam nas barras apresentadas mais do que uma representação em simultâneo, estabelecendo uma equivalência entre elas (Figura 86).

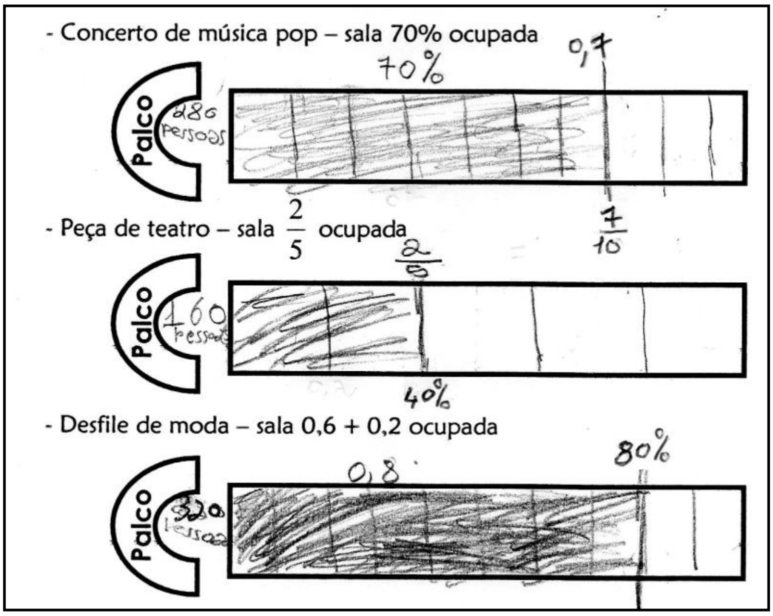


Figura 86 – Resolução do grupo à questão 1 – Tarefa 3.

Apesar de lhes serem dadas três representações diferentes dos números racionais de forma separada, ou seja, uma para cada evento, estes alunos do grupo não se coíbem de, na mesma barra, fazer surgir mais do que uma representação dos números racionais. Deste modo, evidenciam capacidade de converter uma percentagem num numeral decimal e na sua fração equivalente (concerto de música pop), uma fração numa percentagem (peça de teatro) e um numeral decimal numa percentagem (desfile de moda).

Inicialmente a marcação dos 70% (concerto de música pop) e dos 0,8 (desfile de moda) parece incorreta uma vez que estes valores se encontram sobre a terceira marca de cada barra, no entanto os alunos do grupo estudo de caso esclarecem à investigadora que escreveram estes números racionais em cima da barra de uma forma aleatória, pois o que queriam evidenciar era que os 70% e os 0,8 correspondiam a toda a parte que sombrearam.

> **Professora (H):** Não percebo onde marcaram os 70% e os 0,8!
> **Aida:** Não marcámos em risco nenhum, pintámos o bocado que correspondia aos 70% e aos 0,8 e depois escrevemos por cima!
> **Cristiano:** Depois escrevemos os outros números no fim do que pintámos, que são a mesma coisa!

Cristiano reforça a conversão que o grupo fez entre as várias representações dos números racionais, ao mencionar que acrescentaram outras representações ("outros números") às que o enunciado lhes dava, na respetiva marca ("no fim do que pintámos"), evidenciando que compreendem que representam a mesma quantidade ("são a mesma coisa").

Ainda relativamente a esta questão, a investigadora questionou-os sobre o facto de dois quintos corresponderem a 40% e estes esclarecem que recorreram mentalmente ao quociente entre 100 e cinco.

> **Professora (H):** Como sabem que dois quintos são 40%?
> **Mariana:** Então, em percentagem a barra vale 100%, se está dividida em cinco, cada bocadinho vale 20!
> **Aida:** Sim! Porque sabemos que dois vezes cinco é dez!
> **Professora (H):** Dez?! Mas a barra não vale 100?!
> **Mariana:** Sim! Dois vezes cinco é dez, por isso vinte vezes cinco é cem!

Neste diálogo está bem presente o conhecimento que retiveram da primeira tarefa quando foi discutido os valores que a unidade podia adotar consoante a representação que se estivesse a falar. Neste caso os alunos assumem que a barra vale 100% ("em percentagem a barra vale 100%") e evidenciam compreender a conversão entre frações e percentagens, pois referem que têm de recorrer ao quociente entre 100 e o denominador da fração, que neste caso é cinco. Além disso, estes alunos evidenciam ainda ter destreza com os números, ao escolherem valores que lhes facilitam a realização mental do cálculo.

A boa compreensão que estes alunos têm das múltiplas representações de um número racional é também bastante visível na resolução da tarefa seis, em que era pedido que ajuizassem sobre a equidade de distribuição de um certo número de sanduíches por três diferentes grupos de crianças, não se fazendo referência a uma representação particular dos números racionais. Nesta tarefa havia a expectativa que os alunos utilizassem frações, no entanto, estes recorreram a percentagens para responder ao que lhes era solicitado.

Após alguma dificuldade inicial na interpretação da situação, Aida sugere aos colegas que se centrem na situação que corresponde ao número de elementos do seu grupo, que é também aquela que envolve os valores mais pequenos (a mesa do João). Esta sugestão evidencia a importância do contexto como apoio à interpretação da situação, uma vez que a associam a algo familiar. No seguimento da sugestão da aluna, o grupo consegue encontrar uma estratégia que lhe permite determinar a porção de sanduíche que cada criança come.

> **Aida:** Vamos começar pela mesa quem tem menos pessoas! Nós somos quatro, estavam aqui três sandes. Como é que nós fazíamos para todos comermos? Vamos imaginar!
> **Mariana:** Dividimos duas sandes ao meio e ficamos com quatro pedaços que distribuímos por cada um!
> **Dinorah:** E a última?
> **Aida:** E agora dividíamos assim (divide a última sandes em partes iguais)! Portanto, 25% mais 25%, mais 25%, mais 25%, vai dar tudo uma unidade! 25% é equivalente a quanto?
> **Mariana:** Acho que é um quarto!
> **Aida:** Sim!

Ao verificarem que a terceira sanduíche teria que ser dividida de forma diferente das duas primeiras (uma metade para cada aluno), Aida sugere a divisão em quatro partes iguais, representando cada uma delas por 25%, enquanto Mariana sugere que se trata de $\frac{1}{4}$. Esta forma diferenciada de representar a parte da unidade, levanta a questão de as duas representações terem o mesmo significado, no entanto, Aida reconhece que se trata de uma outra forma de representar a mesma quantidade, concordando com a colega.

Em virtude da forma como Aida divide as sandes (Figura 87) surge outra dificuldade no momento em que têm de adicionar $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, mas depressa a ultrapassam quando decidem transformar as frações em percentagens.

> **Aida:** Escrevemos aqui que cada um come um meio mais um quarto! Quanto é que dá? (sorri para os colegas) 50% mais 25% … cada um come 75%!
> **Dinorah:** Então se juntarmos, vai dar … já sei, vai dar três quartos!
> **Aida:** É?! (questionando de forma duvidosa)
> **Dinorah:** É o quê?! Então imaginemos que as sandes estão divididas em quatro (apontando para as sandes que desenhou – Figura 88), daqui cada um come duas partes, mais a parte da terceira sandes, dá três partes de 25% cada uma!
> **Aida:** Pois é! Cada um come três quartos de cada sandes! (Figura 87)

Figura 87 – Resposta da aluna Aida – Tarefa 6.

Figura 88 – Resposta da aluna Dinorah – Tarefa 6.

A divergência quanto à representação a utilizar rapidamente é resolvida quando os alunos fazem um paralelo entre as frações e as respetivas percentagens, para depois conseguirem concretizar a adição de $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{4}$ (50% e 25%). No final voltam à fração equivalente a 75% ($\frac{3}{4}$), evidenciando não só reconhecer diferentes formas de representar um número racional mas também flexibilidade em converter uma na outra.

De seguida, o grupo decide considerar a mesa do Nicolau e, neste caso, dividem todas as sanduíches no mesmo número de partes (cinco) e Aida, novamente, sugere a representação sob a forma de percentagem, fazendo uma associação rápida entre a quinta parte da unidade e 20%. Os colegas aceitam com facilidade esta sugestão e rapidamente concluem que têm que multiplicar esse valor por quatro para obter o valor pretendido, como se evidencia na Figura 89.

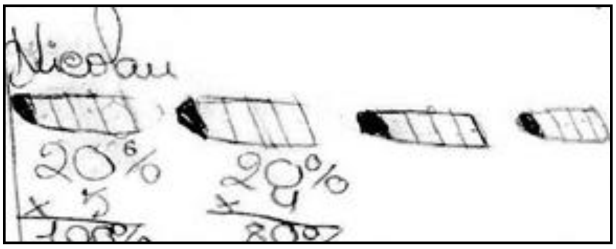


Figura 89 – Resposta do grupo estudo de caso – Tarefa 6 (Nicolau).

Finalmente, na situação da mesa da Luana, o grupo opta também por dividir todas as sanduíches no mesmo número de partes e usa o algoritmo da divisão para saber que percentagem corresponde a cada bocado. Em seguida, recorre ao algoritmo da multiplicação para determinar que percentagem de sanduíche comeu cada pessoa, tal como se observa na Figura 90.

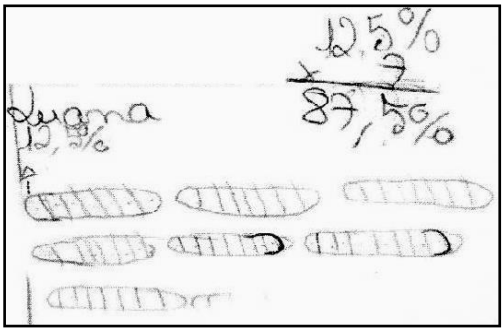


Figura 90 – Resposta do grupo estudo de caso – Tarefa 6 (Luana).

A concretização desta tarefa pelo grupo permite observar dois caminhos diferentes, mas que se desenrolam em paralelo. Ou seja, todos os alunos do grupo se apoiaram em esquemas que dividem em partes iguais. No entanto, enquanto Mariana, Dinorah e Cristiano, posteriormente, recorreram ao algoritmo da divisão para determinarem o valor de cada parte, que transformam em percentagem, Aida identificou cada parte do esquema sob a forma de fração. Contudo, a resposta final de todos os elementos do grupo surge sob a forma de percentagem, tendo Aida transformado as suas frações em percentagens, recorrendo também ao algoritmo da divisão e da multiplicação.

Numa questão posterior da mesma tarefa (questão 1.1.), onde se questionava se a partilha seria mais justa se juntassem as mesas de oito e de quatro (dez sanduiches para partilhar por 12 pessoas), os alunos para ajuizarem sobre a situação voltam a recorrer às percentagens (Figura 91).

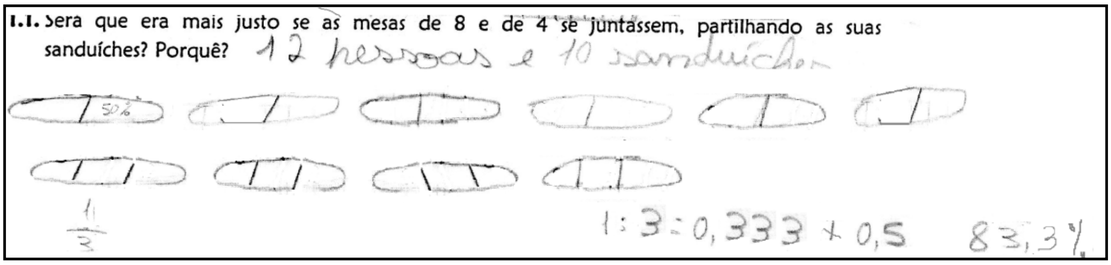


Figura 91 – Resolução do grupo à questão 1.1. – Tarefa 6.

Perante a nova situação, os alunos têm agora dez sanduiches para repartir por 12 pessoas e aproveitam a estratégia de Aida de partição das sanduiches da questão anterior, para fazerem a nova distribuição (Figura 91).

> **Mariana:** Em vez de dividirmos as dez sanduiches em 12bocados, podemos fazer como a Aida fez há bocado!
> **Dinorah:** Sim! Vamos dividindo as sandes ao meio até termos 12 bocados! Depois as que sobrarem logo se vê!
> **Cristiano:** Já está! Dividimos seis sanduíches ao meio!

> **Aida:** Sobram quatro sanduíches … para dar 12 … 4x3=12, cada sanduíche tem de ser dividida em três bocados!

Depois de procederem à partição das sanduiches os alunos rapidamente identificam que cada pessoa irá receber metade de uma sanduíche mais um terço de outra. Para determinarem a parte de sanduíche que cada pessoa recebe, convertem a percentagem (50%) e a fração ($\frac{1}{3}$) em numeral decimal, e adicionam-nos. É de salientar que o quociente entre um e três foi calculado através da calculadora, ao qual adicionaram 0,5, tendo surgido no monitor da calculadora 0,83333333…. Apesar disso, não foi este valor que os alunos registaram no papel, mas sim 83,3% como se pode observar na Figura 91. Isto demonstra uma vez mais que os alunos reconhecem várias formas de se representar uma parte do todo e facilmente as convertem umas nas outras.

Perante o valor encontrado (83,3%), os alunos referem que apesar de continuar a não ser justo, porque esta mesa recebe mais que a outra (mesa de cinco pessoas com quatro sanduiches – Figura 89), esta situação é mais justa do que a situação anterior (situação exposta na questão um – três mesas) uma vez que a diferença agora já é menor, pois numa mesa cada pessoa come (cerca de) 83% de uma sanduíche e na outra mesa come 80%.

> **Aida:** Justo, justo ainda não é! Estas comem 83% e as outras 80%.
> **Mariana:** Pois não, mas é mais justo assim do que como estava!
> **Dinorah:** O que comem a mais já é menor!

É importante salientar que os alunos uma vez mais evidenciam reconhecer diferentes formas de representar um número racional, quando escrevem uma percentagem a partir da soma de duas parcelas escritas sob a forma de numeral decimal (Figura 91), pois converteram de imediato o valor que a calculadora lhes apresentou. Deste modo, os alunos demonstram que também têm capacidade para converter uma fração num numeral decimal e este numa percentagem, podendo afirmar-se que têm flexibilidade em converter as representações umas nas outras.

Esta flexibilidade também é evidente na tarefa sete, onde representam na barra a ocupação de um parque de estacionamento (80%), utilizando, sem ser solicitado, simultaneamente frações, numerais decimais e percentagens (Figura 92). Os alunos começam por dividir a barra em dez partes, assinalando os 80% na oitava marca, à qual fazem corresponder 0,8.

> **Dinorah:** Dividimos a barra em dez partes!
> **Cristiano:** Cada parte vale 10%.
> **Aida:** Então 80% é no oitavo risco!
> **Mariana:** 0,8!

Dinorah: Também pode ser $\frac{8}{10}$.

Aida: Ou $\frac{4}{5}$!

Cristiano: Mas a barra está dividida em dez!

Aida: Mas podemos dividi-la só em cinco! (e reforça com o lápis, o segundo, o quarto, o sexto e o oitavo traço, escrevendo as frações que lhes correspondem)

Figura 92 – Resolução do grupo à questão 3.1. – Tarefa 7.

Com a sua explicação, Aida demonstra que compreende a noção de *reunitizing* pois ela menciona que pode dividir a sua unidade apenas em cinco partes, obtendo assim uma representação equivalente ($\frac{4}{5}$) às outras (0,8; 80% e $\frac{8}{10}$) que os colegas já haviam encontrado, reforçando deste modo, a compreensão da concetualização da unidade que já havíamos constatado no ponto 6.3.1.

Também na tarefa nove que abordava o significado de razão e onde se esperava que os alunos trabalhassem com frações, verificou-se que optaram por trabalhar com numerais decimais, sendo notório, mais uma vez, que conseguem estabelecer uma relação entre estas duas representações como também entre estas e as percentagens. Aquando do momento da discussão, no grupo turma, da questão dois desta tarefa, surgiram outras representações por parte de outros grupos. Na sequência da pergunta que a professora Inês lança à turma, "O grupo da T2 escreveu que o dia em que o sumo está mais amargo é na 4.ª feira porque só leva 75% de uma colher de açúcar! O que isso significa?", os alunos dialogam, no grupo, evidenciando que compreenderam estar perante respostas equivalentes:

Aida: É igual! Está a dizer o mesmo que nós!
Dinorah: Mas nós temos 0,75!
Cristiano: É a mesma coisa!
Aida: Fizeram o mesmo que nós, só que nós deixámos ficar os decimais e eles passaram para percentagens!
Dinorah: Ah! Pois é!
Cristiano: Na 2.ª é 80%!
Mariana: E na 3.ª é 125%!

É notória a flexibilidade com que os alunos convertem os seus valores (numerais decimais) em percentagens, pois compreendem que são formas equivalentes de se representar a mesma quantidade. Apesar de os alunos do grupo terem optado pelos decimais como sendo a representação mais favorável para compararem razões e darem resposta às questões, não se fixam a esta representação como sendo a única possível na resolução das questões.

Mesmo quando a representação envolvida surge na forma gráfica, os alunos não revelam nenhuma dificuldade em lhe atribuir, o que Goldin (2008) designa por um "símbolo escrito", tal como é evidente na tarefa dez. Nesta tarefa o valor monetário de um determinado artigo surge sob a forma gráfica e os alunos rapidamente transformam essa representação num numeral misto, e convertem-no também em percentagem e em numeral decimal (Figura 93).

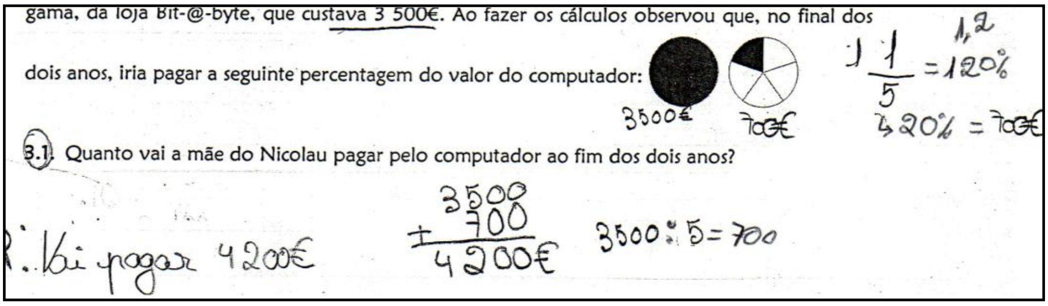


Figura 93 – Resolução do grupo à questão 3 – Tarefa 10.

Os alunos começam por traduzir a representação gráfica respeitante a um valor superior à unidade por um numeral misto, associando à sua parte fracionária a percentagem de 20% e, ao seu conjunto, a percentagem de 120%, convertendo-a de seguida num numeral decimal (1,2). Posteriormente abandonam esse processo e determinam o valor monetário correspondente a um quinto, somando-o de seguida ao valor inicial referido no enunciado da tarefa (Figura 93). A investigadora questiona-os sobre essa opção, e os alunos esclarecem que as conversões que fizeram foram apenas para contactarem com as várias representações e para se munirem de ferramentas que num outro momento lhes podem ser úteis ("mais tarde podem dar jeito").

> **Aida:** Isto está dividido em cinco.
> **Mariana:** Então temos de ver quanto dinheiro é. (realizando de imediato o algoritmo)
> **Dinorah:** Agora somamos aos 3500€! (efetuando a soma)
> **Professora (H):** Porque representaram isto de várias formas? (apontando para informação gráfica)
> **Cristiano:** Porque a gente quis, é giro!
> **Aida:** Assim vamos vendo números diferentes!
> **Mariana:** E mais tarde podem dar jeito!

Como é evidente pelo diálogo, os alunos optam por converter as representações umas nas outras porque aparentemente é uma atividade que gostam de realizar ("é giro"), e têm a noção de que perante uma situação podem enveredar por uma outra representação consoante o que lhes é mais favorável ("vamos vendo números diferentes" … "e mais tarde podem dar jeito").

A flexibilidade que os alunos têm em converter as diferentes representações de um número racional evidencia-se também pela opção que tomam de realizar conversões como uma estratégia de resolução de problemas.

A questão dois da tarefa 11 surge com o intuito de verificar a estratégia que os alunos adotam para concretizar uma adição de partes da unidade, bem como averiguar que representações dos números racionais utilizam nessa situação. As partes da unidade eram facultadas através de representações gráficas (setores de círculo), onde cada parte estava identificada com uma cor diferente, tendo os alunos de adicionar as partes da mesma cor. Na resolução desta questão, apesar de o grupo de alunos usar as três representações dos números racionais, apresentam o resultado final para as quatro situações pedidas sob a forma de percentagem (Figura 94).

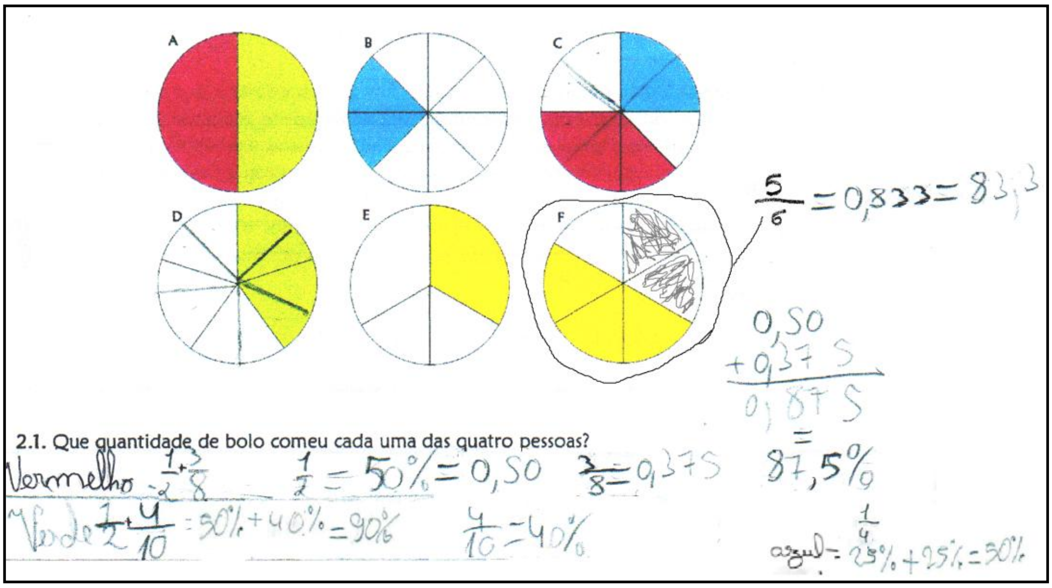


Figura 94 – Resolução do grupo à questão 2.1. – Tarefa 11.

Como se pode verificar, os alunos começaram por representar as partes da unidade, assinaladas a vermelho, por frações, que transformaram em seguida em numerais decimais com o objetivo de adicionar as respetivas quantidades, para no fim passarem o valor da soma para percentagem. Nas outras situações, os alunos transformaram as frações diretamente em percentagens (verde e azul) e adicionaram-nas.

A soma relativa à quantidade amarela levantou alguma dificuldade inicial aos alunos pois não tinham um valor de referência para a fração dois sextos.

Aida: Opá! No amarelo eu não sei qual é a percentagem igual a dois sextos!
Dinorah: Aqui é 50%, é metade! (referindo-se à figura F)
Aida: Pois, mas e aqui? (referindo-se à figura E)
Cristiano: Podemos usar a calculadora!
Mariana: Não é preciso! Olhem aqui, as duas figuras estão divididas em seis partes, duas partes daqui (referindo-se à figura E), mais três daqui (referindo-se à figura F), dá cinco! (sombreando mais duas partes da figura F)
Aida: Pois é! Dá $\frac{5}{6}$!
Cristiano: Mas podemos usar na mesma a calculadora para saber a percentagem!
Dinorah: Sim! Dá 0,8333…
Aida: Isso é 83,3,%.

Este diálogo evidencia que os alunos conseguem utilizar as três representações e revelam capacidade para estabelecer conexões entre elas, utilizando uma ou outra consoante a situação com que se deparam. É de salientar que apesar de os alunos poderem utilizar a calculadora livremente, realizam de início a adição de frações recorrendo às figuras e só a usam no final para transformar a fração obtida em numeral decimal. De imediato, indicam a percentagem correspondente.

Um dos objetivos das tarefas era fazer surgir os numerais mistos como uma representação dos números racionais que representam uma quantidade maior que um. Deste modo, esta representação foi contemplada desde a primeira tarefa, com o intuito de familiarizar os alunos com a mesma e para que pudessem estabelecer uma relação com as outras representações. O exemplo da tarefa dois, quando os alunos conseguem identificar a quantidade exata de botões necessários, por meio de numerais mistos, evidencia que começam a usar com alguma facilidade esta representação dos números racionais – os numerais mistos. Essa evidência está presente, quando na questão três da tarefa oito, os alunos associam o numeral misto que surge associado a uma capacidade.

Mariana: Primeiro temos de ver quantos litros são $2\frac{1}{2}$!
Aida: Então se $\frac{1}{2}$ é meio litro, isso são 2,5 litros.

Com os dados que possuem, os alunos optam por determinar a quantidade de combustível que cada carro vai gastar para chegar às bombas de combustível.

Aida: Os pais do Nicolau chegam à gasolineira com o depósito vazio!
Mariana: Sim! Eles vão precisar de 7,5litros que é só o que têm!
Dinorah: Como?
Aida: Olha! Gastam 2,5litros aos 30km, 30+30+30=90, por isso 2,5x3=7,5!

Os alunos adicionam sucessivamente o número 30 até perfazer os 90km (estratégia da adição repetida) e, ao verificarem que adicionam o 30 três vezes, optam por multiplicar a quantidade de combustível gasta aos 30km por três, de forma a determinarem a quantidade de combustível que os pais do Nicolau vão gastar para chegarem às bombas. Os alunos compreendem que os pais do Nicolau vão gastar mais do que 2,5litros, e também se apercebem que os pais do João vão gastar exatamente metade desse valor.

Cristiano: Os pais do João estão a metade!
Aida: Hã?!
Cristiano: Só estão a 15km! Não é metade de 30?!
Aida: Ah! Sim é! Se em 30km gastam $2\frac{1}{2}$, em 15km gastam $1\frac{1}{4}$!
Dinorah: Então não é metade de 2,5?!
Mariana: Sim!
Cristiano: Mas a Aida está a falar em $1\frac{1}{4}$!
Aida: Olha lá, e não é metade?! Um é metade de dois e $\frac{1}{4}$ é metade $\frac{1}{2}$!
Dinorah: Pois é! Então gastam 1,25litros!

Aida tem como ponto de partida o numeral misto que o enunciado facultou e transforma-o noutro que representa a sua metade, o que deixa Dinorah e Cristiano confusos. Compreendem depois que Aida está a referir-se à mesma quantidade que eles, depois de esta explicar como obtém o numeral misto $1\frac{1}{4}$.

Posteriormente, o grupo recorre ao algoritmo da multiplicação para determinar o valor a pagar pelo combustível que os pais do João precisaram de colocar no depósito, tal como é evidente na Figura 95.

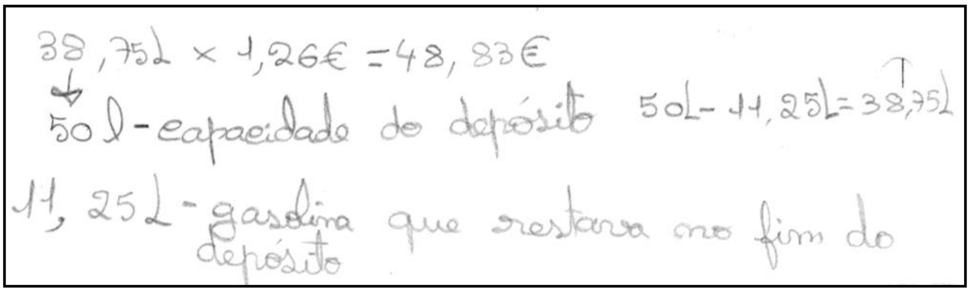


Figura 95 – Resposta do grupo à questão 3 – Tarefa 8 (relativamente aos pais do João).

Para determinarem o produto entre 38,75 e 1,26 os alunos recorreram à calculadora, no entanto, é de salientar que apresentam o mesmo com apenas duas casas decimais (como se utiliza no dia-a-dia) e não com três, como lhes surgiu no monitor da calculadora.

SÍNTESE

Logo no início da experiência de ensino, os alunos do grupo estudo de caso evidenciam compreender uma noção básica para se conseguir trabalhar com frações, que é o facto de terem conseguido adicionar um quarto mais um quarto de forma correta (questão 1.2. da primeira tarefa). Além disso, mais tarde, na tarefa 11, voltam a revelar compreensão dos números racionais, quando conseguem interpretar uma fração como um único número, não cometendo o erro frequente e identificado por muitos autores (Empson, 1999; Behr et al. 1984; Cruz & Spinillo, 2004; Cramer & Wyberg, 2009), de adicionar numeradores e denominadores, como consequência da memorização de regras e mecanização de procedimentos, como generalização do conhecimento dos números inteiros (Cruz & Spinillo, 2004).

Ao longo da experiência de ensino, os alunos do grupo estudo de caso também evidenciam não só compreender que um número racional pode admitir múltiplas representações, como também uma boa compreensão da relação entre estas representações, uma vez que revelaram capacidade de estabelecer conexões entre as várias representações, reconhecendo a correspondência entre frações, numerais decimais e percentagens. De acordo com Behr e Post (1992); Behr, Post, Silver e Mierkiewicz (1980) e Charalambous e Pitta-Pantazi (2006) esta capacidade facilita o desenvolvimento do conceito de número racional. Para esta capacidade contribuiu, sem dúvida, a primeira tarefa através do trabalho paralelo destas três representações que foi extensivamente explorado.

Além destas três representações, também é de salientar que os alunos recorrem a outras representações, nomeadamente à representação pictórica (Figuras 87, 88, 89, 90 e 91) e à representação verbal (Goldin, 2008). Neste âmbito observa-se que os alunos desenham figuras (Figuras 87, 88, 89, 90 e 91), que utilizam para representar cada uma das situações. Além disso, a representação verbal também está muito presente nos diálogos dos alunos. Embora tenham começado com uma representação verbal informal, relativamente às frações, quando mencionaram "quatro traço quatro" ou "um traço dois" (entre outras), a partir da primeira tarefa da experiência de ensino utilizam representações verbais formais, fazendo uma leitura correta das frações e dos numerais mistos (Goldin, 2008).

Desde a primeira tarefa é visível o reconhecimento, por parte dos alunos, de várias formas de representar um número racional. Um aspeto chave é a compreensão de que a unidade por ser representada de diversas formas, como eles próprios referem, "em vez de 100 é um" – Dinorah; "a unidade agora vale um" – Cristiano – referindo-se à passagem de percentagem para decimal. Adquirido este conhecimento, os alunos facilmente conseguem transitar entre as várias representações o que é bastante evidente no facto de estes escreverem um numeral decimal (Figura 82) ou uma percentagem (Figura 94) como resultado de uma adição de frações.

A capacidade de os alunos estabelecerem conexões entre as representações torna-se evidente pela flexibilidade que manifestam no manuseio da barra, uma vez que os mesmos aceitam a coexistência das várias representações no modelo, sem que isso os confunda (Figura 84). Este aspeto corrobora o que Middleton et al. (1998) afirma ao defender que este modelo é importante por permitir aos alunos estabelecer conexões entre as várias representações dos números racionais. Além disso, o modo como os alunos decidem adicionar partes de um todo representadas pictoricamente (Figura 94), evidencia não só que reconhecem diferentes formas de representar um número racional, como também que têm a capacidade de estabelecer conexões entre as diferentes representações, uma vez que conseguem convertê-las umas nas outras.

Ainda no âmbito do uso de múltiplas representações, é notório que os alunos também conseguem reconhecer representações equivalentes. Isto é, os alunos do grupo estudo de caso reconhecem numerais decimais equivalentes (tarefa um: 0,5 ou 0,50 "é a mesma coisa" – Cristiano; "é o mesmo, 0,500; 0,50; 0,5 é igual" – Dinorah; "0,5 são as décimas e o 0,50 são as centésimas" – Aida) e também frações equivalentes (tarefa um; tarefa dois; tarefa sete: "valem o mesmo" – Cristiano; "é no mesmo sítio" – Dinorah; "são equivalentes" – Aida; "posso passar o quatro para oito e o cinco para dez" – Mariana; tarefa oito: "$3\frac{1}{3}$ ou $3\frac{2}{6}$, são equivalentes" – Mariana e Aida), apesar de não utilizarem estas últimas como estratégia facilitadora da resolução das questões (tarefa dois e cinco). Este aspeto poderá prender-se com o facto de esta estratégia ter tido pouca expressão nas discussões em grande grupo. Estas discussões eram muito ricas permitindo que os alunos tomassem contacto com um leque variado de estratégias, seguidas pelos vários grupos, no entanto, a equivalência de frações quase não foi utilizada pelos grupos e também não lhe foi dada muita relevância pela professora, possivelmente porque o tempo também não o permitiu.

Relativamente às estratégias adotadas pelos alunos, é de salientar que estes continuam a utilizar os quatro tipos de estratégias: a procedimentos de cálculo (Figuras 79, 81 e 95), estratégias simbólicas (Figuras 84, 86 e 92) e estratégias flexíveis, onde combinam as três estratégias (Figura 91), ou então optam por combinar uma estratégia gráfica com uma simbólica (Figuras 82, 87 e 88) ou com um procedimento de cálculo (Figuras 89 e 90), ou ainda uma simbólica com um procedimento de cálculo (Figuras 93 e 94). Relativamente à estratégia seguida pelos alunos na tarefa três (Figura 86), é de salientar que a explicação que os alunos dão à questão que lhes é colocada sobre a equivalência entre dois quintos e 40%, evidencia que os mesmos têm destreza com os números conseguem compor e decompor números de forma a facilitar o cálculo (McIntosh et al., 1992; Huinker, 2002).

Dentro do campo das estratégias, é ainda de ressaltar que na resolução da tarefa seis surgem duas estratégias que se desenrolam em paralelo. Estes dois caminhos podem evidenciar níveis de compreensão diferentes, nomeadamente entre Dinorah e Aida. Enquanto Aida, de acordo com Lamon (1996) recorre à estratégia das peças preservadas (Figura 87) para distribuir equitativamente três sandes por quatro pessoas, Dinorah recorre à estratégia da distribuição (Lamon, 1996), uma vez que subdivide todas as sandes em quartos (Figura 88). Segundo o autor, a estratégia da Aida corresponde a um nível de compreensão mais elevado que a estratégia da sua colega. Esta tarefa permite observar que, apesar de trabalharem em grupo, vão surgindo estratégias de resolução diferentes e a sua partilha torna-se importante porque leva os alunos a conhecerem outras formas de chegar à solução, que, por vezes, são menos morosas. Deste modo, numa outra situação (Figura 91) os alunos optam por seguir a estratégia que Aida já havia utilizado na questão anterior, e efetuam uma partição designada por peças preservadas (Lamon, 1996).

É importante salientar que é Mariana que, muitas vezes, alerta os colegas do grupo para outras estratégias menos morosas que poderiam seguir para resolver a tarefa em causa ("em vez de dividirmos as dez sanduiches em doze bocados, podemos fazer como a Aida fez há bocado" – tarefa seis; "olhem, podemos fazer grupos de dois" – tarefa sete; "esperem lá! (…) 100% menos 20% dá 80%! Que é o que se paga! Assim basta vermos quantos € correspondem aos 80%" – tarefa dez – ponto 6.3.1.; "não é preciso! Olhem aqui, as duas figuras estão divididas em seis partes, duas partes daqui, mais três daqui, dá cinco" – tarefa 11). Deste modo, Mariana revela capacidade no âmbito da aplicação do conhecimento e da destreza com os números, aspeto importante na compreensão do sentido de número (McIntosh et al., 1992).

Os outros alunos do grupo vão também revelando que estão a desenvolver o sentido de número racional, como é o caso de Aida que, na tarefa oito, revela capacidade adequada e flexível de cálculo mental que lhe permite decompor um numeral misto (Reys & Yang, 1998). Além disso, quando os alunos, nesta tarefa, apresentam o resultado arredondado às centésimas (Figura 95), evidenciam ter consciência de que as soluções podem ser aproximadas (McIntosh et al., 1992), revelando uma compreensão da relação entre o contexto de um problema com a solução obtida.

6.3.3. Sistemas de valores de referência

O recurso a números de referência surge em vários momentos da resolução das tarefas da experiência de ensino, nomeadamente na subdivisão da unidade, quando os alunos utilizam a barra ou a linha numérica. Uma situação em que este aspeto se torna evidente é na segunda questão da tarefa três, em que o número racional surge com o significado de operador e os alunos recorrem à barra para resolver a situação (Figura 96).

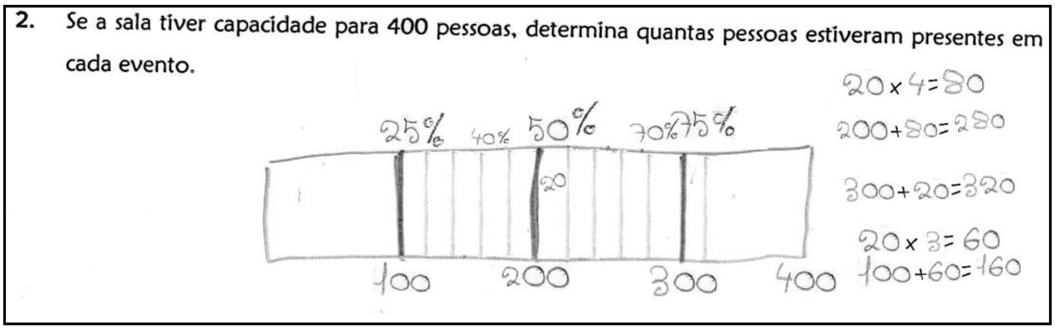


Figura 96 – Resposta do grupo à questão 2 – Tarefa 3.

Inicialmente os alunos dividem a barra em quatro partes, apoiando-se nos valores de referência que conhecem (25%, 50% e 75%) e, posteriormente subdividem cada uma das partes em cinco para localizar as percentagens que necessitam (40%, 70% e 80%). Determinam então o número de pessoas correspondente a cada percentagem.

> **Professora (I):** Porque dividiram a barra em quatro partes?
> **Dinorah:** Porque já conhecemos as percentagens que correspondem a cada marca se a barra estiver dividida em quatro!
> **Mariana:** Dividimos ao meio e temos os 50%. Depois dividimos cada bocado ao meio e temos os 25% e os 75%!
> **Aida:** Depois os 70% estão entre 50% e 75%!
> **Cristiano:** Mais de 200 e menos de 300 pessoas!
> **Mariana:** Depois dividimos este bocado em cinco partes, porque assim ficámos com um risco nos 55, 60, 65 e 70!
> **Aida:** Cada bocado vale 20 pessoas.
> **Professora (I):** Porquê?
> **Aida:** Olha, então porque cem a dividir por cinco é 20.

O diálogo anterior evidencia que os alunos para darem resposta à questão dois da tarefa três, recorrem a valores de referência que podem ter sido adquiridos ou consolidados nas tarefas anteriores. O número 20 como resultado do quociente entre 100 e cinco pode-se dizer que, neste momento, é também um número de referência para os alunos, resultante da resolução da primeira questão desta mesma tarefa, como se pode constatar no diálogo entre a investigadora e os alunos, quando esta os questiona sobre a equivalência entre dois quintos e 40% (16.º diálogo da secção 6.3.2.).

Também numa das questões da tarefa cinco, os alunos partem do valor de referência "metade" ao qual fazem corresponder as respetivas frações ($\frac{1}{2} e \frac{4}{8}$) e a percentagem 50% (Figura 97), para marcarem uma fração que reconhecem ser maior que um meio.

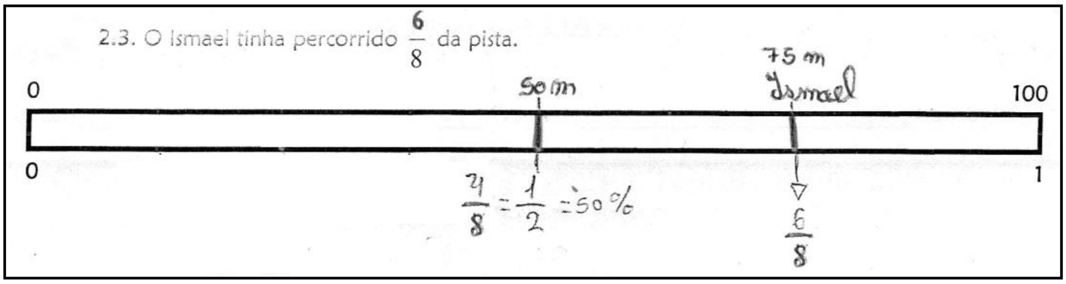


Figura 97 – Resolução do grupo à questão 2.3. – Tarefa 5.

Os alunos optam por dividir apenas a segunda metade da barra uma vez que reconhecem que é nesta parte que têm de marcar a fração apresentada no enunciado, tal como é evidente pela explicação que surge aquando do diálogo entre os elementos do grupo estudo de caso.

> **Dinorah:** Isto é quase no fim da barra.
> **Aida:** Pois, metade eram $\frac{4}{8}$, por isso é mais de metade!
> **Cristiano:** Então aqui é o meio (dividindo a barra em duas partes e escreve um meio). Mas temos de dividir a barra em oito (apontando para o denominador da fração).
> **Mariana:** Não precisamos deste bocado (referindo-se à primeira metade da barra), por isso podemos dividir só este (apontando para a segunda metade)!

Para marcarem a fração facultada pelo enunciado, numa primeira instância os alunos fazem uma estimativa do local onde ela vai ser posicionada, ao dizerem que "é quase no fim da barra", porque têm consciência que ela é maior que um meio ("é mais de metade"). Sabendo desse facto, os alunos optam de seguida por dividir apenas a segunda metade da barra ("podemos dividir só este") ao meio, marcando assim os $\frac{6}{8}$.

> **Mariana:** Aqui são $\frac{4}{8}$ (apontando para a primeira marca que fizeram) e aqui, $\frac{8}{8}$ (apontando para o fim da barra) …
> **Aida:** Já sei! O seis é mesmo no meio!

Os alunos reconhecem que $\frac{6}{8}$ divide a segunda metade da barra ao meio, por isso só fazem mais uma marca na barra, dividindo a segunda metade desta apenas em duas partes. Assim sendo, depois de se analisar o processo que os alunos seguiram para marcar a posição do Ismael, pode-se dizer que nesta situação as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$ e $\frac{8}{8}$ serviram de referência para os alunos conseguirem marcar $\frac{6}{8}$.

Também na primeira questão da tarefa oito, os alunos utilizam um valor de referência para identificarem o numeral decimal e a percentagem correspondente à quantidade de combustível no depósito do automóvel dos pais do Nicolau.

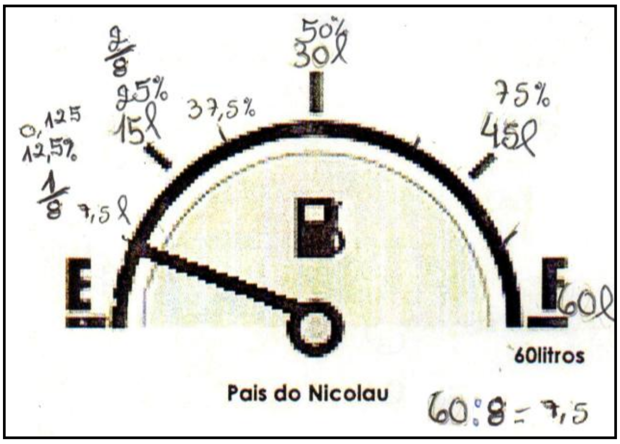


Figura 98 – Subdivisão do depósito de combustível na questão 1 – Tarefa 8.

Primeiro os alunos optam por subdividir o novo modelo (depósito de combustível) em partes iguais, uma vez que o ponteiro do combustível do automóvel dos pais do Nicolau não se encontrava em nenhuma marca. Deste modo, este depósito de combustível fica dividido em oito partes e os alunos fazem corresponder a fração $\frac{1}{8}$ ao ponteiro (Figura 98).

No entanto, como a primeira questão solicitava que representassem numericamente a parte do depósito correspondente à gasolina que já fora utilizada em cada automóvel, os alunos primeiro optaram por identificar a parte de gasolina que ainda estava no depósito, porque compreendem que o que faltar a essa parte para a unidade é a resposta à questão.

Aida: Então $\frac{1}{8}$ é 0,125!
Dinorah: Puxa! Fizeste a conta de cabeça?
Aida: Não! Nós já tínhamos feito esta conta! Não te lembras quando tivemos de dividir a tablete de chocolate em oito pedaços?
Dinorah: Pois foi, foi logo no início!

Nesta questão é bem evidente o reconhecimento de que $\frac{1}{8}$ equivale a 0,125, sendo estas representações utilizadas pelo grupo, a partir da indicação de Aida, como números de referência para agilizar a resolução da questão.

É de salientar ainda que o recurso a valores de referência surge também num diálogo entre os elementos do grupo, aquando do trabalho em pequeno grupo na tarefa cinco.

Aida: Os $\frac{3}{5}$ têm de ficar depois de $\frac{1}{2}$ porque são mais que metade!
Dinorah: Pois é!

> **Professora (H):** Porque dizem isso?!
> **Aida:** Então porque metade de cinco é dois e meio, três é mais de metade de cinco, por isso tem de ficar depois da metade, é mais que 0,5!

Depois de terem assinalado a metade ($\frac{1}{2}$), os alunos do grupo estudo de caso utilizam este racional como ponto de referência para terem uma noção de onde podem marcar a fração três quintos. Segundo eles esta fração fica à direita de um meio ("têm de ficar depois"), porque sabem que esta representa um numeral decimal maior que 0,5.

No seguimento do diálogo anterior, a investigadora questionou o grupo sobre a localização aproximada dos três quintos, de modo a incitar o surgimento do pensamento residual.

> **Professora (H):** Mas depois de $\frac{1}{2}$ têm os $\frac{3}{4}$, onde acham que fica os $\frac{3}{5}$, antes ou depois dos $\frac{3}{4}$?
> **Dinorah:** Sei lá!
> **Aida:** Espera! Se nós pensarmos que nos $\frac{3}{4}$ a unidade são $\frac{4}{4}$ e nos $\frac{3}{5}$ são $\frac{5}{5}$ …
> **Dinorah:** E?!
> **Aida:** As divisões nesta são mais pequenas! (referindo-se aos três quintos)
> **Professora (H):** Divisões?!
> **Aida:** Sim! Os bocados!

Este diálogo evidencia que Aida reconhece que quantas mais partições se fazem na unidade, mais pequenas são as partes que resultam.

Na sequência deste diálogo Mariana começa por reconhecer a parte do todo que falta às duas frações para a unidade ("falta um bocado e aqui faltam dois") e Aida identifica as respetivas frações ("falta $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$"). No entanto, Cristiano apressa-se a converter uma das frações, correspondente à parte-todo que falta para a unidade, em percentagem ("$\frac{1}{4}$ é 25%") e Aida identifica a parte da unidade que se tem ("$\frac{3}{4}$ são 75%").

> **Mariana:** Esperem, aqui falta um bocado para a unidade (referindo-se aos três quartos) e aqui faltam dois! (referindo-se aos três quintos)
> **Aida:** Então falta $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$. (respetivamente)
> **Cristiano:** $\frac{1}{4}$ é 25%!
> **Aida:** Sim! $\frac{3}{4}$ são 75%!
> **Cristiano:** Só temos de saber quanto é $\frac{2}{5}$!
> **Mariana:** $\frac{1}{5}$ é 20% … são 40%!
> **Aida:** Então se falta 40%, $\frac{3}{5}$ são 60% … os $\frac{3}{5}$ ficam antes dos $\frac{3}{4}$.

Depois de identificarem as percentagens correspondentes à parte-todo do que falta (25% e 40%), os alunos acabam por comparar as partes que têm (75% e 60%) e não as partes que faltam em cada uma, para terem a unidade. Em suma, os alunos recorrem aos valores que faltam para terem a unidade, no entanto, apenas mantêm essa estratégia para determinarem a percentagem correspondente aos $\frac{3}{5}$.

SÍNTESE

Esta seção evidencia uma vez mais a importância da primeira tarefa que "apetrechou" os alunos de conhecimentos que os mesmos vão utilizando ao longo da experiência de ensino de forma a facilitar a resolução das tarefas (primeiro diálogo que surge após a Figura 98). É de salientar ainda que, no seguimento do 6.º diálogo deste ponto, de acordo com Charalambous e Pitta-Pantazi (2006) os alunos evidenciam também compreender que quanto mais o todo é dividido, mais pequenas as partes se tornam.

A utilização dos números de referência atravessou várias tarefas da experiência de ensino, sempre que os alunos subdividiam a barra ou a linha numérica. Estes alunos recorrem amiúde a vários valores de referência ao longo da experiência de ensino, como por exemplo 25%, 50% e 75% (Figura 96 – tarefa três) ou às frações um meio e um quarto (diálogo que antecede as Figuras 87 e 88 – tarefa seis) e ao numeral decimal 0,5 (tarefa cinco – 5.º diálogo da presente secção), como também à fração um oitavo e ao numeral decimal 0,125 (Figura 98 – tarefa oito). Os três primeiros valores são utilizados na resolução da questão dois da tarefa três, onde os alunos, tal como acontece na questão 2.3. da tarefa cinco (Figura 97), resolvem "fazer metades sucessivas de partes" da barra numérica (Yanik et al., 2008). Posteriormente, em relação à tarefa três (Figura 96), os alunos utilizam os valores correspondentes às percentagens (número de pessoas) como "extremos" de um outro valor que têm de descobrir ("os 70% estão entre 50% e 75%!" (…) "mais de 200 e menos de 300 pessoas!"). Deste modo os alunos utilizam estes valores de referência não só para subdividirem a barra numérica, como também para os compararem com outros valores. É de salientar que para dar resposta a esta questão, os alunos seguiram uma estratégia flexível, tendo combinado uma estratégia gráfica com um procedimento de cálculo (Figura 96).

Além destas percentagens, os alunos utilizam também como valores de referência a fração um meio, à qual fazem corresponder o decimal 0,5, para orientarem a localização da fração três quintos, ao referirem que esta fração tem de ficar depois de um meio, porque é maior que 0,5 (questão um da tarefa cinco – quinto diálogo do ponto 6.3.3.).

A fração $\frac{1}{8}$ também é um valor de referência para estes alunos (tarefa oito), nomeadamente para Aida que rapidamente a converte num numeral decimal, explicando que a rápida conversão se deve ao facto daquela fração já ter sido utilizada anteriormente, identificando a primeira tarefa como aquela onde esta fração surgiu pela primeira vez.

Os pontos de referência são uma estratégia seguida pelos alunos que pode ser classificada como estratégia gráfica, quando estes são utilizados para localizar outros pontos na barra numérica (Figura 96 e 97) ou como estratégia simbólica quando estes são interpretados não como pontos na linha/barra numérica, mas como símbolos escritos (fração, numeral decimal ou percentagem) com o objetivo de se converter uma representação na outra (Figura 98). Deste modo, podemos afirmar que os alunos do grupo estudo de caso recorrem a estratégias simbólicas (Figuras 98) e a estratégias flexíveis, onde combinam um procedimento de cálculo com uma estratégia gráfica (Figura 96), ou uma estratégia gráfica com uma estratégia simbólica (Figura 97).

O recurso ao pensamento residual foi muito fugaz e o último diálogo desta secção é o que mais se aproxima deste aspeto, pois é somente na questão um da tarefa cinco que ela é aflorada muito ligeiramente, quando a Mariana menciona que "aqui falta um bocado para a unidade e aqui faltam dois". De acordo com a literatura, o pensamento residual é uma estratégia que os alunos podem utilizar para comparar frações (Post & Cramer, 1987), no entanto, como também refere a investigação é pouco provável que ela seja abordada no ensino (Clarke & Roche, 2009), pelo que a sua utilização por parte dos alunos pode ser pouco frequente. De facto, neste estudo os alunos não tendem a utilizá-la como estratégia para comparar frações porque, por um lado, ela não foi abordada nas discussões em grande grupo, e, por outro, os alunos possuem um vasto leque de estratégias que lhes permite resolver as questões de outras formas.

6.3.4. Densidade dos números e o seu valor de posição

O primeiro aspeto a analisar relativamente a esta categoria é a representação de números racionais na linha numérica, na barra numérica ou dupla linha numérica que potencialmente poderia surgir em qualquer tarefa, dependendo da estratégia que os alunos adotassem. No caso das tarefas associadas ao significado de medida este aspeto está obviamente presente, tal como sucedeu na tarefa quatro.

Nesta tarefa, depois de concluírem que necessitam de cinco espelhos inteiros e parte de um sexto (1m), após interpelação da professora em grande grupo, Aida sugere no seu grupo que recorram à barra para encontrarem uma forma de representar a parte do sexto espelho que é utilizada (Figura 99).

Mariana: Cinco não chegam!
Aida: Mas seis são demais. E agora?!
Cristiano: Cortamos o sexto espelho!
(…)

Mariana: Do outro vamos usar só 1m! (referindo-se ao sexto espelho)
(…)
Aida: Temos de fazer a barra!

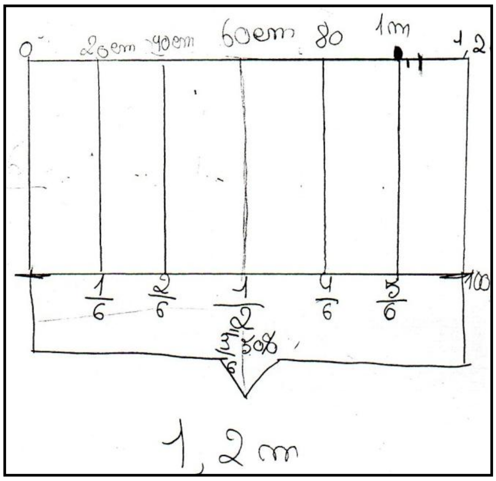


Figura 99 – Divisão do sexto espelho pelo grupo – Tarefa 4.

Conforme mostra a figura, os alunos do grupo desenham a barra, que dividem em seis partes iguais, e utilizam as várias representações (percentagem, decimal e fração) da mesma porção de uma unidade, na barra. Além disso verifica-se que utilizam a barra com bastante rigor de representação, uma vez que fazem claramente a separação entre a representação das medidas na parte superior da barra e das frações e percentagens correspondentes em baixo. É visível a flexibilidade no uso da barra, uma vez que os alunos aceitam a coexistência das várias representações no modelo, sem que isso os confunda. A utilização do modelo com compreensão é visível na forma como respondem às perguntas da professora, explicando o que fizeram:

Professora (I): Porque dividiram a barra em seis partes?
Aida: Primeiro dividimos a barra ao meio, que era 50% e 60cm!
Professora (I): Ok! No fim então era …
Cristiano: 100% e 120cm!
Mariana: Nós precisávamos de um metro do sexto espelho! Depois de sabermos quanto era metade do espelho, fomos ver quanto é que lhe faltava para chegar aos 100!
Professora (I): E como raciocinaram para dividir cada metade em três?
Mariana: Vimos que do 60 para chegar a 100 faltava 40! E do 100 para chegar ao 120 faltava 20! Como só queríamos 40cm, dava-nos jeito que cada bocadinho valesse 20cm!
Aida: Então ficámos com uma marca nos 100cm, que corresponde a $\frac{6}{6}$!
Dinorah: Que é a parte do sexto espelho que se utiliza!

Como é ilustrado pelo desenho (Figura 99) e pela explicação dada no diálogo anterior, os alunos tomaram o espelho como unidade (120cm) e foram usar uma fração ou percentagem de referência (um meio ou 50%, respetivamente) para tentar estabelecer uma relação da parte (100cm) que queriam relacionar com o todo. De seguida, ao fazerem a diferença entre 100 e 60cm e entre 120 e 100cm, verificam que a segunda é metade da primeira e apercebem-se que a metade da barra, entre os 60 e os 120cm, pode ser dividida em três secções iguais. Na sua totalidade, a barra pode ser dividida em seis partes iguais, correspondendo cada uma a 20cm. Estas medidas são assinaladas na parte superior da barra, às quais fazem corresponder as respetivas frações na parte inferior da barra.

No caso da tarefa sete era solicitado explicitamente aos alunos que representassem números racionais na barra, traduzindo a ocupação de certos parques de estacionamento. A primeira questão solicitava aos alunos que utilizassem frações, numerais decimais e percentagens para representar a parte ocupada e a parte livre e na questão dois os alunos deviam representar em barras, a ocupação de cada parque. Contudo, os alunos optaram por inverter a ordem da resolução das questões, resolvendo primeiro a questão dois, por estarem com dificuldades em resolver a questão um.

> **Mariana:** Esperem lá! Qual é a relação entre 16 e 40? (referindo-se à parte livre do parque dois)
> **Aida:** É melhor irmos à barra!
> **Dinorah:** E em quantas partes vamos dividir a barra?
> **Aida:** Vamos experimentando até termos uma marca nos 16, outra nos 24 e outra nos 40!
> **Mariana:** Pode ser, mas em dois é pouco e em três não dá!
> **Aida:** Sim! Vamos começar com o quatro! (depois de experimentar, fazendo 40:4=10) Não dá, assim tínhamos uma marca no 10, no 20, no 30 e no 40!
> **Dinorah:** Vamos experimentar o cinco?! (os alunos experimentam, adotando a mesma estratégia 40:5=8)
> **Mariana:** Dá, estes números estão todos na tabuada do 8!

Deste modo, por meio de tentativas, os alunos chegam à conclusão que têm de dividir a barra em cinco partes, pois desta forma cada uma delas vale oito, o que lhes é conveniente porque os números onde pretendem ter as marcas (16, 24 e 40) são múltiplos de oito. Os alunos desenham então a barra, assinalando a fração correspondente a cada traço, fazendo-lhe corresponder o respetivo número de lugares do parque de estacionamento. Chegam assim às frações dois quintos e três quintos para a parte de lugares livres e ocupados, respetivamente, do parque de estacionamento.

> **Aida:** Então aqui escrevemos $\frac{2}{5}$ (referindo-se aos lugares livres) e aqui $\frac{3}{5}$ (referindo-se aos lugares ocupados)!
> **Cristiano:** 25% e 35%.
> **Dinorah:** Hã?!
> **Aida:** Ai! Isto soa esquisito! Os dois juntos não dão 100%! Temos de ir à barra!

Os alunos chegam à fração $\frac{2}{5}$ para a parte livre do parque dois e $\frac{3}{5}$ para a ocupação do mesmo parque, no entanto, Cristiano associa as frações a 25% e 35%, respetivamente, erro que já tinha evidenciado no teste inicial mas Aida desconfia desses valores. Os alunos, que já haviam escrito as frações, recorrem novamente à barra e escrevem agora também ali as respetivas percentagens e numerais decimais (Figura 100). Esta marcação é feita de forma muito rápida sem recurso a nenhum algoritmo, o que nos leva a crer que a fração $\frac{1}{5}$, à qual os alunos associam 20%, passou também a ser para eles um valor de referência, possivelmente a partir do trabalho que realizaram na tarefa três.

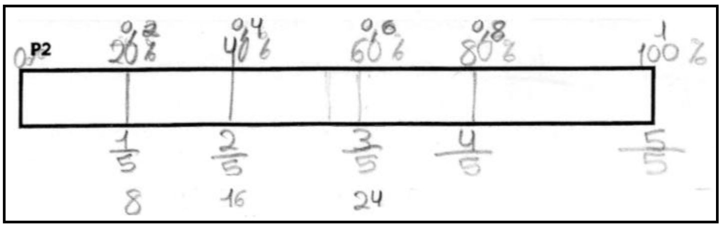


Figura 100 – Resolução do grupo à questão 2 – Tarefa 7.

No âmbito do objetivo de localização de racionais na linha/barra numérica, a dupla linha numérica é integrada na tarefa 11, surgindo como uma transformação da barra numérica. Os alunos do grupo parecem reconhecê-la como um modelo semelhante ao da barra numérica que vinham a usar desde o início da experiência de ensino, exceto o Cristiano que insiste em usar a barra numérica:

> **Cristiano:** Professora, posso fazer assim? (desenhando dois segmentos de reta na vertical, de forma a formar uma barra)
> **Professora (H):** Porquê?
> **Cristiano:** Dá-me mais jeito!
> **Professora (H):** Porquê?
> **Cristiano:** Porque assim parecem duas linhas e não uma barra!
> **Professora (H):** Não pode ser duas linhas?!
> **Cristiano:** É esquisito!
> **Aida:** Mas é igual, trabalhamos da mesma maneira, em baixo pões uma coisa e em cima pões outra, fica uma linha para cada coisa!

Cristiano sugere a transformação da dupla linha numérica numa barra, modelo com que está familiarizado, e revela algum desconforto em trabalhar com um novo modelo, ainda que estes sejam muito semelhantes. No entanto, Aida intervém explicando ao colega que se trabalha da mesma forma com os dois modelos. Os alunos do grupo usam a dupla linha numérica do mesmo modo que a barra, assumindo que a dupla linha numérica que lhes foi facultada correspondia ao comprimento do comboio do Norberto (1,20m) e depois dividiram-na em quatro partes iguais, por sugestão do Cristiano, a partir da indicação do enunciado de que o comprimento do comboio da Sofia seria $\frac{3}{4}$ do comprimento do comboio que funciona como unidade de medida. A partir daqui identificaram e marcaram a medida do comboio do Nelson, que corresponde a metade dos 120cm e cujas marcas, que já tinham na linha, lhes são úteis para esta marcação.

> **Dinorah:** O comboio do Nelson é metade do Norberto.
> **Aida:** Então é 60cm!
> **Mariana:** Essa é fácil, já temos uma marca ao meio!
> **Aida:** Sim, é só escrevermos 60cm em cima, que é a metade de 1,20m!

Posteriormente os alunos calculam mentalmente o valor da fração unitária ($\frac{1}{4}$), evidenciando que compreendem que esta fração é metade de $\frac{1}{2}$ e consequentemente, metade de 60cm.

> **Dinorah:** Aqui tem de ser 30cm! (apontando para a primeira marca)
> **Professora (H):** Porquê?
> **Aida:** Porque é metade deste bocado (apontando para metade da dupla linha numérica)!
> **Mariana:** Esse bocado vale 60cm por isso metade é 30cm!
> **Dinorah:** Os traços são de trinta em trinta!
> **Mariana:** Sim! Aqui é o terceiro traço por isso é três vezes o trinta!

Deste modo, os alunos facilmente identificam o valor correspondente aos $\frac{3}{4}$, pois através de adições sucessivas de parcelas com o valor 30 – "é de 30 em 30", chegam aos 90cm (Figura 101).

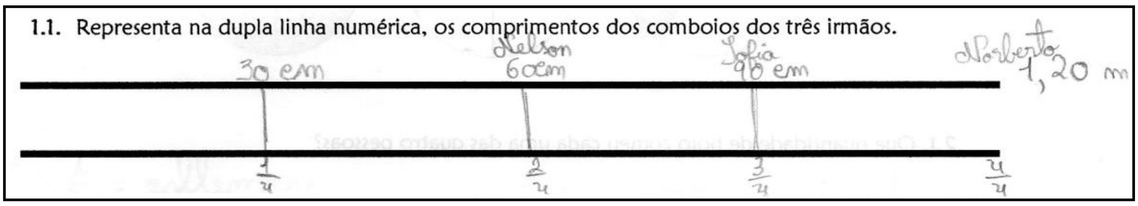


Figura 101 – Resposta do grupo à questão 1.1. – Tarefa 11.

Esta tarefa revela que os alunos interpretam os $\frac{3}{4}$ como três vezes $\frac{1}{4}$, fazendo a partição da barra em quatro partes, determinando o valor de cada parte (fração unitária) e posteriormente iteram o valor de uma dessas partes três vezes até chegarem ao valor correspondente a $\frac{3}{4}$.

No que diz respeito à comparação de números racionais, a primeira tarefa teve um papel importante, pois as tiras de papel distribuídas facilitaram a comparação de quantidades e, deste modo, os alunos do grupo conseguiram identificar o número racional maior, o menor e o intermédio, logo na primeira questão desta tarefa. Nesta situação os alunos concretizam a comparação de partes de unidade através da manipulação de material concreto (tiras de papel), que não voltou a ser usado nas outras tarefas da experiência de ensino.

Na tarefa cinco, antes de a questão ser resolvida na barra que era facultada aos alunos (desenhada no papel), para descobrir quem ocupava a primeira posição, Dinorah sugere aos colegas que façam uma barra para cada aluno e que representem ali a posição de cada um. Deste modo a aluna começa a desenhar as barras paralelamente umas às outras:

> **Dinorah:** Vamos fazer uma barra para a Taíssa, outra para a Luana, outra para o Nicolau e uma para o João, depois marcamos o sítio em que cada um se encontra.
> **Cristiano:** Estás a colocá-las em cima umas das outras!
> **Dinorah:** Então imagina que a piscina tem quatro pistas, são umas ao lado das outras!
> **Aida:** E têm o mesmo comprimento, a piscina é um retângulo!
> **Mariana:** Pois! E só se olhares para as quatro pistas ao mesmo tempo é que consegues ver quem vai à frente!
> **Aida:** Olha, é como na televisão, eles mostram as pistas todas ao mesmo tempo para vermos que chega primeiro!
> **Dinorah:** É isso mesmo!
> **Cristiano:** Ah! Pois é, se eles mostrassem só uma, não sabíamos o lugar dos outros!

Cristiano parece não compreender o motivo pelo qual Dinorah desenha as barras "em cima umas das outras" de forma paralela (Figura 102), no entanto, depois das colegas lhe explicarem que só assim ele conseguirá saber quem vai à frente, e Aida associar a disposição das barras a um contexto real (provas de natação vistas na televisão), Cristiano fica esclarecido quanto a esta possibilidade de disposição das barras.

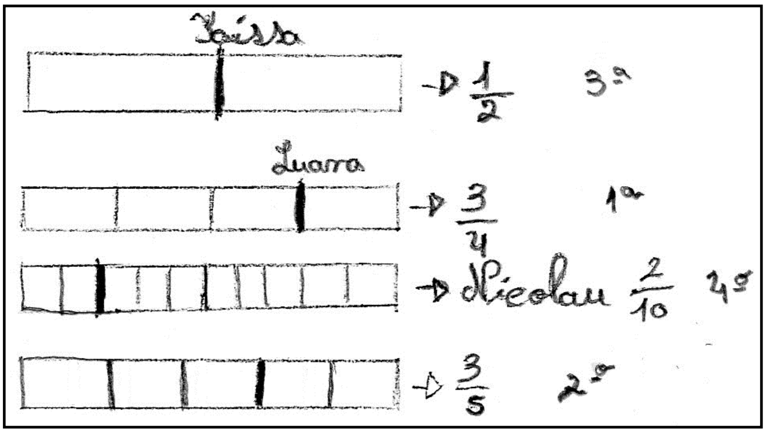


Figura 102 – Resolução de Dinorah grupo à questão 1 – Tarefa 5.

Apesar de desenharem quatro barras (que representam as pistas da piscina) os alunos compreendem que estas têm de ter o mesmo comprimento, visto a unidade ser a mesma – o comprimento da piscina. Depois de marcarem a posição de cada participante com traços mais carregados, os alunos facilmente ordenam cada um, de acordo com a sua posição na piscina (barra).

Na tarefa seguinte (tarefa seis), é-lhes novamente solicitada a comparação de números racionais, que são obtidos através de distribuições, assente na noção de partilha equitativa, para que ajuízem sobre a equidade dessa distribuição. Embora tendo surgido no grupo a representação sob a forma de fração na primeira situação (três sanduíches para quatro pessoas), optam posteriormente de modo consistente pelo uso da percentagem, o que lhes permite comparar diretamente os diferentes valores obtidos e responder à questão relativa à distribuição das sanduiches pelas pessoas, em cada mesa, apresentando as seguintes respostas:

- Nas mesas de 8 havia 7 sanduíches e 16 copos de sumo; 87,5 %
- Nas mesas de 5 havia 4 sanduíches e 10 copos de sumo; 80 %
- Nas mesas de 4 havia 3 sanduíches e 8 copos de sumo. 75 %

Figura 103 – Resposta do grupo estudo de caso – Tarefa 6.

Apesar de os alunos não possuírem, nesta tarefa, material manipulável, de forma a concretizarem a comparação, como aconteceu na primeira tarefa, já conhecem outras estratégias que lhes permitem comparar números racionais e, deste modo, optam pela percentagem para darem resposta à questão.

No caso da comparação de razões, na tarefa nove, os alunos revelam maiores dificuldades uma vez que esta depende da compreensão do significado de razão que ainda não tinha sido trabalhado de forma intencional no seu percurso escolar. Nesta tarefa, Aida, por exemplo, não relaciona as duas grandezas envolvidas, centrando-se somente numa delas. Começa por afirmar que o dia que corresponde à mistura de tinta mais clarinha é aquele em que há um maior número de latas de tinta branca, porque considera somente a quantidade total de tinta branca em cada dia e não a quantidade de tinta branca que é diluída, tendo em conta a quantidade de latas de tinta azul. Contudo, ao surgir uma voz discordante (Dinorah), Cristiano intervém comparando os dias pela quantidade de latas de tinta que sobram, começando a mostrar evidências de que relaciona as duas grandezas.

> **Aida:** Então mais clarinha vai ser na segunda-feira porque usa mais latas brancas!
> **Dinorah:** Não!
> **Cristiano:** Segunda-feira é igual a quarta-feira porque fica sempre com uma a mais! Por isso vai dar a mesma cor!
> **Dinorah:** Mas as tintas são todas misturadas, não pode sobrar!
> **Cristiano:** Então fica uma lata de tinta branca para cada lata de tinta azul, depois a que sobra (a branca) divide-se ao meio para cada lata de tinta azul! (referindo-se a segunda-feira)

Cristiano começou por fazer grupos com uma lata de tinta azul e uma lata de tinta branca, apercebendo-se que em dois dos dias sobra a mesma quantidade de tinta branca, e considera, por isso, que a tonalidade obtida nesses dias será a mesma. A resposta do Cristiano evidencia um bom ponto de partida, porque tem em conta as duas grandezas, no entanto, o seu raciocínio não está completo, pois considera a quantidade de tinta branca que sobra para estabelecer uma equivalência entre dois dias, mas parece não ter a noção de que é necessário colocar também essa quantidade em razão com a quantidade de latas de tinta existente em igual número.

Enquanto Aida só se centra na quantidade de latas de tinta branca, Cristiano tenta relacionar os dois tipos de tintas, estabelecendo uma relação de "um para um" deixando de fora o que sobra, considerando que, quando sobra a mesma quantidade, as tonalidades são iguais. Dinorah, no entanto, discorda dos dois colegas e chama a atenção que todas as latas de tinta, em cada dia, têm de entrar na mistura. Cristiano prontamente percebe o que tem de fazer, reconhecendo que também tem de distribuir a lata de tinta branca que "sobra" pelas latas de tinta azul. Neste momento o grupo parece ter compreendido o significado de mistura em causa na tarefa, passando em seguida a concentrar-se na comparação entre as relações estabelecidas entre as duas quantidades.

A ideia subjacente ao comentário anterior de Cristiano ("fica uma lata de tinta branca para cada lata de tinta azul, depois a que sobra divide-se ao meio para cada lata de tinta azul") é reforçada pela intervenção de Mariana:

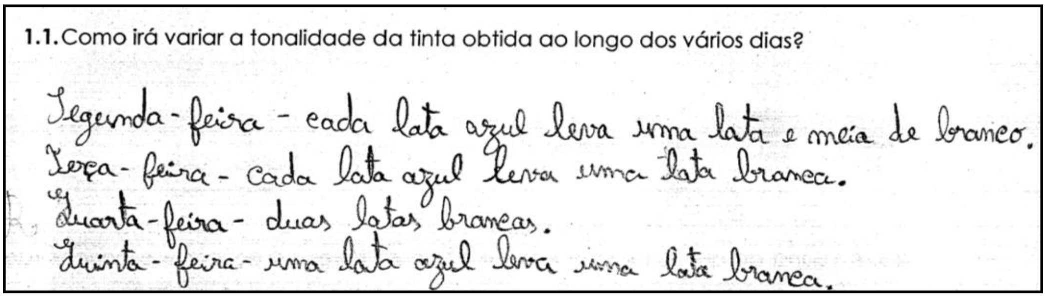
> **Mariana:** Tu dividiste a lata branca ao meio, pelas duas latas azuis!
> **Dinorah:** Então assim cada uma leva …

Cristiano: Cada lata azul leva uma lata e meia de branca.

Quando Mariana refere que Cristiano dividiu a lata branca, Dinorah deixa no ar a ideia de que é necessário saber a quantidade de tinta que "cada uma leva" [as latas azuis], encontrando-se subjacente a noção de razão unitária, que por outras palavras pode ser traduzida por "quanto para um". Perante o seu comentário, Cristiano relaciona as duas grandezas e identifica os termos da razão unitária (1 → 1,5) para a situação de segunda feira. Deste modo, nesse momento, fica claro para todos os elementos do grupo que têm de relacionar as duas cores, fazendo a distribuição das latas de tinta branca pelas latas de tinta azuis, concluindo que quanto maior for a quantidade de tinta branca diluída em cada lata de tinta azul, mais clara será a tonalidade da tinta obtida. Esse entendimento do grupo é visível quando são interpelados pela investigadora relativamente à resposta inicial de Cristiano:

Professora (H): Cristiano, há pouco disseste que a segunda-feira era igual à quarta-feira!
Cristiano: Na quarta-feira não! São duas latas!
Dinorah: A quinta é que é igual à terça!
Mariana: Fica uma lata branca em cada lata azul!

Neste momento os alunos já conseguem estabelecer a razão existente entre a quantidade dos dois tipos de tinta para cada dia, comparando-as então facilmente. O grupo responde à questão de uma forma descritiva (Figura 104) e chega à conclusão, que expressa oralmente, que o dia em que a tonalidade é mais clara é a quarta-feira.

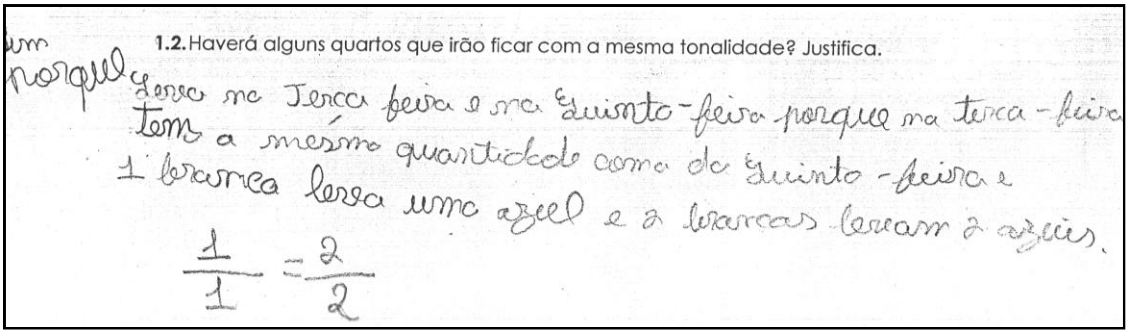

1.1. Como irá variar a tonalidade da tinta obtida ao longo dos vários dias?

Segunda-feira - cada lata azul leva uma lata e meia de branco.
Terça-feira - cada lata azul leva uma lata branca.
Quarta-feira - duas latas brancas.
Quinta-feira - uma lata azul leva uma lata branca.

Figura 104 – Resposta do grupo à questão 1.1. – Tarefa 9.

Como o grupo não recorre a nenhum tipo de representação dos números racionais, a professora Inês questiona-os sobre a existência de misturas com a mesma tonalidade e pede-lhes para representarem isso numericamente. Os alunos correspondem, de imediato, ao pedido da professora, recorrendo à representação sob a forma de fração e estabelecendo a equivalência entre duas frações, como se observa no seguinte diálogo e na resposta escrita que apresentam (Figura 105).

Aida: Então já vimos que na 3.ª feira e na 5.ª feira as tintas vão ser iguais!
Dinorah: Pois é! Cada lata azul leva sempre uma lata branca!
Professora (I): Conseguem representar isso numericamente?
Cristiano: Como?
Aida: Olha, como é que achas? Com números!
Mariana: Pode ser por uma fração!
Aida: Sim! Pomos 1 lata branca para 1 azul! (escrevendo a fração, um sobre um)
Cristiano: E duas brancas para duas azuis! (escrevendo a fração dois meios)


1.2. Haverá alguns quartos que irão ficar com a mesma tonalidade? Justifica.

um porque Terça na Terça feira e na Quinta-feira porque na terça-feira tem a mesmo quantidade como de Quinta-feira e 1 branca leva uma azul e 2 brancas levam 2 azuis.

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$$

Figura 105 – Resposta do grupo – Tarefa 9.

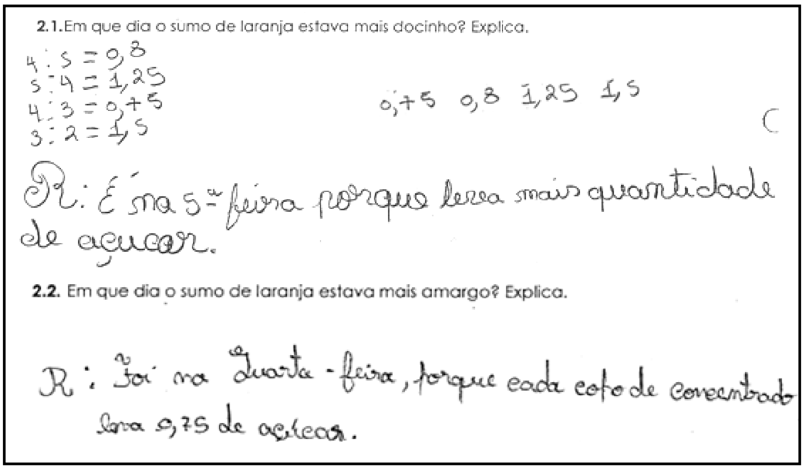
Ao longo da concretização da primeira parte desta tarefa denota-se que estes alunos não se sentem impelidos a utilizar as representações dos números racionais para resolverem as questões. No entanto, facilmente conseguem estabelecer uma conexão entre a sua resolução e o uso dos números racionais, uma vez que se apoiam nas frações para justificarem matematicamente a sua resposta.

Na segunda parte da tarefa nove, é evidente a evolução no raciocínio dos alunos uma vez que, apesar de Aida continuar a ter em conta apenas uma das grandezas, ou seja, o número de colheres de açúcar e não o relacionar com os respetivos copos de concentrado, Mariana intervém chamando a atenção da colega para o facto de ter de ser estabelecida uma relação entre as duas grandezas:

Dinorah: "Em que dia o sumo de laranja estava mais docinho? Explica." (lendo o enunciado).
Aida: Na Terça-feira?! Porque levou mais colheres de açúcar!
Mariana: Mas calma! Olhem lá! Quantos copos de concentrado levou?! Têm de reparar também nos copos!
Cristiano: Pois é!
Mariana: Temos de dividir as colheres de açúcar pelos copos de concentrado!

Depois de esclarecerem a Aida de que não poderia ter em conta apenas as quantidades absolutas (colheres de açúcar), o grupo facilmente identifica a estratégia de resolução, efetuando o quociente entre o número de colheres de açúcar e de copos de concentrado.

Após concretizarem a sua estratégia, os alunos obtiveram números na representação decimal que ordenaram, tendo associado o valor mais pequeno a uma menor quantidade de açúcar, concluindo que o dia em que o sumo estava mais doce era na 5.ª feira, por ser o dia que "leva mais quantidade de açúcar". Os alunos compreendem que esta quantidade de açúcar é "por copo", referindo-o oralmente, no entanto, no momento do registo em papel, as últimas palavras não foram registadas. A reforçar esta compreensão, encontra-se a justificação que os alunos apresentam para o facto de o dia em que o sumo estava mais amargo ser na 4.ª feira, uma vez que mencionam que "cada copo de concentrado leva 0,75 de açúcar" (Figura 106).



2.1. Em que dia o sumo de laranja estava mais docinho? Explica.

4 : 5 = 0,8
5 : 4 = 1,25
4 : 3 = 0,75
3 : 2 = 1,5

0,75 0,8 1,25 1,5

R: É na 5.ª feira porque leva mais quantidade de açucar.

2.2. Em que dia o sumo de laranja estava mais amargo? Explica.

R: Foi na Quarta-feira, porque cada copo de concentrado leva 0,75 de açucar.

Figura 106 – Resposta do grupo às questões 2.1. e 2.2. – Tarefa 9.

Na questão 2.3., os alunos não manifestam qualquer dúvida em associar uma fração, que expressa uma razão, a um quociente, para conseguirem dar resposta às questões da tarefa.

> **Aida:** Então, na 2.ª feira temos quatro colheres de açúcar para cinco copos!
> **Cristiano:** Quatro a dividir por cinco!
> **Aida:** Sim! Já fizemos essa conta!
> **Dinorah:** Deu 0,8!
> **Aida:** Então pronto! Ela não tem razão 0,8 e 0,9 não é a mesma coisa!

Os alunos associam a fração a um quociente, uma vez que efetuaram divisões para comparar razões, conseguindo identificar, claramente, através da interpretação do enunciado, o dividendo/numerador e o divisor/denominador.

Na questão dois da tarefa 11 em que era solicitado que comparassem duas representações gráficas e ajuizassem qual das duas dizia respeito à quantidade maior, os alunos recorreram às percentagens para concretizar essa comparação (Figura 107).

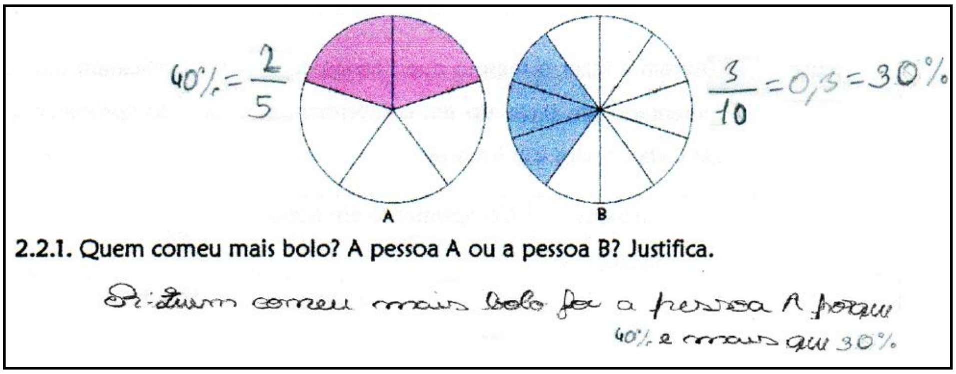


Figura 107 – Resposta do grupo à questão 2.2.1. – Tarefa 11.

Os alunos começaram por transformar a representação gráfica numa representação com símbolos escritos, nomeadamente numa fração. De seguida, facilmente atribuem a percentagem equivalente a dois quintos, visto que este valor já tinha sido por eles utilizado numa questão anterior, funcionando agora como um valor de referência. Posteriormente convertem a fração correspondente à parte sombreada da figura B em um numeral decimal e depois em percentagem. É com as percentagens que os alunos estabelecem uma comparação entre as quantidades de bolo representadas pelos gráficos circulares.

A exploração da densidade dos números racionais foi também feita na tarefa oito, onde os alunos são levados a trabalhar com um novo modelo (depósito de gasolina) em que são representados números racionais. A resposta à primeira questão não era obtida diretamente, ou seja, não bastava olhar para o ponteiro do depósito de combustível e escrever o número racional associado a essa marca, mas sim uma representação do que estava à direita dessa marca (correspondente ao combustível que já tinha sido gasto), o que obrigava os alunos a fazer uma leitura da direita para a esquerda. Contudo esta particularidade da questão não foi impeditiva de os alunos a resolverem corretamente. Estes começam por dividir um dos depósitos de gasolina em partes iguais, pelo facto de o ponteiro não se encontrar em cima de nenhuma das marcas já existentes.

> **Aida:** Então, vamos dividir isto em partes iguais (referindo-se ao depósito do carro dos pais do Nicolau)!
> **Cristiano:** Hã?!
> **Aida:** Ouve lá! Se o ponteiro está a apontar para os 7,5litros e se lá não está nenhuma marca (…) Agora vamos fazer também marcas ao meio de cada marca que já existe, para ter tudo o mesmo tamanho!
> **Mariana:** Assim ficamos com isto dividido em oito partes iguais!

Ao observarem que o ponteiro do indicador de combustível dos pais do Nicolau não estava na direção de nenhuma marca, os alunos sentem necessidade de lhe fazer corresponder uma, uma vez que compreendem que as partes em que o todo é dividido, devem ter o mesmo tamanho. Ao referirem que têm de fazer mais marcas "para ter tudo o mesmo tamanho", os alunos manifestam compreender o significado que se encontra subjacente a uma relação parte-todo, bem como a noção de partição. Quando a professora Inês encaminha os alunos para a descoberta de um número racional entre duas frações, surge, rapidamente, um paralelo entre estas e as percentagens.

> **Professora (I):** Todos efetuaram mais divisões no depósito dos pais do Nicolau, por isso este depósito passou a estar dividido em oito partes. Esqueçam essas divisões, considerem só as que já existiam. A segunda marca pode ser representada por que número?
> **T2:** $\frac{1}{4}$!
> **Adriana:** 25%!
> **Professora (I):** Ok! E a terceira?
> **Mariana:** $\frac{2}{4}$!
> **Cristiano:** 50%!
> **Professora (I):** Então e se agora olharem para todas as divisões, vocês têm uma marca entre o $\frac{1}{4}$ e os $\frac{2}{4}$! Que número pode ser?
> **Mariana:** $\frac{3}{8}$!
> **Professora (I):** E será que entre essas duas marcas, do $\frac{1}{4}$ e dos $\frac{2}{4}$ é só esse número que existe?
> **T3:** Podemos fazer mais marcas!
> **Cristiano:** Também se pode transformá-lo numa percentagem!
> **Dinorah:** Sim! Dá 37,5%! (tendo recorrido à calculadora)
> **Mariana:** Então pode ser qualquer percentagem maior que 25% e menor que 50%!
> **Aida:** Com as percentagens é mais fácil!

É interessante verificar que os alunos facilmente identificam uma fração entre outras duas, no entanto, por sugestão de Cristiano, em vez de efetuarem mais divisões na unidade, as colegas de grupo encontram a percentagem que corresponde à fração encontrada e rapidamente concluem que entre as duas frações pode estar qualquer percentagem compreendida entre 25% e 50%.

SÍNTESE

No que diz respeito à densidade dos números e o seu valor de posição, observou-se que os alunos não revelam dificuldades em posicionar números racionais na linha/barra numérica (tarefa quatro – Figura 99; tarefa cinco – Figura 74 e 102; tarefa sete – Figura 92;

tarefa 11 – Figuras 78 e 101), nem em concretizar comparações entre os mesmos e ordená-los (tarefa cinco, seis e nove). No âmbito desta categoria de análise, mais concretamente no que diz respeito à capacidade de representar racionais na linha/barra numérica, é de salientar que depois da intervenção da professora Inês na tarefa cinco, os alunos, para posicionarem frações na barra, recorreram a uma estratégia apontada por Yanik, et al. (2008) que foi o de fazerem metades sucessivas de todo o modelo (Figura 74), neste caso da barra numérica.

O desempenho dos alunos na tarefa oito, revelou que estes conseguem reconhecer a existência de números racionais entre outros dois racionais, neste caso entre um quarto e dois quartos, pois mostram conhecer que podem obter outras frações se efetuarem mais divisões da unidade. Além disso, os alunos do grupo também reconhecem que os números racionais entre essas duas frações podem ser determinados sem terem de recorrer a novas divisões, para tal basta saberem as percentagens que correspondem às frações dadas.

As resoluções dos alunos nas questões que envolvem esta categoria de análise continuam a revelar que os mesmos recorrem a várias estratégias, continuando a predominar as flexíveis. Deste modo os alunos recorrem a procedimentos de cálculo (Figura 106), estratégias gráficas (Figura 102), simbólicas (Figura 107) e flexíveis (Figuras 99, 100, 101 e 103). Estas últimas surgem da combinação de uma estratégia gráfica com um procedimento de cálculo e com uma estratégia simbólica (tarefa seis – Figuras 89, 90, 91 e 103), de uma gráfica com uma simbólica (Figuras 99 e 100), ou então da utilização simultânea das três (tarefa 11 – Figura 101) – gráfica (representação na dupla linha numérica), simbólica (equivalência entre frações e decimais) e procedimentos de cálculo (cálculo mental do valor da fração unitária). É de salientar que nos procedimentos de cálculo que os alunos realizam na segunda parte da tarefa nove (Figura 106), eles adotam a estratégia designada por razão unitária (Post, Behr & Lesh, 1988) ou por método da unidade (Lamon, 2006).

Ainda no âmbito da estratégia seguida pelos alunos na tarefa seis (Figura 103) é de salientar que os mesmos recorrem àquela que lhes é mais favorável, porque já reconhecem que um número racional se pode representar de diversas formas, e porque compreendem como transitar de umas para as outras, sendo a percentagem a sua eleita nesta tarefa. O mesmo sucede com a tarefa oito, pois os alunos referem que de facto se as frações forem transformadas em percentagens, o intervalo entre as duas representações torna-se mais evidente, sendo mais fácil indicar percentagens do que obter frações entre outras duas. Os alunos mostram perfeitamente que compreendem isso, pois reconhecem a existência de um número racional entre duas frações previamente dadas, no entanto, a representação pela qual eles optam é a percentagem, revelando, uma plena compreensão da relação entre estas duas representações. Sintetizando, as estratégias seguidas pelos alunos na resolução das tarefas seis (Figura 103) e oito (último diálogo desta secção) evidenciam que os mesmos têm a capacidade de selecionar a estratégia que para eles é mais apropriada, ou seja, revelam capacidade de adaptabilidade (Verschaffel et al., 2009).

Na análise das resoluções dos alunos houve outros aspetos que se tornaram evidentes e que devem ser salientados. Um deles é a capacidade de Aida para analisar a razoabilidade dos resultados, quando na tarefa sete ela duvida dos resultados apresentados por Cristiano (Yang et al., 2004), pois estes parecem não lhe fazer sentido ("isto soa esquisito"). Outro aspeto é o aparecimento de uma ação designada por *splitting*, que segundo Hackenberg (2007) é a base do esquema fracionário partitivo reversível. Esta ação surge na questão 1.1. da tarefa 11 quando os alunos efetuam a partição (subdividem a dupla linha numérica em quatro partes) simultaneamente com a iteração (repetem o valor de uma parte três vezes até terem o valor pretendido).

É ainda de salientar que a primeira questão da tarefa cinco, evidencia a importância dos contextos das tarefas para os alunos. Nesta questão Cristiano parece sentir-se mais confortável depois de perceber que a tarefa que tem em mãos, nomeadamente o modo como Dinorah sugere que resolvam a questão, retrata uma situação da vida real, que lhe é familiar. Como o retângulo simboliza uma situação real (pista de natação) e se assemelha fisicamente ao modelo da barra numérica, este surge naturalmente (van den Heuvel-Panhuizen, 2003), pois os alunos estabelecem uma relação entre o modelo e a realidade, o que lhes facilita a resolução da questão. Além disso, também a sugestão que Aida dá para começarem a resolver a questão um da tarefa seis evidencia que o contexto das tarefas e a relação que elas permitem que os alunos estabeleçam com o seu quotidiano, torna-se fundamental para que os mesmos consigam ter sucesso na sua resolução. Estes aspetos evidenciados na atividade dos alunos corroboram o facto de que os contextos são de extrema importância para a aprendizagem dos alunos (Cai & Wang, 2006).

6.3.5. Aspetos transversais às categorias de análise

Fazendo uma análise transversal de todas as resoluções dos alunos, podemos afirmar que os alunos do grupo estudo de caso conseguem ser bem-sucedidos na resolução das tarefas que envolvem os cinco significados dos números racionais. No entanto, o significado de razão é o que lhes causa mais dificuldades, uma vez que este é um significado complexo (Steffe & Olive, 2010) por envolver uma relação entre duas quantidades. Apesar de ter sido trabalhado apenas numa tarefa, verifica-se que os alunos começam a evidenciar uma compreensão das situações que envolvem este significado e que iria depois ser tratado em profundidade no ano letivo seguinte.

Estes alunos revelam também a capacidade de escolher a representação que lhes é mais favorável perante a situação com que se deparam. Se na tarefa seis (significado de quociente) optaram pela percentagem, na tarefa nove (significado de razão), optaram pela representação decimal, evidenciando deste modo, uma boa compreensão da relação entre as representações (Markovits & Sowder, 1991).

Apesar de os alunos compreenderem e de também trabalharem com as frações, estas, tal como os decimais, parecem perder terreno para as percentagens. De facto, os alunos do grupo estudo de caso recorreram com frequência a esta representação para darem resposta a várias situações (comparação e ordenação – tarefa cinco, tarefa seis, tarefa nove e tarefa 11; densidade – tarefa oito; adição – tarefa seis e tarefa 11). Este aspeto é bem visível quando os alunos reconhecem que entre duas frações com o mesmo denominador e numeradores consecutivos, podem existir não só outras frações, como também percentagens, sendo estas mais fáceis de localizar. Estes alunos voltam a evidenciar propensão pelo uso das percentagens, quando a noção envolvida é a da densidade dos números racionais (tarefa oito), bem como quando recorrem ao pensamento residual para resolver uma dada situação (tarefa cinco). Uma vez que os alunos compreendem a noção de densidade dos racionais, podemos afirmar que os mesmos têm um dos pré-requisitos importantes para a compreensão do significado de medida (Martinie, 2007).

No âmbito das estratégias, é de salientar que ao longo das tarefas da experiência de ensino, os alunos revelaram flexibilidade nas mesmas a que recorreram para resolverem as questões. Nas várias tarefas propostas estes seguem procedimentos de cálculo, estratégias simbólicas, gráficas ou flexíveis, uma vez que muitas vezes recorrem a mais que um tipo de estratégias. As várias estratégias a que recorrem, dependem da situação com que se deparam, uma vez que os mesmos revelam adaptabilidade (Verschaffel et al., 2009), ou seja, evidenciam capacidade de utilizar uma ou outra estratégia em função dos dados que têm, escolhendo aquela com se sentem mais à vontade para chegarem aos resultados.

É ainda de salientar que no âmbito da estratégia dos procedimentos de cálculo, os alunos tendem a recorrer ao algoritmo para fazerem cálculos muito básicos. Contudo este aspeto pode dever-se ao facto de os mesmos terem sido alertados várias vezes para registarem todos os passos dos seus raciocínios.

Ao longo da resolução das tarefas da experiência de ensino, o método mais utilizado pelos alunos foi o "papel e lápis" e "mental" em detrimento do uso da "calculadora" que apenas se tornou indispensável na primeira questão da tarefa um. Posteriormente os alunos compreendem que existem outras estratégias que lhes podem simplificar o trabalho e deixam de usar a calculadora para resolver as situações propostas. Esta é ainda usada, por vezes, para facilitar certos cálculos, como por exemplo na tarefa oito, uma vez que os números envolvidos na segunda parte da mesma envolvem a multiplicação de numerais decimais com duas casas decimais. No entanto, é de salientar que o grupo apresenta o seu produto com apenas duas casas decimais (como se utiliza no dia-a-dia) e não com três, como surge no visor da calculadora. Os alunos mostram ter consciência de que as soluções podem ser aproximadas, revelando uma compreensão da relação entre o contexto de um problema e os cálculos necessários, que é um dos aspetos que caracteriza o sentido de número (McIntosh et al., 1992).

No âmbito das estratégias a que os alunos recorrem, a barra/linha numérica ocupa uma posição central nas suas escolhas. Os alunos recorrem a estes modelos de forma espontânea como suporte ao seu raciocínio na resolução das tarefas. Isto é, para os alunos do grupo estudo de caso, estes modelos além de servirem para representar números (*modelo de*), eles generalizaram-se e, neste momento, são ferramentas que os ajudam a raciocinar matematicamente (*modelo para*) (van Galen et al., 2008).

No conjunto das tarefas resolvidas durante a experiência de ensino, pode ainda afirmar-se que os alunos do grupo estudo de caso, de acordo com Martinie (2007), Ni e Zhou (2005) e Wheeldon (2008), revelam ter as noções que são consideradas fundamentais para que possam compreender os vários significados dos números racionais, uma vez que além de conseguirem concetualizar a unidade de referência, evidenciam compreender as noções de partição, equivalência e valor de posição.

6.4. Teste final no grupo estudo de caso

Após a conclusão da sequência de tarefas da experiência de ensino, foi aplicado o teste final à totalidade da turma (16 alunos), individualmente, com a duração máxima de 90 minutos. Tal como o teste inicial, este teste (TF) incidiu sobre as várias representações de um número racional e incluiu problemas simples com números racionais. À semelhança do que aconteceu com o teste inicial, as questões do teste final foram pensadas para que os alunos pudessem evidenciar capacidades características da compreensão do conceito de número racional, no entanto, dependendo das estratégias adotadas, essas características poderiam surgir nas respostas a outras questões que não tinham sido construídas com esse objetivo. Deste modo, o Quadro 13 indica as questões do teste final (4.ª coluna) analisadas nesta secção, que permitem verificar se os alunos evidenciam uma compreensão do conceito de número racional.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Categorias de Análise</th><th>Questões do TF</th></tr>
<tr><td rowspan="10">- Resolução de problemas que contextualizam os vários significados dos números racionais, em situações discretas ou contínuas.
- Múltiplas estratégias utilizadas.
- Representação eficaz.</td><td rowspan="2">Concetualização da unidade.</td><td>✰ Interpreta a unidade (unitizing, reunitizing), em situações que envolvam grandezas discretas e contínuas.</td><td>2b e 8</td></tr>
<tr><td>✰ Reconstrói a unidade, em grandezas discretas e contínuas (reversing).</td><td>Não comtemplado[35]</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Múltiplas representações.</td><td>✰ Reconhece diferentes formas de representar um número racional (numeral misto, fração, numeral decimal e percentagem).</td><td>9</td></tr>
<tr><td>✰ Estabelece equivalência entre frações[36].</td><td>3a, 7 e 8</td></tr>
<tr><td>✰ Estabelece conexões entre as diferentes representações com símbolos escritos (fração, decimal e percentagem).</td><td>2, 7, 8 e 13</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sistemas de valores de referência.</td><td>✰ Utiliza números de referência.</td><td>8 e 10</td></tr>
<tr><td>✰ Utiliza o pensamento residual.</td><td>Não observado</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Densidade dos números e o seu valor de posição.</td><td>✰ Representa números racionais na linha/barra numérica.</td><td>3 e 4</td></tr>
<tr><td>✰ Compara e ordena números racionais.</td><td>1, 3, 7 e 8</td></tr>
<tr><td>✰ Reconhece a existência de números entre dois racionais.</td><td>Não comtemplado</td></tr>
</table>

Quadro 13 – Questões do teste final analisadas.

É de salientar que a realização do teste final foi acompanhada por uma entrevista semiestruturada com o intuito de esclarecer eventuais dúvidas acerca do raciocínio dos alunos.

6.4.1. Diferentes significados dos números racionais

Parte-todo

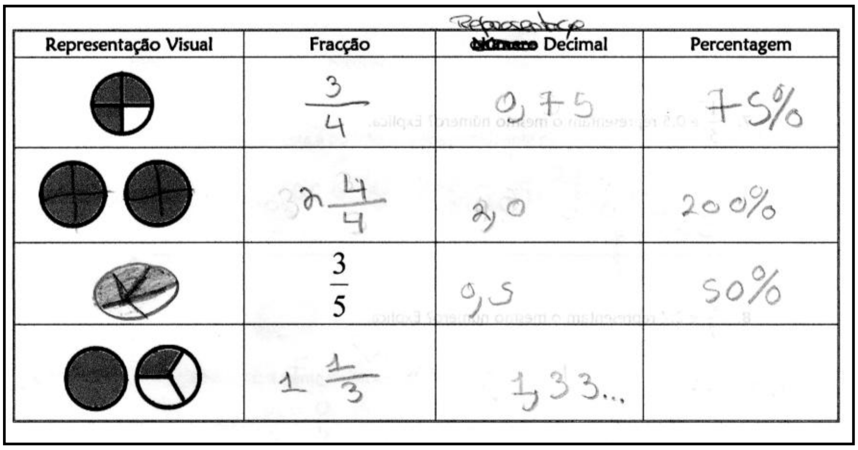
No teste final a questão 13 contemplava o significado parte-todo e era semelhante à questão nove do teste inicial. Todos os alunos conseguem resolver esta questão corretamente, apesar de terem cometido alguns erros pontuais, como é o caso de Cristiano e de Mariana como veremos de seguida.

Verifica-se que Cristiano, apesar de não responder corretamente na terceira linha da tabela, revela compreender este significado, uma vez que atribui ao denominador o número

[35] Justificação apresentada no penúltimo parágrafo do Capítulo IV.

[36] A "equivalência entre frações", assim como a "utilização de números de referência" podiam emergir na resolução de qualquer questão do teste final, no entanto foi nas questões apontadas no quadro, que estas categorias surgiram.

de partes em que divide a unidade e ao numerador o número de partes que deve considerar (Figura 108).



Representação Visual	Fracção	Número Decimal	Percentagem
	$\frac{3}{4}$	0,75	75%
	2x $\frac{4}{4}$	2,0	200%
	$\frac{3}{5}$	0,5	50%
	$1\frac{1}{3}$	1,33...	

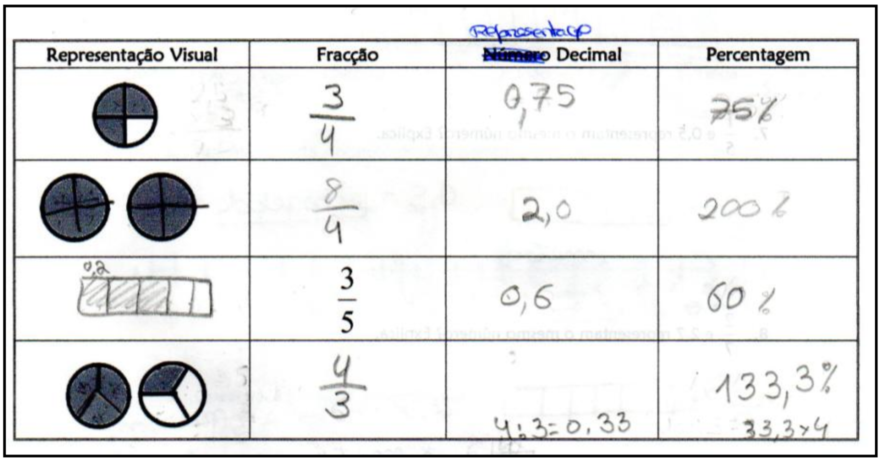
Figura 108 – Resposta do Cristiano à questão 13 do teste final.

A dificuldade de Cristiano reside na divisão de uma determinada grandeza contínua em igual número de partes, o que o conduz a uma resposta errada para a representação decimal e percentagem, uma vez que a representação visual que desenhou, de facto, parece estar metade sombreada.

> **Professora (H):** Porque dizes que é 0,5?
> **Cristiano:** Porque é metade!
> **Professora (H):** Metade? Onde?
> **Cristiano:** Aqui no desenho!

Relativamente à segunda figura, Cristiano opta por dividir cada diagrama circular em quatro partes, mencionando que tem dois diagramas iguais (2x), em que cada um está dividido em quatro partes, tendo as quatro partes sombreadas ($\frac{4}{4}$). Ele compreende o que tem à sua frente, pois menciona que tem duas vezes quatro quartos, no entanto o que escreve não corresponde à realidade.

É de salientar ainda a utilização por parte de Cristiano, de numerais mistos ($1\frac{1}{3}$) para representar a relação parte-todo da última representação visual. Também as alunas Dinorah e Aida apresentam numerais mistos nas suas resoluções destas questões. As alunas também são bem-sucedidas nesta questão, uma vez que os números que utilizam representam a relação entre o número de partes da unidade fragmentada que se toma (numerador) e o número total de partes em que a unidade foi dividida (denominador). Além disso, é de salientar que estas duas alunas, juntamente com Mariana, também conseguem representar graficamente e, com algum rigor, uma relação parte-todo, no entanto é curioso verificar que recorrem ao desenho de uma barra em vez do gráfico circular, na terceira linha da tabela, como se pode observar na Figura 109. O denominador é interpretado como o número de partes iguais em que se deve dividir a unidade e o numerador como o número de partes a tomar.



Representação Visual	Fracção	~~Número~~ Representação Decimal	Percentagem
	$\frac{3}{4}$	0,75	75%
	$\frac{8}{4}$	2,0	200%
0,2	$\frac{3}{5}$	0,6	60%
	$\frac{4}{3}$	4:3=0,33	133,3% 33,3×4

Figura 109 – Resposta da Mariana à questão 13 do teste final.

É de salientar que Mariana, tal como todos os outros alunos do grupo estudo de caso, também recorre a um procedimento de cálculo, uma vez que interpreta uma fração como um quociente, recorrendo ao algoritmo da divisão (numerador/denominador) para passar de uma representação para outra. Contudo, comete o erro quando regista o decimal correspondente à fração quatro terços, pois como a própria refere, "falta o um da primeira bola".

> **Professora (H):** Como chegaste aos 0,333?
> **Mariana:** Dividi por três!
> **Professora (H):** Que número dividiste por três?
> **Mariana:** Ah! Falta o um da primeira bola, isso é só da segunda!

O comentário da Mariana quando é questionada sobre a representação decimal da quarta linha, leva-nos a admitir que o quociente que ela efetuou não foi entre quatro e três, mas sim entre um e três, a parte correspondente ao segundo diagrama circular (o valor "da segunda" bola).

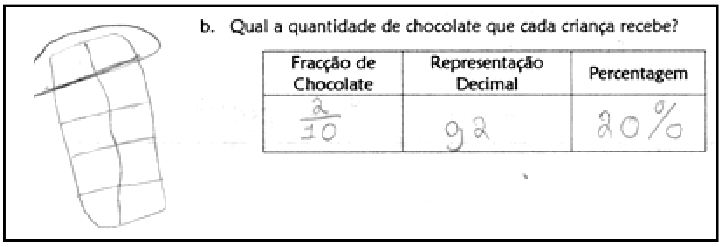
Quociente

O significado de quociente surge na questão dois do teste final contextualizado numa situação de partilha equitativa de uma grandeza contínua (tablete de chocolate) e de uma grandeza discreta (rebuçados). À semelhança do que aconteceu no teste inicial, os quatros alunos conseguem distribuir equitativamente ambas as quantidades (de chocolate e de rebuçados), no entanto, agora já conseguem representar o resultado dessa partilha através de frações, numerais decimais e percentagens.

Cristiano consegue associar os dois rebuçados a 20%, recorrendo ao quociente (procedimento de cálculo) de 100 por dez:

> **Professora (H):** Como chegaste ao 20%?
> **Cristiano:** É a percentagem!
> **Professora (H):** Mas porque dizes que é 20% e não dizes outra percentagem!
> **Professora (H):** Todos (os rebuçados) valem 100%, eles são dez, por isso cada um vale 10%!

Para representar o resultado da distribuição da tablete de chocolate, Cristiano recorre ao desenho da mesma, subdivide-a em dez partes e identifica a parte que cabe a cada criança (Figura 110).



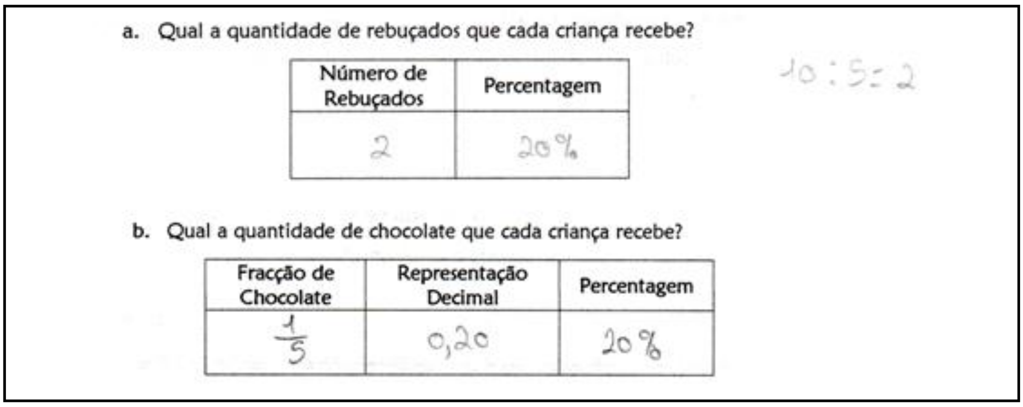
b. Qual a quantidade de chocolate que cada criança recebe?

Fracção de Chocolate	Representação Decimal	Percentagem
$\frac{2}{10}$	92	20%

Figura 110 – Resposta do Cristiano à questão 2b do teste final.

Como o número de partes que constituía a tablete era o mesmo da grandeza discreta (dez rebuçados), Cristiano facilmente lhe associa a mesma percentagem, transformando-a depois num numeral decimal.

Para repartir dez rebuçados equitativamente por cinco crianças, Dinorah recorre ao quociente de dez por cinco, tendo concluído que cada criança recebe dois rebuçados (Figura 111).



a. Qual a quantidade de rebuçados que cada criança recebe?

Número de Rebuçados	Percentagem
2	20%

10 : 5 = 2

b. Qual a quantidade de chocolate que cada criança recebe?

Fracção de Chocolate	Representação Decimal	Percentagem
$\frac{1}{5}$	0,20	20%

Figura 111 – Resposta da Dinorah à questão 2 do teste final.

Dinorah consegue associar aos dois rebuçados uma percentagem e um decimal, efetuando o quociente entre 100 e cinco recorrendo à regra que lhe permite transformar mentalmente uma percentagem num numeral decimal (procedimento de cálculo):

> **Professora (H):** Como chegaste ao 20%?
> **Dinorah:** Dividi 100 por cinco!
> **Professora (H):** E o 0,2?
> **Dinorah:** Andei para trás duas casas!

Dinorah transforma a percentagem em numeral decimal, aplicando a "regra" da divisão por 100, sabendo que basta deslocar a vírgula duas casas para a esquerda.

Para responder à questão, Mariana efetua grupos de cinco rebuçados, uma vez que as crianças são cinco, e verifica quantos grupos completos consegue fazer, concluindo que o número de grupos corresponde à quantidade de rebuçados que cada criança recebe (Figura 112).

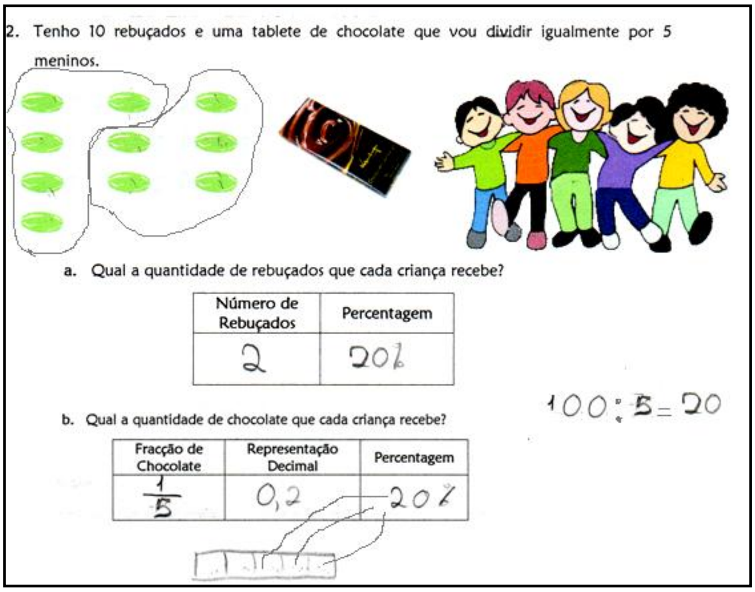
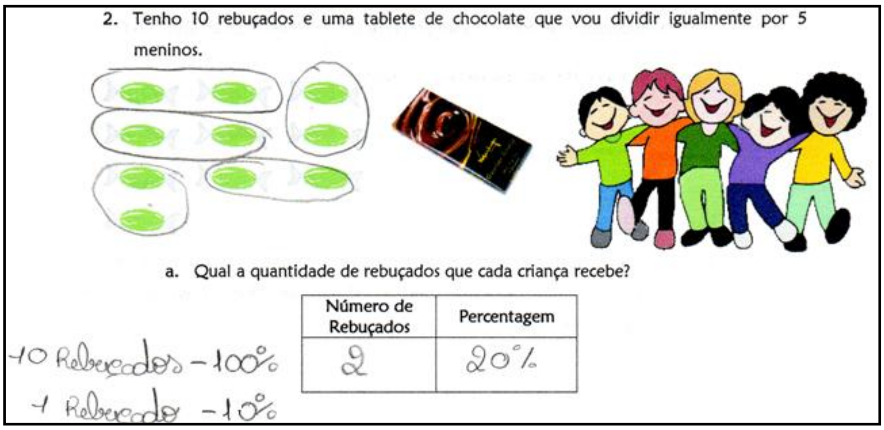


Figura 112 – Resposta da Mariana à questão 2 do teste final.

Mariana identifica a fração $\frac{1}{5}$ como a quantidade da tablete de chocolate que cada menino recebe e interpreta-a como uma unidade que vai ser dividida em cinco partes iguais, tal como é evidente na barra que a mesma desenha (estratégia gráfica). A cada uma dessas partes a aluna faz corresponder 20%, valor que encontrou após ter efetuado o quociente entre 100 e cinco (procedimento de cálculo).

Aida reconhece que a quantidade de rebuçados é múltipla do número de crianças e identifica o fator que transforma o cinco em dez, fazendo grupos de dois (Figura 113).


2. Tenho 10 rebuçados e uma tablete de chocolate que vou dividir igualmente por 5 meninos.

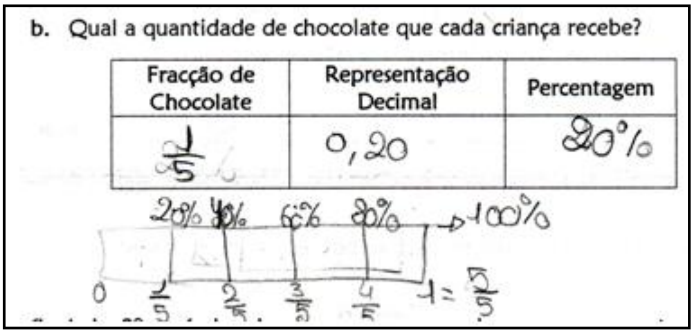
a. Qual a quantidade de rebuçados que cada criança recebe?

Número de Rebuçados	Percentagem
2	20%

10 Rebuçados – 100%
1 Rebuçado – 10%

Figura 113 – Resposta da Aida à questão 2a do teste final.

Depois de identificar o resultado da partilha equitativa, Aida consegue associar-lhe a percentagem 20%, pois reconhece que cada rebuçado corresponde a 10%. Na alínea b) a aluna serve-se da barra numérica para escrever o número racional correspondente à quantidade de chocolate que cada criança come, representando o resultado da partilha (Figura 114).


b. Qual a quantidade de chocolate que cada criança recebe?

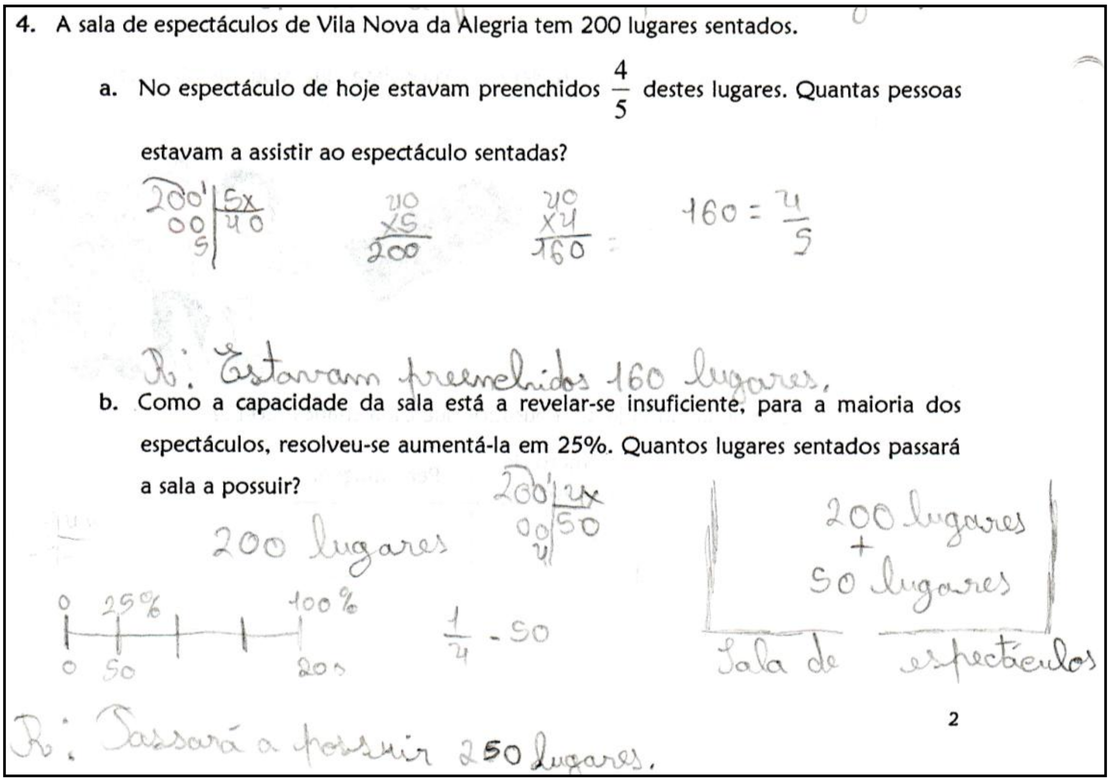
Fracção de Chocolate	Representação Decimal	Percentagem
$\frac{1}{5}$	0,20	20%

Figura 114 – Resposta da Aida à questão 2b do teste final.

Operador

O significado operador surge na questão quatro do teste final, em que os números racionais apresentados se encontram sob a forma de fração ou de percentagem.

Dinorah, Mariana e Aida resolvem corretamente a questão, recorrendo a diversas estratégias. Dinorah aplica diretamente o algoritmo da divisão e, posteriormente, o da multiplicação (Figura 115) para determinar o número de lugares correspondente a $\frac{4}{5}$ dos 200 já existentes (procedimento de cálculo).



4. A sala de espectáculos de Vila Nova da Alegria tem 200 lugares sentados.

a. No espectáculo de hoje estavam preenchidos $\frac{4}{5}$ destes lugares. Quantas pessoas estavam a assistir ao espectáculo sentadas?

R: Estavam preenchidos 160 lugares.

b. Como a capacidade da sala está a revelar-se insuficiente, para a maioria dos espectáculos, resolveu-se aumentá-la em 25%. Quantos lugares sentados passará a sala a possuir?

200 lugares

$\frac{1}{4} - 50$

200 lugares + 50 lugares

Sala de espectáculos

2

R: Passará a possuir 250 lugares.

Figura 115 – Resposta da Dinorah à questão 4 do teste final.

Para responder à alínea b), Dinorah recorre à linha numérica que divide em quatro partes (estratégia gráfica), expressando a identidade entre $\frac{1}{4}$ e 25% (estratégia simbólica). Para determinar o valor correspondente a cada parte da linha (quantidade de lugares sentados que será acrescentada aos existentes, isto é, 50), usa o algoritmo da divisão, seguido da adição do valor encontrado com o número de lugares existentes. Deste modo, Dinorah utiliza uma estratégia flexível, uma vez que combina três estratégias, a gráfica, a simbólica e o procedimento de cálculo.

Já Mariana desenha uma barra que divide em cinco partes iguais (estratégia gráfica), fazendo corresponder 200 à sua totalidade e 40 a cada parte. Este valor resultou do quociente entre 200 e cinco (procedimento de cálculo). Posteriormente a aluna sombreia quatro partes, fazendo-lhe corresponder o número de pessoas que assistiram sentadas (Figura 116).

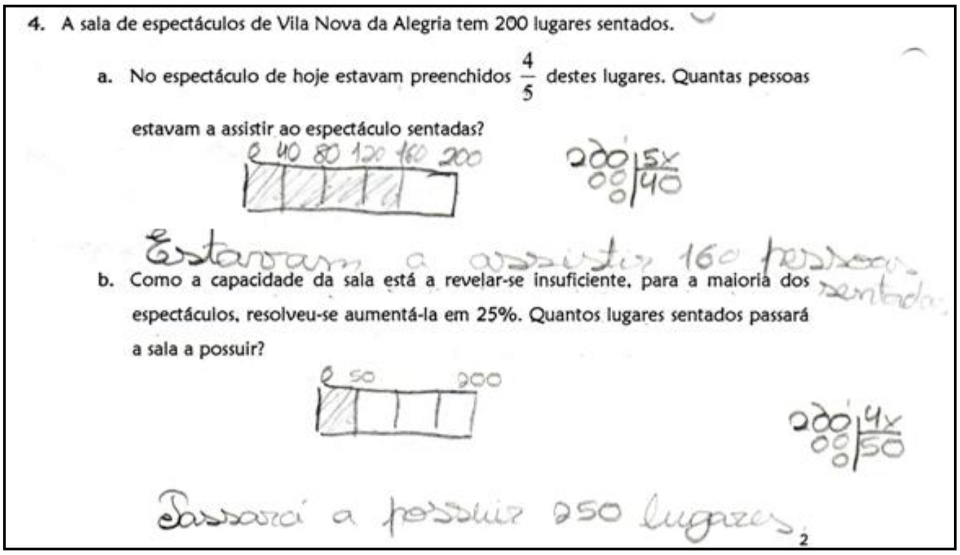


Figura 116 – Resposta da Mariana à questão 4 do teste final.

Para responder à alínea b), Mariana volta a recorrer à barra, mas divide-a agora em apenas quatro partes, associando 25% a $\frac{1}{4}$ (estratégia simbólica). Posteriormente recorre ao algoritmo da divisão para determinar o número de lugares correspondentes a cada parte da barra, que adiciona aos lugares já existentes. Em ambas as alíneas é evidente o recurso a uma estratégia flexível, uma vez que Mariana combina estratégias gráficas, simbólicas e procedimentos de cálculo.

Por sua vez, Aida recorreu à linha numérica que dividiu em cinco partes iguais, tendo feito corresponder um determinado número de pessoas a uma fração (Figura 117).

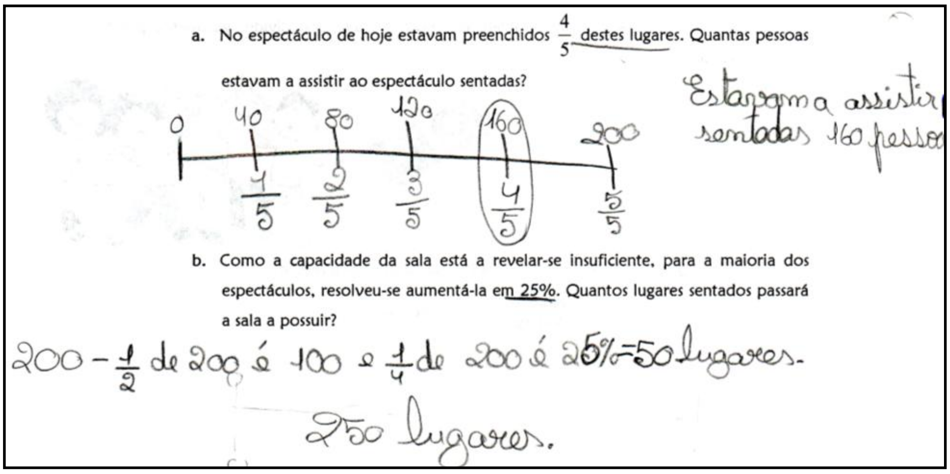
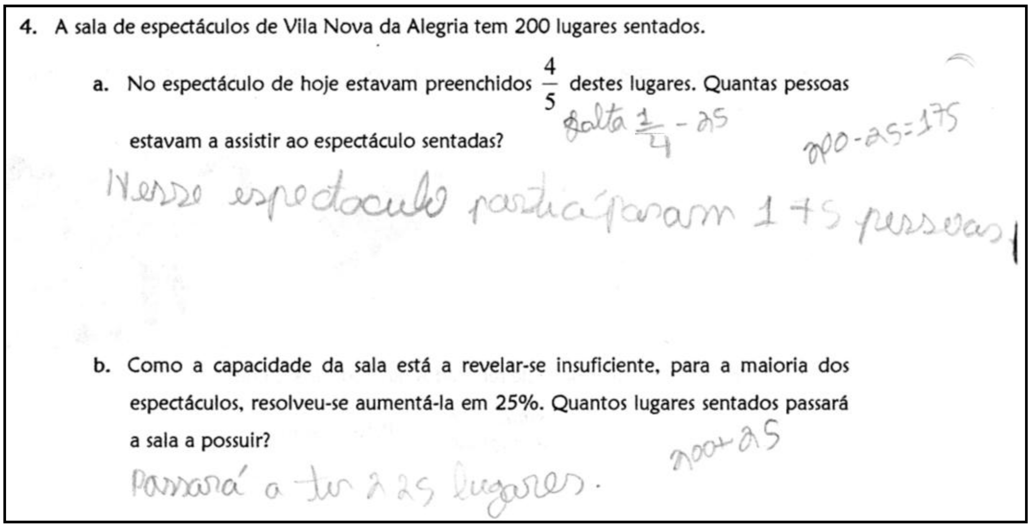


Figura 117 – Resposta da Aida à questão 4 do teste final.

Aida recorre à linha numérica como estratégia de resolução da questão (estratégia gráfica) e divide-a em cinco partes, apresentando as frações na parte inferior da linha e na outra, o número de pessoas correspondente, evidenciando que identifica corretamente o significado de operador e sabe aplicá-lo na resolução dos problemas.

Em contrapartida, Cristiano revela algumas dificuldades com o significado operador, cometendo dois erros nesta questão. Primeiro identifica incorretamente a parte que falta para ter o todo, depois determina o número de lugares que correspondem ao racional que obteve, assumindo que um quarto tem sempre o mesmo valor (Figura 118).



4. A sala de espectáculos de Vila Nova da Alegria tem 200 lugares sentados.

a. No espectáculo de hoje estavam preenchidos $\frac{4}{5}$ destes lugares. Quantas pessoas estavam a assistir ao espectáculo sentadas?

falta $\frac{1}{4}$ - 25

200-25=175

Nesse espectaculo participaram 175 pessoas

b. Como a capacidade da sala está a revelar-se insuficiente, para a maioria dos espectáculos, resolveu-se aumentá-la em 25%. Quantos lugares sentados passará a sala a possuir?

200+25

Passará a ter 225 lugares.

Figura 118 – Resposta do Cristiano à questão 4a do teste final.

Cristiano reconhece, posteriormente, que falta uma parte para a unidade, tendo considerado que essa parte seria $\frac{1}{4}$, que é um valor de referência para si, fazendo-lhe corresponder 25 lugares mas não tendo em conta que a unidade é 200 e não 100.

Professora (H): De onde vem o 25?
Cristiano: É $\frac{1}{4}$! Que é o que falta a $\frac{4}{5}$!
Professora (H): O que significa $\frac{4}{5}$?
Cristiano: São quatro bocados de cinco!
Professora (H): Então quantos bocados lhe faltam para estar completa?
Cristiano: Um! Eles são cinco! Ops! Aqui não era $\frac{1}{4}$ era $\frac{1}{4}$!
Professora (H): Então e o 25, de onde vem?
Cristiano: Como eu pensava que era um quarto, eu sei que um quarto é 25%! 25% é 25 lugares!
Professora (H): Sempre? Se a sala tivesse mais lugares, 25% dos seus lugares eram sempre 25?
Cristiano: Sim!

Cristiano evidencia compreender que o significado que está subjacente a esta questão, pressupõe uma transformação no número total de cadeiras (sentido do significado operador), no entanto não a resolve corretamente, porque se engana na interpretação da fração que lhe é apresentada e também porque não tem em conta o valor da unidade em questão.

Medida

A questão três do teste final contempla o significado de medida, sendo uma questão em que é solicitada aos alunos a representação de números racionais num segmento de reta [AB].

Relativamente ao Cristiano, podemos dizer que este é parcialmente bem-sucedido, uma vez que consegue posicionar os vários números no segmento de reta, mas não o faz de uma forma rigorosa (Figura 119).

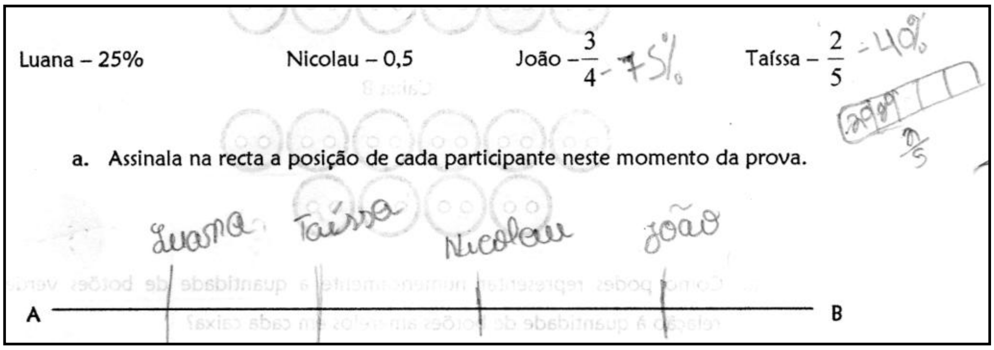


Figura 119 – Resposta do Cristiano à questão 3 do teste final.

Cristiano divide o segmento de reta em cinco partes e marca a posição da Taíssa corretamente na segunda marca, contudo as posições dos outros participantes são distribuídas pelas restantes marcas, sem evidenciar rigor na sua localização no segmento de reta, embora ordenadas de forma correta.

Mariana também não evidencia muito rigor na divisão sucessiva do segmento de reta, mas consegue resolver a questão. Começa por marcar a posição do Nicolau, por ser exatamente ao meio – "metade" (segundo a própria), e depois a posição da Luana por ser metade da primeira metade. Posteriormente, para marcar as posições do João e da Taíssa, dadas por meio de frações, Mariana sentiu necessidade de realizar mais subdivisões na linha, recorrendo à equivalência de frações – procedimento de cálculo (Figura 120).

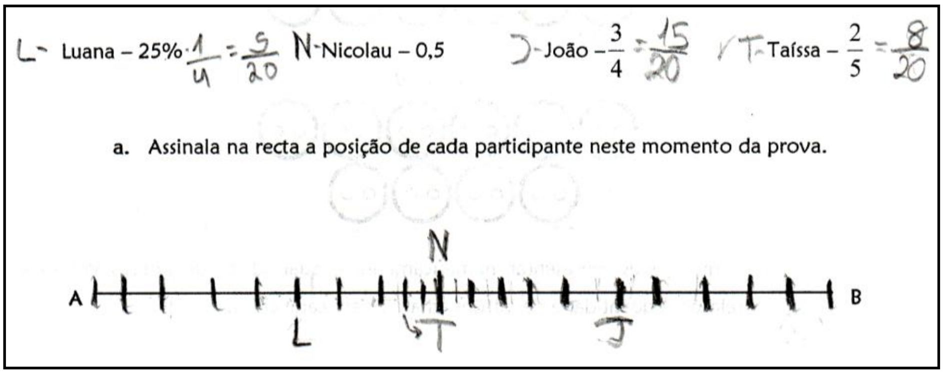


Figura 120 – Resposta da Mariana à questão 3 do teste final.

Para recorrer às frações equivalentes, Mariana identificou o mínimo múltiplo comum entre quatro e cinco, tendo referido que "o vinte está nas duas tabuadas". Por sua vez, Dinorah consegue não só interpretar o segmento de reta como um objeto (unidade) que tem de ser dividido (Figura 121), mas fá-lo de uma forma mais rigorosa do que os seus dois colegas.

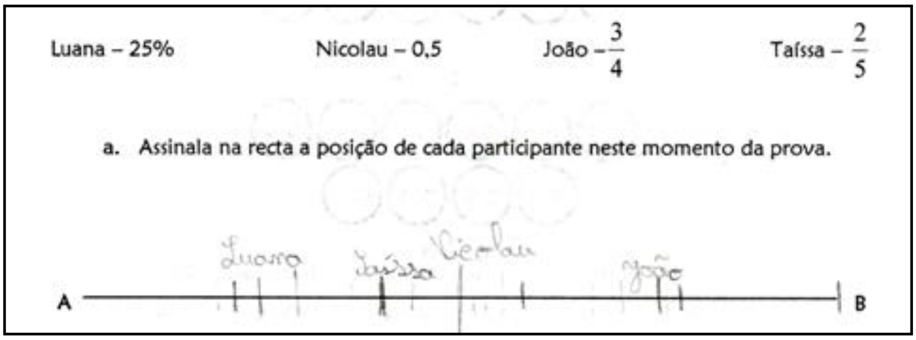


Figura 121 – Resposta da Dinorah à questão 3 do teste final.

Dinorah faz várias divisões no segmento de reta até encontrar marcas nas posições pretendidas, esclarecendo que algumas marcas que estão no mesmo foram enganos que ela não apagou:

> **Professora (H):** Podes explicar como fizeste? Onde começaste?
> **Dinorah:** Marquei o Nicolau! (…) Fiquei com a linha dividida em duas partes, depois dividi cada uma delas ao meio e marquei o João e a Luana. (…) A Taíssa foi mais ou menos! (…) está perto da metade, por isso é que a marquei mais perto do Nicolau do que da Luana.
> **Professora (H):** Como sabes que está perto da metade?
> **Dinorah:** Porque $\frac{2}{5}$ é 0,4!
> **Professora (H):** E as outras marcas?
> **Dinorah:** Enganei-me e esqueci-me de apagar!

Também Aida interpreta o segmento de reta como a unidade que tem de dividir em partes mais pequenas, fazendo-o com rigor (Figura 122).

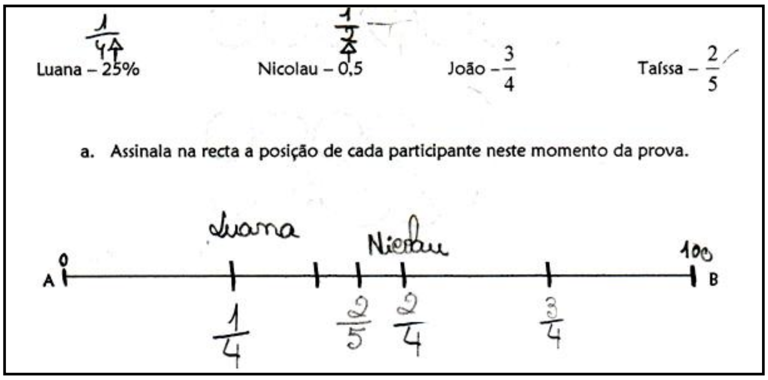


Figura 122 – Resposta da Aida à questão 3 do teste final.

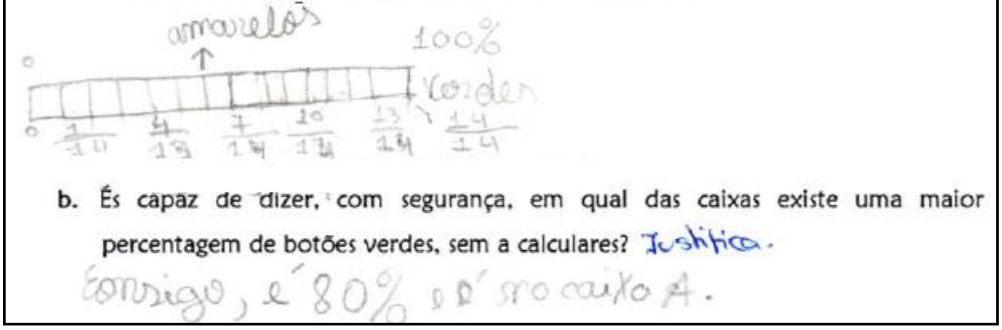
Aida reconhece que a posição do Nicolau é corresponde a um meio do segmento e que a marcação das frações $\frac{1}{4} e \frac{3}{4}$ está facilitada pois basta dividir cada metade em duas partes. Nota-se que para marcar a fração correspondente à posição da Taíssa, cujo denominador é cinco, a Aida efetuou novas divisões da unidade, mas somente entre $\frac{1}{4} e \frac{2}{4}$, uma vez que reconhece que $\frac{2}{5}$ se pode representar de outra forma:

> **Professora (H):** Porque marcaste aqui os $\frac{2}{5}$?
>
> **Aida:** Então, $\frac{2}{5}$ é 40%!
>
> **Professora (H):** Como sabes?
>
> **Aida:** 2:5=0,4=40%
>
> **Professora (H):** Porque dividiste esta parte (o espaço entre $\frac{1}{4} e \frac{2}{4}$) deste modo?
>
> **Aida:** Este bocado vale 25%, metade é 12,5, por isso este traço (o primeiro a seguir a $\frac{1}{4}$) vale 37,5% (referindo-se à marca dos $\frac{3}{8}$), por isso pus os $\frac{2}{5}$ um bocadinho mais à frente!
>
> **Professora (H):** Como sabes que 37,5% é aí nessa marca? (referindo-se à marca dos $\frac{3}{8}$)
>
> **Aida:** Aí são $\frac{3}{8}$, porque se eu dividir cada bocado ao meio fico com oito bocados. E eu ainda me lembro da primeira tarefa, quando um deles dividiu o seu chocolate em oito partes, cada parte valia 12,5%!

Razão

A primeira questão do teste final incidia sobre o significado razão onde, após se pedir que fosse expressada uma relação entre duas quantidades (alínea a) para duas situações (caixa A e caixa B), era pedido aos alunos que comparassem, em termos de percentagem, essas duas relações (alínea b). Nesta questão nenhum dos alunos consegue ser bem-sucedido.

Cristiano recorre à barra (Figura 123) para representar a quantidade de botões existentes na caixa A, começando por dividir a mesma em 14 partes, fazendo-lhe equivaler os 100%. Depois à sexta marca faz corresponder a quantidade de botões amarelos, identificando os restantes como verdes (oito). Pela resposta que Cristiano dá à alínea b), ele faz corresponder aos botões verdes uma percentagem de 80%, não estabelecendo qualquer relação entre as duas caixas, porque embora a caixa A seja aquela que tem maior número de botões verdes, o número total de botões existentes em cada caixa é diferente.


a. Como podes representar numericamente a quantidade de botões verdes em relação à quantidade de botões amarelos em cada caixa?

b. És capaz de dizer, com segurança, em qual das caixas existe uma maior percentagem de botões verdes, sem a calculares? Justifica.

Consigo, é 80% e é na caixa A.

Figura 123 – Resposta do Cristiano à questão 1 do teste final.

Dinorah e Aida centram-se apenas na quantidade absoluta de botões verdes em cada caixa (alínea b), sem estabelecer qualquer relação entre as quantidades relativas de botões verdes e amarelos, afirmando que é na caixa A que existe maior percentagem de botões verdes, "porque é nela que há mais botões verdes" (Dinorah), "porque tem oito botões verdes e a caixa B tem seis botões verdes" (Aida).

Mariana, apesar de conseguir expressar, sob a forma de fração, uma relação entre duas quantidades (Figura 124), não se serve dessas frações para responder à alínea b). Afirma ali que "existe uma maior percentagem de botões na caixa A, porque tem mais botões", considerando apenas a quantidade absoluta de botões em cada caixa, não tendo, pois, em conta a relação entre as quantidades relativas de botões verdes e amarelos.

a. Como podes representar numericamente a quantidade de botões verdes em relação à quantidade de botões amarelos em cada caixa?

Caixa A – $\frac{8}{6}$

Caixa B – $\frac{6}{4}$

Figura 124 – Resposta da Mariana à questão 1 do teste final.

6.4.2. Concetualização da unidade

Na questão 2b Cristiano interpreta a sua grandeza contínua (tablete de chocolate) como um conjunto de dez quadradinhos, representando a tablete dessa forma (ver Figura 110). Como o aluno explica, ele adota esta estruturação da grandeza contínua por uma questão de comodidade, sendo influenciado pela grandeza discreta com que trabalhou na questão 2a.

Professora (H): A figura do chocolate que te é facultada está inteira, porque a desenhaste desta forma, dividida em dez partes?

Cristiano: Eu imaginei que ele estava partido em dez bocados, porque era mais fácil! Se tivesse 10, já sabia quanto cada um ia receber!
Professora (H): Já sabias?!
Cristiano: Sim! Já tinha feito as contas para os rebuçados!

Perante a mesma questão, Mariana interpreta a grandeza contínua como um todo constituído por cinco partes, tal como é evidente pela barra que a aluna representa. Por sua vez, a grandeza discreta é interpretada pela aluna como sendo constituída por dois conjuntos de cinco elementos cada (ver Figura 112). Aida, por sua vez, interpreta o conjunto de rebuçados (grandeza discreta) como uma unidade composta por cinco grupos de dois elementos cada (ver Figura 113) e a tablete (grandeza contínua) como uma unidade constituída por cinco elementos (ver Figura 114), o mesmo sucedendo com Dinorah (Figura 125).

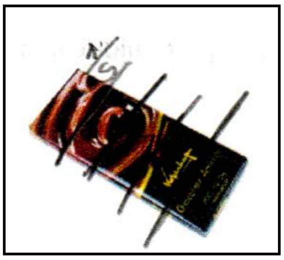


Figura 125 – Resposta da Dinorah à questão 2b do teste final.

A forma como estas duas alunas resolveram a questão três, referida anteriormente, também evidencia que ambas têm a capacidade de reorganizar a sua unidade. Por exemplo, Dinorah divide a sua unidade em duas partes e depois reorganiza-a em quatro partes (ver Figura 121). Por sua vez, a Mariana divide a unidade em duas partes, reorganiza-a, em seguida, dividindo-a em quatro partes e finalmente volta a reorganizá-la, dividindo-a em vinte partes (ver Figura 120).

No entanto, ainda neste âmbito da interpretação da unidade com que se trabalha, numa situação em que os números racionais não estão representados graficamente (questão oito), Dinorah revela alguma confusão. A aluna desenha um segmento de reta que assume ter como comprimento três unidades e posiciona o número 2,7 (Figura 126). De seguida, constrói abaixo um outro segmento, paralelo ao primeiro, com o mesmo comprimento, que aparentemente assume como representando uma unidade, uma vez que o divide em sete partes iguais para posicionar o número $\frac{2}{7}$.

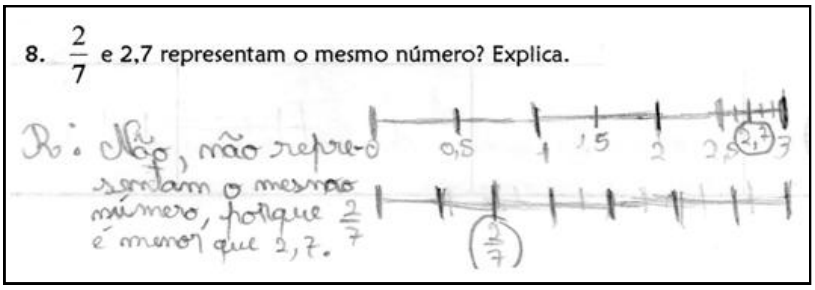


Figura 126 – Resposta da Dinorah à questão 8 do teste final.

Ao comparar os dois números racionais, Dinorah não tem em conta que estão representadas duas unidades diferentes. A aluna assume que a sua unidade, nesta questão, é três, pelo que acaba por marcar, no segundo segmento de reta, $\frac{2}{7}$ de três, aparentemente, interpretando a fração que lhe é dada como um operador.

6.4.3. Múltiplas representações

Todos os alunos do grupo estudo de caso evidenciam, através das suas respostas às questões do teste final, que reconhecem as diferentes formas de representar um número racional e conseguem estabelecer conexões entre elas. Apresento de seguida uma seleção de resoluções de cada aluno que revelam essas aprendizagens.

Na questão sete do teste final, Cristiano revela que consegue estabelecer conexões entre as diferentes representações, uma vez que converte uma fração e um numeral decimal em percentagem para descobrir se representam o mesmo número (Figura 127), seguindo uma estratégia simbólica.

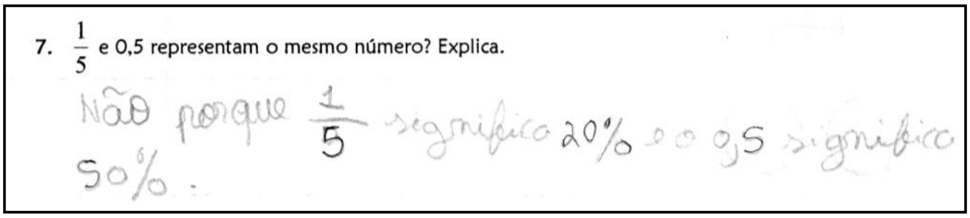
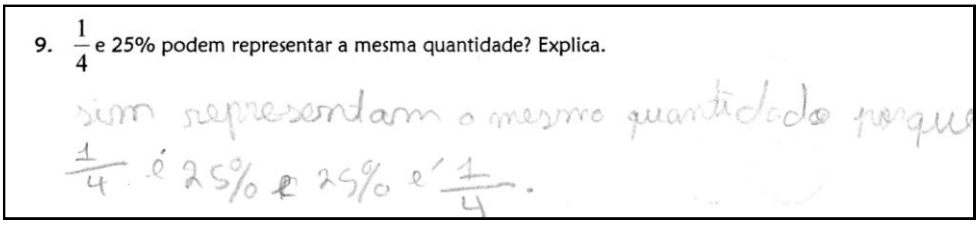


Figura 127 – Resposta do Cristiano à questão 7 do teste final.

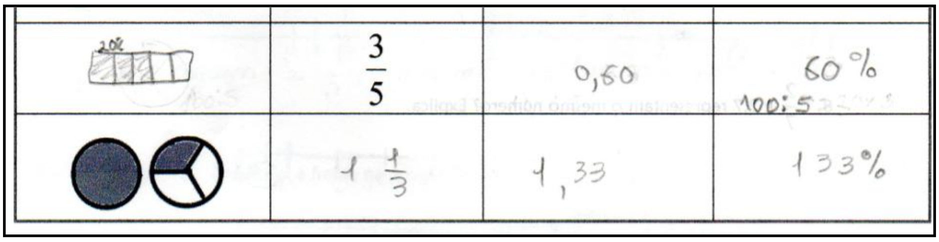
Cristiano também revela que reconhece formas equivalentes de representar um número racional, pela sua resposta à questão nove (Figura 128) e também pelo que efetua na questão 13 (ver Figura 108), conseguindo expressar a mesma quantidade utilizando diferentes representações. Também na questão 3a, Cristiano estabelece conexões entre as representações, determinando representações equivalentes (estratégia simbólica) com o auxílio da barra (estratégia gráfica) (ver Figura 119), recorrendo deste modo a uma estratégia flexível ao combinar uma estratégia simbólica com uma estratégia gráfica.


9. $\frac{1}{4}$ e 25% podem representar a mesma quantidade? Explica.

sim representam o mesmo quantidade porque $\frac{1}{4}$ é 25% e 25% é $\frac{1}{4}$.

Figura 128 – Resposta do Cristiano à questão 9 do teste final.

Dinorah também consegue estabelecer conexões entre as diferentes representações dos números racionais, como se evidencia pelo modo como resolveu a questão 13 do teste final (Figura 129).



20%	$\frac{3}{5}$	0,60	60 % 100:5
	$1\frac{1}{3}$	1,33	133%

Figura 129 – Resposta do Dinorah a parte da questão 13 do teste final.

No primeiro exemplo da figura, Dinorah opta por representar pictoricamente a fração, através de uma barra, que divide em cinco partes, sombreando de seguida três delas, fazendo corresponder a cada uma 20%, por conhecer o quociente entre 100 e cinco. No segundo exemplo da figura, Dinorah começou por representar a quantidade através de um numeral misto e recorreu, de seguida, à calculadora para escrever o numeral decimal e a percentagem respeitantes à última representação pictórica. Para encontrar o numeral decimal, dividiu um por três e depois multiplicou o valor encontrado por quatro. Posteriormente multiplicou esse valor por 100 para chegar à percentagem.

Também a resolução das questões sete e nove, evidencia que a aluna consegue estabelecer conexões entre as diferentes representações: entre frações e numerais decimais (questão sete) e entre uma percentagem e um numeral decimal (Figura 130). É de salientar que, para dar resposta à questão sete, além de marcar os números racionais na linha numérica, a aluna estabelece conexões entre frações e numerais decimais e vice-versa, evidenciando flexibilidade com as diferentes representações.

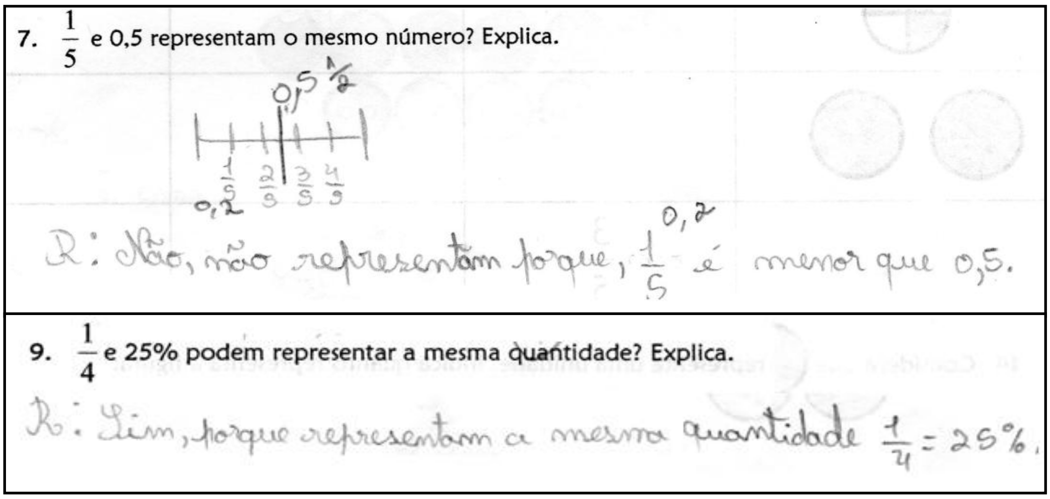


Figura 130 – Resposta da Dinorah às questões 7 e 9 do teste final.

O desempenho de Mariana na questão 13 (Figura 109) evidencia que a mesma também consegue estabelecer conexões entre as diferentes representações. A reforçar esta capacidade surge a resposta que a mesma dá às questões sete e nove, uma vez que expressa a identidade entre 0,5 e $\frac{1}{2}$, e entre $\frac{1}{4}$ e 25%, reconhecendo formas equivalentes de representar um número (Figura 131).

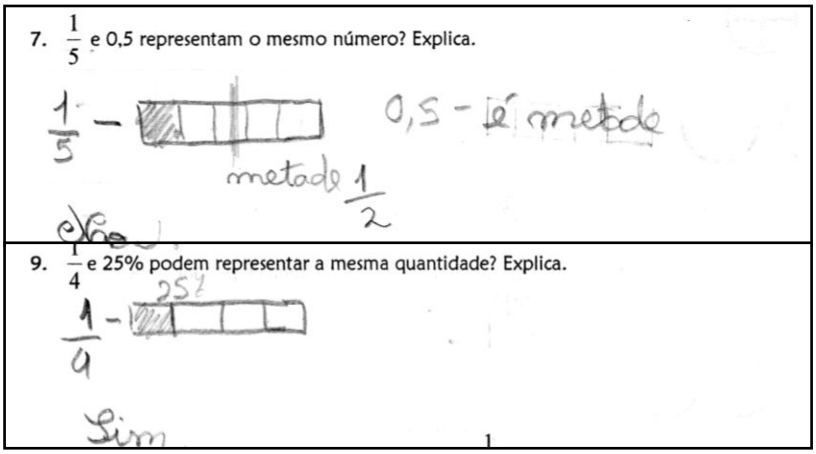
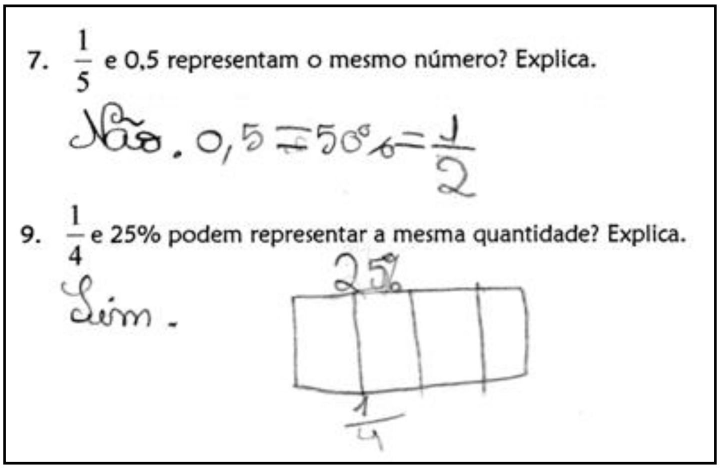


Figura 131 – Resposta da Mariana às questões 7 e 9 do teste final.

De salientar que para dar resposta às questões sete e nove, Mariana recorre a uma estratégia flexível, onde contempla as estratégias simbólicas (representações equivalentes) e gráficas (recorre à barra e a números de referência).

Também Aida consegue estabelecer conexões entre as diferentes representações (questão sete), reconhecendo formas equivalentes de representar um número (questão nove), tal como é visível pelas respostas que a aluna dá às referidas questões (Figura 132).


7. $\frac{1}{5}$ e 0,5 representam o mesmo número? Explica.

Não. 0,5 = 50% = $\frac{1}{2}$

9. $\frac{1}{4}$ e 25% podem representar a mesma quantidade? Explica.

Sim.

Figura 132 – Resposta da Aida às questões 7 e 9 do teste final.

É de salientar que na questão nove, Aida recorre à representação gráfica dos números racionais apresentados. Para resolver estas questões a aluna recorre a estratégias simbólicas (questão sete) e gráficas (questão nove).

Ainda no âmbito desta categoria de análise, é de salientar que a equivalência entre frações é uma capacidade evidenciada por duas alunas, Mariana e Aida, na resolução de algumas questões. No caso de Mariana, na questão três, ela consegue estabelecer equivalência entre frações, uma vez que recorre a frações equivalentes (ver Figura 120), com o mesmo denominador – 20 (procedimento de cálculo), para conseguir marcar algumas posições. Aida também revela capacidade de estabelecer equivalência entre frações, pois determina frações equivalentes tal como é visível pela resposta que a aluna dá à questão oito (ver secção seguinte – Figura 133).

6.4.4. Sistemas de valores de referência

No teste final existiam algumas questões onde os alunos recorreram a números de referência como estratégia facilitadora da sua resolução, tal como é evidente pelos exemplos que se seguem.

Para responder à questão oito, Aida recorre a uma estratégia flexível, onde combina procedimentos de cálculo, quando determina frações equivalentes, com uma estratégia simbólica, quando recorre a números de referência. A aluna recorre a um número de referência (estratégia simbólica) para afirmar que $\frac{2}{7}$ e 2,7 não representam o mesmo número, pois a fração é menor que 0,5 (Figura 133).

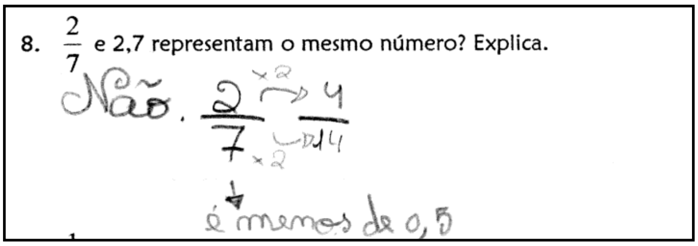


Figura 133 – Resposta da Aida à questão 8 do teste final.

Ao ser questionada quanto à sua explicação, Aida afirma que sabe que a fração é menor que um meio porque dois é menos de metade de sete. Esta aluna, aquando da explicação que dá à investigadora sobre a sua resolução da questão três do teste final (ver Figura 122), evidencia também o recurso ao número de referência 12,5%, quando refere que ainda se lembra "da primeira tarefa, quando um deles dividiu o seu chocolate em oito partes, cada parte valia 12,5%".

Para responderem à mesma questão, Cristiano e Mariana recorrem à unidade como número de referência (Figura 134) e afirmam que 2,7 e $\frac{2}{7}$ não representam o mesmo número. Enquanto Mariana se justifica dizendo que 2,7 é maior que um e $\frac{2}{7}$ é apenas uma parte da unidade ($\frac{7}{7}=1$), Cristiano refere que $\frac{2}{7}$ é menor que um e transforma o 2,7 numa percentagem (270%), sendo por isso este número maior que a unidade.

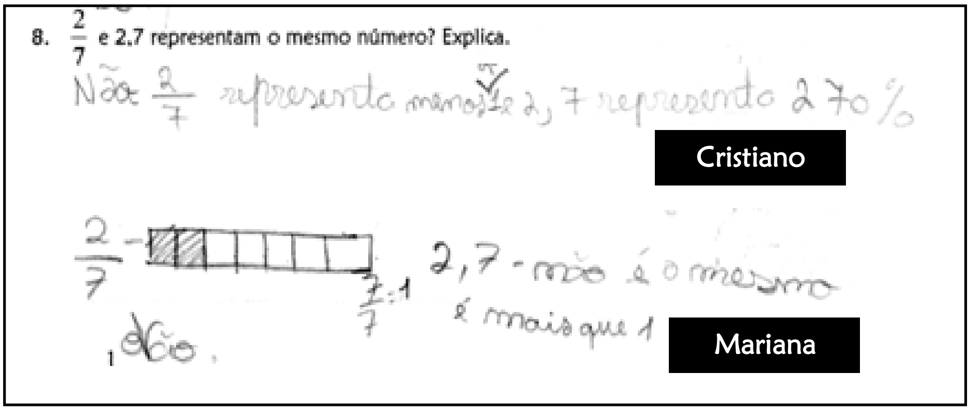
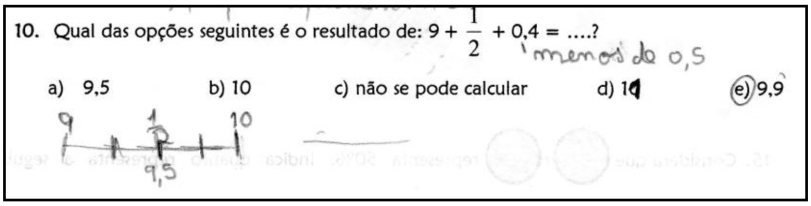


Figura 134 – Resposta do Cristiano e da Mariana à questão 8 do teste final.

Dinorah também recorre a um número de referência, quando é confrontada com uma adição de números racionais em que as parcelas contemplam representações diferentes (Figura 135), comparando uma das parcelas (0,4) com 0,5, um número de referência para a aluna. A aluna recorre à linha numérica onde marca o resultado da soma de duas parcelas (9,5), convertendo a fração dada num numeral decimal. Posteriormente Dinorah apercebe-se que o resultado terá de ser maior que 9,5 e menor que dez, uma vez que a outra parcela é menor que 0,5, assinalando de forma correta a resposta.


10. Qual das opções seguintes é o resultado de: $9 + \frac{1}{2} + 0{,}4 = \ldots$?

a) 9,5 b) 10 c) não se pode calcular d) 10 e) 9,9

Figura 135 – Resposta da Dinorah à questão 10 do teste final.

Para dar resposta à mesma questão, Aida converte a fração que lhe é apresentada em numeral decimal (estratégia simbólica), uma vez que refere que $9+\frac{1}{2}=9{,}5$, adicionando-lhe em seguida 0,4, mentalmente, uma vez que a aluna menciona que "cinco mais quatro são nove, mas isto é em décimas, por isso é 0,9", referindo-se à parte decimal do número.

Mariana também resolve corretamente a questão dez do teste final, transformando a fração que lhe é apresentada num numeral decimal para conseguir concretizar a adição, mas não sabemos se o fez mentalmente ou com recurso à calculadora, uma vez que a mesma tinha este recurso com ela.

6.4.5. Densidade dos números e o seu valor de posição

Relativamente a esta categoria de análise, podemos dizer que os quatro alunos conseguem comparar e ordenar números racionais, globalmente, evidenciando compreender o seu valor de posição, contudo, a representação destes números na linha numérica não é realizada de modo rigoroso por todos. Por sua vez, a densidade dos números racionais não foi contemplada especificamente nas questões do teste final, ainda assim uma das alunas evidencia o seu reconhecimento.

Dinorah demonstra que compreende o valor de posição dos números, uma vez que, na resposta que deu à questão três (Figura 121), representa números racionais na linha numérica. Tal evidencia-se também na sua resposta à questão sete (Figura 130), onde recorre à marcação de números na linha numérica. No seguimento da resposta que Dinorah deu à questão sete e ao raciocínio subjacente à questão, a aluna revela capacidade para comparar números racionais. Ainda no campo da comparação e ordenação de números, apesar de Cristiano não ter conseguido representar rigorosamente números na linha numérica, consegue compará-los e ordená-los corretamente (Figura 119). As resoluções do aluno também evidenciam que é capaz de comparar números racionais, seguindo uma estratégia simbólica (Figura 127), onde dá preferência às percentagens ou recorre a números de referência (Figura 134).

O modo como Mariana resolve a questão três denota familiaridade com o valor de posição dos números, uma vez que consegue representá-los na linha numérica (Figura 120), apesar de não ser muito rigorosa. Além disso, para dar resposta às questões oito (Figura 134) e sete (Figura 136), Mariana recorre ao modelo da barra (estratégia gráfica) para comparar números racionais.

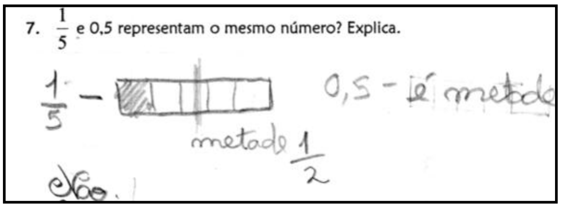


Figura 136 – Resposta da Mariana à questão 7 do teste final.

Além de usar a representação da fração na barra numérica, Mariana recorre ainda a um valor de referência para comparar a fração e o numeral decimal apresentado.

Aida adota a mesma estratégia de Mariana para comparar dois números racionais, como é evidente pelo modo como resolve a questão oito (Figura 133). A forma como responde à questão três (Figura 122), ordenando números racionais e representando-os na linha numérica, evidencia a sua familiaridade com o valor de posição dos números. É ainda se salientar que a forma como esta aluna explica a marcação da posição da Taíssa na linha (questão três – diálogo que surge após a Figura 122), evidencia que revela alguma compreensão da densidade dos números racionais, pois consegue compreender que entre duas frações com numeradores consecutivos ($\frac{1}{4} e \frac{2}{4}$) existem outros números racionais.

6.4.6. SÍNTESE

Comparativamente ao desempenho dos alunos no teste inicial pode-se dizer que houve uma evolução nos seus conhecimentos, no âmbito dos vários significados dos números racionais, uma vez que Dinorah, Mariana e Aida, conseguem resolver problemas, sem dificuldade, que envolvam os significados, parte-todo, quociente, operador e medida. Por sua vez, Cristiano, apesar de também manifestar melhorias nos seus conhecimentos, continua com dificuldades no significado de operador (Figura 118), uma vez que não tem em conta o valor da unidade em questão e no significado de medida (Figura 119), uma vez que não é rigoroso no posicionamento dos números racionais na linha.

Relativamente ao significado de razão, todos os alunos continuam a revelar dificuldades, uma vez que tiram conclusões através da análise de apenas uma das quantidades em causa, sem a relacionarem com a outra. Este aspeto já era espectável pois o significado de razão foi aquele onde menos se apostou por ser um aspeto mais diretamente relacionado com os conteúdos do 6.º ano de escolaridade e também porque é o significado que abarca uma maior complexidade (Steffe & Olive, 2010). O insucesso dos alunos na primeira questão do teste final pode também estar relacionado com as próprias figuras que servem de suporte ao enunciado do problema e que podem ter dificultado a resolução dos mesmos. Ou seja, especificamente na alínea b), o facto de se pedir uma comparação entre os botões verdes, em termos de percentagem, sem se efetuar quaisquer cálculos, torna a questão mais difícil.

No âmbito da conversão entre múltiplas representações dos números racionais, podemos afirmar que os quatro alunos evidenciam flexibilidade, uma vez que todos conseguem não só reconhecer formas equivalentes de representar um número, como também conseguem estabelecer conexões entre as diferentes representações (fração, decimal e percentagem). Relativamente à capacidade de estabelecer equivalência entre frações, esse aspeto apenas foi visível nas resoluções de Mariana (Figura 120) e Aida (Figura 133).

O modo como os alunos trabalham com as unidades envolvidas nos problemas, revela que os mesmos têm capacidade para a interpretar (*unitizing*) e reorganizar (*reunitizing*) de modo a encontrarem uma resposta para o seu problema. Contudo, Dinorah não evidencia de forma consistente, nas suas resoluções, uma compreensão do conceito de unidade, quando compara números racionais (Figura 126 – questão oito). O erro que a aluna comete na questão oito é pontual e pode-se considerar um erro de interpretação, uma vez que a mesma utiliza o modelo da linha numérica numa situação semelhante (comparação de racionais) de forma correta (Figura 130 – questão sete), além de o utilizar também corretamente noutras situações: no contexto de um problema (Figura 115 – alínea b da questão quatro) e numa situação de adição de racionais (Figura 135 – questão dez).

Ainda neste âmbito é de salientar que Aida organiza um conjunto discreto de objetos (Figura 113), decorrendo do facto de a aluna ter encontrado primeiro o máximo divisor comum entre dez (quantidade de objetos) e cinco (quantidade de crianças por quem se vai realizar a partilha). O modo como esta aluna e os restantes elementos do grupo interpretam e reorganizam a unidade, evidencia que todos possuem capacidade de aplicar o seu conhecimento de destreza com os números (McIntosh et al., 1992).

Apesar de nenhuma das questões do teste final encaminhar explicitamente para o recurso à utilização de números de referência os alunos usaram-nos em algumas questões (um – Mariana e Cristiano; 0,5 – Dinorah e Aida). Estes valores de referência são utilizados com dois objetivos: **a)** a unidade é um ponto de referência utilizado para comparar dois números racionais (Figura 134 – Mariana e Cristiano); **b)** o número 0,5 é um número de referência utilizado para comparar (Figura 130 – Dinorah; Figura 133 – Aida) e para estimar o resultado de uma adição (Figura 135 – Dinorah), uma vez que depois de se saber o valor exato da adição de duas parcelas, o resultado final é estimado, pelo facto de a terceira parcela ser comparada com o 0,5; e **c)** o valor 12,5% é utilizado por Aida (questão três – diálogo que surge após a Figura 122) para fazer a conexão entre três oitavos e 37,5%.

O facto de estes alunos terem flexibilidade para escolherem números de referência, de acordo com as orientações curriculares (ME, 2007) e com a investigação (McIntosh et al., 1992), indicia que estes têm uma boa compreensão do conceito de número racional.

Relativamente à utilização do pensamento residual, como já era espectável, uma vez que surgiu muito pouco durante a experiência de ensino, não emergiu nas resoluções do teste final de nenhum aluno do grupo estudo de caso.

No que concerne à densidade dos números racionais e ao seu valor de posição, denota-se um aumento da familiaridade por parte dos alunos. Ou seja, se inicialmente apenas uma aluna conseguia ordenar números racionais e representá-los na linha numérica, após a experiência de ensino, pelos dados do teste final, todos conseguem comparar e ordenar números racionais. Além disso quase todos conseguem representar números racionais na linha/barra numérica, ainda que não de uma forma muito rigorosa, havendo evidência que reconhecem a existência de números entre dois racionais (Lamon, 2006; Martinie, 2007).

No âmbito da marcação de números racionais na barra numérica, é de salientar que Mariana, na questão três (Figura 120) evidencia seguir uma estratégia apontada por Yanik et al. (2008), uma vez que inicialmente faz metades sucessivas do modelo (divide a linha ao meio e depois a primeira metade, divide-a novamente ao meio). No entanto, depois recorre ao mínimo múltiplo comum para calcular o número de partes em que é conveniente que a sua unidade esteja dividida, para conseguir marcar os outros racionais. Deste modo Mariana evidencia possuir conhecimento e destreza com os números, aspeto considerado importante no desenvolvimento do sentido de número (McIntosh et al., 1992) e na compreensão dos números racionais (Mendes, 2012).

Ainda neste campo, o modo rigoroso como Aida divide a linha (Figura 122) revela que a mesma se encontra no nível de partição correspondente à composição (Pothier & Sawada, 1983), pois numa primeira fase faz metades sucessivas da linha (*repeated halving of entire number lines*, no original – Yanik, et al., 2008), mas depois percebe que dessa forma não vai obter o número de partes que lhe permite marcar outros racionais. Deste modo, a aluna de seguida subdivide apenas uma parte da linha – os primeiros 25% – porque estabelece uma conexão entre a fração que lhe falta marcar (dois quintos) e a representação decimal, como sendo metade dos 25%. O raciocínio desta aluna só é possível possuindo um conhecimento formal dos números racionais, o que é notório, pois a mesma consegue descrever relações entre os números racionais (Kieren, 1988).

Em suma, o modo como os alunos do grupo estudo de caso trabalham com o segmento de reta, que se assemelha fisicamente a uma linha numérica vazia, conseguindo efetuar com algum rigor sucessivas divisões e subdivisões da unidade, atribuindo uma medida a cada intervalo (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006), revela flexibilidade no manuseio deste modelo.

É ainda de salientar que as resoluções dos alunos, no teste final, demonstram o recurso a uma multiplicidade de estratégias, em função da que lhes é mais favorável e se sentem mais confiantes. Além disso, a calculadora é pouco utilizada, tal como já havia acontecido durante a experiência de ensino.

Denota-se que qualquer um dos quatro alunos do grupo estudo de caso recorre a várias estratégias de resolução de problemas. Salienta-se que recorrem não só a procedimentos de cálculo, a estratégias gráficas e simbólicas de forma isolada, como também à combinação das mesmas (estratégias flexíveis). Aida utiliza estratégias gráficas (Figuras 117 e 132 – questão nove), simbólicas (Figura 132 – questão sete), procedimentos de cálculo (questão 2a) e flexíveis, combinando uma estratégia gráfica com uma simbólica (Figura 114), ou um procedimento de cálculo (determinação de frações equivalentes) com uma estratégia simbólica (recurso a um ponto de referência) – Figura 133.

Relativamente a Dinorah, a aluna adota estratégias flexíveis, conseguindo combinar simultaneamente, na mesma questão, estratégias gráficas, simbólicas e procedimentos de cálculo (Figura 115). Além disso também recorre de forma isolada a estratégias gráficas (Figura 126) e a procedimentos de cálculo (Figura 111). Mariana também utiliza estratégias flexíveis, onde combina os três tipos de estratégias, aquando da resolução da questão quatro (Figura 116). Por outro lado a aluna também combina uma estratégia simbólica com um procedimento de cálculo (Figura 120), uma estratégia simbólica com uma estratégia gráfica (Figura 131), assim como uma estratégia gráfica com um procedimento de cálculo (Figura 112). Além disso, Mariana recorre também a procedimentos de cálculo (Figura 109) de forma isolada. Já Cristiano recorre a estratégias simbólicas (Figura 127), conseguindo combinar estas com as gráficas (Figura 119), e as gráficas com procedimentos de cálculo (Figura 110), evidenciando-se o recurso a estratégias flexíveis.

Cada aluno do grupo estudo de caso tem as suas preferências quanto à representação a utilizar, revelando predisposição para utilizar a representação com que se sentem mais à vontade. De uma forma resumida pode-se afirmar que Aida e Mariana revelam propensão para utilizarem as frações com mais frequência, tal como é evidente pelas suas resoluções visíveis nas Figuras 122 e 120, respetivamente. Por sua vez, Dinorah recorre com mais frequência aos numerais decimais para resolver as questões, conforme se denota pela sua resolução da questão sete (Figura 130) e questão dez (Figura 135). Cristiano, tal como já havia acontecido no teste inicial, continua a evidenciar uma propensão para a utilização da percentagem (Figuras 119 e 127).

A análise pormenorizada que se realizou de algumas questões do teste final, e que se organizou pelas categorias de análise que foram previamente definidas, encontram-se resumidas num quadro – Quadro 14, para uma mais fácil e rápida leitura das capacidades que cada um dos alunos do grupo estudo de caso evidenciou no teste.

Categorias de Análise		Cristiano	Dinorah	Mariana	Aida
Resolução de problemas que contextualizam os vários significados dos números racionais, em situações discretas ou contínuas.		- parte-todo - quociente - medida (parcialmente)	- quociente - medida - operador - parte-todo	- quociente - medida - operador - parte-todo	- quociente - medida - operador - parte-todo
Concetualização da unidade.	☆ Interpreta a unidade (*unitizing, reunitizing*), em situações que envolvam grandezas discretas e contínuas.	✓	✓	✓	✓
	☆ Reconstrói a unidade, em grandezas discretas e contínuas (*reversing*).	Não contemplado	Não contemplado	Não contemplado	Não contemplado
Múltiplas representações.	☆ Reconhece diferentes formas de representar um número racional (numeral misto, fração, numeral decimal e percentagem).	✓	✓	✓	✓
	☆ Estabelece equivalência entre frações.	Não observado	Não observado	✓	✓
	☆ Estabelece conexões entre as diferentes representações com símbolos escritos (fração, decimal e percentagem).	✓	✓	✓	✓
Sistemas de valores de referência.	☆ Utiliza números de referência.	✓	✓	✓	✓
	☆ Utiliza o pensamento residual.	Não observado	Não observado	Não observado	Não observado
Densidade dos números e o seu valor de posição.	☆ Representa números racionais na linha/barra numérica.	✗	✓	✓	✓
	☆ Compara e ordenar números racionais.	✓	✓	✓	✓
	☆ Reconhece a existência de números entre dois racionais.	Não contemplado	Não contemplado	Não contemplado	✓
Múltiplas estratégias utilizadas.		- procedimento de cálculo, estratégia gráfica, simbólica e flexível	- procedimento de cálculo, estratégia gráfica, simbólica e flexível	- procedimento de cálculo, estratégia gráfica, simbólica e flexível	- procedimento de cálculo, estratégia gráfica, simbólica e flexível
Representação eficaz.		- tendência para usar percentagem	- tendência para usar numerais decimais	- tendência para usar frações	- tendência para usar frações

Quadro 14 – Capacidades evidenciadas pelos alunos em cada categoria de análise durante o teste final.

Parte II – A Turma

6.5. Análise quantitativa evolutiva da turma

A elaboração de um teste inicial teve como objetivo compreender quais os conhecimentos prévios que os alunos da turma possuíam no campo dos Números Racionais, antes de iniciar a experiência de ensino. Desta primeira recolha de dados, pôde constatar-se que, antes do início da experiência de ensino, estes conhecimentos eram muito limitados. Destacam-se, entre estes, a noção de metade, associada a uma partilha equitativa, que os alunos identificam facilmente como sendo 50% e uma noção de fração como operador para frações de referência, como um meio ou um quarto (com o sentido de "quarta parte de"). Estes são conhecimentos de origem escolar e outros do quotidiano dos alunos, mas que não estão consolidados e se restringem ao reconhecimento de alguns números e conceitos dispersos. No entanto, foi com estas noções que os alunos foram explorando as sucessivas tarefas que lhes foram propostas.

Após o término da experiência de ensino toda a turma efetuou o teste final (Anexo 9) com o objetivo de verificar a evolução dos seus conhecimentos. Estes dados foram analisados de forma quantitativa e qualitativa, tendo sido contabilizadas as respostas corretas para efeitos de comparação dos resultados obtidos pelos alunos no teste inicial e no teste final (Figura 137).

Ambos os testes eram constituídos por 16 questões que envolviam situações variadas, em que os alunos deveriam: **A)** reconhecer várias representações do mesmo número; **B)** converter racionais representados de diferentes formas; **C)** identificar pictoricamente o número racional correspondente a uma representação decimal; **D)** identificar pictoricamente o número racional correspondente a uma percentagem; **E)** representar uma região sombreada por um número racional (fração, percentagem, numeral decimal); **F)** expressar uma razão entre duas quantidades; **G)** representar a partilha equitativa de quantidades discretas; **H)** efetuar a partilha equitativa de quantidades contínuas; **I)** representar números racionais num segmento de reta; **J1** e **J2)** aplicar o significado de operador numa situação problemática[37]; **K)** ordenar e comparar números racionais (no significado medida) e **L)** comparar razões.

---

[37] No teste inicial apenas era solicitado aos alunos que calculassem $\frac{1}{4}$ de 24 tendo uma questão paralela no teste final (calcular $\frac{4}{5}$ de 200) – J1. No entanto, no teste final também existia uma segunda questão que ia além da aplicação da fração com o significado operador (determinar o n.º de lugares sentados que passarão a existir numa sala que previamente tinha 200 lugares e que foi aumentada em 25% dos seus lugares – J2), o que não aconteceu no teste inicial. Por esse motivo só se apresentam resultados desta categoria para o teste final.

As respostas dos alunos às questões de cada um dos dois testes foram analisadas, tendo sido contabilizadas as respostas corretas (Figura 137), com o intuito de comparar o seu desempenho antes e após a realização da experiência de ensino. Os resultados apresentam-se organizados de acordo com as categorias referidas.

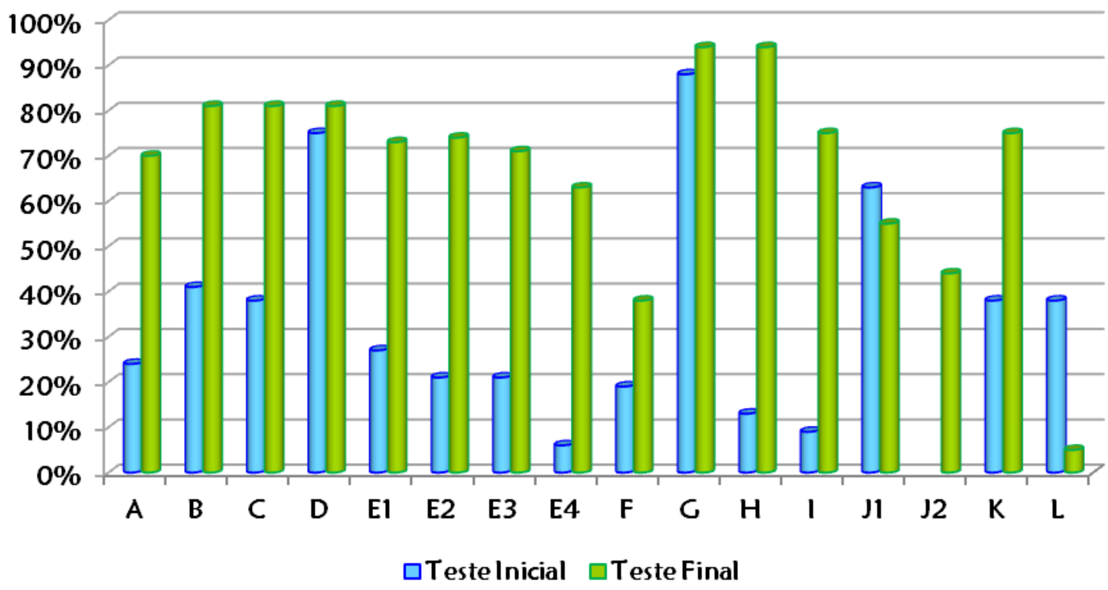


Figura 137 – Percentagem de respostas corretas nas questões dos testes (inicial e final).

Os resultados obtidos no teste final foram, globalmente, bastante positivos, sendo que, em 13 das 16 questões, registou-se uma percentagem de sucesso acima dos 60%. Salientam-se níveis de sucesso muito elevados na conversão entre várias representações de um número racional (decimal, fração e percentagem), em situações envolvendo a relação parte-todo, assim como nas situações de partilha equitativa (significado quociente) e representação e comparação na linha numérica (significado medida). Já no caso da situação que envolve o significado operador, o nível de sucesso foi médio, e no caso das situações com o significado de razão registaram-se resultados negativos.

A análise das respostas a estas questões permite perceber que os alunos, globalmente, têm facilidade em estabelecer conexões entre as representações. Além disso mostram que reconhecem diversas representações de um número racional (decimal, fração e percentagem) e que não têm grandes dificuldades em passar de uma representação para outra, quando isso lhes é pedido.

Ao resolverem problemas envolvendo os cinco significados de número racional verifica-se que têm um nível elevado de sucesso em situações de parte-todo e quociente.

Relativamente ao significado de operador, as respostas dos alunos ficaram aquém das expectativas pois, em termos absolutos (respostas corretas totais: J1 e J2) o sucesso apenas foi de 49,5%. Este resultado pode dever-se ao facto de a questão que envolvia este significado do teste final (questão quatro) ser mais complexa do que a questão do teste inicial (questão 15). Além disso, apesar das duas alíneas da questão quatro serem independentes, os alunos utilizam, inadvertidamente, na alínea b) um valor que determinaram na alínea a), o que culmina numa resposta incorreta da alínea b). Analisando de forma qualitativa as resoluções dos alunos na alínea a), verifica-se que a maioria aplica estratégias adequadas a este significado, denotando compreensão do mesmo, embora cometa erros relacionados com o algoritmo e com a concetualização da unidade, o que os leva a dar uma resposta incorreta.

No caso das questões que envolvem o significado de razão há um acentuado insucesso, o que é compreensível pelo facto de este significado ser, simultaneamente, o que envolve maior complexidade (Steffe & Olive, 2010) e o que foi menos trabalhado na experiência de ensino, dado ser objetivo de aprendizagem do ano de escolaridade seguinte. Ademais, como foi referido no ponto 6.4.1. (secção da razão), a própria formulação das questões pode não ter sido a mais adequada para os alunos terem oportunidade de expressarem os seus conhecimentos.

De uma forma geral, pode afirmar-se que os alunos da turma conseguem raciocinar corretamente, quando resolvem problemas com números racionais que envolvem os seus vários significados. As estratégias que adotam para resolver os problemas têm uma forte ancoragem no modelo da barra numérica (ou dupla linha numérica), que foi bastante explorado nas aulas, e cuja utilização denota uma grande flexibilidade na forma como optam pela representação que lhes é mais favorável em cada situação. Os alunos apresentam estratégias próprias que se baseiam na sua compreensão de número racional, não evidenciando mecanização de procedimentos. A utilização que os alunos do grupo estudo de caso fazem da barra (ou dupla linha numérica), separando a representação das quantidades na parte superior da barra e das frações e percentagens correspondentes em baixo, também foi observado nas resoluções dos restantes alunos da turma no teste final, evidenciando uma utilização flexível dos números racionais e o reconhecimento da relação entre as respetivas unidades.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

As orientações curriculares (ME, 2007), que nortearam esta investigação, e diversos estudos na educação matemática recomendam o trabalho com os números racionais, nas suas várias representações, e de forma paralela, ao longo do 2.º ciclo, no entanto, essa não tem sido a situação no nosso país. Deste modo, este estudo procura contribuir para um melhor conhecimento das possibilidades e implicações de uma nova abordagem curricular ao estudo dos números racionais neste nível de escolaridade.

Neste capítulo são sistematizadas as ideias principais relativamente à investigação realizada, começando por uma breve síntese da mesma, seguindo-se as suas conclusões que se encontram organizadas pelas questões que nortearam o estudo. A terminar, surge uma reflexão final, onde são referidas as limitações do presente estudo, as dificuldades com que me debati, assim como um breve apontamento sobre as orientações curriculares nacionais nesta temática dos números racionais.

7.1. Síntese do estudo

Esta investigação teve como principal objetivo compreender como os alunos constroem o conceito de número racional através da promoção de conexões entre as várias representações destes números. Como tal, delineou-se uma sequência de tarefas contextualizadas que percorreram os vários significados de um número racional, vários tipos de grandezas (continuas, discretas e compostas) e que promoveram uma abordagem paralela das várias representações destes números, assim como o uso de modelos. Atendendo à complexidade do fenómeno em estudo optei por um trabalho de natureza colaborativa com uma professora do 2.º ciclo, com a qual delineei uma Experiência de Ensino (EE) a qual foi desenvolvida com uma sua turma do 5.º ano.

O estudo decorreu no ano letivo de 2008/2009, com a aplicação de um teste escrito à turma (teste inicial), com diversos itens onde os alunos deviam escrever um número racional utilizando as suas várias representações e resolver problemas simples envolvendo números racionais. Partindo dos dados obtidos neste teste, selecionámos quatro alunos que integrariam um grupo estudo de caso e planeamos, em conjunto, as primeiras tarefas da EE, sendo que as seguintes foram sendo construídas à medida que a implementação das primeiras foi ocorrendo. Através da observação participante, como investigadora acompanhei a atividade do grupo estudo de caso durante todas as aulas da EE, tendo procedido à recolha de dados com base num guião de observação e através de gravações vídeo e áudio, bem como à recolha dos registos escritos dos alunos, material que foi analisado segundo uma abordagem qualitativa. Após a implementação da EE, foi também aplicado um novo teste escrito à turma (teste final) com questões idênticas às do teste inicial, procurando avaliar globalmente a evolução dos alunos da turma.

Com a análise dos dados procurei atingir os dois objetivos desta investigação: (1) compreender como os alunos evoluem na aprendizagem do conceito de número racional; e (2) analisar as potencialidades da sequência de tarefas proposta para a aprendizagem dos alunos relativamente ao conceito de número racional. Destes dois objetivos emergiu um conjunto de quatro questões às quais se pretende responder na secção seguinte.

7.2. Conclusões do estudo

Esta EE baseou-se na conjetura de que os alunos evoluem na aprendizagem dos números racionais se trabalharem com tarefas que integrem contextos familiares, que promovam a utilização das várias representações dos números racionais em paralelo, os seus vários significados e que sejam propícias à utilização de modelos. Além disso, também se conjeturou que uma das condições favoráveis a esta evolução são as oportunidades dadas aos alunos de discutirem e argumentarem sobre as suas estratégias na resolução de tarefas matemáticas, em pequeno e em grande grupo.

A partir da análise dos dados obtidos neste estudo e tendo em conta as questões do mesmo, às quais se pretende responder, agrupei as conclusões que se seguem em quatro pontos. O primeiro ponto diz respeito à compreensão que os alunos revelam sobre a concetualização da unidade, o uso de sistemas de referência, e sobre a densidade e valor de posição dos números. No ponto dois procuro responder à questão sobre a compreensão que os alunos revelam das múltiplas representações dos números racionais, principalmente às conexões que estabelecem entre elas. No ponto seguinte procuro dar conta das estratégias que os alunos utilizam quando resolvem tarefas que envolvem os cinco significados dos números racionais. Finalmente, no último ponto, discuto as potencialidades da sequência de tarefas implementada, para a evolução dos alunos na aprendizagem do conceito de número racional, em particular no que diz respeito ao uso de modelos.

7.2.1. Concetualização da unidade, sistemas de referência, densidade e valor de posição dos números

A análise das produções escritas e orais dos alunos recolhidas ao longo da EE permitiu concluir sobre a capacidade dos mesmos em concetualizarem a unidade, sobre a utilização que fazem dos sistemas de referência e sobre a noção que têm de densidade e valor de posição dos números racionais, de acordo com as categorias de análise dos dados delineadas (Quadro 9).

Concetualização da unidade

Ao longo da EE é evidente que os alunos do grupo estudo de caso têm capacidade de trabalhar de forma flexível com a unidade. Esta evidência surge não só em tarefas diferentes, como também dentro da mesma tarefa, uma vez que os alunos têm a capacidade de reorganizar a unidade consoante as questões que lhes vão sendo colocadas, ou seja, mostram conseguir reconhecer a unidade, no entanto interpretam-na de formas variadas (Lamon, 2006), mas adequadas às situações. Os alunos revelam, assim, uma forma flexível de pensar sobre a unidade, conseguindo escolher a melhor opção para resolver a questão com que se deparam.

Sendo a noção de *unitizing* um processo natural (Lamon, 2006), as tarefas da EE não forçaram os alunos a olhar, de uma única forma, para uma determinada unidade. Em vez disso, foi-lhes dada liberdade para interpretarem a unidade (*unitizing*) e a reorganizarem (*reunitizing*), em função dos seus raciocínios. No entanto, este aspeto foi sempre discutido no grupo turma, possibilitando-lhes ter contacto com as várias formas de interpretar a unidade que emergiam na turma e um maior conhecimento deste processo. A flexibilidade que a maioria dos alunos da turma manifesta na interpretação e uso da unidade no contexto dos números racionais permite-lhes reconstruí-la (*reversing*) sem dificuldade, quando isso lhes é solicitado, evidenciando uma boa compreensão da noção de unidade (Post et al., 1992). Contudo, alguns alunos da turma ainda manifestam algumas dificuldades no âmbito da concetualização da unidade quando resolvem problemas que envolvem o significado "operador", como é o caso do aluno Cristiano que integrava o grupo estudo de caso. Relativamente a este significado, existem mais alunos na turma que revelam dificuldades, como se torna evidente pelos resultados obtidos no teste final, uma vez que além de não terem em conta a unidade de referência, também cometem erros no algoritmo.

Sistemas de referência

Relativamente ao uso de valores de referência de números racionais, os resultados estão de acordo com o que Clarke e Roche (2009) defendem, uma vez que os alunos recorrem a eles ao longo da EE com estratégia para: a) resolver questões de conversão entre representações; b) subdividir a barra/linha numérica; c) posicionar e estimarem posições de números racionais na barra/linha numérica; e d) comparar números racionais. Entre os valores de referência utilizados pelos alunos encontram-se, por exemplo, 25%, 50%, 75%, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e 0,5, que são utilizados para subdividir a barra (por exemplo, na questão dois da tarefa três) e para posicionar uma segunda fração, depois de a compararem com estes valores de referência (questão 2.3. da tarefa cinco) (Lamon, 2006) e também para converterem representações (tarefa seis). Verificou-se também que a fração $\frac{1}{8}$, depois da primeira tarefa, passou a ser um valor de referência para os alunos, nomeadamente quando a questão envolve a sua conversão noutra representação (questão um da tarefa oito). O recurso aos números de referência também se torna evidente no teste final dos alunos do grupo estudo de caso, uma vez que os utilizam para estimar somas (Dinorah – questão dez); para posicionar números na linha (Aida – questão três) e para comparar números racionais (Cristiano, Aida e Mariana – questão oito).

O recurso dos alunos aos números de referência, a fim de localizarem e posicionarem números racionais na barra/linha numérica, é uma estratégia que revela que estes compreendem a noção do tamanho das partes em que o todo se divide (Clarke, Mitchell & Roche, 2007). Esta compreensão torna-se também evidente pela capacidade que a maioria dos alunos da turma revela de subdividir a unidade em partes iguais para representar números racionais na barra/linha numérica. Contudo, alguns alunos, como o Cristiano, ainda manifestam alguma dificuldade a este respeito, pois não são rigorosos na divisão do modelo.

Ainda no âmbito dos sistemas de referência, os alunos podiam recorrer ao pensamento residual, no entanto, não há evidência de que o façam. Este é um aspeto que abordarei mais à frente na secção das estratégias (ponto 7.2.3.).

Densidade e valor de posição dos números

A densidade dos números racionais é uma noção que envolve a compreensão de que entre dois racionais existem muitos outros, sejam eles sob a forma de numeral decimal, de percentagem ou de fração. Quando se trabalha a densidade dos números racionais na sua representação fracionária é imprescindível que os alunos compreendam que existe uma relação entre o numerador e o denominador (Wheeldon, 2008), ou seja, os alunos têm de compreender que uma fração representa uma quantidade única e que não é um conjunto de dois números distintos. Na presente investigação, ao contrário, por exemplo, dos resultados do estudo de Martinie (2007) em que os alunos não revelam compreensão sobre a densidade dos números racionais, há evidências que os alunos compreendem esta noção. Apesar de na EE não terem sido propostas tarefas que abordassem explicitamente a densidade dos racionais, verificou-se que os alunos da turma quando são confrontados com a possibilidade da existência de outros números entre duas frações com o mesmo denominador e numeradores consecutivos (tarefa oito), reconhecem que isso é possível e que poderiam obter tal número realizando mais subdivisões da unidade. Um dos alunos do grupo, Cristiano, apresenta ainda uma alternativa a estas subdivisões, que é, a de utilizar outra representação, nomeadamente a percentagem, que as suas colegas de grupo reconhecem como sendo a estratégia mais fácil. O grupo reconhece que entre aquelas duas frações podem existir muitas percentagens.

Apesar da noção de densidade dos números racionais ter surgido pontualmente na EE, há evidência de que alguns alunos a compreenderam, nomeadamente Aida, pois recorreu a esta para justificar a sua resolução da questão três do teste final. É de salientar que o modo como esta noção da densidade surgiu na presente investigação, não condicionou os alunos ao uso de uma única representação. E de facto, ao contrário do que aconteceu, por exemplo, no estudo de Martinie (2007), não foi perguntado aos alunos "que fração pode estar entre estas duas frações", mas sim "que número pode estar entre estas duas frações", permitindo como referi que os alunos recorressem à representação que lhes fosse mais conveniente.

No âmbito do valor de posição dos números, é de referir que os alunos deste estudo também demonstram capacidade para representar números racionais na barra/linha numérica, o que, de acordo com Martinie (2007) pode facilitar os alunos na comparação de números racionais. Não é por tanto, surpreendente que a maioria dos alunos da turma consiga comparar e ordenar racionais, e consequentemente, segundo McIntosh et al. (1992), compreender o sentido de regularidade dos números. É de salientar ainda que, aquando da marcação de números racionais na barra/linha numérica, embora uns tenham pouco rigor nas divisões que fazem no modelo (Cristiano e Mariana), outros têm bastante rigor (Dinorah e Aida).

O obstáculo que se encontra no âmbito desta categoria de análise, é de facto a dificuldade dos alunos serem rigorosos, na divisão da unidade, quer no grupo estudo de caso, quer nos outros elementos da turma, o que, pontualmente, os conduziu a respostas incorretas.

Sintetizando, relativamente à questão "Que capacidades revelam os alunos relativamente à concetualização da unidade, ao uso de sistemas de referência e à densidade e valor de posição dos números?", surgem as seguintes respostas:

(1) A maioria dos alunos revela capacidade para interpretar (*unitizing*) e reorganizar (*reunitizing*) a unidade em situações que envolvem grandezas discretas e contínuas.

(2) Existem alunos que ainda têm algumas dificuldades na concetualização da unidade, quando está subjacente o significado “operador”.
(3) Os resultados no teste final evidenciam que a turma tem algumas dificuldades com o significado “operador”, devido a erros no algoritmo e por não terem em conta a unidade de referência.
(4) Os alunos revelam capacidade de reconstrução da unidade (*reversing*), em situações que envolvem grandezas discretas e contínuas.
(5) Os alunos utilizam os valores de referência 25%, 50%, 75%, $\frac{1}{2}$ e 0,5 para subdividirem a barra/linha numérica, compararem números racionais e posicionarem estes números na barra/linha numérica.
(6) Os alunos utilizam os valores de referência $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ para efetuarem conversões entre frações e outras representações.
(7) A maioria dos alunos revela capacidade para representar números racionais na barra/linha numérica, mas a falta de rigor na realização de divisões na barra/linha numérica, da parte de alguns alunos, pode revelar-se um obstáculo na resolução de tarefas matemáticas com estes números.
(8) Os alunos revelam capacidade para comparar e ordenar números racionais.
(9) Há evidência de que, em situações particulares, os alunos reconhecem a existência de números racionais entre duas frações.

7.2.2. Múltiplas representações e suas conexões

Inicialmente os conhecimentos que os alunos revelaram sobre as várias representações dos números racionais eram muito limitados, resumindo-se à noção de metade que representavam por 50% e $\frac{1}{2}$ e ao reconhecimento visual da fração um quarto que interpretavam como “a quarta parte de”, mas não sabiam fazer a leitura das frações (representação verbal), nem evidenciavam uma compreensão desta representação, tal como ficou evidente na primeira tarefa da EE.

Os resultados do teste inicial revelaram que para estes alunos não era aceitável que um número racional admitisse várias representações, nomeadamente a fração, o numeral decimal, os numerais mistos e a percentagem. No entanto, através de uma exploração simultânea com estas representações, desde a primeira tarefa da EE, rapidamente começaram a reconhecer que estas são formas equivalentes de exprimir a mesma quantidade. É de salientar que, além de Dinorah e Cristiano, a maioria dos restantes alunos da turma utiliza, no teste final, os numerais mistos para representar uma relação parte-todo maior que um, apresentada pictoricamente, revelando que compreendem que existem frações maiores que a unidade (Monteiro & Pinto, 2005). A contribuir para esta compreensão está a abordagem paralela das várias representações (incluindo as pictóricas) e consequentemente à conversão entre elas, ao longo da EE.

A análise global do trabalho dos alunos ao longo da EE evidencia que a sua compreensão das várias representações possíveis para um número racional vai mais além, na medida em que conseguem também estabelecer conexões entre elas (Lembke & Reys, 1994; ME, 2007; NCTM, 2007). No presente estudo, tal como no estudo de Panaoura et al. (2009), é notória não só a utilização das múltiplas representações dos números racionais, como também a flexibilidade que os alunos apresentam na conversão entre frações, numerais mistos, numerais decimais e percentagens, o que lhes permite resolver problemas de forma eficaz.

Esta flexibilidade manifesta-se, em particular, quando os alunos conseguem optar pela representação que lhes é mais favorável (fração, numeral decimal ou percentagem) em função de um determinado contexto (Markovits & Sowder, 1991), ou ainda quando combinam numa mesma resolução as várias representações dos números racionais. Segundo Elia et al. (2007) este é um processo complexo que só é conseguido se houver um bom entendimento da relação que existe entre as representações. Esta capacidade revela consequentemente que os alunos desenvolveram a sua compreensão do conceito de número racional (Duval, 2006; Lembke & Reys, 1994).

A destreza na conversão das várias representações é bastante evidente neste estudo por parte de toda a turma. Os resultados da presente investigação evidenciam que os alunos do grupo estudo de caso recorrem às várias representações consoante a situação com que se deparam, no entanto, é a percentagem aquela que é mais utilizada em situações de comparação, ordenação, densidade e adição. Estes resultados não vão ao encontro do estudo de Quaresma (2010) em que os alunos dão primazia ao uso dos numerais decimais (para comprar e ordenar números racionais sob a forma de fração) e a percentagem só é usada quando é explicitamente requerida, talvez pelo facto de a calculadora ter sido um recurso a que os alunos recorriam naturalmente. Na presente investigação, embora fosse permitida a utilização da calculadora, os alunos do grupo utilizaram-na muito pontualmente. Essa escassa utilização da calculadora dever-se-á ao facto de estes alunos compreenderem a existência de outras estratégias que podem utilizar na resolução das questões, sendo que a sua representação preferencial não é habitualmente a decimal. De facto, a calculadora pode condicionar as estratégias que os alunos seguem, levando-os a optar por aquelas que lhes permitem a utilização deste recurso e a concentração na representação que é mais habitual (Ainsworth, 2006; Cox & Brna, 1995).

Os alunos do grupo estudo de caso estabelecem conexões não somente entre as representações simbólicas (frações, numerais decimais, numerais mistos e percentagens) mas também entre estas e as representações verbais e pictóricas. Ou seja, conseguem utilizar uma representação verbal para designar oralmente qualquer representação simbólica e vice-versa e utilizam representações pictóricas às quais fazem corresponder representações simbólicas.

Apesar de os alunos evidenciarem uma propensão para usarem a percentagem na resolução das tarefas, é de salientar que esta tem subjacente uma grandeza relativa e esse aspeto não é compreendido por todos. De facto, colocar duas grandezas em relação é uma dificuldade para estes alunos, pelo que, inicialmente Cristiano não consegue reconhecer a grandeza relativa das percentagens, considerando que uma determinada percentagem vale sempre o mesmo, independentemente do valor da unidade em causa. Inicialmente, este aluno comete o erro da “regra do numerador” (Parker & Leinhardt, 1995), no entanto, com a realização das várias questões da tarefa onze, parece evoluir na sua compreensão de percentagem conseguindo resolver as questões seguintes de forma correta. No teste final o aluno revela um retrocesso, associando novamente uma percentagem a uma quantidade e não tendo em conta a unidade de referência. Estes retrocessos, que fazem parte do processo de aprendizagem (Simon, 1995), são também evidentes no estudo de Macieira (2011) mas merecem a atenção do professor. Esta dificuldade em estabelecer uma relação entre duas grandezas é também visível na resolução das questões que envolvem o significado “razão”. No entanto, este resultado poderá, de certa forma, ser explicado não só pelo facto de este significado comportar maior complexidade (Steffe & Olive, 2010) mas por lhe ter sido dada pouca ênfase visto ser um significado que faz parte dos conteúdos apenas do 6.º ano de escolaridade.

Finalmente ainda no âmbito das múltiplas representações, no que concerne à equivalência entre frações, os alunos não revelam dificuldade em identificar e determinar frações equivalentes, tendo conseguido, embora parcialmente, identificar a “regra” que lhes permite determinar frações equivalentes. Contudo, apenas recorrem às frações equivalentes se isso lhes for solicitado.

Deste modo, as conclusões apresentadas nesta secção justificam o pressuposto de que uma aprendizagem dos números racionais que preconize uma abordagem paralela das suas várias representações e encoraje os alunos a estabelecerem conexões entre elas (ME, 2007; NCTM, 2007) permite uma evolução na aprendizagem dos números racionais. Pois é notório que os alunos ficam a compreender que estes números se podem representar de várias formas e reconhecem que algumas delas são mais úteis que outras em determinadas situações, o que segundo Huinker (2002) e McIntosh et al. (1992) é um aspeto importante para o desenvolvimento matemático do aluno.

Resumindo, para dar resposta à questão “Que compreensão revelam os alunos relativamente às múltiplas representações de um número racional, em particular, que conexões estabelecem entre as várias representações?”, emergem as seguintes apreciações:

(1) Os alunos têm capacidade para representar números racionais pictórica e verbalmente.
(2) Os alunos reconhecem que os números racionais se podem representar por numerais mistos, frações, numerais decimais e percentagens.
(3) Alguns alunos demonstram preferência pelos numerais mistos para representar simbolicamente, quantidades superiores à unidade.
(4) Há evidências de que os alunos do grupo estudo de caso dão preferência ao uso das percentagens em várias situações que envolvem a comparação de números racionais ou até mesmo a densidade destes números.
(5) Muitos alunos evidenciam ter capacidade para estabelecer equivalência entre duas frações e encontrar frações equivalentes.
(6) Os alunos compreendem as conexões entre as diferentes representações de um número racional, conseguindo convertê-las umas nas outras.
(7) Os alunos revelam compreensão matemática relativamente aos números racionais uma vez que são capazes de utilizar e de alternar facilmente entre as suas diferentes representações (Putnam et al., 1990).
(8) A dificuldade em interpretarem um número racional como uma relação acaba por trazer implicações para a compreensão da percentagem, tal como acontece com Cristiano.
(9) Os alunos têm dificuldades com o significado "razão", uma vez que não estabelecem uma relação correta entre duas quantidades.

7.2.3. Estratégias usadas

A secção anterior evidencia que os alunos conseguem combinar as múltiplas representações de um número racional, o que, de acordo com Seufert (2003), pode favorecer o recurso a diferentes estratégias. Neste âmbito é importante salientar que apesar de os alunos trabalharem em grupo, verificou-se a existência de uma diversidade de estratégias/abordagens dentro do grupo estudo de caso. Essa situação permite, primeiro em pequeno grupo depois no grupo turma, um confronto de estratégias de resolução, sendo os alunos incentivados a argumentar de modo a explicarem o seu raciocínio. Este tipo de procedimento é um dos princípios da Matemática Realista, que defende que os alunos aprendem fazendo e que só o conseguem se o ensino promover a comparação e explicação das suas estratégias (Gravemeijer, 1994).

As estratégias a que os alunos recorrem foram, na sua maioria, estratégias flexíveis (Verschaffel et al., 2009), ou seja, combinam mais do que um tipo de estratégia e estas frequentemente envolvem a combinação de um modelo (barra/linha numérica) com símbolos (frações, numerais decimais e percentagens), o que de acordo com Keijzer (2003) é uma característica do processo de matematização, designado por simbolização. Esta emergência da simbolização, de acordo com Gravemeijer (1994), é também possível pelo facto de ter havido lugar a uma partilha comentada, discutida e refletida de estratégias.

Este resultado vai ao encontro de um dos pressupostos em que esta EE se baseou que é o assumir de que a descrição e explicação oral e por escrito das estratégias dos alunos e dos seus raciocínios, bem como os momentos de discussão e de reflexão conjunta, se tornam fundamentais na aprendizagem da matemática para desenvolver a capacidade de raciocínio e de comunicação, tal como preconiza o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007).

A capacidade de interpretar a unidade (*unitizing* e *reunitizing*) é notória nos alunos, quando estão perante questões que têm como objetivo determinar a parte de um todo ou representar números racionais na barra/linha numérica. Porém, estes modelos não são utilizados pelos alunos somente para a representação de números, tendo sido apropriados como uma ferramenta que os ajuda a resolver os problemas, nomeadamente quando têm de proceder à reconstrução da unidade (*reversing*), seja com grandezas discretas ou contínuas, ou quando a situação envolve o significado "operador" ou, por exemplo, o cálculo de percentagens.

Tal como nos importantes estudos de Post et al. (1992) e, mais recentemente a nível nacional os estudos de Macieira (2011) e Quaresma (2010), também na presente investigação, a manipulação de materiais, nomeadamente as tiras de papel (*modelo de*) da primeira tarefa, revelou-se de extrema importância para que os alunos conseguissem resolver problemas que envolvem os números racionais, fazendo um uso eficiente do modelo da barra/linha numérica como estratégia de resolução (*modelo para*). De acordo com a Educação Matemática Realista, os alunos partiram de um *modelo de* representação das suas interações com o objeto (Fosnot & Dolk, 2002), isto é, representações muito semelhantes às situações de contexto (tiras de papel para representar tabletes de chocolate), que, gradualmente se transformou num *modelo para* raciocinar matematicamente (van Galen et al., 2008). Ou seja, aquele que começou como *modelo de* uma situação na primeira tarefa proposta (van den Heuvel-Panhuizen, 2003), foi apropriado pelos alunos como uma ferramenta útil, evoluindo para um *modelo para* pensar, usando as várias representações dos números racionais. Estes resultados evidenciam uma matematização vertical, uma vez que houve uma reorganização no conhecimento dos alunos (Treffers – citado por van den Heuvel-Panhuizen, 2003) e corroboram o pressuposto de que a barra numérica é um modelo potenciador do desenvolvimento do conceito de número racional (van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Este modelo, de facto, potenciou uma evolução na aprendizagem dos alunos ao permitir que explorassem relações entre números e compreendessem as relações entre as várias representações dos números racionais (van Galen et al., 2008).

Apesar de o modelo da barra numérica ter sido usado de forma eficaz pelos alunos na resolução de diversas questões e de ter contribuído de forma positiva para a compreensão dos mesmos sobre o conceito de número racional, há algumas situações em que nos podemos interrogar se não pode conduzir os alunos a cometerem erros por má concetualização do mesmo, tal como parece ocorrer com a aluna Dinorah no teste final (questão oito). Contudo, a análise das resoluções da aluna nas restantes questões do teste e ao longo da EE, permite perceber que tal erro foi pontual, pois tanto em situações semelhantes como noutras mais complexas, a aluna utiliza a linha numérica de forma correta. Ainda assim é um aspeto que merece ser investigado e a que o professor deve estar atento e discutir com os alunos.

Para comparar e ordenar números racionais os alunos recorrem com frequência a estratégias simbólicas e/ou gráficas, convertendo os números racionais, habitualmente, em percentagens ou numerais decimais para depois os posicionarem sobre a barra numérica. No âmbito das estratégias simbólicas, os alunos recorrem várias vezes a números de referência para realizarem comparações, conversões ou para representarem números racionais na barra/linha numérica. O facto de os alunos serem capaz de generalizar os símbolos em vários contextos e de os interpretarem como números e não como objetos, evidencia que se encontram na fase da formalização (Keijzer, 2003).

Mais uma vez, os resultados reforçam que a integração da barra numérica nesta EE foi vantajosa para comparar números racionais, não levando os alunos a recorrerem a estratégias intuitivas informais do tipo *gap thinking* ou pensamento residual (Clarke & Roche, 2009; Cramer & Wyberg, 2009; Post & Cramer, 1987). Esta estratégia não é comum no ensino (Clarke & Roche, 2009), e durante a EE deste estudo também não foi explorada em sala de aula, não fazendo parte do leque de estratégias dos alunos. De facto, os únicos momentos em que esta surge, embora de forma muito rudimentar, é na resolução da aluna Mariana da questão cinco do teste inicial e num diálogo entre a investigadora e os alunos do grupo estudo de caso sobre a tarefa cinco.

Também a equivalência de frações pode ser vista como uma estratégia de resolução dos problemas, seja na comparação e ordenação de números racionais, seja na sua representação na barra/linha numérica. No entanto os alunos, apesar de conhecerem e saberem determinar frações equivalentes, não as utilizam como estratégia de resolução de problemas, o que em algumas situações lhes poderia facilitar o trabalho, nomeadamente na representação de números racionais sob a forma de fração (com denominadores diferentes) na barra/linha numérica. Nestas situações observou-se que os alunos tinham alguma dificuldade em recorrer às frações equivalentes para saberem quantas partições efetuavam na unidade. Deste modo marcavam as frações com os mesmos denominadores na barra, depois apagavam as marcações feitas e realizavam outras, para marcarem outras frações. De facto a equivalência de frações foi discutida nas aulas e compreendida pelos alunos, mas nunca como estratégia facilitadora da marcação de frações na barra/linha numérica. No entanto há que salientar que Mariana e Aida depois da EE, aquando da realização do teste final, recorrem às frações equivalentes como estratégia de resolução de algumas questões (três e oito, respetivamente).

No âmbito das estratégias gráficas, onde os alunos têm de recorrer à partição da unidade, observou-se várias formas de partição. Esta partição podia ter como objetivo a reconstrução da unidade, ou a representação de números racionais na barra/linha numérica. Para reconstruirem a unidade os alunos recorrem a um esquema da unidade fracionária partitiva – PUFS (Wilkins & Norton, 2011), onde fracionam a barra/linha numérica, descobrindo a parte unitária para depois a iterarem, com vista à reconstrução do todo. Esta estratégia seguida pelos alunos revela um bom conhecimento das frações (Olive & Steffe, 2002; Steffe, 2002; Tzur, 1999). Este aspeto justifica-se, uma vez mais, pela ênfase que foi atribuída, no início da EE, ao uso de um modelo físico da tira de papel, assim como a escolha de diversas tarefas que incentivavam o uso do modelo da barra numérica, aspeto fundamental que levou os alunos a desenvolver um modelo para raciocinarem com os números racionais em várias situações. Para representarem números racionais na barra/linha numérica os alunos seguem duas estratégias apontadas por Yanik et al. (2008): "metades sucessivas de toda a barra numérica" e "metades sucessivas de partes" da barra numérica. Aquando da EE, os alunos do grupo estudo de caso, utilizam ambas as estratégias na mesma tarefa (tarefa cinco), embora utilizem cada uma delas em questões diferentes. Já no teste final (questão três), verifica-se que Aida e Mariana recorrem às "metades sucessivas de todo o modelo" para efetuarem divisões no mesmo.

A noção de partição parece estar bem consolidada nos alunos, notando-se uma evolução positiva ao longo do tempo, pois deixam de utilizar a partição designada por "distribuição" e passam a utilizar uma outra mais sofisticada, designada por "peças preservadas", baseada na partição e corte (Lamon, 1996). Apesar de compreenderem a noção de partição, tão importante para a compreensão do significado "medida" (Lamon, 2006; Martinie, 2007), alguns alunos, nomeadamente Cristiano, fruto do seu pouco rigor na partição da unidade, revelam alguma dificuldade na resolução das questões que envolvem este significado.

Conclui-se ainda que, ao longo da resolução das tarefas da EE, os alunos revelam flexibilidade com vários métodos, o que de acordo com McInstosh et al. (1992) é um dos aspetos importantes no desenvolvimento do sentido de número. Estes alunos recorrem ao cálculo mental, ao papel e lápis e à calculadora, embora esta última muito pontualmente. Além disso, estes alunos não só reconhecem várias estratégias para resolver as questões, como em algumas situações conseguem identificar as que são mais produtivas, ou seja, as que são menos morosas, revelando capacidade de adaptabilidade (Verschaffel et al., 2009). Um exemplo disso é a chamada de atenção por parte da aluna Mariana ao grupo da existência de uma estratégia mais rápida e menos trabalhosa aquando da resolução da primeira questão da tarefa onze.

De acordo com a literatura, a compreensão dos vários significados dos números racionais, assim como as conexões entre as suas representações, permitem o desenvolvimento do conceito de número racional (Behr, Post, Silver & Mierkiewicz, 1980; Behr & Post, 1992; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006). Deste modo, e corroborando o que a literatura defende, é expectável que os alunos do grupo estudo de caso tenham desenvolvido o conceito de número racional durante a EE.

As ideias apresentadas nesta secção permitem responder à questão "Que estratégias utilizam os alunos na resolução de tarefas com os vários significados dos números racionais?", e podem ser sintetizadas da seguinte forma:

(1) As estratégias utilizadas pelos alunos são diversificadas, tendo sido identificados procedimentos de cálculo, estratégias simbólicas, gráficas e flexíveis.

(2) O recurso a números de referência é uma estratégia que os alunos utilizam para estimar somas (Dinorah), para posicionar números na linha numérica (Aida), para comparar números racionais (Cristiano, Aida e Mariana), bem como para fazerem conversões entre as representações dos números racionais.

(3) Os alunos revelam capacidade para alternar entre diferentes estratégias (flexibilidade) e capacidade de optarem pela estratégia que lhes é mais cómoda (adaptabilidade) – (Verschaffel et al., 2009).

(4) O uso do modelo da barra numérica é uma estratégia muito frequente e a que recorrem autonomamente para resolver tarefas que envolvam os significados "medida", "operador", "quociente" e "parte-todo".

(5) Ao longo da EE os alunos recorrem a vários métodos de resolução, sendo o uso da calculadora o menos frequente.

(6) Os alunos recorrem a estratégias de partição com graus de sofisticação diferentes, tendo estas evoluído: a estratégia da distribuição (Lamon, 1996), seguida inicialmente pela maioria dos alunos, dá lugar a uma partição mais sofisticada, a de peças preservadas (Lamon, 1996).

(7) As duas estratégias a que os alunos recorrem para efetuar divisões na barra/linha numérica são conhecidas como "metades sucessivas de toda a barra numérica" e como "fazer metades sucessivas de partes" da barra numérica (Yanik et al., 2008).

7.2.4. Potencialidades da sequência de tarefas

A análise das resoluções dos alunos das tarefas da EE permite concluir que estes evidenciam compreender noções como a concetualização da unidade, partição, equivalência e valor de posição, que Martinie (2007), Ni e Zhou (2005) e Wheeldon (2008), consideram fundamentais para a compreensão dos vários significados dos números racionais. Consequentemente, a compreensão destes significados e das conexões entre as suas representações, permitem o desenvolvimento do conceito de número racional (Behr, Post, Silver & Mierkiewicz, 1980; Behr & Post, 1992; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006). Os alunos dão muitas evidências de compreender vários aspetos fundamentais do conceito de número racional, que inicialmente não compreendiam, e que são essenciais para que o consigam desenvolver e relacionar com outros conceitos matemáticos.

Os resultados desta EE decorrem do modo com os alunos trabalharam, em sala de aula, o conceito de número racional: usando vários contextos significativos para os mesmos (Ball, 1993), que permitem a conexão entre as situações do dia-a-dia e a sala de aula (Yang, 2003), envolvendo os seus significados e representações e apoiando-se fortemente no modelo da barra numérica. Deste modo, como os alunos trabalharam tarefas que os encorajaram a utilizar as várias representações de um número racional e lhes deram autonomia para optarem por aquela com que se sentem mais à vontade, passaram a utilizar flexivelmente frações, percentagens e numerais decimais para representar a mesma quantidade, escolhendo aquela que lhes é mais favorável num determinado contexto (Sweeney & Quinn, 2000).

Esta evolução na aprendizagem dos alunos parece também decorrer do facto de a EE se ter iniciado com o significado quociente, associado a uma situação de partilha equitativa, por ser o que faz mais sentido para os alunos, tal como defendem diversos autores (Lamon, 2007; Mamede, 2007; Mamede & Oliveira, 2011; Steffe & Olive, 2010). Este significado foi introduzido com uma tarefa simples, que se revelou de extrema importância, porque permitiu trabalhar diversos aspetos do conceito de número racional que apoiaram os alunos na realização das tarefas seguintes em que surgiram os restantes significados destes números, o que vem reforçar a pertinência da recomendação do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), de que o ensino dos números racionais deve partir de tarefas simples (partilha equitativa) e ir, progressivamente, abarcando os vários significados dos números racionais.

Pelo facto de a EE se ter iniciado com o significado quociente, os alunos poderiam ter dificuldade em transferir os seus conhecimentos para o significado parte-todo (Lamon, 2006; Mamede, 2007), no entanto, isso não se verificou neste estudo. Para tal terá contribuído a exploração minuciosa que a professora Inês fez no grupo turma, da primeira tarefa, ao fazer um paralelismo entre o significado quociente e parte-todo. Naturalmente que a exploração que a professora Inês fez das tarefas e o modo como os alunos trabalharam na sala de aula, são aspetos que terão contribuído para uma aprendizagem bem-sucedida.

Estes resultados permitem tecer algumas considerações acerca das potencialidades da sequência de tarefas da EE, nomeadamente da importância do contexto que estas retratam e do papel que é atribuído aos modelos. Sendo o modelo da barra uma extensão das tiras de papel utilizadas na primeira tarefa, os alunos utilizam este recurso em situações mais complexas (Middleton et al., 1998), nomeadamente para resolver questões que envolvam o significado "operador" (cálculo de percentagens), "medida" ou a reconstrução da unidade. Sempre que os alunos recorrem aos modelos da barra/linha numérica, é notória a utilização das várias representações dos números racionais de forma flexível onde é também evidente o reconhecimento da relação entre as respetivas unidades.

Estes resultados apontam no sentido do que van Galen et al. (2008) advogam como sendo o papel do raciocínio numérico a partir da barra numérica, ou seja, o reforço da compreensão das relações entre as várias representações dos números racionais. Para tal terá também contribuído a forma natural como este modelo foi apresentado aos alunos num problema simples (primeira tarefa) e de, posteriormente, todas as tarefas proporcionarem o recurso a este modelo, que em diversas situações emergia do contexto proposto, embora sem ser imposto.

A contextualização de todas as tarefas foi um aspeto muito importante desta EE, uma vez que, seguindo as perspetivas da Matemática Realista, um determinado problema só é bem resolvido pelos alunos, se tiver sentido para os mesmos (van Galen et al., 2008). Deste modo, através de tarefas contextualizadas, tal como aconteceu no estudo de Mendes (2012), os alunos puderam recorrer a estratégias que lhes eram mais familiares e com que se sentiam mais confiantes. Um exemplo disso encontra-se na tarefa seis, onde uma das alunas do grupo estudo de caso (Aida), sugere ao grupo que comecem a tentar resolver a tarefa pela questão em que surge o mesmo número de elementos que o seu grupo, o que os ajuda a interpretar e modelar a situação. Também o diálogo que surge na tarefa cinco, quando as colegas do grupo explicam a Cristiano a estratégia que pensam seguir, evidencia a importância dos contextos das tarefas, uma vez que este aluno só se sente mais confiante quando é esclarecido que a questão em causa e que o modelo utilizado (barra numérica), retrata uma situação da vida real.

Outro aspeto a destacar como tendo tido um impacto importante no desenvolvimento do conceito de número racional pelos alunos foi o trabalho paralelo que foi realizado ao longo da EE com as várias representações dos números racionais. A capacidade de selecionar determinada representação dos números racionais ou de adotar certa estratégia, em função da situação com que se deparam, evidencia que os alunos têm flexibilidade na resolução das questões propostas (Ainsworth, 1999). Tal capacidade decorrerá não só das opções que foram tomadas na elaboração das tarefas mas também de um ambiente da sala de aula em que a professora deu liberdade aos alunos para seguirem as suas estratégias e proporcionou momentos de discussão e reflexão. Deste modo, o leque de estratégias de cada aluno foi sendo ampliado e estes puderam aperceber-se das diferentes conexões que poderiam estabelecer entre representações e das que poderiam escolher em cada situação.

Além disso, a preferência que os alunos do grupo estudo de caso manifestam pelo uso das percentagens, parece estar relacionada com o trabalho paralelo que foi realizado ao longo de todas as tarefas com as várias representações dos números racionais. Esta preferência deve-se também ao facto de este tipo de representação ser aquele que lhes permite comparar números racionais de forma mais rápida. Contudo alguns alunos, como é o caso do Cristiano, ainda evidenciam alguma dificuldade com esta representação, no que diz respeito a interpretá-la como uma relação que depende do valor da unidade. A justificação pode estar no pouco investimento que se colocou neste aspeto, uma vez que ao longo da EE existe somente uma tarefa (11) direcionada para o cálculo de percentagens.

Não foi somente um trabalho paralelo com as representações simbólicas que fizeram a diferença, há que salientar que também as representações pictóricas estiveram presentes nesta EE desde o teste inicial, e foram relevantes na medida em que proporcionaram aos alunos a conexão entre estas e as representações simbólicas, promovendo a compreensão dos números racionais (Lima et al., 2012).

Os resultados apresentados e as conclusões obtidas decorrem do modo como os alunos trabalharam, em sala de aula, o conceito de número racional, suportando a ideia de que uma abordagem paralela das várias representações dos números racionais, que percorra os seus vários significados, apoiando-se fortemente no modelo da barra, é promotora de uma evolução na aprendizagem dos números racionais.

A ênfase que foi atribuída, no início da EE ao uso de um modelo físico, assim como a escolha de contextos para as tarefas que incentivavam o uso do modelo da barra numérica, foram escolhas fundamentais para levar os alunos a desenvolver um modelo para raciocinar com os números racionais em várias situações pelo que a aprendizagem dos alunos foi realizada com compreensão (van Galen et al., 2008). Os resultados desta investigação e de outros estudos (Martins, 2007; Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011; Mestre & Oliveira, 2012; Moss, 2005; Ponte & Quaresma, 2011a, 2011b; Tarp, 2012) apoiam a perspetiva de um ensino que preconiza uma abordagem paralela às várias representações dos números racionais, incluindo a sua representação pictórica, bem como o estabelecimento de conexões entre elas. Estes aspetos também mencionados pelo NCTM (2007) e pelo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) têm grandes potencialidades na compreensão do conceito de número racional e favorecem a flexibilidade dos alunos na resolução das situações com que se confrontam (Ainsworth, 1999).

Os resultados desta EE permitiram sem dúvida ter mais conhecimento sobre as potencialidades de um determinado ambiente de aprendizagem inovador (Baumgartner et al., 2003; Gravemeijer & Cobb, 2006). Contudo, a mesma tem algumas limitações e tendo em conta que um dos objetivos de um estudo realizado no âmbito de uma EE é melhorar a prática (Collins et al., 2004; Edelson, 2002), há que identificar essas limitações e sugerir alterações. Por exemplo, durante a EE, houve aspetos como a densidade dos números racionais, o cálculo de percentagens e o significado "razão", aos quais não foi dada a devida ênfase, e onde os alunos apresentam algumas dificuldades, pelo que haveria necessidade de repensar a sequência de tarefas de modo a aprofundar esses tópicos.

As alterações programáticas que entretanto se operaram no 1.º ciclo neste tema dos números racionais (ME, 2007) obrigariam também a repensar a EE. Efetivamente no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) é preconizado para esse ciclo, por exemplo, o trabalho com os números racionais nos significados quociente, parte-todo e operador e a localização e posicionamento de números racionais não negativos na reta, incluindo algumas frações próprias. Consequentemente, algumas das tarefas da EE poderiam ser ajustadas ou substituídas por outras que incidissem mais extensivamente sobre os outros dois significados (razão e medida) e na percentagem, a representação que menos atenção recebeu no 1.º ciclo, o que vem ao encontro dos aspetos que emergiram, neste estudo, como carecendo de maior atenção. No entanto, o maior desafio para repensar uma futura implementação da EE será procurar trabalhar de uma forma integrada as várias representações de um número racional e as operações neste conjunto numérico.

Deste modo e sintetizando, à questão "Quais as potencialidades da sequência de tarefas propostas na evolução da aprendizagem dos números racionais, em particular no que diz respeito ao papel atribuído aos modelos?", responde-se o seguinte:

(1) O contexto familiar em que cada tarefa surge possibilita aos alunos uma ligação com a sua realidade, permitindo-lhes uma interpretação pessoal da tarefa e uma consequente resolução consciente da mesma e não a mecanização de algoritmos e regras.

(2) O contexto familiar das tarefas e uma abordagem paralela das representações dos números racionais permitiu que os alunos aprofundassem a compreensão e evoluíssem na aprendizagem destes números, e na sua capacidade de raciocinar com as suas várias representações, à semelhança do que aconteceu no estudo de Cai e Wang (2006).

(3) Os alunos apropriaram-se do modelo da barra numérica, que representou no início uma situação concreta, como uma ferramenta útil, evoluindo para um

modelo para pensar (*modelo para*), através do qual fazem uso das várias representações dos números racionais.

(4) Os alunos recorrem ao modelo da barra numérica como estratégia para comparar números racionais, para reconstruir a unidade e para resolver tarefas que envolvem o significado "medida" e "operador".

(5) O modelo da barra numérica é utilizado pelos alunos no cálculo de percentagens, e também como estratégia para ultrapassar as dificuldades que residem na noção de relação que está subjacente às percentagens.

(6) O recurso ao modelo da barra numérica como estratégia de resolução das tarefas decorre da ênfase que foi atribuída, no início da EE, ao uso de um modelo físico, assim como da escolha de contextos para as tarefas que incentivaram o uso deste modelo.

7.3. Reflexão final

Ao terminar esta investigação e olhando para todo o percurso efetuado, considero importante refletir não só sobre a importância do trabalho desenvolvido e das suas limitações, como também sobre os desafios que tive de ultrapassar.

Considero que o trabalho desenvolvido foi produtivo na medida em que quando este estudo se iniciou apoiei-me nos resultados de diversos estudos e das orientações do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) mas que deixavam uma larga margem para pensar como estruturar uma sequência de tarefas que ajudasse alunos a desenvolver uma compreensão do conceito de número racional nas suas várias representações, em situações envolvendo os seus vários significados. Efetivamente, a conjetura de ensino e aprendizagem que foi assumida veio a revelar ter muitas potencialidades, não só na sua dimensão de conteúdo, como também na sua dimensão pedagógica. De facto, uma abordagem paralela das várias representações dos números racionais, apelando às conexões entre elas (ME, 2007; NCTM, 2007); que permita o uso de modelos (van den Heuvel-Panhuizen, 2003; van Galen et al., 2008); um trabalho em torno dos vários significados dos números racionais (ME, 2007) e dos diferentes tipos de grandezas (Lamon, 2006), em contextos familiares para os alunos (Ball, 1993), é promotora do desenvolvimento da compreensão do conceito de número racional (dimensão de conteúdo). A contribuir para este desenvolvimento também esteve o modo como a professora Inês dirigiu as discussões em sala de aula (dimensão pedagógica). Seguindo um dos princípios da Matemática Realista, a professora Inês permitiu sempre um confronto de estratégias de resolução, incentivando os alunos a argumentar e a explicar os seus raciocínios (Gravemeijer, 1994) e tentou sequenciar as respostas dos alunos apresentadas à turma (por exemplo da mais simples à mais complexa), tendo sempre relacionado as diferentes respostas de modo a fazer um paralelo com as ideias matemáticas fundamentais (Smith et al., 2009; Stein et al., 2008).

Além disso, o planeamento e realização da EE contribuiu muito significativamente para o meu aperfeiçoamento profissional, favorecendo uma tomada de decisões mais consciente aquando da planificação das aulas e uma análise mais profunda das estratégias, dificuldades e erros dos alunos no âmbito da aprendizagem dos números racionais. Fez-me reconhecer a importância de o professor analisar e refletir retrospetivamente sobre as aprendizagens dos alunos e de estabelecer pontes entre a teoria e a prática, o que certamente contribuirá para as aprendizagens dos alunos.

No entanto, nesta caminhada enfrentei também diversos desafios. Um dos principais foi a elaboração de tarefas que se ajustassem ao percurso que pretendia que os alunos seguissem. Inicialmente procurei seguir a brochura de materiais de apoio ao professor (Menezes et al., 2008), adaptando as tarefas e criando-lhes um contexto comum de modo a poder encadeá-las. Contudo esta opção não se mostrou adequada, pelo que decidi adaptar apenas duas tarefas deste documento e criar todas as outras, embora mantendo alguma sintonia com a referida brochura. Mas não foi somente a criação das tarefas que constituiu um desafio. O período em que eu e a professora Inês passámos a analisá-las depois de serem implementadas para preparar as tarefas seguintes foi prolongado e exigente. Além disso, o tempo disponível para realizar este trabalho acabava por ser reduzido, o que foi outro desafio com que me debati. No entanto, a discussão das tarefas revelou-se indispensável para que a sequência tivesse coerência.

Outra situação que foi bastante desafiante e difícil foi a construção do quadro das categorias de análise (Quando 9). A elaboração deste quadro partiu do modelo de McIntosh et al. (1992), mas surgiu a necessidade de o adaptar à especificidade dos números racionais e ao tipo de situações que foram propostas nestas aulas. Assim, as várias categorias foram criadas através de uma adaptação de outros estudos (Mendes, 2012; Pinto, 2011) e a sua aplicação à análise dos dados recolhidos foi sugerindo ajustes e reformulações, até atingir uma estabilidade aceitável. No entanto, após as suas categorias estarem definidas, surgiu outro desafio: a sua disposição no quadro. Este passou também por diversos formatos de forma a garantir que a organização da análise dos dados não se tornasse confusa nem repetitiva, uma vez que existe uma forte relação entre as diversas categorias.

Apesar de todos os obstáculos e desafios que esta investigação teve, ela desenrolou-se de forma bastante satisfatória e sem percalços. Para tal muito contribuiu o empenhamento e a experiência profissional da professora Inês. Olhando de forma retrospetiva para a opção de realizar a EE numa turma de outra professora, ao invés de realizar um estudo na minha própria prática, verifico que esta foi sem dúvida vantajosa, pois a partilha de conhecimento e a discussão de ideias, enriqueceu muito todo este trabalho, assim como a minha prática profissional.

No entanto, apesar dos resultados francamente positivos a que esta EE nos conduziu, esta teve as suas limitações e estas não podem deixar de ser referidas. Deste modo, devo referir que uma das limitações desta EE foi o facto de o seu tempo de concretização não corresponder ao previsto inicialmente, uma vez que estes alunos não tinham abordado os números racionais no primeiro ciclo, de acordo com as orientações curriculares (ME, 2007). Assim sendo, o tempo de realização da primeira tarefa foi mais do dobro do que estava planeado inicialmente, ainda assim, esta revelou-se de extrema importância na aquisição de inúmeras noções, tendo sido um apoio fundamental para a resolução das tarefas seguintes.

Relativamente às limitações em termos de conteúdos, penso que teria sido benéfico para uma análise de dados mais produtiva, a existência, tanto no teste inicial como no teste final, de questões que abordassem diretamente a noção de densidade dos números, a reconstrução da unidade e que permitissem recolher dados mais concretos sobre a concetualização da unidade. Além disso, também teria sido vantajoso a existência de uma tarefa mais direcionada para a noção da densidade dos números racionais, uma vez que este assunto emergiu num problema que inicialmente não fora construído com esse propósito. Por esse motivo, tal como já foi referido, a recolha de informação neste tópico foi limitada e consequentemente a análise desta categoria não foi aprofundada.

A terminar, reforço a minha convicção que os resultados deste e de outros estudos nacionais, que foram realizados com base nas orientações programáticas então vigentes (ME, 2007), evidenciavam que estava a ser traçado um percurso com coerência e resultados francamente positivos e favoráveis à aprendizagem dos números racionais por parte dos alunos. Contudo, apesar das potencialidades das apostas realizadas, estas ainda não estão devidamente aprofundadas, pelo que necessitam de mais investigação. Deste modo, é com grande preocupação que assisto ao surgimento de um novo Programa de Matemática (ME, 2013), que não apresenta perspetivas compatíveis com o programa anterior (ME, 2007) nem com a EE aqui descrita. Nomeadamente, no âmbito dos números racionais, em linhas muito gerais, não menciona que os alunos devem trabalhar os cinco significados destes números, nem que deve ser realizada uma abordagem paralela das suas várias representações. Do meu ponto de vista as opções que este programa apresenta (ME, 2013) são ambíguas, não levando em conta a investigação realizada, quer a nível nacional, quer a nível internacional. Verifico, portanto, que muito ainda há para aprender neste domínio no nosso país.

REFERÊNCIAS

Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica: Reflexão participada sobre os currículos do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – Departamento da Educação Básica.

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education, 33*, 131-152.

Ainsworth, S. (2006). DeFT: a conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16(3)*, 183–198. Obtido em 14 de agosto de 2009, de http://www. psychology.nottingham.ac.uk/staff/sea/deft.pdf

Amaral, H. M. R. P. (2003). *Atividades investigativas na aprendizagem da matemática no 1.º Ciclo* – Dissertação de Mestrado. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Anderson, T & Shattuck, J. (2012). Design-Based research: a decade of progress in education research? *Educational Researcher, 41(1)*, 16-25.

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: constructing and using representational contexts in teaching fractions. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.). *Rational Numbers: an Integration of Research* (pp. 157-95). Hillsdale. NJ: Erlbaum Associates.

Barab, S., Squire, B. (2004). Design-based research: putting a stake in the ground. *Journal of the Learning Sciences, 13(1)*, 1-14. Obtido em 10 de agosto de 2012, de http://learnlab.org/research/ wiki/images/a/ab/ 2004_Barab_Squire.pdf

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S. & Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 217-241.

Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics, 2* (pp. 95-102). Bergen: Norway.

Baumgartner, E., Bell, P., Brophy, S., Hoadley, C., Hsi, S., Joseph, D., Orrill, C., Puntambekar, S., Sandoval, W. & Tabak, I. (2003). Design-based research: an emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher, 32(1)*, 5-8.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). New York, NY: Macmillan.

Behr, M., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1993). Rational numbers: toward a semantic analysis – emphasis on the operator construct. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.). *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 13-47). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). New York, NY: Academic Press.

Behr, M. & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post (2.ª Eds.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (pp. 201-248). Boston: Allyn and Bacon.

Behr, M., Post, T. & Lesh R. (1981). Construct analysis, manipulative aids, representational systems and the learning of rational numbers. *Proceedings of the Fifth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 203-209. Grenoble, France: PME.

Behr, M., Post, T., Silver, E. & Mierkiewicz, D. (1980). Theoretical foundations for instructional research on rational numbers. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of Fourth Annual Conference of International Group for Psychology of Mathematics Education* (pp. 60-67). Berkeley, CA: Lawrence Hall of Science.

Behr, M., Wachsmuth, I. & Post, T. (1985). Construct a sum: a measure of children's understanding of fraction size. *Journal for Research in Mathematics Education, 16(2)*, 120-131.

Behr, M., J., Wachsmuth, I., Post, T. R. & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: a clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15(5)*, 323-341.

Bereiter, C. (2002). Design research for sustained innovation. *Cognitive Studies, Bulletin of the Japanese Cognitive Science Society, 9(3)*, 321-327. Obtido em 4 de agosto de 2012, de http://ikit.org/ fulltext/2002 Design_Research.pdf

Beishuizen, M. (1997). Mental arithmetic: recall or mental strategies? *Mathematics Teaching, 160*, 16-19.

Bezuk, N. & Cramer, K. (1989). Teaching about fractions: what, when, and how? In P. Trafton (Ed.), *National Council of Teachers of Mathematics 1989 Yearbook: New Directions For Elementary School Mathematics* (pp. 156-167). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos (2.ª ed.)*. Porto: Porto Editora.

Boavida, A. M. R. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração* – Tese de Doutoramento em Educação Matemática. Lisboa: FCUL.

Boavida, A. M. & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: potencialidades e problemas. In GTI (Ed.), *Refletir e Investigar sobre a Prática Profissional* (pp. 43-55). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Grupo de Trabalho de Investigação.

Bright, G., Behr, M., Post, T. & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education, 19(3)*, 215-232.

Brocardo, J., Serrazina, L. & Kraemer, J.M. (2003). Algoritmos e sentido do número. *Educação e Matemática*, *75*, 11-15.

Brocardo, J., Serrazina, L. & Rocha, I. (2008). *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (1.ª ed.). Lisboa: Escolar Editora.

Cardoso, P. & Mamede, E. (2009). Ensinar frações – o efeito das interpretações de fração na construção do conceito. *Números e Estatística – Ata do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática* (CD-ROM). Vila Real.

Cardoso, P. & Mamede, E. (2011). O conhecimento dos significados de fração de professores do 1.º ciclo do ensino básico. *Atas do XXII SIEM: Seminário de Investigação em Educação Matemática* (PEN). Lisboa: APM.

Carvalho, A. M. S. (2005). *O desenvolvimento do conceito de número racional em alunos do 4º ano de escolaridade* – Tese de Mestrado em Educação Matemática. Lisboa: FCUL.

Cai, J. & Wang, T. (2006). U.S. and Chinese teacher's conceptions and constructions of representations: a case of teaching ratio concept. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*, 145-186.

Carney, R. N. & Levin, J. R. (2002). Pictorial illustrations still improve students' learning from text. *Educational Psychology Review, 14(1)*, 5-26.

Charalambous C. Y. & Pitta-Pantazi D. (2005). Revisiting a theoretical model on fractions: implications for teaching and research. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2* (pp. 233-240). Melbourne, Australia: PME.

Charalambous C. Y. & Pitta-Pantazi D. (2006). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions*. Educational Studies in Mathematics, 64(3)*, 293-316.

Charles, K. & Nason, R. (2000). Young children's partitioning strategies. *Educational Studies in Mathematics, 43(2)*, 191–221.

Christou, C. & Papageorgiou, E. (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction, 17(1)*, 55–66.

Cifarelli, V. V. (1998). The development of mental representations as a problem solving activity. *Journal of Mathematical Behavior, 17(2)*, 239-264.

Clarke, C. B., Fisher, W., Marks, R. & Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers for teaching mathematics in grade 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clarke, D. M., Mitchell A. & Roche, A. (2007). Year six fraction understanding: a part of the whole story. *Mathematics: Essential Research, Essential Practice*, *1,* 207-216.

Clarke, D. M. & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 127–138.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6(2)*, 81-89.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32(1)*, 9-13.

Cob, P. & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to suport and understand learning processes. In A. E. Kelly, R. A. Lesh & J. Y. Baek (Eds), *Handbook of Design Research Methods in Education – Innovations in Science, Technology, Engineering, and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Madison Ave, NY: Routledge.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K. & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences, 10(1)*, 113-163.

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*, 12-33.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, pp. 135-152. Cambridge: Cambridge University Press.

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Spliting, covariation and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26(1)*, 66-86.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2000). *Research methods in education.* London and New York: Routledge/Falmer.

Cole, R., Purao, S., Rossi, M. & Sein, M., K. (2005). *Being proactive: where action research meets design research.* Paper presented at the Proceedings of the Twenty Sixth International Conference on Information Systems.

Collins, A., Joseph, D. & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences, 13(1)*, 15-42.

Cox, R. & Brna, P. (1995). Supporting the use of external representations in problem solving: The need for flexible learning environments. *Journal of Artificial Intelligence in Education, 6(2/3)*, 239-302.

Cramer, K. A., Post, T. R. & delMas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth and fifth-grade students: a comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the Rational Number Project Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education. 33(2)*, 111-144.

Cramer, K. A., Wyberg, T. (2009). Efficacy of different concrete models for teaching the part-whole construct for fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 226–257.

Creswell, J. W. (2003). *Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (2.ª ed.). London: Sage Publications.

Cruz, M. S. & Spinillo, A. G. (2004). Resolvendo adição de frações através do simbolismo matemático e através de âncoras. *Quadrante, 2(13)*, 3-29.

David, M. M. & Machado, M. P. (1996). Como alguns procedimentos de ensino estão contribuindo para o erro e o fracasso em Matemática. *Educação e Matemática, 40*, 25-29.

Davis, B. & Simmt, E. (2003). Understanding learning systems: Mathematics education and complexity science. *Journal for Research in Mathematics Education, 34(2)*, 137–167.

Deliyianni, E., Panaoura, A., Elia, I. & Gagatsis, A. (2008). A structural model for fraction understanding related to representations and problem solving. In O. Figueras & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2* (pp. 399-406). Morelia, México: PME.

DeWindt-King, A. M. & Goldin, G. A. (2003). Children's visual imagery: aspects of cognitive representation in solving problems with fractions. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 2(1)*, 1-42.

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (1998). Introduction – the discipline and practice of qualitative research. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Edits.), *Collecting and interpreting qualitative materials* (pp. 1-43). USA: Sage Publications.

Diezmann, C. M. & Lowrie, T. (2006). Primary students' knowledge of and errors on number lines. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.). *Proceedings of the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 1* (pp. 171-178). Sydney: MERGA.

Diezmann C. & Lowrie T. (2007). The development of primary students' knowledge of the structured number line. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2* (pp. 201-208). Seoul: PME.

diSessa, A. & Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *Journal of the Learning Sciences, 13(1)*, 77-103.

Doritou, M. & Gray, E. (2007). The number line as metaphor of the number system – a case study of a primary school. *Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 111-120). Larnaca, Cyprus: CERME 5.

Doritou, M. & Gray, E. (2009). The number line and its demonstration for arithmetic operations. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics, 2* (pp. 457-464). Thessaloniki, Greece: PME.

Dullius, M., M.; Furlanetto, V. & Quartieri, M., T. (2009). *Tipos de erros cometidos pelos estudantes em uma prova de Olimpíada Matemática.* Brasil: Centro Universitário UNIVATES.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Edelson, D. C. (2002). Design Research: What we learn when we engage in design. *Journal of the Learning Sciences*, *11(1)*, 105-121. Obtido em 20 de agosto de 2012, de http://www.cs.uic.edu/ ~i523/edelson.pdf

Eisenhart, M. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*, 99-114.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A. & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *5*, 533-556.

Empson, S. B. (1999). Equal sharing and shared meaning: the development of fraction concepts in a first grade classroom. *Cognition and Instruction*, *17(3)*, 283-342.

English, L. D. (2003). Reconciling theory, research, and practice: a models and moddeling perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *54(2-3)*, 225-248.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior*, *17(1)*, 105-121.

Evertson, C. & Green, J. (1986). Observation as inquiry and method. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 162-213). New York: MacMillan.

Flores, A. (2002). Profound understanding of division of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Org.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 237-246). Reston, VA: NCTM.

Fontana, A. & Frey, J. (2000). The interview: from structured questions to negotiated text. In Norman Denzin & Yvonna. Lincoln (2.ª ed.), *Handbook of qualitative research* (pp. 645-672). Thousand Oaks: SAGE.

Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2001a). *Young mathematicians at work: constructing number sense, addition, and subtraction* (1.ª ed.). Portsmouth: Heinemann.

Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2001b). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division* (1.ª ed.). Postsmouth: Heinemann.

Fosnot, C. & Dolk. M. (2002). *Young mathematician at work: constructing fractions, decimals and percents.* Portswouth NH: Hiemann.

Fosnot, C. T. (2007). *Field trips and fund-raisers – Introducing fractions.* Orlando: Harcourt School Publishers.

Freebody, P. (2003). *Qualitative research in education* (1.ª ed.). London: Sage Publications.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecth: Kluwer Academic Publishers.

Fuson, K. (1984). More complexities in subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15(3)*, 214-225.

Garcia, C. M. B. (2008). *A multiplicação de números racionais: um estudo com alunos do 6º ano*. (Tese de Mestrado em Educação – Didática da Matemática). Lisboa: Faculdade de Ciências.

Graeber, A. O. & Tirosh, D. (1990). Insights fourth and fifth grades bring to multiplication and division with decimals. *Educational Studies in Mathematics*, *21(6)*, 565–588.

Gagatsis, A. & Elia, I. (2004). The effects of different modes of representation on mathematical problem solving. *Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*, *2* (pp. 447-454). Bergen: Norway.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and roblem solving. In Bussi, M. B., Jones, G. A., Lesh, R. A., Sriraman, B. & Tirosh, D. (2nd Eds), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 176-200). Routledge: New York.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25(5)*, 443-471.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155-177.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6(2)*, 105-128.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. C & Brocardo, J. (Eds). *Educação Matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Edits.), *Educational Design Research* (pp. 45-85). London: Routledge.

Gravemeijer, K. & van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. *The Elementary School Journal*, *109(5)*, 510-524. Obtido em 2 abril de 2013, de http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/7287.pdf

Gray, E. & Doritou, M. (2008). The number line: ambiguity and interpretation. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3* (pp. 97-104). Morelia, México.

Greeno J. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22(3)*, 170-217.

Greer, B. (1987). Non-conservation of multiplication and division involving decimals. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*, 37-45.

Hannula, M. S. (2003). Locating fractions on a number line. In N A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.). *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA*, *3* (pp. 3-24). Honolulu, HI: PME.

Hackenberg, A. J. (2007). Units coordination and the construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 27-47.

Heid, M. K., Blume, G. W., Zbiek, R. M. & Edwards, B. S. (1999). Factors that influence teachers learning to do interviews to understand students mathematical understandings. *Educational Studies in Mathematics*, *37*, 223-249.

Heinze, A., Star, J., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 41(5)*, 535-540.

Herbst, P. (1997). The number-line metaphor in the discourse of a textbook series. *For the Learning of Mathematics, 17(3)*, 36-45.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics, 19(3)*, 333-355.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65–97). New York: Macmillan.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17(1)*, 123-134.

Huberman, M. & Miles, M. (2005). Data management and analysis methods. In N. Dezin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research.* London: Sage Publications.

Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fractions operation sense. In B. Litwiller & G. Bright (Org.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 72-78). Reston: NCTM.

Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior, 16(2)*, 145-165.

Izsák, A., Tillema E. & Tunç-Pekkan, Z. (2008). Teaching and learning fraction addition on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education, 39(1)*, 33-62.

Janvier, C. (1987). Conceptions and representations: the circle as an example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 147-158). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kalathil, R. R. & Sherin, M. G. (2000). Role of student's representations in mathematics classroom. In B. Fishman & S. O'Connor-Divelbiss (Ed.). *Fourth International Conference of The Learning Sciences*, 27-28. Mahwah. NJ: Erlbaum.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: children's strategies and errors.* Windsor. England: Nfer-Nelson.

Kelly, A. E., Baek, J. Y., Lesh, R. A., Bannan-Ritland, B. (2008). Enabling innovations in education and systematizing their impact. In A. E. Kelly, R. A. Lesh & J. Y. Baek (Eds), *Handbook of Design Research Methods in Education – Innovations in Science, Technology, Engineering, and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 3-18). Madison Ave, NY: Routledge.

Keijzer, R. (2003). *Teaching formal mathematics in primary education – fraction learning as mathematising process.* Freudenthal Institute. Utrecht.

Keijzer, R. & Terwel, J. (2003). Learning for mathematical insight: a longitudinal comparative study on modeling. *Learning and Instruction, 13*, 285-304.

Kieren, T. E. (1980). Knowing rational numbers: Ideas and symbols. In M. M. Lindquist (Eds). *Selected issues in mathematics education* (pp. 69-82). Reston: VA: NCTM.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. J. Behr (Eds). *Number Concepts And Operations in The Middle Grades* (pp. 162–181). Hillsdale. NJ: Lawrence Erlbaum.

Klein, A. S., Beishuizen, M. & Treffers, A. (1998). The empty number line in Dutch second grades: realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education, 29(4)*, 443-464.

Kraemer, J. M. (2008). Desenvolvendo o sentido do número: cinco princípios para planificar. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds). *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 3-33). Lisboa: Escolar Editora.

Küchemann, D., Hodgen, J. & Brown M. (2011). Using the double number line to model multiplication. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Rzeszów, Polónia: CERME 7.

Lachance, A. & Confrey, J. (1995). Introducing fifth graders to decimal notation through ratio and proportion. In D. T. Owens, M. K. Reed, & G. M. Milsaps (Eds.). *Proceedings of the seventeenth annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* (pp. 395-400). Columbs, OH: ERIC.

Lachance, A. & Confrey J. (2002). Helping students build a path of understanding from ratio and proportion to decimal notation. *Journal of Mathematical Behavior, 20(4)*, 503–526.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24(1)*, 41–61.

Lamon, S. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, 27(2)*, 170–193.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers (2.ª ed.).* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester (Jr. Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing, NCTM.

Lembke, L. O. & Reys, B. J. (1994). The development of, and interaction between, intuitive and school-taught ideas about percent. *Journal for Research in Mathematics Education, 25(3)*, 237-259.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G. & Boutin, G. (1990). *Investigação qualitativa: Fundamentos e práticas.* Lisboa: Instituto Piaget.

Lesh, R., Carmona, G. & Post, T. (2002). Models and modeling. *Proceedings of the 24th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics, 1* (pp. 101-112). Athens: Georgia.

Lesh, R. & Kelly, A. E. (2000). Multitiered teaching experiments. In A. E. Kelly, & R. Lesh (Edits.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 197-230). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. A., Kelly, A. E. & Yoon, C. (2008). Multitiered design experiments in mathematics, Science, and Technology Education. In A. E. Kelly, R. A. Lesh & J. Y. Baek (Eds), *Handbook of design research methods in education – Innovations in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 131-148). Madison Ave, NY: Routledge.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In Janvier, C. (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

Lichtman, M. (2006). *Qualitative research in education: A user's guide* (1.ª ed.). Thousand Oaks: Sage Publications.

Lima, R. N., Freire, P. C. & Souza, V. H. G. (2012). A journey through three worlds of mathematics considering rational numbers as quotient. *12th International Congress on Mathematical Education* – Topic Study Group 7 (pp. 1837-1844). Seoul, Korea.

Llinares, S. & Sánchez, M. V. (2000). *Fracciones*. Spain: Editorial Síntesis.

Long, M. J. & Ben-Hur, M. (1991). Informação sobre aprendizagem através de entrevista clínica. *Arithmetic Teacher*, 157-167.

Ludke, M. & André, M. (1986). Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU.

Macieira, S. A. (2011). *Diferentes significados de fração e a sua influência na aprendizagem dos números racionais* – Tese de Mestrado. Lisboa: IPL – Escola Superior de Educação de Lisboa.

Mack, N. (1990). Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21(1)*, 16-32.

Mack, N. (1995a). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 26(5)*, 422-441.

Mack, N. (1995b). Critical ideas, informal knowledge, and understanding fractions. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 67-84). Albany, NY: State University of New York Press.

Mack, N. (2000). Long-term effects of building on informal knowledge in a complex content domain: The case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematical Behavior, 19*, 307-332.

Mack, N. (2001). Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: partitioning, units, and understanding multiplication of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32(3)*, 267-295.

Mackinlay, J. (1999). Automating the design of graphical presentations of relational information. In S. K. Card, J. D. Mackinlay, & B. Schneiderman (Eds.), *Readings in information visualization: Using vision to think* (pp. 66-81). San Francisco, CA: Morgan Kaufmann.

McNamara, C. (2009). *General guidelines for conducting interviews*. Obtido em 20 abril de 2013, de https://communities.usaidallnet.gov/fa/system/files/General+Guidelines+for+Conducting+Interviews.pdf

Mamede, E. (2007). *The effects of situations on children's understanding of fractions*. PhD Thesis. Oxford Brookes University. Oxford: OBU.

Mamede, E., Nunes, T. & Bryant, P. (2005). The equivalence and ordering of fractions in part whole and quotient situations. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3* (pp. 281-288). Melbourne, Australia: PME.

Mamede, E. & Oliveira, M. (2011). Issues on children's ideas of fractions when quotient interpretation is used. *Proceedings of 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Polónia: Rzeszów.

Markovits, Z. & Sowder, J. (1991). Student's understanding of the relationship between fractions and decimals. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 13(1)*, 3-11.

Markovits, Z. & Sowder, J. (1994). Developing number sense: an intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25(1)*, 4-29.

Martin, L. C., Lacroix, L. & Fownes, L. (2005). Fractions in the workplace: folding back and the growth of mathematical understanding. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.).

Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 29(3) (pp. 305-312). Melbourne, Australia: PME.

Martinie, S. (2007). *Middle school of rational numbers knowledge* – Abstract of dissertation. Manhattan, Kansas: Kansas State University.

Martins, F. M. M. (2007). *As frações no desenvolvimento do sentido de número racional no 1.º ciclo* – Tese de Mestrado em Educação Matemática. Lisboa: FCUL.

McCloskey, A. & Norton, A. (2009). Using Steffe's advanced fraction schemes: recognizing schemes, which are different from strategies, can help teachers understand their student's thinking about fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(1), 44-50.

McIntosh, A. & Dole, S. (2000). Number sense and mental computation: Implications for numeracy. *ACER Research Conference 2000: Improving Numeracy Learning* (pp. 34-37). Brisbane.

McIntosh, A., Reys, B. J. & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12(3)*, 2-8.

Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: um estudo com alunos do 1.º ciclo* – Tese de Doutoramento em Educação. Lisboa: Instituto Superior da Educação da Universidade de Lisboa.

Mendes, F., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2011). Os procedimentos usados pelos alunos do 1.º ciclo quando resolvem tarefas de multiplicação e a sua evolução. *Indagatio Didáctica, 3(1)*, 6-24.

Mendes, F., Oliveira, H. & Brocardo, J. (2011). As potencialidades de sequências de tarefas na aprendizagem da multiplicação. *Atas do XXII SIEM: Seminário de Investigação em Educação Matemática* (PEN). Lisboa: APM.

Mestre, C. & Oliveira, H. (2012). A exploração de tarefas Matemáticas para o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds), *Investigação em Educação Matemática* (pp. 417-432). SPIEM.

Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F. & Gomes, H. (2008). *Números racionais não negativos – tarefas para o 5º ano.* DGCI – Ministério da Educação.

Merlini, V. L. (2005). *O conceito de fração e seus diferentes significados: um, estudo junto a alunos de 5.ª e 6.ª série do Ensino Fundamental* – Tese de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach.* S. Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Michaelidou, N., Gagatsis, A. & Pitta- Pantazi, D. (2004). The number line as a representation of decimal numbers: A research with sixth grade students. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.). *Proc. of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3* (pp. 305 – 312). Bergen, Norway: PME.

Middleton, J. A., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Shew, J. A. (1998). Using bar representations as a model for connecting concepts of rational number. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4)*, 302–311.

Ministério da Educação (1991). *Plano de organização do ensino-aprendizagem de Matemática*. Lisboa – Departamento da Educação Básica.

Ministério da Educação (2004). *Organização curricular e programas* (4.ª edição). Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Ministério da Educação (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Mitchell, A. (2005). Measuring fractions. *MERGA – Mathematics Education Research Group of Australasia - Research Paper, 61*, 545-552.

Mitchell, A. & Horne, M. (2010). Gap thinking in fraction pair comparisons is not whole number thinking: Is this what early equivalence thinking sounds like? In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education – Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Research Group of Australasia* (pp. 414–421). Fremantle, WA: MERGA.

Mitchell A. & Horne, M. (2011). Listening to children's explanations of fraction pair tasks: when more than an answer and an initial explanation are needed. In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer & S. Thornton (Eds.), *Mathematics: Traditions and [New] Practices – Proceedings of the 34th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp 515-522). Adelaide: AAMT and MERGA.

Molina, M. G. (2006). *Desarrolo de pensamiento relacional Y compremsión signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* – Tesis Doctoral. Granada: Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.

Molina, M. G., Castro, E. & Castro, E. (2007). Teaching experiments within design research. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences*, *2(4)*, 435-440.

Monteiro, C. & Costa, C. (1996). Dificuldades na aprendizagem dos números racionais. *Educação e Matemática, 40*, 60-63.

Monteiro, C. & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante 14(1)*, 89-107.

Monteiro, C. & Pinto, H. (2006). O sentido do número: o caso dos decimais e das frações. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.). *Números e Álgebra na Aprendizagem e na Formação de Professores* (pp. 177-189). Lisboa: SEM–SPCE.

Monteiro, C. & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.

Monteiro, C., Pinto, H. & Figueiredo, N. (2005). As frações e o desenvolvimento do sentido do número racional. *Educação Matemática, 84*, 47-51.

Moseley, B. (2005). Students early mathematical representation knowledge: the effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 37–69.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: rational-number system new approaches to teaching the rational number system. *National Academy of Sciences*. Obtido em 10 de maio de 2008, de http://books.nap.edu/catalog/10126.html

Moss, J. & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: a new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30(2)*, 122-147.

Moss, J. & Caswell, B. (2004). Building percent dolls: connecting linear measurement to learning ratio and proportion. *Mathematics Teaching in the Middle School, 10(2)*, 68-74.

Moskal, B., M. & Magone, M., E. (2000). Making sense of what students know: examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal task. *Educational Studies in Mathematics, 43*, 313–335.

National Centre for Educational Statistics – US Department of Education (2003). *NAEP questions*. Obtido em 3 de dezembro de 2008, de http://nces.ed.gov/nationsreportcard/itmrls/itemdisplay.asp

National Council of Teachers of Mathematics. (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE. (trabalho original em inglês publicado em 1991).

National Council of Teachers of Mathematics. (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through Grade 8 mathematics: A quest for coherence*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Principios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology*, *26*, 400–417.

Ni, Y. & Zhou, Yong-Di. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40(1)*, 27-52.

Noble, T., Nemirovsky, R., Wright, T. & Tierney, C. (2001). Experiencing change: the mathematics of change in multiple environments. *Journal for Research in Mathematics Education, 32(1)*, 85–108.

Norton, A. (2008). Josh's operational conjectures: abductions of a splitting operation and the construction of new fractional schemes. *Journal for research in mathematics education, 39*(4), 401-430.

Norton, A. & Wilkins, J., L., M. (2009a). A quantitative analysis of children's splitting operations and fraction schemes. *Journal of Mathematical Behavior, 28*, 150-161.

Norris, N. (1997). Error, bias and validity in qualitative research. *Educational Action Research, 5(1)*, 172-176.

Novick, L. R. (1990). Representational transfer in problem solving. *Psychological Science, 1(2)*, 128-132.

Nunes, T., Campos, T. M. M., Magina, S. & Bryant, P. (2005). *Educação matemática – números e operações numéricas (1.ª ed.)*. São Paulo: Cortez Editora.

Nunes, C. C. & Ponte, J. P. (2011). Práticas de gestão curricular de um grupo de matemática. *Atas do XXII SIEM: Seminário de Investigação em Educação Matemática* (PEN). Lisboa: APM.

Oliveira, I. (1994). *O conceito de número racional em alunos do 6º ano de escolaridade: estratégias e dificuldades conceptuais* – Tese de Mestrado. Lisboa: Instituto Superior de Psicologia Aplicada.

Oliveira, I. & Ramalho, G. (1994). Rational numbers: strategies and misconceptions in sixth grade students. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings PME XVIII* (pp. 392-398). Lisbon: Portugal.

Oppenheimer, L. & Hunting, R. P. (1999). Relating fractions & decimals. *Mathematics Teaching in The Middle School, 4(5)*, 318-321.

Paias, A., M. (2009). *Diagnóstico dos erros sobre a operação potenciação aplicado a alunos dos Ensinos Fundamental e Médio* (Tese de Mestrado). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Panaoura, A., Gagatsis, A., Deliyianni, E. & Elia, I. (2009). Affective and cognitive factors on the use of representations in the learning of fractions and decimals. In M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics, 4* (pp. 273-280). Thessaloniki, Greece: PME.

Parker, M. & Leinhardt, G. (1995). Percent: a privileged proportion. *Review of Educational Research, 65(4)*, 421-482.

Patterson, N. D. & Norwood, K. S. (2004). A case study of teacher beliefs on students' beliefs about multiple representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*, 5-23.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods.* California: Sage Publications, Lda.

Pearn, C. & Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what year 8 students really think about fractions. In I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010. Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (pp. 430–437). Townsville, Qld: MERGA.*

Pelczer, I., Singer, F. & Voica, C. (2011). Between Algebra and Geometry: the dual nature of the number line*. Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Rzeszów, Polónia: CERME 7.

Pearn C. & Stephens M. (2007). Whole number knowledge and number lines help to develop fraction concepts. *Mathematics: Essential Research, Essential Practice, 2,* 601-610.

Pinto, H. (2004). *Aprendizagem do conceito de número racional no 2º ciclo do ensino básico, no contexto da Matemática Realista* – Tese de Mestrado. Universidade Aberta.

Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais* – Tese de Doutoramento. Lisboa: Instituto da Educação da Universidade de Lisboa.

Pirie, S. E. B., Martin, L. & Kieren, T. (1994). Mathematical images for fractions: help or hindrance. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds), *Proceedings of the 18th PME International Conference, 2*, (pp. 247-254). Lisbon: Portugal.

Pitkethly, A. & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts*. Educational Studies in Mathematics*, *30(1)*, 5-38.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em Matemática. *Quadrante, 3(1)*, 3-18.

Ponte, J. P., Matos, J. M. & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares* (1.ª ed.). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional (IIE).

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Eds), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Ponte, J. P. (2009). O novo programa de Matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico. *Interações, 12*, 96-114.

Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2011a). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante, 20(1)*, 55-81.

Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2011b). A construção das partes e a reconstrução da unidade na compreensão dos números racionais. *Atas do XXII SIEM: Seminário de Investigação em Educação Matemática* (PEN). Lisboa: APM.

Pothier, Y. & Sawada, D. (1983). Partitioning: the emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education, 14(4)*, 307-317.

Post, T., Behr, M. & Lesh, R. (1982). Interpretations of rational number concepts. In L. Silvey & J. Smart (Eds.), *Mathematics for Grades 5-9* (pp. 59-72). Reston, Virginia: NCTM.

Post T., Wachsmuth I., Lesh R. & Behr M. (1985). Order and equivalence of rational number: a cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 16(1)*, 18-36.

Post, T., Behr, M. & Lesh, R. (1986). Research-based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 8(1)*, 39-48.

Post, T. & Cramer, K. (1987). Children's strategies when ordering rational numbers. *Arithmetic Teacher, 35(2)*, 33-35.

Post, T, Behr, M. & Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of prealgebra understandings *Algebraic concepts in the curriculum K-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Post, T., Cramer, K., Lesh, R., Behr, M. & Harel, G. (1992). Curriculum implications. In T. Carpenter, L. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Learning, Teaching, and Assessing Rational Number Concepts: Multiple Research Perspectives* (pp. 327-362). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

Pothier, Y. & Sawada, D. (1983). Partitioning: the emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education, 14(4)*, 307-317.

Powell, C. A. & Hunting, R. P. (2003). Fractions in the early-years curriculum: More needed, not less. *Teaching Children Mathematics, 10(1)*, 6-7.

Putnam, R.T., Lampert, M. & Peterson, P.L. (1990). Alternative perspectives on knowing mathematics in elementary schools. In C. B. Cazden (Ed.), *Review of Research in Education* (pp. 57-150). Washington, DC: American Educational Research Association.

Quaresma, M. (2010). *Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino* – Tese de Mestrado em Educação. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20(1)*, 8-27.

Resnick, L. B. & Singer, J. A. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.). *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 107-130). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Reys, R. E. & Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education, 29(2)*, 225-237.

Rezat, S. (2011). Mental Calculation strategies for addition and subtraction in the set of rational numbers. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Rzeszów, Polónia: CERME 7.

Santos, L. (2000) *A prática letiva como atividade de resolução de problemas: um estudo com três professoras do ensino secundário* – Tese de doutoramento. Lisboa: Universidade de Lisboa e Associação de Professores de Matemática.

Santos, A. (2003). *Os números racionais e os seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental.* São Paulo: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Santos, C. (2005). *O conceito de fração e seus diferentes significados: um estudo junto a professores que atuam no ensino fundamental* – Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Sawyer, R. K. (2006). The new science of learning. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 1-18). New York, NY: Cambridge University Press.

Schnotz, W. (2002). Towards an integrated view of learning from text and visual displays. *Educational Psychology Review, 14(1)*, 101-120.

Schoenfeld, A. H. (2002). Research Methods in (Mathematics) Education. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 435-487). Mahwah NJ: Erlbaum.

Seidman, I. (2006). *Interviewing as qualitative research: a guide for researchers in education and social sciences.* New York and London: Teachers College, Columbia University.

Serrazina, L., Canavarro, A. P., Guerreiro, A., Rocha, I., Portela, J. & Saramago, M. J. (2005). *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo.* Ministério da Educação. Lisboa: DGIDC.

Serrazina, L., Canavarro, A. P., Guerreiro, A., Rocha, I. & Portela, J. (2006). *Ministério da Educação. Lisboa: DGIDC* – Programa de formação contínua em Matemática para professores do 2.º Ciclo. Obtido em 5 de setembro de 2010, de http://www.dgidc.minedu.pt/matematica/ Documents/Prog_Mat_2ciclo.pdf

Seufert, T. (2003). Supporting coherence formation in learning from multiple representations. *Learning and Instruction, 13*, 227–237.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22(1)*, 1–36.

Silverman, D. (2000). *Doing qualitative research: a practical handbook*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Silvestre, A. & Ponte, J. P. (2009). Resolução de problemas de valor omisso: análise das estratégias dos alunos. *Números e Estatística – Ata do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática* (CD-ROM). Vila Real.

Silvestre, A. & Ponte, J. P. (2011). Uma unidade de ensino de cunho exploratório para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. *Atas do XXII SIEM: Seminário de Investigação em Educação Matemática* (PEN). Lisboa: APM.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 114-145.

Smith III. J. P. (1995). Competent reasoning with rational numbers*. Cognition And Instruction, 13(1)*, 3-50.

Smith III. J. P. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 3-17). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Smith, M. S., Hughes, E. K., Engle, R. A. & Stein, M. K. (2009). Orchestrating discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14(9)*, 549-556.

Souza, S., S., S. (2002). *Erros em Matemática: Um Estudo Diagnóstico com Alunos de 6.ª Série do Ensino Fundamental.* Marília: Universidade Estadual Paulista – Faculdade de Filosofia e Ciências.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371–389). New York: Macmillan.

Stake, R. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313-340.

Strauss, A. & Corbin, J. (2008). *Pesquisa qualitativa: técnicas e procedimentos para o desenvolvimento da teoria fundamentada* (2.ª ed.). Porto Alegre: Artmed.

Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267- 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior, 20(3)*, 267-307.

Steffe, L. P. (2003). Fractional commensurate, composition, and adding schemes: learning trajectories of Jason and Laura: grade 5. *Journal of Mathematical Behavior, 22(3)*, 237-295.

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: the case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking And Learning, 6(2)*, 129-162.

Steffe, L. P. & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York, London: Springer.

Sweeney, E. & Quinn, R. J. (2000). Connecting fractions, decimals & percents. *Mathematics Teaching in The Middle School, 5(5)*, 324–328

Tarp. A. (2012). Fractions grounded as decimals, or 3/5 as 3,5S. *12th International Congress on Mathematical Education* – Topic Study Group 25 (pp. 5276-5285). Seoul, Korea.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 1(31)*, 5-25.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental computation. *Educational Studies in Mathematics, 50,* 29–47.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education, 41(5)*, 541-555.

Thompson, P. W. & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Shifter (Eds.), *A research companion to Principles and standards for school mathematics* (pp. 95-133). Reston, VA: NCTM.

Tobias, J. M. (2009). *Preservice elementary teachers' development of rational number understanding through the social perspective and the relationship among social and individual environments* – Dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. Orlando. College of Education: University of Central Florida.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30(4)*, 390-416.

Vale, M., L., S. (2010). *O erro como ponte para a aprendizagem em Matemática: um estudo com alunos do 7.º ano do ensino básico* (Tese de Mestrado). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S. & Nieveen, N. (Edits.). (2006). *Educational design research.* London: Routledge.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: an example from longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54(1)*, 9-35.

van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E. & Keijer, R. (2008). *Fractions, percentages and proportions.* Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, Utrecht University: Sense Publishers.

Valério, N. (2005). Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1.º ciclo. *Quadrante, 14(1)*, 37-65.

Vanhille, L. S. & Baroody, A. J. (2002). Fraction instruction that fosters multiplicative reasoning. In B. Litwiller (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: NCTM 2002 Yearbook* (pp. 224-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In H. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Research Agenda in Mathematics Education – Number Concepts and Operations in the Middle Grades.* (pp. 141-161). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1987). *Problem of representation in the teaching and learning of mathematics.* In Janvier, C. (pp. 227-232). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. In L. Nasser (Ed.) *Anais do 10º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro* (pp. 1-26). Rio de Janeiro.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 17(2)*, 167-181.

Verschaffel, L., Greer, B. & Corte, E. (2002). Mathematics learning: number sense. *Education Encyclopedia.* Sponsored Links. Obtido em 8 de novembro de 2010, de http://www.answers.com/topic/ mathematics-learning-number-sense

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 24(3)*, 335-359.

Wearne, D. (1990). Acquiring meaning for decimal fraction symbols: a one year follow-up. *Educational Studies in Mathematics, 21(6)*, 545-564.

Wengraf, T. (2001). *Qualitative research interviewing.* London, Thousand Oaks and New Delhi: Sage Publications.

Wiegel, H. G. (1998). Kindergarten students' organization of counting in joint counting tasks and the emergence of cooperation. *Journal for Research in Mathematics Education, 29(2)* 202-224.

Wheeldon, D. A. (2008). *Developing mathematical practices in a social context: an instructional sequence to support prospective elementary teachers learning of fractions* – Dissertation for the degree of Doctor of Education. Florida, Orlando: University of Central Florida.

White. P. & Mitchelmore, M. (2005). Teaching percentage as a multiplicative relationship. *Proceedings of Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 783-790). Melbourne, Austrália. Obtido em 12 de janeiro de 2009, de http://www.merga.net.au/documents/RP912005. pdf

Wilkins, J. L. M. & Norton, A. (2011). The splitting loope. *Journal for Research in Mathematics Education, 42(4)*, 386–416.

Yackel, E. (1985). *Characteristics of problem representation indicative of understanding in mathematical problem solving.* Paper Presented at The Annual Meeting of The American Educational Research Association. Chicago.

Yang, D. C. (2003). Teaching and learning number sense – an intervention study of fifth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 1*, 115-134.

Yang, D. C., Hsu, C. & Huang, M. C. (2004). A study of teaching and learning number sense for sixth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2(3)*, 407-430.

Yang, D. C. (2005). Number sense strategies used by 6th-grade students in Taiwan. *Educational Studies, 31(3)*, 317-333.

Yang, D. C., Li, M. F. & Li, W. (2008). Development of a computerized number sense scale for 3rd graders: Reability and validity analysis. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 3(2)*, 110-124.

Yang, D. C., Li, M. N. & Lin, C. (2008). A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 6(4)*, 789-807.

Yang, D. C., Reys, R. E. & Reys, B. J. (2009). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7(2)*, 383-403.

Yanik, H. B., Helding, B. & Flores, A. (2008). Teaching the concept of unit in measurement interpretation of rational numbers. *Elementary Education Online, 7(3)*, 693-705.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods* (3.ª ed.). Thousand Oaks/London: Sage Publications.

Yin, R. (2004). Case study methods, revised draft. *3th Complementary Methods for Research in Education*. Washington, DC: American Educational Research Association.

Zabalza, M. A. (1994). *Diários de aula*. Porto: Porto Editora – Coleção Ciências da Educação. Porto Editora.

Anexos

Anexo 1 – Reuniões com a professora Inês

Data	Conteúdo
21 de outubro de 2008	- Conhecer as características gerais da turma. - Entregar os pedidos de autorização para a realização do estudo.
27 de novembro de 2008	- Análise e discussão das quatro primeiras tarefas da experiência de ensino.
4 de fevereiro de 2009	- Análise dos resultados do teste inicial. - Formação do grupo constituído pelos estudos de caso.
26 de fevereiro de 2009	- Reflexão sobre a tarefa "Partilha de chocolate".
5 de março de 2009	- Reflexão sobre a tarefa "Partilha de chocolate".
12 de março de 2009	- Reflexão sobre a tarefa "Adereços nos bastidores".
16 de março de 2009	- Reflexão sobre a tarefa "Eventos no cineteatro". - Análise, discussão e reajuste das tarefas 5, 6, 7 e 8.
19 de março de 2009	- Reflexão sobre as tarefas "Eventos no cineteatro" e "Cenário de espelhos".
23 de março de 2009	- Reflexão sobre a tarefa "Tarde nas piscinas municipais".
20 de abril de 2009	- Reflexão sobre a tarefa "Lanche no cineteatro". - Análise, discussão e reajuste das tarefas 9, 10 e 11.
27 de abril de 2009	- Reflexão sobre a tarefa "O pintor Pedro e as vitaminas".
4 de maio de 2009	- Reflexão sobre a tarefa "Compras na bit-@-byte".
28 de maio de 2009	- Reflexão sobre a tarefa "À descoberta de comprimentos e quantidades".
22 de junho de 2009	- Análise dos resultados do teste final.

Anexo 2 – Pedido de autorização à escola

Exma. Sr.ª Diretora do Conselho Executivo da Escola EB 2,3 ☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺, 15 de dezembro de 2008

ASSUNTO: Pedido de Autorização Para Realizar um Trabalho de Investigação.

Exma. Sr.ª

Eu, Hélia Margarida Gaspar Lopes Ventura, professora do Ensino Básico variante Matemática e Ciências da Natureza, encontrando-me a realizar uma Tese de Doutoramento em Educação na Especialidade de Didática da Matemática, na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, venho por este meio solicitar a V. Ex.ª autorização para realizar um trabalho de investigação com a turma ☺☺☺☺☺ do 5.º ano de escolaridade, tendo por base um projeto de intervenção curricular intitulado "Aprendizagem dos Números Racionais" com a professora ☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺, no ano letivo 2008/2009.

Este trabalho colaborativo com a professora Inês incidirá no tema Números Racionais e, tem como objetivo promover será conduzido tentando compreender como se desenvolve o conceito de número racional nos alunos, ao longo do 2.ºciclo, através da promoção de conexões entre as várias representações dos racionais.

Para facilitar a recolha de dados para a realização do estudo, recorrerei à gravação áudio e vídeo de algumas aulas, bem como à realização de entrevistas com alguns alunos. Será pedida uma autorização a todos os encarregados de educação dos alunos participantes. No âmbito deste trabalho é salvaguardado o anonimato de todos os participantes, bem como a confidencialidade relativamente à informação recolhida, sendo esta utilizada para a redação da dissertação de doutoramento.

Certa de que a investigação poderá contribuir para que se encontrem estratégias de ensino que ajudem os alunos a construir e a desenvolver o conceito de número racional, bem como ultrapassar as suas dificuldades neste domínio, agradeço desde já a sua atenção e colaboração.

Pede Deferimento

A Professora

____

(Hélia Margarida Gaspar Lopes Ventura)

Anexo 3 – Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exmo. Sr. Encarregado de Educação

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺, 15 de dezembro de 2008

Exmo. Sr.

Eu, Hélia Margarida Gaspar Lopes Ventura, professora do Ensino Básico variante Matemática e Ciências da Natureza, encontrando-me a realizar um trabalho de investigação com a turma ☺☺☺☺☺ do 5.º ano de escolaridade, tendo por base um projeto de intervenção curricular, intitulado "Aprendizagem dos Números Racionais", com a professora ☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺, no ano letivos 2008/2009, venho por este meio solicitar a V. Ex.ª autorização para observar e gravar (em áudio e vídeo) algumas aulas de Matemática do seu educando, ao longo dos anos letivo 2008/2009, bem como a efetuar algumas entrevistas.

No âmbito deste trabalho é salvaguardado o anonimato de todos os participantes, bem como a confidencialidade relativamente à informação recolhida, sendo esta utilizada somente no âmbito da realização deste trabalho.

Certa de que esta investigação poderá contribuir para que se encontrem experiências e estratégias de ensino que ajudem os alunos a construir e desenvolver o conceito de número racional, bem como a ultrapassar as suas dificuldades na resolução de problemas, agradeço desde já a sua atenção e colaboração.

Atenciosamente,

A Professora

____

(Hélia Margarida Gaspar Lopes Ventura)

Recorte pelo picotado ✂--

Eu, ____Encarregado de Educação do aluno(a) ______________________________**, da turma** ____**, do 5.º ano,** autorizo a observação e gravação de algumas aulas de Matemática do meu educando, assim como a realização de algumas entrevistas, no âmbito do projeto de intervenção curricular "Aprendizagem dos Números Racionais", a ser desenvolvido pelas professoras Inês e Hélia Ventura.

_________________, _____ de ___________________ de 2008

O Encarregado de Educação

____

Anexo 4 – Teste inicial

Nome: ______________________________ **N.º** _____ **Idade:** _____

1. O que representa para ti $\frac{5}{8}$?

2. O que representa para ti $\frac{15}{8}$?

3. $\frac{1}{2}$ e 0,2 representam o mesmo número? Explica.

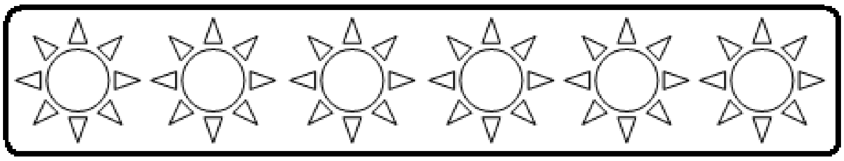
4. $\frac{2}{5}$ e 2,5 representam o mesmo número? Explica.

5. $\frac{3}{4}$ e 75% podem representar a mesma quantidade? Explica.

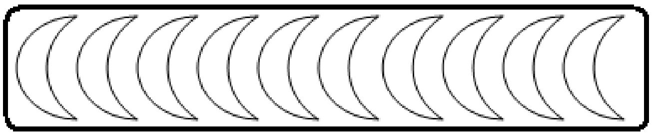
6. Qual das opções seguintes é o resultado de: $7 + \frac{1}{2} + 0{,}5 = \ldots$?

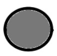
a) não se pode calcular b) 7,25 c) 7,5 d) 8 e) 9

7. Pinta, se possível, 0.5 do total da figura.

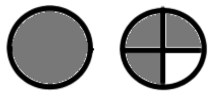


8. Pinta, se possível, 20% do total da figura que se segue.

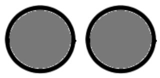


9. Preenche os espaços em branco, relativamente à parte sombreada de cada figura, sabendo que cada  representa uma unidade.

Representação Visual	Fração	Numeral decimal	Percentagem
			
			
	$\frac{2}{5}$		

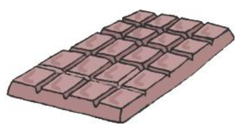
			

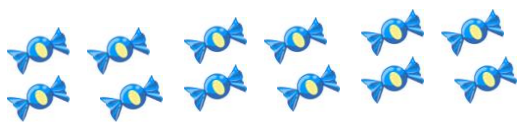
10. Considera que  representa 100%. Indica quanto representa a figura:

11. Considera que  representa uma unidade. Indica quanto representa a seguinte figura:

12. Numa loja de presentes há 6 bonés do mesmo tamanho. Como podes representar numericamente a quantidade de bonés castanhos em relação à quantidade de bonés roxos?

13. Como posso repartir uma tablete de chocolate e 12 rebuçados por quatro crianças?





13.1. Qual a quantidade de rebuçados que cada criança recebe?

Número de Rebuçados	Percentagem

13.2. Qual a quantidade de chocolate que cada criança recebe?

Fração de chocolate	Numeral decimal	Percentagem

14. No final do 2.º Período vai decorrer uma prova de "Pé-coxinho", onde todos os participantes partem do ponto A e têm de chegar ao ponto B. A seguir é apresentada a distância percorrida por cada um dos quatro participantes, após 10 segundos da prova:

Rogério – 25%   Rita – 0,5   Débora – $\frac{3}{4}$ Laura – $\frac{2}{5}$

14.1. Assinala na reta a posição de cada participante neste momento da prova.

A ———————————————————————————— **B**

14.2. Quem vai à frente na prova? Explica.

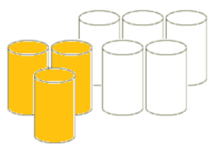
15. Na aula de acrobática, o Ricardo conseguiu fazer 24 cambalhotas. A Cátia fez $\frac{1}{4}$ das cambalhotas do Ricardo.

15.1. Quantas cambalhotas conseguiu fazer a Cátia?

15.2. A Cátia fez mais ou menos de 50% das cambalhotas realizadas pelo Ricardo? Explica.

16. Vamos encher um jarro com a mistura A e outro com a mistura B. Em qual das misturas o sabor a laranja é mais forte? Explica o teu raciocínio.

- 4 copos de laranja
- 8 copos de água



- 3 copos de laranja
- 5 copos de água

Anexo 5 – Objetivos das questões do teste inicial

A. (questões 3, 4 e 5)

- Reconhece que duas representações são ou não o mesmo número, mas não explica ou explica incorretamente. 3pontos

- Reconhece que duas representações são o mesmo número e explica corretamente. 6pontos

B. (questão 6)

- Reconhece que se podem adicionar (e adiciona corretamente) números racionais representados de diferentes formas. 2pontos

- Reconhece que se podem adicionar (mas adiciona incorretamente), números racionais representados de diferentes formas. 1ponto

- Não reconhece que se podem adicionar números racionais representados de diferentes formas. 0pontos

C. (questão 7)

- Consegue identificar 0,5, como sendo metade de uma figura. 1ponto

- Não consegue identificar 0,5, como sendo metade de uma figura. 0pontos

D. (questão 8)

- Consegue identificar 20%, como sendo a quinta parte de uma figura. 1ponto

- Não consegue identificar 20%, como sendo a quinta parte de uma figura. 0pontos

E. (questão 9, 10, 11 e 13)

- Dada a unidade, consegue representar uma região sombreada por uma fração (1 a 3). 3pontos

- Dada a unidade, consegue representar uma região sombreada por uma representação decimal (1 a 6). 6pontos

- Dada a unidade, consegue representar uma região sombreada por uma percentagem (1 a 7). 7pontos

- Dada a unidade, consegue representar fração pictoricamente. 1ponto

F. (questão 12)

- Consegue expressar uma relação entre duas quantidades. 1ponto

- Não consegue expressar uma relação entre duas quantidades. 0pontos

G. (questão 13a)

- É capaz de efetuar uma partilha equitativa de grandezas discretas. 1ponto

- Não é capaz de efetuar uma partilha equitativa de grandezas discretas. 0pontos

H. (questão 13b)

- É capaz de representar uma partilha equitativa de grandezas contínuas. 1ponto

- Não é capaz de representar uma partilha equitativa de grandezas contínuas. 0pontos

I. (questão 14)

- Consegue representar racionais numa reta. 2pontos

- Consegue representar alguns racionais numa reta. 1ponto

- Não consegue representar racionais numa reta. 0pontos

J. (questão 15a)

- Consegue aplicar o significado de operador numa situação problemática. 1ponto

- Não consegue aplicar o significado de operador numa situação problemática. 0pontos

K. (questão 15b)

- Consegue comparar uma fração ($\frac{1}{4}$) com uma percentagem (50%). 1ponto

- Não consegue comparar uma fração ($\frac{1}{4}$) com uma percentagem (50%). 0pontos

L. (questão 16)

- Consegue identificar a razão maior, e explica corretamente. 2pontos

- Consegue identificar a razão maior, mas não explica ou explica incorretamente. 1ponto

- Não consegue identificar a razão maior. 0pontos

Anexo 6 – Seleção dos alunos que integram o grupo estudo de caso

N.º	Idade	Categorias															Total	Nível	Níveis no 1ºP	
		A.	B.	C.	D.	E.1	E.2	E.3	E.4	F.	G.	H.	I.	J.	K.	L.				
		6	**2**	**1**	**1**	**3**	**6**	**7**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**	**1**	**2**	**36**			
1	11	2	0	1	1	2	3	1	0	0	1	0	0	1	0	1	**13**	C	5	Selecionado
2	10	2	0	0	0	0	2	2	0	0	1	0	0	1	1	1	**10**	C	4	
3	10	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	**8**	C	3	
5	11	1	1	0	1	0	2	4	0	0	1	0	0	0	0	1	**11**	C	3	Selecionado
7	10	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	**7**	C	4	Selecionado
8	10	2	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	**7**	C	4	
9	11	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	**3**	C	3	
10	10	2	1	0	1	2	2	5	0	0	1	1	1	1	1	1	**19**	B	5	
12	10	2	1	0	1	2	4	3	0	0	1	0	0	1	1	1	**17**	B	3	
13	10	2	2	1	1	2	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	**17**	B	5	
14	10	2	2	0	1	1	1	4	0	0	1	0	1	1	1	0	**15**	B	4	Selecionado
15	10	0	0	1	1	1	2	0	0	0	1	0	0	0	0	1	**7**	C	3	
16	10	2	1	1	0	2	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	**9**	C	3	
17	11	3	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	**11**	C	3	
18	11	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	C	3	
19	10	2	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	**7**	C	3	

Reduzido (C)	**0-14**
Médio (B)	**15-25**
Bom (A)	**26-36**

Anexo 7 – Guião de observação de aulas

Data: Hora: Tarefa:	
Estrutura da aula	Início Desenvolvimento Conclusão Relação com aulas anteriores observadas
Tarefas propostas	Apresentação da tarefa Materiais de apoio Metodologia de trabalho (individual, em pares, com toda a turma) Dificuldades na apresentação da tarefa (enunciado) Dificuldades durante a exploração da tarefa e como são ultrapassadas Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução da tarefa (maioria/inesperadas) Modelos usados/construídos pelos alunos Duração da realização da tarefa Conclusão da tarefa (todos/apenas alguns alunos) Objetivos não atingidos Apresentação da exploração e síntese da tarefa – papel do professor Apresentação da exploração e síntese da tarefa – papel do aluno Aspetos que evidenciam a vompreensão do conceito de número racional (várias representações)
Ambiente de sala de aula	Ritmo da aula (tempo que os alunos demoram na realização da tarefa) Grau de envolvimento dos alunos (empenho, interesse e persistência) Relação professor – alunos (valoriza as ideias dos alunos; desafia-os; dá-lhes reforços positivos; incentiva-os) Relação alunos – alunos (conflitos relacionais; entreajuda; respeito por opiniões diferentes)

Adaptado de Boavida, A. M. R. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração* – Tese de Doutoramento em Educação Matemática. Lisboa: FCUL.

Anexo 8 – Mapa das aulas observadas

Data	Duração (minutos)	Conteúdo
27 de novembro de 2008	90	- Apresentação à turma. - Familiarização com a turma.
4 de dezembro de 2008	90	- Familiarização com a turma.
11 de dezembro de 2008	90	- Familiarização com a turma. - Início da introdução da tecnologia (câmara de vídeo e gravadores).
19 de janeiro de 2009	90	- Familiarização com a turma.
5 de fevereiro de 2009	90	- Realização do teste inicial.
12 de fevereiro de 2009	90	- Formação dos grupos.
16 de fevereiro de 2009	90	- Início da tarefa "Partilha de chocolate". - Discussão da tarefa "Partilha de chocolate" (questão 1.1.).
19 de fevereiro de 2009	90	- Continuação da tarefa "Partilha de chocolate". - Discussão da tarefa "Partilha de chocolate" (questão 1.2. e 1.3.).
26 de fevereiro de 2009	90	- Continuação da tarefa "Partilha de chocolate". - Discussão da tarefa "Partilha de chocolate" (questão 1.4. e 1.5.).
2 de março de 2009	90	- Conclusão da tarefa "Partilha de chocolate".
5 de março de 2009	45	- Discussão da tarefa "Partilha de chocolate" (questão 1.6.).
9 de março de 2009	90	- Realização da tarefa "Adereços nos bastidores". - Discussão da tarefa "Adereços nos bastidores".
12 de março de 2009	90	- Discussão da tarefa "Adereços nos bastidores" (conclusão).
16 de março de 2009	90	- Realização e discussão da tarefa "Eventos no cineteatro". - Realização da tarefa "Cenário de espelhos".
19 de março de 2009	90	- Discussão da tarefa "Cenário de espelhos". - Realização da tarefa "Tarde nas piscinas municipais".
23 de março de 2009	45	- Discussão da tarefa "Tarde nas piscinas municipais".

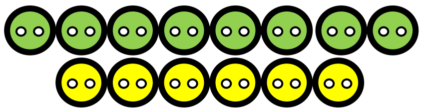
16 de abril de 2009	90	- Realização da tarefa "Lanche no cineteatro".
20 de abril de 2009	90	- Discussão da tarefa "Lanche no cineteatro". - Realização da tarefa "Estacionamento no cineteatro".
21 de abril de 2009	45	- Realização e discussão da tarefa "Depósito de gasolina".
23 de abril de 2009	90	- Discussão da tarefa "Estacionamento no cineteatro". - Realização da tarefa "O pintor Pedro e as vitaminas".
27 de abril de 2009	90	- Discussão da tarefa "O pintor Pedro e as vitaminas". - Início da tarefa "Compras na bit-@-byte".
30 de abril de 2009	90	- Conclusão da tarefa "Compras na bit-@-byte". - Início da discussão da tarefa "Compras na bit-@-byte".
4 de maio de 2009	45	- Conclusão da discussão da tarefa "Compras na bit-@-byte".
19 de maio de 2009	45	- Realização da tarefa "À descoberta de comprimentos e quantidades".
28 de maio de 2009	90	- Conclusão e discussão da tarefa "À descoberta de comprimentos e quantidades".
16 de junho de 2009	45	- Realização do teste final.

Anexo 9 – Teste final

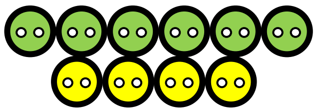
Nome: ___________________________ N.º _____ Idade: _____

1. A Luana tem, no seu sótão, duas caixas com botões verdes e amarelos.

Caixa A



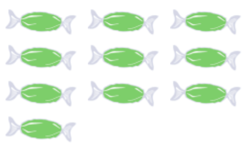
Caixa B



   a. Como podes representar numericamente a quantidade de botões verdes em relação à quantidade de botões amarelos em cada caixa?

   b. És capaz de dizer, com segurança, em qual das caixas existe uma maior percentagem de botões verdes, sem a calculares? Justifica.

2. Tenho 10 rebuçados e uma tablete de chocolate que vou dividir igualmente por 5 meninos.



   a. Qual a quantidade de rebuçados que cada criança recebe?

Número de Rebuçados	Percentagem

   b. Qual a quantidade de chocolate que cada criança recebe?

Fração de chocolate	Numeral decimal	Percentagem

3. No final do 2.º período, decorreu uma prova de sacos, em que todos os participantes partiam do ponto A e chegavam ao ponto B. A seguir é apresentada a distância percorrida por cada um dos quatro participantes, 20 segundos após o início da prova:

Luana – 25% Nicolau – 0,5 João – $\frac{3}{4}$ Taíssa – $\frac{2}{5}$

a. Assinala na reta a posição de cada participante neste momento da prova.

A ____ B

b. Quem vai à frente na prova? Explica.

4. A sala de espetáculos de Vila Nova da Alegria tem 200 lugares sentados.

a. No espetáculo de hoje estavam preenchidos $\frac{4}{5}$ destes lugares. Quantas pessoas estavam a assistir ao espetáculo sentadas?

b. Como a capacidade da sala está a revelar-se insuficiente, para a maioria dos espetáculos, resolveu-se aumentá-la em 25%. Quantos lugares sentados passará a sala a possuir?

5. Diz o que pode representar $\frac{5}{6}$.

6. Diz o que pode representar $\frac{14}{3}$.

7. $\frac{1}{5}$ e 0,5 representam o mesmo número? Explica.

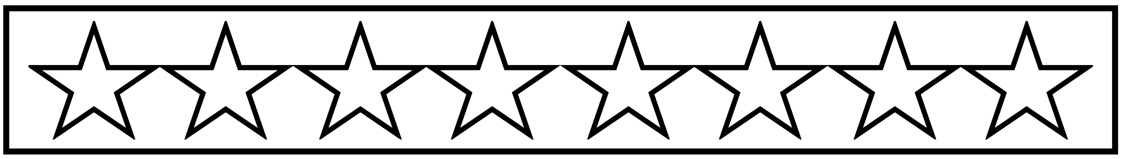
8. $\frac{2}{7}$ e 2,7 representam o mesmo número? Explica.

9. $\frac{1}{4}$ e 25% podem representar a mesma quantidade? Explica.

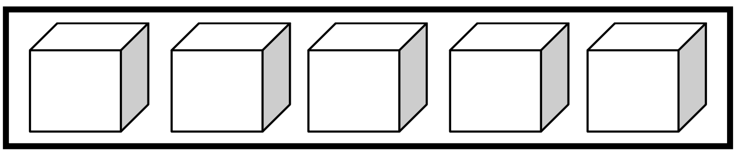
10. Qual das opções seguintes é o resultado de: $9 + \frac{1}{2} + 0,4 =$ ….?

a) 9,5 b) 10 c) não se pode calcular d) 11 e) 9,9

11. Pinta, se possível, 0,5 do total da figura.



12. Pinta, se possível, 60% do total da figura que se segue.



13. Preenche os espaços em branco, relativamente à parte sombreada de cada figura, sabendo que cada  representa **uma unidade**.

Representação Visual	Fração	Representação decimal	Percentagem
			
			
	$\frac{3}{5}$		
			

14. Considera que  representa uma unidade. Indica quanto representa a figura:

15. Considera que  representa 50%. Indica quanto representa a seguinte figura:

Anexo 10 – Objetivos das questões do teste final

A. (questões 7, 8 e 9)

- Reconhece que duas representações são ou não o mesmo número, mas não explica ou explica incorretamente. 3pontos

- Reconhece que duas representações são o mesmo número e explica corretamente. 6pontos

B. (questão 10)

- Reconhece que se podem adicionar (e adiciona corretamente) números racionais representados de diferentes formas. 2pontos

- Reconhece que se podem adicionar (mas adiciona incorretamente), números racionais representados de diferentes formas. 1ponto

- Não reconhece que se podem adicionar números racionais representados de diferentes formas. 0pontos

C. (questão 11)

- Consegue identificar 0,5, como sendo metade de uma figura. 1ponto

- Não consegue identificar 0,5, como sendo metade de uma figura. 0pontos

D. (questão 12)

- Consegue identificar 20%, como sendo a quinta parte de uma figura. 1ponto

- Não consegue identificar 20%, como sendo a quinta parte de uma figura. 0pontos

E. (questão 13, 14, 15 e 2)

- Dada a unidade, consegue representar uma região sombreada por uma fração (1 a 3). 3pontos

- Dada a unidade, consegue representar uma região sombreada por uma representação decimal (1 a 5). 6pontos

- Dada a unidade, consegue representar uma região sombreada por uma percentagem (1 a 6). 7pontos

- Dada a unidade, consegue representar fração pictoricamente. 1ponto

F. (questão 1a)

- Consegue expressar uma relação entre duas quantidades. 1ponto

- Expressa uma relação entre duas quantidades, mas troca-as. 0,5pontos

- Não consegue expressar uma relação entre duas quantidades. 0pontos

G. (questão 2a)

- É capaz de efetuar uma partilha equitativa de grandezas discretas. 1ponto

- Não é capaz de efetuar uma partilha equitativa de grandezas discretas. 0pontos

H. (questão 2b)

- É capaz de representar uma partilha equitativa de grandezas contínuas. 1ponto

- Não é capaz de representar uma partilha equitativa de grandezas contínuas. 0pontos

I. (questão 3a)

- Consegue representar racionais numa reta. 2pontos

- Consegue representar alguns racionais numa reta. 0,5pontos (por cada)

- Não consegue representar racionais numa reta. 0pontos

J. (questão 4)

- Consegue aplicar o significado de operador numa situação problemática. 1ponto

- Não consegue aplicar o significado de operador numa situação problemática. 0pontos

K. (questão 3b)

- Consegue comparar racionais. 1ponto

- Não consegue comparar racionais. 0pontos

L. (questão 1b)

- Consegue identificar a razão maior, e explica corretamente. 2pontos

- Consegue identificar a razão maior, mas não explica ou explica incorretamente. 1ponto

- Não consegue identificar a razão maior. 0pontos

Anexo 11 – Protocolo da entrevista para o teste final

Questão	Protocolo
1	- Explica o teu raciocínio (caso não seja clara a forma como o aluno pensou).
2	- Como organizaste a unidade? - Explica o teu raciocínio (2b) (caso não seja clara a forma como o aluno pensou).
3	- Como dividiste a linha?
4	- Explica o teu raciocínio (caso não seja clara a forma como o aluno pensou).
13	- Explica o teu raciocínio (caso não seja clara a forma como o aluno pensou).
14	- Explica o teu raciocínio (caso não seja clara a forma como o aluno pensou).

Anexo 12 – TAREFA 1
Partilha de chocolate

A Luana, o Nicolau e o João moram na mesma localidade, andam na Escola do Trigo e são da mesma turma, que por sinal é a melhor turma do concelho de Vila Nova da Alegria.

Hoje cada um deles trouxe para a escola uma tablete de chocolate do mesmo tamanho e da mesma marca. Como são muito amigos dos seus colegas, resolveram partilhá-las com eles.

- A **Luana** partilhou a sua tablete com uma amiga **(partiu-a em duas partes iguais)**.

- O **Nicolau** partilhou a sua tablete com três amigos **(partiu-a em quatro partes iguais)**.

- O **João** partilhou a sua tablete com sete amigos **(partiu-a em oito partes iguais)**.

1. Escreve de diferentes formas (fração, decimal e percentagem), o que representa cada uma das partes obtidas em cada tablete, em relação à totalidade da mesma?

Uma parte da tablete representada sob a forma de:			
	Fração	**Decimal**	**Percentagem**
Luana			
Nicolau			
João			

1.1. Com quem preferias partilhar a tablete? Explica.

1.2. Diz o que preferirias:

1.2.1. comer uma parte da tablete da Luana ou duas partes da tablete do Nicolau? Explica.

1.2.2. comer uma parte da tablete da Luana ou quatro partes da tablete do João? Explica.

1.2.3. comer duas partes da tablete do João ou uma parte da tablete do Nicolau? Explica.

1.3. Escreve sob a forma de fração cada uma das situações que analisas-te na questão anterior.

A.

	Fração
Luana	
Nicolau	

B.

	Fração
Luana	
João	

C.

	Fração
João	
Nicolau	

1.3.1. Que relação existe entre as frações obtidas? Explica o teu raciocínio tendo em conta as tuas respostas na questão 1.2.

1.4. Diz o que preferirias:

1.4.1. comer três partes da tablete do Nicolau ou seis partes da tablete do João? Explica.

1.4.2. comer cinco partes da tablete do João ou duas partes da tablete do Nicolau? Explica.

1.5. Escreve sob a forma de fração cada uma das situações que analisas-te na questão anterior.

A.

	Fração
Nicolau	
João	

B.

	Fração
João	
Nicolau	

1.5.1. Que relação existe entre as frações obtidas? Explica o teu raciocínio tendo em conta as tuas respostas na questão 1.4.

1.6. O que obténs se:

1.6.1. Juntares uma parte da tablete da Luana, com duas partes da tablete do Nicolau?

1.6.2. Juntares quatro partes da tablete do João, com duas partes da tablete do Nicolau, com uma parte da tablete da Luana?

Adaptado de Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F. & Gomes, H. (2008). *Números Racionais Não Negativos – Tarefas Para o 5º Ano*. DGCI – Ministério da Educação.

Anexo 13 – **TAREFA 2**

Adereços nos bastidores

Para premiar os bons resultados dos alunos, a Câmara Municipal de Vila Nova da Alegria entregou um conjunto de bilhetes à turma da Luana, do Nicolau e do João. Os bilhetes davam direito a uma entrada, à escolha, em um dos três eventos que o cineteatro apresentava naquele fim-de-semana: um concerto de música pop, uma peça de teatro e um desfile de fatos do século XVI.

O João recebeu bilhetes para o desfile de fatos do século XVI, tendo sido convidado para ir passar o dia aos bastidores do espetáculo. Foi um dia muito interessante mas bastante intenso. Logo pela manhã, a costureira Deolinda estava muito preocupada porque ainda não tinha colocado alguns adereços nos fatos do desfile e não sabia se estes existiam em número suficiente.

1. Deolinda ainda tinha que colocar os botões nos casacos mas não sabia se as caixas de botões que tinha no sótão seriam suficientes. Ajuda-a, verificando quantas caixas de botões, como a da figura, são necessárias para os quatro casacos que vão ser usados no desfile, sabendo que cada um leva cinco botões.

2. A costureira tem também de colocar laços em diversos vestidos que vão ser mostrados no desfile. Os laços encontram-se em caixas ainda fechadas mas a Deolinda sabe que cada caixa tem o número necessário para 16 vestidos.

2.1. Neste desfile vai aplicar laços em 30 vestidos. Quantas caixas terá que abrir?

2.2. Consegues descobrir quantos laços terá cada caixa, sabendo que nestes 30 vestidos a costureira vai aplicar 60 laços?

3. A Deolinda vendo que o João gostava de enigmas com números, colocou-lhe alguns desafios. Como terá o João respondido?

3.1. "Tenho três caixas iguais, cada uma com 18 moedas de ouro de imitação. Vou usar $\frac{4}{6}$ da primeira, $\frac{2}{3}$ da segunda e $\frac{6}{9}$ da terceira. Quantas moedas irei usar de cada uma delas?"

3.2. "Tenho 8 estrelas aqui comigo mas estas representam apenas $\frac{4}{5}$ do total de estrelas que tenho que aplicar neste toucado. Qual é o número total de estrelas que terei que aplicar?"

Anexo 14 – **TAREFA 3**

Eventos no cineteatro

A Luana, o Nicolau e o João, ficaram muito contentes com a oferta dos bilhetes e foram ao cineteatro, com os pais e os irmãos, mas assistiram a eventos diferentes:

Luana – concerto de música pop (Sábado à noite);

Nicolau – peça de teatro (Sábado à tarde);

João – desfile de fatos do século XVI (Domingo à tarde).

Quando se encontraram na escola, na segunda-feira, cada um contou o que foi ver e começaram a fazer uma retrospetiva da afluência de público de cada evento.

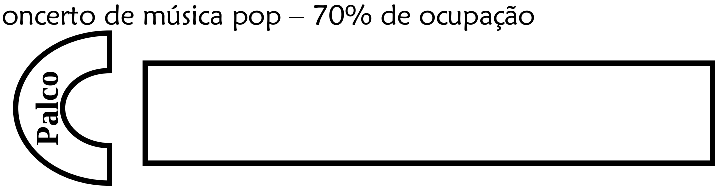
Luana: "A sala estava com 70% de ocupação".

Nicolau: "Apenas $\frac{2}{5}$ da sala estava ocupada".

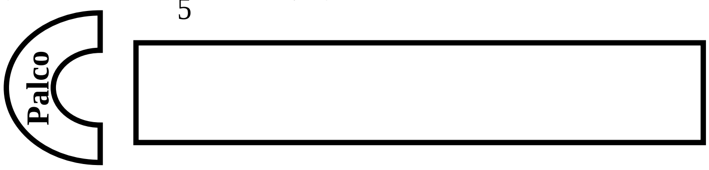
João: "A sala estava quase cheia, tinha 0,8 de ocupação".

1. Representa em cada barra, a ocupação da sala em cada evento.

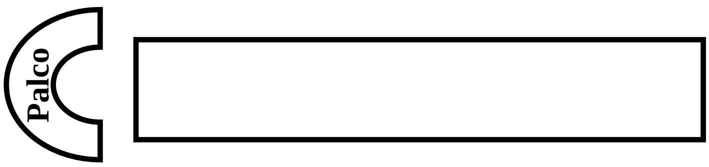
- Concerto de música pop – 70% de ocupação



- Peça de teatro – $\frac{2}{5}$ de ocupação



- Desfile de moda – 0,8 de ocupação



2. Se a sala tiver capacidade para 400 pessoas, determina quantas pessoas estiveram presentes em cada evento.

Anexo 15 – **TAREFA 4**
Cenário de espelhos

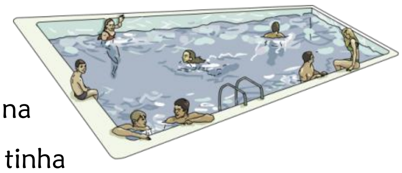
Na última aula de matemática, a professora pediu aos alunos para inventarem um problema com números racionais. O Nicolau que tinha acompanhado parte da montagem do cenário do teatro a que assistiu no cineteatro, lembrou-se de propor o seguinte:

O produtor da peça de teatro "O Espelho Dividido" mandou fazer espelhos com 1,2m de comprimento para colocar no fundo do palco, o qual tem 7 metros de largura. Identifica a quantidade exata de espelhos que vão ser usados?

Anexo 16 – **TAREFA 5**

Tarde nas piscinas municipais

Também a própria Escola do Trigo premiou a turma B, mas pelo seu comportamento exemplar e proporcionou um fim de tarde, na sexta-feira, nas piscinas municipais. Uma vez lá, os alunos que frequentavam aulas de natação, resolveram fazer uma pequena partida, para ver quem era o mais rápido a chegar à outra extremidade da piscina. Assim, a Luana, o Nicolau, o João e a Taíssa, colocaram-se a postos e ao sinal de um outro colega mergulharam na piscina e começaram a nadar em estilo livre. Passados alguns segundos, a Luana tinha percorrido $\frac{3}{4}$ da piscina; o Nicolau $\frac{2}{10}$, o João $\frac{3}{5}$ e a Taíssa $\frac{1}{2}$.



1. Localiza estas frações na barra e descobre quem vai à frente.

2. Outros alunos preferiram ir correr para as pistas de atletismo, fazendo corridas de 100 metros. Localiza nas barras seguintes, as frações seguintes e descobre quantos metros tinha percorrido cada aluno quando lhe foi tirada uma fotografia pelo professor de Educação Física.

2.1. A Andreia tinha percorrido $\frac{2}{4}$ da pista.

0 100

0 1

2.2. A Bruna tinha percorrido $\frac{4}{5}$ da pista.

0 100

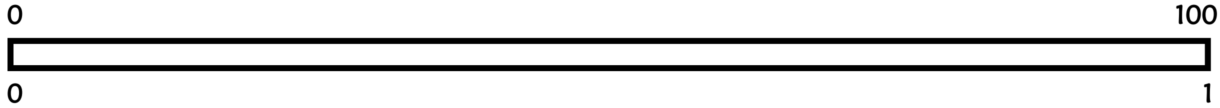
0 1

2.3. O Ismael tinha percorrido $\frac{6}{8}$ da pista.

0 100

0 1

2.4. O Hugo tinha percorrido $\frac{4}{8}$ da pista.



Completa a tabela indicando a parte da distância percorrida por cada aluno relativamente ao comprimento total da pista.

	Fração	Numeral decimal	Percentagem
Andreia			
Bruna			
Ismael			
Hugo			

Que relação existe entre as colunas da mesma linha?

Anexo 17 – TAREFA 6
Lanche no cineteatro

No final do dia havia um pequeno lanche distribuído por mesas redondas onde se podiam sentar 8, 5 e 4 pessoas.

- A Luana e o seu grupo sentaram-se numa mesa de 8;
- O Nicolau e o seu grupo sentaram-se numa mesa de 5;
- O João e o seu grupo sentaram-se numa mesa de 4.

Em cada mesa havia sanduíches e copos de sumo, mas em quantidades diferentes.

- Nas mesas de 8 havia 7 sanduíches e 16 copos de sumo;
- Nas mesas de 5 havia 4 sanduíches e 10 copos de sumo;
- Nas mesas de 4 havia 3 sanduíches e 8 copos de sumo.

1. No dia seguinte na escola a Luana, o Nicolau e o João comentaram o seu lanche, começaram a argumentar que a distribuição de sanduíches pelas mesas não tinha sido justa, porque uns comeram mais sanduíches que outros. Será que têm razão? Ou será que todos comeram a mesma quantidade? Porquê?

1.1. Será que era mais justo se as mesas de 8 e de 4 se juntassem, partilhando as suas sanduíches? Porquê?

1.1.1. Como procederias para que a distribuição fosse mais justa?

1.2. O problema da distribuição também se passa com os copos de sumo? Explica.

Adaptado de Fosnot, C. T. (2007). *Field Trips And Fund-Raisers – Introducing Fractions*. Orlando: Harcourt School Publishers.

Anexo 18 – **TAREFA 7**

Estacionamento no cineteatro

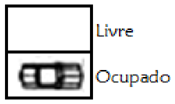
O cineteatro tinha à disposição, para os espectadores dos eventos, três parques de estacionamento, onde os pais da Luana, do Nicolau e do João estacionaram os seus automóveis.

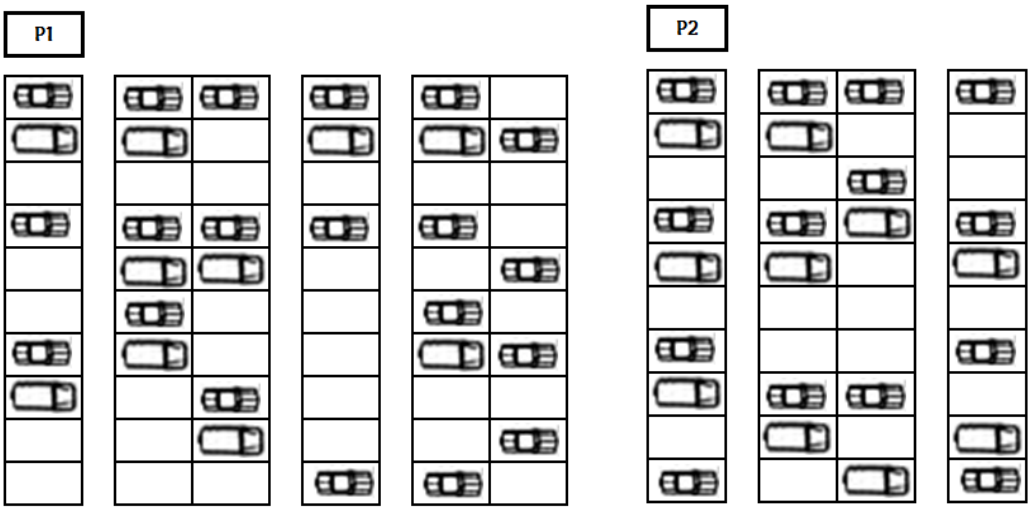
Pais da Luana – estacionaram no P1;

Pais do Nicolau – estacionaram no P2;

Pais do João – estacionaram no P3.

1. Observa os parques de estacionamento P1 e P2 e responde às questões que se seguem.





P1

Número total de lugares: _______

Lugares ocupados: ______

Lugares livres: ______

Fração do estacionamento ocupada: ______

Fração livre: ______

Percentagem ocupada: ______

Percentagem de lugares livres: ______

P2

Número total de lugares: _______

Lugares ocupados: ______

Lugares livres: ______

Fração do estacionamento ocupada: ______

Fração livre: ______

Percentagem ocupada: ______

Percentagem de lugares livres: ______

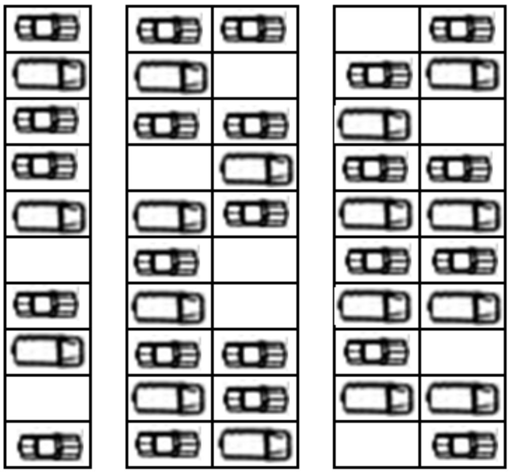
2. Representa em cada barra a ocupação de cada parque de estacionamento.

P1

P2

3. A seguir é mostrada a ocupação do parque P3.

P3



3.1. Representa na barra graduada a ocupação do parque.

0 50

0% 100%

4. O dono do estacionamento resolveu colocar uns painéis eletrónicos à entrada de cada parque, onde surgia a percentagem de ocupação de cada parque.

4.1. Qual dos parque consideras que foi mais rentável?

5. Representa numericamente a relação entre os lugares ocupados e os lugares livres dos três parques.

P1 =

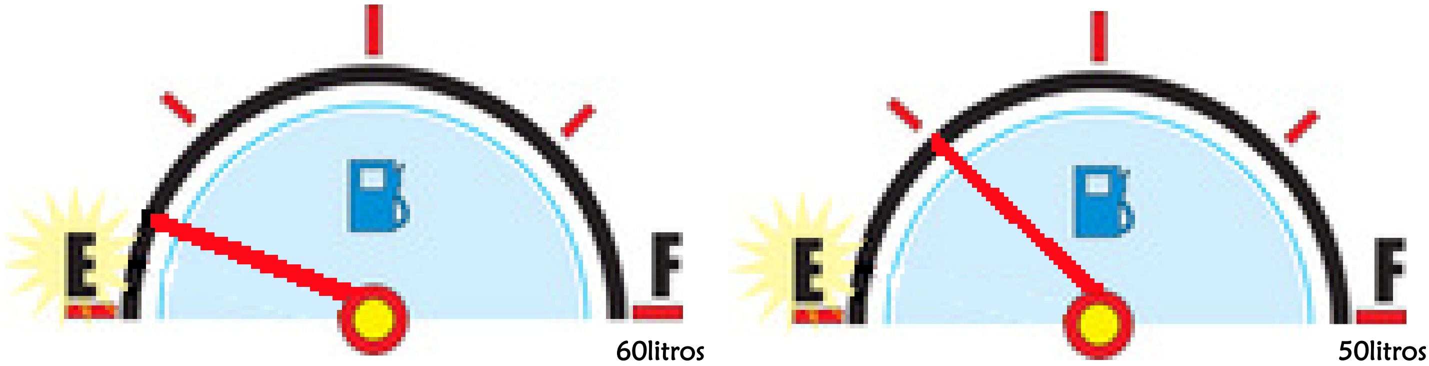
P2 =

P3 =

Adaptado de van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: an example from longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54(1)*, 9-35.

Anexo 19 – **TAREFA 8**
Depósito de gasolina

A imagem que é apresentada corresponde à capacidade de dois depósitos de combustível do automóvel dos pais do Nicolau e do João. Quando o depósito está cheio, a agulha está em cima do "F" (*full* – cheio), à medida que o combustível se vai gastando, a agulha desloca-se para a esquerda, em direção ao "E" (*empty* – vazio). Um dos depósitos tem uma capacidade de 50 litros e o outro de 60 litros.



Pais do Nicolau   Pais do João

1. Representa numericamente a parte de gasolina que já foi utilizada em cada automóvel.

Automóvel	Fração	Numeral decimal	Percentagem
Pais Nicolau			
Pais João			

2. Quantos litros de gasolina ainda está em cada depósito?

3. A cada 30km os automóveis gastam $2\frac{1}{2}$ litro de gasolina. Os pais do Nicolau encontravam-se a 90km da gasolineira e o pai do João estava a 15km. Sabendo que cada litro de gasolina custa 1,26€. Quanto vai pagar cada um para atestar o depósito?

Adaptado de van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E. & Keijer, R. (2008). *Fractions, percentages and proportions.* Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, Utrecht University. Sense Publishers.

Anexo 20 – TAREFA 9

O pintor Pedro e as vitaminas

1. O Pedro é pintor e foi-lhe pedido para pintar todas as paredes dos quatro quartos da casa da Luana. Na segunda-feira, para pintar um quarto, foram-lhe apresentadas três latas de tinta branca e duas latas de tinta azul, que o Pedro tinha de misturar. Na terça-feira, para pintar o segundo quarto deram-lhe duas latas de tinta branca e duas latas de tinta azul. Na quarta-feira só lhe disponibilizaram duas latas de tinta branca e uma lata de tinta azul para pintar o terceiro quarto. Finalmente, na quinta-feira apenas lhe deram uma lata de tinta branca e uma lata de tinta azul para pintar o último quarto.

1.1. Ordena os dias pela tonalidade da tinta obtida (mais claro para o mais escuro).

1.2. Haverá quartos que ficaram com a mesma tonalidade? Justifica.

2. A vitamina C (ácido ascórbico) que se encontra nos citrinos, tal como a laranja, é essencial para a absorção do ferro e para a recuperação de queimaduras e feridas. A mãe da Luana ao ter reparado que o pintor Pedro tinha uma ferida na sua mão, deu-lhe todos os dias sumo de laranja que a própria preparou. Para tal, usou um jarro com um litro de água, a que adicionou determinado número de copos de concentrado de laranja e colheres de açúcar, que foram variando ao longo dos dias.

	2ª Feira	3ª Feira	4ª Feira	5ª Feira
Copos de Concentrado de Laranja	5	4	4	2
Colheres de Açúcar	4	5	3	3

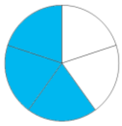
2.1. Em que dia o sumo de laranja estava mais docinho? Explica.

2.2. Em que dia o sumo de laranja estava mais amargo? Explica.

2.3. A Luana diz que a relação entre o nº de colheres de açúcar e o concentrado de laranja, na 2.ª feira, pode ser representado por 0,9. Terá razão? Justifica a tua resposta.

Anexo 21 – TAREFA 10

Compras na bit-@-byte

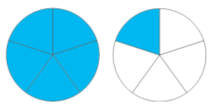
1. Na loja Bit-@-byte o preço de um MP3 é de 30€, mas está em promoção com 20% de desconto. Passada uma semana o MP3 teve um novo desconto de 40%, sobre o seu valor promocional. Será que isto equivale a um desconto de  sobre os 30€? Explica o teu raciocínio.

2. Na loja Bit-@-byte está um computador que custa 800€. No 1.º dia de cada mês a loja reduz o seu preço em 10% relativamente ao valor anterior.

2.1. Ao fim de quantos meses o preço do computador passa a ser inferior a metade do inicial?

2.2. Que desconto, aproximadamente, deve ser efetuado, todos os meses, para que um computador que custe 950€ passe a custar menos de 400€, a partir do 4.º mês?

3. A mãe do Nicolau fez um empréstimo, por dois anos, para comprar um computador topo de gama, da loja Bit-@-byte, que custava 3 500€. Ao fazer os cálculos observou que, no final dos dois anos, iria pagar a seguinte percentagem do valor do computador:



3.1. Quanto vai a mãe do Nicolau pagar pelo computador ao fim dos dois anos?

Adaptado de Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F. & Gomes, H. (2008). *Números Racionais Não Negativos – Tarefas Para o 5º Ano*. DGCI – Ministério da Educação.

Anexo 22 – TAREFA 11

Descobrindo comprimentos e quantidades

1. O Nicolau faz parte da família Neves e tem três irmãos: o Norberto com 8 anos, a Sofia com 5 anos e o Nelson com 3 anos. No início do ano, cada um dos seus irmãos construiu um comboio de cubinhos de madeira coloridos que o pai lhes arranjou na serralharia onde trabalha. Em abril, resolveram medir o comprimento dos seus comboios. Para tal, cada um esticou a fita métrica desde o início da primeira peça até ao fim da última, chegando aos seguintes valores: o comboio do Norberto mede um metro e vinte de comprimento, o da Sofia mede três quartos do comprimento do irmão mais velho e o comboio do irmão mais novo mede metade do comboio do Norberto.

1.1. Representa na dupla linha numérica, os comprimentos dos comboios dos três irmãos.

1.2. Indica, na tabela, os comprimentos dos comboios dos irmãos mais novos em relação ao comprimento do comboio do Norberto, sob a forma de fração e de numeral decimal.

Irmão	Fração	Numeral decimal
Sofia		
Nelson		

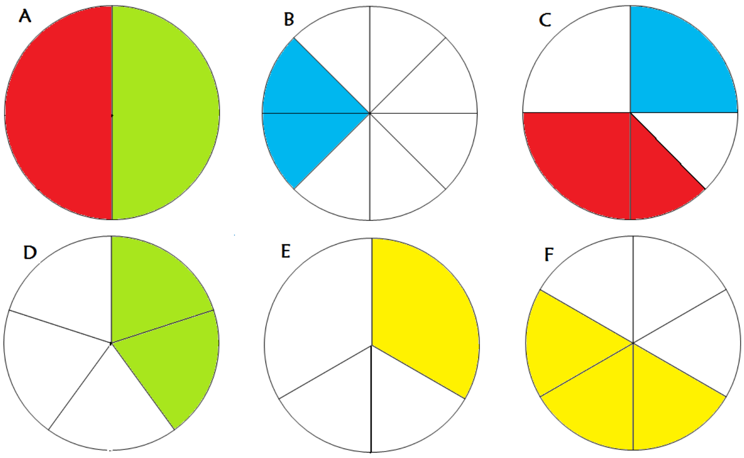
1.3. Ontem, os irmãos voltaram a fazer o mesmo que fizeram em abril e verificaram que todos os comboios tinham aumentado um terço do seu comprimento. Qual o comprimento que têm agora os comboios de cada um dos três irmãos?

Irmãos	Comprimento em maio
Norberto	
Sofia	
Nelson	

1.4. Também o Jorge começou a construir um comboio como o do Norberto, uma vez que o seu pai também é serralheiro. No entanto, o Jorge começou a sua construção muito antes do Norberto. Quando o Norberto lhe disse o comprimento do seu comboio, o Jorge respondeu: “o comprimento do teu comboio é apenas 0,80 do meu”. Qual o comprimento do comboio do Jorge?

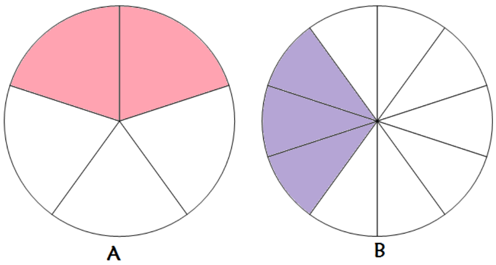
2. A professora de Matemática propôs um problema à turma da Luana:

"Ontem numa grande festa de anos havia seis bolos do mesmo tamanho, mas cortados em fatias de diferentes tamanhos. As fatias coloridas de uma mesma cor, nos vários bolos, foram comidas pelas mesmas pessoas e as que estão em branco não foram comidas.



2.1. Que quantidade de bolo comeu cada uma das quatro pessoas?

2.2. Imagina agora outros dois bolos:



2.2.1. Quem comeu mais bolo? A pessoa A ou a pessoa B? Justifica.

2.2.2. Que quantidade de bolo comeram as duas pessoas juntas?

2.2.3. Qual a diferença entre as quantidades de bolo comido pela pessoa A e pela pessoa B?