MODELO CONTINUO BASADO EN DOS PROCESOS DE WIENER PARA CALCULAR UN ÍNDICE DE PÉRDIDAS POR CATÁSTROFES SUBYACENTE DE LOS DERIVADOS SOBRE SEGUROS (INSURANCE-LINKED SECURITIES, ILS).

María José Pérez-Fructuoso[1]
Departamento de Economía y Administración de Empresas
Madrid Open University (UDIMA)

ABSTRACT
This paper develops a random continuous-time model that simplifies calculation of insurance linked securities' (ILS) underlying catastrophic loss index and allows us to price them with the traditional option valuation methodology. Under the hypothesis that the total amount of the catastrophe is defined as the sum of two random variables, the incurred claims amount and the incurred-but-not-yet reported claims amount, we model the decreasing dynamics of the latter through a geometric Brownian process characterized by two Wiener processes that introduce a greater volatility to the model which increases its accuracy. The difference between the incurred-but-not-yet-reported claims amount and the total amount of the catastrophe results in the reported claims amount, which is the numerator of the loss ratio that we intend to determine.
In order to verify the validity of the proposed hereby, its parameters are estimated using the maximum likelihood method and a Ji-square normality test is performed on a sample of six floods occurred in several Spanish locations prone to such events.

KEYWORDS: Insurance-linked securities, Wiener process, incurred-but-not-yet-reported loss amount, reported loss amount

MSC: 60G15, 91G20

RESUMEN
Este artículo desarrolla un modelo aleatorio en tiempo continuo que permite calcular de forma sencilla el índice de pérdidas por catástrofes subyacente de los *Insurance-linked Secutiries* (ILS), lo que permite aplicar la metodología tradicional de valoración de opciones para determinar el precio de estos instrumentos. Bajo la hipótesis de que la cuantía total de la catástrofe se define como la suma de dos variables aleatorias, cuantía declarada de siniestros y cuantía de siniestros pendiente de declarar, se modelo la dinámica decreciente de esta última a través de un proceso Browniano geométrico caracterizado por dos procesos de Wiener que introducen una mayor volatilidad al modelo. La diferencia entre la cuantía de siniestros pendiente de declarar y la cuantía total de la catástrofe da lugar a la cuantía declarada de siniestros, numerador de la ratio de pérdidas que se quiere determinar. Para comprobar la validez del modelo propuesto, se estiman sus parámetros utilizando el método de máxima verosimilitud y se realiza un contraste Ji-cuadrado de normalidad sobre una muestra de seis inundaciones ocurridas en diferentes localidades españolas propensas a sufrir este tipo de eventos.

PALABRAS CLAVE: Derivados sobre seguros, proceso de Wiener, cuantía declarada de siniestros, cuantía de siniestros pendiente de declarar

1. INTRODUCCIÓN

El gran aumento de las pérdidas aseguradas derivadas de la ocurrencia de catástrofes naturales, como el huracán Andrew en 1992 que causó daños asegurados en la zona de Florida por valor de 15.500 millones de dólares, provocó una insuficiencia de la cobertura tradicional del reaseguro en el mercado asegurador. Esta circunstancia motivó la búsqueda de nuevas formas alternativas de transferencia del riesgo a través de los mercados de capital, así como la elaboración de métodos fiables de cuantificación para evaluarlas,

1 mariajose.perez@udima.es

considerando además su constante evolución. Conocidas con el nombre de titulización (*securitization*), el objetivo último de estas soluciones es incrementar las posibilidades en el mercado asegurador y, por tanto, la capacidad de suscripción, ofertando mayores coberturas en aquellos casos en los que las coberturas existentes hasta el momento han sido insuficientes o nulas, mediante la creación y emisión de derivados financieros basados en seguros (*Insurance-Linked Securities*, ILS), como bonos, opciones y *swaps*.

En la actualidad, el número de emisiones y los límites de riesgos cubiertos, han convertido a los ILS en instrumentos viables de transferencia del riesgo y de inversión, que se negocian en un mercado financiero cada vez más consolidado. Gran parte de este desarrollo se ha debido al uso de índices subyacentes o desencadenantes que han permitido a los aseguradores ampliar el abanico de riesgos que pueden trasladar a los inversores quienes se benefician de disponer de una clase de activos cuya rentabilidad no está correlacionada con la rentabilidad asociada a otros tipos de inversión puramente financiera.

El uso cada vez más frecuente de estos derivados sobre seguros basados en índices de pérdidas, ha supuesto el desarrollo de muchos estudios académicos encaminados a valorar este tipo de instrumentos financiero-actuariales a lo largo de un horizonte temporal determinado.

Aase (1999) y Aase (2001) presenta, bajo la hipótesis de aversión al riesgo constante, un modelo de valoración de los contratos de futuros y opciones sobre catástrofes, CAT *futures* y CAT *options*, negociados en el *Chicago Board of Trade* (en adelante, CBOT) cuyo desencadenante es un índice de pérdidas por catástrofes. Dicho índice se modela a través de procesos estocásticos de Poisson compuesto con saltos aleatorios tanto en el tamaño de las reclamaciones como en el momento de ocurrencia de la catástrofe. Esta propuesta es un caso particular del modelo desarrollado por Embrechts y Meister (1997), cuya metodología se basa en la teoría de los mercados incompletos, que representa el comportamiento del índice de pérdidas subyacente mediante una mixtura de procesos de Poisson compuestos y una frecuencia de siniestralidad aleatoria. Los resultados obtenidos por Aase en 1999 son utilizados por Muermann (2003) para modelar el índice de pérdidas de los activos derivados catastróficos negociados en el CBOT *y* obtener de esa forma una valoración, consistente en términos actuariales, de dichos derivados. Cummins y Geman (1995) y Geman y Yor, (1997), en ausencia de oportunidades de arbitraje, desarrollan modelos de valoración de opciones y futuros CAT, utilizando procesos geométricos de Wiener, para describir la dinámica de la declaración de los siniestros y procesos de Poisson, para incorporar en el modelo la posibilidad de ocurrencia de grandes catástrofes.

Cox y Pedersen (2000), a partir de la teoría del precio de equilibrio en mercados incompletos, desarrollan un método de tarificación de un bono sobre catástrofes, *Cat bond*, basado en un modelo de estructura temporal de los tipos de interés y en una estructura de probabilidades de ocurrencia del riesgo catastrófico. Baryshnikov, Mayo y Taylor (2001), proponen una solución neutral al riesgo para determinar el precio de este instrumento, representando la ocurrencia y los efectos económicos de una catástrofe mediante un doble proceso de Poisson compuesto y Burnecki y Kukla (2003) utilizan esta solución para calcular el precio de *Cat bonds* cupón cero y con cupones. Lee y Yu (2002) para valorar bonos catastróficos cupón cero desarrollan un modelo que considera tipos de interés estocásticos y un proceso genérico de pérdidas así como factores relacionados con el azar moral, el riesgo de base y el riesgo de crédito. Jaimungal y Wang (2006) analizan el precio de las opciones de venta catastróficas (catastophe put options) considerando tipos de interés estocásticos con pérdidas generadas por un proceso de Poisson compuesto que está correlacionado con el proceso de difusión que sigue el precio de activo.

Biagini, Bregman y Meyer-Brandis (2008) valoran opciones sobre riesgos catastróficos basadas en índices de pérdidas cuya dinámica se modela mediante un proceso de Poisson compuesto no homogéneo para el período de pérdidas y utilizan un proceso de Levy exponencial no homogéneo para reestimar dicho índice durante el periodo de desarrollo y hasta el vencimiento. Egami y Young (2008) calculan el precio de un *Cat bond* estructurado mediante un enfoque de curvas de indiferenciar con función de utilidad exponencial. Pérez-Fructuoso (2008) valora bonos sobre catástrofes cupón cero suponiendo que la dinámica de la cuantía de siniestros pendiente de declarar sigue un movimiento geométrico browniano decreciente a razón de la tasa de declaración de siniestros. Para el caso de una tasa de declaración de siniestros constante, Pérez-Fructuoso (2009) extiende el modelo al cálculo de un índice de pérdidas que permite la valoración de cualquier instrumento derivado vinculado a seguros. Chang y Hung (2009) analizan la valoración de una opción catastrófica de venta en los casos de tipos de interés deterministas y también estocásticos y considerando que el precio del índice de pérdidas subyacente se modela a través de un proceso de Lévy con actividad finita. Chang, Chang y Lu (2010) valoran, en ausencia de oportunidades de arbitraje, opciones catastróficas de estilo

Asiático con un índice de pérdidas subyacente no negociable en los mercados, considerando un contexto doblemente binomial para el momento de las declaraciones y las pérdidas, y utilizando una metodología de martingala. Braun (2011), tras analizar el diseño de un típico swap de catástrofes, plantea un modelo de tarificación de las reclamaciones en dos etapas que distingue entre los principales factores de riesgo tanto ex-ante como durante la fase de reestimación de pérdidas y además incorpora riesgo de incumplimiento de la contraparte. La ocurrencia de catástrofes es modelada como un proceso de Poisson doblemente estocástico (proceso de Cox) con una intensidad de Ornstein-Uhlenbeck de regresión a la media. Nowak y Romaniuk (2013) aplican modelos de ETTI (tipos de interés *spot* libres de riesgo), bajo la hipótesis de que la ocurrencia de la catástrofe es independiente del comportamiento de los mercados financieros, para valorar bonos sobre catástrofes. Zong-Gang y Chao-Qun (2013), con el fin de tarificar el mismo tipo de instrumentos, consideran un entorno de tipos de interés estocásticos, para describir las pérdidas catastróficas a través de un proceso de Poisson compuesto no homogéneo. Lai, Parcollet y Lamond (2014) desarrollan un modelo para obtener una expresión semicerrada del precio de un *Cat bond*, a partir de un proceso de difusión con saltos que representa las catástrofes, de un proceso estocástico tridimensional para representar el tipo de cambio y los tipos de interés nacionales y extranjeros, y del coste de cobertura del riesgo de tipo de cambio. Finalmente, Wang (2016) utilizan un proceso de Poisson doblemente compuesto para valorar una nueva clase de opciones *put* catastróficas, con intensidad lognormal para describir las pérdidas por catástrofes acumuladas y volatilidad estocástica.

En este artículo, también se utiliza un movimiento geométrico browniano para modelar el comportamiento del índice de pérdidas desencadenante de los ILS y como en Cummins y Geman (1995) o Geman y Yor (1997) se asume la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje para llevar a cabo la valoración de estos instrumentos. Sin embargo, a diferencia de otros modelos precedentes, se asume que la siniestralidad instantánea decrece proporcionalmente a la cuantía de siniestros pendiente de declarar en cada momento. Además, considerando que el comportamiento real de siniestralidad tras la ocurrencia de la catástrofe es complicado de estudiar o predecir puesto que depende de muchos factores, en su mayor parte incontrolables, se incorporan dos procesos de Wiener al modelo que recogen la incertidumbre derivada, por una parte, del proceso propio de declaración siniestral (por ejemplo, valoraciones periciales que difieren de los importes declarados por los asegurados) y, por otra, aquella asociada a elementos endógenos (por ejemplo, la ocurrencia de una nueva catástrofe durante el periodo de declaración de siniestros) que pueden afectar considerablemente la distribución de dicho proceso de declaración.

La estructura del artículo es la siguiente. Tras la presentación del objeto de estudio de esta investigación, desarrollado en la introducción del artículo, la sección 2, después de hacer una revisión de los modelos precedentes que sientan las bases para la elaboración de este artículo, expone las hipótesis básicas sobre las que se modela la ocurrencia de las catástrofes y la declaración de los siniestros y las soluciones de las variables cuantía declarada de siniestros y cuantía de siniestros pendientes de declarar cuando la dinámica de ésta última se representa mediante un proceso estocástico caracterizado por dos procesos de Wiener. En la Sección 3, se calcula el índice de pérdidas por catástrofes, a partir de los resultados obtenidos en la Sección anterior. En la Sección 4 se realiza una validación del modelo propuesto a través de la estimación de los parámetros del propuesto y de la realización de un contraste Ji-cuadrado de Pearson. Finalmente, la Sección 5 presenta las principales conclusiones alcanzadas con la elaboración del artículo.

2. MODELACIÓN DEL PROCESO DE DECLARACIÓN DE SINIESTROS.

2.1. Revisión de los modelos precedentes

Cummins y Geman (1995) son responsables de un modelo de valoración para los contratos de futuros sobre riesgos catastróficos, CAT-futures, negociados en el Chicago Board of Trade, a principios de la década de los 90 del siglo pasado.

Los autores definen $S(t)$ como el proceso de reclamaciones instantáneo, esto es, $S(t)$ determina la cuantía total de las declaraciones de siniestros por unidad de tiempo, y a partir de dicha cuantía calculan el total de declaraciones de siniestros en el momento del vencimiento, $L(T)$.

En este modelo, la dinámica de $S(t)$ tiene dos comportamientos diferentes en función del periodo considerado. Así, en el periodo de pérdidas, o periodo durante el que pueden producirse las catástrofes cubiertas por el derivado, la evolución de $S(t)$ se define mediante un proceso browniano geométrico con tendencia α que describe la aleatoriedad en las declaraciones de siniestros y las pequeñas catástrofes. En este periodo, un proceso de Poisson describe la posibilidad de ocurrencia de grandes catástrofes,

$$dS(t) = S(t^-)[\alpha dt + dw(t)] + kdN(t) \tag{1}$$

donde $w(t)$ es un proceso de Wiener bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo, $N(t)$ es un proceso de Poisson independiente de $w(t)$, cuyo parámetro λ que representa la frecuencia de los saltos y *k* es la cuantía total de las catástrofes definida como una constante que indica la amplitud de los saltos producidos en la declaración como consecuencia de la ocurrencia de una gran catástrofe.

En el periodo de desarrollo o de declaración de pérdidas, el proceso $S(t)$ se representa a través de un movimiento browniano geométrico con tendencia α', cuyo objetivo es representar la aleatoriedad en el ritmo de las declaraciones,

$$dS(t) = S(t)[\alpha' dt + \sigma d\tilde{w}(t)] \tag{2}$$

Determinado el comportamiento de $S(t)$, la cuantía total de las pérdidas al final del periodo contemplado en el contrato, $L(T)$, se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$L(T) = \int_0^T S(s)ds \tag{3}$$

siendo $S(0)$, es una constante positiva dada.

En el modelo de Geman y Yor (1997) los autores representan la dinámica del subyacente de un tipo de contrato de activos derivados sobre riesgos catastróficos, las opciones PCS: la cuantía total de pérdidas declaradas, $L(t)$, y consideran dos evoluciones diferentes para esta cuantía en cada uno de los periodos diferenciados en el contrato.

En el periodo de pérdidas, $L(t)$ sigue un proceso de difusión cuya ecuación diferencial estocástica es,

$$dL(t) = S(t)dt + \theta dN(t) \tag{4}$$

donde $S(t) = e^{2(W_t + \upsilon t)}$ es un proceso browniano geométrico que modela la aleatoriedad en las declaraciones de siniestros, $N(t)$ un proceso de Poisson de parámetro α, independiente de $S(t)$, que representa la ocurrencia de grandes catástrofes y θ una constante positiva que indica la magnitud de los saltos provocados por la ocurrencia de una gran catástrofe.

En el periodo de desarrollo, la dinámica de $L(t)$ se representa mediante un proceso browniano geométrico a través de $S(t)$,

$$dL(t) = S(t)dt \tag{5}$$

con parámetros de tendencia y volatilidad diferentes a los que caracterizan el periodo de pérdidas.

En estos modelos precedentes, se asume un proceso geométrico de Wiener para formalizar la tasa de crecimiento en las declaraciones. Esta hipótesis lleva implícito un crecimiento exponencial, en promedio, de la tasa instantánea de declaración dentro del intervalo temporal considerado. En Cummins y Geman (1995), se asume además, que esta tasa es discontinua al introducir el proceso de salto debido a las grandes catástrofes en la definición de $S(t)$; en Geman y Yor (1997), la introducción de las grandes catástrofes se hace en la definición de $L(t)$. Este planteamiento agregado en cuanto al comportamiento de la velocidad de declaración de los siniestros no se corresponde con una distribución más o menos uniforme de la ocurrencia de los mismos dentro de un intervalo temporal concreto, pues es difícil entender que el proceso de agregación sea exponencial y no lineal. Por ello, el modelo que se sistematiza está basado en una hipótesis de evolución individual de cada una de las catástrofes sobrevenidas, como se expone a continuación.

2.2. Principales hipótesis y resultados del modelo propuesto

Sea K_τ la variable aleatoria cuantía total de la catástrofe ocurrida en el momento $t=\tau$ tal que,

$$K_\tau = S_\tau(t) + R_\tau(t) \tag{6}$$

donde $S_\tau(t)$ representa la cuantía declarada de los siniestros asociada a la catástrofe K_τ y $R_\tau(t)$ la cuantía de los siniestros pendiente de declarar asociada a la misma catástrofe, ambas variables aleatorias referidas al momento de valoración t.

Bajo la hipótesis de que la intensidad en el proceso de declaración de siniestros es elevada en los momentos iniciales, después de la ocurrencia de la catástrofe, y va disminuyendo a medida que transcurre el tiempo, hasta anularse cuando ya se han declarado todos los siniestros asociados a dicha catástrofe, se representa la siniestralidad instantánea a través de una ecuación diferencial cierta que describe un crecimiento de la cuantía de siniestros declarada proporcional a la variable cuantía de siniestros pendiente de declarar,

$$dS_\tau(t) = \alpha R_\tau(t)dt \tag{7}$$

donde α es una constante denominada *tasa instantánea de declaración de siniestros*.

La ecuación diferencial cierta que describe la evolución de la cuantía de los siniestros pendiente de declarar, $R_\tau(t)$, variable fundamental en el proceso de modelación, se obtiene diferenciando la ecuación (6),

$$dS_\tau(t) = -dR_\tau(t)dt \tag{8}$$

y substituyendo en la ecuación (7), $dS_\tau(t)$, por el resultado obtenido en la expresión (8), como sigue:

$$dR_\tau(t) = -\alpha R_\tau(t)dt \tag{9}$$

La irregularidad de las declaraciones de los siniestros en el tiempo, se recoge en el modelo introduciendo dos procesos de Wiener en la ecuación (9), ambos proporcionales a la cuantía de los siniestros pendiente de declarar, dando lugar a la ecuación diferencial estocástica,

$$dR_\tau(t) = -\alpha R_\tau(t)dt + \sigma_1 R_\tau(t)dW_t + \sigma_2 R(t)d\tilde{W}_t \tag{10}$$

donde α, σ_1 y σ_2 son constante que representan, respectivamente, la tendencia y las diferentes volatilidades asociadas al proceso, y W_t y $\tilde{W}_t$ son dos movimientos Brownianos que presentan una correlación positiva o nula (pero en ningún caso negativa), $\rho \in [0,1]$, de forma que $dW_t d\tilde{W}_t = \rho dt$.

El proceso de Wiener modeliza las peculiaridades de cada catástrofe, que no se explicitan en el modelo, y que dan lugar a diferencias en la intensidad de declaración de siniestros. Además, el ritmo de declaración de los siniestros asociados a la catástrofe puede verse afectado por situaciones imprevisibles o factores incontrolables que generen mayor volatilidad (como por ejemplo, la ocurrencia de una nueva catástrofe, la imposibilidad de declarar los siniestros por incidencias en las telecomunicaciones, etc.) Estas circunstancias se reflejan en el modelo considerando perturbaciones diferentes a través de dos procesos de Wiener dependientes.

Para resolver el proceso estocástico (10), se aplica el cálculo de Itô, desarrollando un polinomio de Taylor para la función $f(R_\tau(t)) = \ln R_\tau(t)$ cuando $dt \to 0$:

$$\begin{aligned}
df(R_\tau(t)) &= f'(R_\tau(t))dZ_t + \frac{f''(R_\tau(t))}{2}(dR_\tau(t))^2 + \cdots \\
&= \frac{1}{R_\tau(t)} dR_\tau(t) + \frac{-1}{2R_\tau^2(t)}\left(-\alpha R_\tau(t)dt + \sigma_1 R_\tau(t)dW_t + \sigma_2 R_\tau(t)d\tilde{W}_t\right)^2 + \cdots \\
&= \frac{1}{R_\tau(t)} dR_\tau(t) + \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -\alpha^2(dt)^2 + \sigma_1^2(dW_t)^2 + \sigma_2^2\left(d\tilde{W}_t\right)^2 - \\ -2\alpha\sigma_1 dt dW_t - 2\alpha\sigma_2 dt d\tilde{W}_t + 2\sigma_1\sigma_2 dW_t d\tilde{W}_t \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \frac{1}{R_\tau(t)} R_\tau(t) + \left(-\alpha dt + \sigma_1 dW_t + \sigma_2 d\tilde{W}_t\right) + \frac{-1}{2}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho\right) + o(dt) \\
&= -\left(\alpha + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} + \sigma_1\sigma_2\rho\right)dt + \sigma_1 dW_t + \sigma_2 d\tilde{W}_t
\end{aligned}$$

Integrando ambos lados de la ecuación entre τ y t,

$$\int_\tau^t d\left(\ln R_\tau(s)\right) = \int_\tau^t \left(\alpha + \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2} + \sigma_1\sigma_2\rho\right)ds + \int_\tau^t \sigma_1 dW_s + \int_\tau^t \sigma_2 d\tilde{W}_s$$

y resolviendo, se obtiene el siguiente resultado:

$$\ln R_\tau(t) = \ln R_\tau(\tau) - \left(\alpha + \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2} + \sigma_1\sigma_2\rho\right)(t-\tau) + \sigma_1 W_{t-\tau} + \sigma_2 \tilde{W}_{t-\tau}$$

Finalmente, aplicando la función exponencial, y considerando que en el momento en el que se produce la catástrofe, $t=\tau$, la cuantía de los siniestros pendiente de declarar coincide con el volumen total de la misma (condición de contorno inicial), $R_\tau(\tau) = K_\tau$, la solución de la ecuación diferencial estocástica (10) resulta:

$$R_\tau(t) = K_\tau \exp\left(-\left(\alpha + \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2} + \sigma_1\sigma_2\rho\right)(t-\tau) + \sigma_1 W_{t-\tau} + \sigma_2 \tilde{W}_{t-\tau}\right) \tag{11}$$

Para determinar la distribución seguida por la variable $R_\tau(t)$ en este modelo, se asume la hipótesis tradicionalmente utilizada en la literatura actuarial (ver por ejemplo, Cummins y Geman, 1995 o Geman y Yor, 1997, entre otros) de que la cuantía total de la catástrofe, K_τ, es un valor constante y, adicionalmente, se considera que la distribución normal asociada al proceso W_t presenta una correlación, de valor ρ, con la distribución normal asociada al proceso $\tilde{W}_t$. Como consecuencia de ello, la distribución seguida por la suma de los dos procesos de Wiener tiene los siguientes parámetros,

$$\begin{aligned}
\sigma_1 W_{t-\tau} + \sigma_2 \tilde{W}_{t-\tau} &= \sigma_1 N(0,t-\tau) + \sigma_2 \tilde{N}(0,t-\tau) = N\left(0,\sigma_1^2(t-\tau)\right) + \tilde{N}\left(0,\sigma_2^2(t-\tau)\right) = \\
&= N\left(0, \sigma_1^2(t-\tau) + \sigma_2^2(t-\tau) + 2\rho\sigma_1(t-\tau)^{\frac{1}{2}}\sigma_2(t-\tau)^{\frac{1}{2}}\right) = \\
&= N\left(0, \left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2\right)(t-\tau)\right)
\end{aligned}$$

y, por tanto, la variable $R_\tau(t)$ se distribuye lognormalmente, con distribución normal asociada:

$$\ln R_\tau(t) \sim N\left(\ln K_\tau - \left(\alpha + \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2} + \sigma_1\sigma_2\rho\right)(t-\tau); \left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2\right)(t-\tau)\right) \tag{12}$$

La cuantía declarada de los siniestros hasta t, $S_\tau(t)$, es la diferencia entre la cuantía total de la catástrofe y la cuantía de los siniestros pendiente de declarar, y se obtiene substituyendo el resultado obtenido en (11) en la ecuación (6), que establece la relación entre las variables $R_\tau(t)$ y $S_\tau(t)$, y despejando, como sigue,

$$S_\tau(t) = K_\tau\left[1 - \exp\left(-\left(\alpha + \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2} + \sigma_1\sigma_2\rho\right)(t-\tau) + \sigma_1 W_{t-\tau} + \sigma_2 \tilde{W}_{t-\tau}\right)\right] \tag{13}$$

sin que resulte necesario definir una ecuación diferencial estocástica para describir su dinámica.

Es importante notar que si $\rho = 1$, la correlación entre los dos procesos de Wiener, W_t y $\tilde{W}_t$, es perfecta, por lo que dichos procesos son totalmente dependientes. Entonces, $W_t = \tilde{W}_t$ y se obtiene un modelo simplificado del desarrollado en este artículo, en el cual la ecuación diferencial estocástica que describe el comportamiento de la variable $R_\tau(t)$ es,

$$dR_\tau(t) = -\alpha R_\tau(t)dt + \sigma R_\tau(t)dW_t$$

con $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, y cuya solución viene dada, aplicando el cálculo de Itô, por la siguiente expresión:

$$R_\tau(t) = K_\tau \exp\left(-\left(\alpha + \frac{(\sigma_1+\sigma_2)^2}{2}\right)(t-\tau) + (\sigma_1+\sigma_2)W_{t-\tau}\right) = K_\tau \exp\left(-\left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-\tau) + \sigma W_{t-\tau}\right) \tag{14}$$

3. DETERMINACIÓN DEL ÍNDICE DE PÉRDIDAS POR CATÁSTROFES

Sea, $LI(T')$, el valor del índice de pérdidas al final de un determinado periodo, definido como,

$$LI(T') = \frac{S_\tau(T')}{cte} \tag{15}$$

el cociente entre la cuantía total de las pérdidas asociadas a la catástrofe ocurrida a lo largo del periodo de riesgo, $[0,T]$, y declaradas hasta un momento posterior, T', con $T \leq T'$, y un valor constante referido al volumen de primas devengadas durante el periodo de riesgo, para cubrir las pérdidas de la catástrofe ocurrida en el momento $\tau \in [0,T]$.

El valor de este índice de pérdidas al vencimiento se obtiene substituyendo en (15), $S_\tau(T')$ por su expresión dada en la ecuación (13), resultando:

$$LI(T') = \frac{S_\tau(T')}{cte} = \frac{1}{cte} K_\tau \left[1 - \exp\left(-\left(\alpha + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} + \sigma_1 \sigma_2 \rho \right)(T' - \tau) + \sigma_1 W_{T'-\tau} + \sigma_2 \tilde{W}_{T'-\tau} \right) \right] \tag{16}$$

La variable $LI(T')$ está referida al momento en el que se inicia el proceso de declaración de siniestros. A continuación se analiza cómo se modifica la distribución de probabilidad de dicha variable cuando, transcurrido un determinado periodo de tiempo $[0,t]$, se incorpora la información disponible sobre la siniestralidad declarada hasta ese momento. Con este objetivo, se define la variable aleatoria condicionada $LI^*(T') = LI(T')/F_t$, que indica la cuantía total de las pérdidas asociadas a la catástrofe ocurrida en el momento τ. Esta variable incorpora la información disponible acerca de las declaraciones de siniestros realizadas hasta el momento $t \in [\tau, T']$, a través de la filtración F_t.

Para calcular $LI^*(T') = LI(T')/F_t$, es necesario determinar, en primer lugar, la cuantía total de declaraciones de pérdidas en cualquier momento $t \in [\tau, T']$, $LI(t)$, que es el condicionante de $LI(T')$ (es decir $LI(t) \cong F_t$). El valor de $LI(t)$ viene dado por la siguiente expresión:

$$LI(t) = \frac{S_\tau(t)}{cte} = \frac{1}{cte} K_\tau \left[1 - \exp\left(-\left(\alpha + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} + \sigma_1 \sigma_2 \rho \right)(t - \tau) + \sigma_1 W_{t-\tau} + \sigma_2 \tilde{W}_{t-\tau} \right) \right] \tag{17}$$

Determinada la cuantía $LI(t)$, se incorpora en la variable $LI(T')$ dando lugar al siguiente valor del índice de pérdidas condicionado:

$$LI^*(T') = \frac{1}{cte} \left[\begin{array}{l} L(t) + \\ +(K_\tau / F_t) \left[1 - e^{-\left(\alpha + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} + \sigma_1 \sigma_2 \rho \right)(T' - t) + \sigma_1 W_{T'-t} + \sigma_2 \tilde{W}_{T'-t}} \right] e^{-\left(\alpha + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} + \sigma_1 \sigma_2 \rho \right)(t - \tau) + \sigma_1 W_{t-\tau} + \sigma_2 \tilde{W}_{t-\tau}} \end{array} \right] \tag{18}$$

Utilizar el movimiento Browniano geométrico con dos procesos de Wiener para modelar el índice de pérdidas a través de la cuantía declarada de los siniestros, permite aplicar la metodología tradicional de valoración de opciones de Black-Scholes para determinar el precio del derivado sobre seguros (ver, por ejemplo, Loubergé et al. (1999) o Pérez-Fructuoso (2008) para su aplicación al cálculo del precio de un *Cat bond*).

4. VALIDACIÓN DEL MODELO: ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS Y CONTRASTE DE NORMALIDAD

La validación del modelo teórico propuesto supone, en primer lugar, estimar todos los parámetros que en él aparecen, a partir de datos sobre el porcentaje de siniestros pendiente de declarar, acumulado semanalmente, en 6 inundaciones ocurridas en distintas regiones de España en las que este tipo de sucesos se producen con elevada frecuencia: Alcira (01/10/1991), San Sebastián (23/06/1992), Barcelona (14/09/1999), Zaragoza (20/10/2000), Valencia (20/10/2000) y Murcia (20/10/2000):

Tabla 1: Porcentaje (%) de siniestros pendientes de declarar por inundación

Semana	Alcira	San Sebastián	Barcelona	Zaragoza	Valencia	Murcia
0	100	100	100	100	100	100
1	84.94	88.08	90.68	60.11	97.54	88.46
2	53.65	36.04	68.38	56.91	80.18	75.55
3	34.96	23.67	50.68	38.3	60.15	48.7

4	24.05	16.68	41.42	29.79	43.16	31.13
5	18.86	12.29	31.58	23.4	31.96	21.41
6	13.36	9.94	25.43	19.15	27.55	15.78
7	10.53	8.72	19.56	18.09	19.54	11.27
8	8.04	7.76	16.68	15.43	15.29	8.71
9	6.94	6.8	13.28	15.43	14.76	8.24
10	5.23	5.78	10.54	10.64	14.7	6.57
11	4.08	5.18	8.15	6.91	11.06	5.36
12	3.71	4.33	6.8	3.72	8.46	4
13	3.56	3.45	6.13	3.72	6.98	3.38
14	2.6	2.69	3.41	2.66	6.21	2.6
15	1.75	1.81	3.41	2.66	5.17	2.8
16	1.3	1.59	2.61	1.6	4.22	2.29
17	0.77	1.39	1.81	1.6	3.5	2.25
18	0.29	1.16	1.26	1.6	2.72	2.14
19	0.0	0.96	0.56	0	2.26	1.67
20		0.76	0.0		1.88	1.28
21		0.45			1.69	1.09
22		0.28			1.61	0.93
23		0.2			0.9	0.66
24		0.17			0.54	0.66
25		0.11			0.36	0.62
26		0.06			0.19	0.16
27		0.0			0.0	0.0

En el modelo propuesto, el proceso gaussiano $\ln R_\tau(t)$ sigue una distribución normal de parámetros:

$$\ln R_\tau(t) \approx N\left(\ln K_\tau - \left(\alpha + \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2} + \sigma_1\sigma_2\rho\right)(t-\tau), \left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1^2\sigma_2^2\rho\right)(t-\tau)\right)$$

Sin embargo, es posible obtener una expresión más apropiada para estimar los parámetros, α, σ_1 y σ_2 utilizando las propiedades de la distribución normal y las características propias de los datos disponibles, a partir de la cuantía de los siniestros pendiente de declarar en *t* y en *t*-1, como sigue:

$$\frac{R_\tau(t)}{R_\tau(t-1)} = \frac{K_\tau \exp\left(-\left(\alpha + \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2} + \sigma_1\sigma_2\rho\right)t + \sigma_1 W_t + \sigma_2 \tilde{W}_t\right)}{K_\tau \exp\left(-\left(\alpha + \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2} + \sigma_1\sigma_2\rho\right)(t-1) + \sigma_1 W_{t-1} + \sigma_2 \tilde{W}_{t-1}\right)} =$$

$$= \exp\left(-\left(\alpha + \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2} + \sigma_1\sigma_2\rho\right) + \sigma_1 W_1 + \sigma_2 \tilde{W}_1\right) \qquad (19)$$

Entonces, a partir de (19), se define la variable aleatoria $X(t)$,

$$X(t) = -\ln \frac{R_\tau(t)}{R_\tau(t-1)} \approx N\left(\alpha + \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2} + \sigma_1\sigma_2\rho, \sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2\rho\right) \qquad (20)$$

a partir de la cual se llevará a cabo la estimación de los parámetros, previa asunción de las siguientes dos hipótesis:

Hipótesis 1: Si $\rho = 1$ entonces $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$ donde σ^2 es la varianza del modelo simplificado definido en (14). Por consiguiente, la primera hipótesis, relacionada con la varianza de la variable $X(t)$, que en lo sucesivo se simbolizará como σ_ρ^2, puede establecerse como sigue:

$$\sigma_\rho^2 = (\sigma_1+\sigma_2)^2 \quad \forall \rho \in [0,1]$$

Hipótesis 2: Esta hipótesis establece una relación de σ_1 y σ_2 con σ del modelo simplificado definido en (14), de la siguiente forma: $\sigma_1 = \sigma$ y $\sigma_2 = (1-\rho)\sigma$

Es fácil comprobar que, si $\rho = 1$, entonces $\sigma_1 = \sigma$ y recuperamos el modelo simplificado. Por otra parte, si $\rho = 0$, ambos procesos de Wiener son totalmente independientes y cada uno de ellos tiene una volatilidad igual a σ. Consecuentemente recuperamos el modelo simplificado pero con dos procesos de Wiener de igual amplitud.
Entonces, realizando los cálculos siguientes,

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho = \sigma^2 + (1-\rho)^2\sigma^2 + 2(1-\rho)\sigma^2 = \left(2-\rho^2\right)\sigma^2$$

y,

$$\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)^2 = \left(\sigma + (1-\rho)\sigma\right)^2 = \left((2-\rho)\sigma\right)^2 = \left(2-\rho^2\right)\sigma^2$$

y bajo las dos hipótesis establecidas anteriormente, la distribución que sigue la variable $X(t)$ puede reescribirse como sigue:

$$X(t) \sim N\left(\alpha + \frac{\left(2-\rho^2\right)\sigma^2}{2}, (2-\rho)^2\sigma^2\right) \qquad (21)$$

Como estimador de la varianza, σ^2, se utiliza la cuasi-varianza por ser esta un estimador insesgado de la primera,

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(X(t) - \overline{X}\right)^2$$

y se aplica la metodología de estimación máximo verosímil para obtener el estimador de la tasa de declaración de siniestros, α.
Como $X(t)$ sigue una distribución normal, su función de densidad es:

$$f(X;\alpha,\sigma) = \frac{1}{\sigma(2-\rho)\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(X - \alpha - \frac{\sigma^2(2-\rho)^2}{2}\right)^2}{2\sigma^2(2-\rho)^2}\right)$$

Entonces, sea *n* el número de datos sobre catástrofes disponible, de forma que la función máximo-verosímil resulta,

$$L(\alpha,\sigma) = \frac{1}{\left(\sigma(2-\rho)\sqrt{2\pi}\right)^n}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X(i) - \alpha - \frac{\sigma^2(2-\rho)^2}{2}\right)^2}{2\sigma^2(2-\rho)^2}\right)$$

y la función logarítmica de la función máximo-verosímil es:

$$\ln L(\alpha,\sigma) = -n\ln\left(\sigma(2-\rho)\sqrt{2\pi}\right) - \frac{1}{2\sigma^2(2-\rho)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X(i) - \alpha - \frac{\sigma^2(2-\rho)^2}{2}\right)^2 \qquad (22)$$

Para obtener el estimador del parámetro α, derivamos la ecuación (22) respecto de dicho parámetro e igualamos a cero:

$$\frac{\partial \ln L(\alpha,\sigma)}{\partial\alpha} = -n\alpha - \frac{n(2-\rho)\sigma^2}{2} + \sum_{i=1}^{n}X(i) = 0 \qquad (23)$$

Y resolviendo esta ecuación para α, $(\hat{\alpha}_\tau)_{MV}$ resulta:

$$(\hat{\alpha})_{MV} = \overline{X} - \frac{(2-\rho)^2\sigma^2}{2}$$

Por tanto, los estimadores $\hat{\alpha}_{MV}$ y $\hat{\sigma}_\rho^2$, en función del valor del parámetro de correlación, ρ, son:

$$\hat{\alpha}_{MV} = \overline{X} - \frac{2-\rho^2}{2} S^2 \text{ y} \tag{24}$$

$$\hat{\sigma}_{\rho}^2 = (2-\rho)^2 S^2 \tag{25}$$

Las Tablas de la (2) a la (13) muestran los resultados obtenidos para los estimadores, en función de distintos valores de ρ así como la distribución normal seguida para la variable $X(t)$ en cada una de las series de datos analizadas:

Tabla 2: Serie Alcira. Estimadores

ρ	α	σ_1	σ_2
0	0.282403759	0.205450303	0.205450303
0.1	0.282614808	0.205450303	0.184905273
0.2	0.283247956	0.205450303	0.164360242
0.3	0.284303201	0.205450303	0.143815212
0.4	0.285780545	0.205450303	0.123270182
0.5	0.287679987	0.205450303	0.102725151
0.6	0.290001528	0.205450303	0.082180121
0.7	0.292745167	0.205450303	0.061635091
0.8	0.295910904	0.205450303	0.041090061
0.9	0.299498739	0.205450303	0.02054503
1	0.303508673	0.205450303	0

Tabla 3: Serie Alcira. Distribución para *X*(*t*)

ρ	Distribución
0	N(0.282403759;0.168839308)
0.1	N(0.282614808;0.152377475)
0.2	N(0.283247956;0.136759839)
0.3	N(0.284303201;0.1219864)
0.4	N(0.285780545;0.108057157)
0.5	N(0.287679987;0.094972111)
0.6	N(0.290001528;0.082731261)
0.7	N(0.292745167;0.071334608)
0.8	N(0.295910904;0.060782151)
0.9	N(0.299498739;0.051073891)
1	N(0.303508673;0.042209827)

Tabla 4: Serie San Sebastián. Estimadores

ρ	α	σ1	σ2
0	0.250169503	0.187511418	0.187511418
0.1	0.250345306	0.187511418	0.168760276
0.2	0.250872714	0.187511418	0.150009135
0.3	0.251751727	0.187511418	0.131257993
0.4	0.252982346	0.187511418	0.112506851
0.5	0.25456457	0.187511418	0.093755709
0.6	0.256498399	0.187511418	0.075004567
0.7	0.258783833	0.187511418	0.056253425
0.8	0.261420873	0.187511418	0.037502284
0.9	0.264409518	0.187511418	0.018751142
1	0.267749769	0.187511418	0

Tabla 5: Serie San Sebastián. Distribución para *X*(*t*)

ρ	Distribución
0	N(0.320490567;0.140642128)
0.1	N(0.313810066;0.126929521)
0.2	N(0.307832775;0.113920124)
0.3	N(0.302558696;0.101613937)
0.4	N(0.297987827;0.090010962)
0.5	N(0.294120168;0.079111197)
0.6	N(0.29095572;0.068914643)
0.7	N(0.288494483;0.059421299)
0.8	N(0.286736456;0.050631166)
0.9	N(0.28568164;0.042544244)
1	N(0.285330035;0.035160532)

Tabla 6: Serie Barcelona. Estimadores

ρ	α	σ1	σ2
0	0.241793109	0.176354847	0.176354847
0.1	0.241948614	0.176354847	0.158719362
0.2	0.24241513	0.176354847	0.141083877
0.3	0.243192655	0.176354847	0.123448393
0.4	0.244281192	0.176354847	0.105812908
0.5	0.245680738	0.176354847	0.088177423
0.6	0.247391295	0.176354847	0.070541939

Tabla 7: Serie Barcelona. Distribución para *X*(*t*)

ρ	Distribución
0	N(0.303995173;0.124404128)
0.1	N(0.298085977;0.112274726)
0.2	N(0.292798801;0.100767344)
0.3	N(0.288133647;0.089881982)
0.4	N(0.284090513;0.079618642)
0.5	N(0.280669399;0.069977322)
0.6	N(0.277870306;0.060958023)

0.7	0.249412862	0.176354847	0.052906454
0.8	0.251745439	0.176354847	0.035270969
0.9	0.254389027	0.176354847	0.017635485
1	0.257343625	0.176354847	0

0.7	N(0.275693234;0.052560744)
0.8	N(0.274138182;0.044785486)
0.9	N(0.273205151;0.037632249)
1	N(0.272894141;0.031101032)

Tabla 8: Serie Zaragoza. Estimadores

ρ	α	σ1	σ2
0	0.186326007	0.20833979	0.20833979
0.1	0.186543034	0.20833979	0.187505811
0.2	0.187194116	0.20833979	0.166671832
0.3	0.188279253	0.20833979	0.145837853
0.4	0.189798444	0.20833979	0.125003874
0.5	0.191751691	0.20833979	0.104169895
0.6	0.194138991	0.20833979	0.083335916
0.7	0.196960347	0.20833979	0.062501937
0.8	0.200215757	0.20833979	0.041667958
0.9	0.203905222	0.20833979	0.020833979
1	0.208028741	0.20833979	0

Tabla 9: Serie Zaragoza. Distribución para *X*(*t*)

ρ	Distribución
0	N(0.273136943;0.173621872)
0.1	N(0.264889904;0.156693739)
0.2	N(0.257510975;0.140633716)
0.3	N(0.251000154;0.125441803)
0.4	N(0.245357443;0.111117998)
0.5	N(0.240582842;0.097662303)
0.6	N(0.23667635;0.085074717)
0.7	N(0.233637967;0.073355241)
0.8	N(0.231467694;0.062503874)
0.9	N(0.23016553;0.052520616)
1	N(0.229731475;0.043405468)

Tabla 10: Serie Valencia. Estimadores

ρ	α	σ1	σ2
0	0.215226819	0.160528465	0.160528465
0.1	0.215355666	0.160528465	0.144475618
0.2	0.215742207	0.160528465	0.128422772
0.3	0.216386441	0.160528465	0.112369925
0.4	0.21728837	0.160528465	0.096317079
0.5	0.218447993	0.160528465	0.080264232
0.6	0.219865309	0.160528465	0.064211386
0.7	0.221540319	0.160528465	0.048158539
0.8	0.223473023	0.160528465	0.032105693
0.9	0.225663421	0.160528465	0.016052846
1	0.228111513	0.160528465	0

Tabla 11: Serie Valencia. Distribución para *X(t)*

ρ	Distribución
0	N(0.266765595;0.103077552)
0.1	N(0.261869411;0.093027491)
0.2	N(0.257488615;0.083492817)
0.3	N(0.253623207;0.074473531)
0.4	N(0.250273187;0.065969633)
0.5	N(0.247438554;0.057981123)
0.6	N(0.245119309;0.050508)
0.7	N(0.243315452;0.043550266)
0.8	N(0.242026983;0.037107919)
0.9	N(0.241253901;0.031180959)
1	N(0.240996207;0.025769388)

Seguidamente, se verifica el carácter normal de la variable $X(t)$, realizando un contraste χ^2 de Pearson. Para desarrollar este test, se utiliza el procedimiento que se detalla a continuación.
Se ha de verificar que la variable $X(t)$ puede ajustarse a una distribución $N(\mu,\lambda^2)$ siendo
$\mu = \alpha + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} + \sigma_1\sigma_2\rho$ y $\lambda^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho$. Entonces:

- Se obtienen los 4 intervalos siguientes: $(-\infty, \mu-\lambda)$, $[\mu-\lambda, \mu)$, $(\mu, \mu+\lambda]$ y $[\mu+\lambda, +\infty)$.
- Se calcula la frecuencia relativa de la distribución $N(\mu,\lambda^2)$ dentro de cada intervalo y se obtiene la frecuencia esperada (teórica) E_j para $j = 1,2,3,4$.
- Se calcula el número de observaciones de $X(t)$ pertenecientes a cada intervalo, y a partir de él, se obtiene la frecuencia relativa observada O_j correspondiente, dividiendo el valor obtenido por *n*, para cada $j = 1,2,3,4$.

La hipótesis nula del contraste es,

$$H_0 : X(t) \sim N(\mu, \lambda^2)$$

y el estadístico de prueba se calcula como sigue,

$$D = \sum_{j=1}^{4} \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j}$$

con *d* grados de libertad siendo $d = \text{número de intervalos} - 1 - \text{número de estimadores}$.

Tabla 12: Serie Murcia. Estimadores

ρ	α	σ1	σ2
0	0.178851735	0.262210027	0.262210027
0.1	0.179195505	0.262210027	0.235989024
0.2	0.180226817	0.262210027	0.209768021
0.3	0.181945669	0.262210027	0.183547019
0.4	0.184352063	0.262210027	0.157326016
0.5	0.187445997	0.262210027	0.131105013
0.6	0.191227473	0.262210027	0.104884011
0.7	0.195696489	0.262210027	0.078663008
0.8	0.200853046	0.262210027	0.052442005
0.9	0.206697145	0.262210027	0.026221003
1	0.213228784	0.262210027	0

Tabla 13: Serie Murcia. Distribución para *X*(*t*)

ρ	Distribución
0	N(0.316359931;0.275016392)
0.1	N(0.303296652;0.248202294)
0.2	N(0.291608456;0.222763278)
0.3	N(0.281295341;0.198699343)
0.4	N(0.272357308;0.176010491)
0.5	N(0.264794358;0.154696721)
0.6	N(0.258606489;0.134758032)
0.7	N(0.253793702;0.116194426)
0.8	N(0.250355997;0.099005901)
0.9	N(0.248293374;0.083192459)
1	N(0.247605833;0.068754098)

Bajo H_0, con un nivel de significación del 10% y con los valores estimados de $\hat{\mu}$ y $\hat{\lambda}$, el estadístico D sigue una distribución χ^2 con 1 grado de libertad y se acepta la hipótesis nula si el p-valor del contraste es mayor que 0,1.

Los resultados de los estadísticos del contraste y sus p-valores asociados para los distintos valores del parámetro de correlación, ρ, se muestran en las Tablas de la (14) a la (19) siguientes:

Tabla 14: Serie Alcira. Estadístico y p-valores del contraste χ^2

ρ	D	p-value
0	0.547542	0.4593238
0.1	0.547542	0.4593238
0.2	0.547542	0.4593238
0.3	0.547542	0.4593238
0.4	0.4390387	0.5075868
0.5	0.4390387	0.5075868
0.6	0.2686115	0.6042647
0.7	0.2686115	0.6042647
0.8	0.2686115	0.6042647
0.9	0.1551755	0.6936378
1	0.1551755	0.6936378

Tabla 15: Serie San Sebastián. Estadístico y p-valores del contraste χ^2

ρ	D	p-value
0	0.6275497	0.4282555
0.1	0.6275497	0.4282555
0.2	0.6275497	0.4282555
0.3	0.5563444	0.4557369
0.4	0.4808235	0.4880495
0.5	0.4808235	0.4880495

0.6	0.4808235	0.4880495
0.7	0.4808235	0.4880495
0.8	0.4373601	0.5083994
0.9	0.4373601	0.5083994
1	0.4259542	0.5139808

Tabla 16: Serie Barcelona. Estadístico y p-valores del contraste χ^2

ρ	D	p-value
0	0.9164181	0.3384172
0.1	0.7378835	0.3903397
0.2	0.7378835	0.3903397
0.3	0.7378835	0.3903397
0.4	0.5318056	0.4658487
0.5	0.3857319	0.5345515
0.6	0.3857319	0.5345515
0.7	0.3857319	0.5345515
0.8	0.3857319	0.5345515
0.9	0.3857319	0.5345515
1	0.3857319	0.5345515

Tabla 17: Serie Zaragoza. Estadístico y p-valores del contraste χ^2

ρ	D	p-value
0	0.5371303	0.4636245
0.1	0.5371303	0.4636245
0.2	0.5371303	0.4636245
0.3	0.3667031	0.5448068
0.4	0.3667031	0.5448068
0.5	0.3305354	0.565344
0.6	0.3305354	0.565344
0.7	0.23299	0.6293156
0.8	0.23299	0.6293156
0.9	0.1316043	0.7167744
1	0.1316043	0.7167744

Tabla 18: Serie Valencia. Estadístico y p-valores del contraste χ^2

ρ	D	p-value
0	0.469785	0.4930861
0.1	0.4240837	0.5149064
0.2	0.4240837	0.5149064
0.3	0.4240837	0.5149064
0.4	0.3363582	0.5619389
0.5	0.2200045	0.6390365
0.6	0.1766674	0.674253
0.7	0.09629632	0.7563203

0.8	0.0175001	0.8947565
0.9	0.0175001	0.8947565
1	0.009094476	0.9240249

Tabla 19: Serie Murcia. Estadístico y p-valores del contraste χ^2

ρ	D	p-value
0	0.8511517	0.3562267
0.1	0.7298077	0.3929455
0.2	0.6257986	0.4289006
0.3	0.6257986	0.4289006
0.4	0.6257986	0.4289006
0.5	0.5391244	0.4627958
0.6	0.469785	0.4930861
0.7	0.4177804	0.5180466
0.8	0.3014267	0.5829894
0.9	0.3014267	0.5829894
1	0.2754244	0.599716

Como se desprende de los resultados obtenidos con el contraste, no es posible rechazar la hipótesis, para ninguno de los valores de ρ analizados, de que la variable $X(t)$ sigue una distribución normal de parámetros los indicados en cada uno de los casos. Sin embargo, es importante notar que a medida que ρ tiende a cero, y por tanto los dos procesos de Wiener son completamente independientes, el p-valor del contraste es peor aunque en todos los casos muy superior al 0,1 requerido. Por tanto, sería también válido definir un modelo simplificado del propuesto como el planteado en la ecuación (14) cuya volatilidad se obtenga como la suma de las desviaciones estándar consideradas en (10). En este caso, el estadístico D del contraste χ^2 con 1 grado de libertad y los p-valores de dicho contraste son los que aparecen en la tabla (20) a continuación:

Tabla 20: Modelo simplificado con ρ=1. Estadístico y p-valores del contraste χ^2

Sucesos	D	p-value
Alcira	0.1551755	0.6936378
San Sebastián	0.4259542	0.5139808
Barcelona	0.3857319	0.5345515
Zaragoza	0.1316043	0.7167744
Valencia	0.0090944	0.9240249
Murcia	0.5391244	0.599716

Definido de esta forma, el modelo propuesto permitiría seleccionar el grado de volatilidad con el que calcular las pérdidas asociadas a la catástrofe en función de las características específicas del evento y de las circunstancias, ajenas a él, en las que se produce.

5. CONCLUSIONES

Este presenta un modelo para calcular el precio de los activos derivados sobre riesgos catastróficos con desencadenantes de índices de pérdidas de la industria del seguro, como los Cat bonds o las opciones sobre riesgos catastróficos.

Los modelos desarrollados hasta la fecha para valorar este tipo de instrumentos financiero-actuariales (por ejemplo, Cummins y Geman, 1995 o Geman y Yor, 1997), se basan en la hipótesis de que la cuantía declarada de siniestros es creciente en el tiempo y representan su dinámica a través de una ecuación diferencial estocástica caracterizada por un proceso geométrico de Wiener que incorpora la aleatoriedad al modelo mediante un parámetro de volatilidad constante.

El modelo continuo propuesto en este trabajo presenta una forma sencilla de calcular el índice de pérdidas desencadenante de los ILS asumiendo un movimiento browniano geométrico con dos procesos de Wiener para modelizar la dinámica decreciente de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, variable fundamental del modelo. La introducción de dos procesos de Wiener geométricos permite añadir mayor volatilidad al modelo al considerar la existencia de factores tanto endógenos como exógenos asociados a la ocurrencia de una catástrofe.

La cuantía declarada de siniestros, numerador de la ratio de pérdidas desencadenante de los ILS, se obtiene, una vez determinada la cuantía de siniestros pendiente de declarar, como diferencia entre esta última y la cuantía total de la catástrofe, lo que hace innecesario definir una ecuación diferencial estocástica para describir su dinámica.

El índice de pérdidas catastróficas resulta de dividir la cuantía declarada de siniestros por un valor constante que normalmente hace referencia a las primas cobradas por la compañía de seguros durante un periodo determinado para afrontar el pago de este tipo de siniestros catastróficos. De esta forma, se simplifica considerablemente la tarificación del ILS analizado a lo largo de su periodo de maduración.

Para llevar a cabo la estimación de los parámetros del modelo propuesto se han utilizado datos de 6 inundaciones ocurridas en diferentes comunidades españolas propensas a sufrir este tipo de sucesos de naturaleza catastrófica. Aplicando una metodología máxima verosimilitud se han obtenido las diferentes estimaciones de la tasa constante de declaración de siniestros y con el estimador insesgado cuasi-varianza se han estimado las volatilidades incorporadas mediante los dos procesos de Wiener. La validez de los resultados obtenidos se comprueba realizando un contraste Ji-cuadrado de Pearson para cada una de las series analizadas y para diferentes valores del parámetro de correlación. Este contraste permite concluir que los datos reales de los que partimos provienen de la distribución normal seguida por el logaritmo neperiano de la cuantía de siniestros pendiente de declarar definida mediante un movimiento Browniano geométrico con tasa de declaración de siniestros constante y dos procesos de Wiener y por tanto que el modelo aleatorio propuesto describe de forma adecuada la realidad que pretendemos representar.

RECEIVED: APRIL, 2017
REVISED: SEPTEMBER, 2017

REFERENCIAS

[1] AASE, K. (1999): An Equilibrium Model of Catastrophe Insurance Futures and Spreads. **Geneva Papers on Risk and Insurance Theory**, 24, 69-96.

[2] AASE, K. (2001): A Markov model for the pricing of catastrophe insurance futures and spreads. **Journal of Risk and Insurance**, 68 (1), 25-50.

[3] BARYSHNIKOV, Y., MAYO, A. and TAYLOR, D. R. (2001): Pricing of Cat Bonds. Working Paper. Disponible en: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.202.9296&rep=rep1&type=pdf.

[4] BIAGINI, F., BREGMAN, Y. and MEYER-BRANDIS, T. (2008) : Pricing of catastrophe insurance options written on a loss index with reestimation. **Insurance: Mathematics and Economics**, 43 (2), 214-222.

[5] BRAUN, A. (2011): Pricing catastrophe swaps: A contingent claims approach. **Insurance: Mathematics and Economics**, 49 (3), 520-536.

[5] BURNECKI, K. and KUKLA, G. (2003): Pricing of zero-coupon and coupon cat bonds. **Applicationes Mathematicae**, 30 (3), 315-324.

[6] COX, S. H. and PEDERSEN, H. (2000): Catastrophe Risk Bonds. **North American Actuarial Journal**, 4 (4), 56-82.

[7] CUMMINS, J. D. and GEMAN, H. (1995): Pricing Catastrophe Insurance Futures and Call Spreads: An Arbitrage Approach. **Journal of Fixed Income**, 4 (4), 46-57.

[8] CHANG, L-F and HUNG, M-W (2009): Analytical valuation of catastrophe equity options with negative exponential jumps. **Insurance: Mathematics and Economics**, 44 (1), 59-69.

[9] CHANG, C.W., CHANG, J. S. K. and LU, W. (2010): Pricing catastrophe options with stochastic claim arrival intensity in claim time. **Journal of Banking & Finance**, 34 (1), 24-32.

[10] EGAMI, M. and YOUNG, V. (2008): Indifference prices of structured catastrophe (CAT) bonds. **Insurance: Mathematics and Economics**, 42 (2), 771-778.

[11] EMBRECHTS, P. and MEISTER, S. (1997): Pricing insurance derivatives, the case of CAT-futures. In: S. Cox. **Proceedings of the 1995 Bowles Symposium on Securitization of Insurance Risk,** 15-26, Gorgia State University Atlanta.

[12] GEMAN, H. and YOR, M. (1997): Stochastic time changes in catastrophe option pricing. **Insurance: Mathematics and Economics**, 21 (3), 185-193.

[13] JAIMUNGAL, S. and WANG, T. (2006): Catastrophe options with stochastic interest rates and compound Poisson losses. **Insurance: Mathematics and Economics**, 38 (3), 469-483.
[14] LEE, J. P. and YU, M. T. (2002): Pricing default-risky Cat bonds with moral hazard and basis risk. **Journal of Risk and Insurance**, 69 (1), 25-44.
[15] LOUBERGÉ, H., KELLEZI, E. and GILLI, M. (1999): Using Catastrophe-Linked Securities to Diversify Insurance Risk: A Financial Analysis of Cat Bonds. **Journal of Insurance Issues**, 22 (2),125-146.
[16] MUERMANN, A. (2003): Actuarially Consistent Valuation of Catastrophe Derivatives. Working Paper Series The Wharton Financial Institutions Center, 03-18, University of Pennsylvania. Disponible en: https://pdfs.semanticscholar.org/465c/8fec2d291056eeb4a7cce06ebef3863c29c7.pdf.
[17] PÉREZ-FRUCTUOSO, M. J. (2008): Modeling loss index trigger for Cat bonds: A continuous Approach. **Variance**, 2 (2), 253-265.
[18] PÉREZ-FRUCTUOSO, M. J. (2009): Elaborating a catastrophic loss index for insurance-linked securities (ILS) a continuous model. **Asian-Pacific Journal of Risk and Insurance**, 3 (2), 34-45.
[19] NOWAK, P. and ROMANIUK, M. (2013): Princing and simulations of catastrophe Bonds. **Insurance: Mathematics and Economics**, 52 (1), 18-28.
[20] LAI, V. S., PARCOLLET, M. and LAMOND, B. F. (2014): The valuation of catastrophe bonds with exposure to currency exchange risk. **International Review of Financial Analysis**, 33, 243-252.
[21] ZONG-GANG, M. and CHAO-QUN, M. (2013): Princing catastrophe risk Bonds: a mixed approximation method. **Insurance: Mathematics and Economics**, 52 (2), 243-254.
[22] WANG, X. (2016): Catastrophe equity put option with target variance. **Insurance: Mathematics and Economics,** 71, 79-86.