Title: Algebry Liego macierzy nieskończonych

Author: Sebastian Żurek

Citation style: Żurek, Sebastian. (2018). Algebry Liego macierzy nieskończonych. Praca doktorska. Katowice : Uniwersytet Śląski

Uniwersytet Śląski
Instytut Matematyki

Sebastian Żurek

Algebry Liego macierzy nieskończonych

Rozprawa doktorska
napisana pod kierunkiem
dr. hab. inż.
Waldemara Hołubowskiego

Katowice 2018

Spis treści

Spis oznaczeń

$\mathbf{R}$	dowolny pierścień przemienny z jedynką
$\mathbf{K}$	dowolne ciało
$\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$	dowolne algebry Liego
P	dowolny $\mathbf{R}$-moduł
$\mathfrak{gl}(P)$	algebra Liego endomorfizmów P
$[x, y]$	nawias Liego elementów x i y
$[M, N]$	komutant zbiorów M i N
$\mathfrak{I}$	ideał algebry Liego
$\mathfrak{I} \lhd \mathfrak{L}$	$\mathfrak{I}$ jest ideałem algebry Liego $\mathfrak{L}$
ϕ	homomorfizm algebr Liego
$Z(\mathfrak{L})$	centrum algebry Liego $\mathfrak{L}$
$\mathfrak{L}^n$	wyraz dolnego ciągu centralnego algebry Liego $\mathfrak{L}$
$\mathbb{N}$	zbiór liczb naturalnych (bez zera)
φ, ψ	różniczkowania algebry Liego
$\mathrm{Der}(\mathfrak{L})$	zbiór wszystkich różniczkowań algebry Liego $\mathfrak{L}$
ad_a	różniczkowanie wewnętrzne algebry Liego indukowane przez a
$\mathrm{IDer}(\mathfrak{L})$	zbiór wszystkich różniczkowań wewnętrznych algebry Liego $\mathfrak{L}$
$M(n, \mathbf{R})$	zbiór wszystkich macierzy wymiaru $n \times n$ o współczynnikach z $\mathbf{R}$
E	macierz jednostkowa
E_{ij}	macierz, której jedynym niezerowym współczynnikiem jest 1 w kolumnie j i wierszu i
$\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$	ogólna liniowa algebra Liego macierzy wymiaru $n \times n$ o współczynnikach z $\mathbf{R}$
δ_{ij}	symbol Kroneckera
V	przestrzeń liniowa
$\mathfrak{d}(n, \mathbf{R})$	algebra Liego macierzy diagonalnych wymiaru $n \times n$ o współczynnikach z $\mathbf{R}$
$\mathfrak{d}_{sc}(n, \mathbf{R})$	algebra Liego macierzy skalarnych wymiaru $n \times n$ o współczynnikach z $\mathbf{R}$
$\mathfrak{t}(n, \mathbf{R})$	algebra Liego macierzy górnotrójkątnych wymiaru $n \times n$ o współczynnikach z $\mathbf{R}$
$\mathfrak{n}(n, \mathbf{R})$	algebra Liego macierzy ściśle górnotrójkątnych wymiaru $n \times n$ o współczynnikach z $\mathbf{R}$
$\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$	specjalna liniowa algebra Liego macierzy wymiaru $n \times n$ o współczynnikach z $\mathbf{R}$
$\mathrm{Tr}(A)$	ślad macierzy A

$\mathrm{char}(\mathbf{R})$	charakterystyka pierścienia $\mathbf{R}$
diag_D	różniczkowanie diagonalne algebry Liego indukowane przez D
μ_c	różniczkowanie centralne dla $\mathfrak{n}(n, \mathbf{R})$ indukowane przez c
$\rho^{1,2}_{(r,s)}$, $\rho^{n-1,n}_{(r,s)}$	różniczkowania ekstremalne typu I
$\theta^{(12)}_s$, $\theta^{(23)}_s$	różniczkowania ekstremalne typu II
η_χ	różniczkowanie centralne dla $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ indukowane przez χ
$\psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$	różniczkowanie permutacyjne
$\mathbb{C}$	ciało liczb zespolonych
$\dim \mathfrak{L}$	wymiar algebry Liego $\mathfrak{L}$
$a \mid b$	a dzieli b
$a \nmid b$	a nie dzieli b
$\mathfrak{so}(n, \mathbf{R})$	specjalna ortogonalna algebra Liego
$\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$	algebra Liego macierzy symplektycznych
$\mathbb{R}$	ciało liczb rzeczywistych
$\mathfrak{g}'(A)$	algebra Kaca-Moody'ego
$\mathfrak{g}'(A_\infty)$	uogólnienie algebry Kaca-Moody'ego
$\mathbb{Z}$	pierścień liczb całkowitych
$\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$	algebra Liego macierzy o skończonej liczbie niezerowych współczynników, indeksowanych zbiorem liczb całkowitach, o współczynnikach z $\mathbb{C}$)
$\mathbf{K}^{(\mathbb{N})}$	zbiór ciągów o wyrazach z $\mathbf{K}$ o skończonej liczbie niezerowych elementów
$\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$	algebra Liego macierzy o skończonej liczbie niezerowych współczynników, indeksowanych zbiorem liczb całkowitych, o śladzie równym zero i o współczynnikach z $\mathbb{C}$)
$\mathfrak{gl}_J(\mathbb{Z}, \mathbf{R})$	algebra Liego macierzy indeksowanych zbiorem liczb całkowitych, o skończonej liczbie niezerowych przekątnych i o współczynnikach z $\mathbf{R}$
$\overline{\mathfrak{g}}'(A_\infty)$	uzupełnienie algebry $\mathfrak{g}'(A_\infty)$
$M(\mathbb{N}, \mathbf{R})$	zbiór wszystkich nieskończonych macierzy indeksowanych zbiorem liczb naturalnych o współczynnikach z $\mathbf{R}$
$M_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$	zbiór nieskończonych macierzy indeksowanych zbiorem liczb naturalnych o skończonej liczbie niezerowych współczynników w każdej kolumnie i o współczynnikach z $\mathbf{R}$
$\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$	algebra Liego nieskończonych macierzy indeksowanych zbiorem liczb naturalnych o skończonej liczbie niezerowych współczynników w każdej kolumnie i o współczynnikach z $\mathbf{R}$
$M_{rcf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$	zbiór nieskończonych macierzy indeksowanych zbiorem liczb naturalnych o skończonej liczbie niezerowych współczynników w każdej kolumnie, w każdym wierszu i o współczynnikach z $\mathbf{R}$
$\mathfrak{gl}_{rcf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$	algebra Liego nieskończonych macierzy indeksowanych zbiorem liczb naturalnych o skończonej liczbie niezerowych współczynników w każdej kolumnie, w każdym wierszu i o współczynnikach z $\mathbf{R}$

$\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{Z},\mathbf{R})$	algebra Liego nieskończonych macierzy indeksowanych zbiorem liczb całkowitych o skończonej liczbie niezerowych współczynników w każdej kolumnie i o współczynnikach z $\mathbf{R}$
$\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N},\mathbf{R})$	algebra Liego nieskończonych macierzy skalarnych indeksowanych zbiorem liczb naturalnych o współczynnikach z $\mathbf{R}$
$\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N},\mathbf{R})$	algebra Liego nieskończonych macierzy indeksowanych zbiorem liczb naturalnych o skończonej liczbie niezerowych wierszy i o współczynnikach z $\mathbf{R}$
$\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N},\mathbf{R})$	algebra Liego nieskończonych macierzy indeksowanych zbiorem liczb naturalnych o skończonej liczbie niezerowych wierszy, o śladzie równym zero i o współczynnikach z $\mathbf{R}$
$\mathfrak{n}(\mathbb{N},\mathbf{R})$	algebra Liego nieskończonych macierzy ściśle górnotrójkątnych indeksowanych zbiorem liczb naturalnych o współczynnikach z $\mathbf{R}$
$\mathfrak{d}(\mathbb{N},\mathbf{R})$	algebra Liego nieskończonych macierzy diagonalnych indeksowanych zbiorem liczb naturalnych o współczynnikach z $\mathbf{R}$
$\mathrm{ND}(\mathbb{N},\mathbf{R})$	podzbiór $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ składający się ze wszystkich macierzy, które mają wyłącznie zera na głównej przekątnej
η_σ	różniczkowanie centralne dla $\mathfrak{gl}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ indukowane przez σ

Wstęp

Prace S. Liego, W. Killinga i E. Cartana były początkiem systematycznego rozwoju teorii algebr Liego skończonego wymiaru. Wymienić trzeba tu klasyfikację prostych algebr Liego skończonego wymiaru nad ciałami algebraicznie domkniętymi (dla ciał charakterystyki zero w pracach E. Cartana i W. Killinga, a dla ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki $p > 3$ w pracach R. E. Blocka, R. L. Wilsona, H. Stradego, A. Premeta) oraz teorię reprezentacji (klasyfikację modułów nieprzywiedlnych liniowych algebr Liego) [9–11, 27, 28, 36, 38].

Do dnia dzisiejszego nie istnieje ogólna teoria algebr Liego nieskończonego wymiaru. Kilka klas takich algebr było badanych z geometrycznego punktu widzenia: algebry Liego pól wektorowych, algebry Liego gładkich odwzorowań z rozmaitości w algebry Liego skończonego wymiaru, klasyczne algebry Liego operatorów w przestrzeniach Banacha i Hilberta oraz algebry Kaca-Moody'ego [29]. Algebraiczny punkt widzenia wystąpił w badaniach wolnych algebr Liego i algebr Liego z gradacją. W [1] opisano rezultaty dotyczące krat podalgebr nieskończenie wymiarowych algebr. W wielu pracach pojawiają się, jako przykłady, algebra Liego $\mathfrak{gl}_\infty$ macierzy nieskończonych $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nad $\mathbb{C}$ mających tylko skończenie wiele niezerowych współczynników i algebra Liego $\mathfrak{gl}_J$ – uogólnionych macierzy Jacobiego mających niezerowe współczynniki tylko w skończenie wielu przekątnych. Odgrywają one istotną rolę w teorii reprezentacji i fizyce.

W literaturze brak jest systematycznych badań algebr Liego macierzy nieskończonych. W niniejszej dysertacji rozpatrujemy algebrę Liego nieskończonych macierzy column-finite indeksowanych $\mathbb{N}$, opisujemy ich kratę ideałów i różniczkowania. Rozważamy macierze nad pierścieniem $\mathbf{R}$, przemiennym i z jednością.

W rozdziale pierwszym podajemy podstawowe definicje. Opisujemy ideały i różniczkowania macierzowych algebr Liego skończonego wymiaru. Przedstawiamy klasyfikację skończenie wymiarowych prostych algebr Liego nad $\mathbb{C}$.

W rozdziale drugim opisujemy różne kierunki w badaniach algebr Liego nieskończonego wymiaru i prezentujemy dwa przykłady algebr Liego nieskończonych macierzy $\mathfrak{gl}_\infty$ i $\mathfrak{gl}_J$.

W trzecim rozdziale definiujemy algebrę Liego $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ macierzy column-finite nad $\mathbf{R}$ indeksowanych liczbami naturalnymi. Dowodzimy, że algebra Liego $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ jest izomorficzna z algebrą Liego macierzy column-finite indeksowanych liczbami całkowitymi. To pokazuje, że wszystkie wyniki zaprezentowane w niniejszej dysertacji są prawdziwe dla algebr Liego macierzy $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ column-finite. Przedstawiamy najważniejsze podalgebry Liego $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, dowodzimy pewnych ich własności.

Czwarty rozdział zawiera rezultaty dotyczące algebry Liego $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ macierzy nieskończonych o śladzie równym zero, mających niezerowe współczynniki tylko w skończonej liczbie wierszy. Opisujemy jej strukturę. Dla dowolnego ciała $\mathbf{K}$ dowodzimy prostoty $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$. Klasyfikacja finitarnych prostych algebr Liego nad ciałem charakterytyki 0 zawarta jest w pracach A. A. Baranova, a dla ciał algebraicznie domkniętych charakterytyki $p > 3$ w pracach A. A. Baranova i H. Stradego. Algebra Liego $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ jest macierzową reprezentacją odpowiadającej jej finitarnej algebry Liego, w pracach [23, 26] zaprezentowany jest dowód prostoty wykorzystujący rachunek macierzowy i niezależny od charakterytyki ciała.

W piątym rozdziale dowodzimy, że każde różniczkowanie algebry Liego ściśle górnotrójkątnych nieskończonych macierzy nad $\mathbf{R}$ jest sumą różniczkowania wewnętrznego i diagonalnego. Wynik ten opublikowano w [24]. Pokazujemy również, że dowolne różniczkowanie $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ jest sumą różniczkowania wewnętrznego i centralnego [25].

Ostatni rozdział zawiera opis kraty ideałów $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$, który nie zależy od charakterystyki ciała $\mathbf{K}$. Jako wniosek otrzymujemy nowy przykład nieprzeliczalnie wymiarowej prostej algebry Liego [25].

Rozdział 1

Wiadomości wstępne

1.1. Podstawowe definicje i przykłady

W tym rodziale przedstawimy podstawowe informacje dotyczące algebr Liego. Sformułowania definicji i twierdzeń pochodzą z książek [6, 9, 22].

Definicja 1.1. Niech $\mathbf{R}$ będzie pierścieniem przemiennym z jedynką. **Algebrą Liego** $\mathfrak{L}$ nad $\mathbf{R}$ nazywamy $\mathbf{R}$-moduł z określonym działaniem dwuargumentowym $[,] : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$, tzw. nawiasem Liego, które dla dowolnych $x, y, z \in \mathfrak{L}$ i $a, b \in \mathbf{R}$ spełnia następujące warunki:

1. dwuliniowość:
   $[ax + bz, y] = a[x, y] + b[z, y]$
   $[x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z]$
2. antysymetryczność:
   $[x, y] = -[y, x]$
3. tożsamość Jacobiego:
   $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

Formalnie struktura $\mathfrak{L}$ jest $\mathbf{R}$-algebrą, a nazwy *algebra* Liego często używa się tylko w przypadku, gdy $\mathbf{R}$ jest ciałem. W niniejszej pracy będziemy jednak posługiwać się terminem algebra, jak w książce Bourbakiego ([9]), gdyż nie powinno to doprowadzić do nieporozumień.

Przykład 1.1. W dowolnym $\mathbf{R}$-module możemy określić nawias Liego jako $[x, y] = 0$ dla każdego x i y. Otrzymaną algebrę Liego nazywamy **abelową**.

Przykład 1.2. Dla każdej $\mathbf{R}$-algebry łącznej można skonstruować algebrę Liego definiując działanie jako $[x, y] = xy - yx$.

Przykład 1.3. Wybierając $\mathbf{R}$-algebrę wszystkich endomorfizmów $\mathbf{R}$-modułu P i definiując działanie jak w poprzednim przykładzie, otrzymujemy *algebrę Liego endomorfizmów* P, oznaczaną przez $\mathfrak{gl}(P)$.

Definicja 1.2. Jeżeli algebra Liego $\mathfrak{L}$ posiada bazę (jako $\mathbf{R}$-moduł), to moc dowolnej jej bazy będziemy nazywać **wymiarem** danej algebry Liego i oznaczać $\dim \mathfrak{L}$.

Powyższa definicja jest poprawna, gdyż w niniejszej pracy $\mathbf{R}$ jest zawsze pierścieniem przemiennym z jedynką, a w takim przypadku wszystkie bazy $\mathbf{R}$-modułu są równoliczne (o ile baza istnieje). Gdy $\mathbf{R}$ jest ciałem, to dana algebra Liego jest przestrzenią liniową i definicja ta odpowiada klasycznej definicji wymiaru.

Definicja 1.3. Niech $\mathfrak{L}$ i $\mathfrak{M}$ będą algebrami Liego nad $\mathbf{R}$. Odwzorowanie $\phi : \mathfrak{L} \to \mathfrak{M}$, która dla dowolnych $x, y \in \mathfrak{L}$ i $a, b \in R$ spełnia warunki:

$$\phi(ax + by) = a\phi(x) + b\phi(y),$$

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)],$$

nazywamy **homomorfizmem**.
Homomorfizm będący suriekcją nazywamy **epimorfizmem**.
Homomorfizm będący iniekcją nazywamy **monomorfizmem**.
Homomorfizm będący bijekcją nazywamy **izomorfizmem**. Algebry $\mathfrak{L}$ i $\mathfrak{M}$ nazywamy wtedy izomorficznymi, co oznaczamy przez $\mathfrak{L} \cong \mathfrak{M}$.

Definicja 1.4. Podzbiór $\mathfrak{M}$ algebry Liego $\mathfrak{L}$ nazywamy **podalgebrą** $\mathfrak{L}$ jeśli dla dowolnych $x, y \in \mathfrak{M}$ i $a, b \in \mathbf{R}$ zachodzi $ax + by \in \mathfrak{M}$ oraz $[x, y] \in \mathfrak{M}$.

Zauważmy, że każda podalgebra jest także algebrą Liego z działaniem będącym ograniczeniem działania w $\mathfrak{L}$ do zbioru $\mathfrak{M}$.

Definicja 1.5. Niech M i N będą dowolnymi podzbiorami algebry Liego $\mathfrak{L}$. **Komutantem** M i N nazywamy zbiór wszystkich kombinacji liniowych nawiasów Liego:

$$[M, N] := \{z \in \mathfrak{L} | z = \sum_{i,j} a_{ij}[x_i, y_j], x_i \in M, y_i \in N, a_{ij} \in \mathbf{R}\}.$$

Definicja 1.6. Podalgebrę $\mathfrak{I}$ algebry Liego $\mathfrak{L}$ nazywamy **ideałem**, jeśli spełniony jest warunek $[\mathfrak{I}, \mathfrak{L}] \subseteq \mathfrak{I}$. Fakt ten będziemy zapisywali $\mathfrak{I} \triangleleft \mathfrak{L}$.

Ze względu na antysymetryczność nawiasu Liego powyższy warunek jest równoważny $[\mathfrak{L}, \mathfrak{I}] \subseteq \mathfrak{I}$, a więc każdy ideał jest dwustronny.
Każda niezerowa algebra Liego $\mathfrak{L}$ ma co najmniej dwa ideały – cały zbiór $\mathfrak{L}$ oraz zbiór $\{0\}$. Ideały te nazywamy **trywialnymi**. Ideał, który nie jest trywialny, nazywamy ideałem **właściwym**.

Definicja 1.7. Algebrę Liego nazywamy **prostą** jeśli nie ma ona ideałów właściwych i nie jest abelowa.

Definicja 1.8. Niech $\mathfrak{L}$ będzie algebrą Liego, a $\mathfrak{I}$ pewnym jej ideałem. Na $\mathfrak{L}$ definiujemy relację równoważności $\sim$, taką, że $x \sim y \iff x - y \in \mathfrak{I}$. Klasę równoważności elementu x oznaczamy

$$\overline{x} = \{y \in \mathfrak{L} | x - y \in \mathfrak{L}\}.$$

Algebrę ilorazową $\mathfrak{L}/\mathfrak{I}$ definiujemy jako zbiór wszystkich klas równoważności z działaniami danymi wzorami

$$a\overline{x} = \overline{ax} \text{ dla } a \in \mathbf{R},$$

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y},$$

$$[\overline{x}, \overline{y}] = \overline{[x, y]}.$$

Określona w ten sposób algebra $\mathfrak{L}/\mathfrak{I}$ spełnia definicję algebry Liego.

Definicja 1.9. Niech $\mathfrak{I}$ będzie ideałem algebry Liego $\mathfrak{L}$. **Kowymiarem** ideału $\mathfrak{I}$ w $\mathfrak{L}$ nazywamy wymiar algebry $\mathfrak{L}/\mathfrak{I}$.

Definicja 1.10. **Centrum** algebry $\mathfrak{L}$ nazywamy zbiór
$$Z(\mathfrak{L}) = \{x \in \mathfrak{L} | \forall_{y \in \mathfrak{L}}\ [x, y] = 0\}.$$

Można zauważyć, że centrum jest abelową podalgebrą oraz ideałem danej algebry.

Definicja 1.11. Niech $\mathfrak{L}$ będzie algebrą Liego. Ciąg $\mathfrak{L}^1, \mathfrak{L}^2, \mathfrak{L}^3, \dots$ zdefiniowany
$$\mathfrak{L}^1 = \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L}^2 = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}], \quad \mathfrak{L}^n = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}^{n-1}],$$
nazywamy **dolnym ciągiem centralnym**.

Definicja 1.12. Algebrę $\mathfrak{L}$ nazywamy **nilpotentną**, jeżeli istnieje liczba n, taka że $\mathfrak{L}^n = \{0\}$.
Algebrę $\mathfrak{L}$ nazywamy **rezydualnie nilpotentną**, jeżeli $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{L}^n = \{0\}$.

Definicja 1.13. Niech $\mathfrak{L}$ będzie algebrą Liego nad $\mathbf{R}$. Odwzorowanie $\mathbf{R}$-liniowe $\varphi : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ nazywamy **różniczkowaniem**, jeśli spełnia warunek Leibniza:
$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)].$$

Zbiór wszystkich różniczkowań algebry $\mathfrak{L}$ oznaczamy przez $\mathrm{Der}(\mathfrak{L})$. Ponieważ $\mathrm{Der}(\mathfrak{L})$ składa się z odwzorowań $\mathbf{R}$-liniowych, możemy zdefiniować ich sumę i iloczyn w standardowy sposób. Dla dowolnych $\varphi, \psi \in \mathrm{Der}(\mathfrak{L})$ oraz $a, b \in \mathbf{R}$ mamy:
$$(a\varphi + b\psi)(x) = a\varphi(x) + b\psi(x),$$
$$(\varphi\psi)(x) = \varphi(\psi(x)).$$
W ogólnym przypadku $\varphi\psi$ nie jest różniczkowaniem. Można jednak pokazać, że $[\varphi, \psi] = \varphi\psi - \psi\varphi$ jest różniczkowaniem. $\mathrm{Der}(\mathfrak{L})$ jest więc algebrą Liego, izomorficzną z podalgebrą $\mathfrak{gl}(\mathfrak{L})$.

Przykład 1.4. Niech $\mathfrak{L}$ będzie algebrą Liego i $a \in \mathfrak{L}$. Różniczkowanie $\mathfrak{L}$ zdefiniowane $\mathrm{ad}_a : x \to [a, x]$, $x \in \mathfrak{L}$, nazywamy **różniczkowaniem wewnętrznym** indukowanym przez a.

Zbiór $\mathrm{IDer}(\mathfrak{L})$ wszystkich różniczkowań wewnętrznych algebry $\mathfrak{L}$ jest podalgebrą $\mathrm{Der}(\mathfrak{L})$.

Definicja 1.14. Ideał $\mathfrak{I}$ algebry Liego $\mathfrak{L}$ nazywamy **charakterystycznym**, jeżeli $\varphi(\mathfrak{I}) \subseteq \mathfrak{I}$ dla każdego $\varphi \in \mathrm{Der}(\mathfrak{L})$.

1.2. Macierzowe algebry Liego skończonego wymiaru

Niech $M(n, \mathbf{R})$ oznacza zbiór macierzy $n \times n$ o współczynnikach z pierścienia $\mathbf{R}$. Zbiór ten można traktować jako $\mathbf{R}$-moduł o bazie składającej się z macierzy E_{ij}, których jedynym niezerowym współczynnikiem jest 1 w wierszu i i kolumnie j. Definiując nawias Liego jako $[X, Y] = XY - YX$ dla $X, Y \in M(n, \mathbf{R})$ otrzymujemy algebrę Liego wymiaru n^2 nazywaną **ogólną liniową algebrą Liego** i oznaczaną $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$. Nawias Liego dowolnych dwu macierzy bazowych E_{ij} i E_{kl} dany jest wzorem
$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{li} E_{kj},$$

gdzie δ oznacza deltę Kroneckera.

Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbf{K}$. Wybierając bazę $\{e_1, \ldots, e_n\}$, każdemu endomorfizmowi A przestrzeni V możemy przyporządkować macierz $M(A) = (m_{ij})$, gdzie $Ae_i = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}e_k$. Przyporządkowanie to wyznacza izomorfizm przestrzeni $\mathfrak{gl}(V)$ i $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{K})$. Ponadto wybierając inną bazę $\{d_1, \ldots, d_n\}$, w której endomorfizmowi A odpowiada macierz $M'(A)$, i definiując endomorfizm S jako $d_i = Se_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ otrzymujemy równość $M'(A) = M(S^{-1})M(A)M(S)$.

Algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ zawiera kilka istotnych podalgebr. **Algebra macierzy diagonalnych** składa się z macierzy postaci

$$\mathfrak{d}(n, \mathbf{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) | a_{ij} = 0 \text{ dla } i \neq j\}.$$

Jest to algebra abelowa wymiaru n.

Algebra macierzy skalarnych:

$$\mathfrak{d}_{sc}(n, \mathbf{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) | a_{ij} = 0 \text{ dla } i \neq j \text{ oraz } \forall_{i,j}\ a_{ii} = a_{jj}\}$$

jest jednowymiarową algebrą abelową. Można pokazać, że zbiór macierzy skalarnych jest centrum algebry $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ (analogiczny dowód dla macierzy nieskończonych prezentujemy w 3.1).

Algebra macierzy górnotrójkątnych:

$$\mathfrak{t}(n, \mathbf{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) | a_{ij} = 0 \text{ dla } i \leq j\}$$

ma wymiar równy $\frac{1}{2}(n^2 + n)$. Nie jest abelowa dla $n > 1$, a jej centrum

$$Z(\mathfrak{t}(n, \mathbf{R})) = \mathfrak{d}_{sc}(n, \mathbf{R}).$$

Algebra macierzy ściśle górnotrójkątnych:

$$\mathfrak{n}(n, \mathbf{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) | a_{ij} = 0 \text{ dla } i < j\}$$

ma wymiar równy $\frac{1}{2}(n^2 - n)$. Jest algebrą nilpotentną. Nie jest abelowa dla $n > 2$, a jej centrum

$$Z(\mathfrak{n}(n, \mathbf{R})) = \{rE_{1n} | r \in \mathbf{R}\}.$$

Ponieważ $\mathfrak{t}(1, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}$, $\mathfrak{n}(2, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}$ oraz $\mathfrak{n}(1, \mathbf{R}) = \{0\}$, więc algebry te są trywialnie abelowe.

Specjalna liniowa algebra Liego, składająca się z macierzy postaci

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) | \operatorname{Tr}(A) = 0\},$$

ma wymiar równy $n^2 - 1$, a jej bazę (dla $n > 1$, gdyż $\mathfrak{sl}(1, \mathbf{R}) = \{0\}$) stanowią macierze E_{ij}, $i \neq j$, oraz $E_{ii} - E_{i+1,i+1}$, $1 \leq i < n$. Centrum specjalnej liniowej algebry Liego

$$Z(\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})) = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}) \cap \mathfrak{d}_{sc}(n, \mathbf{R}) = \begin{cases} \{0\} & \text{gdy } \operatorname{char}(\mathbf{R}) \nmid n, \\ \mathfrak{d}_{sc}(n, \mathbf{R}) & \text{gdy } \operatorname{char}(\mathbf{R}) \mid n. \end{cases}$$

Znaczenie macierzowych algebr Liego ilustrują poniższe twierdzenia ([9, 28]):

Twierdzenie 1.1 (Ado). *Każda skończenie wymiarowa algebra Liego nad ciałem charakterystyki zero ma skończenie wymiarową wierną reprezentację.*

Twierdzenie 1.2 (Iwasawa). *Każda skończenie wymiarowa algebra Liego nad ciałem dodatniej charakterystyki ma skończenie wymiarową wierną reprezentację.*

A zatem każda skończenie wymiarowa algebra Liego nad dowolnym ciałem $\mathbf{K}$ jest izomorficzna z podalgebrą $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{K})$.

1.3. Różniczkowania i ideały macierzowych algebr Liego skończonego wymiaru

Przedstawimy teraz znane wyniki dotyczące różniczkowań algebr Liego $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ i $\mathfrak{n}(n, \mathbf{R})$ oraz ideałów $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$. Dowody twierdzeń można znaleźć w pracach [34] i [37]. Opis różniczkowań innych podalgebr $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ można znaleźć w [37].

Różniczkowania wewnętrzne scharakteryzowaliśmy w przypadku dowolnej algebry Liego w rozdziale 1.1. Zdefiniujmy najpierw pozostałe typy różniczkowań $\mathfrak{n}(n, \mathbf{R})$ potrzebne do sformułowania twierdzenia klasyfikacyjnego.

Definicja 1.15. 1. Niech $D \in \mathfrak{d}(n, \mathbf{R})$. Różniczkowanie algebry $\mathfrak{n}(n, \mathbf{R})$ zdefiniowane $\mathrm{diag}_D : X \to [D, X]$, $X \in \mathfrak{n}(n, \mathbf{R})$, nazywamy **różniczkowaniem diagonalnym** indukowanym przez D.

2. Niech $n \geq 4$ i $c = (c_2, c_3, \ldots, c_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-3}$. Możemy zdefiniować odwzorowanie $\mu_c : \mathfrak{n}(n, \mathbf{R}) \to \mathfrak{n}(n, \mathbf{R})$ jako

$$\mu_c(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} E_{ij}) = \sum_{i=2}^{n-2} c_i a_{i,i+1} E_{1n}.$$

Odwzorowanie μ_c jest różniczkowaniem $\mathfrak{n}(n, \mathbf{R})$, nazywanym **różniczkowaniem centralnym dla** $\mathfrak{n}(n, \mathbf{R})$ indukowanym przez c.

3. Niech $n \geq 4$ i $r, s \in \mathbf{R}$. Jeśli $2r = 0$, to możemy zdefiniować dwa odwzorowania liniowe $\rho^{1,2}_{(r,s)}$ i $\rho^{n-1,n}_{(r,s)}$ z $\mathfrak{n}(n, \mathbf{R})$ do $\mathfrak{n}(n, \mathbf{R})$ jako

$$\rho^{1,2}_{(r,s)}(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} E_{ij}) = ra_{13} + sa_{12} E_{2n} - ra_{12} E_{3n},$$

$$\rho^{n-1,n}_{(r,s)}(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} E_{ij}) = (ra_{n-2,n} + sa_{n-1,n}) E_{1,n-1} - ra_{n-1,n} E_{1,n-2}.$$

Odwzorowania $\rho^{1,2}_{(r,s)}$ i $\rho^{n-1,n}_{(r,s)}$ są różniczkowaniami $\mathfrak{n}(n, \mathbf{R})$, nazywanymi **różniczkowaniami ekstremalnymi typu** I.

4. Dla $n = 3$ i $s \in \mathbf{R}$ możemy zdefiniować dwa odwzorowania liniowe $\theta_s^{(12)}$ i $\theta_s^{(23)}$ z $\mathfrak{n}(3, \mathbf{R})$ do $\mathfrak{n}(3, \mathbf{R})$ jako

$$\theta_s^{(12)}(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} E_{ij}) = sa_{12} E_{23},$$

$$\theta_s^{(23)}(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} E_{ij}) = sa_{23} E_{12}.$$

Odwzorowania $\theta_s^{(12)}$ i $\theta_s^{(23)}$ są różniczkowaniami $\mathfrak{n}(3, \mathbf{R})$, nazywanymi **różniczkowaniami ekstremalnymi typu** II.

W pracy [34] udowodniono następujące twierdzenie dotyczące różniczkowań $\mathfrak{n}(n, \mathbf{R})$:

Twierdzenie 1.3. *1. Jeżeli $n \geq 4$, to każde różniczkowanie φ algebry $\mathfrak{n}(n, \mathbf{R})$ można jednoznacznie zapisać jako*

$$\varphi = \mathrm{ad}_A + \mathrm{diag}_B + \mu_c + \rho^{1,2}_{(r,s)} + \rho^{n-1,n}_{(p,q)},$$

gdzie $A \in \mathfrak{n}(n, \mathbf{R})$, $B \in \mathfrak{d}(n, \mathbf{R})$, $c \in \mathbf{R}^{n-3}$, $r, s, p, q \in \mathbf{R}$ i $2r = 2p = 0$.
2. Jeżeli $n = 3$, to każde różniczkowanie φ algebry $\mathfrak{n}(n, \mathbf{R})$ można jednoznacznie zapisać jako

$$\varphi = \mathrm{ad}_A + \mathrm{diag}_B + \theta^{(12)}_r + \theta^{(23)}_s,$$

gdzie $A \in \mathfrak{n}(n, \mathbf{R})$, $B \in \mathfrak{d}(n, \mathbf{R})$ i $r, s \in \mathbf{R}$.

Przejdźmy teraz do opisu różniczkowań algebry $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$.

Definicja 1.16. 1. Niech $\chi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie endomorfizmem pierścienia $\mathbf{R}$. Różniczkowanie $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ zdefiniowane $\eta_\chi : X \to \chi(tr(X))E$, $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$, nazywamy **różniczkowaniem centralnym dla $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$** indukowanym przez χ.
2. Niech σ_1, σ_2, σ_3 będą endomorfizmami pierścienia $\mathbf{R}$. Odwzorowanie $\psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) : \mathfrak{gl}(2, \mathbf{R}) \to \mathfrak{gl}(2, \mathbf{R})$ dane wzorem

$$\psi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \sigma_1(a) & \sigma_3(c) \\ \sigma_1(c) + \sigma_2(b) & \sigma_1(a) \end{pmatrix}$$

nazywamy **różniczkowaniem permutacyjnym $\mathfrak{gl}(2, \mathbf{R})$**.

W pracy [37] udowodniono następujące twierdzenie dotyczące różniczkowań $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$:

Twierdzenie 1.4. *1. Jeżeli $n \geq 3$, lub $n = 2$ i $\mathrm{char}(\mathbf{R}) \neq 2$, to każde różniczkowanie φ algebry $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ można jednoznacznie zapisać jako*

$$\varphi = \mathrm{ad}_A + \eta_\chi,$$

gdzie $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$, a χ jest endomorfizmem pierścienia $\mathbf{R}$.
2. Jeżeli $n = 2$ i $\mathrm{char}(\mathbf{R}) = 2$, to każde różniczkowanie φ algebry $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ można jednoznacznie zapisać jako

$$\varphi = \mathrm{ad}_A + \eta_\chi + \psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3),$$

gdzie $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$, a χ, σ_1, σ_2, σ_3 są endomorfizmami pierścienia $\mathbf{R}$.

W przeciwieństwie do charakteryzacji różniczkowań, problem opisu ideałów wciąż nie został w pełni rozwiązany. Klasyczne twierdzenie mówi, że

Stwierdzenie 1. *Dla $n > 1$ algebra Liego $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ jest izomorficzna z sumą prostą $\mathfrak{d}_{sc}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.*

Ponieważ dla $n > 1$ algebra Liego $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ jest prosta, więc $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ ma dokładnie cztery ideały: $\{0\}$, $\mathfrak{d}_{sc}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ i $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Krata ideałów wygląda następująco:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathfrak{d}_{sc}(n,\mathbb{C}) \arrow[dr, dash] & & \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \arrow[dl, dash] \\
 & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

Powyższą własność można nieco uogólnić:

Stwierdzenie 2. *Niech $n > 1$ oraz $\mathbf{K}$ będzie ciałem, takim, że* $\operatorname{char}(\mathbf{K}) \not| \, n$ *i algebra $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{K})$ jest prosta. Algebra $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{K})$ ma dokładnie cztery ideały: $\{0\}$, $\mathfrak{d}_{sc}(n,\mathbf{K})$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{K})$ i $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{K})$.*

Dowód. Jeżeli $\operatorname{char}(\mathbf{K}) \not| \, n$ to przecięcie algebr $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{K})$ i $\mathfrak{d}_{sc}(n,\mathbf{K})$ jest trywialne (rozdz. 1.2). Ponadto $\dim \mathfrak{sl}(n,\mathbf{K}) = n^2 - 1$ oraz $\dim \mathfrak{d}_{sc}(n,\mathbf{K}) = 1$, a więc ich suma prosta jest równa całej algebrze $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{K})$. □

Dodajmy, że twierdzenie to jest rzeczywiście uogólnieniem, gdyż założenia spełniają np. wszystkie ciała charakterystyki zero. Poniższy przykład udowadnia, że powyższa charakteryzacja ideałów nie jest prawdziwa dla dowolnego ciała.

Przykład 1.5. Rozważmy algebrę Liego $\mathfrak{gl}(2,\{0,1\})$. Zauważmy, że macierze 0 i E należą do $\mathfrak{sl}(2,\{0,1\})$, a więc zbiór macierzy skalarnych stanowi nietrywialny ideał $\mathfrak{sl}(2,\{0,1\})$. Ponadto niech

$$\mathfrak{I} = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

Bezpośrednimi obliczeniami można pokazać, że $\mathfrak{I}$ jest ideałem $\mathfrak{gl}(2,\{0,1\})$ (wystarczy sprawdzić, że iloczyn drugiej z zapisanych macierzy i dowolnej macierzy z $\mathfrak{gl}(2,\{0,1\})$ należy do $\mathfrak{I}$). Ideał ten jest różny od wymienionych w twierdzeniu 2, gdyż $\mathfrak{d}_{sc}(2,\{0,1\}) \subsetneq \mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{sl}(2,\{0,1\})$.

Przykład 1.6. Jeżeli pierścień $\mathbf{R}$ nie jest ciałem, to charakteryzacja ideałów może być jeszcze bardziej skomplikowana; na przykład pojawia się klasa ideałów związanych z ideałami pierścienia $\mathbf{R}$. Mianowicie jeśli I jest ideałem pierścienia $\mathbf{R}$ to $\mathfrak{gl}(n,I)$ jest ideałem algebry Liego $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$.

1.4. Klasyfikacja prostych algebr Liego skończonego wymiaru

Proste algebry Liego nad ciałem liczb zespolonych zostały sklasyfikowane przez Wilhelma Killinga w 1889 roku (rozumowanie można uogólnić na wszystkie ciała algebraicznie domknięte charakterystyki 0). Jego dowód poprawił Élie Cartan w 1894. Sklasyfikował on także algebry Liego nad ciałem liczb rzeczywistych. Dowody były później stopniowo dopracowywane, obecną klasyfikację za pomoca diagramów Dynkina przedstawił w 1947 roku Eugene Dynkin.

Wszystkie istniejące proste algebry Liego nad ciałem liczb zespolonych zawarte są w poniższej tabeli:

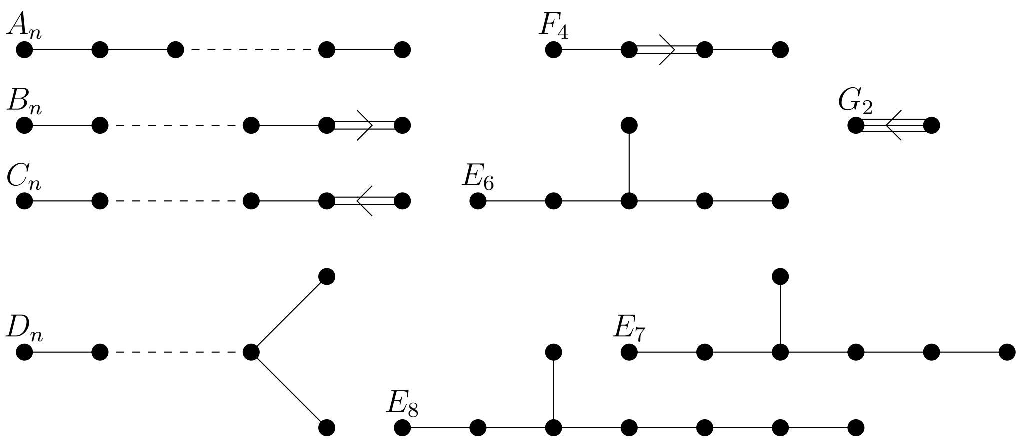
Nazwa	n	Opis	Wymiar
A_n	$1, 2, \ldots$	$\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$	$n(n+2)$
B_n	$2, 3, \ldots$	$\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$	$n(2n+1)$
C_n	$3, 4, \ldots$	$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$	$n(2n+1)$
D_n	$4, 5, \ldots$	$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$	$n(2n-1)$
G_n	2	–	14
F_n	4	–	52
E_n	6	–	78
E_n	7	–	133
E_n	8	–	248

Algebry A_n, B_n, C_n, D_n nazywane są klasycznymi algebrami Liego. Specjalna ortogonalna algebra Liego $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ składa się z macierzy spełniających warunek $A^T + A = 0$. Można zauważyć, że jest ona podalgebrą $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Dla parzystego n można zdefiniować także algebrę macierzy symplektycznych:

$$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}) = \{A \in M(2n, \mathbb{C}) | A^T\Omega + \Omega A = 0\}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{bmatrix}.$$

Wszystkie proste algebry Liego nad ciałem liczb zespolonych zostały sklasyfikowane poprzez jednoznaczne przypisanie każdej z nich tzw. *macierzy Cartana*, każdej macierzy zaś diagramu Dynkina, który zawiera pełną informację o danej algebrze. Diagramy te przedstawione są na poniższym rysunku:



Do dziś udało się sklasyfikować również wszystkie proste algebry Liego skończonego wymiaru nad dowolnym algebraicznie domkniętym ciałem charakterystyki $p > 3$ [36]. Istnieje także częściowa klasyfikacja dla pewnych szczególnych klas algebr [12]. Problem pozostaje jednak wciąż nierozwiązany w pełni dla ciał charakterystyki 2 lub 3 oraz ciał charakterystyki 0, które nie są algebraicznie domknięte (poza dobrze opisanym przypadkiem ciała $\mathbb{R}$).

Rozdział 2

Algebry Liego nieskończonego wymiaru

2.1. Klasyczne przykłady

Algebry nieskończonego wymiaru badane są od samego początku istnienia teorii algebr Liego – pierwsze przypadki rozpatrywali już S. Lie i E. Cartan. Grupy Liego rozumiano wtedy jako grupy symetrii obiektów geometrycznych. Ponieważ grupy te niekoniecznie muszą mieć skończony wymiar, w naturalny sposób doprowadziło to do rozważania odpowiadających im nieskończenie wymiarowych algebr Liego.

Obecnie analizuje się wiele rodzajów algebr Liego nieskończonego wymiaru. Victor Kac wyróżnia we wstępie do swojej książki [29] cztery różne klasy cieszące się największym zainteresowaniem.
Pierwszą z nich są algebry Liego pól wektorowych związane z grupami dyfeomorfizmów rozmaitości. Klasyfikacją tych algebr zajmował się już E. Cartan. Łączą się one z teorią kohomologii nieskończenie wymiarowych algebr Liego pól wektorowych na skończenie wymiarowej rozmaitości i mają wiele geometrycznych zastosowań ([15, 18, 19]).

Druga klasa składa się z algebr Liego gładkich odwzorowań danej rozmaitości w skończenie wymiarową algebrę Liego. Inaczej mówiąc, są to algebry Liego macierzy nad pewną algebrą funkcyjną, ale rozpatrywane nad ciałem bazowym. W fizyce wykorzystywane są pewne centralne rozszerzenia tych algebr (tzw. *current algebras*) [7, 31].

Trzecią klasę stanowią klasyczne algebry Liego operatorów w przestrzeniach Hilberta lub Banacha. Reprezentacje pewnych związanych z nimi grup Liego odgrywają ważną rolę w kwantowej teorii pola [21].

Czwarta klasa to algebry Kaca-Moody'ego. Omówimy je nieco dokładniej, ze względu na ich związek z pewnymi algebrami macierzy nieskończonych.

Definicja 2.1. Niech A będzie *uogólnioną macierzą Cartana*, tj. macierzą $n\times n$ o współczynnikach całkowitych, taką że $a_{ii}=2$, $a_{ij}\le 0$ dla $i\neq j$, $a_{ij}=0$ implikuje $a_{ji}=0$. **Algebrą Kaca-Moody'ego** $\mathfrak{g}'(A)$ nazywamy algebrę Liego na ciałem liczb zespolonych o $3n$ generatorach e_i, f_i, h_i $(i=1,\dots,n)$, spełniających równania:

$$\begin{cases}[h_i,h_j]=0,\ [e_i,f_i]=h_i,\ [e_i,f_j]=0 \text{ dla } i\neq j,\\ [h_i,e_j]=a_{ij}e_j,\ [h_i,f_j]=-a_{ij}f_j,\\ (\mathrm{ad}_{e_i})^{1-a_{ij}}e_j=0,\ (\mathrm{ad}_{f_i})^{1-a_{ij}}f_j=0 \text{ dla } i\neq j.\end{cases}$$

Przykład 2.1. Niech A będzie uogólnioną macierzą Cartana o współczynnikach zdefiniowanych jako $a_{ij}=2\delta_{ij}-\delta_{i,j+1}-\delta_{i,j-1}$ $(1\le i,j\le n)$. Można pokazać, że $\mathfrak{g}'(A)$ jest izomorficzna z algebrą $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$ [7].

Klasę algebr Kaca-Moody'ego można podzielić na trzy mniejsze klasy. Załóżmy, że macierz A jest nierozkładalna (tzn. nie istnieje podział zbioru $\{1,\ldots,n\}$ na dwa rozłączne podzbiory X i Y, takie że $\forall_{i\in X, j\in Y}\ a_{ij} = 0$). Można to zrobić bez straty ogólności, gdyż sumie prostej macierzy odpowiada suma prosta algebr Kaca-Moody'ego. Zachodzą trzy wzajemnie wykluczające się przypadki:

1. Istnieje wektor x o dodatnich współrzędnych całkowitych, taki że wszyskie współrzędne wektora Ax są dodatnie. Algebra $\mathfrak{g}'(A)$ jest wtedy skończenie wymiarowa.
2. Istnieje wektor x o dodatnich współrzędnych całkowitych, taki że $Ax = 0$. Algebra $\mathfrak{g}'(A)$ jest wtedy nieskończenie wymiarowa i ma wzrost wielomianowy. Algebry te są nazywane *afinicznymi algebrami Liego.*
3. Istnieje wektor x o dodatnich współrzędnych całkowitych, taki że wszyskie współrzędne wektora Ax są ujemne. Algebra $\mathfrak{g}'(A)$ jest wtedy nieskończenie wymiarowa i ma wzrost wykładniczy.

2.2. Macierzowe algebry Liego nieskończonego wymiaru

W rozdziale tym opiszemy najpopularniejsze macierzowe algebry Liego nieskończonego wymiaru rozważane do tej pory w literaturze, m.in. w pracach [29], [6, 31, 39].

W poprzednim rozdziale zdefiniowaliśmy algebry Kaca-Moody'ego, wykorzystujac przy tym uogólnioną macierz Cartana A. Algebry te mogą mieć skończony lub nieskończony wymiar, jednak macierz A była zawsze skończona. Opisaną konstrukcję można łatwo uogólnić, dopuszczając, by A była macierzą nieskończoną [7].
Szczególnie interesujący jest przypadek, gdy A_∞ jest macierzą o współczynnikach $a_{ij} = 2\delta_{ij} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}$ $(i, j \in \mathbb{Z})$. Algebra $\mathfrak{g}'(A_\infty)$ ma zbiór generatorów e_i, f_i, h_i $(i \in \mathbb{Z})$, spełniających relacje jak w definicji 2.1.
Niech $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ będzie algebrą Liego macierzy indeksowanych zbiorem liczb całkowitych, o skończonej liczbie niezerowych współczynników i śladzie równym zero. Okazuje się, że algebry $\mathfrak{g}'(A_\infty)$ i $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ są izomorficzne, co stanowi analogię do przypadku skończonych uogólnionych macierzy Cartana. Ponadto można udowodnić, że algebra $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ ma trywialne centrum i jest prosta [7]. Algebra $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ jest podalgebrą algebry wszystkich macierzy indeksowanych zbiorem liczb całkowitych, o skończonej liczbie niezerowych współczynników:

$$\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) = \{\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij}E_{ij} | a_{ij} \neq 0 \text{ dla skończonej ilości par } (i, j)\}.$$

Jej własności rozważano m.in w pracach [29] i [39]. Algebra ta jest generowana przez macierze postaci E_{ij} $(i, j \in \mathbb{Z})$, więc jej wymiar jest nieskończony (przeliczalny).
Algebra $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ jest granicą prostą algebr Liego $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ względem natu-

ralnego zanurzenia $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \to \mathfrak{gl}(n+1, \mathbf{R})$, zdefiniowanego jako:

$$A \to \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Z twierdzenia Ado i Iwasawy wynika więc, że każda algebra Liego skończonego wymiaru nad ciałem $\mathbf{K}$ jest izomorficzna z pewną podalgebrą $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{N}, \mathbf{K})$.

Inny ważny przypadek stanowi algebra $\overline{\mathfrak{g}}'(A_\infty)$, będąca uzupełnieniem algebry $\mathfrak{g}'(A_\infty)$. Algebra $\overline{\mathfrak{g}}'(A_\infty)$ jest izomorficzna z sumą prostą $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}c$, gdzie $\mathbb{C}c$ jest jednowymiarową algebrą abelową. Algebra $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, nazywana algebrą Liego uogólnionych macierzy Jacobiego, składa się z macierzy o skończonej liczbie niezerowych przekątnych:

$$\mathfrak{gl}_J(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) = \{\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij}E_{ij} | \exists_{n\in\mathbb{N}}\ a_{ij} = 0 \text{ dla } |i-j| > n\}.$$

Jest to algebra nieprzeliczalnego wymiaru. Jej własności były rozważane w pracach [13–18, 30, 32].

W pracy [17] stwierdzono, że własności algebraiczne $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{Z}, \mathbf{R})$ nie są zbadane, m.in. nic nie wiadomo o jej kracie ideałów.

Rozdział 3

Algebry Liego macierzy nieskończonych

3.1. Definicja $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$

Niech $\mathbf{R}$ będzie pierścieniem przemiennym z jedynką. Podobnie jak w przypadku macierzy skończonego wymiaru, możemy rozważać zbiór $M(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ wszystkich macierzy nieskończonych indeksowanych zbiorem liczb naturalnych o współczynnikach z pierścienia $\mathbf{R}$. Dodawanie macierzy $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ i mnożenie przez element $r \in \mathbf{R}$ definiujemy w standardowy sposób: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, $rA = (ra_{ij})$. Zbiór $M(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ można więc traktować jako $\mathbf{R}$-moduł. W ogólnym przypadku mnożenie macierzy określone analogicznym wzorem jak dla macierzy skończonych:

$$AB = C,\ \ c_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj}$$

nie jest jednak poprawnie zdefiniowane. Jako przykład wystarczy wziąć macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

i zauważyć, że próbując wyznaczyć macierz A^2, nie można obliczyć żadnego jej współczynnika. Jeśli natomiast ograniczymy się do zbioru macierzy o skończonej liczbie współczynników niezerowych w każdej kolumnie (ang. *column-finite*):

$$M_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R}) = \{A \in M(\mathbb{N}, \mathbf{R}) | \forall_j \exists_n \forall_{i>n}\ a_{ij} = 0\},$$

to powyższa suma dla każdego c_{ij} sprowadza się do sumy skończonej ilości niezerowych składników (gdyż $b_{kj} \neq 0$ tylko dla skończenie wielu k). Ponadto można zauważyć, że dla $A, B \in M_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ i $r \in \mathbf{R}$ mamy $A + B \in M_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ oraz $rA \in M_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$. Zbiór $M_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ jest więc podmodułem $\mathbf{R}$-modułu $M(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ z dobrze zdefiniowanym mnożeniem macierzy. Określając w nim nawias Liego w standardowy sposób $[A, B] = AB - BA$, otrzymujemy algebrę Liego oznaczaną $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$.

Istotną różnicą w stosunku do macierzy skończonych (oraz macierzy nieskończonych o skończonej liczbie niezerowych współczynników) jest fakt, że macierzy z $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ w ogólności nie da się przedstawić za pomocą (skończonej) liniowej kombinacji macierzy E_{ij}. Nad dowolnym pierścieniem $\mathbf{R}$-moduł $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ nie musi posiadać bazy; nawet w przypadku, gdy $\mathbf{R}$ jest ciałem, baza nie jest przeliczalna (patrz: dodatek). Co więcej, trudno jest wskazać

jakąkolwiek bazę tej przestrzeni przydatną przy dowodzeniu własności danych algebr Liego. Znaczna część teorii macierzy skończonych, wykorzystująca pewne własności bazy $\{E_{ij}\}$, nie ma więc zastosowania w przypadku macierzy nieskończonych; niezbędne są inne metody dowodzenia.
Należy także wspomnieć, że czasami, dla uproszczenia notacji, będziemy stosować formalny zapis $A = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}E_{ij}$ tam, gdzie nie doprowadzi to do niejasności.

W przypadku, gdy $\mathbf{R} = \mathbf{K}$ jest ciałem, algebra Liego $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ odpowiada algebrze endomorfizmów przestrzeni liniowej $\mathbf{K}^{(\mathbb{N})}$ przy wyborze bazy kanonicznej (elementy $\mathbf{K}^{(\mathbb{N})}$ są nieskończonymi kolumnami $(a_1, \dots, a_n, \dots)^T$ o skończonej liczbie niezerowych współczynników).

Ustalimy teraz związek $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ z omówionymi wcześniej algebrami macierzowymi.

Stwierdzenie 3. *Algebry Liego $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ i $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{Z}, \mathbf{R})$ są izomorficzne.*

Dowód. Algebra Liego $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{Z}, \mathbf{R})$ składa się z macierzy o współczynnikach indeksowanych zbiorem liczb całkowitych, o skończonej liczbie niezerowych współczynników w każdej kolumnie.
Funkcja $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ zdefiniowana jako

$$\sigma(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{dla } x \geq 0 \\ -2x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

jest bijekcją. A zatem funkcja $\phi : M_{cf}(\mathbb{Z}, \mathbf{R}) \to M_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ dana wzorem

$$\phi(\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij}E_{ij}) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij}E_{\sigma(i)\sigma(j)}$$

jest bijekcją odpowiednich zbiorów macierzy (jest ona dobrze określona, gdyż w kolumnie $\sigma(j)$ są tylko współczynniki z kolumny j). Funkcja ta ma następujące własności:

$$\phi(cA) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} ca_{ij}E_{\sigma(i)\sigma(j)} = c\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij}E_{\sigma(i)\sigma(j)} = c\phi(A),$$

$$\begin{aligned}\phi(A+B) &= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} (a_{ij}+b_{ij})E_{\sigma(i)\sigma(j)} = \\ &= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij}E_{\sigma(i)\sigma(j)} + \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} b_{ij}E_{\sigma(i)\sigma(j)} = \phi(A)+\phi(B),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(AB) &= \phi(\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{in}b_{nj})E_{ij}) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}}(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{in}b_{nj})E_{\sigma(i)\sigma(j)} = \\ &= \sum_{k,m\in\mathbb{N}}(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{\sigma^{-1}(k)n}b_{n\sigma^{-1}(m)})E_{km} = \\ &= (\sum_{k,m\in\mathbb{N}} a_{\sigma^{-1}(k)\sigma^{-1}(m)}E_{km})(\sum_{k,m\in\mathbb{N}} b_{\sigma^{-1}(k)\sigma^{-1}(m)}E_{km}) = \\ &= (\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij}E_{\sigma(i)\sigma(j)})(\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} b_{ij}E_{\sigma(i)\sigma(j)}) = \phi(A)\phi(B),\end{aligned}$$

a zatem zachodzi także

$$\phi([A,B]) = [\phi(A), \phi(B)].$$

Funkcja ϕ jest więc izomorfizmem algebr Liego i $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R}) \cong \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{Z},\mathbf{R})$. $\square$

Ze względu na powyższy izomorfizm algebry $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ oraz $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ zanurzają się także w $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ i nie ma większego znaczenia, którym ze zbiorów indeksujemy współczynniki macierzy. W naszej pracy rozpatrujemy algebrę $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R})$, gdyż jej wykorzystanie pozwala uzyskać bardziej przejrzyste dowody. Ponadto wszystkie algebry $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ zanurzają się w $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ w nieco bardziej oczywisty sposób.

3.2. Podalgebry

Przejdziemy teraz do opisu podalgebr algebry Liego $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R})$.
Algebra macierzy diagonalnych składa się z macierzy postaci

$$\mathfrak{d}(\mathbb{N},\mathbf{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R}) | a_{ij} = 0 \text{ dla } i \neq j\}.$$

Jest to algebra abelowa.
Tak samo jak w przypadku macierzy skończonych, możemy zdefiniować podalgebrę macierzy skalarnych

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N},\mathbf{R}) &= \{A \in \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R}) | a_{ij} = 0 \text{ dla } i \neq j \text{ oraz } \forall_{i,j}\ a_{ii} = a_{jj}\} = \\ &= \{rE | r \in \mathbf{R}\}.\end{aligned}$$

Można zauważyć, że dla dowolnych $A \in \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ i $B = bE \in \mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ zachodzi równość $AB = (ba_{ij}) = BA$, czyli $[A,B] = 0$. Macierze skalarne należą więc do centrum algebry $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R})$. Prawdziwe jest nawet silniejsze twierdzenie:

Twierdzenie 3.1. *Zbiór $\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ jest centrum algebry $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R})$.*

Dowód. Pozostaje udowodnić, że żadna macierz, która nie jest skalarna, nie należy do centrum. Niech $A \in Z(\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R}))$. Dla $i \neq j$ zachodzi równość

$$0 = [E_{ii}, A] = \sum_{n=1}^{\infty} a_{in}E_{in} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{ni}E_{ni},$$

a więc w szczególności $a_{ij} = 0$. Wobec tego A jest macierzą diagonalną. Ponieważ dla $i \neq j$ mamy

$$0 = [E_{ij}, A] = a_{jj}E_{ij} - a_{ii}E_{ij} = (a_{jj} - a_{ii})E_{ij},$$

więc $a_{jj} = a_{ii}$, co kończy dowód. $\square$

Rozważmy teraz zbiór macierzy o skończonej liczbie niezerowych wierszy:

$$\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N},\mathbf{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R}) | \exists_m \forall_{i \geq m} \forall_j\ a_{ij} = 0\}.$$

Zauważmy, że dla $A, B \in \mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ i dowolnej macierzy $C \in \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ mamy $AC \in \mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ oraz $A+B \in \mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N},\mathbf{R})$. Dla każdych dwu macierzy $A, B \in \mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ zachodzi więc $AB - BA \in \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R})$, czyli $\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ jest podalgebrą $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R})$. Bezpośrednio z definicji wynika, że jej przecięcie z centrum jest trywialne.

Zauważmy, że

$$\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{R}) = \cup_{n>0}\ \mathfrak{gl}(n, \mathbb{N}, \mathbf{R}),$$

gdzie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{N}, \mathbf{R})$ jest podalgebrą $\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, składającą się z macierzy mogących mieć niezerowe współczynniki wyłącznie w n pierwszych wierszach.

Ze względu na to, że dla dowolnej macierzy z $\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ prawie wszystkie jej współczynniki na przekątnej są równe zero, możemy w tym zbiorze poprawnie zdefiniować pojęcie śladu macierzy (jako sumę niezerowych współczynników na przekątnej). Pozwala to wyróżnić podzbiór odpowiadający specjalnej liniowej algebrze Liego:

$$\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{R}) |\ \mathrm{Tr}(A) = 0\}.$$

Pokażemy teraz, że prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.2. *Zbiór* $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ *jest podalgebrą* $\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$.

Dowód. Niech $A, B \in \mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$. Można zauważyć, że zachodzi równość $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) = 0$.
Przez n_1 oznaczmy liczbę niezerowych wierszy macierzy A, przez n_2 liczbę niezerowych wierszy macierzy B i niech $n = \max(n_1, n_2)$. Jeżeli $n = 0$ to $[A, B] = 0 \in \mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, w przeciwnym przypadku możemy zapisać nawias Liego jako

$$\left(\begin{array}{c|c} A_n & X \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B_n & Y \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} B_n & Y \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A_n & X \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} A_nB_n - B_nA_n & A_nY - B_nX \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

gdzie A_n i B_n są macierzami $n \times n$. A zatem

$$\mathrm{Tr}([A, B]) = \mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(A_nB_n - B_nA_n) = \mathrm{Tr}(A_nB_n) - \mathrm{Tr}(B_nA_n).$$

Ponieważ dla macierzy skończonych mamy $\mathrm{Tr}(A_nB_n) = \mathrm{Tr}(B_nA_n)$, więc $[A, B] \in \mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$. □

Zauważmy, że $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ jest także podalgebrą $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, o trywialnym przecięciu z jej centrum (niezależnie od charakterystyki pierścienia $\mathbf{R}$, co w istotny sposób odróżnia ten przypadek od $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$; wyjaśnia to również częściowo, dlaczego niektóre wyniki dotyczące algebr Liego macierzy nieskończonych nie zależą od charakterystyki).

Można sprawdzić, że Tr jest homomorfizmem

$$\mathrm{Tr} : \mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{R}) \to \mathbf{R},$$

gdzie $\mathbf{R}$ traktujemy jako abelową algebrę Liego. Jądrem tego homomorfizmu jest algebra Liego $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ (co stanowi inne niż w rozdziale 6 uzasadnienie faktu, że jest ona ideałem $\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$).

Przez $\mathfrak{gl}_{rcf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ oznaczmy podalgebrę $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$, składającą się z macierzy mających tylko skończoną liczbę niezerowych elementów w każdym wierszu. Dzięki temu dodatkowemu warunkowi zbiór $\mathfrak{gl}_{rcf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ jest zamknięty ze względu na transponowanie macierzy.
K.R. Goodearl, P. Menal and J. Moncasi udowodnili w pracy [20], że każdą łączną algebrę nad $\mathbf{K}$ przeliczalnego wymiaru można zanurzyć w algebrę

macierzy $M_{rcf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$. A zatem każda algebra Liego przeliczalnego wymiaru powstająca z pewnej łącznej algebry przez wprowadzenie jako działania nawiasu Liego jest izomorficzna z podalgebrą $\mathfrak{gl}_{rcf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$.

W pracy [33] pokazano, że algebra Liego różniczkowań $\mathfrak{sl}_\infty(K)$ jest izomorficzna z algebrą ilorazową $\mathfrak{gl}_{rcf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})/\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$.

Inną istotną podalgebrą jest algebra macierzy ściśle górnotrójkątnych:

$$\mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R}) | a_{ij} = 0 \text{ dla } i < j\}.$$

Oznaczmy wyrazy jej dolnego ciągu centralnego przez

$$\mathfrak{n}^1 = \mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R}),$$
$$\mathfrak{n}^{i+1} = [\mathfrak{n}^i, \mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})].$$

Stwierdzenie 4. *Dla każdych $i, j \geq 0$ $[\mathfrak{n}^i, \mathfrak{n}^j] = \mathfrak{n}^{i+j}$.*

Dowód. Niech $A \in \mathfrak{n}^i$, $B \in \mathfrak{n}^j$ i $C = AB$. Dla $m < n + i + j$ zachodzi $c_{nm} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} b_{km} = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$, więc $[A, B] \in \mathfrak{n}^{i+j}$.

Pokażemy teraz, że $\mathfrak{n}^{i+j} = [\mathfrak{n}^i, Y]$, gdzie

$$Y = \begin{pmatrix} \overbrace{0 & \dots & 0}^{j} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

tzn. $y_{nm} = \delta_{n+i,m}$ (δ_{ij} – delta Kroneckera). Niech $A \in \mathfrak{n}^{i+j}$. Wystarczy pokazać, że równanie $XY - YX = A$ ma rozwiązanie $X \in \mathfrak{n}^i$. Po obliczeniu wyrażenia po lewej stronie otrzymujemy układ równań

$$\Big\{ x_{n,m-j} - x_{n+j,m} = a_{nm} \qquad 1 \leq n, m \leq \infty.$$

Rozwiązaniem tego układu jest na przykład

$$\begin{cases} x_{nm} = 0 & \text{dla } n \leq j, \\ x_{nm} = x_{n-j,m-j} - a_{n-j,m} & \text{dla } n > j. \end{cases}$$

$\square$

W podobny sposób możemy udowodnić następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 5. *Prawdziwa jest równość*

$$\mathfrak{n}^k = \{A \in \mathfrak{n} : \ a_{ij} = 0 \text{ dla } \ j - i \geq k\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Wniosek 6. *Zachodzi równość*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{n}^k = \{0\}.$$

A więc $\mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ jest rezydualnie nilpotentna i jej centrum $Z(\mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R}))$ jest trywialne. A zatem istnieje różnica w stosunku do przypadku macierzy skończonych, gdyż $\mathfrak{n}(n, \mathbf{R})$ jest nilpotentna i ma jednowymiarowe centrum.

Rozdział 4

Algebra prosta $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$

Niech V będzie przestrzenią liniową przeliczalnego wymiaru nad ciałem $\mathbf{K}$. Endomorfizm $f : V \to V$ nazywamy finitarnym, jeżeli wymiar przestrzeni $f(V)$ jest skończony. Endomorfizmy finitarne tworzą algebrę Liego. Jej podalgebry nazywane są finitarnymi algebrami Liego.
W pracy [3] A. Baranow sklasyfikował proste finitarne algebry Liego nad algebraicznie domkniętym ciałem charakterystyki zero.
W [4] uogólniono ten wynik na dowolne ciała charakterystyki zero i sformułowano hipotezę, że podobny opis jest prawdziwy dla wszystkich ciał charakterystyki różnej od 2.
W pracy [5] udowodniono tę hipotezę dla ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki $p > 3$, wykorzystując klasyfikację modularnych algebr Liego skończonego wymiaru ([8, 35]).
Algebra $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ jest macierzową reprezentacją algebry występującej w powyższych pracach przy naturalnym wyborze standardowej bazy $e_1, e_2, \ldots,$ w przestrzeni liniowej przeliczalnie wymiarowej. Nasz dowód faktu, że algebra ta jest prosta, jest elementarny i prawdziwy dla dowolnej charakterystyki, co daje częściową odpowiedź na hipotezę A. Baranowa.

W rozdziale tym pokażemy, że algebra $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ jest prostą algebrą Liego. Poniższe twierdzenie udowodniono w pracy [23] dla ciał charakterystyki 0 i uogólniono na dowolne ciała w pracy [26]. W rozdziale 6 zaprezentujemy nieco prostszy dowód tego faktu. W [26] zbadano również inne własności tej algebry Liego.

Twierdzenie 4.1. *Niech* $\mathbf{K}$ *będzie dowolnym ciałem. Algebra* $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ *jest prosta.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że $\mathrm{char}(\mathbf{K}) \neq 2$ i niech $\mathfrak{I}$ będzie niezerowym ideałem $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$. Dowiedziemy, że $\mathfrak{I} = \mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$; rozumowanie składa się z trzech kroków.

(1) Pokażemy, że $E_{ij} \in \mathfrak{I}$ dla pewnych i, j.

Załóżmy, że $X \in \mathfrak{I}$ jest niezerową macierzą. Jeżeli X jest macierzą diagonalną, to $X = x_{11}E_{11} + \ldots + x_{nn}E_{nn}$ i $x_{kk} \neq 0$ dla pewnego k. Mamy

$$[X, E_{k,n+1}] = x_{kk}E_{k,n+1} \in \mathfrak{I},$$

a więc $E_{k,n+1} \in \mathfrak{I}$.

Załóżmy teraz, że $x_{sj} \neq 0$ dla pewnych $s \neq j$. Ponieważ $X = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, gdzie A jest macierzą $n \times n$ dla pewnego ustalonego n, możemy założyć, że $a_{sj} \neq 0$. Jest to możliwe, gdyż jeżeli $a_{ij} = 0$ dla wszystkich $i, j \leq n$ oraz

$b_{rt} \neq 0$ dla pewnych $r \neq t$, to możemy zmienić rozkład na bloki i przyjąć $X = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, gdzie $\tilde{A}$ jest macierzą $(n+t) \times (n+t)$.

Bezpośrednie obliczenia pokazują, że

$$Y = [E_{ji}, X] \in \mathfrak{I},$$

$$Z = [E_{rs}, Y] = -a_{sj}E_{ri} - a_{ir}E_{js} \in \mathfrak{I},$$

$$[Z, E_{it}] = -a_{sj}E_{rt} \in \mathfrak{I}.$$

A zatem $E_{rt} \in \mathfrak{I}$.

(2) Pokażemy teraz, że $E_{ij}, E_{rr} - E_{ss} \in \mathfrak{I}$ dla dowolnych $i \neq j$, $r \neq s$.

Niech i, j, r, s będą parami różnymi liczbami naturalnymi. Jeśli $E_{ij} \in \mathfrak{I}$, to:

$$[E_{ij}, E_{js}] = E_{is} \in \mathfrak{I},$$

$$[E_{ri}, E_{ij}] = E_{rj} \in \mathfrak{I},$$

$$[E_{ri}, [E_{ij}, E_{js}]] = E_{rs} \in \mathfrak{I}.$$

Ponadto

$$[E_{rs}, E_{sr}] = E_{rr} - E_{ss} \in \mathfrak{I}.$$

W szczególności $E_{rr} - E_{r+1,r+1} \in \mathfrak{I}$. A więc wszystkie elementy bazy $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ należą do $\mathfrak{I}$, jeżeli co najmniej jedna macierz E_{ij} należy do ideału $\mathfrak{I}$.

(3) Pokażemy, że każda macierz $X \in \mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ należy do $\mathfrak{I}$. Mamy

$$X = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

gdzie $A \in \mathfrak{sl}(n, \mathbf{K})$ dla pewnego n. Wynika z tego, że $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{I}$ jest (skończoną) liniową kombinacją $E_{ij}, E_{rr} - E_{ss} \in \mathfrak{I}$.

Niech C będzie macierzą permutacji

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wtedy

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = [E_{12}, \left(\begin{array}{c|c} 0 & CB \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)] + \ldots + [E_{n-1,n}, \left(\begin{array}{c|c} 0 & CB \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)] + [E_{n1}, \left(\begin{array}{c|c} 0 & CB \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)],$$

gdzie wszystkie składniki sumy należą do $\mathfrak{I}$. A więc $\left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{I}$, co kończy dowód dla $\mathrm{char}(\mathbf{K}) \neq 2$.

W przypadku $\mathrm{char}(\mathbf{K}) = 2$ prawdziwa jest równość $-1 = 1$ i algebra Liego $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ ma bazę $\{E_{ij}, E_{rr} + E_{r+1,r+1}\}$ dla dowolnych $i \neq j$, $r \neq s$. Dowód w tym przypadku jest analogiczny. $\square$

Powstaje naturalne pytanie, czy można zdefiniować nieprzeliczalnie wymiarowe algebry ortogonalne i symplektyczne, analogicznie jak w przypadku algebry $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$. W pracy [26] pokazono, że nie jest to możliwe. Jest to zgodne z wynikami prac [4, 5], które klasyfikują finitarne proste algebry Liego.

Rozdział 5

Różniczkowania algebr Liego macierzy nieskończonych

5.1. Różniczkowania $\mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$

Rozdział ten zawiera opis różniczkowań algebry Liego nieskończonych macierzy ściśle górnotrójkątnych, opublikowany w pracy [24].

W rozdziale 3.2 omówiliśmy dolny ciąg centralny algebry $\mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, składający się z podalgebr $\mathfrak{n}^k$. Okazuje się, że zbiory $\mathfrak{n}^k$, $k \geq 2$ są ideałami charaterystycznymi algebry $\mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$.

Lemat 7. *Jeżeli φ jest dowolnym różniczkowaniem $\mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ to $\varphi(\mathfrak{n}^k) \subseteq \mathfrak{n}^k$ dla każdego k.*

Dowód. Z definicji $\varphi(\mathfrak{n}^1) \subseteq \mathfrak{n}^1$. Wykorzystując indukcję matematyczną otrzymujemy

$$\begin{aligned}\varphi(\mathfrak{n}^i) &= [\varphi(\mathfrak{n}^{i-1}), \mathfrak{n}^1] + [\mathfrak{n}^{i-1}, \varphi(\mathfrak{n}^1)] \subseteq \\ &\subseteq \varphi(\mathfrak{n}^{i-1})\mathfrak{n}^1 - \mathfrak{n}^1\varphi(\mathfrak{n}^{i-1}) + \mathfrak{n}^{i-1}\varphi(\mathfrak{n}^1) - \varphi(\mathfrak{n}^1)\mathfrak{n}^{i-1} \subseteq \\ &\subseteq \mathfrak{n}^{i-1}\mathfrak{n}^1 - \mathfrak{n}^1\mathfrak{n}^{i-1} + \mathfrak{n}^{i-1}\mathfrak{n}^1 - \mathfrak{n}^1\mathfrak{n}^{i-1} \subseteq \\ &\subseteq \mathfrak{n}^i - \mathfrak{n}^i + \mathfrak{n}^i - \mathfrak{n}^i \subseteq \mathfrak{n}^i.\end{aligned}$$

□

Różniczkowania wewnętrzne zdefiniowaliśmy dla dowolnej algebry Liego w rozdziale 1.1. Można zauważyć, że zachodzi izomorfizm

$$\mathrm{IDer}(\mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})) \cong \mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})/Z(\mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})) \cong \mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R}).$$

Przykład 5.1. Zdefiniujmy także **różniczkowanie diagonalne** analogicznie jak w przypadku macierzy skończonego wymiaru. Dla danej macierzy $D \in \mathfrak{d}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ mamy

$$\mathrm{diag}_D : \mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R}) \to \mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R}), \quad \mathrm{diag}_D(X) = [D, X],$$

Okazuje się, że każde różniczkowanie $\mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ można zapisać jako sumę różniczkowania wewnętrznego i diagonalnego. Najpierw udowodnimy kilka technicznych lematów.

Wprowadźmy następujących oznaczenie podzbiorów $\mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$:

$$\alpha_k = \{\sum_{k<j} a_{kj}E_{kj} \,|\, a_{kj} \in \mathbf{R}\}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Lemat 8. *Zbiór α_1 jest ideałem charakterystycznym algebry Liego $\mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$.*

Dowód. Najpierw pokażemy, że $\varphi(E_{12}) \in \alpha_1$. Niech $\varphi(E_{12}) = \sum_{1 \leq i < j} a_{ij} E_{ij}$. Mamy $[E_{12}, E_{k,k+1}] = 0$ dla każdego $k > 2$, więc

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi(0) = \varphi([E_{12}, E_{k,k+1}]) = \\
&= \varphi(E_{12})E_{k,k+1} - E_{k,k+1}\varphi(E_{12}) + E_{12}\varphi(E_{k,k+1}) - \varphi(E_{k,k+1})E_{12} = \\
&= \varphi(E_{12})E_{k,k+1} - E_{k,k+1}\varphi(E_{12}) + E_{12}\varphi(E_{k,k+1}) - 0 = \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} E_{i,k+1} - \sum_{j=k+2}^{\infty} a_{k+1,j} E_{kj} + E_{12}\varphi(E_{k,k+1})
\end{aligned}$$

Ponieważ $E_{12}\varphi(E_{k,k+1}) \in \alpha_1$, więc musi zachodzić $\sum_{j=k+2}^{\infty} a_{k+1,j} E_{kj} = 0$ czyli $\varphi(E_{12})E_{k,k+1} \in \alpha_1$. Implikuje to równość $a_{ik} = 0$ dla każdego $k \geq 3$, $1 < i < k$ oraz $\varphi(E_{12}) \in \alpha_1$.

Zapiszmy zbiór α_1 jako sumę prostą dwóch podzbiorów $\alpha_1 = \mathbf{R}E_{12} + \alpha_1'$. Wtedy $\varphi(\alpha_1) = \mathbf{R}\varphi(E_{12}) + \varphi(\alpha_1')$. Musimy jeszcze udowodnić, że $\varphi(\alpha_1') \subseteq \alpha_1$.

Najpierw pokażemy, że $\varphi(\alpha_1') \subseteq \alpha_1 + \alpha_2$. Zauważmy, że $\alpha_1' = [\alpha_1, \alpha_2]$, a więc

$$\varphi(\alpha_1') = \varphi([\alpha_1, \alpha_2]) \subseteq \varphi(\alpha_1)\alpha_2 - \alpha_2\varphi(\alpha_1) + \alpha_1\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_2)\alpha_1.$$

Wykorzystując lemat 7 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha_1)\alpha_2 &= (\mathbf{R}\varphi(E_{12}) + \varphi(\alpha_1'))\alpha_2 = \mathbf{R}\varphi(E_{12})\alpha_2 + \varphi(\alpha_1')\alpha_2 \subseteq \\
&\subseteq \alpha_1\alpha_2 + \mathfrak{n}^2\alpha_2 \subseteq \alpha_1 + 0 = \alpha_1,
\end{aligned}$$

więc

$$\varphi(\alpha_1)\alpha_2 - \alpha_2\varphi(\alpha_1) + \alpha_1\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_2)\alpha_1 \subseteq \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_1 - \{0\} \subseteq \alpha_1 + \alpha_2.$$

Teraz możemy już udowodnić, że $\varphi(\alpha_1') \subseteq \alpha_1$. Dla każdej macierzy $A \in \alpha_1'$ mamy

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi(0) = \varphi([E_{12}, A]) = \\
&= \varphi(E_{12})A - A\varphi(E_{12}) + E_{12}\varphi(A) - \varphi(A)E_{12} = \\
&= 0 - 0 + E_{12}\varphi(A) - 0 = E_{12}\varphi(A).
\end{aligned}$$

Otrzymujemy równość $E_{12}\varphi(\alpha_1') = \{0\}$. Ponieważ $\varphi(\alpha_1') \subseteq \alpha_1 + \alpha_2$, więc $\varphi(\alpha_1') \subseteq \alpha_1$. □

Lemat 9. *Każde różniczkowanie $\mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ może być przedstawione jako kombinacja liniowa różniczkowania wewnętrznego, diagonalnego i różniczkowania ψ, takiego że $\psi(\alpha_1) = 0$.*

Dowód. Korzystając z poprzedniego lematu dla każdego różniczkowania φ i $k \geq 2$ otrzymujemy $\varphi(E_{1k}) \in \alpha_1 \cap \mathfrak{n}^k$. Oznaczmy

$$\varphi(E_{1k}) = \sum_{j \geq k} a_{1j}^k E_{1j}, \quad k \geq 2.$$

Dla każdej macierzy $B = (b_{ij}) \in \alpha_1$

$$\varphi(B) = \sum_{j=2}^{\infty} (\sum_{i=2}^{j} b_{1i} a_{1j}^i) E_{1j}.$$

Przyjmijmy

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{12}^2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_{13}^3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{14}^4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{oraz } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_{13}^2 & a_{14}^2 & a_{15}^2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{14}^3 & a_{15}^3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{15}^4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Oczywiście $D \in \mathfrak{d}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, $A \in \mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$. Wtedy $(\varphi - \mathrm{ad}_A - \mathrm{diag}_D)(B) = 0$ jeżeli tylko $B \in \alpha_1$. Przyjmijmy $\psi = \varphi - \mathrm{ad}_A - \mathrm{diag}_D$. Wtedy $\psi(\alpha_1) = 0$. □

Lemat 10. *Jeżeli φ jest różniczkowaniem $\mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, takim że $\varphi(\alpha_1) = 0$, to $\varphi(X) \in \alpha_1$ dla każdej macierzy $X \in \mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$.*

Dowód. Ponieważ dla każdej macierzy $A \in \alpha_1$ i $B \in \mathfrak{n}^1$

$$[A, B] = AB - BA = AB \in \alpha_1,$$

więc $\varphi([\alpha_1, \mathfrak{n}^1]) = \{0\}$.
Z drugiej strony

$$\varphi([A, B]) = [\varphi(A), B] + [A, \varphi(B)] = [0, B] + [A, \varphi(B)] = \\ = 0 + [A, \varphi(B)] = A\varphi(B) - \varphi(B)A.$$

Otrzymujemy równość $A\varphi(B) = \varphi(B)A$. Korzystając z $\varphi(\mathfrak{n}^1) \subseteq \mathfrak{n}^1$, uzyskujemy $\varphi(B)A \in \mathfrak{n}^1\alpha_1 = \{0\}$. A więc $\alpha_1\varphi(\mathfrak{n}^1) = \{0\}$, czyli $\varphi(\mathfrak{n}^1) \subseteq \alpha_1$. □

Lemat 11. *Niech φ będzie różniczkowaniem $\mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ oraz $\varphi(\alpha_1) = 0$. Istnieje wtedy taka macierz $B \in \alpha_1$, że $\varphi = \mathrm{ad}_B$.*

Dowód. Ponieważ $\varphi(\alpha_1) = 0$, więc korzystając z lematu 10 otrzymujemy $\varphi(E_{km}) \in \alpha_1$ dla $k \geq 2$ i $m > k$, a zatem

$$\varphi(E_{km}) = \sum_{j \geq 2} b_{km}^j E_{1j}.$$

Dla każdego $l \neq k - 1$, m mamy $[E_{km}, E_{l,l+1}] = 0$, a więc

$$[\sum_{j \geq 2} b_{km}^j E_{1j}, E_{l,l+1}] + [E_{km}, \varphi(E_{l,l+1})] = 0.$$

Z tego wynika, że $b_{km}^l = 0$ dla $l \neq k - 1$, m. Analogicznie, $[E_{km}, E_{l,l+2}] = 0$ jeśli $l \neq k - 2$, m, stąd $b_{km}^l = 0$, $l \neq m$. A więc

$$\varphi(E_{km}) = b_{km}^m E_{1m} = b_{km} E_{1m}.$$

Ponadto, dla każdego $m \neq k + 1$

$$\varphi(E_{km}) = \varphi([E_{k,k+1}, E_{k+1,m}]) = \varphi(E_{k,k+1})E_{k+1,m} = b_{k,k+1}E_{1m}.$$

Wybierając

$$B = \sum_{k \geq 2} b_{k,k+1} E_{1k} \in \alpha_1$$

otrzymujemy $(\varphi - \mathrm{ad}_B)(C) = 0$ dla każdej macierzy $C \in \mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$:

$$\varphi(C) = \sum_{j=3}^{\infty} (\sum_{i=2}^{j-1} c_{ij} b_{i,i+1}) E_{1j} = BC = [B, C] = \mathrm{ad}_B(C).$$

□

Możemy teraz udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.1. *Każde różniczkowanie φ algebry $\mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ może być przedstawione w postaci $\varphi = \mathrm{ad}_C + \mathrm{diag}_D$, gdzie $C \in \mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ i $D \in \mathfrak{d}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$. Różniczkowanie ad_C jest wyznaczone jednoznacznie, a diag_D wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do macierzy skalarnej.*

Dowód. Z lematu 9 wynika, że istnieją $D \in \mathfrak{d}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, $A \in \mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, takie że $\varphi = \mathrm{diag}_D + \mathrm{ad}_A + \psi$, gdzie ψ jest różniczkowaniem $\mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, takim że $\psi(\alpha_1) = 0$. Z lematu 11 wynika, że $\psi = \mathrm{ad}_B$ dla pewnego $B \in \alpha_1$. A zatem $\varphi = \mathrm{diag}_D + \mathrm{ad}_C$, gdzie $C = A + B$.

Niech

$$\varphi = \mathrm{diag}_D + \mathrm{ad}_C = \mathrm{diag}_{D'} + \mathrm{ad}_{C'} .$$

Dla każdego $k > 1$ mamy $\varphi(E_{1k}) = X$, gdzie $x_{1k} = d_{11} - d_{kk}$, $x_{1m} = c_{km}$ dla $m > k$. Z drugiej strony $x_{1k} = d'_{11} - d'_{kk}$, $x_{1m} = c'_{km}$ dla $m > k$. Otrzymujemy $c_{km} = c'_{km}$ dla $k > 1$ i $m > k$. Ponieważ dla $m \leq k$ mamy $c_{km} = 0 = c'_{km}$, więc $c_{km} = c'_{km}$ dla każdego m i $k > 1$.
Dla dowolnego $k > 1$ otrzymujemy $\varphi(E_{k,k+1}) = Y$ gdzie $y_{1k} = c_{1k} = c'_{1k}$. Ponieważ $c_{11} = 0 = c'_{11}$, więc $C = C'$.
Ponadto $d'_{11} - d'_{kk} = d_{11} - d_{kk}$ czyli $d'_{11} - d_{11} = d'_{kk} - d_{kk}$. To znaczy, że $D - D' = rE$ gdzie $r \in \mathbf{R}$. □

5.2. Różniczkowania $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$

W rozdziale tym scharakteryzujemy różniczkowania algebry $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$. Wyniki pochodzą z pracy [25].

Przez $\mathrm{ND}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ oznaczmy podzbiór $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ składający się ze wszystkich macierzy, które mają wyłącznie zera na głównej przekątnej. Każdą macierz $X \in \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ można jednoznacznie przedstawić jako sumę $X = D + N$, gdzie D jest macierzą diagonalną, a $N \in \mathrm{ND}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$.

Definicja 5.1. Niech $\sigma : \mathfrak{d}(\mathbb{N}, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ będzie homomorfizmem. Różniczkowanie algebry $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ zdefiniowane $\eta_\sigma(X) = \sigma(D)E$, gdzie $X = D + N$, $X \in \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, $N \in \mathrm{ND}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ i $D \in \mathfrak{d}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ nazywamy **różniczkowaniem centralnym dla $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$** indukowanym przez σ.

Lemat 12. *Dla dowolnego różniczkowania $\varphi \in \mathrm{Der}(\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R}))$ istnieje macierz $A \in \mathrm{ND}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, taka że $(\varphi - \mathrm{ad}_A)(\mathfrak{d}(\mathbb{N}, \mathbf{R})) \subseteq \mathfrak{d}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$.*

Dowód. Oznaczmy $\varphi(E_{kk}) = [h_{ij}^{(k)}]$. Niech $\varphi(D) = C$, gdzie $D \in \mathfrak{d}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ i $C \in \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$.
Krok 1: Pokażemy, że $c_{ij} = d_{ii}h_{ij}^{(i)} + d_{jj}h_{ij}^{(j)}$ dla $i \neq j$.
Niech $A = D - d_{ii}E_{ii} - d_{jj}E_{jj}$ i $\varphi(A) = B$. Mamy $[E_{ii}, A] = 0$, a więc

$$\begin{aligned} 0 = \varphi([E_{ii}, a]) &= [E_{ii}, \varphi(a)] + [\varphi(E_{ii}), A] = \\ &= E_{ii}\varphi(A) - \varphi(A)E_{ii} + \varphi(E_{ii})A - A\varphi(E_{ii}). \end{aligned}$$

Otrzymujemy równość $0 = b_{ij} - 0 + 0 - 0 = b_{ij}$. Ponieważ

$$C = \varphi(D) = \varphi(A + d_{ii}E_{ii} + d_{jj}E_{jj}) = \varphi(A) + d_{ii}\varphi(E_{ii}) + d_{jj}\varphi(E_{jj}),$$

więc $c_{ij} = 0 + d_{ii}h_{ij}^{(i)} + d_{jj}h_{ij}^{(j)}$.

Krok 2: Udowodnimy, że $h_{ij}^{(i)} = -h_{ij}^{(j)}$ dla wszystkich $i \neq j$.
Jako że

$$\begin{aligned}0 = \varphi([E_{ii}, E_{jj}]) &= [E_{ii}, \varphi(E_{jj})] + [\varphi(E_{ii}), E_{jj}] = \\ &= E_{ii}\varphi(E_{jj}) - \varphi(E_{jj})E_{ii} + \varphi(E_{ii})E_{jj} - E_{jj}\varphi(E_{ii}),\end{aligned}$$

otrzymujemy $0 = h_{ij}^{(j)} + h_{ij}^{(i)}$.

Krok 3: Oznaczmy $\varphi(D) = C = X + Y$, gdzie $X \in \mathfrak{d}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ oraz $Y \in \mathrm{ND}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$. Na podstawie poprzedniego kroku

$$y_{ij} = d_{ii}h_{ij}^{(i)} + d_{jj}h_{ij}^{(j)} = d_{ii}h_{ij}^{(i)} - d_{jj}h_{ij}^{(i)}.$$

Niech $A \in \mathrm{ND}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, $a_{ij} = -h_{ij}^{(i)}$. Mamy

$$Y = D(-A) - (-A)D = AD - DA = [A, D],$$

a więc

$$\varphi(D) = X + Y = X + [A, D] = X + \mathrm{ad}_A(D).$$

Ostatecznie

$$\varphi(D) - \mathrm{ad}_A(D) = (\varphi - \mathrm{ad}_A)(D) = X.$$

□

Lemat 13. *Dla dowolnego różniczkowania* $\varphi \in \mathrm{Der}(\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R}))$ *istnieje macierz* $B \in \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ *spełniająca warunki* $(\varphi - \mathrm{ad}_B)(\mathfrak{d}(\mathbb{N}, \mathbf{R})) \subseteq \mathfrak{d}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ *i* $(\varphi - \mathrm{ad}_B)(\mathrm{ND}(\mathbb{N}, \mathbf{R})) = \{0\}$.

Dowód. Na podstawie poprzedniego lematu dla dowolnego różniczkowania φ mamy

$$(\varphi - \mathrm{ad}_A)(\mathfrak{d}(\mathbb{N}, \mathbf{R})) \subseteq \mathfrak{d}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$$

dla pewnej macierzy $A \in \mathrm{ND}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$. Wprowadźmy oznaczenie $\psi = \varphi - \mathrm{ad}_A$.

Krok 1: Pokażemy, że $\psi(E_{i,i+1}) = x_i E_{i,i+1}$, gdzie $x_i \in \mathbf{R}$.
Dla dowolnej macierzy $D \in \mathfrak{d}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ mamy:

$$\begin{aligned}\psi([D, E_{i,i+1}]) &= \psi(DE_{i,i+1} - E_{i,i+1}D) = \\ &= \psi(d_{ii}E_{i,i+1} - d_{i+1,i+1}E_{i,i+1}) = \\ &= (d_{ii} - d_{i+1,i+1})\psi(E_{i,i+1}).\end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned}\psi([D, E_{i,i+1}]) &= [D, \psi(E_{i,i+1})] + [\psi(D), E_{i,i+1}] = \\ &= D\psi(E_{i,i+1}) - \psi(E_{i,i+1})D + \psi(D)E_{i,i+1} - E_{i,i+1}\psi(D).\end{aligned}$$

Oznaczmy $\psi(E_{i,i+1}) = C$. Ponieważ $\psi(D)$ jest macierzą diagonalną, więc

$$\psi(D)E_{i,i+1} - E_{i,i+1}\psi(D) = rE_{i,i+1},$$

gdzie $r \in \mathbf{R}$. Dla $(j, k) \neq (i, i+1)$ otrzymujemy równość

$$(d_{ii} - d_{i+1,i+1})c_{jk} = (d_{jj} - d_{kk})c_{jk}.$$

Przyjmując, że macierz D spełnia warunki $d_{ii} - d_{i+1,i+1} = 0$ i $d_{jj} - d_{kk} = 1$, otrzymujemy $c_{jk} = 0$ dla $j \neq k$. Zakładając natomiast, że $D = E_{ii}$, uzyskujemy $c_{jj} = 0$ dla każdego $j \in \mathbb{N}$.

Krok 2: Udowodnimy, że $\psi(E_{ij}) = (x_i + x_{i+1} + ... + x_{j-1})E_{ij}$ dla $i < j$. Oznaczmy $j = i + k$. Użyjemy indukcji matematycznej względem k. Korzystając z poprzedniego kroku, otrzymujemy szukaną równość dla $k = 1$. Załóżmy teraz, że jest ona spełniona dla pewnego k. Dla $k + 1$ mamy

$$\begin{aligned}\psi(E_{i,i+k+1}) &= \psi([E_{i,i+1}, E_{i+1,i+k+1}]) = \\ &= [E_{i,i+1}, \psi(E_{i+1,i+k+1})] + [\psi(E_{i,i+1}), E_{i+1,i+k+1}] = \\ &= E_{i,i+1}\psi(E_{i+1,i+k+1}) - \psi(E_{i+1,i+k+1})E_{i,i+1} + \\ &- \psi(E_{i,i+1})E_{i+1,i+k+1} - E_{i+1,i+k+1}\psi(E_{i,i+1}) = \\ &= (x_{i+1} + ... + x_{i+k}))E_{i,i+1}E_{i+1,i+k+1} - \\ &- (x_{i+1} + ... + x_{i+k}))E_{i+1,i+k+1}E_{i,i+1} + \\ &+ x_iE_{i,i+1}E_{i+1,i+k+1} - x_iE_{i+1,i+k+1}E_{i,i+1} = \\ &= (x_{i+1} + ... + x_{i+k}))E_{i,i+k+1} - 0 + x_iE_{i,i+k+1} - 0 = \\ &= (x_i + x_{i+1} + ... + x_{i+k})E_{i,i+k+1}.\end{aligned}$$

Krok 3: Pokażemy, że $\psi(D) = r_DE$ dla dowolnej macierzy $D \in \mathfrak{d}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, gdzie

$r_D \in \mathbf{R}$. Niech $\psi(D) = C$. Dla $i \in \mathbb{N}$ mamy

$$\psi([D, E_{i,i+1}]) = \psi((d_{ii} - d_{i+1,i+1})E_{i,i+1}) = (d_{ii} - d_{i+1,i+1})x_iE_{i,i+1}.$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned}\psi([D, E_{i,i+1}]) &= [D, \psi(E_{i,i+1})] + [\psi(D), E_{i,i+1}] = \\ &= D\psi(E_{i,i+1}) - \psi(E_{i,i+1})D + \psi(D)E_{i,i+1} - E_{i,i+1}\psi(D) = \\ &= d_{ii}x_iE_{i,i+1} - d_{i+1,i+1}x_iE_{i,i+1} + c_{ii}E_{i,i+1} - c_{i+1,i+1}E_{i,i+1} = \\ &= (d_{ii} - d_{i+1,i+1})x_iE_{i,i+1} + (c_{ii} - c_{i+1,i+1})E_{i,i+1}.\end{aligned}$$

Otrzymujemy $c_{ii} - c_{i+1,i+1} = 0$ dla $i \in \mathbb{N}$, więc $\psi(D) = r_DE$ dla pewnego $r_D \in \mathbf{R}$.

Krok 4: Udowodnimy, że $\psi(E_{ij}) = -\psi(E_{ji})$ dla $i \neq j$.
Analogicznie jak w kroku 1 i 2, możemy pokazać, że $\psi(E_{ji}) = rE_{ji}$ dla $j > i$ oraz pewnego $r \in \mathbf{R}$. Oznaczmy $\psi(E_{ij}) = x_{ij}E_{ij}$ dla $i \neq j$. Mamy

$$\psi([E_{ij}, E_{ji}]) = \psi(E_{ii} - E_{jj}) = \psi(E_{ii}) - \psi(E_{jj}) = r_iE - r_jE.$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned}\psi([E_{ij}, E_{ji}]) &= \psi(E_{ij})E_{ji} - E_{ji}\psi(E_{ij}) + E_{ij}\psi(E_{ji}) - \psi(E_{ji})E_{ij} = \\ &= x_{ij}E_{ii} - x_{ij}E_{jj} + x_{ji}E_{ii} - x_{ji}E_{jj}.\end{aligned}$$

W ten sposób otrzymujemy $r_i = r_j$ oraz

$$x_{ij}E_{ii} - x_{ij}E_{jj} + x_{ji}E_{ii} - x_{ji}E_{jj} = 0.$$

A więc $x_{ij} + x_{ji} = 0$ dla $i \neq j$.

Krok 5: Niech $j > i+5$, a przez $\beta^{(i,j)}$ oznaczmy zbiór macierzy, które mogą mieć niezerowe współczynniki tylko w i-tym wierszu w kolumnach $k \geq j$. Pokażemy, że $\psi(\beta^{(i,j)}) \subseteq \beta^{(i,j)}$.
Niech $B^{(i,j)} \in \beta^{(i,j)}$. Mamy

$$\begin{aligned}\psi(B^{(i,j)}) &= \psi([E_{ii}, B^{(i,j)}]) = [\psi(E_{ii}), B^{(i,j)}] + [E_{ii}, \psi(B^{(i,j)})] = \\ &= 0 + [E_{ii}, \psi(B^{(i,j)})] = E_{ii}\psi(B^{(i,j)}) - \psi(B^{(i,j)})E_{ii},\end{aligned}$$

więc $\psi(B^{(i,j)})$ może mieć niezerowe współczynniki tylko w i-tym wierszu i w i-tej kolumnie. Dla $k<j$ i $k\neq i-1$ mamy

$$\psi([B^{(i,j)},E_{k,k+1}])=\psi(B^{(i,j)}E_{k,k+1}-E_{k,k+1}B^{(i,j)})=\psi(0-0)=0.$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned}\psi([B^{(i,j)},E_{k,k+1}])&=[\psi(B^{(i,j)}),E_{k,k+1}]+[B^{(i,j)},\psi(E_{k,k+1})]=\\&=\psi(B^{(i,j)})E_{k,k+1}-E_{k,k+1}\psi(B^{(i,j)})+\\&+x_{k,k+1}(B^{(i,j)}E_{k,k+1}-E_{k,k+1}B^{(i,j)})=\\&=\psi(B^{(i,j)})E_{k,k+1}-E_{k,k+1}\psi(B^{(i,j)}),\end{aligned}$$

a więc k-ta kolumna macierzy $\psi(B^{(i,j)})$ ma wyłącznie zera we wszystkich wierszach. Otrzymujemy $\psi(\beta^{(1,j)})\subseteq\beta^{(1,j)}$ i wystarczy jeszcze pokazać, że $\psi(B^{(i,j)})_{i,i-1}=0$ dla $i>1$. Do skończenia dowodu wykorzystamy indukcję matematyczną. Mamy

$$\psi([B^{(i,j)},E_{i-1,i}])=\psi(B^{(i,j)}E_{i-1,i}-E_{i-1,i}B^{(i,j)})=\psi(0-E_{i-1,i}B^{(i,j)})\subseteq\beta^{(i-1,j)}$$

oraz

$$\begin{aligned}\psi([B^{(i,j)},E_{i-1,i}])=\psi(B^{(i,j)})E_{i-1,i}-E_{i-1,i}\psi(B^{(i,j)})+\\+x_{i-1,i}(B^{(i,j)}E_{i-1,i}-E_{i-1,i}B^{(i,j)})=\\\psi(B^{(i,j)})E_{i-1,i}-E_{i-1,i}\psi(B^{(i,j)})+x_{i-1,i}(0-E_{i-1,i}B^{(i,j)}).\end{aligned}$$

Ponieważ

$$-E_{i-1,i}\psi(B^{(i,j)})+x_{i-1,i}(-E_{i-1,i}B^{(i,j)})\subseteq\beta^{(i-1,j)},$$

otrzymujemy $\psi(B^{(i,j)})E_{i-1,i}=0$, a więc $\psi(B^{(i,j)})_{i,i-1}=0$.

Krok 6: Niech $N\in\mathrm{ND}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ oraz $\psi(N)=M$. Udowodnimy, że jeżeli $n_{ij}=0$, to $m_{ij}=0$.
Wprowadźmy oznaczenie $Y=\psi([E_{ii},N])=\psi(E_{ii}N-NE_{ii})$. Korzystając z kroku 5 i kroku 2 otrzymujemy

$$y_{ij}=n_{ij}(x_i+x_{i+1}+...+x_{j-1})=0$$

dla $i<j$ oraz

$$y_{ij}=-n_{ij}(x_i+x_{i+1}+...+x_{j-1})=0$$

dla $i>j$. Z drugiej strony

$$\begin{aligned}\psi([E_{ii},N])&=[E_{ii},\psi(N)]+[\psi(E_{ii}),N]=\\&=E_{ii}\psi(N)-\psi(N)E_{ii}+\psi(E_{ii})N-N\psi(E_{ii}).\end{aligned}$$

Jednakże $\psi(E_{ii})\in\mathfrak{d}(\mathbb{N},\mathbf{R})$, a więc $y_{ij}=m_{ij}-0+0-0=m_{ij}$.

Krok 7: Niech $Y\in\mathrm{ND}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ i $\psi(Y)=Z$. Dla $i<j$ prawdziwe są równości $z_{ij}=y_{ij}(x_i+x_{i+1}+...+x_{j-1})$ oraz $z_{ji}=-y_{ji}(x_i+x_{i+1}+...+x_{j-1})$. Niech $D\in\mathfrak{d}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ i $d_{11}=0$, $d_{ii}=-(x_1+x_2+...+x_{i-1})$ dla $i>1$. Mamy

$$\begin{aligned}z_{ij}&=y_{ij}(x_i+x_{i+1}+...+x_{j-1})=\\&=y_{ij}(x_1+x_2+...+x_{j-1})-y_{ij}(x_1+x_2+...+x_{i-1})=\\&=-d_{jj}y_{ij}+d_{ii}y_{ij}=d_{ii}y_{ij}-d_{jj}y_{ij}\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} z_{ji} &= -y_{ji}(x_i + x_{i+1} + ... + x_{j-1}) = \\ &= -y_{ji}(x_1 + x_2 + ... + x_{j-1}) + y_{ij}(x_1 + x_2 + ... + x_{i-1}) = \\ &= d_{jj}y_{ji} - d_{ii}y_{ji}, \end{aligned}$$

a więc $\psi(Y) = Z = [D, Y]$.

To znaczy, że dla dowolnej macierzy $N \in \mathrm{ND}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ zachodzi równość $\varphi(N) - [A, N] = [D, N]$, czyli

$$\varphi(N) - [A, N] - [D, N] = \varphi(N) - [A + D, N] = (\varphi - adB)(N) = 0,$$

gdzie $B = A + D$. □

Lemat 14. *Jeżeli φ jest różniczkowaniem algebry Liego $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, takim że $\varphi(D) \subseteq D$ i $\varphi(\mathrm{ND}) = \{0\}$, to φ jest różniczkowaniem centralnym dla $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$.*

Dowód. Niech $\varphi(D) = C$. Dla $i \in \mathbb{N}$ mamy

$$\varphi([D, E_{i,i+1}]) = \varphi((d_{ii} - d_{i+1,i+1})E_{i,i+1}) = 0.$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \varphi([D, E_{i,i+1}]) &= [D, \varphi(E_{i,i+1})] + [\varphi(D), E_{i,i+1}] = \\ &= D\varphi(E_{i,i+1}) - \varphi(E_{i,i+1})D + \varphi(D)E_{i,i+1} - E_{i,i+1}\varphi(D) = \\ &= 0 - 0 + c_{ii}E_{i,i+1} - c_{i+1,i+1}E_{i,i+1} = (c_{ii} - c_{i+1,i+1})E_{i,i+1}. \end{aligned}$$

Otrzymujemy $c_{ii} - c_{i+1,i+1} = 0$ dla $i \in \mathbb{N}$, a więc $\varphi(D) = r_D E$ dla pewnego $r_D \in \mathbf{R}$.

Mamy $\varphi(D) = r_D E$, gdzie $r_D \in \mathbf{R}$. To znaczy, że istnieje homomorfizm $\mathbf{R}$-modułów $\sigma : \mathfrak{d}(\mathbb{N}, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, zdefiniowany $\sigma(D) = r_D$. Mamy

$$\varphi(A) = \varphi(D + N) = \varphi(D) = \sigma(D)E$$

dla $A \in \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, $D \in \mathfrak{d}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, $N \in \mathrm{ND}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$. A zatem φ jest różniczkowaniem centralnym dla $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ indukowanym przez σ. □

Możemy teraz udowodnić główne twierdzenie dotyczące różniczkowań algebry Liego $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$.

Twierdzenie 5.2. *Każde różniczkowanie φ algebry $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ można jednoznacznie zapisać jako $\varphi = \mathrm{ad}_A + \eta_\sigma$, gdzie $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$, a η_σ jest różniczkowaniem centralnym dla $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ indukowanym przez homomorfizm σ.*

Dowód. Na podstawie poprzednich dwóch lematów dla każdego różniczkowanie φ istnieje macierz $B \in \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, taka że $\varphi - \mathrm{ad}_B = \eta_\sigma$ dla pewnego homomorfizmu σ, a zatem $\varphi = \mathrm{ad}_B + \eta_\sigma$. □

Rozdział 6

Ideały algebry Liego $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$

W rozdziale tym opiszemy ideały algebry Liego $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ nad dowolnym ciałem $\mathbf{K}$. Wyniki pochodzą z pracy [25].

Lemat 15. *Podalgebry* $\{0\}$, $\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$, $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$, $\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N}, \mathbf{K}) \oplus \mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$, $\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$, $\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N}, \mathbf{K}) \oplus \mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ *oraz* $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ *są ideałami algebry Liego* $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$.

Dowód. Bezpośrednio z definicji ideału otrzymujemy, że $\{0\} \lhd \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ oraz $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K}) \lhd \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$. Macierze skalarne są centrum algebry $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$, a więc $\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N}, \mathbf{K}) \lhd \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$.

Niech $A \in \mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ i niech n będzie numerem ostatniego niezerowego wiersza macierzy A. Dla każdej macierzy $B \in \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ macierz AB ma co najwyżej n niezerowych wierszy. Ponieważ $B \in \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$, ma więc tylko skończoną liczbę niezerowych współczynników w pierwszych n kolumnach, czyli $BA \in \mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$. Ostatecznie $[A, B] = AB - BA \in \mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$.

Niech $A \in \mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ i $B \in \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$. Wiemy, że $AB \in \mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ i $BA \in \mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$. Przez m oznaczmy numer ostatniego niezerowego wiersza w macierzy AB, a przez k numer ostatniego niezerowego wiersza macierzy BA i niech $n = \max\{m, k\}$. Przez $(AB)_n$ i $(BA)_n$ oznaczmy macierze kwadratowe $n \times n$ znajdujące się w lewym górnym rogu macierzy AB i BA. Otrzymujemy równość $\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}((AB)_n - (BA)_n) = 0$. $\square$

Lemat 16. *Jeśli* $\mathfrak{I} \lhd \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ *to albo* $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$, *albo* $\mathfrak{sl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K}) \subseteq \mathfrak{I}$.

Dowód. Krok 1: Pokażemy, że jeżeli A jest macierzą diagonalną i $a_{ii} \neq a_{jj}$ to $E_{ij} \in \mathfrak{I}$.
Mamy $E_{ij} = (a_{ii} - a_{jj})(a_{ii} - a_{jj})^{-1} E_{ij} = [A, (a_{ii} - a_{jj})^{-1} E_{ij}]$.

Krok 2: Pokażemy, że jeżeli A nie jest macierzą diagonalną i $a_{ij} \neq 0$ to dla pewnego $k \neq i$ zachodzi $E_{ik} \in \mathfrak{I}$.
Ponieważ

$$[A, E_{ii}] = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{in} E_{in} - \sum_{m \in \mathbb{N}} a_{mi} E_{mi} \in \mathfrak{I},$$

więc

$$[\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{in} E_{in} - \sum_{m \in \mathbb{N}} a_{mi} E_{mi}, E_{jj}] = a_{ij} E_{ij} - a_{ji} E_{ji} \in \mathfrak{I}.$$

Jeśli $a_{ji} = 0$ to otrzymujemy $a_{ij} E_{ij} \in \mathfrak{I}$ (oraz $E_{ij} \in \mathfrak{I}$, gdyż $\mathfrak{I}$ jest przestrzenią liniową). Jeśli natomiast $a_{ji} \neq 0$, to

$$[a_{ij} E_{ij} - a_{ji} E_{ji}, E_{ij}] = -a_{ji} E_{jj} + a_{ji} E_{ii} \in \mathfrak{I},$$

czyli $E_{ii}-E_{jj}\in\mathfrak{I}$. Korzystając z poprzedniego kroku dowodu otrzymujemy $E_{ik}\in\mathfrak{I}$ dla wszystkich $k\neq i$ gdy $\mathrm{char}(\mathbf{K})\neq 2$ lub $E_{ik}\in\mathfrak{I}$ dla wszystkich $k\notin\{i,j\}$ gdy $\mathrm{char}(\mathbf{K})=2$.

Krok 3: Pokażemy, że jeżeli dla pewnego $i\neq j$ mamy $E_{ij}\in\mathfrak{I}$, to $\mathfrak{I}$ zawiera wszystkie macierze $B\in\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N},\mathbf{K})$.
Dla dowolnej macierzy $A\in\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})$ mamy

$$[A,E_{ij}]=\sum_{m\in\mathbb{N}}a_{mi}E_{mj}-\sum_{n\in\mathbb{N}}a_{jn}E_{in}=\sum_{m=i\vee n=j}b_{mn}E_{mn},$$

gdzie $b_{ij}=a_{ii}-a_{jj}$, $b_{in}=-a_{jn}$ dla $n\notin\{i,j\}$, $b_{mj}=a_{mi}$ dla $m\notin\{i,j\}$, $b_{ii}=-a_{ji}$ i $b_{jj}=a_{ji}$. Wybierając odpowiednią macierz A, możemy więc otrzymać dowolne współczynniki b_{mn}, uwzględniając warunek $b_{ii}=-b_{jj}$ (oznaczający, że ślad jest równy zero). W szczególności otrzymujemy, że dla wszystkich $m\neq j$ mamy $E_{mj}\in\mathfrak{I}$ i dla wszystkich $n\neq i$ mamy $E_{in}\in\mathfrak{I}$. Powtarzając rozumowanie z początku bieżącego kroku, wnioskujemy, że macierz $\sum_{m=i\vee n=j}b_{mn}E_{mn}$ należy do $\mathfrak{I}$ dla dowolnych liczb naturalnych $i\neq j$. Ponieważ $\mathfrak{I}$ jest przestrzenią liniową, skończona suma macierzy tego typu także należy do $\mathfrak{I}$, co kończy dowód. □

Lemat 17. *Jeśli* $\mathfrak{I}\lhd\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})$ *to albo* $\mathfrak{I}\subseteq\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N},\mathbf{K})\oplus\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N},\mathbf{K})$*, albo* $\mathfrak{I}=\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})$.

Dowód. Krok 1: Pokażemy, że jeżeli $A\in\mathfrak{I}\setminus(\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N},\mathbf{K})\oplus\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N},\mathbf{K}))$ nie jest macierzą diagonalną, to $\mathfrak{I}$ zawiera macierz diagonalną D, taką, że zbiór $\{i\in\mathbb{N}:d_{ii}\neq d_{i+1,i+1}\}$ jest nieskończony.
Załóżmy najpierw, że A ma skończoną liczbę niezerowych współczynników poza przekątną. Wiemy, że dla wszystkich liczb naturalnych $i\neq j$ mamy $E_{ij}\in\mathfrak{I}$ (lemat 16). Ponieważ suma $\sum_{i\neq j}a_{ij}E_{ij}$ jest skończona, macierz $A-\sum_{i\neq j}a_{ij}E_{ij}$ jest macierzą diagonalną, $A-\sum_{i\neq j}a_{ij}E_{ij}\in\mathfrak{I}$ oraz $A-\sum_{i\neq j}a_{ij}E_{ij}\notin\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N},\mathbf{K})\oplus\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N},\mathbf{K})$.
Załóżmy teraz, że A ma nieskończoną liczbę niezerowych współczynników poza przekątną. Wybierzmy ciąg niezerowych współczynników a_{i_1,j_1}, a_{i_2,j_2}, a_{i_3,j_3}, …, w taki sposób, że dla wszystkich $n\in\mathbb{N}$ $i_1>1$, $j_1>1$, $i_n\neq j_n$, $i_{n+1}>\max(1+i_n,1+j_n,1+k_n)$, $j_{n+1}>\max(1+j_n,1+i_n,1+k_n)$, gdzie k_n jest liczbą wierszy, których ostatni niezerowy współczynnik znajduje się w kolumnie j_n. Możemy także założyć, że $i_n>j_n$ dla każdego n albo $i_n<j_n$ dla każdego n. Przedstawimy tutaj dowód dla $i_n<j_n$, drugi przypadek jest analogiczny (transponując odpowiednie macierze. Mamy

$$[\sum_{n\in\mathbb{N}}E_{i_n,i_n},A]=\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}}a_{i_n,m}E_{i_n,m}-\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}}a_{n,i_m}E_{n,i_m}$$

oraz

$$[\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}}a_{i_n,m}E_{i_n,m}-\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}}a_{n,i_m}E_{n,i_m},\sum_{n\in\mathbb{N}}E_{j_n,j_n}]=$$

$$=\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}}a_{i_n,j_m}E_{i_n,j_m}+\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}}a_{j_n,i_m}E_{j_n,i_m}\in\mathfrak{I},$$

a więc

$$
\begin{aligned}
&[\sum_{n\in\mathbb{N}} E_{i,i+1}, \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{i_n,j_m}E_{i_n,j_m} + \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{j_n,i_m}E_{j_n,i_m}] = \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{i_n,j_m}E_{i_n-1,j_m} + \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{j_n,i_m}E_{j_n-1,i_m} + \\
&- \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{i_n,j_m}E_{i_n,j_m+1} - \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{j_n,i_m}E_{j_n,i_m+1} \in \mathfrak{I}.
\end{aligned}
$$

Otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&[\sum_{n\in\mathbb{N}} E_{i_n-1,i_n-1}, \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{i_n,j_m}E_{i_n-1,j_m} + \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{j_n,i_m}E_{j_n-1,i_m} + \\
&- \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{i_n,j_m}E_{i_n,j_m+1} - \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{j_n,i_m}E_{j_n,i_m+1}] = \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{i_n,j_m}E_{i_n-1,j_m} \in \mathfrak{I}.
\end{aligned}
$$

Mamy

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{i_n,j_m}E_{i_n-1,j_m} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\geq n} a_{i_n,j_m}E_{i_n-1,j_m},$$

gdyż $1 + k_n < i_{n+1}$. Dla uproszczenia wprowadźmy oznaczenia $h_n = i_n - 1$, $a_{i_n,j_m} = b_{h_n,j_m}$. Wtedy

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\geq n} a_{i_n,j_m}E_{i_n-1,j_m} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\geq n} b_{h_n,j_m}E_{h_n,j_m}.$$

Niech

$$x_{h_n,h_m} = \begin{cases} -b^{-1}_{h_m,j_m} b_{h_n,j_m} & \text{dla } m = n+1, \\ -b^{-1}_{h_m,j_m}(b_{h_n,j_m} - \sum_{k=n+1}^{m-1} x_{h_n,h_k} b_{h_k,j_m}) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Otrzymujemy

$$[\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m>n} x_{h_n,h_m}E_{h_n,h_m}, \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\geq n} b_{h_n,j_m}E_{h_n,j_m}] = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_{h_n,j_n}E_{h_n,j_n}.$$

Ostatecznie

$$[\sum_{n\in\mathbb{N}} b_{h_n,j_n}E_{h_n,j_n}, \sum_{n\in\mathbb{N}} E_{j_n,h_n}] = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_{h_n,j_n}E_{h_n,h_n} - \sum_{n\in\mathbb{N}} b_{h_n,j_n}E_{j_n,j_n} \in \mathfrak{I}$$

jest szukaną macierzą diagonalną.

Krok 2: Pokażemy, że jeżeli A jest macierzą diagonalną, taką, że zbiór $\mathbf{H} = \{i \in \mathbb{N} : a_{ii} \neq a_{i+1,i+1}\}$ jest nieskończony, to $\sum_{i\in\mathbf{H}} E_{i,i+1} \in \mathfrak{I}$. Mamy

$$
\begin{aligned}
&[A, \sum_{i\in\mathbf{H}} (a_{ii} - a_{i+1,i+1})^{-1} E_{i,i+1}] = \\
&= \sum_{i\in\mathbf{H}} a_{ii}(a_{ii} - a_{i+1,i+1})^{-1} E_{i,i+1} - \sum_{i\in\mathbf{H}} a_{i+1,i+1}(a_{ii} - a_{i+1,i+1})^{-1} E_{i,i+1} = \\
&= \sum_{i\in\mathbf{H}} E_{i,i+1}.
\end{aligned}
$$

Krok 3: Niech $\mathbf{H}$ będzie nieskończonym podzbiorem $\mathbb{N}$. Pokażemy, że jeżeli $\sum_{i\in\mathbf{H}} E_{i,i+1} \in \mathfrak{I}$, to $\sum_{i\in\mathbf{G}} E_{i,i+1} \in \mathfrak{I}$, gdzie $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G} \subseteq \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N} \setminus \mathbf{G}$ nie zawiera dwóch kolejnych liczb liczb naturalnych.

Jeśli $\mathbf{H}$ spełnia wymagane założenia, to można przyjąć $\mathbf{H}=\mathbf{G}$. W przeciwnym przypadku definiujemy rodzinę zbiorów $\{\mathbf{Z}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jako $\mathbf{Z}_1=\emptyset$ oraz

$$\mathbf{Z}_n=\begin{cases}\{n\} & \text{gdy } \{n-1,n\}\cap\mathbf{H}=\emptyset\wedge\mathbf{Z}_{n-1}=\emptyset,\\ \emptyset & \text{w przeciwnym przypadku.}\end{cases}$$

Niech $\mathbf{Z}=\cup_{n=1}^{\infty}\mathbf{Z}_n$. Zauważmy, że $\mathbf{Z}\cap\mathbf{H}=\emptyset$ i $\mathbb{N}\setminus(\mathbf{Z}\cup\mathbf{H})$ nie zawiera dwóch kolejnych liczb naturalnych. Oznaczmy $G:=\mathbf{Z}\cup\mathbf{H}$. Niech $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{H}$ będzie ściśle rosnącą funkcją spełniającą warunek $f(n)>n$ dla wszystkich $n\in\mathbf{Z}$. Mamy

$$[\sum_{i\in\mathbf{Z}}E_{i,f(i)},\sum_{j\in\mathbf{H}}E_{j,j+1}]=\sum_{i\in\mathbf{Z}}E_{i,f(i)+1}\in\mathfrak{I},$$

a więc

$$[\sum_{i\in\mathbf{Z}}E_{i,f(i)+1},\sum_{i\in\mathbf{Z}}E_{f(i)+1,i}]=\sum_{i\in\mathbf{Z}}E_{i,i+1}\in\mathfrak{I}.$$

Ostatecznie

$$\sum_{i\in\mathbf{H}}E_{i,i+1}+\sum_{i\in\mathbf{Z}}E_{i,i+1}=\sum_{i\in\mathbf{G}}E_{i,i+1}\in\mathfrak{I}.$$

Krok 4: Pokażemy, że jeżeli $\sum_{i\in\mathbf{G}}E_{i,i+1}\in\mathfrak{I}$ i $\mathbb{N}\setminus\mathbf{G}$ nie zawiera dwóch kolejnych liczb naturalnych, to $\sum_{n\in\mathbb{N}}E_{i,i+1}\in\mathfrak{I}$.
Możemy założyć, że $1\in\mathbf{G}$, gdyż $E_{12}\in\mathbf{G}$ (na podstawie lematu 16), a $\mathfrak{I}$ jest przestrzenią liniową. Oznaczmy $\mathbb{N}\setminus\mathbf{G}=\{n_1,n_2,n_3,\dots\}$ i zdefiniujmy zbiory $\mathbf{Z}_1=\{n_1,n_3,n_5,\dots\}$ oraz $\mathbf{Z}_2=\{n_2,n_4,n_6,\dots\}$. Zauważmy, że dla wszystkich $m,n\in\mathbf{Z}_1$ lub $m,n\in\mathbf{Z}_2$ spełniona jest nierówność $|m-n|\geq 4$. Mamy

$$[\sum_{j\in\mathbf{Z}_1}E_{j,j-1},\sum_{i\in\mathbf{G}}E_{i,i+1}]=\sum_{j\in\mathbf{Z}_1}E_{jj}-\sum_{j\in\mathbf{Z}_1}E_{j-1,j-1}\in\mathfrak{I},$$

więc

$$[\sum_{j\in\mathbf{Z}_1}E_{jj}-\sum_{j\in\mathbf{Z}_1}E_{j-1,j-1},\sum_{i\in\mathbf{Z}_1}E_{i,i+1}]=\sum_{j\in\mathbf{Z}_1}E_{j,j+1}\in\mathfrak{I}$$

oraz

$$\sum_{i\in\mathbf{G}}E_{i,i+1}+\sum_{j\in\mathbf{Z}_1}E_{j,j+1}=\sum_{i\in\mathbf{G}\cup\mathbf{Z}_1}E_{i,i+1}\in\mathfrak{I}.$$

Analogicznie

$$[\sum_{j\in\mathbf{Z}_2}E_{j,j-1},\sum_{i\in\mathbf{G}\cup\mathbf{Z}_1}E_{i,i+1}]=\sum_{j\in\mathbf{Z}_2}E_{jj}-\sum_{j\in\mathbf{Z}_2}E_{j-1,j-1}\in\mathfrak{I},$$

więc

$$[\sum_{j\in\mathbf{Z}_2}E_{jj}-\sum_{j\in\mathbf{Z}_2}E_{j-1,j-1},\sum_{i\in\mathbf{Z}_2}E_{i,i+1}]=\sum_{j\in\mathbf{Z}_2}E_{j,j+1}\in\mathfrak{I}$$

i ostatecznie

$$\sum_{i\in\mathbf{G}\cup\mathbf{Z}_1}E_{i,i+1}+\sum_{j\in\mathbf{Z}_2}E_{j,j+1}=\sum_{n\in\mathbb{N}}E_{n,n+1}\in\mathfrak{I}.$$

Krok 5: Pokażemy, że jeżeli $\sum_{i\in\mathbb{N}} E_{i,i+1} \in \mathfrak{I}$, to $\mathfrak{I} = \mathfrak{gl}_{cf}$.
Udowodnimy, że równanie $[X, \sum_{i\in\mathbb{N}} E_{i,i+1}] = A$ posiada rozwiązanie dla każdej macierzy $A \in \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$. Równanie to jest równoważne układowi równań:

$$\begin{cases} x_{m,n-1} - x_{m+1,n} = a_{mn} \\ x_{m+1,1} = a_{m1} \end{cases} \qquad n, m \in \mathbb{N}, 1 < n,$$

który ma na przykład następujące rozwiązanie:

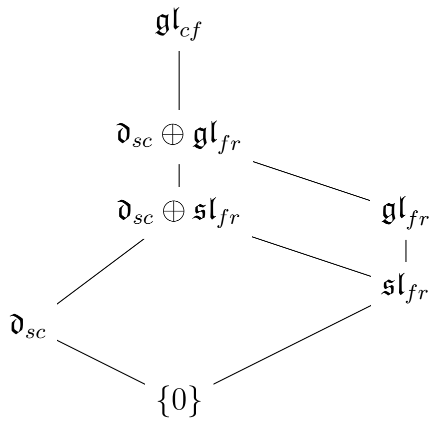
$$\begin{cases} x_{1n} = 0 & n \in \mathbb{N}, \\ x_{m+1,1} = a_{m1} & m \in \mathbb{N}, \\ x_{m+1,n} = x_{m,n-1} - a_{mn} & m, n \in \mathbb{N}, 1 < n. \end{cases}$$

□

Możemy teraz udowodnić główne twierdzenie o ideałach $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$.

Twierdzenie 6.1. *Dla dowolnego ciała* $\mathbf{K}$ *algebry* $\{0\}$, $\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$, $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$, $\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$, $\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N}, \mathbf{K}) \oplus \mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$, $\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N}, \mathbf{K}) \oplus \mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$, $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ *są jedynymi ideałami algebry Liego* $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$.

Krata ideałów wygląda więc następująco (dla czytelności stosujemy skrócony zapis algebr):



Dowód. Mamy $\dim\{0\} = 0$ oraz $\dim \mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N}, \mathbf{K}) = 1$, a więc nie istnieje ideał $\{0\} \subsetneq \mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$. Podobnie, ponieważ kowymiar ideału $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ w $\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N}, \mathbf{K}) \oplus \mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$, $\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ w $\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N}, \mathbf{K}) \oplus \mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ oraz $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ w $\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ jest równy 1, nie istnieją ideały

$$\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K}) \subsetneq \mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N}, \mathbf{K}) \oplus \mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K}),$$

$$\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K}) \subsetneq \mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N}, \mathbf{K}) \oplus \mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K}),$$

$$\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K}) \subsetneq \mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K}).$$

Ponadto na podstawie lematu 16 nie istnieje ideał $\{0\} \subsetneq \mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$, a na postawie lematu 17 nie istnieje ideał

$$\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N}, \mathbf{K}) \oplus \mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}, \mathbf{K}) \subsetneq \mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K}),$$

co kończy dowód. □

Konsekwencją powyższego twierdzenia jest następujący wniosek:

Wniosek 18. *Algebry Liego* $\mathfrak{sl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})$ *i* $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})/(\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N},\mathbf{K})\oplus\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N},\mathbf{K}))$ *są proste.*

Dowód twierdzenia 6.1 zawiera nowe uzasadnienie faktu, że algebra Liego $\mathfrak{sl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})$ jest prosta, inne niż w rozdziale 4. Zauważmy także, że algebra ilorazowa $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})/(\mathfrak{d}_{sc}(\mathbb{N},\mathbf{K})\oplus\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N},\mathbf{K}))$ jest nowym przykładem prostej algebry Liego nieprzeliczalnego wymiaru.

Inną konsekwencją twierdzenia 6.1 jest następujący fakt:

Wniosek 19. *Zachodzi równość* $[\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K}),\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})] = \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})$, *tzn. algebra Liego* $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})$ *jest doskonała (ang. perfect).*

Dowód. W rozdziale 5.1 pokazaliśmy, że macierz $\sum_{i=1}^{\infty} E_{i,i+2}$ należy do algebry Liego $[\mathfrak{n}(\mathbb{N},\mathbf{K}),\mathfrak{n}(\mathbb{N},\mathbf{K})]$, a więc także do $[\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K}),\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})]$. Ponieważ komutant ten jest ideałem, więc na podstawie twierdzenia 6.1 otrzymujemy szukaną równość. □

Dodatek

Pokażemy tutaj pewne własności dotyczące bazy $M_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R})$.

Można zauważyć, że zbiór $M_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ jest równoliczny ze zbiorem wszystkich ciągów o wyrazach z $\mathbf{R}$, a więc $|M_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R})| = |\mathbf{R}|^{\aleph_0}$. W szczególności dla dowolnego pierścienia z jedynką $\mathbf{R}$ zbiór $M_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ posiada podzbiór mocy continuum.

Nad dowolnym pierścieniem $\mathbf{R}$-moduł $M_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ nie musi posiadać bazy.

Przykład 6.1. Niech $\mathbf{R} = \mathbb{Z}$. Zbiór $M_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ z dodawaniem macierzy jest grupą abelową. Przez $\mathbf{P}$ oznaczmy jej podgrupę składającą się z macierzy, w których niezerowy może być jedynie pierwszy wiersz. Znany jest wynik, mówiący że $\mathbf{P}$ nie jest wolną grupą abelową [2]. Zatem $M_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{R})$ także nie jest wolną grupą abelową (wolnym $\mathbb{Z}$-modułem), gdyż podgrupa wolnej grupy abelowej wolnej jest wolną grupą abelową.

Ograniczmy się do przypadku $M_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})$, gdzie $\mathbf{K}$ jest dowolnym ciałem. Z aksjomatu wyboru wynika, że przestrzeń liniowa $M_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})$ posiada bazę. Udowodnimy teraz następujący

Lemat 20. *Niech B będzie bazą przestrzeni liniowej $M_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})$. Zachodzi równość $|M_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})| = \max(|K|,|B|)$.*

Dowód. Pokażemy nietrywialną nierówność $|M_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})| \leq \max(|K|,|B|)$. Niech X będzie zbiorem wszystkich skończonych ciągów o wyrazach z $\mathbf{K} \times B$. Funkcja $f : X \to M_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})$ określona

$$f(((k_1,b_1),\ldots,(k_n,b_n))) = k_1b_1 + \cdots + k_nb_n$$

jest suriekcją. A zatem

$$|M_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})| \leq |X| = \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{K} \times B|^n = \aleph_0|\mathbf{K}||B| = \max(\aleph_0,|\mathbf{K}|,|B|).$$

Na podstawie wcześniejszych rozważań mamy $|M_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})| > \aleph_0$, co kończy dowód. $\square$

Wniosek 21. *Jeśli $\mathbf{K}$ jest zbiorem przeliczalnym, to baza $M_{cf}(\mathbb{N},\mathbf{K})$ ma moc continuum.*

Pokażemy nieco ogólniejszą własność:

Twierdzenie 6.2. *Dla dowolnego ciała* $\mathbf{K}$ *baza* $M_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ *ma moc co najmniej continuum.*

Dowód. Wykorzystamy fakt, że każde nieskończone ciało $\mathbf{K}$ posiada przeliczalne podciało $\mathbf{K}'$. Na podstawie poprzedniego wniosku $M_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K}')$ ma bazę mocy continuum. Można zauważyć, że baza ta jest zbiorem liniowo niezależnym także w przestrzeni $M_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{K})$, co kończy dowód. $\square$

Bibliografia

[1] R. K. Amayo, I. Stewart, *Infinite-dimensional Lie algebras*, Noordhoff International Pub., 1974.

[2] R. Baer, *Abelian groups without elements of finite order*, Duke Mathematical Journal **3** (1937), no. 1, 68–122, DOI 10.1215/S0012-7094-37-00308-9.

[3] A. A. Baranov, *Complex finitary simple Lie algebras*, Archiv der Mathematik **72** (1999), no. 2, 101–106, DOI 10.1007/s000130050.

[4] A. A. Baranov, *Finitary Simple Lie Algebras*, Journal of Algebra **219** (1999), no. 1, 299 - 329, DOI 10.1006/jabr.1999.7856.

[5] A. A. Baranov, H. Strade, *Finitary Lie algebras*, Journal of Algebra **254** (2002), no. 1, 173 - 211, DOI 10.1016/S0021-8693(02)00079-0.

[6] G. G. A. Bäuerle, E. A. de Kerf, *Lie Algebras, Part 1: Finite and Infinite Dimensional Lie Algebras and Applications in Physics*, Studies in mathematical physics, vol. 1, Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1990.

[7] G. G. A. Bäuerle, E. A. de Kerf, A. P. E. ten Kroode, *Lie Algebras, Part 2: Finite and Infinite Dimensional Lie Algebras and Applications in Physics*, Studies in mathematical physics, vol. 7, Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1997.

[8] R. E. Block, R. L. Wilson, *Classification of the restricted simple Lie algebras*, Journal of Algebra **114** (1988), no. 1, 115 - 259, DOI 10.1016/0021-8693(88)90216-5.

[9] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras: Chapters 1-3*, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, 1998.

[10] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras: Chapters 4-6*, Bourbaki, Nicolas: Elements of mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2008.

[11] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras: Chapters 7-9*, Actualités scientifiques et industrielles, Springer Berlin Heidelberg, 2004.

[12] L. Boza Prieto, E. M. Fedriani Martel, J. Núñez Valdés, Á. F. Tenorio Villalón, *A historical review of the classifications of Lie algebras*, Revista de la Unión Matemática Argentina **54** (2013), no. 2, 75-99.

[13] O. Braunling, *On the homology of Lie algebras like* $\mathfrak{gl}(\infty, \mathbf{R})$, arXiv:1712.01822 [math.RT] (2017).

[14] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, *Transformation groups for soliton equations: IV. A new hierarchy of soliton equations of KP-type*, Physica D: Nonlinear Phenomena **4** (1982), no. 3, 343 - 365, DOI 10.1016/0167-2789(82)90041-0.

[15] B. L. Feigin, D. B. Fuks, *Homology of the Lie algebra of vector fields on the line*, Functional Analysis and Its Applications **14** (1980), no. 3, 201–212, DOI 10.1007/BF01086182.

[16] A. Fialowski, K. Iohara, *Homology of Lie Algebras of Orthogonal and Symplectic Generalized Jacobi Matrices*, arXiv:1801.00624 [math.RT] (2018).

[17] A. Fialowski, K. Iohara, *Homology of the Lie Algebra* $\mathfrak{gl}(\infty, \mathbf{R})$, arXiv:1711.05080 [math.RT] (2017).

[18] D. B. Fuks, *Cohomology of Infinite-Dimensional Lie Algebras*, Monographs in Contemporary Mathematics, Springer US, 1986.

[19] I. M. Gelfand, D. B. Fuks, *Cohomologies of the Lie algebra of vector fields on the circle*, Funct. Anal. Appl. **2** (1968), no. 4, 92-93.

[20] K. R. Goodearl, P. Menal, J. Moncasi, *Free and Residually Artinian Regular Rings*, Journal of Algebra **156** (1993), 407–432.

[21] P. de La Harpe, *Classical Banach-Lie algebras and Banach-Lie groups of operators in Hilbert space*, Lecture notes in mathematics, Springer-Verlag, 1972.

[22] A. Henderson, *Representations of Lie Algebras: An Introduction Through* $\mathfrak{gl}_n$, Australian Mathematical Society Lecture Series, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[23] W. Hołubowski, *New simple Lie algebra of uncountable dimension*, Linear Algebra and its Applications **492** (2016), 9–12.

[24] W. Hołubowski, I. Kashuba, S. Żurek, *Derivations of the Lie algebra of infinite strictly upper triangular matrices over a commutative ring*, Communications in Algebra **45** (2017), no. 11, 4679-4685, DOI 10.1080/00927872.2016.1277388.

[25] W. Hołubowski, S. Żurek, *Ideals and derivations of the Lie algebra of column-finite infinite matrices (praca w recenzji).*

[26] W. Hołubowski, S. Żurek, *Note on simple Lie algebras of infinite matrices*, Silesian Journal of Pure and Applied Mathematics **6** (2016), no. 1, 23–26.

[27] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics Series, Springer-Verlag GmbH, 1972.

[28] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Dover books on advanced mathematics, Dover, 1979.

[29] V. G. Kac, *Infinite-Dimensional Lie Algebras*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[30] V. G. Kac, D. H. Peterson, *Spin and wedge representations of infinite-dimensional Lie algebras and groups*, Proceedings of the National Academy of Sciences **78** (1981), no. 6, 3308–3312, DOI 10.1073/pnas.78.6.3308.

[31] V. G. Kac, A. K. Raina, N. Rozhkovskaya, *Bombay Lectures On Highest Weight Representations Of Infinite Dimensional Lie Algebras (2nd Edition)*, Advanced Series In Mathematical Physics, World Scientific Publishing Company, 2013.

[32] M. Kashiwara, T. Miwa, *The* τ *function of the Kadomtsev-Petviashvili equation transformation groups for soliton equations, I*, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences **57** (1981), no. 7, 342–347, DOI 10.3792/pjaa.57.342.

[33] K. H. Neeb, *Derivations of Locally Simple Lie Algebras*, Journal of Lie Theory **15** (2005), 589-594.

[34] Shikun Ou, Dengyin Wang, Ruiping Yao, *Derivations of the Lie algebra of strictly upper triangular matrices over a commutative ring*, Linear Algebra and its Applications **424** (2007), no. 2, 378 - 383, DOI 10.1016/j.laa.2007.02.003.

[35] A. Premet, H. Strade, *Classification of finite dimensional simple Lie algebras in prime characteristics* (2006).

[36] H. Strade, *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. III. Completion of the classification*, De Gruyter, Berlin, 2013.

[37] Dengyin Wang, Qiu Yu, *Derivations of the parabolic subalgebras of the general linear Lie algebra over a commutative ring*, Linear Algebra and its Applications **418** (2006), no. 2, 763 - 774, DOI 10.1016/j.laa.2006.03.010.

[38] W. Wojtyński, *Grupy i algebry Liego*, Biblioteka matematyczna, Państwowe Wydawn. Naukowe, 1986.

[39] Xia Limeng, Yang Hengyun, Lin Lei, *The Derivation Algebra of* $gl_\infty(C)$, Journal of East China Normal University (Natural Science) **1** (2003), 21–24.