View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

re-BUŚ

You have downloaded a document from
RE-BUŚ
repository of the University of Silesia in Katowice

Title: Silnie wypukłe procesy stochastyczne

Author: Dawid Kotrys

Citation style: Kotrys Dawid. (2015). Silnie wypukłe procesy stochastyczne. Praca doktorska. Katowice : Uniwersytet Śląski

© Korzystanie z tego materiału jest możliwe zgodnie z właściwymi przepisami o dozwolonym użytku lub o innych wyjątkach przewidzianych w przepisach prawa, a korzystanie w szerszym zakresie wymaga uzyskania zgody uprawnionego.

UNIWERSYTET ŚLĄSKI W KATOWICACH

Biblioteka Uniwersytetu Śląskiego

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Akademia Techniczno–Humanistyczna w Bielsku–Białej
Uniwersytet Śląski w Katowicach

Silnie wypukłe procesy stochastyczne

Rozprawa doktorska

Autor:
Dawid Kotrys

Promotor:
prof. dr hab. Kazimierz Nikodem

Bielsko–Biała, Katowice 2015

Silnie wypukłe procesy stochastyczne

Dawid Kotrys

2015

Przedmowa

Jednym z ważniejszych pojęć analizy wypukłej są funkcje silnie wypukłe. Pojęcie to zostało wprowadzone w 1966 roku przez Polyaka [23] i znalazło wiele zastosowań między innymi w teorii optymalizacji oraz ekonomii matematycznej. W ostatnich kilku latach silna wypukłość stała się ponownie tematem intensywnych badań i ukazało się wiele prac zawierających nowe wyniki na jej temat (zobacz np. [1], [13], [14], [15] i zawarte w nich cytowania). Prace te, jak również wcześniejsze publikacje Nikodema [20] i Skowrońskiego [26], [27] na temat wypukłych procesów stochastycznych, stanowiły główną inspirację dla moich badań. Ich efektem jest przedstawiona rozprawa doktorska zawierająca pewne własności silnie wypukłych, silnie wypukłych w sensie Jensena i silnie wypukłych w sensie Wrighta procesów stochastycznych. Zawiera ona zarówno wyniki zawarte w pracach [6], [7], [8], [9], [10] jak i te jeszcze nieopublikowane.

Rozprawa składa się z czterech rozdziałów. Rozdział pierwszy zawiera przede wszystkim podstawowe definicje związane z różnego rodzaju wypukłościami procesów stochastycznych, oraz pomocnicze lematy, które zostały wykorzystane w dalszej części pracy. W rozdziale drugim prezentowane są stochastyczne odpowiedniki klasycznych twierdzeń z analizy rzeczywistej, które charakteryzują wypukłe i silnie wypukłe funkcje (zobacz. [24]; lub [13]). Pojawia się tam między innymi charakteryzacja silnie wypukłego procesu stochastycznego za pomocą podparcia, pierwszej pochodnej, oraz za pomocą drugiej pochodnej. Zaprezentowane zostaną także nierówności typu: Jensena (dyskretna i całkowa), Hermite'a-Hadamarda, a także Fejera. Rozdział trzeci poświęcony jest procesom silnie wypukłym w sensie Jensena. Można w nim znaleźć między innymi odpowiedniki nierówności Jensena, twierdzenia Kuhna, twierdzenia typu Bernsteina-Doetscha i twierdzenia Sierpińskiego. W rozdziale czwartym zostały natomiast opisane procesy silnie wypukłe w sensie Wrighta. Między innymi można znaleźć w nim charakteryzację silnie wypukłych procesów stochastycznych w sensie Wrighta, która jest odpowiednikiem dobrze znanej charakteryzacji Ng'ego [18] dla funkcji wypukłych w sensie Wrighta, oraz twierdzenie o silnie wypukłym w sensie Jensena procesie majoryzowanym przez silnie wklęsły w sensie Jensena proces stochastyczny.

Dawid Kotrys

Spis treści

1

Wprowadzenie

W roku 1980 Nikodem [20] wprowadził definicję wypukłych w sensie Jensena procesów stochastycznych i podał warunki, przy których są one ciągłe. Następnie Skowroński w pracach [26] oraz [27] badał dalsze własności wypukłych, wypukłych w sensie Jensena oraz wypukłych w sensie Wrighta procesów stochastycznych. Definicja silnie wypukłych procesów stochastycznych pojawiła się po raz pierwszy w pracy [7] w 2012 roku.

1.1 Różne rodzaje wypukłości

Niech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Funkcję $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy *zmienną losową*, jeśli jest ona $\mathcal{A}$–mierzalna. Natomiast funkcja $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, gdzie $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, jest zwana *procesem stochastycznym*, gdy dla każdego $t \in I$ funkcja $X(t,\cdot)$ jest zmienną losową.

Niech $C : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie dodatnią zmienną losową. Proces stochastyczny $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy *silnie wypukłym z modułem* $C(\cdot)$, jeśli dla wszystkich $u,v \in I$ oraz dla każdego $\lambda \in [0,1]$ zachodzi następująca nierówność

$$(1) \qquad X\big(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot\big) \leqslant \lambda X(u,\cdot) + (1-\lambda)X(v,\cdot) - C(\cdot)\lambda(1-\lambda)(u-v)^2 \quad \text{(p.w.)}.$$

Jeżeli zakładamy, że nierówność (1) zachodzi dla dowolnych $u,v \in I$ i pewnej ustalonej liczby $\lambda \in [0,1]$, to mówimy wówczas, że proces X jest *silnie* λ*–wypukły z modułem* $C(\cdot)$. W szczególnym przypadku, gdy nierówność (1) jest postulowana dla wszystkich $u,v \in I$ oraz $\lambda = \frac{1}{2}$, mówimy że proces stochastyczny X jest *silnie wypukły w sensie Jensena (silnie J–wypukły) z modułem* $C(\cdot)$.

Mówimy, że proces stochastyczny X jest *silnie wklęsły* (*silnie* λ*–wklęsły*, *silnie J–wklęsły*), gdy proces $(-X)$ jest silnie wypukły (silnie λ-wypukły, silnie J–wypukły). Wiele interesujących własności wypukłych i J–wypukłych procesów stochastycznych można znaleźć w [20] i [26] (także w [16], gdzie badane są addytywne procesy stochastyczne).

Pomijając składnik $C(\cdot)\lambda(1-\lambda)(u-v)^2$ w nierówności (1), otrzymujemy nierówność

$$(2) \qquad X(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot) \leqslant \lambda X(u,\cdot) + (1-\lambda)X(v,\cdot) \quad \text{(p.w.)},$$

czyli definicję wypukłego procesu stochastycznego wprowadzoną przez Nikodema w 1980 roku (zobacz [20]), definicję procesu λ–wypukłego, albo gdy $\lambda = \frac{1}{2}$ procesu Jensenowsko wypukłego (J–wypukłego).

Wprowadzenie definicji silnie wypukłego procesu stochastycznego było motywowane przez pojęcie silnie wypukłych funkcji, które odgrywają istotną rolę w teorii optymalizacji i ekonomii matematycznej (zobacz, na przykład [23], [14], oraz zawarte w nich referencje).

Niech $C : \Omega \to \mathbb{R}$ oznacza dodatnią zmienną losową. Mówimy, że proces stochastyczny $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest *silnie wypukły w sensie Wrighta (silnie W–wypukły) z modułem* $C(\cdot)$, gdy nierówność

$$
\begin{aligned}
(3)\quad & X\big(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot\big) + X\big((1-\lambda)u + \lambda v,\cdot\big) \leqslant \\
& \qquad \leqslant X(u,\cdot) + X(v,\cdot) - 2C(\cdot)\lambda(1-\lambda)(u-v)^2 \quad \text{(p.w.)}
\end{aligned}
$$

zachodzi dla każdego $\lambda \in [0,1]$ oraz dla wszystkich $u,v \in I$.

Można bez trudu udowodnić, że każdy silnie wypukły proces jest silnie wypukły w sensie Wrighta, oraz że każdy silnie wypukły w sensie Wrighta proces jest silnie wypukły w sensie Jensena. Implikacje odwrotne nie są jednak prawdziwe.

Pomijając, jak poprzednio, składnik $2C(\cdot)\lambda(1-\lambda)(u-v)^2$ w nierówności (3), otrzymamy definicję *procesu wypukłego w sensie Wrighta (W–wypukłego)* wprowadzoną przez Skowrońskiego w [27].

Proces stochastyczny $A : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy *addytywnym* jeżeli $A(u+v,\cdot) = A(u,\cdot) + A(v,\cdot)$ (p.w.), dla wszystkich $u,v \in \mathbb{R}$. Definicja ta została wprowadzona przez B. Nagy'a (zobacz [16]).

1.2 P–ograniczoność, ciągłość i pochodna według prawdopodobieństwa

Mówimy, że proces stochastyczny $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest

(i) *P–ograniczony z góry* na przedziale $(a,b) \subset I$, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in(a,b)} \Big\{ P\Big(\big\{\omega \in \Omega : X(t,\omega) \geqslant n\big\}\Big)\Big\} = 0;$$

(ii) *P–ograniczony z dołu* na przedziale $(a,b) \subset I$, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in(a,b)} \Big\{ P\Big(\big\{\omega \in \Omega : X(t,\omega) \leqslant -n\big\}\Big)\Big\} = 0;$$

(iii) *P–ograniczony* na przedziale $(a,b) \subset I$, gdy jest P–ograniczony z góry i P–ograniczony z dołu na przedziale $(a,b) \subset I$;

(iv) *ciągły według prawdopodobieństwa* na przedziale I, jeżeli dla każdego $t_0 \in I$ zachodzi

$$P - \lim_{t \to t_0} X(t,\cdot) = X(t_0,\cdot),$$

gdzie $P - \lim$ oznacza zbieżność według prawdopodobieństwa;

(v) *różniczkowalny według prawdopodobieństwa* na przedziale I, jeżeli istnieje proces stochastyczny X' (pochodna X według prawdopodobieństwa) taki, że dla każdego $t_0 \in I$

$$P - \lim_{t \to t_0} \frac{X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot)}{t - t_0} = X'(t_0,\cdot),$$

gdzie $P - \lim$ oznacza zbieżność według prawdopodobieństwa.

Powyższe definicje można znaleźć na przykład w klasycznej książce Gichmana i Skorochoda [3] (zobacz również [16],[20]).

Uwaga 1. *W niniejszej pracy przez proces stochastyczny ciągły będziemy rozumieć proces ciągły według prawdopodobieństaw. Jeżeli będą używane inne rodzaje ciągłości (na przykład ciągłość według drugiego momentu), to za każdym razem będzie to sygnalizowane.*

1.3 Ciągłość, pochodna i całka średniokwadratowa

Niech $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ będzie procesem stochastycznym takim, że $E[X(t)]^2 < \infty$ dla wszystkich $t \in I$. Symbol $E[X(t)]$ oznacza wartość oczekiwaną $X(t,\cdot)$. Przypomnijmy, że proces stochastyczny X jest

(i) *ciągły średniokwadratowo* na przedziale I, jeżeli dla wszystkich $t_0 \in I$ mamy

$$\lim_{t \to t_0} E\big[X(t) - X(t_0)\big]^2 = 0;$$

(ii) *różniczkowalny średniokwadratowo* na przedziale I, jeżeli istnieje proces stochastyczny X' (pochodna X) taki, że dla wszystkich $t_0 \in I$ mamy

$$\lim_{t \to t_0} E\Big[\frac{X(t) - X(t_0)}{t - t_0} - X'(t_0)\Big]^2 = 0;$$

(iii) *dwukrotnie różniczkowalny średniokwadratowo* na przedziale I, jeżeli istnieje proces stochastyczny X'' (druga pochodna X) taki, że dla wszystkich $t_0 \in I$ mamy

$$\lim_{t \to t_0} E\Big[\frac{X'(t) - X'(t_0)}{t - t_0} - X''(t_0)\Big]^2 = 0;$$

(iv) *całkowalny średniokwadratowo* w $[a,b] \subset I$, jeżeli istnieje zmienna losowa Y taka, że dla dowolnego ciągu normalnego podziałów odcinka $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$ i dla wszystkich $\Theta_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1,...,n$, mamy

$$\lim_{n\to\infty} E\Big[\sum_{k=1}^{n} X(\Theta_k)\cdot(t_k - t_{k-1}) - Y\Big]^2 = 0.$$

Zmienną losową $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy *całką średniokwadratową* procesu X na odcinku $[a,b]$. Będziemy również pisać

$$Y(\cdot) = \int_a^b X(s,\cdot)ds \quad \text{(p.w.)}.$$

Definicję oraz podstawowe własności pochodnej i całki średniokwadratowej można znaleźć w [28].

Aby zapewnić sobie całkowalność średniokwadratową procesu stochastycznego X wystarczy założyć ciągłość średniokwadratową procesu X. Oczywistym jest również fakt, że ciągłość (różniczkowalność) średniokwadratowa implikuje ciągłość (różniczkowalność) według prawdopodobieństwa. Jednakże implikacje odwrotne nie są prawdziwe.

W niniejszej pracy często wykorzystywać będziemy monotoniczność całki średniokwadratowej. Jeżeli $X(t,\cdot) \leqslant Y(t,\cdot)$ (p.w.) na pewnym przedziale $[a,b]$, to wówczas

$$\int_a^b X(t,\cdot)dt \leqslant \int_a^b Y(t,\cdot)dt \quad \text{(p.w.)}.$$

Nierówność ta wynika natychmiast z definicji całki średniokwadratowej. Udowodnimy teraz cztery pomocnicze lematy, które będą nam potrzebne w dalszej części rozprawy.

Lemat 2. *Niech* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *będzie procesem stochastycznym postaci* $X(t,\cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$*, gdzie* $A,B : \Omega \to \mathbb{R}$ *są zmiennymi losowymi takimi, że* $E[A^2] < \infty$*,* $E[B^2] < \infty$ *oraz* $[a,b] \subset I$*. Wówczas*

$$\int_a^b X(t,\cdot)dt = A(\cdot)\frac{b^2 - a^2}{2} + B(\cdot)(b-a) \quad \textit{(p.w.)}.$$

Dowód. Korzystając z podstawowych własności wartości oczekiwanej, mamy

$$
\begin{aligned}
&E\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} X(\Theta_k)\cdot(t_k - t_{k-1}) - A\frac{b^2-a^2}{2} - B(b-a)\Big)^2\Big] = \\
&= E\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n}(A\Theta_k + B)(t_k - t_{k-1}) - A\frac{b^2-a^2}{2} - B(b-a)\Big)^2\Big] = \\
&= E\Big[\Big(A\Big(\sum_{k=1}^{n}\Theta_k(t_k - t_{k-1}) - \frac{b^2-a^2}{2}\Big) + B\underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) - (b-a)\Big)}_{=0}\Big)^2\Big] = \\
&= E\Big[\Big(A\Big(\sum_{k=1}^{n}\Theta_k(t_k - t_{k-1}) - \frac{b^2-a^2}{2}\Big)\Big)^2\Big] = \\
&= \Big(\sum_{k=1}^{n}\Theta_k(t_k - t_{k-1}) - \frac{b^2-a^2}{2}\Big)^2 E[A^2]
\end{aligned}
$$

Przy $n \to \infty$, powyższe wyrażenie dąży do zera, ze względu na definicję całki Riemanna. Dowód lematu jest zakończony. □

Lemat 3. *Niech* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *będzie procesem stochastycznym postaci* $X(t,\cdot) = C(\cdot)t^2$*, gdzie* $C : \Omega \to \mathbb{R}$ *jest zmienną losową taką, że* $E[C^2] < \infty$*, oraz niech* $[a,b] \subset I$*. Wówczas*

$$\int_a^b X(t,\cdot)\,dt = C(\cdot)\frac{b^3-a^3}{3} \quad \text{(p.w.)}.$$

Dowód. Korzystając z podstawowych własności wartości oczekiwanej otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
E\left[\sum_{i=1}^{n} X(\Theta_i)(t_i - t_{i-1}) - C\frac{b^3-a^3}{3}\right]^2 &= E\left[\sum_{i=1}^{n} C\Theta_i^2(t_i - t_{i-1}) - C\frac{b^3-a^3}{3}\right]^2 = \\
&= E\left[C\left(\sum_{i=1}^{n}\Theta_i^2(t_i - t_{i-1}) - \frac{b^3-a^3}{3}\right)\right]^2 = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\Theta_i^2(t_i - t_{i-1}) - \frac{b^3-a^3}{3}\right)^2 E[C^2].
\end{aligned}
$$

Przy $n \to \infty$, powyższe wyrażenie dąży do zera, ze względu na definicję całki Riemanna. Dowód lematu jest zakończony. □

Lemat 4. *Niech* $X,Y : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *będą procesami stochastycznymi całkowalnymi średniokwadratowo. Niech ponadto* A,B *będą ustalonymi liczbami,* $[a,b] \subset I$*, oraz niech* $c \in [a,b]$*. Wówczas*

(i)
$$\int_a^b X(t,\cdot)dt = \int_a^c X(t,\cdot)dt + \int_c^b X(t,\cdot)dt \quad (p.w.);$$
(ii)
$$\int_a^b \Big[AX(t,\cdot) + BY(t,\cdot)\Big]dt = A\int_a^b X(t,\cdot)dt + B\int_a^b Y(t,\cdot)dt \quad (p.w.);$$
(iii)
$$\int_a^b X(t,\cdot)dt = -\int_b^a X(t,\cdot)dt \quad (p.w.);$$
(iv)
$$\int_{ma+n}^{mb+n} X(u,\cdot)du = \int_a^b X(mt+n,\cdot)m dt \quad (p.w.).$$

Dowód. Uzasadnienie pierwszych trzech punktów można znaleźć w [28]. Udowodnimy tylko (iv). Dla dowolnego $t \in [a,b] \subset I$, ze względu na bijektywność odwzorowania $u = mt+n$, otrzymujemy, że $u \in [ma+n, mb+n]$. Z definicji całki średniokwadratowej mamy

$$E\Big[X(u_{\Theta_k})(mt_k + n - mt_{k-1} - n) - mX(m\Theta_k + n)(t_k - t_{k-1})\Big]^2 =$$
$$= E\Big[X(m\Theta_k + n)(mt_k - mt_{k-1}) - mX(m\Theta_k + n)(t_k - t_{k-1})\Big]^2 =$$
$$= E\Big[m\Big(X(m\Theta_k + n)(t_k - t_{k-1}) - X(m\Theta_k + n)(t_k - t_{k-1})\Big)\Big]^2 = E[0]^2 = 0.$$
□

Lemat 5. *Niech* $G : I \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ *będzie całkowalnym średniokwadatowo procesem stochastycznym, takim że* $G(a+b-t) = G(t) \quad (p.w.)$ *dla dowolnego* $t \in [a,b] \subset I$. *Niech ponadto*
$$\int_a^b G(t,\cdot)dt = J(\cdot) \quad (p.w.),$$
gdzie $J : \Omega \to \mathbb{R}$ *jest jednostkową zmienną losową. Wtedy*
$$\int_a^b tG(t,\cdot)dt = \frac{a+b}{2}J(\cdot) \quad (p.w.). \tag{4}$$

Dowód. Podstawmy do lewej strony całki (4) wyrażenie $u = 2s - t$, gdzie $s = \frac{a+b}{2}$. Na mocy założenia (odnośnie procesu G) i Lematu 4 mamy

$$\int_a^b tG(t,\cdot)dt = -\int_b^a (2s-u)G(2s-u,\cdot)du = \int_a^b (2s-u)G(2s-u,\cdot)du =$$
$$= \int_a^b (2s-u)G(u,\cdot)du = 2s\int_a^b G(u,\cdot)du - \int_a^b uG(u,\cdot)du = 2sJ(\cdot) - \int_a^b uG(u,\cdot)du. \quad \text{(p.w.)}$$

Zatem

$$2\int_a^b tG(t,\cdot)dt = 2sJ(\cdot) \quad \text{(p.w.)},$$

czyli

$$\int_a^b tG(t,\cdot)dt = \frac{a+b}{2}J(\cdot) \quad \text{(p.w.)}.$$

□

2

Silnie wypukłe procesy stochastyczne

W rozdziale tym udowodnimy stochastyczne odpowiedniki dobrze znanych twierdzeń z analizy rzeczywistej, które charakteryzują wypukłe i silnie wypukłe funkcje (zobacz. [24]; lub [13]). Pojawi się na przykład charakteryzacja silnie wypukłego procesu stochastycznego za pomocą podparcia, pierwszej pochodnej, oraz za pomocą drugiej pochodnej. Zaprezentowane zostaną także nierówności typu: Jensena, Hermite'a-Hadamarda, a także Fejera. W przypadku deterministycznym większość z przedstawionych rezultatów redukuje się do znanych twierdzeń o silnie wypukłych funkcjach, opisanych między innymi w [1] i [14]. Zauważmy jeszcze, że odpowiedniki niektórych z tych rezultatów dla wypukłych procesów stochastycznych, można znaleźć na przykład w [6, 20, 27].

2.1 Reprezentacja postaci $X(t,\cdot) = Y(t,\cdot) + C(\cdot)t^2$

Rozpoczynamy nasze rozważania od prostego ale bardzo użytecznego lematu. Jego wersja dla silnie wypukłych funkcji jest dobrze znana i można ją znaleźć w [4]).

Lemat 6. *Proces stochastyczny* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *jest silnie wypukły z modułem* $C(\cdot)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy proces stochastyczny* $Y : I \times \Omega \to \mathbb{R}$*, zdefiniowany w następujący sposób* $Y(t,\cdot) := X(t,\cdot) - C(\cdot)t^2$*, jest wypukły.*

Dowód. W pierwszej części dowodu zakładamy, że X jest silnie wypukły z modułem $C(\cdot)$. Ustalamy $u,v \in I$ oraz $\lambda \in [0,1]$. Z silnej wypukłości otrzymujemy

$$\begin{aligned}
Y(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot) &= X(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot) - C(\cdot)(\lambda u + (1-\lambda)v)^2 \leqslant \\
&\leqslant \lambda X(u,\cdot) + (1-\lambda)X(v,\cdot) \\
&\quad - C(\cdot)\big(\lambda(1-\lambda)(u-v)^2 + (\lambda u + (1-\lambda)v)^2\big) = \\
&= \lambda X(u,\cdot) + (1-\lambda)X(v,\cdot) - C(\cdot)\big(\lambda u^2 + (1-\lambda)v^2\big) = \\
&= \lambda\big(X(u,\cdot) - C(\cdot)u^2\big) + (1-\lambda)\big(X(v,\cdot) - C(\cdot)v^2\big) = \\
&= \lambda Y(u,\cdot) + (1-\lambda)Y(v,\cdot) \quad \text{(p.w.)}.
\end{aligned}$$

Dowód odwrotnej implikacji jest podobny. $\square$

2.2 Twierdzenie o podparciu

W niniejszym paragrafie udowodnimy najpierw twierdzenie o podparciu dla procesów wypukłych, a później wykażemy odpowiednik tego twierdzenia dla silnie wypukłych procesów stochastycznych.

Skowroński w pracy [26, Lemat 1] wykazał, że jeśli proces stochastyczny $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest wypukły, to istnieją rosnące procesy stochastyczne X'_-, X'_+ (zwane odpowiednio lewostronną i prawostronną pochodną procesu X) takie, że:

$$P - \lim_{t \to t_0^-} \frac{X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot)}{t - t_0} = X'_-(t_0,\cdot) \qquad P - \lim_{t \to t_0^+} \frac{X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot)}{t - t_0} = X'_+(t_0,\cdot).$$

Co więcej, dla $t,s \in \operatorname{int} I$ takich, że $t < s$, zachodzi następująca nierówność:

$$X'_-(t,\cdot) \leqslant X'_+(t,\cdot) \leqslant X'_-(s,\cdot) \leqslant X'_+(s,\cdot) \quad \text{(p.w.)}.$$

W dowodzie poniższego lematu skorzystamy z rezultatu Skowrońskiego.

Lemat 7. *Proces stochastyczny* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy* X *posiada podparcie w każdym punkcie* $t_0 \in \operatorname{int} I$*, postaci* $A(\cdot)(t - t_0) + X(t_0, \cdot)$*, gdzie* $A : \Omega \to \mathbb{R}$ *jest zmienną losową. Oznacza, to że dla każdego* $t \in I$ *zachodzi nierówność*

$$X(t,\cdot) \geqslant A(\cdot)(t - t_0) + X(t_0,\cdot) \quad \textit{(p.w.)}. \tag{1}$$

Dowód. Przypuśćmy, że proces X jest wypukły. Weźmy $r,s,u,v,t_0 \in \operatorname{int} I$ takie, że $r < s < t_0 < u < v$. Dla $r < s < t_0$

$$s = \frac{t_0 - s}{t_0 - r} r + \frac{s - r}{t_0 - r} t_0$$

jest kombinacją wypukłą punktów r i t_0. Z wypukłości procesu X mamy

$$X(s,\cdot) \leqslant \frac{t_0 - s}{t_0 - r} X(r,\cdot) + \frac{s - r}{t_0 - r} X(t_0,\cdot) \quad \text{(p.w.)}.$$

Stąd

$$\frac{X(t_0,\cdot) - X(r,\cdot)}{t_0 - r} \leqslant \frac{X(t_0,\cdot) - X(s,\cdot)}{t_0 - s} \quad \text{(p.w.)}.$$

Jeśli teraz $s \to t_0^-$, to otrzymamy

$$\frac{X(t_0,\cdot) - X(r,\cdot)}{t_0 - r} \leqslant X'_-(t_0,\cdot) \quad \text{(p.w.)}. \tag{2}$$

Podobnie dla $t_0 < u < v$ stosując wypukłość procesu X, otrzymujemy

$$\frac{X(u,\cdot) - X(t_0,\cdot)}{u - t_0} \leqslant \frac{X(v,\cdot) - X(t_0,\cdot)}{v - t_0} \quad \text{(p.w.)}.$$

Jeżeli $u \to t_0^+$, to

$$X'_+(t_0,\cdot) \leqslant \frac{X(v,\cdot) - X(t_0,\cdot)}{v - t_0} \quad \text{(p.w.)}. \tag{3}$$

Z nierówności (2), (3) i lematu Skowrońskiego wynika, że

$$\frac{X(t_0,\cdot) - X(r,\cdot)}{t_0 - r} \leqslant X'_-(t_0,\cdot) \leqslant X'_+(t_0,\cdot) \leqslant \frac{X(v,\cdot) - X(t_0,\cdot)}{v - t_0} \quad \text{(p.w.)}.$$

Jeśli teraz $A : \Omega \to \mathbb{R}$ jest jakąkolwiek zmienną losową spełniającą warunek $X'_-(t_0,\cdot) \leqslant A(\cdot) \leqslant X'_+(t_0,\cdot)$ (p.w.), to z powyższej nierówności natychmiast wynika, że dla każdego $t \in I$ zachodzi (1).

Odwrotnie, załóżmy teraz, że proces X posiada podparcie w dowolnym punkcie $t_0 \in I$. Oznacza to, że nierówność (1) zachodzi dla dowolnego $t \in I$. Ustalamy $u,v \in I$ oraz $\lambda \in [0,1]$, takie, że $t_0 = \lambda u + (1-\lambda)v$. Dla u i v, z nierówności (1) mamy

$$\lambda X(u,\cdot) \geqslant \lambda A(\cdot)(u - t_0) + \lambda X(t_0,\cdot) \quad \text{(p.w.)},$$

$$(1-\lambda)X(v,\cdot) \geqslant (1-\lambda)A(\cdot)(v - t_0) + (1-\lambda)X(t_0,\cdot) \quad \text{(p.w.)}.$$

Dodając stronami powyższe nierówności otrzymujemy

$$\lambda X(u,\cdot) + (1-\lambda)X(v,\cdot) \geqslant X(t_0,\cdot) \quad \text{(p.w.)}.$$

Ostatecznie, zastępując t_0 przez $\lambda u + (1-\lambda)v$ mamy

$$\lambda X(u,\cdot) + (1-\lambda)X(v,\cdot) \geqslant X(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot) \quad \text{(p.w.)}.$$

Co kończy dowód. □

Wykorzystując Lemat 6 i Lemat 7 można łatwo wykazać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8. *Proces stochastyczny* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *jest silnie wypukły z modułem* $C(\cdot)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego* $t_0 \in \operatorname{int} I$ *istnieje podparcie postaci*

$$H(t,\cdot) = C(\cdot)(t - t_0)^2 + A(\cdot)(t - t_0) + X(t_0,\cdot),$$

gdzie $A : \Omega \to \mathbb{R}$ *jest zmienną losową.*

2.3 Charakteryzacja za pomocą I pochodnej

W paragrafie tym przedstawimy charakteryzację silnie wypukłych procesów stochastycznych za pomocą pierwszych pochodnych.

Lemat 9. *Niech* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *będzie różniczkowalnym średniokwadratowo procesem stochastycznym.* X *jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy jego pierwsza pochodna jest niemalejąca na przedziale* I.

Dowód. Oczywistym jest, że różniczkowalność średniokwadratowa implikuje różniczkowalność według prawdopodobieństwa. Proces X jest wypukły, więc z Lematu 1 z pracy [26], istnieją rosnące procesy stochastyczne $X'_+, X'_- : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, zwane odpowiednio prawostronną i lewostronną pochodną procesu X takie, że

$$X'_-(u,\cdot) \leqslant X'_+(u,\cdot) \leqslant X'_-(v,\cdot) \leqslant X'_+(v,\cdot) \quad \text{(p.w.).} \tag{4}$$

dla dowolnych $u,v \in I$, $u < v$.
Z różniczkowalności X, mamy

$$\begin{cases} X'_-(u,\cdot) = X'_+(u,\cdot) = X'(u,\cdot) & \text{(p.w.)} \\ X'_-(v,\cdot) = X'_+(v,\cdot) = X'(v,\cdot) & \text{(p.w.).} \end{cases} \tag{5}$$

Z (4) i (5), dla wszystkich $u,v \in I$, takich, że $u < v$, otrzymamy

$$X'(u,\cdot) \leqslant X'(v,\cdot) \quad \text{(p.w.)} \tag{6}$$

Załóżmy teraz, że pochodna średniokwadratowa jest niemalejąca. Oznacza to, że nierówność (6) zachodzi dla wszystkich $u,v \in I$, takich, że $u < v$. Ustalamy $t_0 \in (a,b) \subset I$ i bierzemy $t \in (a,b)$ takie, że $t_0 < t$. Z podstawowych własności całki średniokwadratowej (zobacz [28]; oraz Lemat 4) oraz nierówności (6) mamy

$$X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot) = \int_{t_0}^{t} X'(s,\cdot)ds \geqslant \int_{t_0}^{t} X'(t_0,\cdot)ds = X'(t_0,\cdot)(t-t_0) \quad \text{(p.w.).}$$

Jeżeli natomiast $t < t_0$, otrzymamy analogicznie

$$\begin{aligned} X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot) &= \int_{t_0}^{t} X'(s,\cdot)ds = -\int_{t}^{t_0} X'(s,\cdot)ds \geqslant -\int_{t}^{t_0} X'(t_0,\cdot)ds = \\ &= X'(t_0,\cdot)(t-t_0) \quad \text{(p.w.).} \end{aligned}$$

Oznacza to, że X posiada podparcie postaci

$$X(t,\cdot) \geqslant X(t_0,\cdot) + X'(t_0,\cdot)(t-t_0) \quad \text{(p.w.)}$$

w dowolnym punkcie $t_0 \in (a,b)$. Lemat 7 kończy dowód. □

Jak poprzednio, stosując Lemat 6 i udowodniony powyżej Lemat 9, można pokazać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10. *Niech $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalnym średniokwadratowo procesem stochastycznym. X jest silnie wypukły z modułem $C(\cdot)$ wtedy i tylko wtedy, gdy pierwsza pochodna procesu X jest silnie rosnąca, co oznacza, że dla dowolnych $u, v \in I$, takich, że $u < v$ zachodzi poniższa nierówność*

$$X'(v,\cdot) - X'(u,\cdot) \geqslant 2C(\cdot)(v-u) \quad \textit{(p.w.)}. \tag{7}$$

Dowód. Stosując reprezentację silnie wypukłych procesów z modułem $C(\cdot)$ (Lemat 6) otrzymamy, że istnieje wypukły proces stochastyczny $H : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ taki, że

$$X(t,\cdot) = H(t,\cdot) + C(\cdot)t^2 \quad \text{(p.w.)}$$

dla wszystkich $t \in I$. Proces H jest wypukły i różniczkowalny średniokwadratowo, więc na mocy Lematu 9 pierwsza pochodna H jest niemalejąca. Dla dowolnych $u, v \in I$, spełniających warunek $u < v$ mamy

$$H'(u,\cdot) \leqslant H'(v,\cdot) \quad \text{(p.w.)}. \tag{8}$$

Można pokazać, że pierwsza pochodna średniokwadratowa procesu $X(t,\cdot) = H(t,\cdot) + C(\cdot)t^2$ (p.w.) jest równa

$$X'(t,\cdot) = H'(t,\cdot) + 2C(\cdot)t \quad \text{(p.w.)} \tag{9}$$

dla dowolnych $t \in I$. Z (9) dla $u, v \in I$ otrzymamy

$$\begin{cases} X'(u,\cdot) = H'(u,\cdot) + 2C(\cdot)u & \text{(p.w.)} \\ X'(v,\cdot) = H'(v,\cdot) + 2C(\cdot)v & \text{(p.w.)}. \end{cases} \tag{10}$$

Na mocy (8) oraz (10) mamy

$$X'(u,\cdot) - 2C(\cdot)u \leqslant X'(v,\cdot) - 2C(\cdot)v \quad \text{(p.w.)}.$$

Oznacza to, że zachodzi (7).
Załóżmy teraz, że zachodzi nierówność (7). Połóżmy

$$H'(t,\cdot) := X'(t,\cdot) - 2C(\cdot)t \quad \text{(p.w.)}$$

dla dowolnego $t \in I$. Z definicji proces H jest różniczkowalny średniokwadratowo. Z (7) dla ustalonych $u, v \in I$, spełniających warunek $u < v$, mamy $H'(u,\cdot) \leqslant H'(v,\cdot)$ (p.w.). Z Lematu 9 H jest wypukłym procesem stochastycznym. Powtórnie na mocy Lematu 6 otrzymamy, że

$$X(t,\cdot) = H(t,\cdot) + C(\cdot)t^2 \quad \text{(p.w.)}$$

jest silnie wypukłym z modułem $C(\cdot)$ procesem stochastycznym, co kończy dowód. □

2.4 Charakteryzacja za pomocą II pochodnej

W kolejnym paragrafie tego rozdziału prezentujemy charakteryzację silnie wypukłych procesów stochastycznych wykorzystującą ich drugie pochodne.

Lemat 11. *Niech* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *będzie dwukrotnie różniczkowalnym średniokwadratowo procesem stochastycznym.* X *jest wypukły na* I *wtedy i tylko wtedy, gdy* $X''(t,\cdot) \geqslant 0 \quad$ *(p.w.) dla wszystkich* $t \in I$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że proces $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest wypukły. Z Lematu 9, pierwsza pochodna średniokwadratowa $X'(t,\cdot)$ jest niemalejąca na odcinku I. Ustalamy $t, t_0 \in I$ takie, że $t_0 < t$. Z monotoniczności pierwszej pochodnej mamy

$$\frac{X'(t,\cdot) - X'(t_0,\cdot)}{t - t_0} \geqslant 0 \quad \text{(p.w.)}.$$

W przypadku, gdy $t < t_0$, otrzymamy również

$$\frac{X'(t_0,\cdot) - X'(t,\cdot)}{t_0 - t} \geqslant 0 \quad \text{(p.w.)}.$$

Przechodząc do granicy średniokwadratowej otrzymujemy

$$X''(t_0,\cdot) \geqslant 0 \quad \text{(p.w.)}.$$

Niech teraz $X''(t,\cdot) \geqslant 0 \quad$ (p.w.) dla wszystkich $t \in I$. Ustalamy $t_0 \in \operatorname{int} I$ i bierzemy $t \in I$ spełniające warunek $t_0 < t$. Dwukrotnie obliczając całkę średniokwadratową otrzymamy

$$0 \leqslant \int_{t_0}^{t} X''(s,\cdot)ds = X'(t,\cdot) - X'(t_0,\cdot) \quad \text{(p.w.)},$$

i

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_{t_0}^{t} \left[X'(s,\cdot) - X'(t_0,\cdot)\right] ds &= \int_{t_0}^{t} X'(s,\cdot)ds - \int_{t_0}^{t} X'(t_0,\cdot)ds = \\ &= X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot) - X'(t_0,\cdot)(t - t_0) \quad \text{(p.w.)}. \end{aligned}$$

W przypadku, gdy $t < t_0$ otrzymamy natomiast

$$0 \leqslant \int_{t}^{t_0} X''(s,\cdot)ds = X'(t_0,\cdot) - X'(t,\cdot) \quad \text{(p.w.)},$$

i

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_{t}^{t_0} \left[X'(t_0,\cdot) - X'(s,\cdot)\right] ds &= \int_{t}^{t_0} X'(t_0,\cdot)ds - \int_{t}^{t_0} X'(s,\cdot)ds = \\ &= X'(t_0,\cdot)(t_0 - t) - X(t_0,\cdot) + X(t,\cdot) \quad \text{(p.w.)}. \end{aligned}$$

A zatem istnieje podparcie procesu X postaci

$$X(t,\cdot) \geqslant X(t_0,\cdot) + X'(t_0,\cdot)(t - t_0) \quad \text{(p.w.)}$$

w dowolnym punkcie $t_0 \in \operatorname{int} I$. Z Lematu 7 X jest wypukły. □

Jako bezpośrednią konsekwencję Lematu 11 oraz Lematu 6 otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 12. *Niech $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ będzie dwukrotnie różniczkowalnym średnio-kwadratowo procesem stochastycznym. X jest silnie wypukłym z modułem $C(\cdot)$ na przedziale I wtedy i tylko wtedy, gdy $X''(t,\cdot) \geqslant 2C(\cdot)$ (p.w.) dla $t \in I$.*

2.5 Dyskretna nierówność typu Jensena

W tym paragrafie udowodnimy dyskretną nierówność typu Jensena dla silnie wypukłych procesów stochastycznych.

Twierdzenie 13. *Niech $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ będzie silnie wypukłym procesem stochastycznym z modułem $C(\cdot)$. Wówczas*

$$X\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t_i, \cdot\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X(t_i,\cdot) - C(\cdot)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (t_i - \bar{t})^2 \quad \textit{(p.w.)}$$

dla wszystkich $t_1, \ldots, t_n \in I$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$, takich, że $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ i $\bar{t} = \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_n t_n$.

Dowód. Bierzemy $t_1, \ldots, t_n \in I$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$, takie, że $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Kładziemy $\bar{t} = \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_n t_n$. Z Twierdzenia 8 mamy podparcie w punkcie $\bar{t}$ postaci

$$H(t,\cdot) = C(\cdot)(t - \bar{t})^2 + A(\cdot)(t - \bar{t}) + X(\bar{t},\cdot).$$

Wówczas dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ mamy

$$X(t_i,\cdot) \geqslant H(t_i,\cdot) = C(\cdot)(t_i - \bar{t})^2 + A(\cdot)(t_i - \bar{t}) + X(\bar{t},\cdot) \quad \text{(p.w.)}.$$

Mnożąc powyższą nierówność przez λ_i i sumując wszystkie nierówności otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X(t_i,\cdot) \geqslant C(\cdot)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (t_i - \bar{t})^2 + A(\cdot)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (t_i - \bar{t}) + X(\bar{t},\cdot) \quad \text{(p.w.)}.$$

Ponieważ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (t_i - \bar{t}) = 0$, to

$$X\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t_i,\cdot\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X(t_i,\cdot) - C(\cdot)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (t_i - \bar{t})^2 \quad \text{(p.w.)}.$$

□

2.6 Całkowa nierówność typu Jensena

Dla potrzeb niniejszego paragrafu wprowadzamy przestrzeń probabilistyczną $([a,b], \mathfrak{L}, \mu)$, gdzie $[a,b]$ jest przedziałem zawartym w $\mathbb{R}$, $\mathfrak{L}$ to σ–algebra zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, $\mu = \frac{1}{b-a}\lambda$ jest unormowaną miarą Lebesgue'a w $[a,b]$ ($\mu\big([a,b]\big) = 1$). Standardowo przez λ oznaczamy miarę Lebesgue'a.

Twierdzenie 14. *Niech* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *będzie silnie wypukłym procesem stochastycznym z modułem* $C(\cdot)$. *Dodatkowo niech* $\varphi : [a,b] \to I$ *będzie funkcją całkowalną z kwadratem względem miary* μ, *oraz* $m = \int_a^b \varphi(t)d\mu$. *Wówczas*

$$X(m,\cdot) \leqslant \int_a^b X\big(\varphi(t),\cdot\big)d\mu - C(\cdot)\int_a^b \big(\varphi(t)-m\big)^2 d\mu \quad \textit{(p.w.)}.$$

Dowód. Ponieważ proces stochastyczny X jest silnie wypukły, więc z Twierdzenia 8 w dowolnym punkcie wewnętrznym t_0 przedziału I istnieje podparcie postaci

$$X(\varphi(t),\cdot) \geqslant C(\cdot)(\varphi(t)-t_0)^2 + A(\cdot)(\varphi(t)-t_0) + X(t_0,\cdot) \quad \text{(p.w.)}, \tag{11}$$

gdzie $A : \Omega \to \mathbb{R}$ jest zmienną losową. Z twierdzenia o wartości średniej $m = \int_a^b \varphi(t)d\mu \in I$. Zapisując nierówność (11) dla punktu m otrzymujemy

$$X(\varphi(t),\cdot) \geqslant C(\cdot)(\varphi(t)-m)^2 + A(\cdot)(\varphi(t)-m) + X(m,\cdot) \quad \text{(p.w.)}.$$

Całkując stronami powyższą nierówność względem miary μ dostajemy

$$\begin{aligned}
&\int_a^b X(\varphi(t),\cdot)d\mu \geqslant \\
&\qquad \geqslant C(\cdot)\int_a^b (\varphi(t)-m)^2 d\mu + A(\cdot)\int_a^b (\varphi(t)-m)d\mu + X(m,\cdot)\int_a^b d\mu = \\
&\qquad = C(\cdot)\int_a^b (\varphi(t)-m)^2 d\mu + A(\cdot)\Big[\int_a^b \varphi(t)d\mu - m\int_a^b d\mu\Big] + X(m,\cdot)\int_a^b d\mu = \\
&\qquad = C(\cdot)\int_a^b (\varphi(t)-m)^2 d\mu + A(\cdot)\Big[m - m\mu\big([a,b]\big)\Big] + X(m,\cdot)\mu\big([a,b]\big) \quad \text{(p.w.)}.
\end{aligned}$$

Z probabilistyczności miary μ otrzymamy

$$\int_a^b X(\varphi(t),\cdot)d\mu \geqslant C(\cdot)\int_a^b (\varphi(t)-m)^2 d\mu + X(m,\cdot) \quad \text{(p.w.)}.$$

Co kończy dowód. □

2.7 Nierówność typu Hermite'a-Hadamarda

Powszechnie znany jest fakt, że wypukłe funkcje określone na odcinku $I \subset \mathbb{R}$ spełniają nierówność Hermite'a-Hadamarda i odwrotnie, jeśli funkcja ciągła spełnia nierówność Hermite'a-Hadamarda, to jest ona wypukła. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w [11] lub [17]. W tym paragrafie udowodnimy analogiczny rezultat dla procesów stochastycznych i całki średniokwadratowej.

W pracy [20] Nikodem wykazał, że każdy wypukły proces stochastyczny jest ciągły (według prawdopodobieństwa). Analogiczny rezultat nie zachodzi niestety dla wypukłości i ciągłości średniokwadratowej. Rozważmy na przykład proces stochastyczny $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ zdefiniowany następująco $X(t,\cdot) = A(\cdot)e^t$ (p.w.), gdzie $A : \Omega \to \mathbb{R}$ jest niecałkowalną z kwadratem zmienną losową. Proces oczywiście jest wypukły, ale nie jest ciągły średniokwadratowo. Dlatego ilekroć będziemy potrzebować ciągłości średniokwadratowej, na przykład w celu zapewnienia sobie istnienia całki średniokwadratowej, będziemy ją zakładać.

Twierdzenie 15. *Niech* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *będzie wypukłym, ciągłym średniokwadratowo na przedziale* I *procesem stochastycznym. Wtedy dla dowolnych* $u,v \in I$ *mamy*

$$X\Big(\frac{u+v}{2},\cdot\Big) \leqslant \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt \leqslant \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2} \quad \textit{(p.w.)} \tag{12}$$

Dowód. Proces X jest wypukły wiec na mocy Lematu 7 jest on podpierany w dowolnym punkcie $t_0 \in \operatorname{int} I$. Bierzemy podparcie w $t_0 = \frac{u+v}{2}$. Wówczas

$$X(t,\cdot) \geqslant A(\cdot)\Big(t - \frac{u+v}{2}\Big) + X\Big(\frac{u+v}{2},\cdot\Big) \quad \text{(p.w.)}$$

Z Lematu 2 otrzymamy

$$\begin{aligned}\int_u^v X(t,\cdot)dt &\geqslant \int_u^v \Big[A(\cdot)\Big(t - \frac{u+v}{2}\Big) + X\Big(\frac{u+v}{2},\cdot\Big)\Big]dt = \\ &= \frac{A(\cdot)}{2}(v^2-u^2) - \frac{u+v}{2}A(\cdot)(v-u) + X\Big(\frac{u+v}{2},\cdot\Big)(v-u) = \\ &= X\Big(\frac{u+v}{2},\cdot\Big)(v-u) \quad \text{(p.w.)}.\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$X\Big(\frac{u+v}{2},\cdot\Big) \leqslant \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt \quad \text{(p.w.)}.$$

To kończy dowód lewej nierówności w wyrażeniu (12).
Jeżeli teraz weźmiemy $t = \lambda u + (1-\lambda)v$, to wówczas $\lambda = \frac{t-v}{u-v}$. Z wypukłości procesu X

będzie

$$\begin{aligned} X(t,\cdot) &\leqslant \frac{t-v}{u-v}X(u,\cdot) + \Big(1 - \frac{t-v}{u-v}\Big)X(v,\cdot) = \\ &= \frac{X(u,\cdot)-X(v,\cdot)}{u-v}(t-v) + X(v,\cdot) = \\ &= \frac{X(u,\cdot)-X(v,\cdot)}{u-v}t + \frac{X(v,\cdot)(u-v) - X(u,\cdot)v + X(v,\cdot)v}{u-v} = \\ &= \frac{X(v,\cdot)-X(u,\cdot)}{v-u}t + \frac{X(v,\cdot)u - X(u,\cdot)v}{u-v} \quad \text{(p.w.)}. \end{aligned}$$

Stosując jak poprzednio Lemma 2 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_u^v X(t,\cdot)dt &\leqslant \int_u^v \Big[\frac{X(v,\cdot)-X(u,\cdot)}{v-u}t + \frac{X(v,\cdot)u - X(u,\cdot)v}{u-v}\Big]dt = \\ &= \frac{X(v,\cdot)-X(u,\cdot)}{v-u}\frac{1}{2}(v^2-u^2) - \frac{X(v,\cdot)u - X(u,\cdot)v}{v-u}(v-u) = \\ &= \frac{1}{2}(X(v,\cdot)(v-u) + X(u,\cdot)(v-u)) = \\ &= \frac{X(v,\cdot)+X(u,\cdot)}{2}(v-u) \quad \text{(p.w.)}. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt \leqslant \frac{X(v,\cdot)+X(u,\cdot)}{2} \quad \text{(p.w.)}.$$

□

Zanim udowodnimy twierdzenie odwrotne chcielibyśmy wspomnieć o dwóch prostych obserwacjach. Pierwsza z nich jest konsekwencją nierówności Schwarza, a druga wynika natychmiast z definicji wypukłości.

Obserwacja 16. *Jeżeli proces stochastyczny $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest ciągły średniokwadratowo na przedziale I, wówczas funkcja $\varphi : I \to \mathbb{R}$ postaci $\varphi(t) = E[X(t)]$ (wartość oczekiwana procesu X) jest ciągła.*

Obserwacja 17. *Jeżeli proces stochastyczny $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest wypukły (wklęsły), wówczas funkcja $\varphi : I \to \mathbb{R}$ postaci $\varphi(t) = E[X(t)]$ jest również wypukła (wklęsła).*

Udowodnimy teraz twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 15.

Twierdzenie 18. *Załóżmy, że proces stochastyczny $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest ciągły średniokwadratowo na przedziale I i spełnia lewą lub prawą nierówność w wyrażeniu (12). Wtedy X jest wypukły.*

Dowód. Udowodnimy najpierw twierdzenie w przypadku, gdy zachodzi lewa strona nierówności (12).
Dla dowodu nie wprost załóżmy, że proces stochastyczny X nie jest wypukły. Wówczas istnieją $x, y \in I$, $x < y$, $\lambda_0 \in (0,1)$ oraz $A \subset \Omega$ miary dodatniej $P(A) > 0$, takie, że

$$X(\lambda_0 x + (1-\lambda_0)y,\omega) > \lambda_0 X(x,\omega) + (1-\lambda_0)X(y,\omega) \tag{13}$$

dla wszystkich $\omega \in A$. Definiujemy proces

$$\widetilde{X}(t,\omega) = \begin{cases} X(t,\omega) & \text{gdy } \omega \in A \\ 0 & \text{gdy } \omega \notin A. \end{cases}$$

Rozważmy funkcję $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = E[\widetilde{X}(t)]$.
Z Obserwacji 16 φ jest ciągła. Na mocy (13) φ nie jest wypukła na przedziale I. Stosując rezultat Pálesa [22, Twierdzenie 2], stwierdzający, że jeśli funkcja półciągła z góry nie jest wypukła, to jest ona ściśle wklęsła w pewnym punkcie, wnioskujemy, że istnieje punkt $p \in I$ taki, że φ jet ściśle wklęsła w p. W konsekwencji istnieje dodatnia δ i stała c spełniające

$$\varphi(t) < \varphi(p) + c(t-p) \tag{14}$$

dla wszystkich $t \in (p-\delta, p+\delta) \setminus \{p\}$ (zobacz [22, Twierdzenie 1, Uwaga 1]).
Weźmy $[u,v] \subset (p-\delta, p+\delta)$ takie, że $p = \frac{u+v}{2}$. Wówczas zgodnie z twierdzeniem Pálesa otrzymamy

$$\varphi(t) < c\Big(t - \frac{u+v}{2}\Big) + \varphi\Big(\frac{u+v}{2}\Big)$$

dla wszystkich $t \in (p-\delta, p+\delta) \setminus \{p\}$. Całkując obydwie strony powyższego wyrażenia będziemy mieli

$$\int_u^v \varphi(t)dt < c\int_u^v \Big[t - \frac{u+v}{2}\Big]dt + \varphi\Big(\frac{u+v}{2}\Big)(v-u) = \varphi\Big(\frac{u+v}{2}\Big)(v-u).$$

Ostatecznie

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v \varphi(t)dt < \varphi\Big(\frac{u+v}{2}\Big).$$

Zastępując powtórnie $\varphi(t)$ przez $E[\widetilde{X}(t)]$ otrzymujemy

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v E[\widetilde{X}(t)]dt < E\Big[\widetilde{X}\Big(\frac{u+v}{2}\Big)\Big]. \tag{15}$$

Łatwo widać, że jeśli X spełnia nierówność Hermite'a-Hadamarda, to $\widetilde{X}$ spełnia ją także. Zapisując dla $\widetilde{X}$ i $[u,v]$ lewą nierówność wyrażenia (12) mamy

$$E\Big[\widetilde{X}\Big(\frac{u+v}{2}\Big)\Big] \leqslant \frac{1}{v-u}E\Big[\int_u^v \widetilde{X}(t)dt\Big]. \tag{16}$$

Z (15) i (16) otrzymujemy

$$\text{(17)} \qquad \frac{1}{v-u}\int_u^v E[\widetilde{X}(t)]dt < E\Big[\widetilde{X}\Big(\frac{u+v}{2}\Big)\Big] \leqslant \frac{1}{v-u}E\Big[\int_u^v \widetilde{X}(t)dt\Big].$$

Zmieniając kolejność całkowania w (17) i stosując twierdzenie Fubiniego otrzymujemy pożądaną sprzeczność.

Załóżmy teraz, że zachodzi prawa strona nierówności Hermite'a-Hadamarda. Jak poprzednio, dla dowodu nie wprost zakładamy, że proces stochastyczny X nie jest wypukły. Wówczas istnieją $x, y \in I$, $x < y$, $\lambda_0 \in (0,1)$ i $A \subset \Omega$ miary dodatniej $P(A) > 0$, takie, że

$$\text{(18)} \qquad X(\lambda_0 x + (1-\lambda_0)y,\omega) > \lambda_0 X(x,\omega) + (1-\lambda_0)X(y,\omega)$$

dla wszystkich $\omega \in A$. Definiujemy proces $\widetilde{X}(t,\omega)$ i funkcję $\varphi(t)$ podobnie jak w pierwszej części dowodu. Z ciągłości i nierówności (18) zapisanej dla φ otrzymamy, że istnieje przedział $[u,v] \subset I$, taki, że

$$\text{(19)} \qquad \varphi(\lambda u + (1-\lambda)v) > \lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(v)$$

dla wszystkich $\lambda \in (0,1)$. Bierzemy ustalone $t \in [u,v]$. Wtedy $t = \lambda u + (1-\lambda)v$, gdzie $\lambda = \frac{v-t}{v-u}$. Możemy teraz napisać

$$\varphi(t) > \frac{\varphi(u)v - \varphi(v)u}{v-u} - \frac{\varphi(u)-\varphi(v)}{v-u}\cdot t.$$

Całkując powyższą nierówność otrzymamy

$$\int_u^v \varphi(t)dt > \frac{1}{2}[\varphi(u)+\varphi(v)](v-u).$$

Ostatecznie

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v \varphi(t)dt > \frac{\varphi(u)+\varphi(v)}{2}.$$

Zastępując powtórnie $\varphi(t)$ przez $E[\widetilde{X}(t)]$ możemy napisać

$$\text{(20)} \qquad \frac{1}{v-u}\int_u^v E[\widetilde{X}(t)]dt > \frac{E[\widetilde{X}(u)] + E[\widetilde{X}(v)]}{2}.$$

Ponieważ proces X spełnia nierówność Hermite'a-Hadamarda, więc $\widetilde{X}$ spełnia ją także. Zapisując prawą nierówność wyrażenia (12) dla $\widetilde{X}$ i $[u,v]$ otrzymamy

$$\text{(21)} \qquad \frac{1}{v-u}E\Big[\int_u^v \widetilde{X}(t)dt\Big] \leqslant \frac{E[\widetilde{X}(u)] + E[\widetilde{X}(v)]}{2}.$$

Z (20) i (21) otrzymujemy

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v E[\widetilde{X}(t)]dt \leqslant \frac{E[\widetilde{X}(u)]+E[\widetilde{X}(v)]}{2} < \frac{1}{v-u}E\Big[\int_u^v \widetilde{X}(t)dt\Big]. \tag{22}$$

Zmieniając kolejność całkowania w (22) i stosując twierdzenie Fubiniego otrzymamy pożądaną sprzeczność. □

Teraz udowodnimy nierówność typu Hermite'a-Hadamarda dla silnie wypukłych procesów stochastycznych.

Twierdzenie 19. *Niech* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *będzie procesem stochastycznym silnie wypukłym z modułem* $C(\cdot)$ *i ciągłym średniokwadratowo na przedziale* I. *Wówczas dla dowolnych* $u, v \in I$ *mamy*

$$\begin{aligned} X\Big(\frac{u+v}{2},\cdot\Big) + C(\cdot)\frac{(v-u)^2}{12} &\leqslant \\ \leqslant \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)\,dt &\leqslant \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2} - C(\cdot)\frac{(u-v)^2}{6} \quad \text{(p.w.)}. \end{aligned} \tag{23}$$

Dowód. Zgodnie z założeniem proces X jest silnie wypukły z modułem $C(\cdot)$, więc z Lematu 6 proces $Y(t,\cdot) = X(t,\cdot) - C(\cdot)t^2$ jest wypukły. Z nierówności (12) mamy

$$Y\Big(\frac{u+v}{2},\cdot\Big) \leqslant \frac{1}{v-u}\int_u^v Y(t,\cdot)\,dt \leqslant \frac{Y(u,\cdot)+Y(v,\cdot)}{2} \quad \text{(p.w.)}.$$

Podstawiając $Y(t,\cdot) = X(t,\cdot) - C(\cdot)t^2$ do powyższego wyrażenia, dostajemy

$$\begin{aligned} X\Big(\frac{u+v}{2},\cdot\Big) - C(\cdot)\Big(\frac{u+v}{2}\Big)^2 &\leqslant \frac{1}{v-u}\int_u^v \Big(X(t,\cdot) - C(\cdot)t^2\Big)\,dt \leqslant \\ &\leqslant \frac{X(u,\cdot) - C(\cdot)u^2 + X(v,\cdot) - C(\cdot)v^2}{2} \quad \text{(p.w.)}, \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} X\Big(\frac{u+v}{2},\cdot\Big) - C(\cdot)\Big(\frac{u+v}{2}\Big)^2 &\leqslant \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)\,dt - \frac{1}{v-u}\int_u^v C(\cdot)t^2\,dt \leqslant \\ &\leqslant \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2} - \frac{C(\cdot)}{2}(u^2+v^2) \quad \text{(p.w.)}. \end{aligned}$$

Na mocy lematu 3 otrzymamy

$$\begin{aligned} X\Big(\frac{u+v}{2},\cdot\Big) - C(\cdot)\Big(\frac{u+v}{2}\Big)^2 &\leqslant \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)\,dt - C(\cdot)\frac{1}{v-u}\frac{v^3-u^3}{3} \leqslant \\ &\leqslant \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2} - \frac{C(\cdot)}{2}(u^2+v^2) \quad \text{(p.w.)}. \end{aligned}$$

Dodając stronami do powyższej nierówności składnik $C(\cdot)\frac{1}{v-u}\frac{v^3-u^3}{3}$ i wykonując proste obliczenia, otrzymujemy nierówność (23). $\square$

Pozostało jeszcze do udowodnienia twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 19.

Twierdzenie 20. *Niech proces stochastyczny $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ będzie ciągły średniokwadratowo na przedziale I i załóżmy, że spełnia lewą lub prawą nierówność w wyrażeniu (23). Wtedy X jest silnie wypukły z modułem $C(\cdot)$.*

Dowód. Zakładamy, że proces X spełnia lewą stronę nierówności (23). Definiujemy proces $Y : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ taki, że $Y(t,\cdot) = X(t,\cdot) - C(\cdot)t^2$, gdzie $C : \Omega \to \mathbb{R}$ jest zmienną losową występującą w nierówności (23). Podstawiając do lewej strony nierówności (23) $X(t,\cdot) = Y(t,\cdot) + C(\cdot)t^2$ otrzymamy

$$\begin{aligned}(24)\quad Y\Big(\frac{u+v}{2},\cdot\Big) + C(\cdot)\Big(\frac{u+v}{2}\Big)^2 + C(\cdot)\frac{(v-u)^2}{12} &\leqslant \\ \leqslant \frac{1}{v-u}\int_u^v \Big(Y(t,\cdot) + C(\cdot)t^2\Big)\,dt \quad &(\text{p.w.}).\end{aligned}$$

Wykonując proste obliczenia w (24), oraz stosując Lemat 3 i podstawowe własności całki średniokwadratowej (Lemat 4) otrzymamy

$$\begin{aligned}(25)\quad Y\Big(\frac{u+v}{2},\cdot\Big) + C(\cdot)\frac{4u^2+4uv+4v^2}{12} &\leqslant \\ \leqslant \frac{1}{v-u}\int_u^v Y(t,\cdot)\,dt + C(\cdot)\frac{1}{v-u}\frac{v^3-u^3}{3} \quad &(\text{p.w.}).\end{aligned}$$

Odejmując w nierówności (25) stronami składnik $\mathcal{C}(\cdot)\frac{u^2+uv+v^2}{3}$ otrzymujemy

$$Y\Big(\frac{u+v}{2},\cdot\Big) \leqslant \frac{1}{v-u}\int_u^v Y(t,\cdot)\,dt \quad (\text{p.w.}).$$

Proces stochastyczny Y spełnia lewą stronę nierówność Hermite'a-Hadamarda, zatem z Twierdzenia 18 jest procesem wypukłym. Na mocy Lematu 6 proces X jest silnie wypukły z modułem $C(\cdot)$.

Niech teraz proces X spełnia prawą stronę nierówności (23). Jak poprzednio definiujemy proces $Y : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ taki, że $Y(t,\cdot) = X(t,\cdot) - C(\cdot)t^2$, gdzie $C : \Omega \to \mathbb{R}$ jest zmienną losową występującą w nierówności (23). Podstawiając do prawej strony nierówności (23) $X(t,\cdot) = Y(t,\cdot) + C(\cdot)t^2$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}(26)\quad \frac{1}{v-u}\int_u^v \Big(Y(t,\cdot) + C(\cdot)t^2\Big)\,dt &\leqslant \\ \leqslant \frac{Y(u,\cdot)+Y(v,\cdot)}{2} + C(\cdot)\frac{u^2+v^2}{2} - C(\cdot)\frac{(u-v)^2}{6} \quad &(\text{p.w.}).\end{aligned}$$

Podobnie jak wcześniej wykonując proste obliczenia w (26), oraz stosując Lemat 3 i podstawowe własności całki średniokwadratowej (Lemat 4) otrzymamy

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v Y(t,\cdot)\,dt + C(\cdot)\frac{1}{v-u}\frac{v^3-u^3}{3} \leqslant \leqslant \frac{Y(u,\cdot)+Y(v,\cdot)}{2} + C(\cdot)\frac{2u^2+2uv+2v^2}{6} \quad \text{(p.w.)}. \tag{27}$$

Odejmując w nierówności (27) stronami składnik $\mathcal{C}(\cdot)\frac{u^2+uv+v^2}{3}$ otrzymujemy

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v Y(t,\cdot)\,dt \leqslant \frac{Y(u,\cdot)+Y(v,\cdot)}{2} \quad \text{(p.w.)}.$$

Proces stochastyczny Y spełnia prawą stronę nierówność Hermite'a-Hadamarda, zatem z Twierdzenia 18 jest procesem wypukłym. Na mocy Lematu 6 proces X jest silnie wypukły z modułem $C(\cdot)$. □

2.8 Nierówność typu Fejera

Udowodnimy teraz nierówność Fejera dla wypukłych procesów stochastycznych.

Lemat 21. *Niech* $X : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}$ *będzie wypukłym, ciągłym średniokwadratowo w* $[a,b]$ *procesem stochastycznym. Niech* $G : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ *będzie całkowalnym średniokwadratowo procesem stochastycznym takim, że* $G(a+b-t,\cdot) = G(t,\cdot)$ *(p.w.) dla dowolnego* $t \in [a,b]$*, oraz*

$$\int_a^b G(t,\cdot)dt = J(\cdot) \quad \textit{(p.w.)},$$

gdzie $J : \Omega \to \mathbb{R}$ *jest jednostkową zmienną losową. Zachodzi wówczas poniższa nierówność*

$$X(\frac{a+b}{2},\cdot) \leqslant \int_a^b X(t,\cdot)G(t,\cdot)dt \leqslant \frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2} \quad \textit{(p.w.)}. \tag{28}$$

Dowód. Wykażemy najpierw lewą nierówność w wyrażeniu (28). Ponieważ X jest procesem wypukłym, więc z Lematu 7 istnieje podparcie procesu X w punkcie $s = \frac{a+b}{2}$

$$X(t,\cdot) \geqslant A(\cdot)(t-s) + X(s,\cdot) \quad \text{(p.w.)}.$$

Z Lematu 5, podstawowych własności całki średniokwadratowej (Lemat 4) i założeń o procesie G otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_a^b X(t,\cdot)G(t,\cdot)dt &\geqslant \int_a^b \big[A(\cdot)(t-s)+X(s,\cdot)\big]G(t,\cdot)dt = \\ &= A(\cdot)\int_a^b tG(t,\cdot)dt + (X(s,\cdot)-A(\cdot)s)\int_a^b G(t,\cdot)dt = \\ &= A(\cdot)sJ(\cdot)+X(s,\cdot)-A(\cdot)sJ(\cdot) = X(s,\cdot) = X\Big(\frac{a+b}{2},\cdot\Big) \quad (\text{p.w.}).\end{aligned}$$

Dla dowodu prawej nierówności w wyrażeniu (28) przedstawiamy $t \in [a,b]$ w postaci kombinacji wypukłej $t = \frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b$. Wówczas korzystając z wypukłości procesu stochastycznego X, podstawowych własności całki średniokwadratowej (Lemat 4) i Lematu 5 otrzymamy

$$\begin{aligned}\int_a^b X(t,\cdot)G(t,\cdot)dt &= \int_a^b X\Big(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b,\cdot\Big)G(t,\cdot)dt \leqslant \\ &\leqslant \int_a^b \Big[\frac{b-t}{b-a}X(a,\cdot)+\frac{t-a}{b-a}X(b,\cdot)\Big]G(t,\cdot)dt = \\ &= \int_a^b \Big[\frac{bX(a,\cdot)-aX(b,\cdot)}{b-a}+\frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a}t\Big]G(t,\cdot)dt = \\ &= \frac{bX(a,\cdot)-aX(b,\cdot)}{b-a}\int_a^b G(t,\cdot)dt + \frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a}\int_a^b tG(t,\cdot)dt = \\ &= \frac{bX(a,\cdot)-aX(b,\cdot)}{b-a} + \frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a}\frac{a+b}{2} = \\ &= \frac{bX(a,\cdot)-aX(b,\cdot)+bX(b,\cdot)-aX(a,\cdot)}{2(b-a)} = \\ &= \frac{\big(X(a,\cdot)+X(b,\cdot)\big)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2} \quad (\text{p.w.}).\end{aligned}$$

□

Jako ostatnie twierdzenie w tym rozdziale zostanie zaprezentowana nierówność Fejera dla silnie wypukłych procesów stochastycznych.

Twierdzenie 22. *Niech* $X : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}$ *będzie silnie wypukłym z modułem* $C(\cdot)$, *ciągłym średniokwadratowo w* $[a,b]$ *procesem stochastycznym. Niech* $G : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ *będzie całkowalnym średniokwadratowo procesem stochastycznym takim, że* $G(a+b-t,\cdot) = G(t,\cdot)$ *(p.w.) dla dowolnego* $t \in [a,b]$, *oraz*

$$\int_a^b G(t,\cdot)dt = J(\cdot) \quad \textit{(p.w.)},$$

gdzie $J : \Omega \to \mathbb{R}$ *jest jednostkową zmienną losową. Zachodzi wówczas poniższa nierówność*

$$(29)\quad X(\frac{a+b}{2},\cdot)+C(\cdot)\Big[\int_a^b t^2G(t,\cdot)dt-\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\Big]\leqslant\int_a^b X(t,\cdot)G(t,\cdot)dt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-C(\cdot)\Big[\frac{a^2+b^2}{2}-\int_a^b t^2G(t,\cdot)dt\Big]\quad \textit{(p.w.)}.$$

Uwaga 23. *Z nierówności Fejera dla wypukłych procesów stochastycznych (28) dla procesu* $t^2J(\cdot)$ *mamy*

$$\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\leqslant\int_a^b t^2G(t,\cdot)dt\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}\quad \textit{(p.w.)}.$$

Z powyższego wynika, że składniki

$$\int_a^b t^2G(t,\cdot)dt-\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\quad i\quad \frac{a^2+b^2}{2}-\int_a^b t^2G(t,\cdot)dt$$

w nierówności (29) są nieujemne. Oznacza to, że nierówność (29) jest silniejsza niż nierówność (28). Zauważmy również, że nierówność (29) jest uogólnieniem nierówności Hermite'a-Hadamarda (23) dla silnie wypukłych procesów stochastycznych. Jeśli podstawimy $G(t,\cdot)=\frac{1}{b-a}J(\cdot)$, *gdzie* $J:\Omega\to\mathbb{R}$ *jest jednostkową zmienną losową, do (29) to otrzymujemy (23).*

Dowód. Aby udowodnić lewą stronę nierówności (29) kładziemy $s=\frac{a+b}{2}$ i bierzemy proces $H(t,\cdot)=C(\cdot)(t-s)^2+A(\cdot)(t-s)+X(s,\cdot)$ podpierający X w punkcie s (zobacz Twierdzenie 8). Wówczas

$$\int_a^b X(t,\cdot)G(t,\cdot)dt\geqslant\int_a^b H(t,\cdot)G(t,\cdot)dt=$$
$$=C(\cdot)\int_a^b t^2G(t,\cdot)dt+\big(-2C(\cdot)s+A(\cdot)\big)\int_a^b tG(t,\cdot)dt+$$
$$+\big(C(\cdot)s^2-A(\cdot)s+X(s,\cdot)\big)\int_a^b G(t,\cdot)dt\quad \text{(p.w.)}.$$

Z Lematu 5, podstawowych własności całki średniokwadratowej (Lemat 4) i założeń o procesie G otrzymujemy

$$\int_a^b X(t,\cdot)G(t,\cdot)dt\geqslant C(\cdot)\int_a^b t^2G(t,\cdot)dt-C(\cdot)s^2+X(s,\cdot)=$$
$$=X\Big(\frac{a+b}{2},\cdot\Big)+C(\cdot)\Big[\int_a^b t^2G(t,\cdot)dt-\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\Big]\quad \text{(p.w.)}.$$

Dla dowodu prawej strony nierówności (29) przedstawiamy $t \in [a,b]$ w postaci kombinacji wypukłej $t = \frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b$. Wówczas korzystając z silnej wypukłości procesu stochastycznego X, podstawowych własności całki średniokwadratowej (Lemat 4) i Lematu 5 otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\int_a^b X(t,\cdot)G(t,\cdot)dt &= \int_a^b X\Big(\frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b,\cdot\Big)G(t,\cdot)dt \leqslant \\
&\leqslant \int_a^b \Big[\frac{b-t}{b-a}X(a,\cdot) + \frac{t-a}{b-a}X(b,\cdot) - C(\cdot)\frac{(b-x)(x-a)}{(b-a)^2}(b-a)^2\Big]G(t,\cdot)dt = \\
= \int_a^b \Big[\frac{bX(a,\cdot)-aX(b,\cdot)}{b-a} &+ \frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a}t - C(\cdot)\big((a+b)t-ab-t^2\big)\Big]G(t,\cdot)dt \quad \text{(p.w.)}.
\end{aligned}
$$

Ostatecznie

$$
\begin{aligned}
\int_a^b X(t,\cdot)G(t,\cdot)dt \leqslant \frac{bX(a,\cdot)-aX(b,\cdot)}{b-a} &+ \frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a}\cdot\frac{a+b}{2} - \\
&- C(\cdot)\Big[\frac{(a+b)^2}{2} - ab - \int_a^b t^2G(t,\cdot)dt\Big] = \\
&= \frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2} - C(\cdot)\Big[\frac{a^2+b^2}{2} - \int_a^b t^2G(t,\cdot)dt\Big] \quad \text{(p.w.)}.
\end{aligned}
$$

□

Dowód Twierdzenia 22 można też przeprowadzić stosując nierówność Fejera dla procesów wypukłych (Lemat 21) oraz twierdzenie o reprezentacji dla procesów silnie wypukłych (Lemat 6).

3

Procesy stochastyczne silnie wypukłe w sensie Jensena

Głównym tematem niniejszego rozdziału jest przeniesienie pewnych dobrze znanych klasycznych własności funkcji wypukłych na silnie wypukłe procesy stochastyczne. Na przykład otrzymamy odpowiednik nierówności Jensena, twierdzenia Kuhna i twierdzenia typu Bernsteina-Doetscha. W przypadku deterministycznym większość z prezentowanych rezultatów redukuje się do własności silnie wypukłych funkcji opisanych między innymi w [1] i [14]. Zauważmy jeszcze, że odpowiedniki tych twierdzeń dla wypukłych procesów stochastycznych można znaleźć na przykład w [6, 20, 27].

3.1 Nierówność Jensena

W tym paragrafie zaprezentujemy dwie wersje klasycznej nierówności Jensena. Pierwszą dla silnie J–wypukłych procesów stochastycznych, a następnie pokażemy, że silnie J–wypukłe procesy są q–wypukłe, gdzie $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Analogiczne rezultaty dla silnie J–wypukłych funkcji można znaleźć w [1].

Przypomnijmy, że $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest *silnie J–wypukłym z modułem* $C(\cdot)$ *procesem stochastycznym (silnie wypukłym w sensie Jensena)*, gdy dla dowolnych $u, v \in I$ zachodzi nierówność

$$X\Big(\frac{u+v}{2},\cdot\Big) \leqslant \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2} - \frac{C(\cdot)}{4}(u-v)^2 \quad \text{(p.w.)}.$$

Podobnie, jak w przypadku procesów silnie wypukłych, tak i w przypadku procesów silnie J–wypukłych, można pokazać następujący lemat o charakteryzacji, który jest analogonem Lematu 6. Dowód jest podobny jak w przypadku Lematu 6, więc go pomijamy.

Lemat 24. *Proces stochastyczny* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *jest silnie J–wypukły z modułem* $C(\cdot)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy proces stochastyczny* $Y : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *zdefiniowany w sposób* $Y(t,\cdot) := X(t,\cdot) - C(\cdot)t^2$ *jest J–wypukły.*

Zacytujemy teraz lemat, który został udowodniony w pracy [20], a jest przeniesieniem na grunt procesów stochastycznych własności funkcji J–wypukłych. Oryginalny lemat dla funkcji można znaleźć np. w [11].

Lemat 25. *Niech* I *będzie przedziałem otwartym. Jeżeli* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *jest J–wypukłym procesem stochastycznym, to dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}$ *i dowolnych* $t_1,\dots,t_n \in I$ *mamy*

$$X\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, \cdot\Big) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(t_i, \cdot) \quad (p.w.). \tag{1}$$

Dla silnie J–wypukłych procesów stochastycznych korzystając z Lematu 24 oraz zacytowanego powyżej Lematu 25 można wykazać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 26. *Niech* I *będzie przedziałem otwartym. Jeżeli* $X : I\times\Omega \to \mathbb{R}$ *jest silnie J–wypukłym z modułem* $C(\cdot)$ *procesem stochastycznym, to dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}$ *i dowolnych* $t_1,\dots,t_n \in I$ *mamy*

$$X\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, \cdot\Big) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(t_i,\cdot) - \frac{C(\cdot)}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(t_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\Big)^2 \quad (p.w.). \tag{2}$$

Dowód. Ustalamy $n \in \mathbb{N}$ i $t_1,\dots,t_n \in I$. Ponieważ proces X jest silnie J–wypukły z modułem $C(\cdot)$, więc z Lematu 24 istnieje proces $Y : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ J–wypukły, taki, że $X(t,\cdot) = Y(t,\cdot) + C(\cdot)t^2 \quad$ (p.w.). Proces Y spełnia zatem nierówność (1), czyli

$$Y\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, \cdot\Big) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y(t_i, \cdot) \quad \text{(p.w.)}.$$

Podstawiając do powyższej nierówności $Y(t,\cdot) = X(t,\cdot) - C(\cdot)t^2 \quad$ (p.w.) otrzymamy

$$X\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, \cdot\Big) - C(\cdot)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\Big)^2 \leqslant \frac{1}{n}\Big[\sum_{i=1}^{n} \{X(t_i, \cdot) - C(\cdot)t_i^2\}\Big] \quad \text{(p.w.)}.$$

Zatem

$$X\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, \cdot\Big) - C(\cdot)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\Big)^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(t_i, \cdot) - \frac{C(\cdot)}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 \quad \text{(p.w.)}.$$

Czyli

$$X\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, \cdot\Big) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(t_i, \cdot) - C(\cdot)\underbrace{\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\Big)^2\Big]}_{=A} \quad \text{(p.w.)}.$$

Aby skrócić i uprościć zapis będziemy przekształcać samo wyrażenie A. Jeżeli dodatkowo wprowadzamy oznaczenie $s := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$, to wówczas

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\Big)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - (s)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (t_i - s + s)^2 - (s)^2 = \\ = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big[(t_i - s)^2 + 2(t_i - s)s + (s)^2\Big] - (s)^2 = \\ = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - s)^2 + 2\frac{1}{n}s\Big[\sum_{i=1}^{n}\Big(t_i - s\Big)\Big] + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(s)^2 - (s)^2 = \\ = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - s)^2 + 2\frac{1}{n}s\underbrace{\Big[\sum_{i=1}^{n} t_i - ns\Big]}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{n}n(s)^2 - (s)^2}_{=0} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - s)^2. \end{aligned}$$

Ostatecznie zatem

$$X\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, \cdot\Big) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(t_i, \cdot) - \frac{C(\cdot)}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(t_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\Big)^2 \quad \text{(p.w.)}.$$

$\square$

Udowodnimy teraz drugie ze wspomnianych twierdzeń.

Twierdzenie 27. *Niech* I *będzie przedziałem otwartym. Jeżeli* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *jest silnie J–wypukłym z modułem* $C(\cdot)$ *procesem stochastycznym, to*

$$X\Big(\sum_{i=1}^{n} q_i t_i, \cdot\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} q_i X(t_i, \cdot) - C(\cdot)\sum_{i=1}^{n} q_i\Big(t_i - \sum_{i=1}^{n} q_i t_i\Big)^2 \quad \textit{(p.w.)},$$

dla dowolnych $t_1, ..., t_n \in I$ *oraz* $q_1, ..., q_n \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$*, takich, że* $q_1 + \cdots + q_n = 1$.

Dowód. Bierzemy $t_1, ..., t_n \in I$ i $q_1 = \frac{k_1}{l_1}, ..., q_n = \frac{k_n}{l_n} \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ takie, że $q_1 + \cdots + q_n = 1$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $l_1 = \cdots = l_n = l$. Wtedy $k_1 + \cdots + k_n = l$. Kładziemy $u_{11} = \cdots = u_{1k_1} =: t_1$, $u_{21} = \cdots = u_{2k_2} =: t_2$, ... , $u_{n1} = \cdots = u_{nk_n} =: t_n$. Wtedy

$$\sum_{i=1}^{n} q_i t_i = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} u_{ij}.$$

Z Twierdzenia 26 otrzymamy

$$X\Big(\sum_{i=1}^{n} q_i t_i, \cdot\Big) = X\Big(\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} u_{ij}, \cdot\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} X(u_{ij}, \cdot) - \frac{C(\cdot)}{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\Big(u_{ij} - \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} u_{ij}\Big)^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} q_i X(t_i,\cdot) - C(\cdot)\sum_{i=1}^{n} q_i\Big(t_i - \sum_{i=1}^{n} q_i t_i\Big)^2 \quad \text{(p.w.)}.$$

$\square$

Bezpośrednio z udowodnionego powyższego Twierdzenia 27 wynika następujący przypadek szczególny.

Wniosek 28. *Niech* I *będzie przedziałem otwartym. Jeżeli* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *jest silnie J–wypukłym z modułem* $C(\cdot)$ *procesem stochastycznym, to*

$$X\big(qu + (1-q)v, \cdot\big) \leqslant qX(u,\cdot) + (1-q)X(v,\cdot) - C(\cdot)q(1-q)\big(u-v\big)^2 \quad \textit{(p.w.)},$$

dla dowolnych $u,v \in I$ *oraz* $q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$.

3.2 Twierdzenie typu Kuhna

Klasyczny rezultat Kuhna [12] mówi, że jeśli funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ spełnia dla pewnego ustalonego $\lambda \in (0,1)$ i dla wszystkich $x,y \in I$ nierówność

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

co oznacza, że f jest funkcją λ–wypukłą, to f jest także J–wypukła, czyli

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x,y \in I.$$

Przypomnijmy, że proces nazywamy silnie λ–wypukłym, gdy nierówność

$$X\big(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot\big) \leqslant \lambda X(u,\cdot) + (1-\lambda)X(v,\cdot) - C(\cdot)\lambda(1-\lambda)(u-v)^2 \quad \text{(p.w.)}. \tag{3}$$

zachodzi dla dowolnych $u,v \in I$ i pewnej ustalonej liczby $\lambda \in [0,1]$. W szczególnym przypadku, gdy nierówność (3) jest zakładana dla wszystkich $u,v \in I$ oraz $\lambda = \frac{1}{2}$, mówimy że proces stochastyczny X jest silnie wypukły w sensie Jensena.

Skowroński udowodnił w [27], że λ–wypukły proces stochastyczny jest również J–wypukły. W tym paragrafie udowodnimy odpowiednik tego twierdzenia dla silnie λ–wypukłych procesów stochastycznych.

Twierdzenie 29. *Niech* $\lambda \in (0,1)$ *będzie ustaloną liczbą i* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *będzie silnie* λ*–wypukłym z modułem* $C(\cdot)$ *procesem stochastycznym. Wówczas* X *jest silnie J–wypukły z modułem* $C(\cdot)$*.*

Dowód. Ustalamy $u,v \in I$ i kładziemy $t = \frac{u+v}{2}$. Rozważamy punkty $a = \lambda u + (1-\lambda)t$ oraz $b = \lambda t + (1-\lambda)v$. Można łatwo pokazać, że $t = (1-\lambda)a + \lambda b$. Stosując trzykrotnie definicję silnej λ–wypukłości (nierówność (3)) otrzymujemy

$$\begin{aligned} X(t,\cdot) &\leqslant (1-\lambda)X(a,\cdot) + \lambda X(b,\cdot) - C(\cdot)\lambda(1-\lambda)(a-b)^2 \leqslant \\ &\leqslant (1-\lambda)\big[\lambda X(u,\cdot) + (1-\lambda)X(t,\cdot) - C(\cdot)\lambda(1-\lambda)(u-t)^2\big] + \\ &+ \lambda\big[\lambda X(t,\cdot) + (1-\lambda)X(v,\cdot) - C(\cdot)\lambda(1-\lambda)(t-v)^2\big] - C(\cdot)\lambda(1-\lambda)(a-b)^2 = \\ &= \lambda(1-\lambda)\big[X(u,\cdot) + X(v,\cdot)\big] + \big[(1-\lambda)^2 + \lambda^2\big]X(t,\cdot) - \\ &- C(\cdot)\lambda(1-\lambda)\big[(1-\lambda)(u-t)^2 + \lambda(t-v)^2 + (a-b)^2\big] \quad \text{(p.w.).} \end{aligned}$$

Z powyższej nierówności po uproszczeniu mamy

$$2X(t,\cdot) \leqslant X(u,\cdot) + X(v,\cdot) - C(\cdot)\big[(1-\lambda)(u-t)^2 + \lambda(t-v)^2 + (a-b)^2\big] \quad \text{(p.w.).} \tag{4}$$

Za pomocą elementarnych obliczeń można pokazać, że ponieważ

$$u - t = t - v = a - b = \frac{u-v}{2}, \text{ to}$$

$$(1-\lambda)(u-t)^2 + \lambda(t-v)^2 + (a-b)^2 = \frac{(u-v)^2}{2}.$$

Z powyższego nierówność (4) można zapisać w postaci

$$X\Big(\frac{u+v}{2},\cdot\Big) \leqslant \frac{X(u,\cdot) + X(v,\cdot)}{2} - \frac{C(\cdot)}{4}(u-v)^2 \quad \text{(p.w.).}$$

□

3.3 Twierdzenie typu Bernsteina-Doetscha

Jest powszechnie znanym fakt, że funkcja J–wypukła $f : I \to \mathbb{R}$ jest wypukła przy pewnych założeniach regularnościowych, takich jak na przykład lokalna ograniczoność z góry w jakimś punkcie (Twierdzenie Bernsteina-Doetscha) albo mierzalność (Twierdzenie Sierpińskiego), albo pod innymi założeniami tego typu. (zobacz [11]).

Nikodem zaprezentował w [20] warunki gwarantujące wypukłość J–wypukłych procesów stochastycznych. Rozważymy teraz podobny problem dla silnie wypukłych procesów stochastycznych. Rozpoczniemy od dowodu następującego twierdzenia.

Twierdzenie 30. *Niech* I *będzie przedziałem otwartym. Jeżeli* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *jest ciągłym i silnie J–wypukłym z modułem* $C(\cdot)$ *procesem stochastycznym, to* X *jest silnie wypukły z tym samym modułem.*

Dowód. Weźmy dowolne ustalone (rzeczywiste) $\lambda \in [0,1]$. Z gęstości istnieje ciąg liczb wymiernych $q_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ zbieżny do λ. Dla ustalonych $u,v \in I$ oraz dowolnego $n \in \mathbb{N}$ z Wniosku 28 prawdziwa jest poniższa nierówność

$$X\big(q_n u + (1-q_n)v, \cdot\big) \leqslant q_n X(u,\cdot) + (1-q_n)X(v,\cdot) - C(\cdot)q_n(1-q_n)\big(u-v\big)^2 \quad \text{(p.w.)}.$$

Przechodząc do granicy (według prawdopodobieństwa P) w powyższej nierówności i korzystając z faktu, że miara P jest skończona otrzymamy

$$X\big(\lambda u + (1-\lambda)v, \cdot\big) \leqslant \lambda X(u,\cdot) + (1-\lambda)X(v,\cdot) - C(\cdot)\lambda(1-\lambda)\big(u-v\big)^2 \quad \text{(p.w.)}.$$

□

Udowodnimy teraz następujące twierdzenia.

Twierdzenie 31. *Jeżeli proces stochastyczny* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *jest silnie J–wypukły z modułem* $C(\cdot)$ *i P–ograniczony z góry na przedziale* $(a,b) \subset I$*, to jest on ciągły i silnie wypukły z modułem* $C(\cdot)$ *na przedziale* I.

Dowód. Ponieważ X jest silnie J–wypukły, więc X jest także J–wypukły. Proces X jest P–ograniczony z góry na przedziale (a,b), zatem jest on ciągły na mocy twierdzenia Nikodema [20, Twierdzenie 4]. Wypukłość wynika natomiast wprost z Twierdzenia 30. □

Twierdzenie 32. *Załóżmy, że* I *jest przedziałem otwartym. Silnie J–wypukły proces stochastyczny* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *z modułem* $C(\cdot)$ *jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest on silnie wypukły z modułem* $C(\cdot)$.

Dowód. Warunek konieczny wynika natychmiast z Twierdzenia 30. Aby natomiast pokazać warunek wystarczający zauważamy, że jeśli X jest silnie wypukły, to X jest również wypukły. Z twierdzenia Nikodema ([20, Twierdzenie 5]) otrzymujemy jego ciągłość. □

Z Twierdzeń 29 i 32 wynika poniższy wniosek.

Wniosek 33. *Jeżeli proces* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *jest ciągły i silnie* λ*–wypukły z modułem* $C(\cdot)$*, to jest on silnie wypukły z modułem* $C(\cdot)$.

3.4 Twierdzenie typu Sierpińskiego

Zanim udowodnimy odpowiednik twierdzenia Sierpińskiego wprowadzimy następujące oznaczenia. Niech $\mathcal{L}$ oznacza σ–algebrę mierzalnych w sensie Lebesgue'a podzbiorów $\mathbb{R}$, m – miarę Lebesgue'a na $\mathcal{L}$, $\mathcal{L} \times \mathcal{A}$ produktową σ–algebrę w $\mathbb{R} \times \Omega$, $\mu = m \times P$ – miarę produktową na $\mathcal{L} \times \mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – uzupełnienie $\mathcal{L} \times \mathcal{A}$ względem miary μ, i $\overline{\mu}$ uzupełnienie μ. Proces stochastyczny $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest nazywany mierzalnym, gdy jest mierzalnym odwzorowaniem względem σ–algebry $\mathcal{B}$. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w [16].

Twierdzenie 34. *Niech* I *będzie przedziałem otwartym. Jeżeli silnie J–wypukły z modułem* $C(\cdot)$ *proces stochastyczny* $X : I \times \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *jest mierzalny, to jest on ciągły i silnie wypukły z tym samym modułem.*

Dowód. Jeżeli proces X jest silnie J–wypukły, to oczywiście jest on również J–wypukły. Z J–wypukłości i mierzalności procesu X na mocy Wniosku z Twierdzenia 8 z pracy [20] otrzymamy jego ciągłość. Silna wypukłość jest natomiast bezpośrednią konsekwencją Twierdzenia 30. $\square$

4

Procesy stochastyczne silnie wypukłe w sensie Wrighta

W tym rozdziale udowodnimy pewne własności procesów silnie wypukłych w sensie Wrighta. W szczególności, podamy charakteryzację silnie wypukłych w sensie Wrighta procesów stochastycznych, która jest odpowiednikiem dobrze znanej charakteryzacji Ng'ego [18] dla funkcji wypukłych w sensie Wrighta. Ponadto zostanie udowodnione twierdzenie o silnie wypukłym w sensie Jensena procesie majoryzowanym przez silnie wklęsły w sensie Jensena proces stochastyczny. Jest to stochastyczna wersja twierdzeń o (silnej) wypukłości w sensie Jensena z ograniczeniem, które jest (silnie) wklęsłe w sensie Jensena udowodnionych w [19] , [21] , [5] i [15].

4.1 Procesy silnie wypukłe w sensie Wrighta

W [27] Skowroński udowodnił, że proces stochastyczny $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ zdefiniowany na otwartym odcinku I jest wypukły w sensie Wrighta wtedy i tylko wtedy, gdy może on zostać przedstawiony w postaci $X = X_1 + A$, gdzie X_1 jest wypukłym procesem stochastycznym, natomiast A jest procesem addytywnym. Jest to stochastyczna wersja twierdzenia Ng'ego [18] charakteryzującego funkcje wypukłe w sensie Wrighta. W tym paragrafie podamy odpowiednik tego twierdzenia dla silnie wypukłych w sensie Wrighta procesów stochastycznych.

Przypomnijmy, że proces stochastyczny $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest *silnie wypukły w sensie Wrighta (silnie W-wypukły) z modułem* $C(\cdot)$, gdy nierówność

$$\begin{aligned} X\big(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot\big) + X\big((1-\lambda)u + \lambda v,\cdot\big) &\leqslant \\ &\leqslant X(u,\cdot) + X(v,\cdot) - 2C(\cdot)\lambda(1-\lambda)(u-v)^2 \quad \text{(p.w.)} \end{aligned}$$

zachodzi dla każdego $\lambda \in [0,1]$ oraz dowolnych $u,v \in I$.
Rozpocznijmy następującym lematem.

Lemat 35. *Niech* I *będzie przedziałem otwartym. Jeżeli proces stochastyczny* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *jest wypukły i silnie J–wypukły z modułem* $C(\cdot)$, *to jest on silnie wypukły z tym samym modułem.*

Dowód. Ponieważ X jest wypukły, to z twierdzenia Nikodema ([20, Twierdzenie 5]) otrzymamy, że X jest ciągły. Z Twierdzenia 32 wnioskujemy, że X jest silnie wypukły z modułem $C(\cdot)$. □

Twierdzenie 36. *Niech* I *będzie przedziałem otwartym. Proces* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *jest silnie wypukły w sensie Wrighta z modułem* $C(\cdot)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje proces stochastyczny* $X_1 : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *silnie wypukły z modułem* $C(\cdot)$ *i addytywny proces stochastyczny* $A : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ *takie, że*

$$X(u,\cdot) = X_1(u,\cdot) + A(u,\cdot) \quad \textit{(p.w.)}, \quad u \in I. \tag{1}$$

Dowód. Załóżmy, że X jest silnie wypukły w sensie Wrighta z modułem $C(\cdot)$. Wówczas X jest również wypukły w sensie Wrighta. Z twierdzenia Skowrońskiego (zobacz [27]) może zostać przedstawiony w następujący sposób

$$X(u,\cdot) = X_1(u,\cdot) + A(u,\cdot) \quad \text{(p.w.)}, \quad u \in I,$$

gdzie $X_1 : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest wypukłym procesem, natomiast $A : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest procesem addytywnym. Ponieważ X jest silnie wypukłym w sensie Wrighta z modułem $C(\cdot)$ procesem stochastycznym, to proste obliczenia pokazują, że proces $X - A$ jest również silnie wypukły w sensie Wrighta z modułem $C(\cdot)$. W konsekwencji proces $X - A$ jest silnie wypukły w sensie Jensena. Z lematu 35 proces $X_1(u,\cdot) = X(u,\cdot) - A(u,\cdot)$ (p.w.) jest silnie wypukły z modułem $C(\cdot)$, co dowodzi, że X posiada reprezentację (1). Dowód w drugą stronę jest oczywisty. □

Na mocy Lematu 6, Twierdzenie 36 może zostać zapisane w następujący sposób.

Wniosek 37. *Niech* I *będzie przedziałem otwartym. Proces* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *jest silnie wypukły w sensie Wrighta z modułem* $C(\cdot)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wypukły proces stochastyczny* $X_2 : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *i addytywny proces stochastyczny* $A : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ *takie, że*

$$X(u,\cdot) = X_2(u,\cdot) + C(\cdot)u^2 + A(u,\cdot) \quad \textit{(p.w.)}, \quad u \in I. \tag{2}$$

Dowód. Na mocy Twierdzenia 36 proces stochastyczny silnie wypukły w sensie Wrighta z modułem $C(\cdot)$ posiada reprezentację (1). Z Lematu 6 każdy silnie wypukły z modułem $C(\cdot)$ proces stochastyczny X_1 da się przedstawić w postaci

$$X_1(u,\cdot) = X_2(u,\cdot) + C(\cdot)u^2 \quad \text{(p.w.)} \quad u \in I, \tag{3}$$

gdzie $X_2 : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest wypukłym procesem stochastycznym. Wykorzystując (1) oraz (3) otrzymamy (2). Dowód w drugą stronę jest oczywisty, więc go pomijamy. □

Uwaga 38. *Analogiczną charakteryzację funkcji silnie wypukłych w sensie Wrighta z modułem* c *otrzymali N. Merentes, K. Nikodem oraz S. Rivas w [15].*

4.2 Procesy silnie J–wypukłe ograniczane przez procesy silnie J–wklęsłe

Jeśli J–wypukła funkcja f jest ograniczona z góry przez J–wklęsłą funkcję g, to wówczas f jest W–wypukła i g jest W–wklęsła. Co więcej można znaleźć wypukłą funkcję f_1, wklęsłą funkcję g_1 i funkcję addytywną a takie, że $f = f_1 + a$ oraz $g = g_1 + a$ (zobacz [19], [21] oraz [5]). W roku 1995 Skowroński udowodnił analogiczne twierdzenie dla J–wypukłych i J–wklęsłych procesów stochastycznych. (zobacz [26]). W tym paragrafie zaprezentujemy odpowiednik tego twierdzenia dla silnie J–wypukłych i silnie J–wklęsłych procesów stochastycznych. Przypomnijmy, że proces stochastyczny $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest silnie wklęsły (silnie J–wklęsły) z modułem $C(\cdot)$, jeżeli $-X$ jest silnie wypukły (silnie J–wypukły) z modułem $C(\cdot)$.

Twierdzenie 39. *Niech* I *będzie przedziałem otwartym. Załóżmy, że* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *jest silnie J–wypukły z modułem* $C(\cdot)$, $Y : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *jest silnie J–wklęsły z modułem* $C(\cdot)$ *oraz* $X(u,\cdot) \leqslant Y(u,\cdot)$ *(p.w.) dla wszystkich* $u \in I$. *Istnieje wówczas addytywny poces stochastyczny* $A : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, *ciągły proces stochastyczny* $X_1 : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *silnie wypukły z modułem* $C(\cdot)$ *oraz ciągły proces stochastyczny* $Y_1 : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *silnie wklęsły z modułem* $C(\cdot)$ *takie, że*

$$X(u,\cdot) = X_1(u,\cdot) + A(u,\cdot) \quad (p.w.) \quad i \quad Y(u,\cdot) = Y_1(u,\cdot) + A(u,\cdot) \quad (p.w.), \tag{4}$$

dla wszystkich $u \in I$.

Dowód. Ponieważ X jest silnie J–wypukły z modułem $C(\cdot)$ oraz Y jest silnie J–wklęsły z modułem $C(\cdot)$, więc X jest J–wypukły i Y jest J–wklęsły. Z twierdzenia Skowrońskiego (zobacz [26]) istnieją poniższe reprezentacje dla X i Y. Czyli

$$X(u,\cdot) = X_1(u,\cdot) + A(u,\cdot) \quad \text{(p.w.)} \quad \text{oraz} \quad Y(u,\cdot) = Y_1(u,\cdot) + A(u,\cdot) \quad \text{(p.w.)}$$

dla $u \in I$, gdzie $X_1 : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest wypukłym procesem stochastycznym, $Y_1 : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest wklęsłym procesem stochastycznym, $A : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest addytywnym procesem stochastycznym. Z addytywności procesu A otrzymujemy, że proces $X_1(u,\cdot) = X(u,\cdot) - A(u,\cdot)$ (p.w.) jest silnie J–wypukły z modułem $C(\cdot)$ i proces $Y_1(u,\cdot) = Y(u,\cdot) - A(u,\cdot)$ (p.w.) jest silnie J–wklęsły z modułem $C(\cdot)$. Ostatecznie na mocy Lematu 35 X_1 jest silnie wypukły z modułem $C(\cdot)$ oraz Y_1 jest silnie wklęsły z modułem $C(\cdot)$. To dowodzi, że X i Y posiadają reprezentację (4). Ciągłość X_1 i Y_1 wynika natomiast z twierdzenia Nikodema (zobacz [20]). □

Uwaga 40. *W przypadku deterministycznym powyższe twierdzenie redukuje się do rezultatu otrzymanego w [15] dla silnie J–wypukłych funkcji ograniczanych przez silnie J–wklęsłe funkcje.*

Podobnie jak poprzednio z Twierdzenia 39 i Lematu 6, otrzymujemy poniższy wniosek.

Wniosek 41. *Niech* I *będzie przedziałem otwartym. Zakładamy, że* $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *jest silnie J–wypukły z modułem* $C(\cdot)$*,* $Y : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *jest silnie J–wklęsły z modułem* $C(\cdot)$ *i* $X(u,\cdot) \leqslant Y(u,\cdot)$ *(p.w.) dla wszystkich* $u \in I$*. Istnieje wówczas addytywny proces stochastyczny* $A : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$*, ciągły i wypukły proces* $X_2 : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *oraz ciągły i wklęsły proces stochastyczny* $Y_2 : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *takie, że*

$$X(u,\cdot) = X_2(u,\cdot) + C(\cdot)u^2 + A(u,\cdot) \quad \textit{(p.w.)},$$

$$Y(u,\cdot) = Y_2(u,\cdot) + C(\cdot)u^2 + A(u,\cdot) \quad \textit{(p.w.)},$$

dla wszystkich $u \in I$*.*

Dowód jest podobny do dowodu Wniosku 37, więc go pomijamy.

Literatura

[1] A. Azócar, J. Giménez, K. Nikodem, J. L. Sánchez: *On strongly midconvex functions*, Opuscula Math. 31/1, 15–26 (2011).

[2] J. L. Doob: *Measure Theory (Graduate Texts in Mathematics)*, Springer-Verlag (1993).

[3] I. Gichman, A. Skorochod: *Wstęp do procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa (1968).

[4] J. B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal: *Fundamentals of convex analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2001).

[5] Z. Kominek: *On a problem of K. Nikodem* , Arch. Math. (Basel) 50, 287–288 (1988).

[6] D. Kotrys: *Hermite–Hadamard inequality for convex stochastic processes*, Aequationes Math. 83, 143–151 (2012).

[7] D. Kotrys: *Remarks on strongly convex stochastic processes*, Aequat. Math. 86, 91–98 (2012).

[8] D. Kotrys: *Some characterizations of strongly convex stochastic processes*, Mathematica Aeterna Vol. 4, no. 8, 855–861 (2014).

[9] D. Kotrys: *On strongly Wright-convex stochastic processes*, Wysłana do druku.

[10] D. Kotrys: *Remarks on Jensen, Hermite-Hadamard and Fejér inequalities for strongly convex stochastic processes*, Mathematica Aeterna Vol. 5, no. 1, 95–104 (2015).

[11] M. Kuczma: *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Birkhäuser, Basel (2009).

[12] N. Kuhn: *A note on* t*-convex functions*, General inequalities 4 (Oberwolfach, 1983), 269–276, Internat. Schriftenreihe Numer. Math., 71, Birkhäuser, Basel, (1984).

[13] T. Lara, N. Merentes, E. Rosales, M. Valera: *Some characterizations of strongly convex functions in inner product spaces*, Mathematica Aeterna Vol. 4, no. 6, 651–657 (2014).

[14] N. Merentes, K. Nikodem: *Remarks on strongly convex functions*, Aequationes Math. 80, 193–199 (2010).

[15] N. Merentes, K. Nikodem, S. Rivas: *Remarks on strongly Wright-convex function*, Annales Polonici Mathematici. 102.3, 271–278 (2011).

[16] B. Nagy: *On a generalization of the Cauchy equation*, Aequat. Math. 10, 165–171 (1974).

[17] C. P. Niculescu, L. E. Persson: *Convex functions and their applications*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York-Hong Kong-London-Milan-Tokyo, (2005).

[18] C. T. Ng: *Functions generating Schur-convex sums*, General Inequalities 5 (Oberwolfach, 1986), Internat. Ser. Number. Math. 80, Birkhäuser, Basel, 433–438, (1987)

[19] C. T. Ng: *On midconvex functions with midconcave bounds*, Proc. Amer. Math. Soc. 102, 538–540 (1988).

[20] K. Nikodem: *On convex stochastic processes*, Aequat. Math. 20, 184–197 (1980).

[21] K. Nikodem: *Midpoint convex functions majorized by midpoint concave functions*, Aequat. Math. 32, 45–51 (1987).

[22] Zs. Páles: *Nonconvex functions and separation by power means*, Math. Inequal. Appl. 3 , 169–176 (2000).

[23] B. T. Polyak: *Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions*, Soviet Math. Dokl. 7, 72–75 (1966).

[24] A. W. Roberts, D. E. Varberg: *Convex functions*, Academic Press, New York–London (1973).

[25] M. Shaked, J. G. Shanthikumar: *Stochastic convexity and its applications*, Adv. in Appl.Prob. 20, 427–446 (1988).

[26] A. Skowroński: *On some properties of J-convex stochastic processes*, Aequat. Math. 44, 249–258 (1992).

[27] A. Skowroński: *On Wright-convex stochastic processes*, Annales Mathematicae Silesianae 9, 29–32 (1995).

[28] K. Sobczyk: *Stochastic differential equations with applications to physics and engineering*, Kluwer Academic Publishers B.V. (1991).

Skorowidz