CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA ELEMENTAL EN EL PRIMER CICLO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA EN ESPAÑA

Julián Roa González
julian.roa@udima.es
Dpto. de Matemáticas
Facultad de Educación
Universidad a Distancia de Madrid
España

Mercedes Hidalgo Herrero
mhidalgo@ucm.es
Dpto. de Didáctica de las Matemáticas
Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid
España

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Medio o Secundario
Palabras clave: Teoría Antropológica de lo Didáctico, Modelo Epistemológico de Referencia, Geometría, Secundaria

Resumen

Los modelos epistemológicos de referencia (MER en lo sucesivo) permiten incorporar a los problemas docentes la dimensión epistemológica. En el ámbito de la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD en lo sucesivo) la incorporación de esta dimensión es un paso obligado para definir el problema de investigación.

Para su enseñanza-aprendizaje, la Geometría, al igual que el resto de saberes que se estudian en una institución escolar, sufre un proceso de transposición didáctica que modifica el saber sabio en saber a enseñar. Para estudiar el saber sabio, antes de que se transforme, el didacta debe reflexionar y explicitar cuál es su interpretación de ese saber matemático y justificar el porqué van a ser estudiados unos objetos matemáticos y no otros.

En este trabajo se exponen los sistemas de referencia relativos que se han utilizado para la construcción de un MER para la enseñanza de la Geometría elemental del primer ciclo de secundaria y se detalla, a modo de ejemplo, una posible organización de las praxeologías que dicho MER aborda.

1. Introducción

Para poder estudiar un ámbito matemático dentro de la TAD es necesario describir y dar una interpretación de lo que, como investigadores, vamos a considerar dentro de ese ámbito matemático y que constituirá el MER. La elaboración de ese MER es el primer paso necesario para construir el problema de investigación. “Para formular un problema didáctico en términos de la TAD se requiere tomar un MER como sistema de referencia” (Gascón, 2011).

Para construir el MER vamos a analizar el conjunto de sistemas de referencia relativos que nos han servido para determinar nuestra descripción e interpretación de la Geometría elemental del primer ciclo de la Educación Secundaria. Cada uno de los sistemas de referencia relativos que vamos a tener en cuenta ha moldeado una parte de nuestra forma de ver el ámbito geométrico elemental que estamos estudiando. Podemos considerar, por tanto, que esos sistemas forman nuestra visión epistemológica. Tras su análisis, procederemos a explicitar cuáles han sido sus aportaciones en la construcción del MER para, posteriormente, presentar una organización praxeológica de este, es decir, definido por las praxeologías, (tarea(s), técnica(s), tecnología(s), teoría(s)) (Chevallard, 1999), que lo componen.

2. Sistemas de referencia relativos del pensamiento geométrico

El MER que se plantea en este trabajo se apoya en tres pilares de la investigación sobre el pensamiento geométrico, a saber, la evolución histórica del saber sabio geométrico, el modelo de Van Hiele para la enseñanza de la Geometría y las aportaciones de Brousseau sobre los distintos niveles del Espacio.

2.1. La evolución histórica del saber sabio

La Historia señala muchas de las pistas sobre cómo aprendemos y, aunque su camino no es equiparable al que recorre un estudiante, su conocimiento forma parte del equipamiento praxeológico del docente para el quehacer en el aula.

A lo largo de la Historia, los matemáticos se han enfrentado a problemas que eran de importancia dentro de un contexto determinado. Para resolver esos problemas, los matemáticos han puesto en juego herramientas personales y contextuales que les han permitido generar una respuesta. Una vez obtenidas, las respuestas se despersonalizan y se descontextualizan y pasan a formar parte del saber sabio aceptado. El contexto y el trabajo personal quedan ocultos para el docente y el estudiante y, en ocasiones, información relevante para entender cómo puede abordarse un problema no es tenida en cuenta. La investigación de la evolución del saber sabio permite al investigador tener en cuenta los procesos personales y contextuales que dieron origen a las distintas respuestas aceptadas y pueden servir de ayuda a la hora de establecer el MER.

> La matemática tiene una historia milenaria y apasionante, constituye toda una aventura del pensamiento observar desde nuestra perspectiva los rodeos, los callejones sin salida aparente, los túneles oscuros, las controversias de la evolución del pensamiento matemático hasta nuestros días. (Guzmán, 1983, pág. 47)

La Geometría tiene una historia que se extiende desde la prehistoria hasta nuestros días. Gracias a la comprensión de cómo se fue gestando es posible plantear una investigación rica en matices que sea interesante para nuestros alumnos. En nuestro caso, utilizaremos la agrimensura al igual que hicieron los egipcios para dar origen al proceso de estudio. Del mismo modo plantearemos la búsqueda de ternas pitagóricas para inducir el teorema de Pitágoras siguiendo el modo mesopotámico. Durante la medición usaremos el enfoque histórico para ir redescubriendo las fórmulas, la proporcionalidad, la descomposición de figuras o el cálculo de áreas.

2.2. El modelo de Van Hiele

El trabajo realizado por Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldorf ha venido reivindicándose en muchos países desde los años 70. En España el interés por este modelo de aprendizaje geométrico cobra importancia a partir de los años 90 como se señala en (López de Silanes Valgañón, 2012).

En el MER que proponemos nos hacemos eco de esa importancia y recogemos algunos resultados relevantes sobre el nivel de razonamiento esperable en la educación secundaria para construir nuestra propuesta.

Según este modelo la capacidad de razonamiento geométrico evoluciona pasando de forma progresiva por los siguientes niveles:

1. Nivel de Reconocimiento. En el primer nivel se maneja solamente información visual, y su forma de razonamiento no puede ser considerada como matemática.
2. Nivel de Análisis. En el segundo nivel se reconoce la presencia de propiedades Matemáticas en los objetos geométricos, y el razonamiento se basa en la percepción.
3. Nivel de Deducción Informal. En el tercer nivel se comienza a desarrollar la capacidad de razonamiento, llegando a manejar los elementos más simples del razonamiento formal, como las definiciones o las implicaciones.
4. Nivel de Deducción Formal. El cuarto nivel capacita al alumno para el razonamiento formal.
5. Nivel de Rigor. Finalmente en el quinto nivel se adquieren los conocimientos y se desarrolla toda la capacidad de razonamiento. (López de Silanes Valgañón, 2012, pág. 23)

Los niveles de razonamiento pueden medirse gracias al cuestionario de Usiskin. El cuestionario fue utilizado en la medición realizada por López de Silanes (2012) previa validación para su aplicación en España. Respecto al nivel medido mediante el cuestionario de Usiskin, los resultados en porcentaje de los alumnos que han superado un determinado nivel pueden verse en la Tabla 1:

Curso	N0	N1	N2	N3	N4	N5
6º Primaria	6,8	58,1	35,1			
4º ESO	5,9	17,6	57,1	19,3		

Tabla 1. Porcentajes de alumnos por nivel de razonamiento geométrico (elaboración propia)

Aunque en el estudio no se presentan datos individualizados por cursos, podemos aceptar que la situación en 6º de Primaria se corresponde con los conocimientos previos esperados en los primeros cursos de secundaria. En este sentido, se observa que existe un porcentaje significativo de alumnos que podemos considerar analfabetos geométricos y que la mayoría de los alumnos ha superado el Nivel 1 y está adquiriendo el Nivel 2. Tan solo un tercio del alumnado podría avanzar hacia el Nivel 3. Por lo que lo normal a la hora de trabajar en un aula de los primeros cursos de secundaria es ubicarse dentro del Nivel 2 de razonamiento.

La situación en 4º de la ESO es alarmante para los alumnos que mostraban analfabetismo geométrico, pues a pesar de realizar 4 años más de estudio no consiguen evolucionar. Esta situación es coherente con el modelo de Van Hiele, ya que no es posible el avance dentro de un nivel si se realizan actividades de un nivel para el que no se está preparado. En cuanto a la adquisición del Nivel 3, podemos afirmar que se trata de una situación minoritaria, por lo que la mayoría de los alumnos solo consiguen alcanzar al final de su escolarización el Nivel 2 propuesto por el modelo.

> El modelo de razonamiento de Van Hiele (1986) es, en la actualidad, el marco más provechoso para organizar la enseñanza de la Geometría y realizar una correcta evaluación del aprendizaje comprensivo de los estudiantes. (Gutiérrez & Jaime, 2012, pág. 56)

En el MER tendremos en consideración el nivel de razonamiento esperado por los alumnos. Así, el objetivo principal del presente trabajo es conseguir que no haya alumnado en situación de analfabetismo geométrico al finalizar los primeros cursos de secundaria y que la práctica totalidad de la población escolar supere el Nivel 1 y domine el Nivel 2.

2.3. Los niveles del espacio de Guy Brousseau

El tercer pilar del MER lo constituyen los trabajos de Brousseau sobre Geometría. De ellos extraeremos fundamentalmente la diferenciación entre los distintos niveles del espacio, aspecto clave para establecer las distintas modelizaciones que tendremos en cuenta.

El alumno de secundaria ha ido organizando el espacio en los cursos precedentes mediante actividades de orientación. El niño se sitúa en el espacio en relación a otros objetos y otros individuos. En este punto es importante distinguir entre los distintos niveles de magnitud que presenta el espacio. Así, se distinguen tres valores para el Tamaño del espacio, aun siendo difusa la frontera entre ellos:

- Micro-espacio: es la región del espacio que es accesible para el individuo con la mano, sin realizar desplazamientos.
- Meso-espacio: comprende la región del espacio de tamaño superior al micro-espacio pero cuyo límite superior viene determinado por aquello que es visible y alcanzable por desplazamientos cortos, es decir, hasta unos 100 pasos.
- Macro-espacio: corresponde a los espacios mayores que los descritos anteriormente, no se dispone de una visión global de los mismos.

> Las concepciones mentales que van asociadas a cada uno de ellos son diferentes, puesto que las posibilidades de manipulación son diferentes. (Villarroya Bullido, 1994, pág. 97)

Esta consideración de los distintos niveles del espacio planteada por Brousseau es muy relevante para construir el MER que nos ocupa. El micro-espacio es el lugar privilegiado para el estudio en el aula al poder trabajarse dentro de las dimensiones de un papel. Los estudiantes trabajan con representaciones de la realidad y construyen sus ideas y sus técnicas de resolución sobre este nivel del espacio. Pero el trabajo en el micro-espacio limita el medio en el que el alumno construye su estudio.

> Pour des raisons ergonomiques et à cause des techniques différentes qu'elles imposent, la conception des objets de la géométrie est différente dans chacun de ces milieux. La "droite" peut être déterminée, dans le micro-espace par le glissement qu'elle permet ou par l'intersection de deus plans, dans le meso-espace, par un alignement visuel, dans le macro-espace, par le prolongement à l'aide d'un angle plat… (Brousseau, 2000, pág. 7)

Al considerar los diferentes niveles del espacio en el MER, se enriquecen las experiencias y los significados que se pueden otorgar a la medida de longitudes, a los instrumentos de medida o al concepto de ángulo. Además de ampliar el significado de los conceptos, el cambio entre un nivel del espacio y otro es lo que justifica la necesidad de construir los conceptos de igualdad y semejanza. Por ese motivo, en nuestra investigación tener en cuenta las aportaciones de Brousseau es fundamental para la elaboración del MER.

3. Aportaciones de los sistemas de referencia relativos a la construcción del MER

Una vez definidos los sistemas de referencia relativos que hemos tenido en cuenta, procedemos a resumir cuáles son sus principales aportaciones para la creación del MER. Entendemos que el trabajo llevado a cabo por la humanidad en la construcción de la Geometría debe ser similar al que realicen los estudiantes para su estudio. En este sentido, son los problemas prácticos y las experiencias manipulativas las que van definiendo paso a paso los conceptos, las tareas y las técnicas geométricas. Una vez definidas estas, se puede proceder de forma inversa y tratar de construir la teoría y las tecnologías a partir de unos primeros axiomas evidentes. La inducción precede pues a la deducción y en este sentido se produce una emancipación del saber sabio euclídeo.

El modelo de Van Hiele nos permite fijar una meta para nuestros estudiantes: el objetivo de este MER está puesto en la adquisición del nivel 2 y en la introducción al nivel 3 de razonamiento propuesto por el modelo. Los estudiantes van a trabajar sobre los conceptos geométricos para interiorizar sus propiedades a partir de la experiencia e iniciarse en los procesos de establecer definiciones informales que preparen el camino del método lógico-deductivo. La definición de esta meta es clave para la selección de las praxeologías que serán objeto de estudio.

Las aportaciones de Brousseau son claves para entender los distintos niveles de organización espacial. El MER no está limitado al microespacio, como suele ser habitual, y ve en los distintos niveles del espacio una herramienta para forzar al alumno a construir sus conceptos. El trabajo en los distintos niveles del espacio definidos por Brousseau es de suma importancia para dar significado a muchos de los conceptos Geométricos y, al igual que sucedió en el desarrollo histórico, la necesidad de trabajar en los distintos niveles del espacio es el camino elegido en este MER para provocar el cambio en los niveles de razonamiento.

4. Organización praxeológica del MER

Una vez aclarada la visión epistemológica, podemos explicitar nuestro MER en base a las praxeologías que lo componen. La noción de praxeología permite considerar al mismo tiempo y con la misma importancia el saber y el saber hacer, la praxis y el logos. La primera estaría compuesta por tareas y técnicas (que permiten resolver las tareas), en tanto que el segundo se compone de tecnologías y teorías, siendo ambas la componente justificativa y explicativa, las tecnologías de las técnicas y las teorías de las tecnologías.
Para dar claridad al proceso y estructurar las praxeologías que componen el MER nos vamos a basar en el planteamiento que hace Castelnuovo (1966) sobre el orden que debe seguirse para acercar la Geometría elemental a los estudiantes. De forma resumida podemos decir que las praxeologías del MER siguen el siguiente proceso:

1. Definición de los conceptos de Geometría elemental que vamos a tener en cuenta en este MER.
2. Descripción y definición de las praxeologías que van a generar los instrumentos de trabajo aceptables dentro del MER.
3. Descripción y definición de las praxeologías relativas a la medición de longitudes, superficies y ángulos.
4. Descripción y definición de las praxeologías que permiten establecer la equivalencia de figuras planas.
5. Descripción y definición de las praxeologías que permiten establecer la igualdad de figuras planas.
6. Descripción y definición de las praxeologías que permiten establecer la semejanza de figuras planas.
7. Descripción y definición de las praxeologías que permiten obtener medidas de las figuras planas de forma indirecta.

5. Conclusiones

Ante el estudio de cualquier problema, el investigador aporta una visión personal y muchas veces implícita sobre qué son y cómo se estudian los distintos saberes matemáticos objeto de estudio. A menudo se considera esta posición epistemológica como transparente y por tanto no se tiene en cuenta a la hora de realizar la investigación.
La definición del MER amplía considerablemente el problema de investigación. En su elaboración tenemos que decidir y señalar cuáles son nuestros modelos epistemológicos de referencia y redactar de forma explícita el conjunto de praxeologías (tareas, técnicas, tecnologías y teorías) del campo de la Geometría que van a ser consideradas objeto de

estudio. El MER nos permite estudiar el saber matemático antes de que sufra transformaciones para ser enseñando en el seno de una institución. Esta visión, externa al sistema de enseñanza, nos permite ver cómo se interpretan esos saberes en las distintas instituciones.

Tal y cómo aparece en (Gascón, 2011), al añadir esta dimensión incorporamos al problema de investigación los siguientes aspectos:

1. La amplitud del ámbito matemático más adecuada para plantear el problema didáctico
2. Los fenómenos didácticos que serán visibles para el investigador.
3. Los tipos de problemas de investigación que se pueden plantear.
4. Las explicaciones tentativas que se podrán proponer.

> Cómo dice Chevallard, el estudio de la transposición didáctica, y añadimos el análisis de los MER que este estudio requiere y permite construir, son los instrumentos que han permitido a la Didáctica de las Matemáticas romper con la didáctica clásica y construir su propio objeto de estudio, integrando definitivamente el saber matemático. (Gascón, 2011, pág. 11)

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie. *Séminaire de Didactique des Mathématiques* (pp. 67-83). Rethymnon: Université de Crète, Département des Sciences de l'Education.

Castelnuovo, E. (1966). *Geometría intuitiva.* Barcelona: Labor.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(2), 203-231.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*(32), 55-70.

Guzmán, M. d. (1983). Sobre la Educación Matemática. *Revista de Occidente*(26), 37-48.

López de Silanes Valgañón, F. (2012). *Didáctica de las Matemáticas. Modelo de Van Hiele: enseñanza de la geometría en España.* Barcelona: Davinci Continental.

Villarroya Bullido, F. (1994). El empleo de materiales en la enseñanza de la Geometría. *Revista Interunivesitaria de Formación del Profesorado*(21), 95-104.