



Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 6185

Dichtemessungen in flüssigen Medien mit Mikromembransensoren

M. Vitt, W. K. Schomburg
Institut für Mikrostrukturtechnik

November 1998



Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 6185

**Dichtemessungen in flüssigen Medien
mit Mikromembransensoren**

M. Vitt*, W.K. Schomburg
Institut für Mikrostrukturtechnik

*) von der Fakultät für Maschinenbau der
Universität Karlsruhe genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1998

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor
Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe
Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft
Deutscher Forschungszentren (HGF)
ISSN 0947-8620

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden Mikromembransensoren im Hinblick auf ihren Einsatz zur Messung der Dichte flüssiger Medien untersucht. Das funktionale Element eines Mikromembransensors ist eine wenige Mikrometer dicke Membran, die von einer Mikrostruktur in einige zehn Mikrometer große Mikromembranen unterteilt wird. Typischerweise gehören einige hundert bis einige tausend Mikromembranen zu einem Sensor. Diese Mikromembranen werden mit einem Ultraschallpuls zu Schwingungen angeregt, die ihrerseits zum Aussenden eines Ultraschallsignals bei der Resonanzfrequenz der Mikromembranen führen. Die Resonanzfrequenz, die aus dem Ultraschallsignal bestimmt wird, ist von verschiedenen Parametern abhängig, wie z.B. Temperatur, Druck, Dichte und Viskosität des umgebenden Mediums. Deshalb kann einer dieser Parameter berührungslos gemessen werden, wenn der Einfluß der jeweils anderen Parameter hinreichend reduziert wird.

Der Einfluß dieser Parameter wird durch ein Modell beschrieben und durch Experimente verifiziert. Die Resonanzfrequenz von Mikromembranen wird mit einem Variationsverfahren berechnet. Der Einfluß der tragenden Mikrostruktur wird dabei durch eine Linienmasse am Rand der Membran berücksichtigt. Es wird gezeigt, daß die Masse der Mikrostruktur einen entscheidenden Einfluß auf die Schwingungseigenschaften des Sensors besitzt.

Die Schwingungsform der Mikromembransensoren wird bei der Berechnung des Dichteeffekts berücksichtigt. Man findet, daß zwischen der Dichte ρ_f und dem Quadrat der Schwingungsdauer $1/f^2$ nur dann ein linearer Zusammenhang besteht, wenn die Mikromembran als Punktstrahler angesehen wird, im allgemeinen muß aber die Schallgeschwindigkeit des Mediums berücksichtigt werden. Die Reibungskraft auf die Mikromembran in viskosen Medien wird analytisch berechnet. Berücksichtigt man die Viskosität, zeigt sich, daß die Proportionalitätskonstante des Dichteeffekts ihrerseits linear von der Eindringtiefe der Schwingungen in das Medium abhängt. Sowohl der lineare Zusammenhang, als auch die funktionale Abhängigkeit der Proportionalitätskonstanten von der Eindringtiefe werden durch Experimente verifiziert. Diese Experimente zeigen, daß die Dichte mit Mikromembransensoren auf ca. ± 1 Prozent genau bestimmt werden kann, wenn die Viskosität konstant bleibt und $4 \text{ mm}^2/\text{s}$ nicht übersteigt. Darüber hinaus zeigt sich, daß der Einfluß der Schallgeschwindigkeit vernachlässigt werden kann.

Es wird gezeigt, daß die Resonanzfrequenz von Mikromembransensoren linear vom hydrostatischen Druck abhängt, wenn die Membranfolie frei über einen Hohlraum aufgespannt ist. Die Resonanzfrequenz hängt von der Temperatur ab, wenn Membran und Mikrostruktur aus unterschiedlichen Materialien bestehen.

Es wird ein Design für ein Mikromembransensor vorgestellt, bei dem der Einfluß von Temperatur und Druck so sehr vermindert sind, daß sie eine Dichtemessung nicht mehr stören. Bis zu Temperaturen von über $140 \text{ }^\circ\text{C}$ konnten noch Messungen mit Mikromembransensoren durchgeführt werden, und Drücke von über $0,6 \text{ MPa}$ führten nicht zu Beschädigungen. Theoretisch sind sogar Drücke bis $12,8 \text{ MPa}$ möglich.

Micromembranes for Density Measurements in Fluids

Abstract

This thesis investigates micromembrane sensors with regard to their use as density sensors for liquids. The functional element of a micromembrane sensor is a membrane, which is only a few micrometers thick and which is subdivided into micromembranes by a microstructure. Typically several thousand of these micromembranes are arranged on one sensor. The micromembranes are excited to vibrations by an ultrasound pulse and subsequently the micromembranes emit a signal at their resonance frequency. The resonance frequency, which can be extracted out of the signal, depends on several parameters like temperature, density, pressure and viscosity of the surrounding medium. Thus it is possible to measure one of these parameters, if the influence of the other parameters is diminished sufficiently.

A model was developed, which describes the effect of the main parameters on the resonance frequency of micromembrane sensors and which is verified by experiments. The resonance frequency of a micromembrane is calculated with a variational principle. The contribution of the microstructure enters into the calculation as a line mass along the circumference of the micromembrane. It is shown, that the mass of the microstructure has a decisive influence on the oscillations of the sensor, i.e. its resonance frequency and the damping.

The deflection of micromembranes enters into the calculation of the density effect. The measured density ρ_f is a linear function of the square of the oscillation period $1/f^2$ only when the micromembrane is a point source. In general the velocity of sound of the surrounding medium has to be taken into account. The frictional force which arises in viscous media is calculated analytically. The investigation of the viscosity effect shows, that the coupling constant of the density effect depends linearly on the penetration depth of the vibrations into the medium. The linear correlation between the density and the square of the oscillation period as well as the functional dependency between the coupling constant and the penetration depth are verified experimentally. The experiments also show, that the density can be measured up to an accuracy of approx. ± 1 percent, if the viscosity is constant and does not exceed $4 \text{ mm}^2/\text{s}$. Furthermore, the influence of the velocity of sound can be neglected for practical applications.

It is shown, that the resonance frequency of micromembranes depends linearly on the hydrostatic pressure, if the membrane is stretched over a cavity. The resonance frequency also depends on the temperature, when the membrane and the microstructure are made out of different materials.

A design for a micromembrane sensor is proposed, in which the influence of the temperature and the pressure is minimized to a degree where the measurement of the density isn't perturbed anymore. Temperature measurements were carried out up to a temperature of more than 140°C . A pressure of more than 0.6 MPa didn't damage the sensor. Theoretically these sensors can stand a pressure of more than 12.8 MPa .

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Mikromembranschwingungen	7
1.1 Schwingungen im Vakuum	14
1.1.1 Differentialgleichung für Mikromembranen	14
1.1.2 Variationsprinzip und Randbedingungen	16
1.1.3 Aufstellung der Randbedingungen	19
1.1.4 Bestimmung der Versuchsfunktion für das Variationsverfahren	20
1.1.5 Einfluß der Mikrostruktur auf Mikromembran- schwingungen	23
1.2 Schwingungen in flüssigen Medien	27
1.2.1 Differentialgleichung für Schwingungen in Medien	27
1.2.2 Kinetische Energie des Mediums im Nahfeld der Membran . .	28
1.2.3 Berechnung des dynamischen Drucks an der Grenzfläche Membran-Medium	31
1.2.4 Berechnung der kinetischen Energie des Mediums	34
1.2.5 Verifizierung der in 1.2.4 berechneten Integrale anhand von Li- teraturergebnissen	37
1.2.6 Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Dichte des um- gebenden Mediums	39
1.2.7 Einfluß der Wellenlänge auf die Kopplungsgröße χ	45
1.2.8 Schwingungen in viskosen Medien	49
1.2.9 Berechnung der Reibungskraft	50
1.2.10 Einfluß der Viskosität auf die Resonanzfrequenz	52
1.2.11 Energiedissipation	56
1.3 Statischer Druck	61

1.3.1	Einfluß des statischen Drucks auf die Resonanzfrequenz	61
1.3.2	Belastungsgrenzen eines Mikromembransensors	64
1.3.3	Design eines druckstabilisierten Dichtesensors	65
1.4	Einfluß der Temperatur	67
1.4.1	Temperaturverhalten von Titan-Titan-Sensoren	68
2	Herstellung der Mikromembransensoren	71
3	Meßaufbau und Signalauswertung	75
3.1	Meßaufbau	75
3.2	Signalanalyse	76
3.2.1	Analytische Berechnung des Signalspektrums	78
3.2.2	Auflösungsvermögen der Meßapparatur	80
3.2.3	Einfluß der Dämpfung auf die Meßgenauigkeit	83
4	Experimentelle Ergebnisse	85
4.1	Untersuchung des Dichteeffekts	86
4.1.1	Funktionaler Zusammenhang zwischen Dichte und Resonanzfrequenz	87
4.1.2	Abhängigkeit der Kopplungsgröße χ von den Randbedingungen	88
4.1.3	Wellenlängenabhängigkeit der Kopplungsgröße χ	90
4.2	Einfluß der Viskosität	93
4.2.1	Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Viskosität	93
4.2.2	Bestimmung der Schwingungsamplitude ξ_0	98
4.3	Einfluß des hydrostatischen Drucks	101
4.3.1	Sensor ohne druckstabilisierte Mikromembranen	101
4.3.2	Sensor mit druckstabilisierten Mikromembranen	103
4.4	Einfluß der Temperatur	105
4.4.1	Kompensation des Temperatureinflusses	106
4.5	Chemische Resistenz der Sensoren	109
5	Zusammenfassung	111
	Literaturverzeichnis	117

Anhang	119
A Materialdaten	119
B Mathematischer Anhang	119
C Bestimmung der Kopplungsgröße α_T	125
D Abkürzungsverzeichnis	127

Eines Tages ließ sich der König eine neue Krone herstellen. Er glaubte sich aber vom Handwerker betrogen und beauftragte Archimedes herauszufinden, ob die Krone aus purem Gold sei, oder vom Handwerker mit billigen Metallen versetzt worden war. Beim Baden im Zuber kam Archimedes die richtige Idee: Er legte die Krone in ein bis zum Rand mit Wasser gefülltes Gefäß und verglich die austretende Wassermenge mit derjenigen, die durch einen gleich schweren Klumpen Gold verdrängt wurde. Das Ergebnis der Untersuchung hatte äußerst negative Folgen für den Handwerker...

Einleitung

Die Messung der Dichte ist in vielen Fällen ein geeignetes Verfahren, um Informationen über die Zusammensetzung eines Stoffes zu erhalten. Zwar sind die Folgen meist nicht so weitreichend wie im obigen Beispiel, aufgrund vielfältiger Einsatzmöglichkeiten ist die Bestimmung des spezifischen Gewichts eines Stoffes jedoch seit langem ein wichtiger Bestandteil der Qualitätssicherung. In industriellen Fertigungsprozessen wird insbesondere die Dichte flüssiger Medien überwacht, so kontrolliert man z.B. mit ihrer Hilfe in der Brauindustrie den Alkoholgehalt von Bier.

Noch heute findet bei Dichtemessungen das archimedische Prinzip Verwendung, beispielsweise in Aräometern oder in hydrostatischen Waagen [1]. Eine Alternative dazu sind Pyknometer. Dabei handelt es sich um Gefäße bekannten Volumens, die mit der zu messenden Flüssigkeit gefüllt und anschließend gewogen werden. Für kontinuierliche Dichtemessungen sind diese Verfahren aufgrund des hohen Aufwands jedoch nicht geeignet, weshalb sie dort durch andere Verfahren verdrängt wurden.

In Elektrolyten kann die Stoffkonzentration und damit die Dichte anhand der Leitfähigkeit bestimmt werden. Auch die Messung der Intensität radioaktiver Strahlung durch eine Flüssigkeit hindurch ermöglicht die Bestimmung der Dichte, doch wird diese Methode aufgrund der emotionalen Bedenken gegenüber radioaktiven Prozessen immer weniger angewandt. Ein häufig angewandtes Verfahren ist das Biegeschwingungsverfahren, bei dem ein Röhrchen, das mit der zu messenden Flüssigkeit gefüllt ist, in Resonanzschwingungen versetzt wird. Je nach Dichte des Mediums ändert sich die Masse des schwingenden Systems und damit die Resonanzfrequenz des Röhrchens. Ein anderes vergleichsweise neues Verfahren ist die Laufzeitmethode. Hier wird die Dichte mit Hilfe der Schallgeschwindigkeit ermittelt.

Diese Meßverfahren decken bereits ein breites Anwendungsspektrum ab. Der rasche Entwicklungsfortschritt führt jedoch zu immer neuen Anforderungen an die verwendeten Meßinstrumente. Gleichzeitig entstehen Prozessbedingungen, die den Einsatz herkömmlicher Meßgeräte nicht zulassen, beispielweise bei Messungen unter sehr hohen Drücken. Man benötigt also neue Meßverfahren, mit denen die Dichte auch unter solchen extremen Bedingungen gemessen werden kann. Eine interessante Alternative zu den oben genannten Verfahren sind dabei die am Institut für Mikrostrukturtechnik entwickelten Mikromembransensoren [2]. Mit ihnen kann die Dichte auf einfache Art und Weise gemessen werden [3].

Mikromembransensoren bestehen aus einer nur wenige Mikrometer dicken Titanfolie, die über einer Mikrostruktur aufgespannt ist, welche die Titanfolie in einzelne Mikromembranen unterteilt. Diese haben laterale Abmessungen im Bereich von einem Zehntel Millimeter und können je nach Anforderung verschiedene Formen haben. Abbildung 1 zeigt rechteckige Mikromembranen, wie sie z.B. bei Dehnungsmessungen verwendet werden.

Ähnlich wie Trommeln können Mikromembransensoren zu Resonanzschwingungen angeregt werden. Aufgrund ihrer geringen Größe liegt die Resonanzfrequenz der Mikromembranen im Ultraschallbereich. Die Anregung erfolgt in der Regel durch einen breitbandigen Puls im Bereich der Resonanzfrequenz des Sensors. Die so angeregten Mikromembranen geben in der Folgezeit ein Ultraschallsignal bei ihrer Resonanzfrequenz an das umgebende Medium ab. Dieses Signal wird mit demselben Ultraschallkopf, mit dem die Anregung erfolgte, aufgenommen und mit Hilfe eines Computers analysiert. Das typische Signal eines Mikromembransensors ist in Abbildung 2 links zu sehen. Der Anfang des Signals enthält Anteile des anregenden Pulses und das Einschwingen des Sensors. Sobald der anregende Puls abgeklungen ist, kann der Sensor frei ausschlagen. Da er dabei ständig Energie in Form

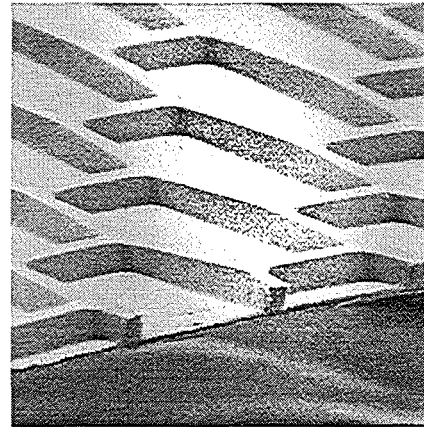


Abbildung 1: REM-Aufnahme eines Schnittes durch eine ca. $2.7 \mu\text{m}$ dicke Titanfolie, die durch eine ca. $10 \mu\text{m}$ hohe Mikrostruktur in einzelne Mikromembranen unterteilt wird.

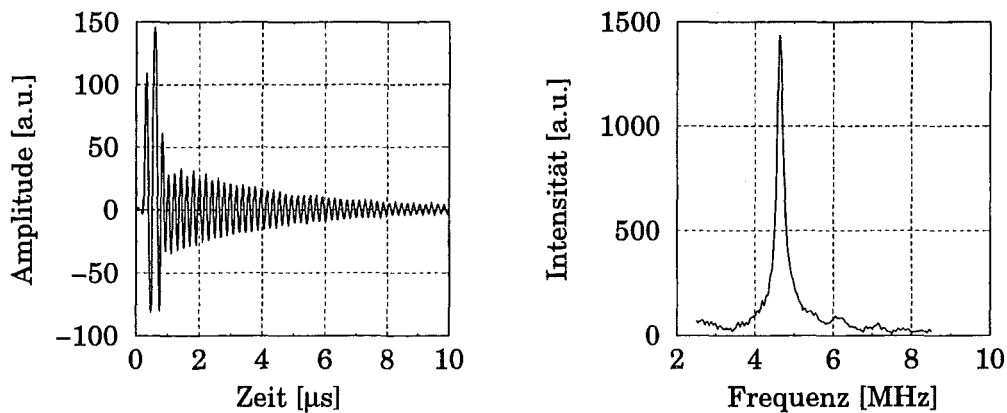


Abbildung 2: Links: Typisches Signal eines Mikromembransensors. Nur der zweite Teil $t \geq 1 \mu\text{s}$ wird für die Auswertung benutzt. Rechts: Spektrum des Ausschwingvorgangs. Die Resonanzfrequenz wird durch das Maximum eindeutig bestimmt

von Schallwellen an seine Umgebung abgibt, entsteht das bekannte Signal eines gedämpften Oszillators. Mit Hilfe einer Fouriertransformation wird das Spektrum dieses Abklingvorgangs berechnet. Ein solches Spektrum ist in Abbildung 2 rechts gezeigt. Die Resonanzfrequenz des Sensors ergibt sich aus dem Maximum des Absolutquadrates der Fouriertransformierten, die Dämpfung aus deren Halbwertsbreite.

Durch die Schwingungen der Mikromembranen wird auch das umgebende Medium in Schwingungen versetzt. Da die Resonanzfrequenz der Mikromembranen von der insgesamt beschleunigten Masse abhängt, kann aus der gemessenen Frequenz die Dichte des Mediums bestimmt werden [3, 4]. Darüber hinaus sind neben der Dichte prinzipiell alle Parameter meßbar, die einen direkten Einfluß auf die Resonanzfrequenz oder die Dämpfung der Schwingungen haben. Zu diesen Parametern gehören auch die Temperatur des umgebenden Mediums und die innere Spannung der Membranen. Der Zusammenhang zwischen diesen Parametern und der Resonanzfrequenz eines Mikromembransensors ist den drei Graphiken in Abbildung 3 zu entnehmen.

Zu den Vorteilen von Mikromembranen gehört, daß sie direkt im Meßmedium angebracht werden können, wodurch kontinuierliche Messungen ohne ständige Probenentnahmen möglich werden. Für die Messung muß keine direkte Kabelverbindung bestehen. Es genügt, wenn das Ultraschallsignal ungestört zwischen Ultraschallkopf und Sensor übertragen werden kann. Von Vorteil ist auch die Unabhängigkeit des Meßprinzips vom umgebenden Medium. Im Fall der Mikromembransensoren bedeutet das, daß die zugrundeliegenden physikalischen Zusammenhänge nur von Medienparametern, nicht aber vom Medium selbst abhängen¹. Es reicht daher, den Sensor vor dem Einsatz in einer beliebigen Flüssigkeit einmalig zu kalibrieren.

¹Im Gegensatz dazu ist z.B. das obengenannte Laufzeitverfahren medienabhängig, da der funktionale Zusammenhang zwischen Schallgeschwindigkeit und Dichte in jedem Medium ein anderer ist

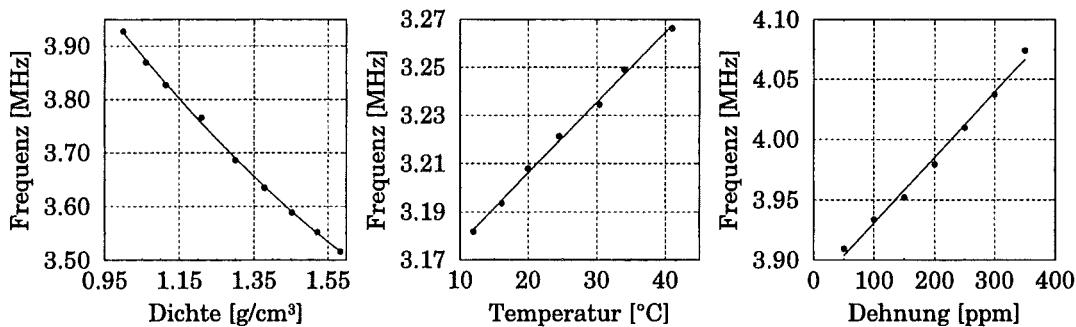


Abbildung 3: Gemessene Abhängigkeit der Resonanzfrequenz eines Mikromembransensors von der Dichte und der Temperatur des Mediums sowie von der Dehnung der Mikromembran (v.l.n.r.).

Bevor Mikromembransensoren routinemäßig zur Messung der Dichte eingesetzt werden können, müssen aber noch gewisse Voraussetzungen erfüllt sein. Die bisher zur Verfügung stehenden mathematischen Modelle berücksichtigen nicht, daß neben den Mikromembranen auch die Mikrostruktur an den Schwingungen beteiligt ist [2, 5]. Wie sich zeigen wird, hängt jedoch insbesondere die Kopplungsgröße des Dichteeffekts stark von der Masse der Mikrostruktur ab. Darüber hinaus wurde bisher vereinfachend davon ausgegangen, daß sich die einzelnen Mikromembranen wie Punktstrahler verhalten [4]. Die laterale Ausdehnung einer Mikromembran liegt jedoch in der Größenordnung der abgestrahlten Wellenlänge, sodaß diese Näherung streng genommen nicht zulässig ist, da die Kopplungsgröße des Dichteeffekts in diesem Fall nicht mehr konstant, sondern abhängig von der Wellenlänge ist. Für eine genauere Dimensionierung und Optimierung des Sensordesigns wird also ein Modell mit höherer Präzision benötigt.

Die in Abbildung 3 gezeigten Graphiken lassen erkennen, daß die Querempfindlichkeiten der Resonanzfrequenz auf andere Parameter die gleiche Größenordnung wie der Dichteeffekt selbst haben können. Die möglichen Querempfindlichkeiten beschränken sich dabei nicht auf die in Abbildung 3 gezeigten Parameter. Auch ein Druckabfall oder die Änderung der Viskosität kann zu einer Verschiebung der Resonanzfrequenz führen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war es daher, ein theoretisches Modell für die Membranschwingungen zu entwickeln, welches neben Membranparametern auch die Masse der Mikrostruktur und akustische Effekte wie die Abhängigkeit des Dichteeffekts von der Wellenlänge berücksichtigt. Darüber hinaus sollten in diesem Modell auch die Reibungskräfte berücksichtigt werden, die insbesondere in Flüssigkeiten mit höheren Viskositäten auftreten. Mit Hilfe der Aussagen dieses Modells sollten die Mikromembransensoren dann dahingehend weiterentwickelt werden, daß sie möglichst empfindlich auf Dichteänderungen reagieren aber gleichzeitig eine geringe Querempfindlichkeit auf Änderungen des Drucks und der Temperatur aufweisen. Darüberhinaus sollten Mikromembransensoren chemisch möglichst inert sein, um einen großen Einsatzbereich zu ermöglichen. Für viskose Medien sollte der mögliche Einsatzbereich experimentell ermittelt werden.

Kapitel 1 befaßt sich mit der theoretischen Modellierung der Schwingungen eines Mikromembransensors. Ausgehend von einer Wellengleichung wird mit Hilfe eines Variationsverfahrens ein Ausdruck für die Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der Auslenkungsform hergeleitet, der die Mikrostruktur in die Randbedingungen des Schwingungsproblems miteinbezieht. Aus diesem Ausdruck erhält man Näherungswerte für die Resonanzfrequenz im Vakuum und die Auslenkungsform der Mikromembransensoren, die mit Ergebnissen aus Finite-Elemente-Simulationen verglichen werden [5].

Der im ersten Abschnitt hergeleitete Variationsausdruck wird im zweiten Abschnitt dieses Kapitels um den Einfluß des umgebenden Mediums erweitert. Dabei zeigt sich, daß für den Spezialfall fest eingespannter Mikromembranen sowie für beliebige radialsymmetrische Schwingungsformen die analytische Berechnung der Kopplungsgröße des Dichteeffekts auch dann möglich ist, wenn Mikromembranen nicht als Punktstrahler betrachtet werden. Ein dritter Abschnitt zeigt, daß der Einfluß der Viskosität mit Hilfe einer Näherungslösung der Navier-Stokes Gleichungen in das theoretische Modell integriert werden kann.

Die Wirkung des hydrostatischen Drucks und der Temperatur auf die Resonanzfrequenz wird in einem weiteren Abschnitt abgeschätzt. Aus diesen Überlegungen wird dann ein Design für einen Sensor abgeleitet, welcher eine vernachlässigbar kleine Druckabhängigkeit zeigt und eine wesentlich niedrigere Temperaturabhängigkeit als bisherige Mikromembransensoren aufweist.

Je nach Anforderung werden die Mikromembransensoren aus unterschiedlichen Materialien hergestellt. Eine kurze Beschreibung des Herstellungsprozesses von Mikromembranen und Mikrostrukturen aus Titan und Polyimid wird in Kapitel 2 gegeben. Kapitel 3 behandelt den verwendeten Meßaufbau sowie die Methoden, mit denen die Signale ausgewertet werden. In diesem Kapitel wird abschließend auch die maximale Meßgenauigkeit diskutiert, die mit Mikromembransensoren erreicht werden kann.

Den in Kapitel 1 berechneten funktionalen Zusammenhängen zwischen der Resonanzfrequenz und den einzelnen Parametern werden in Kapitel 4 die experimentell ermittelten Daten gegenübergestellt. Diese zeigen, daß es möglich ist, druck- und temperaturkompensierte Mikromembransensoren speziell für die Messung der Dichte in flüssigen Medien herzustellen. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Arbeit erfolgt abschließend in Kapitel 5.

Kapitel 1

Mikromembranschwingungen

Die wichtigsten Kenngrößen eines frequenzanalog messenden Sensors sind seine Resonanzfrequenz und die einzelnen Kopplungsgrößen, die angeben, wie stark die Resonanzfrequenz an den jeweiligen Parameter gebunden ist. Im Idealfall sind diese Parameter konstant oder die Kopplung ist für alle bis auf den zu messenden Parameter so klein, sodaß bei einer Messung keine Querempfindlichkeiten berücksichtigt werden müssen. Gerade bei Dichtemessungen in industriellen Prozessen muß aber mit gravierenden Schwankungen diverser Parameter gerechnet werden, beispielsweise mit Druckwellen, die durch das Öffnen von Ventilen entstehen. Es ist deshalb wichtig, den funktionalen Zusammenhang zwischen der Dichte und der Resonanzfrequenz eines Mikromembransensors zu kennen, wenn sämtliche einflussnehmenden Parameter berücksichtigt werden.

Um die folgenden Betrachtungen zu motivieren, ist es nötig, ein wenig auf die Ergebnisse vorzugreifen. Es stellt sich heraus, daß Schwingungen von Mikromembransensoren in einem engen Zusammenhang mit Schwingungen von Platten stehen. Lamb hat in einer vielzitierten Veröffentlichung den funktionalen Zusammenhang zwischen der Dichte des Mediums und der Resonanzfrequenz einer an ihrem Rand fest eingespannten, kreisförmigen Platte berechnet, die auf einer Seite mit einem flüssigen Medium in Kontakt steht [4]. Dieser Zusammenhang kann als

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + \chi \cdot \rho_f} \quad \text{bzw.} \quad \rho_f = \frac{1}{\chi} \left[\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right] \quad (1.1)$$

geschrieben werden. Dabei ist ω die gemessene Resonanzfrequenz, ω_0 die Frequenz des unbelasteten Sensors im Vakuum, ρ_f die Dichte des umgebenden Mediums und χ eine geometrieabhängige Konstante, die vom Radius¹, der Dicke und von der Auslenkungsform der Platte abhängt. Sie stellt die Größe der Kopplung zwischen Dichte und Resonanzfrequenz des Mikromembransensors dar. Aus dem zweiten Ausdruck ist ersichtlich, daß ein linearer Zusammenhang zwischen ρ_f und dem Quadrat der Schwingungsdauer besteht. Die Dichte kann deshalb auf einfache Weise mit Hilfe der Resonanzfrequenz des Mikromembransensors bestimmt werden.

¹Bei rechteckigen Platten hängt χ von der Länge der Kanten ab.

Die Verhältnisse ändern sich erheblich, wenn die Parameter des umgebenden Mediums Schwankungen unterworfen sind. Die Kopplungsgröße χ ist tatsächlich eine Funktion der Resonanzfrequenz ω und der Schallgeschwindigkeit c sowie der Auslenkungsform $u(r)^2$ des Sensors. ω_0 hängt von der inneren Spannung σ_0 und ebenfalls von $u(r)$ ab [5]. Wenn die Schwingungen in einem Medium erfolgen, ergibt sich wiederum eine Abhängigkeit der inneren Spannung von der Temperatur T und vom hydrostatischen Druck p_s . Berücksichtigt man schließlich noch einen Korrekturterm, der durch die Viskosität des umgebenden Mediums hervorgerufen wird, dann kann Gl. (1.1) durch

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2(\sigma_0, u)}{1 + g(\nu)\rho_f + \chi(\omega, c, u)\rho_f} = \mathcal{F}(\omega_0, \rho_f, c, p_s, T, u, \nu) = \mathcal{F}(x_i) \quad (1.2)$$

ausgedrückt werden. Im Prinzip genügt es, in Gleichung (1.2) die Kopplungsgrößen sämtlicher Parameter zu bestimmen, die die Frequenz beeinflussen. Bei einer Dichtemessung müssen dann nur noch die Resonanzfrequenz und diejenigen Parameter gemessen werden, für die der Sensor eine Querempfindlichkeit aufweist. Ein solches Vorgehen birgt jedoch einen entscheidenden Nachteil: Die auftretenden Querempfindlichkeiten führen zu einem hohen Kalibrier- und Meßaufwand für jeden einzelnen Sensor, da außer der Dichte alle übrigen Parameter gemessen werden müssen.

Dieser Meßaufwand und der damit verbundene Meßfehler kann vermieden werden, wenn eine Änderung der Resonanzfrequenz allein durch eine Dichteänderung hervorgerufen wird. Mit Hilfe des totalen Differentials von Gleichung (1.2)

$$d\omega^2 = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c} dc + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_s} dp_s + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} dT + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu} d\nu + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho_f} d\rho_f \quad (1.3)$$

ergibt sich demnach an speziell für die Dichtemessung ausgelegte Mikromembransensoren die Forderung

$$\sum_{x_i, x_i \neq \rho_f} \frac{\partial \mathcal{F}(x_i)}{\partial x_i} dx_i \ll \frac{\partial \mathcal{F}(\rho_f)}{\partial \rho_f} d\rho_f. \quad (1.4)$$

Wie sich zeigen wird, ist diese Forderung nur teilweise durch eine geeignete Skalierung der Mikromembransensoren erfüllbar. Manche Querempfindlichkeiten lassen sich nur durch eine geeignete Konstruktion eliminieren, andere können wiederum nur dann vernachlässigt werden, wenn der jeweilige Parameter als konstant angenommen werden kann ($dx_i = 0$).

Erst das Verständnis der zugrundeliegenden Zusammenhänge ermöglicht die Dimensionierung von Mikromembransensoren, die bei einer hohen Dichteempfindlichkeit nur sehr geringe Querempfindlichkeiten auf andere Parameter aufweisen, und deshalb (1.4) erfüllen. Gegenstand dieses Kapitels ist die theoretische Beschreibung der funktionalen Abhängigkeiten zwischen der Resonanzfrequenz eines Mikromembransensors und den Parametern, die die Resonanzfrequenz beeinflussen.

²Auch die Schwingungsform eines Sensors hängt mit der Dichte zusammen.

Die in der Einleitung gezeigte Abbildung einer mikrostrukturierten Titanfolie zeigt, daß solche Sensoren eine vergleichsweise komplexe Struktur besitzen. Die Modellierung des gesamten Sensors ist daher nicht ohne weiteres möglich, es muß versucht werden, die Schwingungen der Mikromembransensoren mit einem einfacheren Modell zu charakterisieren. Zunächst wird gezeigt, daß es genügt, statt der Schwingung des gesamten Sensors die Schwingung einer einzelnen Mikromembran zu betrachten, deren Resonanzfrequenz eng an den sogenannten effektiven Radius und die Masse der tragenden Mikrostruktur gekoppelt ist.

Zuerst werden die Schwingungen einer unbelasteten Mikromembran betrachtet, bei der keinerlei Zusatzeffekte berücksichtigt werden müssen. Anhand dieses Beispiels wird das hier benutzte Variationsverfahren von Rayleigh-Ritz erläutert und eine Basisgleichung für die Resonanzfrequenz hergeleitet. Die einzelnen Effekte, wie der Einfluß der Mikrostruktur, der Dichte oder der Viskosität des umgebenden Mediums, werden dann in einzelnen Schritten der Basisgleichung hinzugefügt, sodaß am Ende der vollständige funktionale Zusammenhang zwischen der Resonanzfrequenz und den einflußnehmenden Parametern steht.

Mikromembranen und ihre Schwingungsform

Makroskopisch betrachtet besteht der hier untersuchte Mikromembransensor aus einer ca. $2.7 \mu\text{m}$ dünnen Titanmembran mit einem Radius a von ca. 5 mm und einer inneren Spannung σ_0 von ca. 200 MPa , die von einem metallenen Zylinder gehalten wird. Da die Dicke h_m der Membran klein ist im Vergleich zu ihrem Radius, können auftretende Biegemomente vernachlässigt werden. Wenn man außerdem noch den Einfluß der Mikrostruktur vernachlässigt, dann ist die Resonanzfrequenz ω_0 im Vakuum näherungsweise durch

$$\omega_0 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{20\sigma_0}{3\rho_m}} \quad (1.5)$$

gegeben [6]. Bei der oben angegebenen Titanmembran ergibt sich für $f_0 = \omega_0/2\pi$ ungefähr ein Wert von ca. 17.3 kHz . Wäre die Titanmembran von einem Medium umgeben, dann würde die Resonanzfrequenz sinken, da die insgesamt zu beschleunigende Masse größer wird. Wie sich zeigt, ist die zu beschleunigende Masse des umgebenden Mediums proportional zu a/h . Die resultierende Resonanzfrequenz bei Anwesenheit eines Mediums wäre deshalb wesentlich kleiner als 17.3 kHz [4]. Typische Mikromembransensoren haben jedoch Resonanzfrequenzen in der Gegend von einigen MHz. Die in diesem Bereich gemessenen Frequenzen können daher nur von Oberschwingungen der makroskopischen Titanmembran herrühren.

Aufgrund der Komplexität der physikalischen Zusammenhänge können Frequenzen von Schwingungen höherer Ordnung analytisch nicht exakt berechnet werden. Als Alternative bietet sich das Ritz'sche Variationsverfahren an [7]. Dieses Verfahren stellt jedoch nur bei Grundschwingungen eine einfache Methode dar und ist bei Schwingungen höherer Ordnung nicht mehr praktikabel [8]. Daß es dennoch angewandt werden kann, liegt an der Möglichkeit, das Problem der Berechnung von

Oberschwingungen auf die Berechnung der Grundschiwingung einer Mikromembran zu reduzieren.

Das in diesem Kapitel entwickelte Modell bezieht sich ausschließlich auf Schwingungen einer einzelnen, kreisförmigen Mikromembran. Die Resonanzfrequenz einer solchen Mikromembran wird maßgeblich durch die Masse der Mikrostruktur und den sogenannten effektiven Radius bestimmt. Dieser Radius kennzeichnet den Bereich, innerhalb dessen die Mikromembran bei ihren Schwingungen verformt wird.

Betrachtet man das Massenverhältnis \mathcal{M} von tragender Mikrostruktur m_s und Titanfolie m_m

$$\mathcal{M} = \frac{m_s}{m_m}, \quad (1.6)$$

so stellt sich heraus, daß die Masse der Mikrostruktur bei typischen Sensoren keineswegs groß ist im Verhältnis zur Masse der Titanfolie. Bei Mikromembranen aus Titan, die einen Radius von 30 μm haben und durch eine ca. 10 μm hohe Mikrostruktur gehalten werden, wie sie in Abbildung 1.1 dargestellt ist ($d=10 \mu\text{m}$), ist die Mikrostruktur nur ca. 4 mal schwerer als die Mikromembran. Man kann daher nicht davon ausgehen, daß die Titanfolie nur in den freigespannten Bereichen schwingt, vielmehr muß angenommen werden, daß die Mikrostruktur den Schwingungen der Titanfolie folgt. Diese Annahme wird durch Finite-Elemente-Rechnungen bestätigt [5].

Die gemessene Schwingung entspricht dem freien Ausschlagen des Sensors ohne äußere anregende Kraft, sodaß die beobachtete Frequenz einer der möglichen Schwingungsmoden des Sensors zuzuordnen ist. Würden Mikrostruktur und Titanfolie phasengleich schwingen, entspräche dies der Grundschiwingung einer makroskopischen Membran mit Radius 5mm mit einer Frequenz im Megahertzbereich, was physikalisch nicht möglich ist. Die Anregung des Sensors durch eine ebene Welle führt vielmehr zu einem gleichphasigen Schwingen der freigespannten Bereiche. Als einzige Möglichkeit bleibt deshalb nur das gegenphasige Schwingen von Mikrostruktur und freigespannten Bereichen übrig.

Wenn aber die Titanfolie in einem freigespannten Bereich gleichphasig zu den anderen freigespannten Bereichen schwingt und diese in ihrer Gesamtheit gegenphasig zu der Mikrostruktur, dann reicht es, in erster Näherung die Schwingung eines dieser freigespannten Bereiche zu untersuchen. Diese Bereiche werden im folgenden Mikromembranen genannt.

Die Schwingungen eines Mikromembransensors werden durch einen Puls angeregt, der nur Frequenzanteile im Bereich der Resonanzfrequenz einer einzelnen Mikromembran besitzt. Man kann daher davon ausgehen, daß diese Mikromembranen selbst nicht zu Oberschwingungen angeregt werden. Die Resonanzfrequenz von Mikromembranen kann daher mit Hilfe des Ritz'schen Variationsverfahrens berechnet werden.

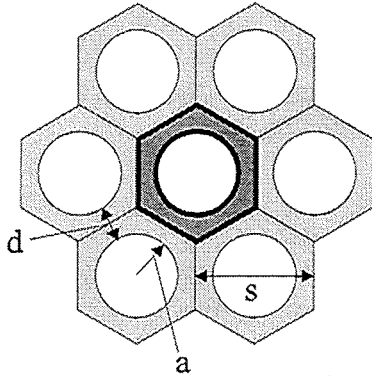


Abbildung 1.1: Typ "H". Die Masse der Mikrostruktur ist durch das dunkle Sechseck in der Mitte gekennzeichnet, aus dem ein kreisförmiger Bereich entfernt wurde.

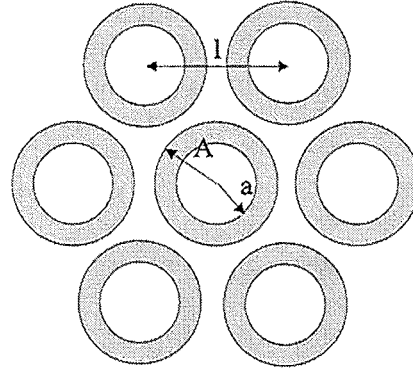


Abbildung 1.2: Typ "R". Die Mikrostrukturmasse ist durch die Masse eines Kreiszylinders gegeben.

Berechnung der Mikrostrukturmasse

Wenn die Masse der Mikrostruktur berücksichtigt werden soll, dann muß auch die Masse der Mikrostruktur *pro* Mikromembran bekannt sein. Da die Experimente mit verschiedenen Mikrostrukturdesigns durchgeführt wurden, sei an dieser Stelle kurz erläutert, wie diese Masse bei den zwei verwendeten Mikrostrukturtypen berechnet wird.

In beiden Fällen sind die kreisförmigen Mikromembranen hexagonal angeordnet. Im ersten Fall besteht die Mikrostruktur aus einer mehrere Mikrometer dicken Schicht aus Titan, Nickel oder Polyimid, aus der kreisförmige Bereiche herausgelöst sind, welche die Mikromembranen definieren. Die Abbildung einer solchen Mikrostruktur, die im weiteren mit Typ "H" bezeichnet wird, ist in Abbildung 1.1 dargestellt. Sensoren dieses Typs werden durch den Radius a , den Abstand d und die Höhe der Mikrostruktur h_{ms} gekennzeichnet. Die vollständige Kennung eines solchen Sensors lautet dann "H($a;d;h_{ms}$)".

Der Bereich einer einzelnen Mikromembran ist durch einen Kreis gekennzeichnet. Die Mikrostruktur pro Membran ergibt sich durch ein Sechseck mit der Schlüsselweite s , das die Mikromembran umschließt. Die Masse eines solchen Gebildes ist

$$m_s = h_s \rho_s \left[\frac{1}{2} \sqrt{3} s^2 - \pi a^2 \right], \quad (1.7)$$

wobei h_s die Höhe der Mikrostruktur und ρ_s die Dichte des Materials ist. Setzt man d als den geringsten Abstand zweier Kreislinien in dieser Mikrostruktur, dann ist $s/2 = a + d/2$. Die Masse der Mikrostruktur ergibt sich dann zu

$$m_s = h_s \rho_s \left[2\sqrt{3} (a + d/2)^2 - \pi a^2 \right]. \quad (1.8)$$

Beim zweiten Sensordesign "R" besteht die Mikrostruktur aus einzeln stehenden Hohlzylindern, wie sie in Abbildung 1.2 zu sehen sind. Diese Art der Mikrostruktur trägt im folgenden die Bezeichnung "R". Die Masse eines solchen Zylinders der Höhe h_s , mit Innenradius a und Außenradius A beträgt

$$m_{rs} = \pi h_s \rho_s (A^2 - a^2). \quad (1.9)$$

Sensoren dieses Typs werden im weiteren durch die Abkürzung "R(a;A;h_{ms})" gekennzeichnet. Dabei ist a der Radius, A der Außenradius eines Kreisrings und h_{ms} die Höhe der Mikrostruktur.

Bei Sensoren des Typs "R" befinden sich zwischen zwei Kreiszyllindern Bereiche, in denen die Titanfolie frei schwingen kann. Der Abstand $l - 2A$ zwischen zwei Kreisringen liegt zwischen 5-20 μm und ist damit wesentlich kleiner als der typische Durchmesser einer Mikromembran, der 100-120 μm beträgt. Die schwingenden Bereiche sind daher so klein, daß ihre Resonanzfrequenz weit oberhalb der Resonanzfrequenz der Mikromembranen liegt und von der Meßapparatur nicht erfaßt werden. Da außerdem die Kreisringe der Verformung durch die Mikromembranen entgegenwirken, kann der Einfluß des Parameters l in erster Näherung vernachlässigt werden und wird deshalb in den folgenden Rechnungen nicht berücksichtigt.

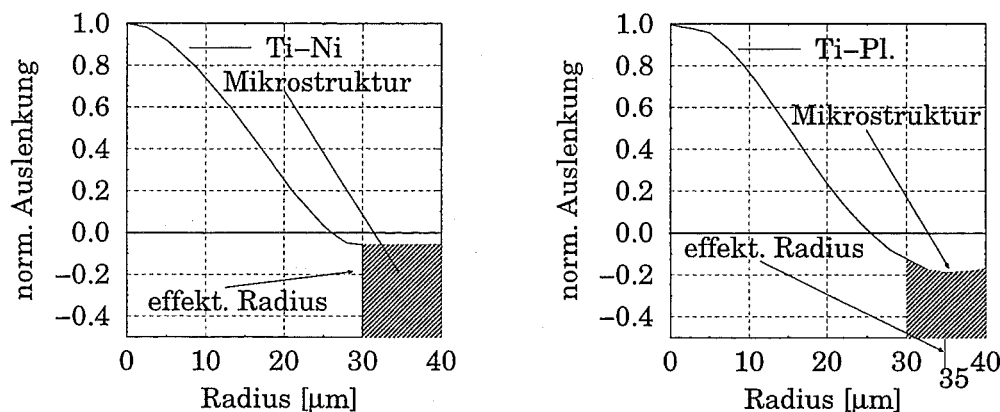


Abbildung 1.3: Auslenkung einer Mikromembran aus Titan. Die Mikrostruktur ist durch den schraffierten Bereich gekennzeichnet. Links: Mikrostruktur aus Nickel (Typ H(30;10;10)). Rechts: Mikrostruktur aus Polyimid (Typ H(30;10;10)). Der effektive Radius a_{eff} ist bei Titan-Polyimid-Sensoren größer und ragt in den Bereich der Mikrostruktur hinein.

Der effektive Radius von Mikromembranen

Es wurden Sensoren mit Mikrostrukturen aus Nickel, Titan oder Polyimid hergestellt, sodaß unterschiedliche Materialkombinationen möglich sind. Ein Titan-Nickel-Sensor ist ein Sensor, bei dem die Membran aus Titan und die Mikrostruktur

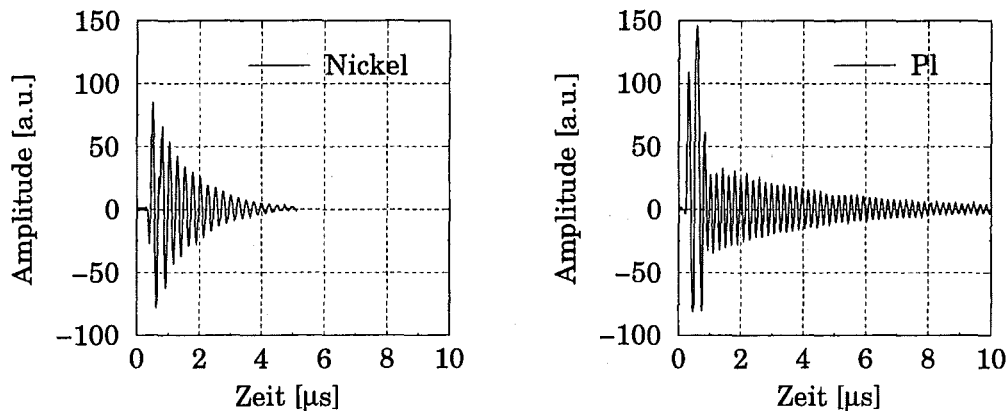


Abbildung 1.4: Signal zweier Sensoren, deren Mikrostruktur aus Nickel (links, Typ H(30;10;10)) und Polyimid (rechts, Typ H(30;10;10)) besteht.

aus Nickel ist. Bei einem Titan-Titan-Sensor sind Membran und Mikrostruktur aus Titan. Ein Titan-Polyimid-Sensor besitzt eine Titanfolie und eine Mikrostruktur aus Polyimid.

Aufgrund der unterschiedlichen Materialien der Mikrostrukturen wirken sich Verformungen der Mikromembran unterschiedlich stark auf die Mikrostruktur aus. Abbildung 1.3 zeigt für identisch geformte Mikrostrukturen, aber unterschiedliche Mikrostrukturmaterialien einen Ausschnitt der Membranauslenkung, welche durch ein Finite-Elemente-Modell berechnet wurde [5].

Der wesentliche Unterschied zwischen den dargestellten Auslenkungsformen besteht in der Auslenkung der Mikromembran bei $r = a_{\text{eff}}$ sowie in der Verformung der Mikrostruktur. Aufgrund der geringeren Dichte von Polyimid im Vergleich zu Nickel stellt die Mikrostruktur aus Polyimid eine wesentlich kleinere träge Masse dar und nimmt deshalb mehr an den Schwingungen teil. Die geringe Biegesteifigkeit von Polyimid ermöglicht eine Verformung der Mikromembran auch in den Bereichen, in denen sie von der Mikrostruktur gestützt wird. Mikrostrukturen aus Nickel werden hingegen kaum verformt, da Nickel wesentlich steifer ist als Polyimid.

Unterschiedliche Materialien machen sich auch im Schwingungsverhalten der Sensoren bemerkbar. Abbildung 1.4 zeigt zwei Signale von Mikromembransensoren. Das Signal des Titan-Polyimid-Sensors (vgl. Abb. 1.4, rechts), dessen Auslenkungsform in Abb. 1.3 rechts zu sehen ist, hat eine wesentlich kleinere Dämpfung als das Signal des Titan-Nickel-Sensors, welches in Abbildung 1.4 links zu sehen ist.

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, daß die Resonanzfrequenz von der potentiellen Energie abhängt, die durch die Verformung einer Mikromembran entsteht. Wie bereits erläutert wurde, stimmt der Bereich, in dem diese Verformung geschieht, nicht immer mit den Abmessungen überein, die durch die Mikrostruktur definiert werden. Dies ist nur dann der Fall, wenn die Mikrostruktur steif ist im Verhältnis zur Mikromembran und deshalb nicht verformt wird.

Für die Berechnungen wird nicht der durch die Abmessungen definierte Radius benötigt, sondern der Radius der Kreisfläche, innerhalb derer die Mikromembran verformt wird. Dieser wird als *effektiver Radius* bezeichnet und ist im folgenden immer gemeint, wenn vom Radius die Rede ist.

Der effektive Radius a_{eff} eines Titan-Polyimid-Sensors ist bei einem Sensor des Typs "H" in guter Näherung durch $a + d/2$ gegeben, bzw. durch A bei Typ "R". Bei einem Titan-Nickel- bzw. Titan-Titan-Sensor ist der effektive Radius durch die Abmessungen der Mikrostruktur gegeben. Hier ist bei beiden Mikrostrukturdesigns $a_{\text{eff}} = a$. In diesem Fall fehlt ein Teil der Masse der Mikromembran in den Berechnungen, denn auch der Teil der Mikromembran, der über der Mikrostruktur liegt, wird ja bewegt. Dies kann jedoch durch eine entsprechende Höhe der Mikrostruktur ausgeglichen werden.

1.1 Schwingungen im Vakuum

Wenn Schwingungen eines Sensors betrachtet werden, ist es zunächst einmal interessant, wie sich der Sensor im unbelasteten Zustand, d.h. ohne Einwirkung äußerer Kräfte verhält. Ein erster Schritt ist daher die Herleitung einer Grundgleichung für die Resonanzfrequenz eines Mikromembransensors im Vakuum, aus der wesentliche Eigenschaften abgelesen werden können.

1.1.1 Differentialgleichung für Mikromembranen

Mikromembransensoren erhalten, bedingt durch den Herstellungsprozeß, eine innere Vorspannung σ_0 , die zu der rücktreibenden Kraft beiträgt. Bei der Berechnung dieser Kraft müssen zusätzlich auftretende Biegemomente berücksichtigt werden, da der Radius a einer typischen Mikromembran nur ca. 20 mal größer ist als deren Dicke h_m ¹. Bei einer Mikromembran handelt es sich deshalb nicht um eine reine Membran, sondern um eine dünne Platte, die eine innere Spannung besitzt.

Wenn außerdem äußere Einflüsse wie Druck, Temperatur oder die Belastung durch ein äußeres Medium in das Modell mit einbezogen werden sollen, wird die Differentialgleichung des Systems so komplex, daß eine analytische Lösung nicht mehr möglich ist. Für die Berechnung der Resonanzfrequenz wird aus diesem Grund das Rayleigh-Ritz'sche Variationsverfahren angewandt, welches es ermöglicht, einen oberen Schätzwert für die Resonanzfrequenz der Grundschwingung einer Mikromembran anzugeben.

Die Differentialgleichung für die Auslenkung $\psi(r, t)$ einer kreisförmigen dünnen Platte der Dicke h_m , die innere Spannungen aufweist und nicht von einer äußeren Kraft angetrieben wird, ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht zwischen rücktreibenden Kräften aufgrund von Biegemomenten bzw. inneren Spannung und der

¹Wenn $h/a \ll 1$ ist, können Biegemomente vernachlässigt werden [9].

auf tretenden Trägheitskraft [9, 8]. Sie lautet

$$D \Delta_{r,\vartheta}^2 \psi - h_m \sigma_0 \Delta_{r,\vartheta} \psi + \rho_m h_m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.10)$$

In dieser Gleichung ist $\Delta_{r,\vartheta}$ der Laplace-Operator in Polarkoordinaten und

$$D = \frac{E h_m^3}{12(1 - \nu_p^2)} \quad (1.11)$$

die Biegesteifigkeit der Membran. E bezeichnet den E-Modul, h_m die Dicke der Membran, ν_p die Querkontraktionszahl, σ_0 die Vorspannung und ρ_m die Dichte des Membranmaterials. $\psi(r, t)$ ist die Auslenkung der Mikromembran. Für $\psi(r, t)$ wird durchweg der Separationsansatz

$$\psi(r, t) = u(r, \vartheta) e^{-i\omega t} = \xi_0 u^*(r, \vartheta) e^{-i\omega t} \quad (1.12)$$

gemacht, wobei ξ_0 die maximale Amplitude der Schwingungen ist. Da nur die Grundschwingung der Membran berücksichtigt werden soll, muß $u(r)$ radialsymmetrisch sein, sodaß

$$\frac{\partial^n u}{\partial \vartheta^n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.13)$$

gilt. Der Laplace-Operator $\Delta_{r,\vartheta}$ vereinfacht sich in diesem Fall zu

$$\Delta_{r,\vartheta} \stackrel{(1.13)}{\rightarrow} \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (1.14)$$

Er wird im folgenden als Δ abgekürzt. Setzt man (1.12) in Gleichung (1.10) ein und dividiert durch $e^{-i\omega t}$, bleibt

$$D \Delta^2 u - h_m \sigma_0 \Delta u - \rho_m h_m \omega^2 u = 0 \quad (1.15)$$

stehen. Multipliziert man jetzt beide Seiten mit $u(r)$ und integriert über die Fläche einer Mikromembran, erhält man

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \left[D (\Delta^2 u) u - h_m \sigma_0 (\Delta u) u - \rho_m h_m \omega^2 u^2 \right] r dr d\vartheta = 0 \quad (1.16)$$

Auflösen nach ω^2 überführt (1.16) in

$$\omega^2 = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^a \left[D (\Delta^2 u) u - h_m \sigma_0 (\Delta u) u \right] r dr d\vartheta}{\rho_m h_m \int_0^{2\pi} \int_0^a u^2 r dr d\vartheta} \quad (1.17)$$

Man kann zeigen, daß Gl. (1.17) einen Variationsausdruck für ω^2 darstellt. Ist die Auslenkungsform $u(r)$ bekannt, dann kann mit seiner Hilfe die Resonanzfrequenz berechnet werden. Die reale Auslenkungsform $u(r)$ zeichnet sich aber auch dadurch aus, daß sie, in Gleichung (1.17) eingesetzt, die minimale Resonanzfrequenz ergibt [10, 7]. Aus diesem Grund ist es möglich, $u(r)$ und damit auch ω durch eine Variation von (1.17) zu gewinnen.

1.1.2 Variationsprinzip und Randbedingungen

Die Gleichung (1.17) geht zunächst davon aus, daß die Form der Auslenkung bekannt ist, beispielsweise nach Lösung der entsprechenden Differentialgleichung. Aufgrund der Kompliziertheit der Differentialgleichung muß in unserem Fall die Auslenkungsform und die entsprechende Resonanzfrequenz auf einem anderen Weg bestimmt werden.

Bevor die Variation durchgeführt werden kann, müssen die Randbedingungen bekannt sein, da beim Ritz'schen Variationsverfahren nur solche Funktionen als Versuchsfunktionen zugelassen sind, die zumindest die geometrischen Randbedingungen erfüllen [7, 10].

In vielen Fällen ist nicht die Differentialgleichung eines Systems bekannt, wohl aber kennt man Ausdrücke für die kinetische Energie T und die potentielle Energie V des Systems. Damit kennt man auch die Lagrange-Funktion $L = T - V$ [11]. Fordert man, daß die Variation von L gleich null ist, kann man die Differentialgleichung des Systems und die Randbedingungen herleiten.

Bei Mikromembranen ist zwar die Differentialgleichung bekannt, nicht aber die Randbedingungen, sodaß der umgekehrte Weg beschritten werden muß. Im folgenden Abschnitt wird aus der Differentialgleichung ein Funktional berechnet, von dem dann durch Variation gezeigt wird, daß dieses Funktional tatsächlich die Lagrange-Funktion darstellt. Auf diese Weise werden die Randbedingungen und ein Variationsprinzip für die Resonanzfrequenz ω gewonnen. Dabei ist $\delta\omega^2 = 0$ äquivalent zu der Forderung $\delta L \stackrel{!}{=} 0$.

Berechnung der Lagrange-Funktion

Ausgehend von GL. (1.16) erhält man durch zweimalige partielle Integration, die im mathematischen Anhang ausführlich dargestellt ist, die Beziehung

$$\mathcal{G} = \underbrace{2\pi \int_0^a \left[D(\Delta u)^2 + h_m \sigma_0 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - h_m \rho_m \omega^2 u^2 \right] r dr}_{L = 2\pi L'} \quad (1.18)$$

$$+ 2\pi \left[\left(D r \frac{\partial}{\partial r} \Delta u \right) - \left(h_m \sigma_0 r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] u \Big|_0^a - 2\pi \left(D r \Delta u \right) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_0^a = 0.$$

Der Faktor 2π entsteht durch die Annahme, daß die Grundschiwingung radialsymmetrisch ist und daher nicht von ϑ abhängt. Die rechte Seite von (1.18) sieht der Lagrange-Funktion und den Randbedingungen sehr ähnlich, man weiß aber zunächst nicht, ob man diese Terme tatsächlich auch damit identifizieren darf.

Es sei nun angenommen, daß das Integral in (1.18) einen Ausdruck für die Lagrange-Funktion L darstellt. Aus der Forderung $\delta L' = 0$ sollte man also die Differentialglei-

chung und die Randbedingungen des Systems erhalten². $\delta L' \stackrel{!}{=} 0$ ergibt

$$\delta L' = \delta \int_0^a \left[D(\Delta u)^2 + h_m \sigma_0 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - h_m \rho_m \omega^2 u^2 \right] r dr \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.19)$$

Die Variation kann in das Integral hineingezogen werden, sodaß sich

$$\delta L' = \int_0^a \left[2D\Delta\delta u \cdot \Delta u + 2h_m \sigma_0 \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial r} - h_m \rho_m \delta (\omega^2 u^2) \right] r dr = 0 \quad (1.20)$$

ergibt. Fügt man in (1.20) die Forderung $\delta \omega^2 \stackrel{!}{=} 0$ ein, die ein Variationsprinzip für die Resonanzfrequenz ω darstellt und dividiert noch durch den Faktor 2, erhält man

$$\frac{1}{2} \delta L' = \int_0^a \left[D\Delta\delta u \cdot \Delta u + h_m \sigma_0 \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial r} - h_m \rho_m \omega^2 u \cdot \delta u \right] r dr = 0. \quad (1.21)$$

Die ersten beiden Summanden können nun wieder durch partielle Integration gelöst werden. Dies ist ebenfalls im mathematischen Anhang ausführlich dargestellt. Im einzelnen ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^a D\Delta u \cdot \Delta(\delta u) r dr &= \int_0^a D(\Delta^2 u) \cdot \delta u r dr \\ &\quad - \left(D r \frac{\partial}{\partial r} \Delta u \right) \delta u \Big|_0^a + (D r \Delta u) \frac{\partial \delta u}{\partial r} \Big|_0^a \end{aligned} \quad (1.22)$$

Für den zweiten Summanden in (1.21) erhält man

$$\int_0^a h_m \sigma_0 \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial r} r dr = - \int_0^a h_m \sigma_0 \Delta u \cdot \delta u r dr + \left(h_m \sigma_0 r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \delta u \Big|_0^a \quad (1.23)$$

Mit (1.22) und (1.23) folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta L' &= \int_0^a \underbrace{\left[D(\Delta^2 u) - h_m \sigma_0 \Delta u - h_m \rho_m \omega^2 u \right]}_{\text{DGL des Systems}} \delta u r dr \\ &\quad + \underbrace{\left[\left(h_m \sigma_0 r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \left(D r \frac{\partial}{\partial r} \Delta u \right) \right]}_{\text{dynamisch. Randbed.}} \delta u \Big|_0^a + \underbrace{(D r \Delta u)}_{\text{dyn. Rbd.}} \frac{\partial \delta u}{\partial r} \Big|_0^a \end{aligned} \quad (1.24)$$

Da diese Gleichung für beliebige Variationen von $u(r)$ gelten soll, müssen alle Summanden für sich null sein. Man erhält daraus die Differentialgleichung des Systems und die Randbedingungen. Die Randbedingungen sind Kombinationen aus den dynamischen Randbedingungen und den geometrischen Randbedingungen δu bzw. $\partial \delta u / \partial r$. Die dynamischen Randbedingungen hängen von der Querkraft und

²Der konstante Faktor 2π hat keinen Einfluß auf das Ergebnis

den Biegemomenten am Rand der Mikromembran ab. Die geometrischen Randbedingungen δu und $\partial \delta u / \partial r$ müssen dieselben Bedingungen wie $u(r)$ am Rand der Mikromembran erfüllen. Je nachdem, wie die gegebenen geometrischen Randbedingungen aussehen, ergeben sich unterschiedliche Kombinationen beider Arten von Randbedingungen.

Ein Blick auf die Randterme in (1.24) zeigt, daß diese identisch mit den Randtermen von (1.18) sind, da ja die Variation δu und $\partial \delta u / \partial r$ dieselben Randbedingungen wie $u(r)$ erfüllen. Es ist also möglich, aus dem Ausdruck (1.20) durch Variation die Differentialgleichung und die Randbedingungen herzuleiten, wenn vorausgesetzt wird, daß die Variation von ω^2 gleich null ist. Die Gültigkeit des Variationsprinzips $\delta \omega^2 = 0$ und dessen Äquivalenz zu $\delta L = 0$ wird in Lehrbüchern der mathematischen Physik bewiesen, z.B. in [10].

Variationsprinzip für die Resonanzfrequenz ω

Wenn die Randterme null sind, erhält man aus Gleichung (1.18) den Rayleigh'schen Quotienten

$$\omega^2 = \frac{\int_0^a \left[D(\Delta^2 u) + h_m \sigma_0 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right] r \, dr}{\int_0^a h_m \rho_m u^2 r \, dr} \quad (1.25)$$

Von diesem Ausdruck weiß man nun, daß seine Variation gleich null ist. Diese Gleichung wird natürlich durch die tatsächliche Auslenkungsform erfüllt, da sie die Differentialgleichung und die gegebenen Randbedingungen löst. Es sind aber noch andere Auslenkungsformen denkbar. Setzt man eine Funktion für $u(r)$ an, die nur wenig von der tatsächlichen Auslenkungsform abweicht und die Randbedingungen erfüllt, dann ergeben sich Werte für ω^2 , die sich nur wenig vom tatsächlichen Wert unterscheiden. Hängt die Form dieser Funktion von Parametern $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ ab, dann ist ω^2 ebenfalls von diesen Parametern abhängig und es gilt

$$\omega^2 = f(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \quad (1.26)$$

Extremal wird ω^2 genau für diejenigen λ_i , für die $u(r)$ die Differentialgleichung löst. Da ω^2 ja ein Funktional dieser Parameter ist, können die extremalen Parameter einfach gefunden werden, in dem man

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial \lambda_i} = 0 \quad i = 0 \dots n \quad (1.27)$$

verlangt. Diese Bedingung führt auf n Gleichungen, aus denen die Parameter λ_i bestimmt werden können.

Zu den Versuchsfunktionen $u(r)$ sind noch einige weiterführende Bemerkungen nötig. Zunächst ist es notwendig, daß die $u(r)$ zumindest die geometrischen Randbedingungen erfüllen. Wie sich zeigen wird, muß die Ableitung der Auslenkung am

Rand gleich null sein, man erhält also homogene Neumann'sche Randbedingungen. Man kann zeigen, daß für den niedrigsten Eigenwert ω_1^2 bei Neumann'schen Randbedingungen $\omega_1^2 = 0$ möglich ist, wobei die zugehörige Auslenkung ϕ_1 dann konstant über den gesamten Querschnitt der Mikromembran ist [10]. Diese Lösung kann also nicht die gesuchte sein. Man benötigt daher ein Variationsprinzip für den nächsthöheren Eigenwert.

Beschränkt man die Menge der möglichen Versuchsfunktionen auf diejenigen Funktionen $u_i(r)$, die orthogonal zur Eigenfunktion $\phi_1(r)$ des niedrigsten Eigenwerts sind, fordert also

$$\int_0^a u_i \cdot \phi_1 r dr = 0 \quad i \neq 1, \quad (1.28)$$

dann stellt der Rayleigh-Quotient (1.25), der mit den $u_i(r)$ gebildet wird, eine obere Schranke für den nächsthöheren Eigenwert ω_2^2 dar [10, 12]. Darüber hinaus kann man mit dem Rayleigh-Quotienten auch obere Schranken für Eigenwerte höherer Ordnung angeben. Die Funktion $u_j(r)$ ³, mit der der Rayleigh-Quotient berechnet wird, muß dann orthogonal zu allen Funktionen u_i , $i \leq j$, sein, mit denen die kleineren Eigenwerte ω_i^2 , $i \leq j$ berechnet wurden. Es muß also

$$\int_0^a u_j u_i r dr = 0 \quad i = 1, \dots, j-1 \quad (1.29)$$

gelten. Von diesem Prinzip wird bei der Berechnung der Resonanzfrequenz in den folgenden Abschnitten Gebrauch gemacht.

Das Variationsverfahren gibt keinen Hinweis darauf, wie die Versuchsfunktion angesetzt werden sollte. Das Aussehen der Versuchsfunktion muß aus den geometrischen Randbedingungen und physikalischen Überlegungen abgeleitet werden. Variationsverfahren, die auf dem Rayleigh'schen Quotienten beruhen, führen jedoch selbst bei mäßig passenden Funktionen zu sehr guten Ergebnissen, wie Sakurai an einem schönen Beispiel zeigt [13]⁴.

1.1.3 Aufstellung der Randbedingungen

Welche geometrischen Randbedingungen sind bei Schwingungen von Mikromembranen gegeben? Unter der Annahme, daß die Mikrostruktur an den Schwingungen teilnimmt, kann die Auslenkung $u(r)$ am Rand bei $r = a$ zu

$$u(a) = \lambda_0 \quad (1.30)$$

gesetzt werden⁵. Da nur Grundschwingungen betrachtet werden sollen, ist auch die Auslenkung bei $r = 0$ ungleich null. Diese Annahmen bedeuten jedoch, daß auch

³ $u_j(r)$ muß die geometrischen Randbedingungen erfüllen

⁴Hier wird gezeigt, wie genau die Energie des Grundzustandes in einem eindimensionalen Quantentopf mit Hilfe eines parabolischen Ansatzes berechnen kann.

⁵Dabei bezeichnet a den effektiven Radius.

die Variation δu an beiden Rändern ungleich null ist, sodaß sich als erste Randbedingung aus (1.24) für die Querkraft am Rand

$$\left(h_m \sigma_0 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \left(D \frac{\partial}{\partial r} \Delta u \right) \Big|_{r=0,a} = 0 \quad (1.31)$$

ergibt. Übrig bleibt, die geometrische Randbedingung zu erfüllen, welche die Ableitung der Mikromembran am Rand beschreibt. Wenn die Mikrostruktur aus Nickel bzw. Titan ist, dann ist sie in erster Näherung steif im Vergleich zur Mikromembran. Geht man von dieser Annahme aus, dann nimmt die Mikrostruktur keine Biegemomente auf und stellt folglich eine feste Einspannung für die Mikromembran dar, die in vertikaler Richtung an den Schwingungen teilnehmen kann. Es gilt demnach

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0. \quad (1.32)$$

Wenn die Mikrostruktur durch die Bewegungen der Mikromembran verformt wird, wie das bei Polyimid der Fall ist, dann muß zwischen Typ "H" und "R" der Mikrostruktur unterschieden werden. Bei Typ "H" grenzt jedes begrenzende Sechseck unmittelbar an weitere Sechsecke an (vgl. Abbildung 1.1). Da der effektive Radius in diesem Fall in erster Näherung bis zu dieser Grenze verläuft, muß am Rand bei $r = a$ aus Symmetriegründen die Neigung u' identisch verschwinden, sodaß sich als Randbedingung wieder Gl. (1.32) ergibt. Ist die Mikrostruktur *pro* Mikromembran durch einen Kreisring aus Polyimid gegeben, dann ist die angesprochene Symmetrie strenggenommen nicht gegeben. Da die Kreisringe jedoch der Verformung entgegenwirken, kann auch in diesem Fall die Bedingung (1.32) angenommen werden.

Wegen der Radialsymmetrie der Grundschwingung muß schließlich noch

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad (1.33)$$

gelten. Für das Schwingungsproblem gelten demnach homogene Neumannsche Randbedingungen [10]. Damit vereinfacht sich Gleichung (1.31) zu

$$\left(D \frac{\partial}{\partial r} \Delta u \right) \Big|_{r=0,a} = 0 \quad (1.34)$$

1.1.4 Bestimmung der Versuchsfunktion für das Variationsverfahren

Für die Ausführung des Variationsverfahrens fehlt nun noch die Versuchsfunktion $u(r)$. Diese Funktion sollte im Idealfall so angesetzt werden, daß sie nicht nur die geometrischen Randbedingungen, sondern auch die dynamische Randbedingungen erfüllt⁶. Als Versuchsfunktion wird ein Polynom der Art

$$u(r) = \sum_{n=0}^N \lambda_n \cdot u_n(r) \quad (1.35)$$

⁶Beim Ritz'schen Verfahren muß die Versuchsfunktion nur die geometrischen Randbedingungen erfüllen

gewählt. Die Forderung (1.32) kann erfüllt werden, wenn man für die $u_n(r)$ den Ansatz

$$u_n(r) = \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^n \quad (1.36)$$

macht. Dabei muß $\lambda_1 = 0$ gesetzt werden, weil $u'_1(a) \neq 0$ ist. Da die Auslenkung am Rand i. allg. ungleich null ist, wird zusätzlich gemäß Gl. (1.30) $u(a) = \lambda_0$ gefordert. Ein möglicher Ansatz für die Versuchsfunktion $u(r)$ ist dann

$$u(r) = \lambda_0 + \lambda_2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 + \lambda_3 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^3 \quad (1.37)$$

Dabei wurde die Reihe nur bis $N=3$ entwickelt, um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten. Sämtliche Terme der Randbedingungen, die die Neigung der Membran beinhalten, sind damit erfaßt, da die $u_n(r)$ entsprechend gewählt wurden. Übrig bleibt die Randbedingung aus Gleichung (1.34). Geht man mit (1.37) in (1.34) ein, findet man, daß

$$\lambda_3 = \frac{2}{3}\lambda_2 \quad (1.38)$$

sein muß. Der Ansatz (1.37) wird damit zu

$$u(r) = \lambda_0 + \lambda_2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 + \lambda_2 \frac{2}{3} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^3 \quad (1.39)$$

Am Koeffizienten λ_0 können wesentliche Eigenschaften der Versuchsfunktion $u(r)$ abgelesen werden. Setzt man in (1.39) $r = a$, so ergibt sich $u(a) = \lambda_0$. Wenn man aus dem Rayleigh-Ritz'sche Variationsverfahren einen großen Wert für $|\lambda_0|$ erhält, entspricht dies einem starken Mitschwingen der Mikrostruktur. Ist hingegen $\lambda_0=0$, dann ist die Membran fest eingespannt, und die Mikrostruktur wird nicht aus der Ruhelage ausgelenkt.

Variationsverfahren am Beispiel der eingespannten Platte

Das Rayleigh-Ritz'sche Variationsverfahren soll an einem einfachen Beispiel verifiziert werden. Wir betrachten eine dünne kreisförmige Platte, die keine innere Vorspannung aufweist⁷ und an ihrem Rand fest eingespannt ist. Die Bewegungsgleichung eines solchen Systems kann geschlossen gelöst werden [8]. Berücksichtigt man nur die Grundschwingung einer solchen Platte, so ergibt sich für die Auslenkungsform $y(r)$

$$y(r) = J_0(\pi\gamma \frac{r}{a}) - \frac{J_0(\pi\gamma)}{I_0(\pi\gamma)} I_0(\pi\gamma \frac{r}{a}). \quad (1.40)$$

⁷ σ_0 ist dann gleich null

Dabei sind J_0 bzw. I_0 die Besselfunktionen bzw. modifizierten Besselfunktionen nullter Ordnung und γ ein numerischer Wert, der sich durch die Randbedingungen ergibt und von der Ordnung der Schwingung abhängt. Bei der Grundschwingung ist $\gamma = 1.015$. Da die innere Vorspannung gleich null ist, ist die Frequenz ω_0 der Grundschwingung im Vakuum durch

$$\omega_0 = \frac{\pi^2 h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho_m(1-\nu_p^2)}} \gamma^2 \quad (1.41)$$

gegeben, wobei h die Dicke der Platte, a ihr Radius, E der E-Modul des Plattenmaterials und ν_p die Poisson'sche Querkontraktionszahl ist. Nimmt man beispielsweise eine Platte aus Titan an, die bei einer Dicke von $2.7 \mu\text{m}$ einen Radius von $63 \mu\text{m}$ aufweist, erhält man eine Resonanzfrequenz

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 1.671 \text{ MHz.} \quad (1.42)$$

Mit Hilfe des Ritz'schen Variationsverfahrens ist es nun möglich, einen Näherungswert für die Resonanzfrequenz zu berechnen. Dazu muß im ersten Schritt die Versuchsfunktion aus (1.39) auf die gegebenen Randbedingungen angepaßt werden. Da die Platte fest eingespannt ist, gilt $\lambda_0 = 0$ und ebenso $\partial u/\partial r = 0$ am Rand und in der Mitte der Platte. In diesem Fall wird keine Bedingung an die Querkraft gestellt, sodaß sich keine lineare Abhängigkeit zwischen den Koeffizienten λ_2 und λ_3 ergibt. Da die Auslenkung der Versuchsfunktion keinen Einfluß auf den Rayleigh-Quotienten hat, ist es erlaubt, die Versuchsfunktion auf 1 zu normieren, d.h. $\lambda_3 = 1 - \lambda_2$ zu setzen. Es ergibt sich

$$u(r) = \lambda_2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 + (1 - \lambda_2) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^3. \quad (1.43)$$

Geht man mit (1.43) in den zu variierenden Quotienten (1.25) ein, erhält man nach Ausführung der Integrationen

$$\omega^2 = 224 \frac{D}{a^4 \rho_m h} \frac{9 - 3\lambda_2 + 4\lambda_2^2}{15 + 5\lambda_2 + \lambda_2^2}. \quad (1.44)$$

ω^2 wird dann extremal, wenn $\partial\omega^2/\partial\lambda_2 = 0$ ist. Durch Differentiation von (1.44) erhält man eine Gleichung zweiter Ordnung für λ , aus der sich die Lösungen

$$\lambda_{2,a} = 0.754 \quad \text{und} \quad \lambda_{2,b} = -5.189 \quad (1.45)$$

ergeben. Die Wurzel des Rayleigh-Quotienten, der mit $\lambda_{2,a}$ berechnet wird, bildet eine obere Schranke für die niedrigste Eigenfrequenz einer kreisförmigen Platte. Für $f = \omega/2\pi$ erhält man einen Wert von 1.730 MHz, welcher nur um ca. 3,5 Prozent von der tatsächlichen Resonanzfrequenz abweicht (vgl. 1.42). Der Rayleigh-Quotient, der mit $\lambda_{2,b} = -5.189$ gebildet wird, stellt eine obere Schranke für den zweiten Eigenwert dar, da die Auslenkungsformen, die sich durch (1.43) mit den Parametern $\lambda_{2,a}$ und $\lambda_{2,b}$ ergeben, orthogonal zu einander sind.

1.1.5 Einfluß der Mikrostruktur auf Mikromembran-schwingungen

Wie eingangs erwähnt, kann die Mikrostruktur in erster Näherung als Massenbelegung am Rand der Membran betrachtet werden. In der Bewegungsgleichung für die Mikromembranen tritt also eine zusätzliche Trägheitskraft auf, die jedoch nur am Rand der Mikromembran wirkt. Als Differentialgleichung erhält man dann

$$D\Delta^2\psi - h_m\sigma_0\Delta\psi + \rho_m h_m \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\tilde{m}_s \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \delta(r-a). \quad (1.46)$$

Dabei ist $\delta(r-a)$ die Dirac'sche Delta-Funktion [14]. \tilde{m}_s bezeichnet die Masse der Mikrostruktur pro Linienelement entlang des Umfangs der Membran. Ist m_s die Masse der Mikrostruktur, so gilt

$$\tilde{m}_s = \frac{m_s}{2\pi a}. \quad (1.47)$$

Macht man für die Auslenkung mit $\psi(r, t) = u(r)e^{-i\omega t}$ den üblichen Ansatz, wobei $u(r)$ die gegebenen Randbedingungen erfüllen soll, geht damit in (1.46) ein, multipliziert mit $u(r)/2$, integriert über die Membranfläche und löst zuletzt nach ω^2 auf, erhält man für den Rayleigh-Quotienten

$$\omega^2 = \frac{\frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a (\Delta u)^2 r dr d\vartheta + \frac{1}{2} h_m \sigma_0 \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 r dr d\vartheta}{\frac{1}{2} \rho_m h_m \int_0^{2\pi} \int_0^a u^2 r dr d\vartheta + \frac{1}{2} \tilde{m}_s \int_0^{2\pi} \int_0^a \delta(r-a) u^2 r dr d\vartheta}. \quad (1.48)$$

Da von den einzelnen Termen in Gleichung (1.48) noch häufig Gebrauch gemacht wird, seien für sie an dieser Stelle Abkürzungen eingeführt. Der Summand im Zähler von (1.48), der proportional zur Biegesteifigkeit D ist, er sei mit V_D bezeichnet, steht für die potentielle Energie der Mikromembran, die durch Biegemomente hervorgerufen wird. Der andere Summand im Zähler, im weiteren V_{σ_0} genannt, bezeichnet die potentielle Energie, die durch die innere Spannung der Mikromembran entsteht. Im Nenner von (1.48) steht die kinetische Energie des Systems Mikromembran-Mikrostruktur, dividiert durch ω^2 . Bezeichnet man die kinetische Energie der Mikromembran mit T_m , dann steht $T'_m = T_m/\omega^2$ gerade für den ersten Term im Nenner von (1.48). Der zweite Term $T'_s = T_s/\omega^2$ bezeichnet die kinetische Energie T_s der Mikrostruktur, dividiert durch ω^2 .

Aufgrund der Eigenschaften der Delta-Funktion kann der zweite Summand im Nenner von (1.48) als

$$\frac{1}{2} \tilde{m}_s \int_0^{2\pi} \int_0^a \delta(r-a) u^2(r) r dr d\vartheta = \frac{1}{2} m_s u(a)^2 \quad (1.49)$$

geschrieben werden. Setzt man nun (1.39) in Gleichung (1.48) ein und berechnet die Integrale, erhält man einen Ausdruck für die Resonanzfrequenz ω einer Mikro-

membran im Vakuum, die von einer Mikrostruktur der Masse m_s getragen wird:

$$\omega^2 = \frac{\frac{128}{5}\pi D \frac{\lambda_2^2}{a^2} + h_m \sigma_0 \frac{26}{15}\pi \lambda_2^2}{h_m \rho_m a^2 \pi \left(\frac{\lambda_0^2}{2} + \frac{17\lambda_2^2}{70} + \frac{\lambda_0 \lambda_2}{2} \right) + \frac{m_s \lambda_0^2}{2}} \quad (1.50)$$

Differenziert man (1.50) nach λ_0 und λ_2 und setzt die so erhaltenen Terme gleich null, erhält man

$$\lambda_2 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_0 = -\frac{\pi \rho_m h_m a^2}{2\pi h_m \rho_m a^2 + 2m_s} \lambda_2 \quad (1.51)$$

Wenn $\lambda_2 = 0$ ist, ergibt sich die Resonanzfrequenz $\omega = 0$. λ_0 ist dann ebenfalls null. Die Versuchsfunktion ist dann gleich der Eigenfunktion des ersten Eigenwerts. Die Versuchsfunktion, die mit der zweiten Lösung $\lambda_2 \neq 0$ gebildet werden kann, ist natürlich orthogonal zu $u(r) = 0$ und führt zu einem Rayleigh-Quotienten, der eine obere Schranke für den nächsthöheren Eigenwert darstellt. Es kann hier o.B.d.A. einer der beiden Parameter frei gewählt werden, da die Amplitude keinen Einfluß auf das Ergebnis hat. Für Vergleichszwecke ist es günstig, wenn die maximale Auslenkung der Mikromembran gleich 1 ist. Es gilt dann

$$\lambda_0 + \lambda_2 + \frac{2}{3}\lambda_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{3}{5}(1 - \lambda_0)$$

Setzt man dies in (1.51) ein und löst nach λ_0 auf, erhält man, wenn vorher noch $m_m = \pi \rho_m h_m a^2$ gesetzt wird,

$$\lambda_0 = -\frac{3m_m}{7m_m + 10m_s} \quad (1.52)$$

Da die Auslenkungsform direkt von λ_0 abhängt, ist es auf einfache Weise möglich, mit Hilfe von (1.52) den Einfluß der Mikrostruktur auf die Auslenkungsform der Mikromembran zu beschreiben. Ist die Masse der Mikrostruktur m_s groß gegen die Masse der Mikromembran m_m , so wird $|\lambda_0|$ sehr klein, d.h. daß in diesem Fall die Mikrostruktur praktisch in Ruhe bleibt, wie man es auch bei einer festen Einspannung der Mikromembran erwarten würde.

Je kleiner die Masse der Mikrostruktur wird, desto größer wird $|\lambda_0|$, und desto stärker nimmt die Mikrostruktur auch an den Schwingungen teil. Auch dies ist

Sensorart	FEM		Theorie	
	$ \lambda_0 $	$f = \omega/2\pi$ [MHz]	$ \lambda_0 $	$f = \omega/2\pi$ [MHz]
Titan-Nickel	ca. 0.05	7.84	0.061	8.67
Titan-Polyimid	ca. 0.20	7.04	0.25	7.65

Table 1.1: Vergleich des theoretisch berechneten Variationsparameters λ_0 und der Resonanzfrequenzen mit Ergebnissen aus Finite-Elemente-Rechnungen. $|\lambda_0|$ bezeichnet die Auslenkung der Mikromembran bei $r = a_{\text{eff}}$ (vgl. Abb. 1.3).

verständlich, da eine kleine Masse keinesfalls eine feste Einspannung für die Mikromembran darstellt.

Dieses Ergebnis sei anhand einiger Beispiele verdeutlicht. Interessant sind Titan-Nickel- und Titan-Polyimid-Sensoren, da in diesen Fällen die theoretischen Ergebnisse mit Finite-Elemente-Rechnungen verglichen werden können [5]. Diese Rechnungen wurden für Sensoren des Typs H(30;10;10) durchgeführt (vgl. Abb. 1.1 auf Seite 11). Damit ergibt sich in unserem Modell für Titan-Polyimid-Sensoren ein effektiver Radius von $a_{\text{eff}} = 35 \mu\text{m}$, für Titan-Nickel-Sensoren ist $a_{\text{eff}} = 30 \mu\text{m}$. Mit diesen Werten ergeben sich für den Koeffizienten λ_0 und die Resonanzfrequenz $f = \omega/2\pi$ die Werte in Tabelle (1.1).

In beiden Fällen zeigt das theoretische Modell eine gute Übereinstimmung mit den Finite-Elemente-Rechnungen. Die Abweichungen kommen dadurch zustande, daß in den FEM-Rechnungen die Eigenschwingungsform mehrerer aneinander gekoppelter Mikromembranen berechnet wurde, bei der darüber hinaus auch die Biegesteifigkeit der Mikrostruktur berücksichtigt wurde. Dieses Modell kommt der Realität sicherlich näher.

eff. Radius $h_{\text{ms}} [\mu\text{m}]$	$a_{\text{eff}} = 63 \mu\text{m}$		$a_{\text{eff}} = 68 \mu\text{m}$	
	$ \lambda_0 $	$f = \omega/2\pi [\text{MHz}]$	$ \lambda_0 $	$f = \omega/2\pi [\text{MHz}]$
11	0.220	2.72	0.236	2.43
16	0.189	2.63	0.196	2.35
21	0.161	2.57	0.168	2.29

Tabelle 1.2: Variationsparameter λ_0 und Resonanzfrequenzen in Abhängigkeit von der Höhe der Mikrostruktur für Titan-Polyimidsensoren des Typs R(48;63; h_{ms}) und R(53;68; h_{ms})

Interessant ist der Vergleich zweier Signale von unterschiedlichen Sensoren, der den starken Einfluß von λ_0 zeigt. Wie sich zeigt, ist die Dämpfung zwar proportional zum Quadrat der Resonanzfrequenz, die Dämpfung hängt jedoch ebenso stark vom Nettovolumen ab, das von der Mikromembran verdrängt wird. Da bei Titan-Polyimid-Sensoren das Mitschwingen der Mikrostruktur stärker ausgeprägt ist als bei Titan-Nickel-Sensoren, ist dort auch das verdrängte Nettovolumen kleiner und damit die Dämpfung der Schwingung. In Abbildung 1.4 ist dieser Effekt deutlich zu sehen. Es sind dort die Signale eines Titan-Polyimid-Sensors (rechts) und eines Titan-Nickel-Sensors (links) abgebildet. Obwohl der Titan-Polyimid-Sensor eine höhere Resonanzfrequenz als der Titan-Nickel-Sensor besitzt, weist er eine wesentlich geringere Dämpfung auf.

Die Masse der Mikrostruktur ist daher ein maßgeblicher Parameter bei der Berechnung der Schwingungseigenschaften. Es zeigt sich, daß sie darüber hinaus auch die Größe des Dichteeffekts stark beeinflusst. Es ist deshalb zweckmäßig, das Verhalten von ω zu kennen, wenn die Höhe der Mikrostruktur verändert wird. Als Beispiel für den Einfluß der Mikrostrukturhöhe wird angenommen, daß die Mikrostruktur, wie in Abbildung 1.2 gezeigt, aus hexagonal angeordneten Kreisringen besteht. Das Membranmaterial sei wieder Titan, das Material der Mikrostruktur sei Polyimid.

Bei den Rechnungen wurden Sensoren des Typs $R(48;63;h_{ms})$ und $R(53;68;h_{ms})$ angenommen, wobei die Höhe h_{ms} der Mikrostruktur variiert wurde. Da die Mikrostruktur aus Polyimid ebenfalls verformt wird, beträgt der effektive Radius $63 \mu\text{m}$ bzw. $68 \mu\text{m}$. In Tabelle 1.2 sind die Werte für $|\lambda_0|$ und die Resonanzfrequenz $f = \omega/2\pi$ für die beiden Radien in Abhängigkeit von der Mikrostrukturhöhe dargestellt.

Tabelle 1.2 kann entnommen werden, daß bei einer größeren Masse der Mikrostruktur das Mitschwingen der Mikrostruktur immer mehr abnimmt und die Resonanzfrequenz sinkt. Im Prinzip müßte hier auch der Einfluß der Mikrostrukturhöhe h_{ms} auf den effektiven Radius a_{eff} berücksichtigt werden. Die untersuchten Titan-Polyimid-Sensoren wiesen jedoch eine vergleichsweise geringe Höhe der Mikrostruktur auf, weshalb bei diesen Sensoren davon ausgegangen werden kann, daß sich die verformte Fläche der Mikromembran über den gesamten Bereich der Mikrostruktur erstreckt. Dementsprechend verläuft dann auch der effektive Radius bis zur äußeren Grenze der Mikrostruktur.

1.2 Schwingungen in flüssigen Medien

Befindet sich die Mikromembran in einem Medium, müssen zwei weitere Effekte berücksichtigt werden. Zunächst muß die Membran bei ihrer Auslenkung einen Teil des Mediums mitbewegen, weswegen sich die zu beschleunigende Masse des Gesamtsystems und somit die Eigenfrequenz der Membran ändert. Darüberhinaus strahlt die Mikromembran natürlich auch Energie in Form von Schallwellen ab, was zu einer Dämpfung der Membranschwingungen führt. Wird die Eigenfrequenz mit dem Rayleigh-Ritz'sche Variationsverfahren berechnet, wie in den vorangehenden Abschnitten gezeigt, dann kann der Einfluß einer Dichteänderung über die Bestimmung der kinetischen Energie des Mediums an der Grenzfläche Membran-Medium bestimmt werden.

Lamb hat diese Methode bei der Grundschwingung einer an ihrem Rand fest eingespannten Platte benutzt, um die Änderung der Resonanzfrequenz zu beschreiben [4]¹. Dabei ist er davon ausgegangen, daß die laterale Ausdehnung $2a$ der Membran klein gegenüber der abgestrahlten Wellenlänge λ ist, genauer

$$\kappa = \frac{\omega a}{c} = ka \ll 1. \quad (1.53)$$

Dabei ist ω die Resonanzfrequenz und c die Schallgeschwindigkeit im umgebenden Medium. $k = \omega/c$ ist die Wellenzahl der abgestrahlten Wellen. Die Helmholtzzahl $\kappa = ka$ ist für Mikromembransensoren keineswegs klein gegen 1. Zum Beispiel hat eine Mikromembran mit einem Radius von $50\mu\text{m}$ eine Frequenz von ca. 2 MHz. In Wasser ergibt sich damit ein Wert von

$$\kappa = \frac{2\pi af}{c} = \frac{2\pi 50 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^6}{1480} \approx 0.42 \quad (1.54)$$

Daüber hinaus kann eine Mikromembran nicht als fest eingespannt betrachtet werden. Es gibt Teile der Mikromembran, die gegenphasig zueinander schwingen. Dementsprechend ändert sich das insgesamt verdrängte Volumen und damit die bewegte Masse. Für Mikromembransensoren muß deshalb die Lamb'sche Methode um zwei Aspekte erweitert werden

1. Einbeziehung des Mitschwingens der Mikrostruktur auch bei der Berechnung der bewegten Masse des Mediums.
2. Beachtung von Helmholtzzahlen, für die gilt

$$\kappa \neq 0. \quad (1.55)$$

1.2.1 Differentialgleichung für Schwingungen in Medien

Befindet sich die Membran in einem Medium, erweitert sich die Differentialgleichung um die Kraft, die das Medium auf die Membran ausübt. Da im Moment nur

¹Er benutzte einen parameterlosen Ansatz im Rayleigh'schen Quotienten

die Eigenfrequenz der Mikromembranen interessiert, lassen wir eventuelle imaginäre Anteile im Druck unberücksichtigt². Nimmt man an, daß der Druck harmonischen Schwankungen mit der gleichen Frequenz wie die der Membranschwingungen unterworfen ist, dann kann der auf der Membran lastende Druck $p(r)$ als

$$\begin{aligned}\bar{p}(r) &= \Re(p_1 + ip_2) e^{-i\omega t} \\ &= p_1 e^{-i\omega t}\end{aligned}\quad (1.56)$$

geschrieben werden. Macht man für die Auslenkung ψ wieder den bekannten Ansatz $\psi = u(r)e^{-i\omega t}$ und setzt diesen in die Differentialgleichung (1.10) des Systems ein, erhält man, wenn die Kraft aufgrund des Drucks berücksichtigt wird

$$\Delta^2\psi - h_m\sigma_0\Delta\psi - \omega^2\rho_m h_m\psi = -p_1 e^{-i\omega t}, \quad (1.57)$$

oder, wenn man beide Seiten durch $e^{-i\omega t}$ dividiert

$$\Delta^2u - h_m\sigma_0\Delta u - \omega^2\rho_m h_mu = -p_1. \quad (1.58)$$

Es wird im folgenden angenommen, daß sich das Medium nur auf einer Seite der Mikromembran befindet und zwar der Seite, die der Mikrostruktur abgewandt ist. Der berechnete Druck bezieht sich daher immer auf den Druck, der von einer Seite auf die Mikromembran wirkt.

Würde die Mikromembran auf beiden Seiten mit dem Medium in Kontakt stehen, dann wäre der Druck gerade doppelt so groß. Für einen Dichtesensor ist dies zwar von Vorteil, weil dann auch die Empfindlichkeit doppelt so groß ist, gegen eine Realisierung eines solchen Sensordesigns sprechen jedoch zwei Gründe: Zum einen ist durch die Mikrostruktur der Flüssigkeitsaustausch erschwert. Dies würde insbesondere bei viskosen Medien zu einem größeren Meßfehler führen, da nicht sichergestellt werden kann, daß das Medium auf beiden Seiten der Mikromembran die gleiche Dichte besitzt. Andererseits können sich in der Mikrostruktur Gasbläschen sammeln, die eine Störung des Sensorsignals verursachen und ebenfalls dazu führen, daß nicht alle Mikromembran gleichmäßig belastet werden. Die Mikromembransensoren werden deshalb so hergestellt, daß die Mikrostruktur durch eine Kapsel geschützt wird.

1.2.2 Kinetische Energie des Mediums im Nahfeld der Membran

Die Arbeit, die von der Membran am Medium verrichtet wird, läßt sich mit Hilfe des an der Grenzfläche herrschenden Drucks berechnen. Da dieser ebenso wie die Geschwindigkeit der Membran vom Radius abhängt, muß über eine Fläche integriert werden, welche die Membran ganz einschließt. Für die Herleitung der Formel werden die Bewegungsgleichungen für die Ausbreitung einer Druckwelle in einem

²Imaginäre Anteile stellen Dämpfungsterme dar. Diese haben auf die Eigenfrequenz der Mikromembranen keinen Einfluß. Dabei ist mit Eigenfrequenz die Frequenz des Systems gemeint, die es annimmt, wenn keine Energiedissipation erfolgen würde

Medium benötigt. Diese sog. Euler'schen Gleichungen lauten in ihrer linearisierten Form (d.h. quadratische Terme werden vernachlässigt) [8]:

$$\rho_f \frac{dv}{dt} = -\text{grad } p \quad \kappa_m \frac{\partial p}{\partial t} = -\text{div } v \quad (1.59)$$

Hierbei ist v die Geschwindigkeit des Mediums, p der Druck, ρ_f die Dichte des Mediums und κ_m sein Kompressionsmodul [8]. Nimmt man die Divergenz der ersten Gleichung und differenziert die zweite einmal nach der Zeit t , erhält man mit $\kappa_m \rho_f = 1/c^2$

$$\text{div grad } p = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) p = \nabla^2 p = \kappa_m \rho_f \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (1.60)$$

Dies ist die dreidimensionale Form der Wellengleichung [8]. Die beiden obigen Gleichungen lassen sich auch mittels des Geschwindigkeitspotentials ϕ beschreiben, wenn man Effekte zweiter Ordnung vernachlässigt.

$$v = -\text{grad } \phi \quad p = \rho_f \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.61)$$

Dabei ist ϕ ebenfalls eine Lösung der obigen Wellengleichung, d.h. es gilt:

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.62)$$

Mit Hilfe der von Rayleigh hergeleiteten Formel für das Geschwindigkeitspotential läßt sich ϕ berechnen [6].

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{e^{ikr'}}{R} r \, dr \, d\vartheta \quad (1.63)$$

Unter der Annahme einer rein harmonischen Schwingung der Art

$$\psi(r, t) = u(r) \cdot e^{-i\omega t}$$

folgt aus (1.63)

$$\phi = -i\omega \left[\frac{1}{2\pi} \oint u(r) \frac{e^{ikr'}}{R} r \, dr \, d\vartheta \right] e^{-i\omega t}, \quad (1.64)$$

sodaß das Geschwindigkeitspotential rein formal auch durch

$$\phi = -i\omega (\phi_1 + i\phi_2) e^{-i\omega t} \quad (1.65)$$

ausgedrückt werden kann. Der Druck $p(r)$ kann dann entsprechend der Gleichungen (1.61) als

$$\begin{aligned} p &= -\rho_f \omega^2 (\phi_1 + i\phi_2) e^{-i\omega t} \\ &= (p_1 + ip_2) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (1.66)$$

geschrieben werden. Da die an der Grenzfläche abgegebene Leistung eine reelle Größe ist, werden für ihre Berechnung für den Druck und die Geschwindigkeit des Mediums ebenfalls die Realteile dieser Größen benötigt. Dabei ist zu beachten, das bei allen Größen der Aufpunkt auf der Membran sitzt, d.h. die z-Komponente der Größen gleich null ist. Bezeichnet man den Realteil des Drucks p mit P und den Realteil der Geschwindigkeit v mit V , erhält man

$$\begin{aligned}\Re(p(r, t, 0)) &= P = p_1 \cos(\omega t) + p_2 \sin(\omega t) \\ \Re(v) &= V = \Re(\dot{\psi}) = -\omega u(r) \sin(\omega t)\end{aligned}\quad (1.67)$$

Die an das Medium abgegebene Leistung $\dot{W}(t)$ berechnet sich damit zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial W(t)}{\partial t} &= \int_A P \cdot V \, dA \\ &= - \int_A \underbrace{\omega p_1 u(r) \cos(\omega t) \sin(\omega t)}_{\dot{W}'_1(t)} + \underbrace{\omega p_2 u(r) \sin^2(\omega t)}_{\dot{W}'_2(t)} \, dA,\end{aligned}\quad (1.68)$$

wobei mit $\int_A dA$ die Integration über die Fläche der Mikromembran gemeint ist. Aus (1.68) folgt für die insgesamt am Medium verrichtete Arbeit

$$W(t) = - \iint_A \underbrace{\omega p_1 u(r) \cos(\omega t) \sin(\omega t)}_{\dot{W}'_1(t)} + \underbrace{\omega p_2 u(r) \sin^2(\omega t)}_{\dot{W}'_2(t)} \, dA \, dt \quad (1.69)$$

Führt man die Integration über die Zeit t durch, erhält man für den ersten Summanden W_1 in (1.69):

$$\begin{aligned}W_1(t) &= - \iint_A p_1 u(r) \omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) \, dA \, dt \\ &= - \frac{1}{2} \int_A p_1 u(r) \sin^2(\omega t) \, dA\end{aligned}\quad (1.70)$$

Wegen (1.66) und (1.67) kann dies auch als

$$W_1(t) = \frac{1}{2} \rho_f \int_A -\omega \phi_1 \sin(\omega t) \Re\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \, dA \quad (1.71)$$

geschrieben werden. Wird nun auch in (1.63) der Realteil der Geschwindigkeit benutzt, dann ist³

$$\phi = -\omega (\phi_1 + i\phi_2) \sin(\omega t), \quad (1.72)$$

sodaß man Gleichung (1.71) mit Hilfe von (1.72) als

$$W_1(t) = \frac{1}{2} \rho_f \oint \Re(\phi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \, dA \quad (1.73)$$

³da $\Re(\dot{\psi}) = -\omega u(r) \sin \omega t$

schreiben kann. Wie man gleich sehen wird, ist dieser Ausdruck identisch mit dem Ausdruck, den Lamb für die kinetische Energie angibt, wenn der Radius der Membran klein gegen die abgestrahlte Wellenlänge ist. Gemittelt über eine Schwingungsperiode wird am Medium die Arbeit \bar{W} verrichtet:

$$\begin{aligned}\bar{W}(t) &= -\frac{2\pi}{\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \int_A \dot{W}'_1(t) + \dot{W}'_2(t) \, dA \, dt = \frac{2\pi}{\omega} \left[W_1(t) \Big|_0^{2\pi/\omega} + W_2(t) \Big|_0^{2\pi/\omega} \right] \\ &= \underbrace{-\frac{2\pi}{\omega} \left[\int_A \frac{1}{2} p_1 u(r) \, dA \right] \sin^2(\omega t) \Big|_0^{2\pi/\omega}}_{\bar{W}_1 \equiv 0} - \\ &\quad \underbrace{\frac{2\pi}{\omega} \left[\int_A \frac{1}{2} p_1 u(r) \, dA \right] \left[\frac{\omega}{2} t - \frac{1}{4} \sin(2\omega t) \right] \Big|_0^{2\pi/\omega}}_{\bar{W}_2 \neq 0}\end{aligned}\quad (1.74)$$

Nur der zweite Summand \bar{W}_2 liefert einen Beitrag zur verrichteten Arbeit, die letztendlich als Strahlungsenergie für große Abstände im Medium auftritt. Der erste Term \bar{W}_1 ist null, da das Integral über $\sin \omega t \cos \omega t$ null ist. Da $W_1(t)$ durch Gl. (1.70) gegeben ist, kann man mit Hilfe von Gl. (1.66) zeigen, daß $W_1(t)$ proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit des Mediums an der Grenzfläche zur Membran ist. $W_1(t)$ wird deshalb mit der kinetischen Energie des Mediums in unmittelbarer Nähe der Membran assoziiert [8]. Das Medium trägt also wie die Membran und die Mikrostruktur zur bewegten Masse des Systems bei. Die Masse des Mediums wird aus diesem Grund auch als "additive Masse" bezeichnet.

Da der $\sin \omega t$ nie größer als 1 ist, kann der Maximalwert der Ausdrücke (1.70) und (1.71) als

$$T_{\max} = -\frac{1}{2} \int_A p_1 u(r) \, dA = \frac{1}{2} \rho_f \int_A \omega^2 \phi_1 u(r) \, dA \quad (1.75)$$

dargestellt werden. Diese Integrale sind identisch mit der rechten Seite von (1.58), wenn diese mit $u(r)/2$ multipliziert und anschließend über die Fläche der Membran integriert wird. Um diese Integrale lösen zu können, wird ein Ausdruck für den Druck p_1 bzw. das Geschwindigkeitspotential ϕ an der Grenzfläche Mikromembran-Medium benötigt.

1.2.3 Berechnung des dynamischen Drucks an der Grenzfläche Membran-Medium

Die Herleitung eines Ausdrucks für den Druck an einer Grenzfläche in Abhängigkeit einer in dieser Grenzfläche liegenden Quelle ist sehr aufwendig. Eine ausführliche Darstellung findet sich in [8, 15]. Es wird dort gezeigt, daß der Druck an der Grenzfläche durch

$$p(r) = -i\omega\rho_f \iint \frac{\partial\psi(r_0, \vartheta_0)}{\partial t} G(r, \vartheta, z|r_0, \vartheta_0, 0) r_0 \, dr_0 \, d\vartheta_0 \quad (1.76)$$

gegeben ist. Dabei ist ψ die Auslenkung der Quelle, die den Druck erzeugt und $G(r, \vartheta, z | r_0, \vartheta_0, 0)$ die Green'sche Funktion des Problems in Polarkoordinaten [8]. G kann in Polarkoordinaten durch

$$G(r, \vartheta, z | r_0, \vartheta_0, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i\epsilon_m}{2\pi} \cos(m(\vartheta - \vartheta_0)) \times \int_0^{\infty} J_m(\mu r) J_m(\mu r_0) \frac{\mu d\mu}{\sqrt{k^2 - \mu^2}} \quad (1.77)$$

ausgedrückt werden, wobei $\epsilon_0 = 1$ und $\epsilon_{m \neq 0} = 2$ gilt. Da nur radialsymmetrische Grundschwingungen von Mikromembranen betrachtet werden, d.h. $m=0$ gilt, fällt die Summe über m weg. Die Integration über $d\vartheta_0$ in (1.76) bringt einen Faktor 2π , sodaß der Druck an der Grenzfläche dann

$$p(r, t) = \omega \rho_f \int_0^a \frac{\partial \psi(r_0)}{\partial t} r_0 dr_0 \times \int_0^{\infty} J_0(\mu r) J_0(\mu r_0) \frac{\mu d\mu}{\sqrt{k^2 - \mu^2}} \quad (1.78)$$

lautet. Für eine rein harmonische Schwingung der Form

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = u_{\omega}(r) e^{-i\omega t}, \quad (1.79)$$

kann der Druck durch

$$p(r, t, z=0) = \omega \rho_f \int_0^a \int_0^{\infty} u_{\omega}(r_0) J_0(\mu r) J_0(\mu r_0) \frac{\mu d\mu}{\sqrt{k^2 - \mu^2}} r_0 dr_0 e^{-i\omega t} \quad (1.80)$$

beschrieben werden. Mit Hilfe der Relation

$$\frac{1}{\rho_f} \int p dt = \phi \quad (1.81)$$

erhält man dann einen Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential

$$\phi = i \int_0^a \int_0^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial t} J_0(\mu r) J_0(\mu r_0) \frac{\mu d\mu}{\sqrt{k^2 - \mu^2}} r_0 dr_0 \quad (1.82)$$

Das Integral in (1.82) hat bei $k = \mu$ eine Polstelle, und muß daher richtig interpretiert werden. Es läßt sich als Summe zweier Integrale schreiben:

$$\phi = \int_0^a \int_k^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial t} J_0(\mu r) J_0(\mu r_0) \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2 - k^2}} r_0 dr_0 + i \int_0^a \int_0^k \frac{\partial \psi}{\partial t} J_0(\mu r) J_0(\mu r_0) \frac{\mu d\mu}{\sqrt{k^2 - \mu^2}} r_0 dr_0 \quad (1.83)$$

Für die kinetische Energie des Mediums wird nach (1.71) nur der Realteil benötigt, sodaß, wenn vorher noch $\psi = u(r) \cdot C(t)$ gesetzt wird, die kinetische Energie des

Mediums T_{kin}

$$T_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \rho_f \left(\frac{\partial C}{\partial t} \right)^2 \int_0^a u(r) r dr d\vartheta \times \int_0^a \int_k^\infty u(r_0) J_0(\mu r) J_0(\mu r_0) \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - k^2}} d\mu r_0 dr_0 \quad (1.84)$$

lautet. Diese Gleichung ist identisch mit Lambs Ausdruck, wenn k gleich 0 gesetzt wird. Für das Variationsverfahren wird der Ausdruck für den an der Grenzfläche herrschenden Druck herangezogen. Hier wird der Realteil des räumlichen Anteils benötigt. Setzt man ψ in seiner komplexen Form ein, ist $u_\omega = -i\omega u(r)$, sodaß gilt

$$p = -i\omega^2 \rho_f \int_0^a \int_0^\infty u(r_0) J_0(\mu r) J_0(\mu r_0) \frac{\mu}{\sqrt{k^2 - \mu^2}} d\mu r_0 dr_0 e^{-i\omega t}. \quad (1.85)$$

Beachtet man auch hier die Polstelle bei $k = \mu$, dann läßt sich das Maximum der kinetischen Energie gemäß (1.75) schlußendlich als

$$T_{\text{max}} = \frac{1}{2} \omega^2 \rho_f \int_0^a u(r) \int_k^\infty \int_0^a u(r_0) J_0(\mu r) J_0(\mu r_0) \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - k^2}} d\mu r_0 dr_0 r dr \quad (1.86)$$

schreiben. (1.86) ist proportional zu ω^2 , wie es bei einem harmonischen Oszillator gefordert wird. Die untere Grenze des Integrals über $d\mu$ in (1.86) weist jedoch auf eine weitere Abhängigkeit des Ausdruck von der Resonanzfrequenz hin, da die Helmholtzzahl ja von der Wellenlänge und damit von der Frequenz der abgetrahlten Wellen abhängt.

Da man nicht erwarten darf, daß die Lösung des Integral ein Ausdruck proportional ω^2 oder ω^4 ist, ergeben sich Schwierigkeiten bei der Benutzung des Variationsverfahrens, da nicht mehr eindeutig nach ω^2 aufgelöst werden kann. Wie sich jedoch zeigt, ist die Abhängigkeit von k so geartet, daß eine Näherung zweiter Ordnung ein Variationsverfahren ermöglicht.

Wie gesagt sind die experimentell auftauchenden Werte von $\kappa = ka$ nicht klein gegen eins. Da auch die Auslenkungsform der Membran nicht die einer an ihrem Rand fest eingespannten Membran ist, kann die Lösung von Lamb für die kinetische Energie des Mediums nicht benutzt werden. Der nächste Abschnitt erläutert die Lösung des Integrals speziell für die im ersten Teil benutzte Versuchsfunktion der Art (1.39). Da aber alle geraden Funktionen $f(r)$, für die $f(0) = 1$ und $f'(a) = 0^4$ gilt, ebenfalls in der Form

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^n \quad (1.87)$$

dargestellt werden können, ist diese Lösung für eine weit größere Klasse von Funktionen gültig [10].

⁴Dabei ist a der Radius

1.2.4 Berechnung der kinetischen Energie des Mediums

Will man die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Dichte des Mediums mit Hilfe eines Variationsverfahrens berechnen, muß das Integral (1.86) mit der Versuchsfunktion $u(r)$ wie im ersten Abschnitt gelöst werden (siehe (1.39)). Man setzt also wieder

$$u(r) = \sum_{n=0}^3 \lambda_n u_n(r) = \sum_{n=0}^3 \lambda_n \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^n. \quad (1.88)$$

Dabei kann N je nach Anforderung gewählt werden. In unserem Fall ist $N = 3$, sodaß, wenn alle Randbedingungen erfüllt werden sollen, die Koeffizienten λ_n wie bei der Versuchsfunktion (1.39) gewählt werden können. Mit (1.88) läßt sich (1.86) als

$$\begin{aligned} T_f = & \frac{1}{2} \omega^2 \rho \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \lambda_n \lambda_m \int_0^a u_n(r) r dr d\vartheta \\ & \times \int_0^a \int_k^\infty u_m(r_0) J_0(\mu r) J_0(\mu r_0) \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - k^2}} d\mu r_0 dr_0 \end{aligned} \quad (1.89)$$

schreiben. Dabei wurde berücksichtigt, daß die Integration über $d\vartheta_0$ schon in der Herleitung von Ausdruck (1.86) ausgeführt wurde. Die Integrale über r_0 und r stellen die Hankeltransformierte $U_i(\mu, a)$ von $u_i(r)$ bzw $u_i(r_0)$ dar. Im Allgemeinen bleibt nur der Umweg über eine numerische Berechnung übrig, die spezielle Wahl der $u_n(r)$ in der Versuchsfunktion (1.39) läßt jedoch die explizite Berechnung der Hankeltransformierten zu [16]. Bezeichnet man mit $U_n(\mu, a)$ die Hankeltransformierte von $u_n(r)$, so erhält man

$$\begin{aligned} U_n(\mu, a) &= \int_0^a J_0(\mu \tau) \left(1 - \frac{\tau^2}{a^2}\right)^n \tau d\tau \\ &= 2^n n! a^2 \frac{J_{n+1}(\mu a)}{(\mu a)^{n+1}} \end{aligned} \quad (1.90)$$

Das Einsetzen von $U_n(\mu, a)$ in (1.89) führt, nachdem über $d\vartheta$ integriert wurde, auf

$$\begin{aligned} T_f = & \pi \omega^2 \rho a^3 \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \lambda_n \lambda_m 2^n 2^m n! m! \\ & \times \int_k^\infty \frac{J_{n+1}(\mu a) J_{m+1}(\mu a)}{(\mu a)^{n+m+1} \sqrt{\mu^2 - k^2}} d\mu \end{aligned} \quad (1.91)$$

Ersetzt man hier ka durch die Helmholtzzahl κ und führt die Substitution $x = \mu a$ durch, so läßt sich (1.91) als

$$\begin{aligned} T_f = & \pi \omega^2 \rho a^3 \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \lambda_n \lambda_m 2^n 2^m n! m! \\ & \times \int_\kappa^\infty \frac{J_{n+1}(x) J_{m+1}(x)}{(x)^{n+m+1} \sqrt{x^2 - \kappa^2}} dx \end{aligned} \quad (1.92)$$

darstellen. Indiziert man die Koeffizienten und die Integrale mit n und m , definiert also

$$\begin{aligned}\alpha_{n,m} &= \lambda_n \lambda_m 2^n 2^m n! m! \quad \text{und} \\ \mathcal{A}_{n,m} &= \int_{\kappa}^{\infty} \frac{J_{n+1}(x) J_{m+1}(x)}{x^{n+m+1} \sqrt{x^2 - \kappa^2}} dx,\end{aligned}\quad (1.93)$$

dann kann (1.92) mit Hilfe von (1.93) auch durch

$$T_f = \omega^2 \pi \rho a^3 \sum_{n,m}^{N,M} \alpha_{n,m} \mathcal{A}_{n,m} \quad (1.94)$$

ausgedrückt werden.

Es erweist sich als zweckmäßig, die Integrale $\mathcal{A}_{n,m}$ getrennt nach $n = m$ und $n \neq m$ zu betrachten, da es häufig genügt, einen Ansatz für $u(r)$ zu machen, der nur aus einem einzigen Glied besteht. Nimmt man beispielsweise an, daß die Mikromembranen an ihrem Rand fest eingespannt sind, dann ist die Auslenkungsform $u(r)$ in guter Näherung durch

$$u(r) = \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 \quad (1.95)$$

gegeben. In diesem Fall sind in den Summen über n und m alle Koeffizienten $\lambda_{n,m}$ bis auf $n = m = 2$ gleich null, es bleibt also nur das Integral $\mathcal{A}_{2,2}$ übrig. Dieser Fall beschreibt zum Beispiel die einfachste Näherung, die bei Mikromembranschwingungen möglich ist. Setzt man dagegen alle Koeffizienten außer $n = m = 0$ zu null, dann beschreibt man das Potential einer Punktladung, oder aber die kinetische Energie einer sogenannten Rayleigh-Platte⁵. Da diese Integrale darüber hinaus alle wesentlichen Charakteristika der tatsächlichen Lösung (also der Lösung durch einen mehrparametrischen Ansatz der Versuchsfunktion) zeigen, vergleichsweise häufig alleine auftreten und im Vergleich zu den Fällen $n \neq m$ relativ einfach gelöst werden können, sei ihre Lösung an dieser Stelle angeführt.

Berechnung der Integrale $\mathcal{A}_{n,n}$

$\mathcal{A}_{n,n}(z)$ erinnert an das Definitionsintegral der Struve-funktion $\mathcal{S}_{n+1}(z)$ ($n+1$) [16]. Für diese gilt

$$\mathcal{S}_{n+1}(2z) = \frac{2z^{n+2} \Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1/2)} \int_z^{\infty} \frac{J_{n+1}^2(x)}{x^{2n+1}} (x^2 - z^2)^{n-1/2} dx. \quad (1.96)$$

Löst man (1.96) nach dem Integral auf, erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{S}_{n+1}(2z) \Gamma(n+1/2)}{2z^{n+2} \Gamma(1/2)} &= \int_z^{\infty} \frac{J_{n+1}^2(x)}{x^{2n+1}} (x^2 - z^2)^{n-1/2} dx \\ &= \mathcal{G}_{n+1}\end{aligned}\quad (1.97)$$

⁵Bei der sogenannten Rayleigh-Platte wird eine konstante Auslenkung angenommen

Für den Fall $\lambda_0 = 1, \lambda_{n \neq 0} = 0$ (Rayleigh-Platte) führt dieser Ausdruck mit $z = \kappa$ direkt auf das Integral $\mathcal{A}_{0,0}(\kappa)$. Das Aussehen der Struve-Funktion in (1.96) könnte erwarten lassen, daß das Integral \mathcal{G}_{n+1} durch n-faches Differenzieren unter dem Integralzeichen auf die $\mathcal{A}_{n,n}$ führt. Dies ist jedoch nicht der Fall, da ab $n=2$ aufgrund der Produktregel zusätzliche Summanden erscheinen, die die Lösung verhindern. Diese zusätzlichen Summanden können vermieden werden, wenn statt einer einfachen Differentiation ein Differentialoperator verwendet wird. In diesem Fall ist es zweckmäßig

$$\Lambda = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.98)$$

zu definieren. Im mathematischen Anhang wird bewiesen, daß man Λ in das Integral hineinnehmen kann. Man darf also

$$\Lambda^n \int_z^\infty \frac{J_{n+1}(x)}{x^{2n+1}} (x^2 - z^2)^{n-1/2} dx = \int_z^\infty \frac{J_{n+1}(x)}{x^{2n+1}} \Lambda^n (x^2 - z^2)^{n-1/2} dx \quad (1.99)$$

schreiben. Es kann leicht gezeigt werden, daß

$$\Lambda^n (x^2 - z^2)^{n-1/2} = (-1)^n 2^n \frac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi} \sqrt{x^2 - z^2}} \quad (1.100)$$

gilt. Damit ist es möglich, die Wirkung von Λ auf \mathcal{G}_{n+1} anzugeben. Man erhält

$$\Lambda^n \mathcal{G}_{n+1}(z) = (-1)^n 2^n \frac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty \frac{J_{n+1}^2(x)}{x^{2n+1} \sqrt{x^2 - z^2}} dx \quad (1.101)$$

Was jetzt noch benötigt wird, ist ein Ausdruck für $\mathcal{G}_{n+1}(z)$ der die Anwendung des Operators Λ zuläßt. Dies stellt jedoch kein Problem dar, da die Struve-Funktion $S_{n+1}(2z)$ in Reihenform bekannt ist. Sie lautet

$$S_{n+1}(2z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\Gamma(i+3/2)\Gamma(n+i+5/2)} z^{2i+n+2}. \quad (1.102)$$

Setzt man (1.102) in Gleichung (1.97) ein und wendet den Differentialoperator Λ n mal an, so ergibt sich

$$\Lambda^n \mathcal{G}_{n+1} = \frac{\Gamma(n+1/2)}{2\Gamma(1/2)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+i} 2^n \prod_{k=1}^n (i-k+1)}{\Gamma(i+3/2)\Gamma(n+i+5/2)} z^{2i-2n}. \quad (1.103)$$

Dividiert man nun noch durch den Vorfaktor auf der rechten Seite von (1.101), erhält man zusammen mit (1.103) schließlich das Integral $\mathcal{A}_{n,n}$

$$\mathcal{A}_{n,n} = \int_z^\infty \frac{J_{n+1}^2(x)}{x^{2n+1} \sqrt{x^2 - z^2}} dx = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+i} \prod_{k=1}^n (i-k+1)}{\Gamma(i+3/2)\Gamma(n+i+5/2)} z^{2i-2n} \quad (1.104)$$

Es kann leicht gezeigt werden, daß die Summe in (1.104) für jeden Wert von z konvergiert. Diese Darstellungsform der $\mathcal{A}_{n,n}$ hat den Vorteil, daß der Grenzwert $z = 0$

dieser Integrale in einer einfachen Form angegeben werden kann, was besonders bei numerischen Berechnungen von Vorteil ist. Bei $z = 0$ bleiben aus der Summe nur die Terme übrig, bei denen $i = n$ ist. Da das Produkt im Zähler der rechten Seite von (1.104) in diesem Fall gerade der Fakultät von n entspricht, kann $\lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{A}_{n,n}(z)$ auch als

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_z^\infty \frac{J_{n+1}^2(x)}{x^{2n+1} \sqrt{x^2 - z^2}} dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)\Gamma(2n+5/2)} \quad (1.105)$$

geschrieben werden.

Mit den Gleichungen (1.104) und (1.105) ist es nun möglich, die Abhängigkeit der kinetischen Energie in bestimmten Fällen zu berechnen. Insbesondere kann in diesen Fällen ein Vergleich zu den Ergebnissen gezogen werden, die Lamb mit der Näherung $\kappa = 0$ erhalten hat.

1.2.5 Verifizierung der in 1.2.4 berechneten Integrale anhand von Literaturergebnissen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Gleichungen (1.104) im Grenzfall $\kappa = 0$ mit den Ergebnissen von Lamb übereinstimmen. Auf die Abhängigkeit der kinetischen Energie von der abgestrahlten Wellenlänge wird im Zusammenhang mit der Berechnung der Resonanzfrequenz weiter unten ausführlich eingegangen. Als erstes Beispiel sei wieder eine Membran angenommen, die an ihrem Rand fest eingespannt ist. Die Auslenkungsform kann in diesem Fall durch (1.95) genähert werden. Da dann $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_{n \neq 2} = 0$ gesetzt werden kann, bleibt aus der Summe von (1.94) nur das Integral $\mathcal{A}_{2,2}$ und der Koeffizient $\alpha_{2,2}$ übrig. Für die kinetische Energie ergibt sich dann

$$\begin{aligned} T_f &= \alpha^3 \rho \omega^2 \pi 64 \alpha_{2,2} \mathcal{A}_{2,2} \\ &= \alpha^3 \rho \omega^2 \left[0.21015 - 0.02771 \kappa^2 + 0.00164 \kappa^4 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (1.106)$$

Für $\kappa = 0$ erhält man dasselbe Ergebnis wie Lamb. Der Vollständigkeit halber sei hier auch Formel (1.105) verifiziert. Durch einfaches Einsetzen erhält man für $n = 2$

$$\mathcal{A}_{2,2}(0) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2+3/2)\Gamma(4+5/2)} = 0.21015. \quad (1.107)$$

Oftmals wird angenommen, daß die Auslenkung einer Platte konstant über ihren Querschnitt ist, da mit dieser Annahme viele Probleme näherungsweise gelöst werden können. In diesem Fall ist $\lambda_0 = 1$ und $\lambda_{n \neq 0} = 0$, sodaß aus Gleichung (1.94) nur $\alpha_{0,0}$ und das Integral $\mathcal{A}_{0,0}$ übrigbleiben. Für die kinetische Energie ergibt sich dann

$$T = \alpha^3 \rho \omega^2 \left[\frac{4}{3} - \frac{16}{45} \kappa^2 + \dots \right]. \quad (1.108)$$

Auch hier kann leicht verifiziert werden, daß $\mathcal{A}_{0,0}(\kappa)$ im Grenzfall $\kappa = 0$ durch

$$\mathcal{A}_{0,0} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3/2)\Gamma(5/2)} = \frac{4}{3\pi} \quad (1.109)$$

gegeben ist, was wiederum mit dem Ergebnis von Lamb übereinstimmt [4].

Berechnung der Integrale $\mathcal{A}_{n \neq m}$

Im Fall $n \neq m$ kann nicht auf die Struve-Funktionen zurückgegriffen werden. Da die Lösung dieser Integrale nicht ohne erheblichen Aufwand möglich ist, seien an dieser Stelle nur die einzelnen Ergebnisse ohne Zwischenrechnungen angeführt. Eine ausführlichere Rechnung ist im mathematischen Anhang nachzulesen.

Setzt man $n + 1 = \mu$ und $n + 1 = \nu$, kann können Integrale vom Typ $\mathcal{A}_{n,m}$ durch verschiedene nacheinander ausgeführte Substitutionen in die Form

$$\mathcal{A}_{\mu,\nu} = \frac{1}{\underbrace{\kappa^{\mu+\nu-1}}_{\beta}} \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}+i0}^{\frac{\pi}{2}+\infty} -i \frac{J_{\mu}(\kappa \sin \theta) J_{\nu}(\kappa \sin \theta)}{\sin^{\mu} \theta \sin^{\nu} \theta} \sin \theta \, d\theta}_{\mathcal{A}'} \quad (1.110)$$

gebracht werden. \mathcal{A}' ist wiederum ein Integral des allgemeineren Typs

$$\mathcal{I} = \int_{\frac{\pi}{2}+i0}^{\frac{\pi}{2}+\infty} -i \frac{J_{\zeta}(kx \sin \theta) J_{\tau}(ky \sin \theta) J_{\xi}(kz \sin \theta)}{\sin^{\zeta} \theta \sin^{\tau} \theta \sin^{\xi} \theta} \sin \theta \, d\theta \quad (1.111)$$

Integrale dieser Form können analytisch gelöst werden [17]. Nach einer längeren Rechnung ergibt sich

$$\mathcal{I} = - \sum_{\iota=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\xi} \frac{\Gamma(\iota + \ell + 1/2)}{\iota! \ell! \sqrt{\pi}} \left(\frac{x^{\iota} y^{\ell}}{z^{\iota+\ell}} \right) J_{\iota+\zeta}(kx) J_{\ell+\tau}(ky) j_{\iota+\ell-\xi}(kz). \quad (1.112)$$

Hier ist $j_{\iota+\ell-\xi}$ die sphärische Besselfunktion der Ordnung $\iota + \ell - \xi$. Formel (1.112) ist konvergent für alle x, y, z , die der Bedingung

$$\left| \frac{xy}{z^2} \right| \leq 1 \quad (1.113)$$

genügen. Da Integrale vom Typ \mathcal{I} in ihren Indizes symmetrisch sind, muß, wenn die Lösung mit bestimmten Indizes angewandt wird, dieses Konvergenzkriterium unbedingt beachtet werden⁶. Zunächst wird

$$x = z = a \quad \zeta = \mu \quad \tau = 0 \quad \xi = \nu \quad (1.114)$$

⁶beispielsweise führt die Wahl $x = y = a, z = 0$ und $\zeta = \mu, \tau = \nu$ sowie $\xi = 0$ ebenfalls auf das gesuchte Integral. In diesem Fall divergiert jedoch die Summe

gesetzt. Da ja $\kappa = ka$ gilt, erhält man

$$\mathcal{I} = - \sum_{\iota=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\Gamma(\iota + \ell + 1/2)}{\iota! \ell! \sqrt{\pi}} \left(\frac{y^{\ell}}{a^{\ell}} \right) J_{\iota+\mu}(\kappa) J_{\ell}(ky) j_{\iota+\ell-\nu}(\kappa) \quad (1.115)$$

Um das Konvergenzkriterium in (1.113) zu erfüllen und die Lösung passend zur in (1.110) gesuchten Form zu bringen, wird $y = 0$ gesetzt. Berücksichtigt man, daß bei Bessel-Funktionen

$$J_{\ell}(0) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \ell = 0 \\ 0 & \text{falls } \ell \neq 0 \end{cases} \quad (1.116)$$

gilt und beachtet darüber hinaus, daß ebenso $x^0 = 1 \forall x \in \mathbb{R}$ gilt, bleibt aus der Summe über ℓ als einziger Term eine 1 übrig. Gleichung (1.115) reduziert sich damit zu

$$\mathcal{I} = - \sum_{\iota=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\Gamma(\iota + 1/2)}{\iota! \sqrt{\pi}} J_{\iota+\mu}(\kappa) j_{\iota-\nu}(\kappa) \quad (1.117)$$

Substituiert man nun wieder $\mu = m + 1$ sowie $\nu = n + 1$, erhält man die Lösung für die Integrale $\mathcal{A}_{n \neq m}$. Diese Lösung ist nicht auf $n \neq m$ beschränkt, sie ist auch im Fall $n = m$ gültig. Man erhält mit

$$\mathcal{A}_{n \neq m} = - \frac{1}{\kappa^{n+m+1}} \sum_{\iota=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(\iota + 1/2)}{\iota! \sqrt{\pi}} J_{\iota+m+1}(\kappa) j_{\iota-n-1}(\kappa). \quad (1.118)$$

eine Lösung, die wohlgerne für alle $\kappa \in \mathbb{R}$ gültig ist. Ihr Vorteil ist natürlich, daß sie für alle Kombinationen von n und m anwendbar ist. Allerdings hat diese Lösung im einzelnen Anwendungsfall zwei Nachteile. Zwar können bei $\kappa = 0$ die asymptotischen Relationen für die Besselfunktionen eingesetzt werden

$$J_{\iota+m+1}(\kappa) \underset{\kappa \rightarrow 0}{\sim} \frac{\kappa^{\iota+m+1}}{2^{\iota+m+1} \Gamma(\iota + m + 2)} \quad j_{\iota-n-1}(\kappa) \underset{\kappa \rightarrow 0}{\sim} - \frac{(2(\iota - \nu) - 1)!!}{\kappa^{\iota-n}}, \quad (1.119)$$

man sieht aber sofort, daß sich für alle ι Terme ungleich 0 ergeben, da sich die Potenzen von κ , die von den Bessel-Funktionen herrühren, mit dem Vorfaktor κ^{n+m+1} wegheben. Es wäre daher notwendig, viele Glieder der Summe auszuwerten, was bei Bessel-Funktionen nicht ganz einfach ist, insbesondere wenn man diesen Wert numerisch lösen muß. Die Lösung, die mit Hilfe der Struve-Funktionen berechnet wurde, eignet sich durch ihre einfache Darstellung wesentlich besser zur numerischen Auswertung, insbesondere dann, wenn der Grenzwert $\kappa = 0$ betrachtet werden muß.

1.2.6 Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Dichte des umgebenden Mediums

Es ist nun möglich die kinetische Energie des Mediums und damit den fehlenden Summanden im Variationsterm zu berechnen. Setzt man also die Versuchsfunktion

wie in (1.88) mit den entsprechenden Koeffizienten an und löst Gleichung (1.94) unter Berücksichtigung der Formeln (1.104) bzw. (1.118), so ergibt sich für die Energie des Mediums T_f , welches sich in unmittelbarer Nähe der Mikromembran befindet, der folgende Ausdruck

$$T_f = \omega^2 \rho_f a^3 \left(1.34 \lambda_0^2 + 1.47 \lambda_0 \lambda_2 + 0.49 \lambda_2^2 \right) - \omega^2 \rho_f a^3 \left(0.178 \lambda_0^2 + 0.153 \lambda_0 \lambda_2 + 0.03 \lambda_2^2 \right) \kappa^2 \quad (1.120)$$

Dabei wurde nur bis zur zweiten Ordnung entwickelt, da sich zeigt, daß höhere Ordnungen vernachlässigt werden können. Für spätere Zwecke schreiben wir (1.120) um in

$$T_f = \omega^2 T'_f = \omega^2 \rho_f T''_f(\lambda, \kappa), \quad (1.121)$$

wobei T''_f durch

$$T''_f(\lambda, \kappa) = a^3 \left(1.34 \lambda_0^2 + 1.47 \lambda_0 \lambda_2 + 0.49 \lambda_2^2 \right) \kappa^0 - a^3 \left(0.178 \lambda_0^2 + 0.153 \lambda_0 \lambda_2 + 0.03 \lambda_2^2 \right) \kappa^2 \quad (1.122)$$

gegeben ist. Die kinetische Energie hängt demnach sowohl von der abgestrahlten Wellenlänge als auch von der Auslenkungsform der Mikromembran ab. Obwohl die Parameter λ_0 und λ_2 noch nicht bekannt sind, kann an dieser Stelle schon eine Aussage über den Einfluß der Wellenlänge gemacht werden. Vergleicht man die beiden Faktoren in den Klammern, so fällt auf, daß der Faktor vor κ^2 ungefähr zehnmal kleiner ist als der Faktor vor κ^0 . Da die Helmholtzzahl κ bei Mikromembransensoren Werte um 0.4 annimmt, führt die Berücksichtigung von κ zu einer Änderung der kinetischen Energie T_f von ca. 1.6 Prozent, sodaß der Einfluß bei der Berechnung des Rayleigh-Quotienten zunächst vernachlässigt werden kann. Für die kinetische Energie des Mediums kommt daher nur der Teil von (1.120) in Frage, der proportional zu κ^0 ist. Damit vereinfacht sich die Gleichungen (1.121) und (1.122) zu

$$T_f = \omega^2 \rho_f a^3 \left(1.34 \lambda_0^2 + 1.47 \lambda_0 \lambda_2 + 0.49 \lambda_2^2 \right). \quad (1.123)$$

und

$$T''_f = a^3 \left(1.34 \lambda_0^2 + 1.47 \lambda_0 \lambda_2 + 0.49 \lambda_2^2 \right) \quad (1.124)$$

Mit (1.123) ist es nun möglich, die Resonanzfrequenz von Mikromembran in Abhängigkeit von der Dichte des umgebenden Mediums zu berechnen. Wenn der Druck des Mediums auf die Mikromembran sowie die Masse der Mikrostruktur berücksichtigt werden sollen, ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht analog der Gleichungen (1.58) und (1.46) die Differentialgleichung des Systems Mikromembran-Medium. Sie lautet

$$D \left(\Delta^2 \psi \right) - h_m \sigma_0 \Delta \psi + \rho_m h_m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\tilde{m}_s \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - p_1 e^{-i\omega t} \quad (1.125)$$

Mit dem üblichen Ansatz $\psi = u(r)e^{-i\omega t}$ folgt aus (1.125)

$$D(\Delta^2 u) - h_m \sigma_0 \Delta u - \rho_m h_m \omega^2 u = \omega^2 \tilde{m}_s u - p_1. \quad (1.126)$$

Die Differentialgleichung wird mit nun $u(r)/2$ multipliziert⁷, wobei $u(r)$ wie immer die gegebenen Randbedingungen erfüllen soll. Anschließend wird über die Fläche der Membran integriert und nach ω^2 aufgelöst. Damit erhält man für den Rayleigh'schen Quotienten, wenn man noch $-p_1 = \rho_f \omega^2 \phi_1$ beachtet

$$\omega^2 = \frac{\frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a D(\Delta u)^2 r dr d\vartheta + \frac{h_m \sigma_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 r dr d\vartheta}{\frac{\rho_m h_m}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a u^2 r dr d\vartheta + \frac{\rho_f}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \phi_1 u r dr d\vartheta + \frac{\tilde{m}_s}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \delta(r-a) u^2 r dr d\vartheta} \quad (1.127)$$

Mit Hilfe von (1.121) bzw. (1.123) und der im Anschluß an Formel (1.48) definierten Größen kann der Rayleigh'sche Quotient auch in der Form

$$\omega^2 = \frac{V_D + V_{\sigma_0}}{T'_m + \rho_f T'_f + T'_s} \quad (1.128)$$

geschrieben werden. Dabei wurde ausgenutzt, daß die kinetische Energie des Mediums T_f gemäß (1.75) durch

$$T_f = \frac{\rho_f}{2} \omega^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \phi_1 u(r) r dr d\vartheta \quad (1.129)$$

gegeben ist. Macht man nun wieder für die Versuchsfunktion den Ansatz gemäß (1.39) dann erhält man für T_f den Ausdruck (1.123). Die übrigen Terme lassen sich ohne Probleme berechnen, sodaß sich für das Quadrat der Resonanzfrequenz ω ergibt:

$$\omega^2 = \frac{\frac{256}{5} \pi D \frac{\lambda_2^2}{a^2} + h_m \sigma_0 \frac{52}{15} \pi \lambda_2^2}{h_m \rho_m a^2 \pi \left(\lambda_0^2 + \frac{17\lambda_2^2}{35} + \lambda_0 \lambda_2 \right) + \rho_f a^3 \left(2.68 \lambda_0^2 + 2.94 \lambda_0 \lambda_2 + 0.98 \lambda_2^2 \right) + m_s \lambda_0^2} \quad (1.130)$$

Differenziert man diesen Ausdruck nach λ_0 bzw. λ_2 , so erhält man neben $\lambda_2 = 0$ die Lösung

$$\lambda_0 = -\frac{\pi \rho_m h_m a^2 + 2.941 \rho_f a^3}{2\pi h_m \rho_m a^2 + 5.344 \rho_f a^3 + 2m_s} \lambda_2 \quad (1.131)$$

⁷Der Faktor 1/2 ist notwendig, um Ausdrücke zu erhalten, die konsistent mit der kinetischen Energie des Mediums T_f sind.

$\lambda_2 = \lambda_0 = 0$ stellt die triviale Lösung des Eigenwertproblems dar. Einen Schätzwert für die erste Oberschwingung kann durch den Rayleigh-Quotienten berechnet werden, wenn in (1.130) die Versuchsfunktion aus (1.39) eingesetzt wird, wobei für λ_0 die rechte Seite von (1.131) gesetzt wird. Da die Amplitude keinen Einfluß auf den Rayleigh-Quotienten besitzt, kann o.B.d.A $\lambda_2 = 1$ gesetzt werden. Aus (1.131) folgt dann

$$\lambda_0 = -\frac{m_m + 2.941 \rho_f a^3}{2m_m + 5.344 \rho_f a^3 + 2m_s}, \quad (1.132)$$

da $\pi h_m \rho_m a^2$ gerade die Masse der Mikromembran darstellt. An den Gleichungen (1.131) bzw. (1.132) seien noch zwei Dinge angemerkt. In den meisten Fällen ist die Masse der Mikrostruktur ungefähr so groß wie die Membranmasse, d.h. $m_m \approx m_s$. Damit wird (1.132) in

$$\lambda_0 = -\frac{m_m + 2.941 \rho_f a^3}{4m_m + 5.344 \rho_f a^3} \quad (1.133)$$

überführt. Aus der Versuchsfunktion (1.37) ist ersichtlich, daß λ_0 gerade die Auslenkung des Systems am Rand $r = a$ darstellt. Schwingt die Mikromembran in einem Medium, trägt die Dichte des Mediums ebenfalls einen Anteil zu λ_0 bei, sodaß die Auslenkung am Rand und damit die Schwingungsform im Medium eine andere als im Vakuum ist. Darüber hinaus muß strenggenommen für jede Dichte der Parameter λ_0 und damit ω^2 neu berechnet werden. Aus (1.133) ist ersichtlich, daß der Betrag von λ_0 einen größeren Wert annimmt, wenn die Dichte des umgebenden Mediums ansteigt. Da in den meisten Fällen die Dichteschwankungen sich jedoch im Bereich von wenigen Prozent um eine Dichte ρ_0 bewegen, wird auch λ_0 nur um wenige Prozent schwanken. Aus diesem Grund kann in guter Näherung λ_0 auch dann mit der Dichte ρ_0 berechnet werden, wenn die tatsächliche Dichte von ρ_0 abweicht.

Es sei bemerkt, daß bei der Berechnung der Werte von λ_0 angenommen wird, daß die Mikrostruktur keine Biegemomente aufnimmt. Dies ist in der Realität sicherlich nur selten der Fall. FEM-Rechnungen haben gezeigt, daß z. B. eine Mikrostruktur aus Polyimid stark verformt wird. Die Werte, die für λ_0 berechnet werden, sind daher nur Näherungswerte. Die oben erwähnte Abhängigkeit von der Dichte des umgebenden Mediums kann daher nur als ungefährender funktionaler Zusammenhang verstanden werden, nicht aber als Gleichung, aus der die exakten Abhängigkeiten entnommen werden können.

Bestimmung der Kopplungsgröße χ

Der Ausdruck für ω^2 in der Form (1.128) kann noch ein wenig umgeformt werden, sodaß die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Dichte des umgebenden Mediums deutlicher zutage tritt. Der Rayleigh-Quotient aus (1.128) kann auch als

$$\omega^2 = \frac{V_D + V_{\sigma_0}}{(T'_m + T'_s) \left(1 + \frac{T'_f}{T'_m + T'_s}\right)} \quad (1.134)$$

geschrieben werden. Der Faktor $1 + T'_f/(T'_m + T'_s)$ stellt gerade das Verhältnis dar, um das die Masse des schwingenden Systems erhöht wird, wenn die Mikromembran von einem Medium umgeben ist. Da das Verhältnis der kinetischen Energie des Mediums zur kinetischen Energie des Systems Mikromembran-Mikrostruktur auch durch

$$\frac{T'_f}{T'_m + T'_s} = \frac{T''_f}{(T'_m + T'_s)} \rho_f \quad (1.135)$$

ausgedrückt werden kann, ist durch den Faktor vor ρ_f in (1.135) nun auch die Kopplungsgröße χ festgelegt. Sie ergibt sich zu

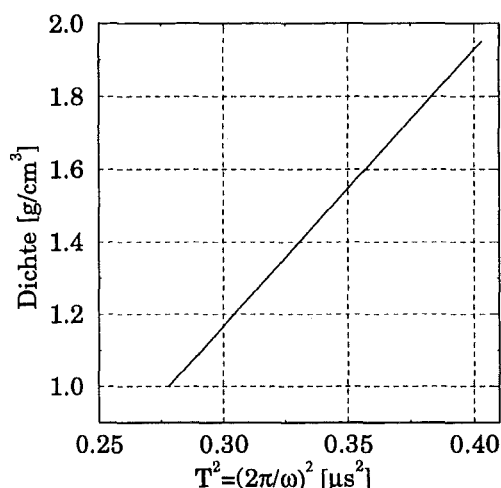
$$\chi = \frac{T''_f}{T'_m + T'_s} = \frac{a^3 (2.68 \lambda_0^2 + 2.94 \lambda_0 \lambda_2 + 0.98 \lambda_2^2)}{h_m \rho_m a^2 \pi \left(\lambda_0^2 + \frac{17 \lambda_2^2}{35} + \lambda_0 \lambda_2 \right) + m_s \lambda_0^2} \quad (1.136)$$

Würde die Mikromembran auf beiden Seiten mit dem umgebenden Medium in Berührung stehen wäre die Kopplungsgröße χ gerade doppelt so groß. Mit (1.136) kann der funktionale Zusammenhang zwischen der Resonanzfrequenz ω und der Dichte ρ_f des umgebenden Mediums schließlich als

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \chi \rho_f}} \quad \text{bzw. durch} \quad \rho_f = \frac{1}{\chi} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) \quad (1.137)$$

geschrieben werden. Dabei wurde $(V_D + V_{\sigma_0})/(T'_m + T'_s)$ aus Gleichung (1.134) zu ω_0^2 zusammengefaßt, sodaß ω_0 die Resonanzfrequenz der Mikromembran im Vakuum darstellt. Die Ausdrücke in (1.137) sind identisch mit den von Lamb hergeleiteten Ausdrücken, die in Gl. (1.1) dargestellt sind. Der funktionale Zusammenhang aus (1.137) ist in Abbildung 1.5 für einen typischen Titan-Titan-Sensor dargestellt, der auf einer Seite mit dem Medium in Berührung steht.

Abbildung 1.5: Funktionaler Zusammenhang zwischen der Dichte des Mediums und $T^2 = 4\pi^2/\omega^2$. Die Werte wurden für einen Titan-Titan-Sensor des Typs H(53;52.5;7) mit Hilfe der Gl. (1.130), (1.131) und (1.137) berechnet.



Mit Hilfe der Gleichungen (1.131) und (1.136) kann nun auch die Abhängigkeit der Kopplungsgröße χ von der Höhe der Mikrostruktur berechnet werden. Dazu muß in

Ausdruck (1.131) nur $\lambda_2 = 1$ gesetzt werden, was ohne weiteres möglich ist, da die Amplitude der Schwingungen keinen Einfluß auf χ bzw. die Resonanzfrequenz ω hat. Anschließend kann dann mit den vorgegebenen Sensorparametern die Kopplungsgröße χ berechnet werden. Als Beispiel sei hier ein Titan-Titan-Sensor des Typs H(53;52.5;7) verwendet. Mit Hilfe der Gleichung (1.131) ergibt sich, wenn die maximale Amplitude auf 1 normiert wird⁸, für die Auslenkung $u(a)$ am Rand der Mikromembran ein Wert von

$$u(a) = -0.18 = \lambda_0. \quad (1.138)$$

Durch Einsetzen der genannten Sensorparameter erhält man mittels Gl. (1.130) für die Resonanzfrequenz $f_{\text{res}} = \omega/2\pi$ in Wasser ($\rho_f=1 \text{ g/cm}^3$) einen Wert von

$$f_{\text{res}} = 1.897 \text{ MHz} \quad (1.139)$$

Die Kopplungsgröße berechnet sich mit Gl. (1.136) zu

$$\chi = 0.884 \text{ cm}^3/\text{g}. \quad (1.140)$$

Die Resonanzfrequenz im Vakuum $f_0 = \omega_0/2\pi$ erhält man, wenn die Daten aus Gl. (1.139) und (1.140) in Formel (1.137) eingesetzt werden. Es ergibt sich

$$f_0 = 2.60 \text{ MHz}. \quad (1.141)$$

Es ist interessant, diese Werte mit den Werten zu vergleichen, wenn die Mikromembran am Rand fest eingespannt ist. Einen solchen Fall kann man erreichen, wenn in (1.131) $m_s = \infty$ gesetzt wird. Die Auslenkung am Rand und daher auch der Koeffizient λ_0 sind dann natürlich gleich null. Die Kopplungsgröße χ und die Resonanzfrequenz in Wasser ergeben sich in diesem Fall zu

$$f_{\lambda_0=0} = 1.53 \text{ MHz} \quad \chi_{\lambda_0=0} = 2.8 \text{ cm}^3/\text{g} \quad (1.142)$$

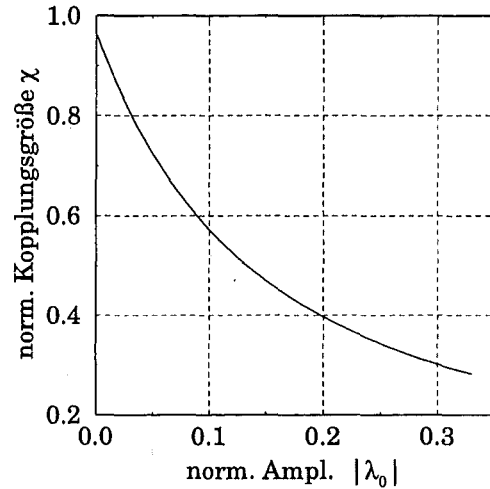
Die Kopplungsgröße ist also wesentlich größer, wenn die Membran am Rand eingespannt ist. Dies kann erklärt werden, wenn man das von der Mikromembran verdrängte Volumen betrachtet. Wenn die Mikrostruktur an den Schwingungen teilnimmt, wird weniger Medium in Richtung des Ultraschallkopfes beschleunigt. Das Medium wird mehr oder weniger zwischen den entstehenden Schwingungsbäuchen hin- und hergeschoben. Ist die Mikromembran aber fest eingespannt, dann wird das gesamte Medium in *eine* Richtung beschleunigt. Verändert man die Höhe der Mikrostruktur, dann ändert sich die Amplitude der Membran am Rand und damit auch die Kopplungsgröße χ . In Abbildung 1.6 ist die normierte Kopplungsgröße χ in Abhängigkeit vom Betrag der Amplitude $u(a)$ am Rand der Mikromembran dargestellt. Dabei wurde die Maximalamplitude der Mikromembran bei $r = 0$ vorher auf 1 normiert. Die Werte wurden für einen Titan-Titan-Sensor mit den oben angegebenen Daten berechnet. Abbildung 1.6 zeigt, daß es wünschenswert ist, Mikro-

⁸Wenn die maximale Amplitude gleich 1 ist, gilt bei $r = 0$

$$1 = \lambda_0 + (5\lambda_2/3)$$

Da man wegen (1.131) λ_0 auch als $\lambda_0 = q\lambda_2$ schreiben kann, ergibt sich bei einer auf 1 normierten Auslenkung $\lambda_0 = 3q/(3q + 5)$

Abbildung 1.6: Kopplungsgröße χ in Abhängigkeit von der Amplitude der Mikromembran am Rand.



membransensoren so herzustellen, daß die Mikrostruktur möglichst wenig an den Schwingungen teilnimmt, da dann die Kopplungsgröße χ am größten ist und damit auch der zu erwartende Dichteeffekt.

1.2.7 Einfluß der Wellenlänge auf die Kopplungsgröße χ

Um eine vergleichsweise einfache Berechnung der Resonanzfrequenz zu ermöglichen, wurde im vorangehenden Abschnitt vorausgesetzt, daß der Einfluß der Wellenlänge auf die Kopplungsgröße χ vernachlässigbar klein ist. Dieser Abschnitt befaßt sich nun mit dem Fehler, der bei der Vernachlässigung dieses Einflusses entsteht.

Analog zur Bestimmung der Kopplungsgröße χ durch Gleichung (1.136) ist es möglich, die Änderung der Kopplungsgröße $\Delta\chi$ zu definieren. Dabei wird in diesem Fall in der kinetischen Energie T_f nur der Term proportional κ^2 berücksichtigt (vgl. Gl. (1.120)). Dividiert man den entsprechenden Anteil von T_f'' aus Gl. (1.122) durch die Summe der kinetischen Energien T_m' und T_s' , dann erhält man für $\Delta\chi$

$$\Delta\chi = \frac{\alpha^3 (0.356 \lambda_0^2 + 0.306 \lambda_0 \lambda_2 + 0.06 \lambda_2^2)}{h_m \rho_m a^2 \pi \left(\lambda_0^2 + \frac{17 \lambda_2^2}{35} + \lambda_0 \lambda_2 \right) + m_s \lambda_0^2} \kappa^2. \quad (1.143)$$

Dabei wurden die kinetischen Energien T_m und T_s wie oben mit der Versuchsfunktion aus Gl. (1.39) berechnet. Die gesamte Kopplungsgröße χ_g setzt sich nun additiv aus χ und $\Delta\chi$ zusammen, sodaß man für den funktionalen Zusammenhang zwischen der Dichte des umgebenden Mediums und der Resonanzfrequenz ω gemäß (1.137) die folgende Gleichung erhält:

$$\rho_\kappa = \frac{1}{\chi + \Delta\chi} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) \quad (1.144)$$

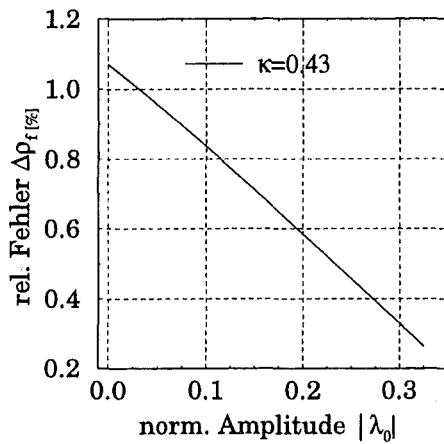


Abbildung 1.7: Gemäß Gl. (1.146) berechneter relativer Fehler $\Delta\rho_f$ bei Vernachlässigung der abgestrahlten Wellenlänge in Wasser in Abhängigkeit vom Betrag der normierten Amplitude $|\lambda_0|$.

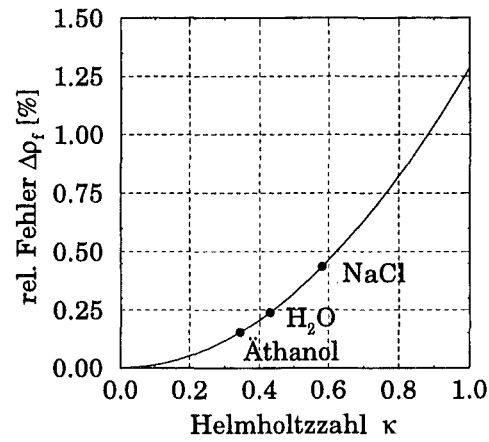


Abbildung 1.8: Relativer Fehler in Abhängigkeit von der Helmholtzzahl κ (siehe Gl. (1.146)).

Um im folgenden einfacher unterscheiden zu können, wurde hier die Dichte des Mediums mit ρ_κ bezeichnet. Der relative Fehler $\Delta\rho_f$ berechnet sich mit Hilfe der Gleichungen (1.137) und (1.144) zu

$$\Delta\rho_f = \frac{\rho_f - \rho_\kappa}{\rho_\kappa} = \frac{\left(\frac{1}{\chi} - \frac{1}{\chi + \Delta\chi}\right) \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)}{\left(\frac{1}{\chi + \Delta\chi}\right) \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)} = \frac{\Delta\chi}{\chi} \quad (1.145)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (1.136) und (1.143) ergibt sich für $\Delta\rho_f$ dann

$$\Delta\rho_f = \frac{(0.356\lambda_0^2 + 0.306\lambda_0\lambda_2 + 0.06\lambda_2^2)}{(2.68\lambda_0^2 + 2.94\lambda_0\lambda_2 + 0.98\lambda_2^2)} \kappa^2. \quad (1.146)$$

Zunächst wird gezeigt, wie der Fehler $\Delta\rho_f$ von der Amplitude λ_0 am Rand der Mikromembran abhängt, wenn die Helmholtzzahl κ festgehalten wird. Eine Veränderung von λ_0 würde zwar auch zu einer Veränderung der Resonanzfrequenz führen, diese könnte aber beispielsweise durch eine andere Dicke der Mikromembran kompensiert werden, sodaß κ konstant bliebe.

Berechnet man nun für den Titan-Titan-Sensor des Typs H(53;52.5;7) die Resonanzfrequenz und die entsprechende Helmholtzzahl in Wasser, dann ergeben sich die Werte

$$f_{\text{res}} = \frac{\omega}{2\pi} = 1.897 \text{ MHz} \quad \text{und} \quad \kappa = 0.43. \quad (1.147)$$

Dabei wurde eine Schallgeschwindigkeit $c=1500$ m/s angenommen. Setzt man den Wert von κ in Gl. (1.146) ein und berechnet mit Hilfe von Gleichung (1.131) für

Medium	ρ_f [g/cm ³]	c [m/s]	$f_{res} = \omega/2\pi$ [MHz]	κ	$\Delta\rho_f$ [%]
Äthanol	0.795	1163	1.995	0.582	0.44
Wasser	1.0	1500	1.897	0.43	0.24
NaCl-H ₂ O	1.2	1782	1.814	0.345	0.15

Tabelle 1.3: Relativer Fehler $\Delta\rho_f$, Resonanzfrequenz $f_{res} = \omega/2\pi$ und Helmholtzzahl κ in Abhängigkeit von der Dichte ρ_f und der Schallgeschwindigkeit c . f_{res} wurde mittels Gl. (1.137) sowie den Daten aus (1.140) und (1.141) berechnet.

verschiedene Höhen der Mikrostruktur die entsprechenden Werte von λ_0 ⁹, dann erhält man in Abhängigkeit von der Amplitude der Mikromembran bei $r = a_{eff}$ den relativen Fehler einer Dichtemessung in Wasser, wenn bei der Bestimmung der Dichte Gl. (1.137) zugrundegelegt wird. Diese Abhängigkeit ist in Abbildung 1.7 gezeigt.

Man sieht, daß der Fehler $\Delta\rho_f$ dann klein ist, wenn die Mikromembran am Rand eine vergleichsweise große Amplitude aufweist. Für einen Titan-Titan-Sensor ist $|\lambda_0| \approx 0.18$, was einem Fehler von ca. 0.6 Prozent entspricht. Der Fehler liegt demnach in der Größenordnung der Meßgenauigkeit. Bei einer Bestimmung der Kopplungsgröße χ aus einer Dichtemessung können Abweichungen von der theoretisch berechneten Größe daher nicht eindeutig auf den Einfluß der Wellenlänge zurückgeführt werden, da die Kopplungsgröße wesentlich stärker vom Radius bzw. der Dicke der Mikromembran abhängt.

Da in jedem Fall die Möglichkeit gegeben ist, eine Dichtemessung auf die Dichte in Wasser zu normieren, ist nicht der absolute Wert von χ relevant, sondern die Änderung von χ , wenn die Dichte in Medien mit unterschiedlichen Schallgeschwindigkeiten gemessen wird. Wird nun wieder der Titan-Titan-Sensor des Typs H(53;52.5;7) zugrundegelegt, dann kann für feste Werte von λ_0 bzw. λ_2 gemäß Gleichung (1.146) der Fehler $\Delta\rho_f$ in Abhängigkeit von der Helmholtzzahl κ berechnet werden. Auf diese Weise erhält man die in Abbildung 1.8 dargestellte funktionale Abhängigkeit.

Für eine Dichtemessung ist es vor allem wichtig zu wissen, in welchem Bereich sich die Helmholtzzahl κ bewegt, wenn die Dichte in Medien mit unterschiedlich großen Schallgeschwindigkeiten gemessen wird. Als Beispiel sind in Abbildung 1.8 die Punkte für Wasser und wässrige Äthanol- bzw. Kochsalzlösungen markiert. Da der Einfluß der Helmholtzzahl auf χ zweiter Ordnung ist, kann die Resonanzfrequenz in diesen Medien in guter Näherung durch Gl. (1.137) berechnet werden. In Tabelle 1.3 ist neben dem Fehler $\Delta\rho_f$ auch die Dichte ρ_f , die Schallgeschwindigkeit c sowie die Resonanzfrequenz $f_{res} = \omega/2\pi$ und die Helmholtzzahl κ angegeben. Dabei wurde den Rechnungen wie oben ein Titan-Titan-Sensor des Typs H(53;52.5;7) zugrundegelegt.

Die letzte Spalte in Tabelle 1.3 zeigt, daß der Fehler $\Delta\rho_f$ im Meßbereich nur um ca. 0.3 Prozent ansteigt. Dieser Wert wird aber nur dann erreicht, wenn sich die

⁹Dabei kann o.B.d.A $\lambda_2 = 1$ gesetzt werden.

Schallgeschwindigkeit der Medien in so extremen Bereichen wie bei Äthanol oder einer Kochsalzlösung bewegt. Selbst dann liegt der Fehler $\Delta\rho_f$ jedoch im Bereich der erreichbaren Meßgenauigkeit und kann deshalb nicht eindeutig nachgewiesen werden.

1.2.8 Schwingungen in viskosen Medien

Bei Schwingungen in Medien entstehen, bedingt durch die vorhandene Relativbewegung von Mikromembran und Medium, immer auch Reibungskräfte im Medium, vor allem aber an der Oberfläche der Mikromembran selbst. In diesem Abschnitt wird der Einfluß der Viskosität behandelt, welcher sich in der Dämpfung der Schwingungen bemerkbar macht, und wie die Dichte einen Einfluß auf die Resonanzfrequenz besitzt.

Die Bewegung eines Körpers in viskosen Medien wird durch die Navier-Stokes Gleichungen beschrieben. Diese lauten

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_f} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (1.148)$$

Dabei ist \mathbf{v} die Geschwindigkeit des Mediums, p der Druck, ρ_f die Dichte des Mediums und ν die kinematische Viskosität [18]. Da die Gleichungen (1.148) nichtlineare Anteile besitzen, können sie in den meisten Fällen nicht geschlossen gelöst werden. Dies ist auch bei der Strömung um eine Mikromembran der Fall. Es ist aber möglich, sich der Lösung eines verwandten Problems zu bedienen, um damit die Reibungskraft auf eine Mikromembran zu berechnen, die in einem viskosen Medium schwingt.

Wenn die Schwingungamplitude ξ_0 eines Körpers klein im Vergleich zu seiner lateralen Ausdehnung "2a" ist, d.h.

$$\xi_0 \ll 2a \quad \text{und} \quad 4a^2 \gg \frac{\nu}{\omega} \quad (1.149)$$

gilt, dann kann die Strömung um diesen Körper in erster Näherung durch eine Potentialströmung beschrieben werden [18]. Mikromembranen, die einen Durchmesser von ca. 60 μm haben und bei einer Frequenz von ca. 2 MHz schwingen, erfüllen diese Relationen auch bei größeren Viskositäten noch recht gut, da aufgrund der inneren Spannung der Mikromembranen nur vergleichsweise kleine Auslenkungen möglich sind¹⁰. Speziell für schwingende Körper gilt bei Potentialströmungen dann

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0 \quad \text{und} \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1.150)$$

Aufgrund der kleinen Amplitude ändert sich die Geschwindigkeit nur über eine Länge l merklich in ihrer Größenordnung. Weit größer als die Normalkomponente ist dann die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit. Es gilt daher

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\xi_0^2 \omega^2}{2a}. \quad (1.151)$$

Der erste Term auf der linken Seite von (1.148) ist jedoch von der Größenordnung

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \xi_0 \omega^2 \quad (1.152)$$

¹⁰Wie im Abschnitt "statischer Druck" gezeigt wurde, ist die maximal mögliche Auslenkung ξ_0 einer Mikromembran aus Titan durch $\xi_0 = 0.095 \cdot a$ gegeben.

sodaß $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ gegen $\partial \mathbf{v} / \partial t$ vernachlässigt werden kann. Wendet man nun noch auf beiden Seiten der Navier-Stokes Gleichungen den Operator **rot** an, und beachtet, daß **rot grad** $p = 0$ ist, lauten diese nun

$$\mathbf{rot} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \mathbf{rot} \Delta \mathbf{v} \quad (1.153)$$

Da im übrigen Medium, also fern der Mikromembranoberfläche, **rot** $\mathbf{v} = 0$ gilt, ist dort auch $\Delta \mathbf{v} = 0$ ¹¹, d.h. daß die Strömung außerhalb der Grenzschicht eine Potentialströmung ist [18].

Wird von den in Gleichung (1.149) gemachten Annahmen ausgegangen, kann die Strömung um eine Mikromembran näherungsweise berechnet werden. In diesem Fall kann die Mikromembran in einzelne ebene Flächenelemente zerlegt werden, welche - gegeben durch die Tangentialkomponente der Membrangeschwindigkeit - Schwingungen in ihrer eigenen Ebene ausführen. Für eine Fläche, die in ihrer eigenen Ebene schwingt, sind die Navier-Stokes Gleichungen aber geschlossen lösbar [18], sodaß mit der so gefundenen Lösung auch der Einfluß der Viskosität auf die die Schwingungen der Mikromembran näherungsweise berechnet werden kann. Zunächst sei die sogenannte Grenzschichtdicke δ definiert, bei der es sich um eine Art Eindringtiefe der Schwingungen in das umgebende Medium handelt. Man kann zeigen, daß

$$v \sim e^{-\sqrt{\omega/2\nu}x} \quad (1.154)$$

gilt, wobei v wieder die Geschwindigkeit des Mediums ist und die positive x -Achse von der Fläche in das Medium zeigt. Die Eindringtiefe δ ist dann durch

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \quad (1.155)$$

definiert und hat die Dimension [Länge]. Durch sie ist derjenige Abstand gegeben, bei dem die Geschwindigkeit um einen Faktor $1/e$ abgeklungen ist.

1.2.9 Berechnung der Reibungskraft

Die Reibungskraft, die ein viskoses Medium auf eine Mikromembran ausübt, kann mit Hilfe der obigen Voraussetzungen wie folgt berechnet werden: Betrachtet man

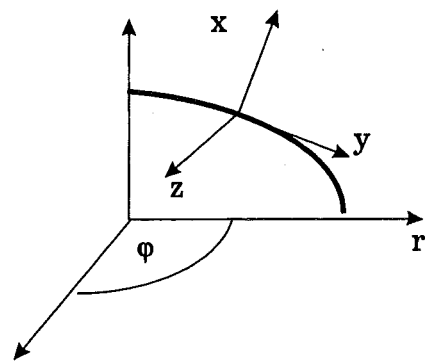


Abbildung 1.9: Schematische Zeichnung des benutzten Koordinatensystems

¹¹Es gilt ja **rot** $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{rot} \mathbf{v}}{\partial t}$

ein Flächenelement dA auf einer Mikromembran, daß groß gegen die Eindringtiefe δ ist, aber klein gegen l , so ist dieses Element in erster Näherung eine ebene Fläche. Die Geschwindigkeit $(\partial\psi/\partial t)$ eines jeden Flächenelements wird, wie in Abbildung 1.9 gezeigt, zerlegt. Die x -Achse zeige also in Richtung der Normalen, die y -Achse in tangentialer Richtung, z -Achse zeige in eine Richtung senkrecht zu den ersten beiden.

Sei nun v_y die tangentialer Komponente des Mediums und v_x die normale Komponente. Aufgrund der Rotationssymmetrie und der Auslenkungsform der Membranen¹² hängt das Geschwindigkeitsprofil des Mediums nur von x und y , nicht aber von z ab. v_z ist darüberhinaus 0. Die x und y -Komponente von $\text{rot } v$ sind daher identisch erfüllt. Aus der z -Komponente erhält man

$$\text{rot } v_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad \text{daher} \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (1.156)$$

Die x -Abhängigkeit der Komponente v_y innerhalb der Grenzschicht ist bekannt [18]. Sie lautet

$$v_y(x, t) = v_y^0 e^{[(i-1)\sqrt{\omega/2\nu}x]} e^{-i\omega t} \quad (1.157)$$

Die Randbedingungen können erfüllt werden, in dem die Geschwindigkeitsamplitude v_y^0 so anpaßt wird, daß an der Oberfläche der Mikromembran v_y gerade gleich der Tangentialkomponente $\dot{\psi}(r, t)$ der Membrangeschwindigkeit ist. Setzt man wieder

$$\psi(r, t) = u(r)e^{-i\omega t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = u_\omega(r)e^{-i\omega t}, \quad (1.158)$$

so ergibt sich für die Tangentialkomponente $u_y(r, t)$ der Wert

$$u_y(r, t) = \frac{\partial\psi}{\partial t} \sin \alpha(r) = u_y^0(r)e^{-i\omega t} \quad (1.159)$$

Dabei ist $\alpha(r)$ gerade $\arctan(\partial u/\partial r)$. Die Geschwindigkeitsamplitude der Tangentialkomponente an der Stelle r ist somit

$$u_y^0(r) = u_\omega(r) \sin \arctan \frac{\partial u(r)}{\partial r} \quad (1.160)$$

Da die Rechnung unter der Annahme erfolgt, daß die Amplitude ξ_0 klein gegen die laterale Ausdehnung einer Mikromembran ist, kann $\tan \alpha = \sin \alpha = \alpha$ gesetzt werden¹³, sodaß die Tangentialkomponente von $\partial\psi/\partial t$ sich zu

$$u_y^0(r) = u_\omega(r) \frac{\partial u(r)}{\partial r} e^{-i\omega t} \quad (1.161)$$

ergibt. Die Randbedingung wird erfüllt, wenn

$$v_y^0 = u_\omega(r) \frac{\partial u(r)}{\partial r} \quad (1.162)$$

¹²Es wird mit der Grundschiwingung der Mikromembran gerechnet, daher ist $\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} = 0$

¹³Im mathematischen Anhang wird dies an einem Beispiel gezeigt

ist. Damit kann die Tangentialkomponente der Fluidgeschwindigkeit in der Grenzschicht durch

$$v_y(r, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial u(r)}{\partial r} e^{[(i-1)\sqrt{\omega/2\nu}x]} \quad (1.163)$$

ausgedrückt werden.

Die Reibungskraft $p_{x,y}$ pro Flächenelement, die durch die Bewegung des Mediums an der Oberfläche eines Körpers entsteht, ist durch

$$p_{x,y} = \nu \rho_f \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \Big|_{x=0} \stackrel{(1.156)}{=} 2\nu \rho_f \frac{\partial v_y}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (1.164)$$

gegeben [18]. Aus (1.164) folgt zusammen mit (1.163) schließlich

$$p_{x,y} = \rho \sqrt{2\nu\omega} (i-1) \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (1.165)$$

Berücksichtigt man nun noch $\ddot{\psi} = -i\omega\dot{\psi}$, kann die Reibungskraft an der Membranoberfläche auch als

$$p_{x,y} = -\rho \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \rho \sqrt{2\nu\omega} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.166)$$

ausgedrückt werden. Der erste Summand stellt, da er proportional $\ddot{\psi}$ ist, eine additive Masse dar, die einen Teil zur insgesamt beschleunigten Masse des Systems Mikromembran-Medium beiträgt. Der zweite Term ist proportional der Geschwindigkeit und steht daher für ein Dämpfungsglied.

1.2.10 Einfluß der Viskosität auf die Resonanzfrequenz

Für die Differentialgleichung der Mikromembran wird nur der erste Term von Gleichung (1.166) benötigt, da Dämpfungsterme in einem gesonderten Modell betrachtet werden. Führt man mit diesem ersten Term das bekannte Prozedere durch, multipliziert also mit $u(r)/2$ und integriert dann über die Fläche der Mikromembran, erhält man einen zusätzlichen Term T_ν in der kinetischen Energie, der allein durch die Viskosität des Mediums zustande kommt. Es ergibt sich mit $\psi = u \cdot e^{-i\omega t}$

$$\begin{aligned} T_\nu &= \frac{1}{2} \int_A p_{x,y} u \, dA = -\rho_f \omega^2 \sqrt{\frac{\nu}{2\omega}} \int_A \frac{\partial u}{\partial r} u^2 \, dA \\ &= \omega^2 \rho_f \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} T'_\nu. \end{aligned} \quad (1.167)$$

Dieser Term ist proportional der dritten Potenz der Schwingungsamplitude, da

$$\frac{\partial u}{\partial r} \propto \xi_0 \quad \text{und} \quad u^2 \propto \xi_0^2 \quad (1.168)$$

ist. Wie sich zeigt, ist es zweckmäßig, die Kopplungsgröße des Viskositätseffekts als

$$\beta_\nu = \frac{T'_\nu}{T'_m + T'_r} \quad (1.169)$$

zu definieren. Da die kinetische Energie der Membran T_m und die kinetische Energie der Mikrostruktur T_r beide nur jeweils proportional zu ξ_0^2 sind, folgt daraus, daß die Kopplungskonstante des Viskositätseffekts ihrerseits proportional der Amplitude ξ_0 ist. Wenn also die Möglichkeit besteht, β_v experimentell zu bestimmen, dann kann auf diese Weise auch eine Aussage über die tatsächliche Größe der Schwingungsamplitude einer Mikromembran bei ihrer Resonanzfrequenz gemacht werden.

Der Anteil der additiven Masse, der durch die Viskosität hinzukommt, kann wie die Dichte und die Masse der Mikrostruktur in die Differentialgleichung des Systems integriert werden. Dies geschieht, in dem man $p_{x,y}$ in der Form (1.166) auf der rechten Seite von (1.125) hinzufügt. Das übliche Verfahren führt dann wieder zu einem Variationsausdruck für die Resonanzfrequenz einer Mikromembran. Benutzt man für die einzelnen Terme die abkürzende Schreibweise, so ergibt sich

$$\omega^2 = \frac{V_D + V_{\sigma_0}}{T'_m + \rho_f T'_f + \rho_f T'_v \sqrt{2\nu/\omega} + T'_s} \quad (1.170)$$

Diese Gleichung läßt sich nicht ohne weiteres nach ω^2 auflösen. Wie sich zeigt, ist der Einfluß der Viskosität in den meisten Fällen jedoch klein im Vergleich zum Einfluß der Dichte. Die Viskosität kann dann bei der Berechnung der Resonanzfrequenz zunächst einmal vernachlässigt werden, sodaß die Resonanzfrequenz wieder mit Hilfe von (1.130) berechnet werden kann.

Zusammen mit Gleichung (1.169) und (1.136) kann (1.170) in die Form

$$\rho_f = \frac{1}{\chi + \beta \sqrt{2\nu/\omega}} \left[\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right] \quad (1.171)$$

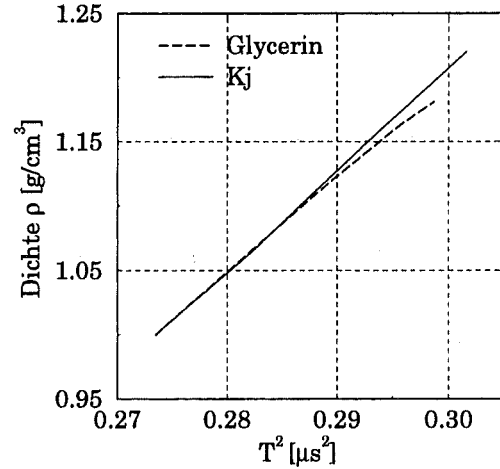
gebracht werden. Dabei wurde wieder $\omega_0^2 = (V_D + V_S)/(T'_m + T'_s)$ gesetzt. Die Kopplungsgröße, mit der die Dichte ρ_f an die Resonanzfrequenz gekoppelt ist, ist nun nicht mehr konstant, sondern abhängig von der Eindringtiefe δ . Das bedeutet, daß die Steigung der Geraden, die man erwartet, wenn die Viskosität nicht berücksichtigt wird, mit zunehmender Viskosität immer kleiner wird. Für eine Dichtemessung heißt das, daß der Wert der Dichte, den man über eine Eichgerade ohne Berücksichtigung der Viskosität berechnet, größer ist als die tatsächliche Dichte.

Der Vollständigkeit wegen sei hier auch der Ausdruck für β angegeben, der sich ergibt, wenn in Gl. (1.169) die Versuchsfunktion aus (1.39) eingesetzt wird. Die Integrale für T'_m und T'_s sind aus den vorangehenden Abschnitten schon bekannt. T'_v ergibt sich aus Gleichung (1.167). Für die Kopplungsgröße β erhält man somit

$$\beta = \frac{1.08 \xi_0 a (13.7 \lambda_0^2 + 7.97 \lambda_2^2 + 17.2 \lambda_0 \lambda_2)}{h_m \rho_m a^2 \pi \left(\lambda_0^2 + \frac{17 \lambda_2^2}{35} + \lambda_0 \lambda_2 \right) + m_s \lambda_0^2} \quad (1.172)$$

Da β von der Amplitude der Schwingungen abhängt, und diese a priori nicht bekannt ist, besteht keine Möglichkeit, den Einfluß der Viskosität quantitativ zu erfassen. Es besteht aber die Möglichkeit, den Effekt abzuschätzen, wenn man annimmt, daß die Amplitude der Schwingungen gerade gleich der maximal möglichen

Abbildung 1.10: Mit Hilfe der Gl. (1.130), (1.131) und (1.169) berechneter funktionaler Zusammenhang zwischen der Dichte von Kaliumjodid- und Glycerin-Wasser-Gemischen und dem Quadrat der Schwingungsdauer für einen Titan-Titan-Sensor des Typs H(53;50;7).



Auslenkung ξ_{\max} ist. Wie weiter unten noch gezeigt wird, ist ξ_{\max} diejenige Auslenkung, bei der die Membran reißt. Bei Titan ist sie ungefähr gleich einem Zehntel des Radius der Mikromembran.

Setzt man die Amplitude in dieser Größenordnung an, dann wird auch die Voraussetzung $\xi_0 \ll 2a$ in guter Näherung erfüllt. Als Beispiel wird ein Titan-Titan-Sensor des Typs H(53;50;7) verwendet. Mit Hilfe der Gleichungen (1.131), (1.130) und (1.169) können die Werte für die Kopplungsgrößen χ und β , sowie für die Resonanzfrequenz im Vakuum $f_0 = \omega_0/2\pi$ berechnet werden. Gemäß Gleichung (1.171) ergibt sich

$$\rho_f = \frac{1}{0.86 [\text{cm}^3/\text{g}] + 6600 [\text{cm}^3/\text{g m}] \sqrt{2\nu/\omega}} \left(\frac{4\pi^2 (2.61 \text{ MHz})^2}{\omega^2} - 1 \right), \quad (1.173)$$

bzw. wenn man diese Gleichung gemäß (1.170) umstellt

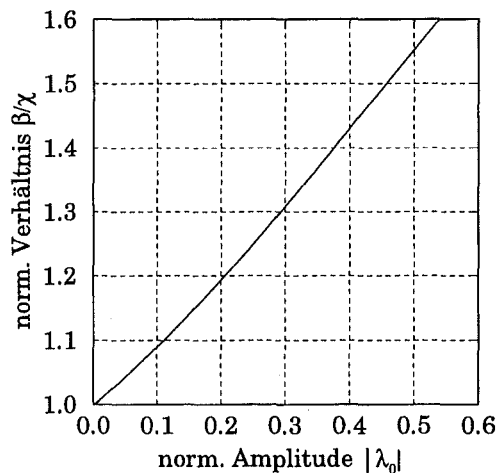
$$\omega^2 = \frac{4\pi^2 (2.61 \text{ MHz})^2}{1 + 0.86 [\text{cm}^3/\text{g}] \cdot \rho_f + 6600 [\text{cm}^3/\text{g m}] \sqrt{2\nu/\omega} \cdot \rho_f}. \quad (1.174)$$

Wenn die Dichte und die Viskosität bekannt sind, dann kann mit dieser Gleichung die Resonanzfrequenz iterativ bestimmt werden [14]. Legt man einen Titan-Titan-Sensor mit den obengenannten Parametern zugrunde und führt die Bestimmung der Resonanzfrequenz für Kaliumjodid- bzw. Glycerin-Wasser-Gemische durch, dann erhält man den in Abbildung 1.10 dargestellten funktionalen Zusammenhang zwischen der Dichte des Mediums und dem Quadrat der Schwingungsdauer.

Man sieht, daß ab einer bestimmten Dichte die Viskosität offensichtlich so groß ist, daß ihr Einfluß nicht mehr vernachlässigt werden kann. Es stellt sich daher die Frage, wie ein Sensor beschaffen sein muß, dessen Querempfindlichkeit auf Viskositätsänderungen möglichst klein ist. Die Antwort kann mit Hilfe des Verhältnisses der beiden Kopplungsgrößen β und χ gegeben werden, welches ein Maß für die relative Größe der Effekte ist. Dieses Verhältnis ist unter Berücksichtigung von (1.136) und (1.169) durch

$$\frac{\beta}{\chi} = \frac{T'_\nu}{T''_f} \quad (1.175)$$

Abbildung 1.11: Normiertes Verhältnis der Kopplungsgrößen β und χ in Abhängigkeit von $|\lambda_0|$ gemäß Gl. (1.176).



gegeben. Setzt man die Versuchsfunktion (1.39) in T'_v bzw. T'_f ein und integriert, so ergibt sich für β/χ

$$\frac{\beta}{\chi} = \frac{0.54 \xi_0 a (13.7 \lambda_0^2 + 7.97 \lambda_2^2 + 17.2 \lambda_0 \lambda_2)}{a^3 (1.34 \lambda_0^2 + 1.47 \lambda_0 \lambda_2 + 0.49 \lambda_2^2)} \quad (1.176)$$

λ_2 kann wieder zu 1 gesetzt werden und λ_0 ist durch Gleichung (1.131) gegeben. Wenn man nun wieder die Höhe der Mikrostruktur und damit λ_0 variiert, dann erhält man einen funktionalen Zusammenhang zwischen der Amplitude der Mikromembran am Rand und dem Verhältnis der beiden Kopplungsgrößen β und χ . Dieses Verhältnis kann o.B.d.A auf eins normiert werden. In Abbildung 1.11 ist das Verhältnis β/χ in Abhängigkeit vom Betrag der Amplitude $|\lambda_0|$ aufgetragen. Wie man sieht, ist es auch hier zweckmäßig, wenn die Masse der Mikrostruktur so dimensioniert wird, daß die Amplitude der Mikromembran am Rand verschwindet, da in diesem Fall die Querempfindlichkeit auf Viskositätsänderungen am kleinsten ist. Dies ist auch insofern günstig, als die Kopplungsgröße des Dichteeffekts bei $\lambda_0 = 0$ maximal wird.

1.2.11 Energiedissipation

Mikromembranen geben kontinuierlich einen Teil ihrer Energie ab. Dabei geht der überwiegende Anteil durch die Abstrahlung von Schallwellen und durch die Reibung des Mediums an der Membran verloren. Die Kenntnis der zugrundeliegenden Zusammenhänge ist wichtig für die Dimensionierung der Mikromembransensoren, da die Genauigkeit, mit der ein Sensorsignal ausgewertet werden kann, in unmittelbarem Zusammenhang mit der zur Verfügung stehenden Signallänge und daher auch mit der Dämpfung der Schwingungen steht.

Die im Mittel während einer Schwingung abgegebene Leistung \overline{dE} ist proportional der mittleren Energie einer Mikromembran. Da die mittlere Energie gerade gleich dem zweifachen der maximalen kinetischen Energie einer Mikromembran ist, darf

$$\frac{d\overline{E}}{dt} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{\partial E}{\partial t} dt = \alpha_e 2E_{\text{kin}} \quad (1.177)$$

geschrieben werden. Der Index "e" bei α soll verdeutlichen, daß es sich hierbei um die Dämpfung der Energie einer Mikromembran handelt. Die Dämpfung α_e ergibt sich dann einfach durch Auflösen von (1.177) nach α_e und anschließender Integration.

Schallabstrahlung

Um diesen Schritt ausführen zu können, werden Ausdrücke für die mittlere abgegebene Leistung benötigt. Der Anteil, der auf Abstrahlung von Schallwellen fällt, kann im Prinzip wie im Abschnitt "Kinetische Energie im Nahfeld der Membran" berechnet werden. Doch kann die dann folgende Integration über Besselfunktionen¹⁴ vermieden werden, wenn man berücksichtigt, daß die Arbeit, die von der Mikromembran am Medium verrichtet wird, praktisch nicht von der Helmholtzzahl $\kappa = ka$ abhängt, vorausgesetzt es gilt $\kappa \leq 1$ ¹⁵.

Ist also $\kappa \leq 1$, so ist die Leistung, die von einer Mikromembran abgegeben wird, durch

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{k^2 \rho c}{2\pi} |S_\omega|^2, \quad (1.178)$$

gegeben [8]. Dabei ist S_ω die sogenannte Quellstärke der Mikromembran, die durch

$$S_\omega = \int_A \frac{\partial \psi}{\partial t} dA \quad (1.179)$$

¹⁴ Auch hier ist nach einer längeren Rechnung ein analytischer Ausdruck möglich

¹⁵ Das ist natürlich eine schwächere Voraussetzung als $\kappa \ll 1$, die vorangehenden Rechnungen haben aber gezeigt, daß man auch für $\kappa \leq 1$ in guter Näherung von einem Punktstrahler ausgehen kann

definiert ist. Da reelle Größen benötigt werden, setzen wir $\partial\psi/\partial t = -\omega \sin \omega t$. Die abgegebene Leistung ist daher durch

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{k^2 c \rho \omega^2}{2\pi} \left[\int_A u(r) dA \right]^2 \sin^2(\omega t) \quad (1.180)$$

gegeben. Die im Mittel während einer Schwingung in Schallwellen umgewandelte Energie ergibt sich dann mit Hilfe der Gleichungen (1.177) und (1.180) zu

$$\bar{\dot{E}}_S = -\frac{\rho \omega^4}{4\pi c} \langle u \rangle^2 \quad (1.181)$$

Reibungsverluste

Der Energieverlust, den die Mikromembran im Mittel durch die Reibung am Medium erfährt, ist durch

$$\bar{\dot{E}}_R = -\rho \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu \omega}{2}} \oint |v_y^0|^2 df \quad (1.182)$$

gegeben [18]. Dabei ist v_y^0 gerade durch die Relativgeschwindigkeit des Mediums tangential zur Mikromembran. Unter Berücksichtigung dieser Geschwindigkeit, erhalten wir mit

$$|v_y^0|^2 = v_y^0 (v_y^0)^* = \frac{1}{4} \omega^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \quad (1.183)$$

dann die im Mittel abgegebene Leistung durch Reibung

$$\bar{\dot{E}}_R = -\frac{1}{8} \rho \omega^2 \sqrt{\frac{\nu \omega}{2}} \oint \left(\frac{\partial u^2}{\partial r} \right)^2 df \quad (1.184)$$

Man erwartet daher, daß die Schwingungen der Membran mit zunehmender Viskosität stärker gedämpft werden.

Gesamter Energieverlust

Der gesamte Energieverlust einer Mikromembran ist gleich der Summe von $\bar{\dot{E}}_S$ und $\bar{\dot{E}}_R$, sodaß sich zusammen mit (1.177) dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \rho_f \omega^2 \sqrt{\frac{\nu \omega}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{\partial u^2}{\partial r} \right)^2 r dr d\vartheta + \frac{\rho \omega^4}{4\pi c} \langle u \rangle^2 &= -\alpha_e 2 T_{\text{kin}} \\ &= -2\alpha_e [T_m + T_f + T_s] \end{aligned} \quad (1.185)$$

ergibt. Dabei ist T_{kin} die gesamte kinetische Energie des Systems, also gleich der Summe aus der kinetischen Energie der Mikromembran, der kinetischen Energie der Mikrostruktur und der kinetischen Energie des Fluids. Der Anteil der kinetischen Energie, der durch die Viskosität entsteht, wurde vernachlässigt, da er in den

meisten Fällen kleiner ist als der Anteil, der durch die Dichte des Mediums beigesteuert wird.

Aufgelöst nach α_e ergibt sich ein Ausdruck, der u.a. mit Hilfe der bereits gelösten Integrale für die kinetischen Energien berechnet werden kann. Dabei muß in die entsprechenden Terme nur die Versuchsfunktion (1.39) eingesetzt werden. Da von der Meßapparatur Amplituden gemessen werden, muß bei einem Vergleich mit experimentellen Ergebnissen die Hälfte des Wertes von α_e genommen werden. Für die Dämpfung der Schwingungsamplitude einer Mikromembran erhalten wir mit $\alpha = \alpha_e/2$

$$\alpha = \frac{1}{4} \frac{\frac{\pi}{8} \omega^2 \rho_f a^4 (\lambda_2 + 2\lambda_0)^2 + \frac{\pi \lambda_2^2}{4} \rho_f \xi_0^2 \sqrt{\frac{\nu \omega}{2}} (18.9 \lambda_0 \lambda_2 + 8.54 \lambda_2^2 + 1.38 \lambda_0^2)}{h_m \rho_m a^2 \pi \left(\lambda_0^2 + \frac{17 \lambda_2^2}{35} + \lambda_0 \lambda_2 \right) + \rho_f a^3 (2.68 \lambda_0^2 + 2.94 \lambda_0 \lambda_2 + 0.98 \lambda_2^2) + m_s \lambda_0^2} \quad (1.186)$$

Im Prinzip kann mit diesem Ausdruck die Dämpfung der Schwingungen berechnet werden, da für jeden Sensor die Koeffizienten λ_0 und λ_2 berechnet werden können. Allerdings wird dies durch die Abhängigkeit des Zählers von der Amplitude ξ_0 behindert, da diese ja nicht bekannt ist. Gleichung (1.2.11) gibt daher zwar die funktionale Abhängigkeit der Dämpfung von der Viskosität wieder, die tatsächliche Größe des Viskositätseinflusses auf die Dämpfung kann mit ihr jedoch nicht berechnet werden.

Wie sich im Abschnitt 1.3 zeigen wird, entspricht die maximale Amplitude¹⁶ ξ_{\max} bei Mikromembransensoren ungefähr einem Zehntel des Radius. Bei einem Radius von ca. 50 μm erhält man für ξ_{\max} somit einen Wert von ca. 5 μm . Die Resonanzfrequenz von Titan-Titan-Sensoren beträgt bei diesem Radius ungefähr 2 MHz. Legt man der Amplitude den Wert von ξ_{\max} zugrunde und nimmt an, daß das umgebende Medium eine vergleichsweise niedrige Viskosität besitzt, dann können die durch Gleichung (1.184) gegebenen Reibungsverluste vernachlässigt werden. Übrig bleibt dann die Dämpfung α_s aufgrund der Abstrahlung von Schallwellen. Sie ist durch

$$\alpha = \frac{1}{4} \frac{\frac{\pi}{8} \omega^2 \rho_f a^4 (\lambda_2 + 2\lambda_0)^2}{h_m \rho_m a^2 \pi \left(\lambda_0^2 + \frac{17 \lambda_2^2}{35} + \lambda_0 \lambda_2 \right) + \rho_f a^3 (2.68 \lambda_0^2 + 2.94 \lambda_0 \lambda_2 + 0.98 \lambda_2^2) + m_s \lambda_0^2} \quad (1.187)$$

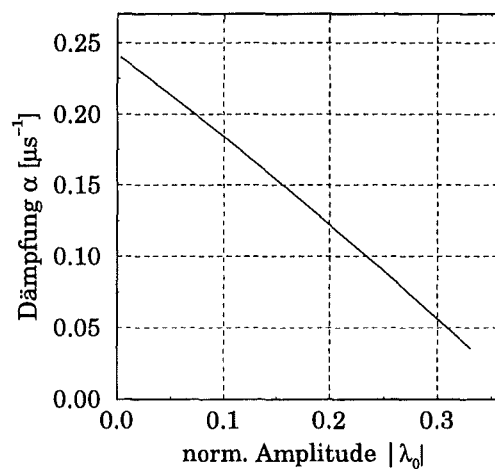
gegeben. Gl. (1.187) zeigt eine starke Abhängigkeit der Dämpfung von der Quellstärke $S(\omega)$ (vgl. (1.179) und (1.181)). Das ist insofern verständlich, als daß bei großen Werten von $|\lambda_0|$ der größte Teil des Fluids zwischen den zwei Schwingungsbäuchen der Mikromembran hin und hergeschoben wird und weniger Fluid "in" Richtung des Ultraschallkopfes verdrängt wird. Die Energie des Mediums bleibt

¹⁶Die maximale Amplitude ist diejenige Amplitude, bei der die Mikromembran reißt.

dann sozusagen in der Nähe der Mikromembran. Ein starkes Mitschwingen der Mikromembran hat daher eine kleine Dämpfung zur Folge. Die vergleichsweise geringe Quellstärke $S(\omega)$ führt in diesem Fall jedoch auch zu einer kleinen Amplitude der abgestrahlten Schallwellen.

In Abbildung 1.12 ist die Dämpfung der Schwingungen in Wasser eines Titan-Titan-Sensors in Abhängigkeit vom Betrag der Amplitude λ_0 aufgetragen. Dabei wurde zuerst der Wert von λ_0 mit Hilfe von Gl. (1.131) bei einer bestimmten Höhe der Mikrostruktur berechnet wurde. Anschließend wurde mit λ_0 die Resonanzfrequenz ω über Gl. (1.130) berechnet und diese Werte dann in Gl. (1.187) eingesetzt. Dabei wurde ein Titan-Titan-Sensor des Typs H(53;50;7) angenommen.

Abbildung 1.12: Dämpfung eines Mikromembransensors in Abhängigkeit vom Betrag der Amplitude $|\lambda_0|$ bei $\tau = a_{\text{eff}}$.



Die starke Abhängigkeit der Dämpfung von der Auslenkung der Mikromembran am Rand ist von Bedeutung für die maximal erreichbare Meßgenauigkeit. Um eine hohe Meßgenauigkeit zu erreichen, muß ein möglichst langes Signal vorliegen. Es ist deshalb wünschenswert, Mikromembransensoren so herzustellen, daß die Auslenkung der Mikromembran am Rand möglichst groß ist. Wie schon erwähnt, ist dann aber die Amplitude der abgestrahlten Schallwellen klein. Darüber hinaus führt ein starkes Mitschwingen des Randes auch zu einer kleineren Kopplungsgröße χ (siehe Abschnitt 1.2.6). In der Praxis muß deshalb ein Kompromiß gefunden werden.

Für spätere Zwecke ist die Größenordnung der Dämpfung interessant, da sie direkt die gemessene Resonanzfrequenz Ω beeinflusst. Es gilt

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}. \quad (1.188)$$

Dabei ist ω die Eigenfrequenz des Sensors, wenn keine Schallwellen abgestrahlt würden. Nur zwischen $1/\omega^2$ und der Dichte besteht ein linearer Zusammenhang, sodaß streng genommen die Dämpfung mitgemessen werden muß, um die Eigenfrequenz zu bestimmen. Wenn die Dämpfung aber klein gegen ω ist, dann kann die Wurzel entwickelt werden und man erhält

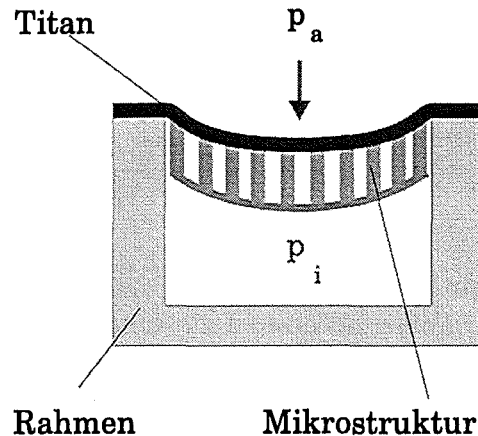
$$\Omega = \omega \left(1 - \frac{\alpha^2}{2\omega^2} \right) \quad (1.189)$$

Wenn α^2 klein gegen $2\omega^2$ ist, kann $\Omega \approx \omega$ gesetzt werden. Für den Fall, daß sich α über einen bestimmten Dichtebereich nicht ändert, kann die Dämpfung als additiver Term gänzlich vernachlässigt werden, da bei der Messung relative Änderungen in Bezug auf die Resonanzfrequenz des Sensors in Wasser gemessen werden, sodaß eine additive Konstante keinen Einfluß auf das Meßergebnis hat.

1.3 Statischer Druck

Neben dem durch die Membranbewegung erzeugten dynamischen Druck wirkt natürlich auch der hydrostatische Druck auf die Membran. Die Größe des zu erwartenden Effekts wird dabei maßgeblich durch den makroskopischen Aufbau des Sensors bestimmt. Diese Tatsache kann man sich zunutze machen, um Sensoren herzustellen, deren Querempfindlichkeit auf Druckänderungen vernachlässigbar klein ist.

Abbildung 1.13: Schematische Zeichnung eines gekapselten Mikromembransensors, bei dem eine Druckdifferenz $p_s = p_a - p_i$ zu einer Auslenkung der gesamten Membran führt. Der Radius des Sensors beträgt typischerweise ca. 5 mm.



1.3.1 Einfluß des statischen Drucks auf die Resonanzfrequenz

Die durch den Druck hervorgerufene Auslenkung führt zu einem Anstieg der inneren Spannung σ_0 sowie zu einer Änderung des Krümmungsradius R_k der Membran. Zunächst wird ein Sensor betrachtet, bei dem der freigespannte Bereich der Titanfolie quer über die gesamte Sensorfläche verläuft. Ist dieser Sensor wie in Abbildung 1.13 gekapselt, dann führt eine Druckdifferenz zu einer Auslenkung der makroskopischen Membran. Die Größe der Auslenkung hängt davon ab, wie steif die mit der Membran verbundene Mikrostruktur ist. In jedem Fall führt die Berücksichtigung der Mikrostruktur zu einer kleineren Auslenkung. Es ist deshalb möglich, einen oberen Schätzwert für die Auslenkung der Membran anzugeben, wenn der Einfluß der Mikrostruktur vernachlässigt wird.

Bei einem Sensor, wie er in Abbildung 1.13 abgebildet ist, ist das Verhältnis von Radius zu Dicke so groß, daß man in guter Näherung Biegemomente vernachlässigen kann. Der Zusammenhang zwischen dem statischen Druck p_s und der Auslenkung u_0 bzw. innerer Spannung σ_0 der Membran ist dann durch

$$\begin{aligned} p_s &= \frac{4u_0 h_m}{a^2} (\sigma_0 + \delta\sigma) \\ &= \frac{4u_0 h_m}{a^2} \left(\sigma_0 + \frac{2u_0^2}{3a^2} \frac{E}{1 - \nu_p^2} \right) \end{aligned} \quad (1.190)$$

gegeben [19]. Dabei stellt der zweite Summand innerhalb der Klammern den Term der inneren Spannung dar, der durch den statischen Druck hervorgerufen wird.

Es zeigt sich, daß dieser Term in (1.190) selbst bei kleinen Drücken nicht vernachlässigt werden kann, sodaß zwischen p_s und der Auslenkung u_0 kein linearer Zusammenhang besteht. Löst man die kubische Gleichung für die Auslenkung der Membran u_0 in (1.190), erhält man

$$u_0(p_s) = \frac{\left[\frac{3p_s a^4}{16h_m \left(\frac{E}{1-\nu_p^2}\right)} + \frac{a^3}{16} \sqrt{\frac{32\sigma_0^3 h_m^2 + 9p_s^2 a^2 \left(\frac{E}{1-\nu_p^2}\right)}{\left(\frac{E}{1-\nu_p^2}\right)^3 h_m^2}} \right]^{1/3}}{\sigma_0^2 a^2} \cdot 2 \left(\frac{E}{1-\nu_p^2}\right) \left[\frac{3p_s a^4}{16h_m \left(\frac{E}{1-\nu_p^2}\right)} + \frac{a^3}{16} \sqrt{\frac{32\sigma_0^3 h_m^2 + 9p_s^2 a^2 \left(\frac{E}{1-\nu_p^2}\right)}{\left(\frac{E}{1-\nu_p^2}\right)^3 h_m^2}} \right]^{1/3} \quad (1.191)$$

Mit Hilfe von (1.191) und (1.190) kann die Änderung der inneren Spannung $\delta\sigma$ aufgrund einer Druckänderung berechnet werden. Dabei ist für den Radius a derjenige Radius einzusetzen, über den der Druck abfällt.

Als ein Maß für den Einfluß des hydrostatischen Drucks kann man das Verhältnis $\Delta\sigma$ aus der druckabhängigen Spannung $\delta\sigma$ und der Vorspannung der Mikromembran σ_0 wählen. Wenn wie oben der Einfluß der Mikrostruktur vernachlässigt wird, gilt

$$\Delta\sigma = \frac{\delta\sigma}{\sigma_0}. \quad (1.192)$$

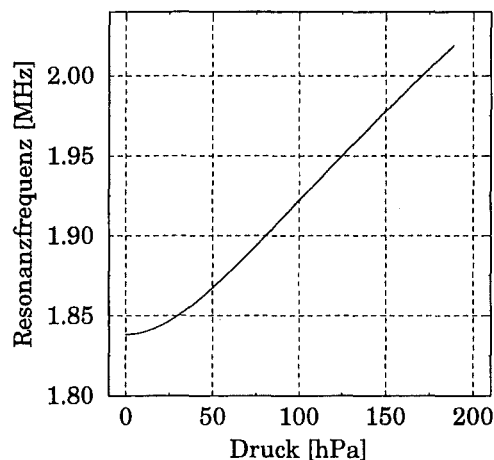
Bei einer Membran aus Titan, mit einem Radius von 5 mm und einer Dicke von $2.7\mu\text{m}$ ergibt sich für dieses Verhältnis schon bei einem vergleichsweise geringen Druck von 200 hPa ein Wert von $\Delta\sigma = 0.45$, d.h. daß die Änderung der inneren Spannung auf keinen Fall vernachlässigt werden darf. Wie weiter unten gezeigt wird, kann die Frequenzänderung aufgrund einer Änderung des Krümmungsradius in diesem Fall vernachlässigt werden.

In Abbildung 1.14 ist die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz vom anliegenden Druck für einen gekapselten Titan-Titan-Sensor (vgl. Abb. 1.13) des Typs H(54;52;7) dargestellt. Die Resonanzfrequenz wurde mit den Gleichungen (1.130) und (1.131) berechnet. Experimente zeigen, daß der tatsächliche Verlauf der in Abbildung 1.14 gezeigten Kurve bei kleinen Drücken linearer ist als der theoretisch berechnete Verlauf. Aus dem linearen Anteil läßt sich daher näherungsweise die minimal meßbare Druckdifferenz berechnen. Diese ergibt sich zu $p_{\min} = 2.4$ hPa wenn man voraussetzt, daß die Resonanzfrequenz auf 2.4 kHz genau bestimmt werden kann¹⁷.

Wird die Mikrostruktur von einer weiteren Fläche abgestützt, dann führt der hydrostatische Druck nur zur Auslenkung einer Mikromembran. Die auftretenden Biegemomente verringern jedoch die Membranauslenkung und schmälern somit den

¹⁷siehe Kapitel 3

Abbildung 1.14: Abhängigkeit der Resonanzfrequenz vom hydrostatischen Druck für einen Titan-Titan-Sensor des Typs H(54;52;7) gemäß den Gl. (1.130), (1.190) und (1.191). Bei kleinen Drücken ist ein parabolischer Zusammenhang zu sehen.



Einfluß des Drucks. Sie können deshalb auch hier vernachlässigt werden, wenn eine obere Grenze für den Druckeffekt angegeben werden soll. Bei einem Mikromembransensor mit einem Radius von $a=68 \mu\text{m}$ ergibt sich dann bei einem Druck von $p=200 \text{ hPa}$ eine relative Spannungsänderung von $\Delta\sigma = 0.00015$, was um mehrere Größenordnungen kleiner ist als bei einem gekapselten Sensor.

Auch wenn die Querempfindlichkeit auf Druckänderung vernachlässigbar klein erscheint, stellt sich die Frage, ab wann der Einfluß des Druckes so groß ist, daß er durch eine Verschiebung der Resonanzfrequenz nachgewiesen werden kann. Setzt man als minimal meßbare Änderung der Frequenz 2.4 kHz an, so ergibt sich bei dem oben genannten Titan-Titan-Sensor für den Druck ein Wert von ca. 0.58 MPa .

In Fall des Druckabfalls über einer einzelnen Mikromembran muß der Krümmungsradius der Membran berücksichtigt werden. Der funktionale Zusammenhang zwischen Resonanzfrequenz und Krümmungsradius kann näherungsweise durch

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{E}{\rho R_k^2}} \quad (1.193)$$

beschrieben werden [20]. Gleichung (1.193) gilt streng genommen nur für Platten mit konstanter Krümmung, was bei Mikromembranen aufgrund ihrer spezifischen Auslenkungsform nicht zutrifft. Es ist dennoch möglich, Gleichung (1.193) für eine Abschätzung des zu erwartenden Effekts zu benutzen.

Eine Berücksichtigung der Biegemomente resultiert letztendlich in einem größeren Krümmungsradius und damit in einer Verkleinerung des Effekts. Vernachlässigt man die Biegemomente, kann die statische Auslenkung der Membran in der Form

$$u(r) = u_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \quad (1.194)$$

angenommen werden [9]. Der Krümmungsradius R_k von (1.194) ist, wie im mathematischen Anhang gezeigt wird, jedoch praktisch konstant, sodaß Gleichung (1.193)

angewandt werden kann. Es ergibt sich für R_k

$$R_k(u_0) = \frac{a^2}{2u_0}. \quad (1.195)$$

Da der Druck zu einer Auslenkung jeder einzelnen Mikromembran führt, ist der kubische Term in (1.190) vernachlässigbar klein, sodaß die Auslenkung u_0 durch den linearen Term in Gleichung (1.190) berechnet werden kann. Der Zusatzterm in (1.193) ist dann durch

$$\frac{E}{\rho R_k^2} = \frac{E p_s^2}{4 \rho \sigma_0^2 h_m^2} \quad (1.196)$$

gegeben und hängt nicht mehr vom Radius der Mikromembran ab. Aus Gleichung (1.193) folgt damit in erster Näherung

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{E p_s^2}{8 \omega_0^2 \rho \sigma_0^2 h_m^2} \right). \quad (1.197)$$

Bei einer Resonanzfrequenz von ca. 2 MHz ergibt sich der zweite Term in der Klammer von (1.197) bei einem Druck von 200 hPa zu

$$\frac{E p_s^2}{8 \omega_0^2 \rho \sigma_0^2 h_m^2} = 0.000027. \quad (1.198)$$

Die entsprechende Frequenzänderung wäre bei einer Resonanzfrequenz f_{res} von 2 MHz ca. 55 Hz. Dieser Wert liegt weit unterhalb der erreichbaren Meßgenauigkeit. Der Druck müßte auf ca. 0.13 MPa ansteigen, bis die Verschiebung der Resonanzfrequenz größer als 2.4 kHz ist und somit nachgewiesen werden kann.

1.3.2 Belastungsgrenzen eines Mikromembransensors

Nachdem der Einfluß des statischen Drucks bekannt ist, stellt sich die Frage nach der Belastbarkeit der Mikromembransensoren. Eine Membran reißt, wenn die innere Spannung die Berstspannung σ_B überschreitet. Wird der Einfluß der Mikrostruktur wieder vernachlässigt, dann gilt nach (1.190) für den anliegenden Berstdruck p_B :

$$p_B = \frac{4u_0 h_m}{a^2} \sigma_B \quad (1.199)$$

Die Berstspannung σ_B ist dann gleich dem Klammerterm aus (1.190), sodaß die erreichte maximale Auslenkung durch

$$u_{max} = \sqrt{\frac{3}{2}(1 - \nu_p^2) \frac{\sigma_B - \sigma_0}{E}} a \quad (1.200)$$

und der Berstdruck durch

$$p_B = \frac{4\sigma_B h_m}{a} \sqrt{\frac{3}{2}(1 - \nu_p^2) \frac{\sigma_B - \sigma_0}{E}} \quad (1.201)$$

ausgedrückt werden können. Bei Titanfolien beträgt die Berstspannung σ_B ca. 1 GPa. Damit ergibt sich für einen gekapselten Mikromembransensor aus Titan mit einem Folienradius von 5 mm ein Berstdruck von 0.174 MPa. Dieser Wert liegt in der Realität sicherlich höher, da die Mikrostruktur eine zusätzliche Versteifung der Membran darstellt. Wird durch eine Druckdifferenz nur die Mikromembran ausgelenkt (Radius 68 μm) ab, so muß mit rund 12.8 MPa ein wesentlich höherer Druck anliegen, um die Membran zu zerstören.

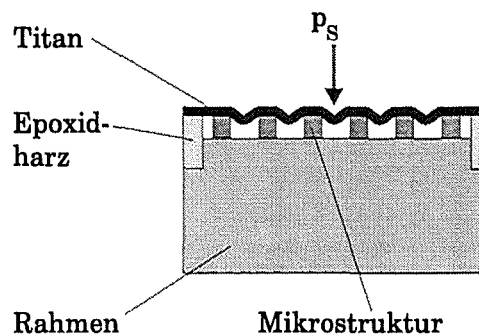
Wenn der Einfluß der Viskosität betrachtet wird, ist es wichtig zu wissen, in was für einer Größenordnung das Verhältnis von maximal möglicher Auslenkung zum Radius liegt. Für Titanmikromembranen kann dies einfach mit Hilfe von (1.200) geschehen. Da die innere Spannung bei ca. 200 MPa und der E-Modul von Titan bei ca. 115 GPa liegt, ergibt sich für dieses Verhältnis

$$\frac{u_{\max}}{a} = 0.095.$$

Dieser Wert ist in der Realität sicherlich niedriger, da der Einfluß der Biegemomente hier ja vernachlässigt wurde.

Aufgrund der hohen Querempfindlichkeit auf Druckänderungen (2.4 kHz bei $p_s = 2.4$ hPa) und der geringen Berstspannung eignen sich daher gekapselte Sensoren, bei denen die gesamte Membran durch eine Druckdifferenz ausgelenkt werden kann, nicht so sehr für den Einsatz als Dichtesensor. Für einen druckstabilisierten Dichtesensor wird ein Design benötigt, bei dem der statische Druck nur auf die einzelne Mikromembran wirkt, da in diesem Fall die Querempfindlichkeit vernachlässigbar klein und der Berstdruck sehr groß ist.

Abbildung 1.15: Design eines druckstabilisierten Mikromembransensors. Die Mikrostruktur wird von einer weiteren Fläche abgestützt.



1.3.3 Design eines druckstabilisierten Dichtesensors

Es wäre prinzipiell möglich, auf das Luftpolster zu verzichten [3]. In diesem Fall würde die Membran ja auf beiden Seiten mit dem Medium in Berührung stehen und der über der Membran abfallende Druck wäre identisch 0. Ein solches Sensordesign ist jedoch nicht zweckmäßig, da solche Sensoren anfällig gegenüber Gasblasen sind, die sich in den einzelnen Mikrostrukturen bilden und damit das Meßergebnis erheblich beeinflussen. Auch weisen gekapselte Membranen bessere Schwingungseigenschaften als ungekapselte auf, da sie schwächer gedämpft werden und somit

über einen längeren Zeitraum Signale abgeben. Obwohl in diesem Fall die Amplitude kleiner ist, kann man durch die längere Signaldauer die Resonanzfrequenz genauer bestimmen [3].

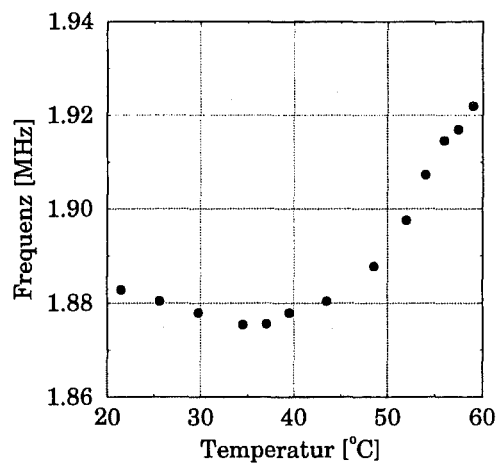
Als Lösung bieten sich zwei Alternativen an. Bei der ersten wird die Mikrostruktur durch eine zweite Titanfolie vor der Benetzung durch das Fluid geschützt. Dabei wird der tragende Rahmen als Hohlzylinder ausgeführt, sodaß der Druck jetzt nicht mehr über der makroskopischen Struktur, sondern über jeder einzelnen Mikromembran abfällt.

Da eine zweite Titanfolie einen wesentlich erhöhten Herstellungsaufwand bedeutet, ist dieser Lösung die folgende vorzuziehen: Die Titanfolie wird mit der Mikrostruktur direkt auf einen Vollzylinder aufgeklebt, sodaß die Mikrostruktur auf dem Zylinder aufliegt. Eine Schemazeichnung eines solchen Sensors ist in Abbildung 1.15 dargestellt.

1.4 Einfluß der Temperatur

Die Temperatur nimmt insofern eine Sonderstellung unter den meßbaren Parametern ein, als ihr Einfluß in starkem Maße von den verwendeten Materialien abhängt. Bei Kombinationen unterschiedlicher Sensormaterialien beobachtet man unterschiedliche funktionale Zusammenhänge zwischen der Frequenz und der Umgebungstemperatur. Bei Titan-Nickel-Sensoren kann ein stetiges Ansteigen der Frequenz bei steigender Temperatur beobachtet werden [3]. Benutzt man Titan-Polyimid-Sensoren des Typ R(48;62;21), so stellt sich eine Temperaturabhängigkeit ein, bei der die Resonanzfrequenz ein Minimum durchläuft (vgl. Abb. 1.16).

Abbildung 1.16: Resonanzfrequenz eines Titan-Polyimid-Sensors (Typ R(48;62;21)) in Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur. Die Resonanzfrequenz durchläuft ein Minimum.

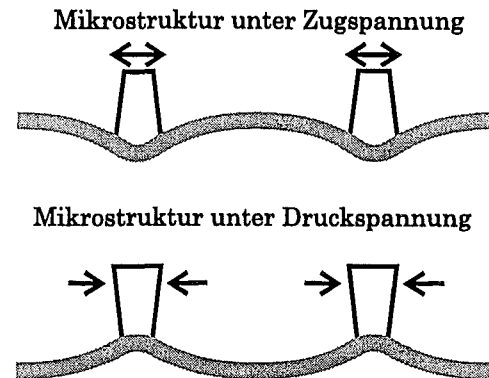


Dieses Verhalten läßt sich verstehen, wenn man berücksichtigt, daß die Mikro-membransensoren aus Materialien mit unterschiedlich großen thermischen Ausdehnungskoeffizienten aufgebaut sind. Die Unterschiede in der thermischen Dehnung führen zu Veränderungen im Spannungszustand der Membranen, der mit ausschlaggebend für die Resonanzfrequenz ist. Dabei ergibt sich nicht immer ein linearer Zusammenhang zwischen Temperatur und Resonanzfrequenz, wie man ihn erwarten würde, wenn der makroskopische Rahmen sich stärker oder schwächer dehnt als die Membran.

Betrachtet man die Vorspannung der Mikrostruktur gegenüber der Mikromembran, so können zwei Zustände entstehen. Abbildung 1.17 zeigt schematisch, wie die Biegemomente, die in der Mikromembran durch die Vorspannung der Struktur entstehen, zu einer Verformung der Mikromembran an ihrem Rand führen.

Bei vergleichsweise niedrigen Mikrostrukturen stellt sich eine Druckspannung ein, die zu einem Biegemoment führt, das zu einer Auslenkung in die der Mikrostruktur entgegengesetzten Richtung führt. Ist die Mikrostruktur dicker, dann bildet sich in ihre eine Zugspannung aus. Die Mikromembran erfährt dann ein Biegemoment am Rand, daß dazu führt, daß die Mikromembran sich "in" die Mikrostruktur hineinwölbt. Da die Spannung der Mikrostruktur in starkem Maße vom Material und von ihrer Höhe abhängt, sind zwischen diesen beiden Grenzzuständen mehrere unterschiedliche Zustände möglich, die dazu führen, daß der funktionalen Zusammen-

Abbildung 1.17: Verschiedene Spannungszustände der Mikrostruktur. Oben: Mikrostruktur unter Zugspannung. Unten: Mikrostruktur unter Druckspannung.



hang zwischen der Temperatur und der Resonanzfrequenz ebenfalls vom Material und der Höhe der Mikrostruktur abhängt.

1.4.1 Temperaturverhalten von Titan-Titan-Sensoren

Bei Sensoren, die vollständig aus Titan gefertigt sind, sollten sich keine Spannungsänderungen bzw. Biegemomente aufgrund von Unterschieden in den thermischen Ausdehnungskoeffizienten ergeben. Man erwartet daher einen wesentlich kleineren Temperatureffekt als bei Titan-Polyimid-Sensoren, da der Spannungszustand der Mikrostruktur keinen Einfluß auf die Resonanzfrequenz des Mikromembransensors ausübt. Allerdings bleibt auch hier ein Resteffekt übrig, da der Sensor sich in jedem Fall mit steigender Temperatur ausdehnt. In diesem Fall kommt die Frequenzänderung durch eine Änderung des Membranradius zustande. Nimmt man einen Titan-Titan-Sensor mit einem Radius von $53 \mu\text{m}$ an, der eine Membrandicke von ca. $2.7 \mu\text{m}$ aufweist und von einer ca. $7 \mu\text{m}$ hohen Mikrostruktur getragen wird, so ergibt sich mit den in den vorangehenden Abschnitten hergeleiteten Formeln eine Resonanzfrequenz von ca. 1.8 MHz bei $T_0 = 21^\circ\text{C}$. Die Formel (1.130) zeigt auch, daß die Resonanzfrequenz einer Mikromembran ungefähr proportional zu $1/a^2$ sind. Da der Radius in Abhängigkeit von der Temperatur durch

$$a(T) = a_0[1 + \alpha_{Ti}(T - T_0)] \quad (1.202)$$

gegeben ist, ergibt sich die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Temperatur bei einem Titan-Titan-Sensor zu

$$f_{\text{res}}(T) = \frac{f_0}{a_0^2(1 - \alpha_{Ti}T_0 + \alpha_{Ti}T)^2} \quad (1.203)$$

Die Querempfindlichkeit auf eine Temperaturänderung ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel zu

$$\frac{\partial f_{\text{res}}(T)}{\partial T} = -2 \frac{f_0}{a(T)^3} a_0 \alpha_{Ti} = -2 f_{\text{res}}(T) \frac{a_0 \alpha_{Ti}}{a(T)} \quad (1.204)$$

Da die Frequenz $f_{\text{res}}(T)$ und der Radius $a(T)$ nur sehr wenig von der Temperatur beeinflusst werden, ist der Wert von (1.204) nahezu konstant. Um einen ungefähren

Wert für den Einfluß der Temperatur zu erhalten, kann daher in guter Näherung $T = T_0$ gesetzt werden. In diesem Fall erhält man

$$\left. \frac{\partial f_{\text{res}}(T)}{\partial T} \right|_{T=T_0} = -2f_{\text{res}}(T_0)\alpha_{\text{Ti}}. \quad (1.205)$$

Titan besitzt einen thermischen Ausdehnungskoeffizienten von $\alpha_{\text{Ti}} = 9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$. Zusammen mit $f_{\text{res}}(T_0) = 1.8 \text{ MHz}$ ergibt sich aus Gleichung (1.205) ein Wert von $32.4 \text{ Hz}/^\circ\text{C}$. Setzt man voraus, daß die Resonanzfrequenz mit einer Genauigkeit von 2.4 kHz bestimmt werden kann, bedeutet das, daß dieser Temperatureinfluß bis zu einer Temperaturdifferenz von ca. $74 \text{ }^\circ\text{C}$ vernachlässigt werden kann.

Kapitel 2

Herstellung der Mikromembransensoren

Mikromembransensoren können aus den verschiedensten Materialkombinationen hergestellt werden. So wurde die tragende Mikrostruktur aus Nickel, Polyimid oder auch Titan gefertigt, während die Membranfolie selbst aus Titan oder Polyimid besteht. Aus diesen möglichen Materialien wird vorzugsweise Titan als Membranmaterial und Polyimid bzw. Titan als Material der Mikrostruktur gewählt.

Prinzipiell wäre Polyimid der geeignetere Stoff für die Membran, da es eine wesentlich geringere Dichte besitzt und daher einen wesentlich größeren Dichteeffekt zur Folge hat. Aufgrund der wasserähnlichen Dichte von Polyimid findet aber an der Grenzfläche Mikromembran-Medium ein weitaus geringerer Impedanzsprung statt, sodaß die Schwingungsamplitude von Mikromembranen aus Polyimid um ca. einen Faktor 10 geringer ist als bei Titan. Da Polyimid darüber hinaus bei längerem Kontakt mit Wasser quillt und wesentlich temperaturempfindlicher als Titan ist, stellt Titan als Membranmaterial die bessere Wahl dar.

Soll der Sensor weitgehend temperaturstabil sein, so muß der gesamte Sensor aus Titan hergestellt werden, also auch die Mikrostruktur. Andernfalls genügt es, die Mikrostruktur aus Polyimid zu fertigen, was im Vergleich zu Titanmikrostrukturen einen wesentlich geringeren Herstellungsaufwand bedeutet.

Aufbau der Mikromembransensoren

Mikromembransensoren sind aus drei Komponenten aufgebaut. Eine Titanfolie wird durch eine Mikrostruktur aus Titan oder Polyimid in einzelne Mikromembranen eingeteilt. Der Verbund aus Titanfolie und Mikrostruktur wird so auf einen Vollzylinder aus Titan aufgeklebt, daß die Mikrostruktur direkt auf dem Zylinder aufliegt. Auf diese Weise wird die Druckstabilisierung des Sensors ermöglicht¹.

¹siehe Abschnitt 1.3

Herstellung

Die Basis für alle Mikromembransensoren ist ein Siliziumwafer, der durch Magnetronspütern mit einer ca. 100 nm dicken Kohlenstoffschicht beschichtet wird. Der Kohlenstoff wird anschließend mit ca. 2,7 μm dickem Titan beschichtet, das durch einen Temperprozeß auf eine innere Spannung von ca. 200 MPa eingestellt wird (vgl. Abb. 2.1,A). Da der Kohlenstoff nur schwach auf dem Silizium haftet, würde sich das Titan aufgrund seiner Zugspannung vom Wafer lösen. Dies wird durch einen direkten Kontakt des Titans zum Silizium am Rand des Wafers verhindert. Wird aber auf die Titanschicht ein Rahmen aufgeklebt und um diesen herum das Titan mit einer Stahlnadel angeritzt, ist ein einfaches Abheben der Titanfolie begrenzt durch den Rahmen – möglich. Auf diese Weise ist es möglich, freitragende Titanfolien herzustellen, die unter Zugspannung stehen.

Aufbauend auf diesem Substrat können nun Mikromembransensoren hergestellt werden. Zunächst sei die Herstellung von Mikromembransensoren beschrieben, die Titan als Membranmaterial und Mikrostrukturen aus Polyimid besitzen. Im folgenden werden Sensoren mit dieser Materialkombination der Einfachheit halber als Titan-Polyimid-Sensoren bezeichnet.

Herstellung von Titan-Polyimid-Sensoren

Der Herstellungsprozeß von Titan-Polyimid-Sensoren ist in den Abbildungen 2.1,A bis 2.1,D dargestellt. Zunächst wird hier die Titanschicht in einem $\text{NaOH-H}_2\text{O}_2$ -Bad ca. 80 Sekunden oxidiert. Dies ist ein übliches Verfahren, mit dem die Haftung von Mikrostrukturen auf Titanschichten verbessert wird.

Auf dieses Substrat wird der Negativlack PIQ 7020 in der gewünschten Höhe aufgeschleudert (Abb. 2.1,A). Diese Schicht wird fotolithografisch strukturiert und anschließend entwickelt (Abb. 2.1,B). Der Entwicklung schließt sich ein Temperprozeß bei 400 $^{\circ}\text{C}$ an.

Auf die strukturierten Bereiche werden Vollzylinder (Durchmesser ca. 18 mm) aufgeklebt, um eine einfache Handhabung der Mikromembransensoren zu ermöglichen (vgl. Abb. 2.1 ,C). Dabei wird der Klebstoff nur im Randbereich des Zylinders aufgetragen, um einem Vollaufen des strukturierten Bereichs und damit der Zerstörung des Sensors vorzubeugen. Zuletzt werden die Titanzylinder vom Siliziumwafer abgehoben (Abb. 2.1 ,D). Abbildung 2.2 zeigt die REM-Aufnahme einer Titanmembran, die durch eine Mikrostruktur aus Polyimid in einzelne Mikromembranen eingeteilt wird.

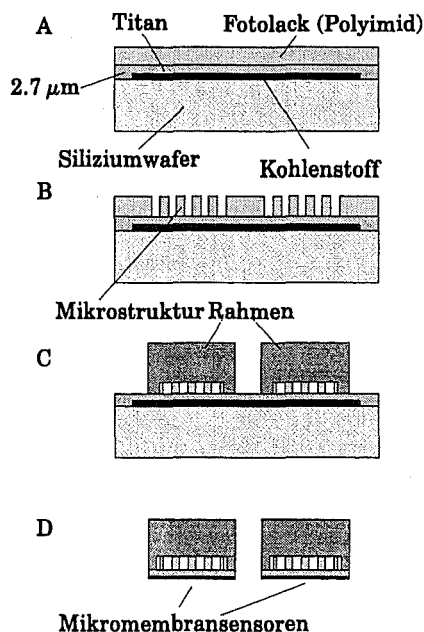


Abbildung 2.1: Herstellung von Titan-Polyimid-Sensoren

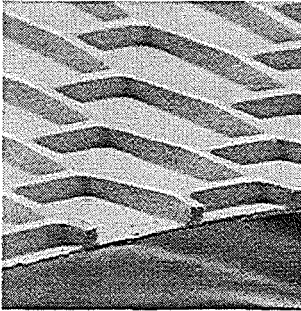


Abbildung 2.2: REM-Aufnahme eines Mikromembransensors mit einer Mikrostruktur aus Polyimid.

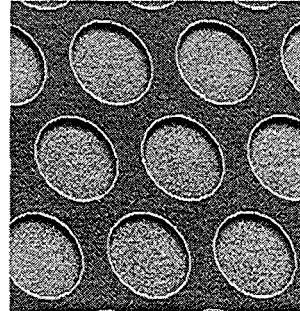


Abbildung 2.3: REM-Aufnahme eines Sensors, bei dem die Mikrostruktur ebenfalls aus Titan hergestellt wurde.

Herstellung von Titan-Titan-Sensoren

Soll die Mikrostruktur aus Titan sein, sind mehrere vorbereitende Schritte durchzuführen. Zunächst wird auf die Titanschicht eine ca. 110 nm dicke Nickelschicht aufgesputtert. Auf diese Nickelschicht wird wiederum eine ca. 7 μm dicke Titanschicht aufgebracht, die später als Mikrostruktur dient. Zum Schluß wird nochmal eine ca. 270 μm dicke Nickelschicht aufgesputtert, sodaß das Substrat wie in Abb. 2.4,A dargestellt vorliegt.

Der weitere Herstellungsprozeß verläuft nun wie folgt. Das Substrat wird mit einer ca. 3 μm dicken Schicht AZ4521-Lack beschichtet, welcher anschließend fotolithografisch strukturiert und entwickelt wird. In einem HNO_3 -Bad wird dann die obere Nickelschicht geätzt, sodaß nach dem Entfernen des restlichen AZ-Lacks eine Nickelmaske zurückbleibt (vgl. Abb. 2.4,B). Das unter dem Nickel liegende Titan wird nun in der RIE-Anlage² mit SF_6 trockengetätzt. Dabei werden nur diejenigen Bereiche entfernt, die nicht durch das Nickel verdeckt werden. Durch die untere Nickelschicht wird dieser Ätzprozeß gestoppt. Zurückbleibt eine strukturierte Titanschicht, die die Mikrostruktur des Mikromembransensors darstellt. (siehe Abb. 2.4,C). In Abbildung 2.3 ist die REM-Aufnahme einer solchermaßen strukturierten Titanschicht dargestellt. Im Vordergrund ist dort die Mikrostruktur zu sehen, die ca. 7 μm hoch ist. Die Titanmembran liegt hinter der Mikrostruktur.

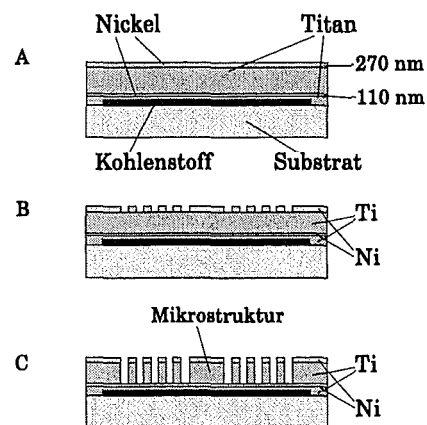


Abbildung 2.4: Herstellung von Titan-Titan-Sensoren

²RIE=Reactive Ion Etching

Der letzte Schritt ist wieder durch das Aufkleben der Titanzylinder und deren anschließendes Abheben gegeben. Es liegen nun mehrere Mikromembransensoren vor, die jeweils ein Feld von mehreren tausend Mikromembranen aufweisen (vgl. Abb. 2.1,D).

Herstellung von Polyimid-Polyimid-Sensoren

Um Vergleiche zwischen Titan-Polyimid-Sensoren und Sensoren ziehen zu können, deren Membran ebenfalls aus Polyimid besteht, wurden auch Membranfolien aus Polyimid hergestellt und anschließend mit einer Mikrostruktur aus Polyimid versehen. Die Basis für Membranen aus Polyimid stellt ein Siliziumwafer dar, der mit einer ca. 160 nm dicken Goldschicht beschichtet wurde. Diese Goldschicht ermöglicht die abschließende Trennung der Sensoren vom Substrat. Auf den Wafer wird eine ca. 3 μm dicke Schicht Negativlack (PIQ 7020) aufgeschleudert, die anschließend auf ihrer ganzen Fläche belichtet wird. Der so behandelte Wafer wird dann bei ca. 400 Grad mehrere Stunden ausgebacken. Man erhält auf diese Weise eine stabile Membran aus Polyimid, die wie oben beschrieben mit einer Mikrostruktur ebenfalls aus Polyimid versehen wird. Abschließend erfolgt das Aufkleben der Zylinder (in diesem Fall aus Edelstahl) und das Trennen der Sensoren vom Substrat.

Kapitel 3

Meßaufbau und Signalauswertung

Dieses Kapitel befaßt sich mit dem Meßaufbau, der bei den Messungen benutzt wurde, sowie mit der Analyse des Sensorsignals mit Hilfe einer Fouriertransformation, die die Bestimmung der Resonanzfrequenz ermöglicht. Ein weitere Abschnitt befaßt sich mit der bei diesem Verfahren erreichbaren Meßgenauigkeit.

3.1 Meßaufbau

Der Meßaufbau setzt sich, wie in Abbildung 3.1 dargestellt, aus zwei Komponenten zusammen. Die eine Komponente stellt die Analytik zur Verfügung. Sie besteht aus einem PC, in den eine A/D-Wandlerkarte (100 MHz, 8 bit, Fa. Signatec) und eine Sende- und Empfangseinheit (SEE, Fa. SONOTEC) zur Erzeugung und Verarbeitung hochfrequenter Signale integriert wurden. Daran angeschlossen ist die eigentliche Sensorik, also der Ultraschallkopf, der für die Sensoranregung verantwortlich ist, und der Mikromembransensor selbst, der sich in einem Behältnis befindet, welches mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt ist. Sensor und Ultraschallkopf sind über eine Justiereinrichtung miteinander verbunden.

Der Meßvorgang stellt sich wie folgt dar: Die SEE aktiviert die A/D-Wandlerkarte mit einem Triggerimpuls. Gleichzeitig regt sie den Ultraschallkopf mit einem hochfrequenten Puls zu Schwingungen an. Dieser sendet einen breitbandigen Puls (Mittelfrequenz ca. 2 MHz, Bandbreite ca. 50% bei einer Pulsdauer von ca. 2 μ s) und nimmt dessen Echo bzw. das Signal des Mikromembransensors auf. Dieses Signal wird von der SEE verstärkt und in der A/D-Karte gespeichert. Um das Signal-Rausch-Verhältnis zu verbessern, werden 10 Signale gespeichert und anschließend gemittelt.

Der gesamte Meßvorgang und die anschließende Signalanalyse wird von einem Programm gesteuert. Mit Hilfe dieses Programms können ein beliebiger Signalbereich auf seinen Frequenzgehalt hin untersucht und die Resonanzfrequenz sowie

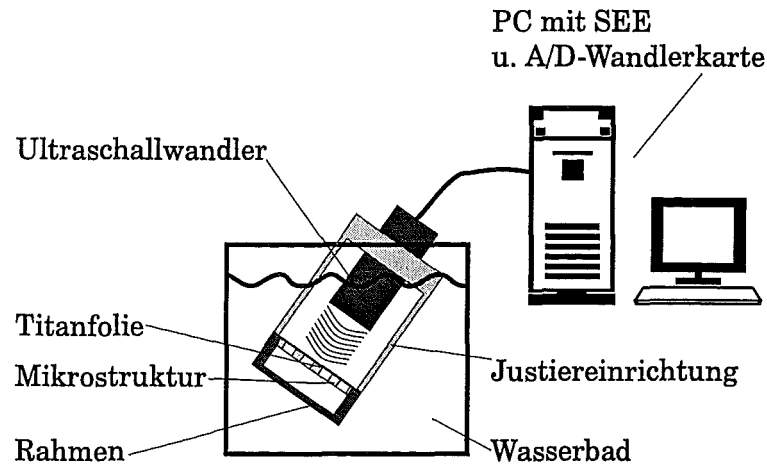


Abbildung 3.1: Schematische Zeichnung des Meßaufbaus.

die Dämpfung bestimmt werden. Dieses Programm ermöglicht es darüber hinaus, den PC und die daran angeschlossene Sensorik als Meßstation zu verwenden, die kontinuierlich Daten aufnimmt, diese analysiert und mit Hilfe einer Eichgeraden die momentane Dichte bestimmt.

3.2 Signalanalyse

Das umgebende Medium dämpft die Ultraschallschwingungen. Das Signal, das von der A/D-Karte aufgezeichnet wird, entspricht daher einer gedämpften Schwingung, die durch

$$f(t) = \xi_0 e^{-\alpha t - i\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}t - i\phi} \quad (3.1)$$

beschrieben werden kann. Dabei ist ξ_0 die Signalamplitude, α die Dämpfung, ω die Eigenfrequenz des Sensors ohne Dämpfungseinflüsse und ϕ die Phase. Das typische Signal eines Mikromembransensors ist in Abbildung 1.4 zu sehen.

Prinzipiell gibt es mehrere Möglichkeiten die Frequenz eines solchen Signals zu bestimmen. Man kann z. B. die Resonanzfrequenz aus den Nulldurchgängen des Signals bestimmen. Diese Möglichkeit erweist sich jedoch als sehr ungenau, da die Signaldauer, über die gemittelt werden kann, zu kurz ist. Ein anderes Verfahren wäre die Anpassung der Daten mit einer Funktion entsprechend des Ansatzes (3.1). Dieses Verfahren funktioniert dann ausreichend gut, wenn das Signal $f(t)$ nur sehr wenig durch Störsignale verfälscht wird. Ist dem Signal aber zum Beispiel eine zweite Frequenz überlagert, so findet ein Fit keine eindeutige Lösung [3]. Stören können zum Beispiel Gasbläschen, die einen Teil der Mikromembranen überdecken. Das Signal, das der Mikromembransensor dann aussenden würde, bestünde in diesem Fall aus einer Superposition von mehreren unterschiedlichen Resonanzfrequenzen.

Diese Probleme können umgangen werden, wenn man das Signal einer Spektralanalyse unterzieht. Dieses Verfahren liefert auch dann noch Werte für die Resonanzfrequenz und die Dämpfung, wenn das Signal nicht mehr eindeutig durch (3.1) beschrieben werden kann. Das Spektrum kann zum Beispiel mit Hilfe einer Fourier-Transformation berechnet werden, die durch

$$F(\omega') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{i\omega't} dt \quad (3.2)$$

definiert ist. Mit dieser Transformation kann die Funktion $f(t)$ vom Zeit- in den Frequenzraum transformiert werden, in dem der Absolutbetrag der Fouriertransformierten $|F(\omega')|$ die Anteile einzelner Frequenzen am Signal $f(t)$ wiedergibt. Da in $f(t)$ vor allem die Resonanzfrequenz des Sensors enthalten ist, kann aus dem Maximum von $|F(\omega')|$ die Resonanzfrequenz bestimmt werden.

Da die Signale der Mikromembransensoren in zeitlich diskretisierter Form vorliegen, wird bei der numerischen Berechnung der diskreten Fouriertransformierten die sogenannte "Schnelle Fourier Transformation" (FFT¹) benutzt. Dieser Algorithmus besitzt den Vorteil, daß er zur Berechnung der Fouriertransformierten nicht N^2 Rechenschritte benötigt (bei N Datenpunkten), sondern nur $N \cdot \log N$, was sich insbesondere bei großen Datenmengen wie in diesem Fall als vorteilhaft erweist [21].

Will man die Resonanzfrequenz mit Hilfe einer FFT bestimmen, muß insbesondere folgendes beachtet werden. Nach dem Nyquist -Theorem muß die Abtastrate f_s so gewählt werden, daß sie mindestens doppelt so groß wie die größte im Signal vorkommende Frequenz ist [21]. Da die Mikromembranen typische Resonanzfrequenzen von ca. 2 MHz besitzen und durch die Art der Anregung² keine Oberschwingungen angeregt werden, ist diese Forderung mit einer Abtastrate von 20 MHz gut erfüllt.

Die Wahl der Abtastrate f_s und die Anzahl der zu transformierenden Datenpunkte N_s legen auch die Schrittweite zwischen zwei Datenpunkten des diskreten Spektrums fest. Es kann gezeigt werden, daß

$$\Delta f = \frac{f_s}{N_s} \quad (3.3)$$

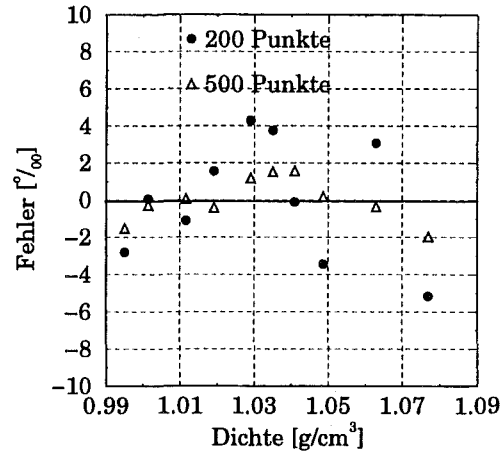
gilt [21]. Je mehr Datenpunkte zur Verfügung stehen, desto genauer ist auch das Spektrum bekannt und desto genauer kann eine Messung durchgeführt werden.

Um dies zu demonstrieren, wurde eine Dichtemessung mit einer unterschiedlichen Anzahl von Datenpunkten ausgewertet (siehe Abb. 3.2). Es zeigt sich, daß die Dichtewerte, die über eine Kalibriergerade mit Hilfe der Resonanzfrequenz berechnet wurden, bei 500 Punkten deutlich weniger von der tatsächlichen Dichte abweichen als bei 200 Datenpunkten.

¹Fast Fourier Transformation

²Die Mittenfrequenz des Ultraschallkopfes liegt bei ca. 2 MHz (50% Bandbreite) mit einer Pulsdauer von ca. 2 μ s.

Abbildung 3.2: Vergleich zweier Auswertungen einer Dichtemesung, bei denen die Anzahl der zu transformierenden Punkte unterschiedlich groß war.



Die Tatsache, daß ein langes Signal eine genaue Bestimmung der Resonanzfrequenz zuläßt, spiegelt die Unschärferelation zwischen Frequenz bzw. Energie und Beobachtungszeitraum wider [13]. Die analytische Berechnung der Fouriertransformierten von (3.1) macht dies deutlich. An ihr sieht man auch, daß für eine genaue Bestimmung der Resonanzfrequenz noch andere Anforderungen an das Signal eines Mikromembransensors bestehen.

3.2.1 Analytische Berechnung des Signalspektrums

Zunächst wird der Absolutbetrag der Fouriertransformierten von (3.1) berechnet. Dabei wird angenommen, daß das Signal $f(t)$ während eines Zeitraums Δt zur Verfügung steht. Setzt man $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$, dann kann die Fouriertransformierte durch

$$F(\omega') = \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \xi_0 e^{-\alpha t + i(\omega' - \Omega)t - i\phi} dt \quad (3.4)$$

ausgedrückt werden [22]. Die Integration bereitet keine Schwierigkeiten und es ergibt sich für die Fouriertransformierte

$$\begin{aligned} F(\omega') &= \frac{e^{-i\phi} \xi_0}{-\alpha + i(\omega' - \Omega)} \left[e^{(\alpha + i(\omega' - \Omega))\Delta t/2} - e^{-(\alpha + i(\omega' - \Omega))\Delta t/2} \right] \\ &= e^{-i\phi} \frac{\xi_0}{-\alpha + i(\omega' - \Omega)} \sinh \left(-\alpha \frac{\Delta t}{2} + i(\omega' - \Omega) \frac{\Delta t}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Der Absolutbetrag von $F(\omega')$ ergibt sich damit zu

$$|F(\omega')| = \sqrt{\frac{\xi_0^2}{\alpha^2 + (\omega' - \Omega)^2} \left(\sinh^2 \left(\alpha \frac{\Delta t}{2} \right) + \sin^2 \left((\omega' - \Omega) \frac{\Delta t}{2} \right) \right)} \quad (3.6)$$

Das Maximum von $|F(\omega')|$ liegt bei $\omega' = \Omega$, sodaß aus der Lage des Maximums die Resonanzfrequenz Ω eindeutig bestimmt werden kann. In Abbildung 3.3 links ist ein Beispielspektrum eines Signals dargestellt. Dabei liegt die Resonanzfrequenz Ω

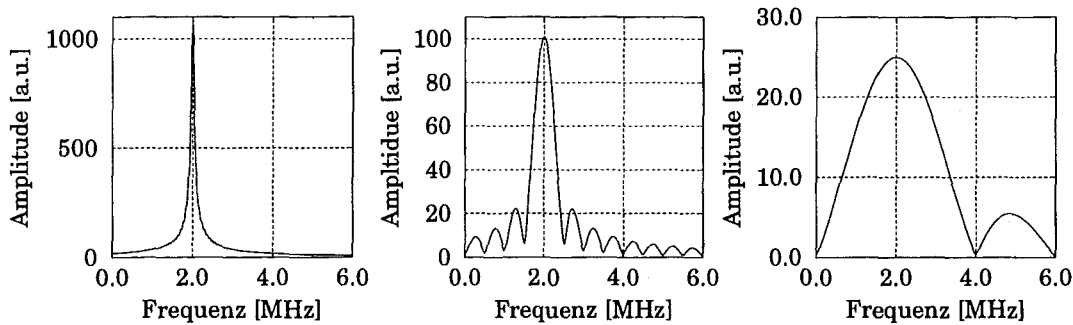


Abbildung 3.3: Betrag der Fouriertransformierten $F(\omega')$, wenn die Zeitdauer Δt 30 Schwingungszüge (links), 4 Schwingungszüge (Mitte) und 1 Schwingungszug (rechts) lang ist. Je kleiner die Zeitdauer Δt ist, desto unschärfer ist das Maximum von $|F(\omega')|$.

bei 2 MHz und die Dämpfung der Schwingung bei $0.1 \mu\text{s}^{-1}$. Die Zeitdauer Δt beträgt 30 Schwingungszüge, was einem typischen Sensorsignal entspricht.

Zwei wichtige Größen in (3.6) sind die Zeitdauer Δt und die Dämpfung α der Schwingung. Wenn die Zeitdauer sehr klein ist, dann ist auch die Amplitude der Resonanzfrequenz klein und $|F(\omega')|$ wird durch die Dämpfung dominiert. Daraus resultiert ein sehr breiter Peak mit einem vergleichsweise unscharfen Maximum. Ein solcher Peak ist in Abbildung 3.3 rechts zu sehen. Hier wurde die Zeitdauer Δt so gewählt, daß sie gerade einem Schwingungszug entspricht.

Wird Δt größer, dann wird auch der Peak schärfer. Gleichzeitig wird die Periodendauer des $\sin((\omega' - \Omega)\delta t/2)$ kleiner, was zu einem Aneinanderrücken der Seitenpeaks führt. Wählt man $\Delta t = 8\pi/\Omega$, also vier Schwingungszüge lang, ergibt sich ein Spektrum wie es in Abbildung 3.3 (Mitte) zu sehen ist.

Ein noch größeres Δt führt zu einem noch schärferen Peak, da der Zähler von (3.6) im Resonanzfall nun deutlich größer ist als die Dämpfung. Der $\sin(\omega' - \Omega)\Delta t$ in (3.6) ist nun klein im Verhältnis zum $\sinh \alpha \Delta t$ und kann daher nicht mehr eindeutig aufgelöst werden. Es ergibt sich wieder das Spektrum aus Abbildung 3.3 (links). An diesen Beispielen wird deutlich, daß es von Vorteil ist, wenn das Signal eines Mikromembransensors eine möglichst große Amplitude besitzt, dabei aber einer möglichst geringen Dämpfung unterliegt, sodaß der Zeitraum Δt , über den das Signal ausgewertet werden kann, möglichst groß wird.

In Kapitel 1 wurde gezeigt, wie die Dämpfung von der Auslenkungsform der Mikromembran abhängt. Es zeigt sich, daß Mikromembransensoren, bei denen die Mikrostruktur vergleichsweise stark an den Schwingungen teilnimmt, eine schwächere Dämpfung aufweisen als solche, bei denen die Mikrostruktur in Ruhe bleibt. Wenn die Mikrostruktur jedoch an den Schwingungen teilnimmt, dann ist die Quellstärke³ S des Sensors klein und daher auch die Amplitude der erzeugten Schallwellen. Aus diesem Grund ist es nicht möglich, einen Mikromembransensor herzustellen, der bei einer geringen Dämpfung eine große Amplitude aufweist.

³ S ist durch $\int_A \dot{\psi}(\mathbf{r}, t) dA$ gegeben

Prinzipiell wäre es möglich, zu kleineren Frequenzen überzugehen. Für diesen Frequenzbereich standen jedoch keine Ultraschallköpfe zur Verfügung. Dort könnte versucht werden, das Mitschwingen der Mikrostruktur zu minimieren und somit eine möglichst große Amplitude der abgestrahlten Schallwellen zu erhalten. Das damit verbundene Ansteigen der Dämpfung wäre durch die wesentlich niedrigere Resonanzfrequenz kompensiert. Diese Maßnahme würde aber dazu führen, daß eine einzelne Mikromembran mehr und mehr ihre Energie isotrop abstrahlt und der Sensor damit eine andere Richtcharakteristik bekommt. Da die Energie mehr im Raum verteilt wird, ist die Intensität pro Raumwinkel kleiner. Damit wird aber auch die Amplitude kleiner, die der Ultraschallkopf registriert.

Bei der Anwendung der Mikromembransensoren zeigt sich, daß die Amplitude bei einer Resonanzfrequenz um 2 MHz auch bei einer kleinen Dämpfung so groß ist, daß das Signal-Rausch-Verhältnis groß genug ist, um eine ausreichende Meßgenauigkeit zu erzielen, weshalb die Sensoren auf eine kleine Dämpfung hin optimiert werden.

3.2.2 Auflösungsvermögen der Meßapparatur

Es stellt sich die Frage, wie genau man mit der vorhandenen Meßapparatur die Resonanzfrequenz bestimmen kann und welche einschränkenden Randbedingungen durch die Apparatur oder durch den Sensor selbst gegeben sind. Eine große Bedeutung fällt der Wahl eines geeigneten Signalbereichs zu, aus dem die Resonanzfrequenz bestimmt werden soll.

Auswahl des Zeitfensters

Im ersten Teil des Signals ist noch das Echo des anregenden Ultraschallpulses enthalten. Abbildung 3.4 zeigt die Abhängigkeit des Spektrums von einem Zeitfenster, welches über das Signal geschoben wird. Die spektralen Anteile des anregenden

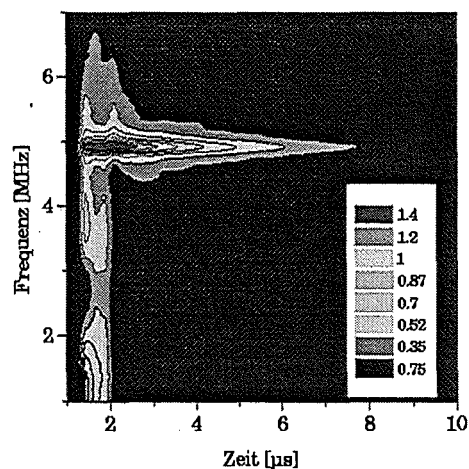


Abbildung 3.4: Abhängigkeit des Spektrums vom transformierten Signalbereich.

Pulses am Anfang des Signals sind deutlich zu sehen. Während dieser Zeit schwingt der Sensor nicht nur mit seiner Eigenfrequenz, sondern auch mit der Frequenz des anregenden Pulses. Erst nach dessen Abklingen wird das Spektrum im wesentlichen durch die Resonanzfrequenz des Mikromembransensors bestimmt. Bei der Auswertung darf daher nur dieser zweite Teil des Signals ab ca. $2 \mu\text{s}$ für die FFT verwendet werden, da sonst das Spektrum verfälscht wird.

Die Länge des Zeitausschnitts, der zur Signalanalyse verwendet werden kann, hängt in starkem Maße von der Entfernung des Mikromembransensors vom Ultraschallkopf ab. Diese Länge legt den Zeitbereich fest, in dem das Signal noch nicht von Mehrfachechos überlagert und damit gestört wird. Unter Mehrfachechos versteht man Signale des Sensors, die am Ultraschallkopf reflektiert werden, zurück zum Sensor laufen, dort nochmals reflektiert werden und anschließend registriert werden. Überlagerungen finden dann statt, wenn die Schwingungen des Sensor in der Zeit, in der ein Signal zum Ultraschallkopf und zurück gelaufen ist, noch nicht abgeklungen sind.

Abschätzung der maximal möglichen Signallänge

Die Mikromembransensoren werden mit einem 2 MHz-Kopf angeregt. Damit man eine möglichst starke Anregung erhält, sollte der Sensor sich im Fokus des Ultraschallkopfes befinden, der ca. 30 mm vor dem Ultraschallkopf liegt. Die Justiereinrichtung ist daher so dimensioniert, daß der Abstand vom Sensor zum Ultraschallkopf ca. 30 mm beträgt. Nimmt man als typische Schallgeschwindigkeit $c=1500 \text{ m/s}$ an, bedeutet dies, daß der Ultraschallkopf während der Zeit Δt

$$\Delta t = \frac{2 \cdot 0.03 \text{ m}}{1500 \text{ m/s}} = 40 \mu\text{s} \quad (3.7)$$

ein ungestörtes Signal vom Sensor empfangen kann, nämlich genau solange, bis das erste Mehrfachecho des Sensorsignals am Ultraschallkopf ankommt.

Im Prinzip wäre es möglich, diese Zeit durch Vergrößerung des Abstandes von Sensor zum Ultraschallkopf zu verlängern. Es müßte dann jedoch ein Ultraschallkopf mit einer größeren Frequenz benutzt werden. Da die Dämpfung aber proportional dem Quadrat der Resonanzfrequenz ist, würde daraus auch eine wesentlich größere Dämpfung und somit ein kürzeres Signal resultieren. Soll eine kleinere Frequenz benutzt werden, so muß der Wandler eine wesentlich größere aktive Fläche besitzen. Bei einer größeren Wandlerfrequenz müßte aber auch die Resonanzfrequenz des Sensors größer sein. Ein größerer aktiver Durchmesser mit einer kleineren Wandlerfrequenz würde nach dem oben gesagten zu einer Intensitätsabnahme der Strahlung in Richtung des Wandlers führen, da jede Mikromembran ihre Energie bei niedrigeren Frequenzen mehr im Raum verteilt. Dies erscheint im Hinblick auf eine weitere Abnahme der Amplitude nicht zweckmäßig zu sein.

In Abbildung 3.5 ist der Vergleich zweier Sensorsignale zu sehen. Links ist die Resonanzfrequenz f_{res} ca. 4 MHz und die Dämpfung ca. $1 \mu\text{s}^{-1}$. Rechts beträgt die

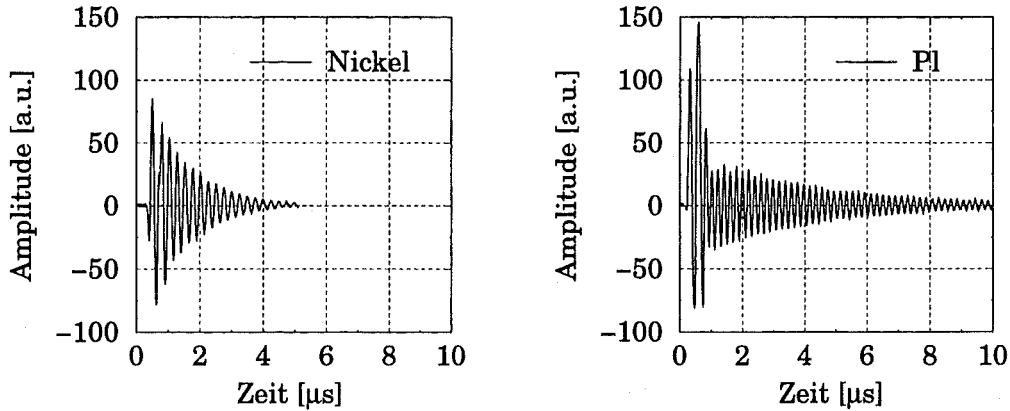


Abbildung 3.5: Vergleich zweier Sensorsignale. Links: Titan-Nickel-Sensor. Rechts: Titan-Polyimid-Sensor

Resonanzfrequenz ca. 5 MHz und die Dämpfung ca. $0.2 \mu\text{s}^{-1}$. Die Zeitspanne $\Delta\tau$, in der das Signal um den Faktor $1/e$ abnimmt, ist

$$\Delta\tau = 1/\alpha \quad (3.8)$$

Die Anzahl der Schwingungszüge $N_{\Delta\tau}$ in diesem Zeitraum ist

$$N_{\Delta\tau} = \frac{\Delta\tau}{2\pi/\omega} = \frac{f_{\text{res}}}{\alpha}$$

Für die oben erwähnten Mikromembransensoren ergibt sich

$$N_{\Delta\tau}(4 \text{ MHz}) = 4 \quad \text{und} \quad N_{\Delta\tau}(5 \text{ MHz}) = 25. \quad (3.9)$$

Es ist daher günstiger, einen Sensor mit einer wesentlich geringeren Dämpfung zu wählen.

Die maximale Zeitspanne Δt , in der ein ungestörtes Signal registriert werden kann, beträgt wie schon gezeigt ca. $40 \mu\text{s}$. Bei einer Abtastrate f_s von 20 MHz erhält man bei einer Datenaufnahme in diesem Zeitraum N_s Datenpunkte. N_s ist durch

$$N_s = \Delta t \cdot f_s = 800 \quad (3.10)$$

gegeben, wobei $1/f_s$ die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Punkten des von der A/D-Karte aufgenommenen Signals ist. Da die Anzahl der Datenpunkte in der FFT ein Potenz von 2 sein muß, kommt als größtmögliche Anzahl zu transformierender Datenpunkte $N=512$ in Frage. Damit ergibt sich eine Auflösung im Frequenzraum von

$$\Delta f = \frac{f_s}{N_s} \approx 39 \text{ kHz} \quad (3.11)$$

Nimmt man den nächstgrößeren Bereich, also 1024 Punkte, dann erreicht man eine Auflösung von ca. 19.5 kHz. Beide Auflösungen reichen jedoch nicht aus, um eine

Dichteänderung von 1 Prozent nachweisen zu können⁴. Da es sich bei dem Signal um eine gedämpfte Schwingung handelt, deren Amplitude ab einem bestimmten Zeitpunkt null ist, kann die Auflösung durch das sog. "Zero Padding" erhöht werden [21]. Dabei wird das Signal im Bereich, in dem keine Daten mehr zur Verfügung stehen, zu null gesetzt. Wählt man N_s zu 8192, so erhält man eine Auflösung von ca. 2.4 kHz, die genügend klein ist, um eine Dichteänderung von einem Prozent nachweisen zu können.

Im Prinzip kann man auch größere Werte als $N_s=8192$ bei der Berechnung der Fouriertransformierten benutzen, es zeigt sich aber, daß die erreichte Meßgenauigkeit bei einer gegebenen Messung nicht höher ist. Dies kann auf Schwankungen der Medienparameter zurückgeführt werden. Eine wirkliche Erhöhung der Meßgenauigkeit kann nur durch ein wesentlich längeres Signal erreicht werden, im bestmöglichen Fall durch ein unendlich langes Signal. Die maximale Signallänge ist aber durch die Zeitspanne Δt vorgegeben und kann nicht übertroffen werden.

3.2.3 Einfluß der Dämpfung auf die Meßgenauigkeit

Streng genommen muß auch die Dämpfung in der Auswertung berücksichtigt werden. Die Dichte wirkt nur auf die Eigenfrequenz ω des Signals im Medium, gemessen wird jedoch die Frequenz $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$. Auch hier ist es vorteilhaft, Sensoren mit einer geringen Dämpfung zu benutzen. Wenn die Dämpfung klein gegen ω ist, kann die Wurzel entwickelt werden und es ergibt sich

$$\Omega = \omega \left(1 - \frac{\alpha^2}{2\omega^2} \right). \quad (3.12)$$

Man findet, daß bei Eigenfrequenzen $f_{\text{res}} = \omega/2\pi$ um 2 MHz die Dämpfung ca. $0.2 \mu\text{s}^{-1}$ beträgt. Der Fehler, der entsteht, wenn die Dämpfung nicht berücksichtigt wird, ist gerade gleich $\alpha^2/2\omega^2$. Die Verschiebung der Resonanzfrequenz $|\Delta f_{\text{res}}|$ ergibt sich damit zu

$$|\Delta f_{\text{res}}| = \frac{\omega}{2\pi} \frac{\alpha^2}{2\omega^2} = 2 \times 10^6 \frac{0.04 \times 10^{12}}{8\pi^2 4 \times 10^{12}} \approx 250 \text{ Hz}. \quad (3.13)$$

Dieser Wert ist wesentlich kleiner als die mit der FFT erreichbaren Genauigkeit von ca. 2.4 kHz.

Da die Dämpfung während einer Messung weitgehend konstant bleibt, stellt sie in erster Näherung eine additive Konstante dar. Normiert man jede Messung beispielsweise auf die Resonanzfrequenz in Wasser, dann werden nur relative Frequenzänderungen gemessen, auf die die Dämpfung in diesem Fall keinen Einfluß besitzt. Die Dämpfung kann daher in guter Näherung bei der Bestimmung der Resonanzfrequenz vernachlässigt werden.

⁴Ein typischer Titan-Titan-Sensor des Typs H(53;52.5;7) hat eine Vakuumsfrequenz $f_0 = \omega_0/2\pi$ von 2.60 MHz und eine Kopplungsgröße $\chi = 0.88 \text{ cm}^3/\text{g}$. Mit Hilfe von $f_{\text{res}} = f_0/\sqrt{1 + \chi\rho_f}$ ergibt sich bei einer Dichteänderung von einem Prozent eine Frequenzverschiebung um ca. 4 kHz. Die Auflösung der FFT muß daher kleiner als 4 kHz sein.

Kapitel 4

Experimentelle Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die experimentellen Ergebnisse den in Kapitel 1 hergeleiteten funktionalen Zusammenhängen gegenübergestellt. Wie sich herausstellen wird, eignen sich diese Formeln in sämtlichen Fällen, um qualitative und quantitative Vorhersagen über das Verhalten der Resonanzfrequenz in Abhängigkeit einzelner Parameter zu machen. Die einzelnen Parameter werden in getrennten Abschnitten behandelt.

Vergleich von Theorie und Experiment durch Variation der Sensorparameter

Vergleicht man die experimentellen Ergebnisse mit den theoretischen Vorhersagen, so findet man in den meisten Fällen Abweichungen, die natürlich auf das verwendete Modell, aber auch darauf zurückzuführen sind, daß die Parameter des Sensors nicht genau bekannt sind. So besitzt die innere Spannung ihren Wert von 200 MPa nur direkt nach dem Sputterprozeß. Weitere Prozeßschritte wie das Oxidieren, Ausbacken des Wafers oder das Abheben der Sensoren vom Wafer führen zu einer Veränderung der inneren Spannung, die im Einzelfall dazu führt, daß die Spannung zwischen 100 MPa und 300 MPa variiert [23]. Die Dicke der Titanfolie ist ebenfalls prozeßtechnisch bedingt nicht konstant. Die Dicke von 2.7 μm wird nur in der Mitte des Wafers erreicht. Am Rand des Wafers ist die Dicke bis zu 25 Prozent kleiner, was dazu führt, daß die Resonanzfrequenz auch von der Lage eines Sensors auf dem Wafer abhängt.

Die Dichte von gesputterten Schichten ist von den Prozeßparametern abhängig und gewissen Schwankungen unterworfen. So wurden z. B. bei gesputterten Wolframschichten Dichten gemessen, die bis zu 7 Prozent kleiner sind als bei erschmolzenen Material [24].

Der Durchmesser der aktiven Sensorfläche hängt davon ab, wie stark der Klebstoff beim Klebprozeß in Richtung der Sensormitte läuft. Darüber hinaus hängen Radius und Höhe der Mikrostruktur in starkem Maße vom Herstellungsprozeß ab, und

können im Einzelfall in gewissen Grenzen variieren. Sie können sich beispielweise dann verändern, wenn ein bestimmter Bereich des Wafers schräg oder aufgrund von Intensitätsschwankungen der Lichtquelle schwächer belichtet wurde. Die Werte dieser Parameter ergeben sich aus Durchschnittswerten, die auf dem Wafer gemessen wurden, dem der hier benutzte Sensor entstammt. Dasselbe gilt für den Lochabstand. Dieser wird wie der Membranradius und die Höhe der Mikrostruktur durch den Herstellungsprozeß beeinflusst und unterliegt daher einer gewissen Variation.

Die Angabe von theoretischen Ergebnissen unterliegt daher immer auch einer gewissen Schwankung, da nicht bekannt ist, wie gut die angenommenen Parameter mit den tatsächlich vorhandenen übereinstimmen. Man erhält durch die gegebene Bandbreite der Parameter ζ_i eine Schar an möglichen Kurven $s(\zeta_i)$. Das theoretische Modell läßt sich aus diesem Grund nur in gewissen Grenzen überprüfen. Es ist deshalb schwierig, die absoluten Vorhersagen des Modells zu verifizieren. In jedem Fall ist es aber möglich, festzustellen, ob der funktionale Zusammenhang durch das Modell richtig wiedergegeben wird. Für den Einsatz des Sensors bedeutet dies, daß mit ihm quantitative Messungen erst gemacht werden können, nachdem er kalibriert worden ist.

Beim Vergleich von Theorie und Experiment wird deshalb wie folgt vorgegangen: Aus der Schar der möglichen theoretisch berechneten Kurven $s(\zeta_i)$ wird diejenige Kurve s_{\min} ausgewählt, deren Abweichung zu den experimentell ermittelten Daten minimal ist. Da es möglich ist, daß die Abweichung für unterschiedliche Parametersätze minimal wird, wird aus der Schar dieser Parametersätze derjenige ausgewählt, dessen Parameter am besten mit den angenommenen Sensorparametern übereinstimmen. Die auf diese Weise bestimmten Sensorparameter ζ_{\min} werden dann mit den angenommenen Sensorparametern verglichen.

4.1 Untersuchung des Dichteeffekts

Der Untersuchung des Dichteeffekts fällt insofern eine besondere Rolle zu, als daß die Dichte die primäre Meßgröße ist und daher so genau wie möglich gemessen werden sollte. Die Genauigkeit, mit der gemessen werden kann, hängt natürlich auch von der Querempfindlichkeit des Sensors auf Parameter wie Viskosität, Temperatur und Druck ab. Diese werden in eigenen Abschnitten weiter unten behandelt.

In diesem Abschnitt werden Dichtemessungen vorgestellt, die bei konstanter Temperatur, konstantem Druck und konstanter Viskosität abliefen. Mit konstanter Viskosität ist gemeint, daß die Änderung der Viskosität vernachlässigbar klein ist, so daß sie nicht berücksichtigt werden muß. Die Messungen, die in diesem Abschnitt behandelt werden, stellen eine Art Maßstab für das verwendete Modell dar, da sie den einfachsten Fall behandeln. Insbesondere werden die folgenden Sachverhalte nachgewiesen:

1. Bei niedrigviskosen Stoffen besteht zwischen der Dichte und dem Quadrat der Schwingungsdauer $1/f_{\text{res}}^2$ ein linearer Zusammenhang

2. Der Wert der Kopplungsgröße χ , die ein Maß für die Empfindlichkeit des Sensors auf Dichteänderungen ist, und der Wert der Resonanzfrequenz können nur dann erklärt werden, wenn das Mitschwingen der Mikrostruktur berücksichtigt wird.
3. Die Meßgenauigkeit der Meßapparatur beträgt in niedrigviskosen Medien ca. ± 1 Prozent.

Um diese Sachverhalte nachweisen zu können, wurden Dichtemessungen in unterschiedlichen Medien durchgeführt. Alle Medien waren wässrige Lösungen. In einzelnen wurde in Kaliumjodid-Lösungen, Kochsalzlösungen und in Alkoholen die Dichte gemessen. In allen Stoffen bleibt die Viskosität über einen weiten Bereich hin nahezu konstant¹. Die Dichte dieser Stoffe wurde mit dem Dichtemeßgerät DMA 35 (Fa. Paar-Physika, Genauigkeit ± 0.1 Prozent) bestimmt. Bei allen Messungen wurde die Resonanzfrequenz aus einem Fit an den Peak des Absolutbetrags der Fouriertransformierten bestimmt, welche numerisch aus den Signaldaten berechnet wurde.

4.1.1 Funktionaler Zusammenhang zwischen Dichte und Resonanzfrequenz

Die erste Messung verifiziert den linearen Zusammenhang zwischen der Dichte eines flüssigen Mediums und dem Quadrat der Schwingungsdauer $4\pi^2/\omega^2$ einer Mikromembran gemäß Gleichung (1.137). Die Messung wurde in Kaliumjodid-Wasser-Lösungen durchgeführt. Zum Einsatz kam dabei ein Titan-Polyimid-Sensor des Typs R(53;68;11) (vgl. Abb. 1.2). Die Resonanzfrequenz f_{res} wurde dabei aus dem Mittelwert von drei unabhängigen Messungen bestimmt. In Abbildung 4.1 ist die gemessene Dichte in Abhängigkeit vom Quadrat der Schwingungsdauer $4\pi^2/\omega^2$ dargestellt. Der lineare Zusammenhang ist deutlich zu erkennen.

Benutzt man die in Abschnitt 1.2.4 hergeleitete Formel (1.137)

$$\rho_f = \frac{1}{\chi} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) \quad (4.1)$$

für den funktionalen Zusammenhang zwischen der Dichte und der Resonanzfrequenz ω und faßt die Kopplungsgröße χ sowie die Resonanzfrequenz ω_0 der unbelasteten Mikromembran als Parameter auf, so ergibt eine lineare Regression

$$\chi = 0.880 \text{ cm}^3/\text{g} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 2.350 \text{ MHz} \quad (4.2)$$

sowie einen Korrelationskoeffizienten von $R=0.9994$ und eine Standardabweichung Δs von 2.7 Promille. Die sich mit diesen Koeffizienten ergebende Ausgleichsgerade ist ebenfalls in Abbildung 4.1 eingezeichnet. Der auf den Meßwert bezogene relative

¹Kohlenwasserstoffe zeigen eine leichte Variation der Viskosität im untersuchten Bereich

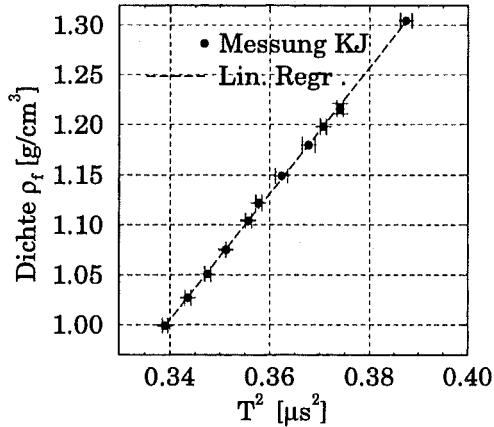


Abbildung 4.1: Gemessener Zusammenhang zwischen der Dichte und dem Quadrat der Schwingungsdauer $T = 1/f_{\text{res}}$. Gemessen wurde mit einem Titan-Polyimid-Sensor des Typs R(53;68;11).

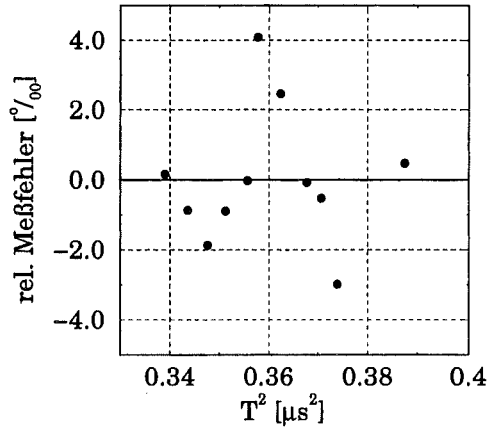


Abbildung 4.2: Relativer Meßfehler der Daten aus Abb. 4.1.

Fehler ist in Abbildung 4.2 abgebildet. Man sieht, daß die maximale Abweichung ca. 4 Promille beträgt. Die erreichbare Meßgenauigkeit ergibt sich dadurch zu ± 1 Prozent, wenn ein Sicherheitsfaktor 2 angenommen wird.

Diese Messung stellt auch einen Test für die maximal erreichbare Auflösung der Meßapparatur dar. Um bei der Bestimmung der Resonanzfrequenz eine höhere Auflösung als 2.4 kHz (Abstand zwischen zwei Punkten des Spektrums, siehe Kapitel 3) zu erhalten, wurde in den Peak des Spektrums eine Parabel eingepaßt, aus deren Scheitelwert die Resonanzfrequenz berechnet wurde. Legt man entsprechend der aus der Messung bestimmten Standardabweichung eine Dichteänderung von 2.7 Promille zugrunde und berechnet die daraus resultierende Frequenzverschiebung Δf_{res} , dann erhält man, wenn für χ und f_0 die Werte aus (4.2) benutzt werden, für Δf_{res} einen Wert von ca. 1.1 kHz. Das bedeutet, daß man mit Hilfe der Parabel die Genauigkeit, mit der die Resonanzfrequenz bestimmt werden kann, um ungefähr einen Faktor zwei verbessern kann.

4.1.2 Abhängigkeit der Kopplungsgröße χ von den Randbedingungen

In Kapitel 1 wurde gezeigt, daß das Mitschwingen der Mikrostruktur zu einer starken Verkleinerung der Kopplungsgröße χ und damit zu einer größeren Resonanzfrequenz der Mikromembran führt. Um den Einfluß der Randbedingungen auf die Kopplungsgröße χ und die Resonanzfrequenz zu bestimmen, werden die Parameter des Sensors benötigt. Diese sind jedoch nicht exakt bekannt, weshalb der Parametersatz, bei dem die Abweichung der theoretisch berechneten Größen χ und f_0 von

den experimentell ermittelten minimal wird, durch eine Variation der Sensorparameter bestimmt wird (siehe Seite 85 "Variation der Sensorparameter").

Variiert wird die innere Spannung σ_0 , die Dicke der Mikromembran h_m und die Höhe der Mikrostruktur h_{ms} . Alle anderen Parameter wurden während der Variation festgehalten. Eine minimale Abweichung zu den experimentell ermittelten Werten von χ und f_0 erhält man für den mittels der Gleichungen (1.130) und (1.131) berechneten Parametersatz in der rechten Spalte von Tabelle 4.1. Dieser Parametersatz hat darüber hinaus auch die Eigenschaft, daß die Abweichung von den angenommenen Parametern minimal wird.

Wie sich zeigt, unterscheidet sich dieser Parametersatz nur geringfügig vom angenommenen Parametersatz. Der Wert für die Dicke der Mikrostruktur liegt innerhalb der Standardabweichung, die sich ergibt, wenn die Strukturhöhe an verschiedenen Stellen aus dem Wafer gemessen wird. Diese Standardabweichung beträgt bei Titan-Polyimid-Sensoren typischerweise $\pm 2 \mu\text{m}$. Eine größere Dicke der Mikromembran kann entstehen, wenn nach der Entwicklung eine Schicht Polyimid auf der Titanfolie zurückbleibt. Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn der Wafer entweder nicht genügend lang belichtet wurde, oder aber die Entwicklungszeit zu kurz bemessen wurde. Der Wert für die innere Spannung liegt innerhalb der prozeßtechnisch möglichen Schwankungen [23].

Parameter	Sensor	Fit
σ_0	200.00 MPa	197.33 MPa
a	53.00 μm	53.00 μm
A	68.00 μm	68.00 μm
h_m	2.70 μm	2.76 μm
h_{ms}	11.00 μm	9.5 μm
$ \lambda_0 $	0.419	0.426

Tabelle 4.1: Parameterdaten des verwendeten Titan-Polyimid-Sensors (R(53;68;11)). Mittlere Spalte: angenommene Werte. Rechte Spalte: Werte, für die die Abweichung von Theorie und Experiment minimal ist.

Bemerkenswert ist der große Wert von $|\lambda_0| \approx 0.426$, der das Mitschwingen der Mikrostruktur kennzeichnet. Offensichtlich bleibt die Mikrostruktur keinesfalls in Ruhe. Dies ist aber auch zu erwarten. Vergleicht man die Masse der Mikrostruktur m_s mit der Masse der Mikromembran m_m , so ergibt sich mit Hilfe von Formel (1.9) für das Verhältnis

$$\frac{m_s}{m_m} \approx 0.64. \quad (4.3)$$

Die Masse der Mikrostruktur ist kleiner als die der Mikromembran, sodaß ihre Trägheit nicht ausreicht, die Mikromembran an ihrem Rand festzuhalten. Um den Einfluß von λ_0 besser herauszustellen, berechnen wir explizit mit den Daten aus der rechten Spalte von Tabelle 4.1 die Kopplungsgröße und die Resonanzfrequenz in Wasser für den Fall einer festen Einspannung und für den Fall, daß die Mikrostruktur an den Schwingungen teilnimmt. Mit Hilfe der Gleichungen (1.130), (1.131) und

(1.136) aus Abschnitt 1.2.4 erhält man mit $\chi = 0.8806 \text{ cm}^3/\text{g}$ und $f_0 = 2.3504 \text{ MHz}$ sowie $|\lambda_0| = 0.426$ praktisch die Werte aus (4.2), welche durch eine lineare Regression bestimmt wurden.

Nimmt man nun an, daß λ_0 gleich null ist, die Mikromembran also fest eingespannt ist, dann berechnen sich Resonanzfrequenz im Vakuum $f_0 = \omega_0/2\pi$ und Kopplungsgröße χ mit Hilfe der Formel (1.130), (1.131) und (1.136) zu

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 2.07 \text{ MHz} \quad \chi = 3.70 \text{ cm}^3/\text{g} \quad (4.4)$$

In Wasser erhält man damit eine Resonanzfrequenz von $f_{\text{res}} = 0.955 \text{ MHz}$. Dieser Wert ist wesentlich kleiner als der gemessene Wert der Resonanzfrequenz in Wasser ($f_{\text{res}} \approx 1.71 \text{ MHz}$; vgl. Abb. 4.1), da für die Kopplungsgröße auf diese Weise ein zu großer Wert berechnet wird. Nur wenn das Mitschwingen der Mikrostruktur berücksichtigt wird, ergibt sich für die Kopplungsgröße χ ein Wert, der im Bereich des Wertes liegt, der durch einen Fit an die Meßdaten bestimmt wurde.

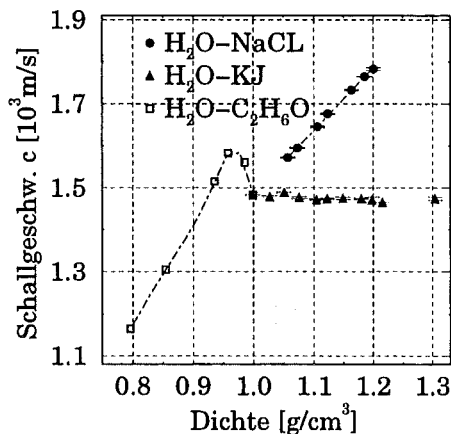


Abbildung 4.3: Gemessene Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit c von der Dichte des Mediums.

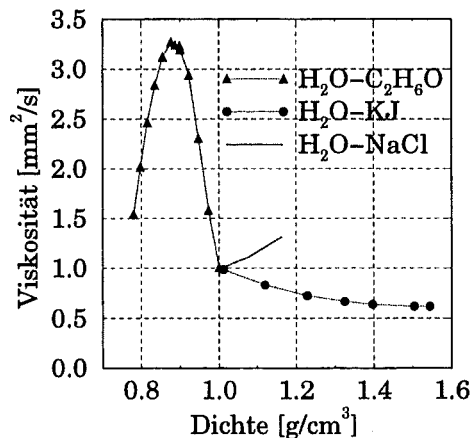


Abbildung 4.4: Viskosität ν als Funktion der Dichte für drei verschiedene wässrige Lösungen [25].

4.1.3 Wellenlängenabhängigkeit der Kopplungsgröße χ

Im Prinzip hängt die additive Masse auch davon ab, welche Wellenlänge vom Mikromembransensor abgestrahlt wird (vgl. Abschnitt 1.2.7). Man erwartet jedoch, daß dieser Effekt in der Größenordnung der Meßgenauigkeit liegt und daher nicht eindeutig nachgewiesen werden kann. Darüber hinaus wird dieser Effekt durch eine Viskositätsänderung verdeckt. Um den Nachweis führen zu können, daß auch bei einer großen Änderung der Wellenlänge noch ein linearer Zusammenhang zwischen der Dichte und $1/f^2$ besteht, wurde die Dichte außer von Kaliumjodid-Wasser-

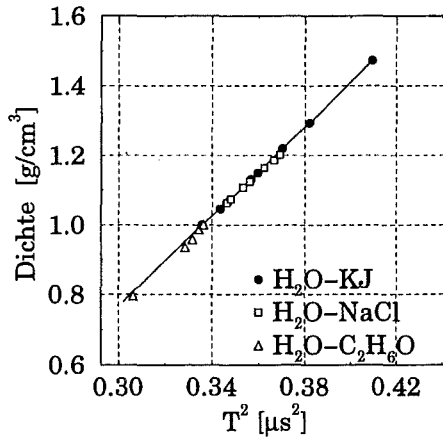


Abbildung 4.5: Gemessener Zusammenhang zwischen der Dichte verschiedener Medien und dem Quadrat der Schwingungsdauer für einen Titan-Polyimid-sensor des Typs R(53;68;11).

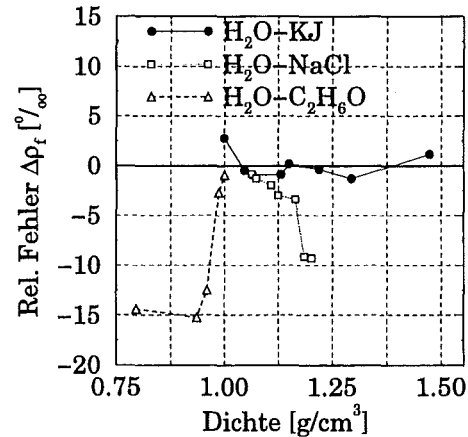


Abbildung 4.6: Zusammenhang zwischen dem relativen Meßfehler $\Delta\rho_f$ der Daten aus Abb. 4.5 und der gemessenen Dichte.

Lösungen ($\text{H}_2\text{O-KJ}$) auch von Natriumchlorid-Lösungen ($\text{H}_2\text{O-NaCl}$) und Äthanol-Lösungen ($\text{H}_2\text{O-C}_2\text{H}_6\text{O}$) gemessen. Diese Medien zeigen schon in einem vergleichsweise kleinen Dichtebereich eine starke Änderung der Schallgeschwindigkeit, die primär für die Änderung der abgestrahlten Wellenlänge verantwortlich ist. In Abbildung 4.3 ist die gemessene Schallgeschwindigkeit der drei Medien in Abhängigkeit von der Dichte dargestellt. Abbildung 4.4 zeigt die Viskosität der untersuchten Medien in Abhängigkeit von der Dichte.

Die Schallgeschwindigkeit wurde ebenfalls mit Hilfe der aufgenommenen Ultraschallsignale bestimmt. Da die Strecke zwischen Ultraschallkopf und Mikromembransensor bekannt ist, genügt es, die Zeit zwischen dem ersten Auftreffen des Sensorsignals und dessen erster Mehrfachreflektion zu bestimmen, um die Schallgeschwindigkeit im Medium zu berechnen. Man sieht, daß im gemessenen Dichtebereich die Schallgeschwindigkeit sich bis zu ca. 50 Prozent ändert.

Auch in diesem Fall wurden drei Messungen aufgenommen und gemittelt. In Abbildung 4.5 ist die gemessene Dichte über $1/f^2$ aufgetragen. Wenn man annimmt, daß weder die Viskosität noch die Wellenlänge einen Einfluß auf Resonanzfrequenz besitzen, dann erwartet man, daß alle Meßpunkte auf einer Geraden zu liegen kommen. Es muß daher möglich sein, mit Hilfe einer Kalibrierkurve, die in diesem Fall mit Hilfe der Meßpunkte von Kaliumjodid bestimmt wurde, die Dichte bei gegebener Resonanzfrequenz zu bestimmen. Bezeichnet man die durch den Fit berechnete Dichte mit ρ_{fit} und die gemessene Dichte mit ρ_f dann ergibt sich der relative Fehler $\Delta\rho_f$ durch

$$\Delta\rho_f = \frac{\rho_f - \rho_{\text{fit}}}{\rho_f} \quad (4.5)$$

In Abbildung 4.6 ist der relative Fehler $\Delta\rho_f$ in Abhängigkeit von der gemessenen Dichte aufgetragen. Die Werte von Kaliumjodid weichen nur geringfügig von den Werten ab, die durch die Ausgleichsgerade bestimmt wurden. Es zeigt sich hier auch kein systematischer Fehler, da bei Kaliumjodid die Schallgeschwindigkeit und die Viskosität im Vergleich zu den beiden anderen Medien nahezu konstant bleibt. Bei Äthanol und Kochsalz ist hingegen ein systematischer Fehler zu beobachten. In beiden Fällen ist die Dichte, die mit Hilfe des Fits berechnet wird, zu groß. Das bedeutet, daß der Wert von χ , den man mittels Gl. (1.137) aus der Kalibrierkurve bestimmen kann, kleiner ist als die tatsächlich vorhandene.

Bei Äthanol kann der auftretende Fehler auf die vergleichsweise starke Änderung der Viskosität zurückgeführt werden (vgl. Abb. 4.4). Aus Gleichung (1.171) ergibt sich, daß die Kopplungsgröße größer wird, wenn die Viskosität ansteigt. Damit würden sich dann auch kleinere Werte durch einen Fit ergeben.

Der systematische Fehler bei Kochsalz kann nicht allein durch eine Änderung der Viskosität zustande kommen, da diese im Vergleich zu Äthanol sich nur wenig ändert. Dies könnte ein Hinweis darauf sein, daß der Einfluß der Wellenlänge größer ist als berechnet. Das wäre z.B. dann der Fall, wenn die Amplitude am Rand kleiner ist als die durch die Theorie berechnete Amplitude (vgl. Abb. 1.7 auf S. 46).

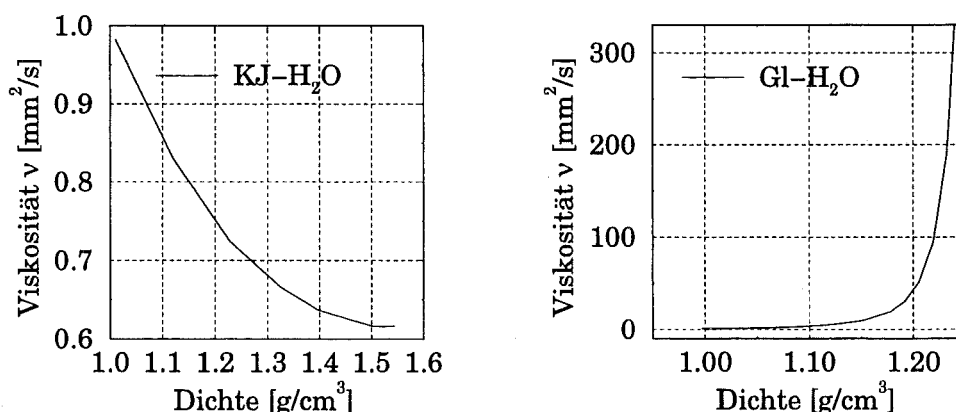


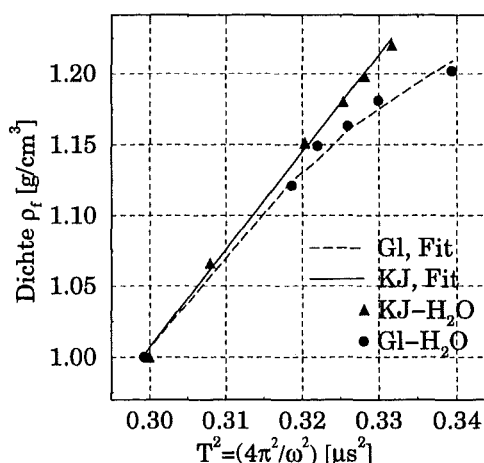
Abbildung 4.7: Abhängigkeit der kinematischen Viskosität ν von der Dichte wässriger Kaliumjodid- (links) und Glycerin-Lösungen (rechts) [25].

4.2 Einfluß der Viskosität

In Abschnitt 1.2.8 wurde gezeigt, daß die Viskosität des umgebenden Mediums wie die Dichte einen Einfluß auf die insgesamt zu bewegende Masse hat. Entsprechend Gleichung (1.171) erwartet man, daß dieser Einfluß mit steigender Viskosität größer wird und dazu führt, daß der Zusammenhang zwischen der Dichte und dem Quadrat der Schwingungsdauer nicht mehr linear ist.

Um die Verschiebung der Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der Viskosität zu messen, wurden mehrere Messungen in Glycerin-Wasser-Gemischen und Kaliumjodid-Wasser-Gemischen durchgeführt. Die Abhängigkeit der Viskosität von der Dichte der jeweiligen Lösung ist in Abbildung 4.7 zu sehen. Im Vergleich zur Viskosität von Glycerin-Wasser-Lösungen bleibt die Viskosität von Kaliumjodid-Wasser-Lösungen in weiten Bereichen der Dichte fast konstant. Man kann daher aus einem Vergleich beider Messungen auf einfache Weise eine Aussage über die Größenordnung des Viskositätseffekts treffen.

Abbildung 4.8: Gemessener Zusammenhang zwischen der Dichte von KJ-H₂O-Gemischen (▲) und Gl-H₂O-Gemischen (●) und dem Quadrat der Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega$ bei einem Titan-Titan-Sensor des Typs H(53;52.5;7). Die Abweichung vom linearen Zusammenhang wird mit steigender Viskosität immer größer.



4.2.1 Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Viskosität

Die Dichte der bei der Messung verwendeten Gemische variierte von 1 g/cm³ bis ca. 1.23 g/cm³. Die Dichte wurde wie oben mit dem Dichtemeßgerät DMA 35 (Fa. Paar-Physica, Genauigkeit 0.1 Prozent) bestimmt. Die Viskosität wurde mit einem Fallviskosimeter (Fa. Lauda) bestimmt. Bei der Messung wurde ein Titan-Titan-Sensor des Typs H(53;52.5;7) eingesetzt (vgl. Abb. 1.1). In Abbildung 4.8 ist die gemessene Dichte in Abhängigkeit vom Quadrat der Schwingungsdauer aufgetragen. Die zugehörigen Meßwerte können Tabelle 4.2 entnommen werden.

Vergleicht man die Dichte aus Abb. 4.8 mit den zugehörigen Viskositätswerten aus den Graphiken in Abbildung 4.7, dann wird klar, daß bei steigender Viskosität die Meßpunkte von Glycerin immer mehr von der Geraden abweichen, die durch die

Stoff	T^2 [μs^2]	ρ_f g/cm ³	ν [mm ² /s]
Gl-H ₂ O	0.2992	1.000	1.00
Gl-H ₂ O	0.3186	1.121	4.73
Gl-H ₂ O	0.3219	1.149	9.54
Gl-H ₂ O	0.3258	1.163	13.4
Gl-H ₂ O	0.3299	1.181	25.0
Gl-H ₂ O	0.3394	1.202	65.0
Kj-H ₂ O	0.2999	1.000	1.00
Kj-H ₂ O	0.3079	1.066	0.905
Kj-H ₂ O	0.3203	1.151	0.801
Kj-H ₂ O	0.3253	1.180	0.77
Kj-H ₂ O	0.3281	1.198	0.754
Kj-H ₂ O	0.3316	1.220	0.734

Tabelle 4.2: Meßdaten für Abb. 4.8. Angegeben ist die Art des Mediums, d.h. Mischungen von Glycerin (Gl) bzw. Kaliumjodid (Kj) mit Wasser, das Quadrat der Schwingungsdauer T , die Dichte ρ_f und die Viskosität ν .

Meßpunkte von Kaliumjodid definiert wird. Wie in Gleichung (1.171) gezeigt wurde, ist der Zusammenhang zwischen der Dichte ρ_f , der Viskosität ν und der Resonanzfrequenz $f_{\text{res}} = \omega/2\pi$ durch

$$\rho_f = \frac{1}{\chi + \beta \sqrt{2\nu/\omega}} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) \quad (4.6)$$

gegeben. Legt man diesen Zusammenhang zugrunde und faßt χ , β und $f_0 = \omega_0/2\pi$ als Parameter auf, so können die optimalen Parameter nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden. Es ergeben sich dann die Punkte, die durch die durchgezogene und die gestrichelte Kurve in Abbildung 4.8 miteinander verbunden werden. Die durchgezogene Kurve kennzeichnet Kaliumjodid-Lösungen, die gestrichelte die Glycerin-Lösungen. Dabei werden beide Kurven wohlgeordnet mit denselben Parametern berechnet. Man erhält für diese Parameter χ , f_0 und β

$$\begin{aligned} \chi &= 0.957 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg} \\ \beta &= 17.470 \text{ m}^2/\text{kg} \\ f_0 &= 2.563 \text{ MHz}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

sowie für den Korrelationskoeffizienten $R=0.997$ und eine Standardabweichung Δs von 5.7 Promille. Wie im vorangegangenen Abschnitt stellt sich auch in diesem Fall die Frage, wie gut das verwendete Modell den tatsächlichen Meßverlauf wiedergibt. Es wird also versucht, die Sensorparameter so anzupassen, daß die Theorie mittels dieser Parameter Daten für χ und f_0 liefern, die mit den Daten aus (4.7) möglichst gut übereinstimmen. Als variierbare Parameter wurden die innere Spannung, der Radius der Mikromembran, die Höhe der Mikrostruktur und die Dicke der Membran gewählt. Wie eingangs erwähnt, unterliegen diese Größen prozeßtechnisch bedingt einer gewissen Unsicherheit. Bei Titan-Titan-Sensoren ist es möglich, daß die Ätzung dazu führt, daß einerseits der Abstand d zweier Membranränder bzw. die

Parameter	Sensor	Fit
a	53 μm	53 μm
h_m	2.7 μm	2.61 μm
σ_0	200 MPa	222.34 MPa
h_s	7 μm	9 μm
d	52.5 μm	52.5 μm

Tabelle 4.3: Vergleich der Sensorparameter (Titan-Titan-Sensor, Typ H(53;52.5;7)). Mittlere Spalte: Angenommene Sensorparameter. Rechte Spalte: Mit Hilfe von Gl. (1.130) und (1.131) angepaßte Parameter, für die die Abweichung von Theorie und Experiment minimal ist.

Membrandicke variieren und andererseits der Radius der Membranen unterschiedlich groß sein kann. Ebenso kann die Dichte der Membranfolie bzw. der Mikrostruktur aufgrund des Sputterprozesses geringer sein. Darüber hinaus kann auch die innere Spannung durch die Prozesse in einem vergleichsweise großen Bereich variieren. Da der Lochabstand wie die Höhe der Mikrostruktur in unserem Modell nur die Masse der Mikrostruktur beeinflussen, kann statt des Lochabstandes auch die Höhe der Mikrostruktur variiert werden.

Die Werte der angepaßten Parameter in der rechten Spalte von Tabelle 4.3 liegen sämtlich innerhalb ihrer Bandbreite. Die größere Höhe der Mikrostruktur bedeutet nur, daß die Masse der Mikrostruktur während des Herstellungsprozesses verändert wurde. Dies kann beispielweise durch eine Anisotropie beim Ätzen passieren. Es zeigt sich, daß bei Titan-Titan-Sensoren solche Anisotropien dazu führen, daß am Rand einer Mikromembran auch nach dem Ätzen noch Titan zurückbleibt. Dies führt dann zu einer erhöhten Masse der Mikrostruktur.

Mit den Daten aus der rechten Spalte "Fit" von Tabelle (4.3) erhält man für χ und f_0 mit Hilfe der Gleichungen (1.131), (1.136) und (1.130) die Werte

$$\chi = 0.9571 \text{ cm}^3/\text{g} \quad f_0 = 2.5628 \text{ MHz}, \quad (4.8)$$

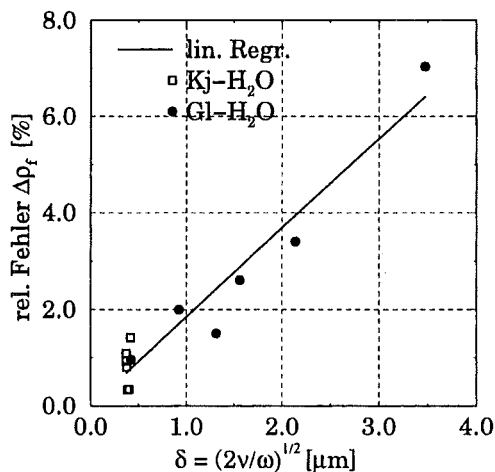
welche praktisch mit den Parametern von (4.7) übereinstimmen, die durch den Fit an die Daten aus Abbildung 4.8 bestimmt wurden. Dabei wurde die Viskosität nicht berücksichtigt, d.h. man erhält mit diesen Werten eine Gerade durch die Punkte, die durch die Kaliumjodid-Lösungen vorgegeben werden. Der Parameter β läßt sich auf diese Weise nicht bestimmen, da er proportional der Schwingungsamplitude ist, über deren Kenntnis man aber nicht verfügt. Allerdings läßt der Wert aus (4.7) die näherungsweise Berechnung der Amplitude zu, wie weiter unten gezeigt wird.

Zuvor soll der Fehler bestimmt werden, der entsteht, wenn bei einer Dichtemessung in viskosen Flüssigkeiten die Viskosität nicht berücksichtigt wird. Dazu wird wie folgt vorgegangen: Durch die Meßpunkte von Kaliumjodid ist eine Kalibriergerade für Flüssigkeiten mit nahezu konstanter Viskosität gegeben. Diese lautet

$$\rho_{v=\text{const}} = \frac{1}{\chi} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) \quad (4.9)$$

Der Fehler $\Delta\rho_f$ ergibt sich daher aus der Dichte $\rho_{v=0}$, die mittels der Eichgeraden (4.9) bestimmt wird, und der tatsächlichen Dichte ρ_f , die mit Hilfe von (4.6) be-

Abbildung 4.9: Relativer Fehler $\Delta\rho_f$, der bei einer Dichtemessung ohne Berücksichtigung der Viskosität entsteht, in Abhängigkeit von δ .



rechnet werden kann. Die Kalibriergerade ohne Einfluß der Viskosität ergibt sich aus (4.6), wenn $\beta = 0$ gesetzt wird. Der Fehler $\Delta\rho_f$ kann dann durch

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{v=0} - \rho_f}{\rho_f} &= \frac{\frac{1}{\chi} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) - \frac{1}{\chi + \beta \sqrt{2\nu/\omega}} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right)}{\frac{1}{\chi + \beta \sqrt{2\nu/\omega}} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right)} \\ &= \frac{\beta}{\chi} \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

berechnet werden. Man erwartet daher, daß der Fehler, der sich durch die Vernachlässigung der Viskosität ergibt, proportional zu der Eindringtiefe $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ ist (vgl. Kapitel 1, Abschnitt 1.2.8). Berechnet man die Dichte des Mediums aus der gemessenen Resonanzfrequenz mittels (4.9) und den Fehler gemäß der linken Seite von (4.10), so ergibt sich die Graphik, die in Abbildung 4.9 dargestellt ist.

Die Linearität des funktionalen Zusammenhangs ist gut zu sehen. Durch eine lineare Regression ergibt sich für den Fehler $\Delta\rho_f$ in Abhängigkeit von δ

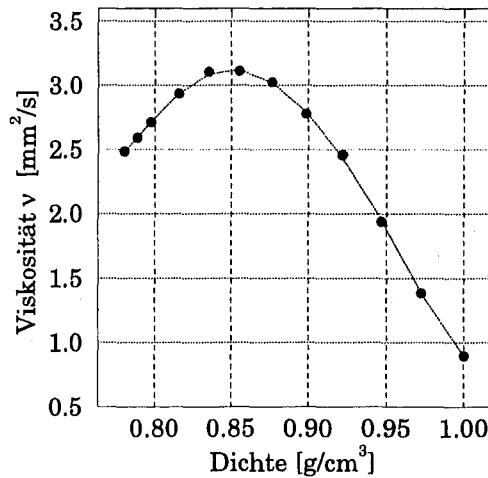
$$\Delta\rho_f = 1.84 [\%/ \mu\text{m}] \cdot \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} + 6.5 \times 10^{-3} \% , \quad (4.11)$$

wobei der Korrelationskoeffizient R gleich 0.97 ist. Es zeigt sich also, daß der Fehler und auch die Meßdaten gut mit Hilfe des Einflusses der Viskosität auf die Messung beschrieben werden kann.

Was kann aus diesem Ergebnis für Dichtemessungen gefolgert werden? Es gibt im Prinzip mehrere Möglichkeiten, die Kopplungsgröße des Viskositätseffekts zu verringern. Aus Abschnitt 1.2.8 ist bekannt, daß die Kopplungsgröße des Dichteeffekts durch

$$\beta = \frac{1.08 \xi_0 \alpha (13.7 \lambda_0^2 + 7.97 \lambda_2^2 + 17.2 \lambda_0 \lambda_2)}{h_m \rho_m \alpha^2 \pi \left(\lambda_0^2 + \frac{17 \lambda_2^2}{35} + \lambda_0 \lambda_2 \right) + m_s \lambda_0^2} \quad (4.12)$$

Abbildung 4.10: Abhängigkeit der Viskosität eines Isopropanol-Wasser-Gemischs von der Dichte [25].



gegeben ist (vgl. Gl. (1.172)). Die gesamte Größe des Viskositäteeffekts ist durch $\beta \cdot \sqrt{2\nu/\omega}$ gegeben (siehe Gl. (1.171)). Zunächst ist es möglich, die Dichte der Mikromembran zu erhöhen, also beispielweise Wolfram als Membranmaterial zu verwenden. Dies führt jedoch auch zu einem kleineren Dichteeffekt. Dasselbe gilt auch für eine größere Dicke der Membran. Zwar wird dann auch die Resonanzfrequenz größer, was zu einer geringeren Eindringtiefe führt, doch steigt damit gleichzeitig auch die Dämpfung, was in Hinsicht auf eine möglichst hohe Meßgenauigkeit nicht wünschenswert ist. Dies gilt auch für die Amplitude der Schwingungen. Ihre Verkleinerung führt ebenfalls zu einer verringerten Meßgenauigkeit, da das Signal-Rausch-Verhältnis schlechter wird. Eine größere Masse der Mikrostruktur führt zwar zu einem kleineren Wert von β , doch ergibt sich damit auch ein kleinerer Wert für die Resonanzfrequenz und somit eine Vergrößerung der Eindringtiefe, was ja vermieden werden sollte. Darüber hinaus wird durch diese Maßnahme auch die Dämpfung erhöht, was wegen der damit verringerten Meßgenauigkeit nicht zweckmäßig ist.

Gleichung (4.12) kann entnommen werden, daß β ungefähr proportional zu $1/a$ ist, wenn die Masse der Mikrostruktur kleiner als die Membranmasse ist. Da die Resonanzfrequenz in erster Näherung proportional zu $1/a^2$ ist, ist die Eindringtiefe proportional zu a . Daraus ergibt sich, daß die Größe des Viskositäteeffekts nicht vom Radius der Mikromembran abhängt. Eine Vergrößerung des Radius führt dann zwar nicht zu einem kleineren Effekt, durch diese Maßnahme erhöht sich jedoch die Kopplungsgröße des Dichteeffekts, sodaß das Verhältnis der beiden Kopplungsgrößen $\beta \sqrt{2\nu/\omega}/\chi$ auf diese Weise kleiner wird. Bei größeren Radien wird dann auch die Dämpfung kleiner. Allerdings führen größere Radien auch zu einer größeren Querempfindlichkeit der Resonanzfrequenz auf Änderungen des hydrostatischen Drucks. Darüber hinaus wird das Verhältnis von Radius zu abgestrahlter Wellenlänge immer kleiner, sodaß sich eine Mikromembran immer mehr wie ein Punktstrahler verhält und die Richtcharakteristik, mit der die Mikromembran ihre Energie abstrahlt, immer isotroper wird. Aus diesem Grund wird die Intensität pro Raumwinkel kleiner, sodaß die Intensität bzw. die Amplitude, die der Ultraschall-

kopf registriert, ebenfalls kleiner wird. Der Effekt einer weiteren Vergrößerung des Membranradius konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht überprüft werden, da für den Frequenzbereich kleiner als 2 MHz keine Ultraschallköpfe zur Verfügung standen.

Es sei an dieser Stelle nochmals auf den Meßfehler eingegangen, der entsteht, wenn die Viskosität nicht berücksichtigt wird. Bei den hier untersuchten Glycerin-Wasser-Gemischen wird bei einer Eindringtiefe von ca. $0.5 \mu\text{m}$ bzw. einer Viskosität von $\nu \leq 4.7 \text{ mm}^2/\text{s}$ ein Meßfehler von 1 Prozent erreicht, wenn der Einfluß der Viskosität nicht berücksichtigt wird. Dieser Effekt ist durchaus bemerkenswert, da z.B. die Viskosität von häufig vorkommenden Alkohol-Wasser-Gemischen vergleichsweise stark von der Dichte abhängt und Werte von über $3 \text{ mm}^2/\text{s}$ erreicht (vgl. Abb. 4.10).

Eine Eindringtiefe von einigen Mikrometern bedeutet auch, daß nur die ersten paar Mikrometer vor der Membran über die Dämpfung und die Verschiebung der Resonanzfrequenz durch die Viskosität entscheiden. Eine Änderung der Viskosität außerhalb dieser Grenzschicht kann aus diesem Grund nicht mehr nachgewiesen werden. Gleichzeitig führt ein Membranbelag mit vergleichsweise hoher Viskosität zu einer starken Dämpfung sowie einer großen Verschiebung der Resonanzfrequenz auch wenn das übrige Medium eine andere Viskosität besitzt. Diese Tatsache wirft die Frage auf, ab welcher Viskosität die Dämpfung der Schwingungen so groß ist, daß eine sinnvolle Auswertung des Signals nicht mehr möglich ist. Die Dichtemessungen in viskosen Medien zeigen, daß ab Viskositäten von ca. $200 \text{ mm}^2/\text{s}$ diese Grenze erreicht ist.

Unterhalb dieser Grenze könnte der starke Einfluß der Viskosität auf die Dämpfung benutzt werden, um aus der Dämpfung die Viskosität mittels einer Kalibrierkurve zu berechnen. Die Dämpfung ist jedoch stärker als die Resonanzfrequenz dem Einfluß von Störungen ausgesetzt. Jeglicher Belag auf der Membran, seien es Sedimente oder Gasblasen, die sich auf der Membranoberfläche bilden, beeinflussen die Dämpfung des Signals. Darüber hinaus hängt die Dämpfung in starkem Maße von der Schallgeschwindigkeit im Medium ab, die ebenfalls gemessen werden müßte, um einen eindeutigen Zusammenhang zwischen der Dämpfung und der Viskosität herstellen zu können. Aus diesem Grund ist es nicht möglich, aus der Dämpfung die Viskosität in der erforderlichen Genauigkeit zu bestimmen.

4.2.2 Bestimmung der Schwingungsamplitude ξ_0

Bisher wurde nur der Faktor β bestimmt, also die Kopplungsgröße des Viskositätseffekts. Es ist jedoch auch möglich, eine Aussage über die Amplitude der Mikromembranschwingungen zu treffen. Der Radius und die Dicke der Mikromembran sind durch weiter oben ausgeführte Parametervariation bekannt (siehe Tab. 4.3.). Die Masse der Mikrostruktur kann somit berechnet werden. Zur Berechnung der Kopplungsgröße β fehlt nur noch der Parameter λ_0 , der die Auslenkung der Mikromembran am Rand beschreibt. Dieser Parameter kann mit Hilfe der Gleichung (1.131) berechnet werden.

Bei einem Titan-Titan-Sensor berechnet sich die Masse der Mikrostruktur m_s durch²

$$m_s = \rho_s (h_m + h_{ms}) \left(2\sqrt{3}(a + d/2)^2 - \pi a^2 \right). \quad (4.13)$$

Setzen wir hier die Werte aus Tabelle (4.3) sowie die Dichte von Titan ein, so erhalten wir für die Masse der Mikrostruktur m_s einen Wert von

$$m_s = 0.6107 \times 10^{-9} \text{ kg} \quad (4.14)$$

Für λ_0 erhält man in diesem Fall mit den Werten aus Tabelle (4.3) und der Hilfe von (1.131) einen Wert von $|\lambda_0| = 0.233$. Zusammen mit der Mikrostrukturmasse und den Werten aus Tab. 4.3 ergibt sich, wenn die mit Hilfe von (4.12) berechnete Kopplungsgröße β dem Wert von β aus der Regression (siehe Gl. 4.7) gleichgesetzt wird:

$$\beta = 1.41 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{kg}} \xi_0 \stackrel{!}{=} 17.470 \frac{\text{m}^2}{\text{kg}} \quad (4.15)$$

Für die Amplitude ξ_0 erhält man somit einen Wert von

$$\xi_0 \approx 12.4 \mu\text{m} \quad (4.16)$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem Radius der Membran, so ergibt sich

$$\frac{\xi_0}{a} \approx 0.22 \quad (4.17)$$

Der Wert von ca. $12 \mu\text{m}$ für die Amplitude bedarf einer näheren Betrachtung. Zunächst ist die Amplitude zwar kleiner als der effektive Radius, aber nicht so klein, daß die in Abschnitt 1.2.8 gemachte Voraussetzung $\xi_0 \ll a$ in guter Näherung gültig ist. Darüber beträgt die Amplitude ungefähr das Doppelte der maximal möglichen Amplitude ξ_{max} , welche ungefähr einem Zehntel des effektiven Radius entspricht (vgl. Kapitel 1, Abschnitt 1.3).

Dem gegenüber steht das Ergebnis der Viskositätsmessung, das zeigt, daß die funktionale Abhängigkeit zwischen der Resonanzfrequenz, der Dichte und der Viskosität des umgebenden Mediums trotz der vergleichsweise großen Amplitude gut durch das Modell beschrieben werden kann, welches auf obiger Voraussetzung basiert. Man muß daher annehmen, daß die tatsächliche Amplitude wesentlich kleiner ist als die hier bestimmte, damit sowohl $\xi_0 \ll 2a$ als auch $\xi_0 \ll \xi_{\text{max}}$ erfüllt sind.

Betrachtet man Schwingungen unterschiedlicher Objekte in einem viskosen Medium, so fällt auf, daß die Reibungskraft bei kleinen Schwingungen proportional der Eindringtiefe $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ ist. Der Unterschied liegt in der Kopplungsgröße β , die in starkem Maße von der Form des einzelnen Objekts abhängt [18]. In unserem

²Bei einem Titan-Titan-Sensor ist der effektive Radius gleich dem Radius der Löcher. Aufgrund der Bewegung der Membran im Bereich der Mikrostruktur muß auch dort der Membranmasse Rechnung getragen werden.

Fall kann die Kopplungsgröße β wegen Gl. (1.167) und (1.169) als Produkt der Amplitude ξ_0 und eines formabhängigen Anteils $f(u(r))$ geschrieben werden, sodaß

$$\beta = \xi_0 \cdot f(u(r)) \quad (4.18)$$

gilt. Die zu große Amplitude könnte deshalb darauf zurückgeführt werden, daß die in Abschnitt 1.2.8 mit Hilfe von Gl. (1.164) berechnete Reibungskraft und damit die Kopplungsgröße β eine zu schwache Abhängigkeit von der Auslenkungsform $u(r)$ der Membran zeigt. Dies ist durchaus möglich, da bei der Herleitung dieser Reibungskraft die nichtlinearen Terme in den Navier-Stokes Gleichungen vernachlässigt wurden. Darüber hinaus ist das theoretische Modell nur für die Schwingungen einer einzelnen Mikromembran gültig, Wechselwirkungen mit anderen Membranen werden dabei nicht berücksichtigt. Besonders am Rand einer Mikromembran, wo sie an andere Mikromembranen grenzt, werden nichtlineare Effekte aber eine Rolle spielen, da an diesen Stellen die Flüssigkeitsvolumina aufeinanderstoßen, die von benachbarten Membranen verdrängt werden.

Ein weiterer Grund für den zu großen Wert von ξ_0 kann auch eine zu große Amplitude der Mikromembran an ihrem Rand sein. Mit Hilfe von Gl. (1.172) kann leicht gezeigt werden, daß die Kopplungsgröße β dann am größten ist, wenn die Mikromembran am Rand fest eingespannt ist. Wenn die tatsächliche Amplitude am Rand kleiner ist als die theoretisch berechnete, dann führt dies gemäß Gleichung (1.172) bei einem gegebenen Wert von β ebenfalls zu einer kleineren Amplitude der Schwingungen.

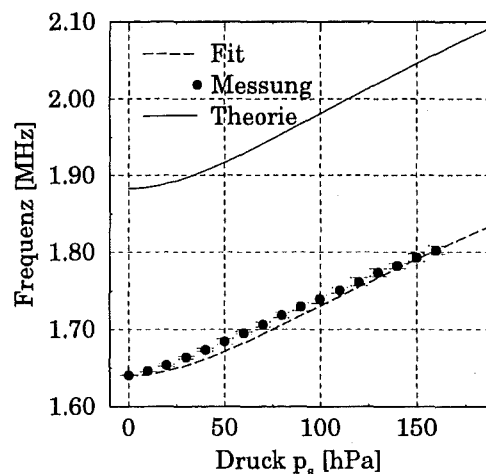
Da das theoretische Modell die funktionale Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Viskosität gut beschreibt, kann Gleichung (4.6) benutzt werden, den Einfluß der Viskosität bei einer Dichtemessung zu berücksichtigen. Für die Kopplungsgröße β bzw. die Schwingungsamplitude ξ_0 kann jedoch nur ein ungefährender Richtwert angegeben werden, da die funktionalen Zusammenhänge zwischen der Reibungskraft und der Auslenkungsform $u(r)$ nur näherungsweise bekannt sind.

4.3 Einfluß des hydrostatischen Drucks

Für die experimentelle Überprüfung des Druckeinflusses wurde ein ca. 2 m langes Rohr benutzt, welches mit Wasser (Raumtemperatur) gefüllt ist. Während eines Meßdurchlaufs wird, angefangen bei 0 m Wassersäule über dem Sensor, die Höhe des Mikromembransensors im Rohr kontinuierlich verändert und dabei die Resonanzfrequenz gemessen. Auf diese Weise gelangt man zu einer Meßkurve, die die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz vom hydrostatischen Druck p_s wiedergibt.

Der hydrostatische Druck führt zu einer Verschiebung der Resonanzfrequenz, wenn der benutzte Sensor auf einer Seite gekapselt ist und der Druck über der gesamten aktiven Sensorfläche abfällt (einfache Kapselung). Dies ist dann der Fall wenn die tragende Mikrostruktur keinerlei Abstützung durch den Rahmen selbst erfährt. Liegt die Mikrostruktur auf einer Fläche auf, so fällt der Druck über jeder einzelnen Membran ab (Kapselung der Mikromembran). Bei solchen Sensoren sollte der Druckeffekt verschwindend klein sein. Zunächst wird die Druckabhängigkeit von einfach gekapselten Sensoren betrachtet (vgl. Abb. 1.13).

Abbildung 4.11: Druckmessung mit einem einfach gekapselten Sensor. Bei kleinen Drücken ist der parabolische Zusammenhang sichtbar. Die Fitkurve ergibt sich aus der Theorie und wurde mit angepassten Parameterdaten berechnet, die theoretisch erwartete Kurve mit den Sensordaten.



4.3.1 Sensor ohne druckstabilisierte Mikromembranen

Die Druckmessung wurde mit einem gekapselten Titan-Polyimid-Sensor des Typs H(48;24;21) durchgeführt (vgl. Abb. 1.13). Der Sensordurchmesser betrug 18 mm, wobei Sensorfolie und Rahmen durch eine ca. 2 mm breite Klebeschicht miteinander verbunden waren, sodaß die Titanfolie über einen Durchmesser von ca. 14 mm frei gespannt war (vgl. Abb. 1.13). Der effektive Radius a_{eff} eines Titan-Polyimid-Sensors berechnet sich unter der eingangs gemachten Annahme³ zu $a_{\text{eff}} = 62 \mu\text{m}$.

³Dabei wird angenommen, daß sich die Mikrostruktur wie die Mikromembran verformt, aber keine Biegemomente aufnimmt

Parameter	Sensor	Fit
σ_0	200 MPa	200 MPa
a	48 μm	48 μm
d	24 μm	31.5 μm
h_m	2.7 μm	2.7 μm
h_s	21 μm	21 μm
D_{eff}	14 mm	13.8 mm
a_{eff}	60 μm	63.7 μm

Tabelle 4.4: Vergleich der Sensorparameter. Linke Spalte: Werte für die Parameter des Titan-Polyimid-Sensors (Typ "H"), der bei der Messung benutzt wurde. Rechte Spalte: Parameter, die für den Fit benutzt wurden. D_{eff} stellt den Durchmesser der aktiven Sensorfläche dar

Abbildung 4.11 zeigt die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz dieses Sensors vom anliegenden statischen Druck. Im Abschnitt 1.3 wurde gezeigt, daß der funktionale Zusammenhang zwischen der Resonanzfrequenz und dem statischen Druck bei kleinen Drücken parabolisch ist, bei größeren Drücken jedoch immer mehr in eine lineare Abhängigkeit übergeht. In Abbildung 4.11 ist diese Abweichung von einem linearen Zusammenhang bei kleinen Drücken deutlich zu erkennen. Bei höheren Drücken zeigt sich der erwartete lineare Zusammenhang zwischen Druck und Resonanzfrequenz.

Außer den Meßdaten selbst sind in Abbildung 4.11 noch zwei weitere Kurven eingezeichnet. Die obere Kurve ergibt sich aus der Theorie, wenn die Parameter des Sensors benutzt werden, wie sie in Tabelle 4.4 in der Spalte "Sensor" stehen. Die Kurve, die den Meßpunkten unterlegt ist, ergibt sich ebenfalls aus der Theorie. Hier wurden jedoch die Parameter aus der rechten Spalte "Fit" von Tabelle 4.4 verwendet. Diese Parameter wurden wie in den vorangehenden Abschnitten durch die Variation der Sensorparameter gewonnen und stellen diejenigen Parameter dar, für die die Abweichung der theoretischen Resultate zu den experimentellen Ergebnissen minimal wird. In diesem Fall wurde nur der effektive Sensordurchmesser D_{eff} ⁴ und der minimale Abstand zweier Mikromembranen variiert.

Wie oben erwähnt, hängt der Durchmesser der aktiven Sensorfläche davon ab, wie stark der Klebstoff während des Klebeprozesses in Richtung der Sensormitte läuft. Dabei kann die Breite des Kreisrings, über den der Klebstoff verteilt wird, innerhalb einiger 100 Mikrometer schwanken. Der Wert des Fits von $D_{\text{eff}}=13.8$ mm liegt deshalb innerhalb der erlaubten Grenzen. Der größere Wert des Abstandes d bedeutet, daß die Masse der Mikrostruktur größer ist als angenommen. Dies kann auch auf eine höhere Mikrostruktur zurückgeführt werden. Eine Messung der Mikrostrukturdicke an verschiedenen Stellen auf einem Wafer zeigt, daß die Dicke innerhalb $\pm 2\text{-}3$ Mikrometern schwankt.

⁴ D_{eff} ist der Durchmesser der aktiven Sensorfläche. Die aktive Sensorfläche kennzeichnet denjenigen Bereich, indem die Titanfolie durch die Mikrostruktur in einzelne Mikromembranen eingeteilt wird.

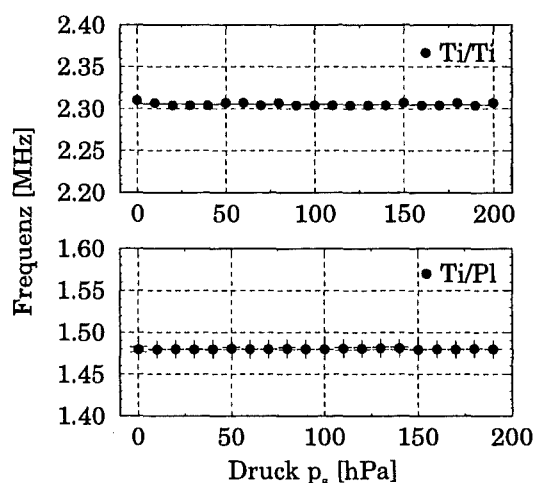
Vergleicht man die angenommenen Sensordaten bei der Druckabhängigkeit mit den Parameterdaten, die für den Fit benutzt wurden, so wird deutlich, daß das theoretische Modell sich gut eignet, den experimentellen Verlauf der Druckmessung zu beschreiben. Dabei genügt es, den Abstand d zweier Mikromembranränder und den Durchmesser der aktiven Sensorfläche D_{eff} in einem Bereich zu variieren, der innerhalb der Fehlergrenzen liegt. Alle anderen Parameter brauchen nicht angepaßt werden.

4.3.2 Sensor mit druckstabilisierten Mikromembranen

Das Schnittbild eines Sensors, bei dem die Sensorfolie auf einem Körper aufliegt und auf diese Weise jede einzelne Mikromembran kapselt, ist in Abbildung 1.15 dargestellt. Da die Mikrostruktur direkt auf dem Zylinder aufliegt, führt eine Druckdifferenz nicht zu einer Auslenkung der makroskopischen Membranfolie, und somit nicht zu einer Änderung der inneren Spannung. Eine Spannungsänderung kann deshalb nur durch die Auslenkung jeder einzelnen Mikromembran erreicht werden. Da der Radius einer Mikromembran aber vernachlässigbar klein im Vergleich zum Gesamtradius der Membranfolie ist, ist die aus der Spannungsänderung resultierende Verschiebung der Resonanzfrequenz ebenfalls vernachlässigbar klein (vgl. Gl. (1.190) und (1.191)).

In Abbildung 4.12 sind Resonanzfrequenzen zweier unterschiedlicher Mikromembransensoren dargestellt. Im Bild oben zu sehen ist die Druckabhängigkeit eines Titan-Titan-Sensors, unten wurde ein Titan-Polyimid-Sensor vermessen. Über den gesamten Druckbereich bleibt die Resonanzfrequenz im Rahmen der Meßgenauigkeit (Auflösung des Spektrum ca. 2.4 kHz) konstant.

Abbildung 4.12: Resonanzfrequenz von Titan-Titan-Sensoren (oben) und Titan-Polyimid-Sensoren (unten) in Abhängigkeit vom hydrostatischen Druck. Die Mikrostruktur liegt auf dem Zylinder auf.



Eine Wassersäule liefert bei einer Höhe von 2 m einen Druck von 200 hPa. Die Drücke, die in industriellen Prozessen entstehen, sind jedoch viel größer als 200 hPa. Aus diesem Grund wurden die Mikromembransensoren einem weiteren Belastungstest unterzogen. Dabei wurden sie einzeln in einen mit Wasser gefüllten

Druckbehälter eingebracht, der an die hauseigene Druckluftversorgung angeschlossen war. Die Sensoren wurden dabei mit einem Maximaldruck von 0.6 MPa (6 bar) beaufschlagt.

Einfach gekapselte Sensoren werden bei diesem Test sofort zerstört, da ihre Belastungsgrenze bei ca. 0.174 MPa liegt. Sensoren, bei denen jede einzelne Mikromembran gekapselt war, überstanden diesen Test und wiesen bei einer anschließenden Messung keine Verschiebung der Resonanzfrequenz auf. Wenn die Mikrostruktur von einer stabilen Fläche abgestützt wird, zeigt sich also bis zu einer Druckbelastung mit 200 hPa kein störender Einfluß auf die Dichtemessung. Die Grenze, unterhalb derer eine Druckbelastung nicht nachweisbar ist, liegt gemäß Gleichung (1.201) bei ca. 0.5 MPa. Erst wenn der Druck größer ist als dieser Wert, entsteht eine Verschiebung der Resonanzfrequenz, die größer als die minimal auflösbaren 2.4 kHz ist und somit nachweisbar wird⁵.

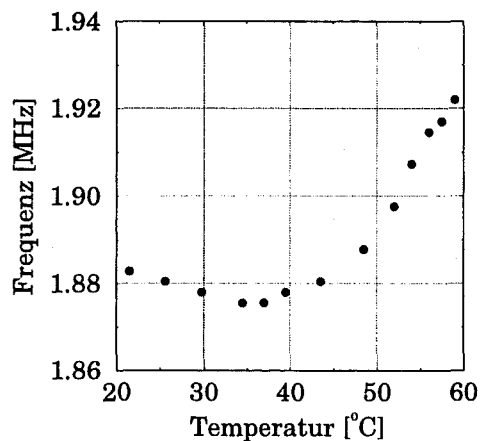


Abbildung 4.13: Zusammenhang zwischen der Temperatur und der Resonanzfrequenz in Wasser, der bei Titan-Polyimid-Sensoren des Typs R(48;62;21) gemessen wurde.

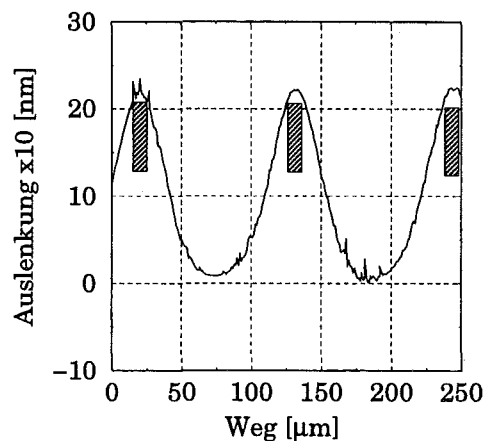


Abbildung 4.14: Oberflächenprofil eines Titan-Polyimid-Sensors des Typs R(48;62;21). Die Membran ist in die Mikrostruktur hineingewölbt. Die Messung erfolgte von der Seite, die der Mikrostruktur abgewandt ist. Die Lage der Mikrostruktur auf der anderen Seite ist angedeutet. (Die Auslenkung wurde mit einem Oberflächenprofilometer des Typs "Tenkor 2" gemessen.)

⁵siehe Abschnitt 1.3 bzw. 3

4.4 Einfluß der Temperatur

Die Temperatur nimmt Einfluß auf die Resonanzfrequenz von Mikromembransensoren, weil sie i. allg. aus Materialien mit unterschiedlichen thermischen Ausdehnungskoeffizienten aufgebaut sind. Die Unterschiede in der thermischen Dehnung führen auf funktionale Zusammenhänge zwischen der Resonanzfrequenz und der Temperatur, die nicht unbedingt linear sein müssen. Aufgrund der Vorspannung der Mikrostruktur sind auch parabolische Abhängigkeiten denkbar (vgl. Kapitel 1, Abschnitt 1.4). Zur Erinnerung ist in Abbildung 4.13 der Zusammenhang zwischen der Resonanzfrequenz und der Temperatur für einen Titan-Polyimid-Sensor des Typs R(48;62;21) gezeigt. Abbildung 4.14 zeigt ein Oberflächenprofil eines solchen Sensors. Der Ort der Mikrostruktur ist schematisch gekennzeichnet. Man sieht, daß sich die Mikromembran in die Mikrostruktur hineinwölbt.

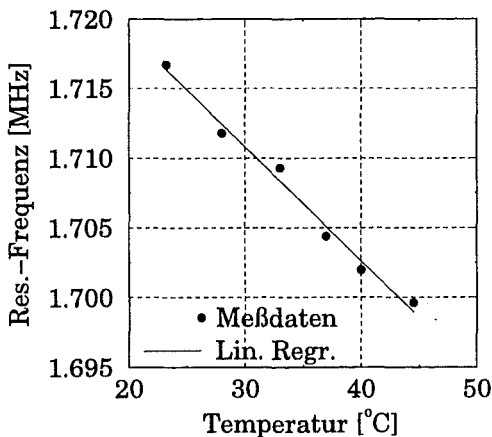


Abbildung 4.15: Lineare Abhängigkeit der Resonanzfrequenz eines Titan-Polyimid-Sensors des Typs H(50;26;12) von der Temperatur des umgebenden Wassers (Kalibriergerade für Temperaturkorrektur).

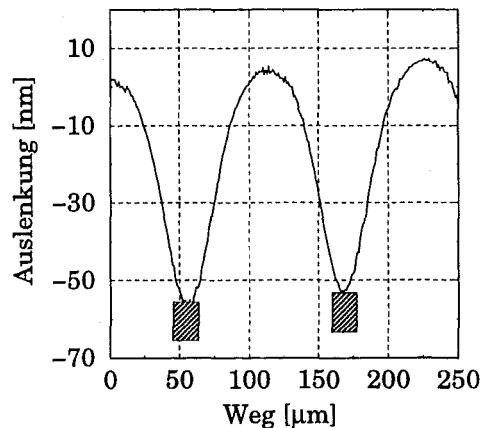


Abbildung 4.16: Oberflächenprofil eines Titan-Polyimid-Sensors des Typs H(50;26;12). Die Mikromembran ist in die der Mikrostruktur entgegengesetzten Richtung gewölbt.

Im Vergleich zu Abbildung 4.13 ist in Abbildung 4.15 die Meßkurve eines Titan-Polyimid-Sensors des Typs H(50;26;12) dargestellt. Abbildung 4.16 zeigt das Oberflächenprofil eines solchen Sensors. In diesem Fall steht die Mikrostruktur unter einer Druckspannung, die zu einem Biegemoment führt, das eine Auslenkung der Membran in die der Mikrostruktur entgegengesetzten Richtung zur Folge hat.

4.4.1 Kompensation des Temperatureinflusses

Eine Möglichkeit, den störenden Einfluß der Temperatur auf die Dichtemessungen zu eliminieren, besteht darin, eine Kalibrierkurve für den Sensor aufzunehmen, während der Messung die Temperatur zu bestimmen und den Temperatureffekt bei der Berechnung der Dichte zu berücksichtigen. Eine solche Kompensation des Temperatureinflusses wird wesentlich erleichtert, wenn der Zusammenhang zwischen der Temperatur und Resonanzfrequenz mit guter Näherung linear ist. Für die folgende Untersuchung wurde deshalb ein Titan-Polyimid-Sensor des Typs H(50;26;12) eingesetzt.

Wenn die Temperaturabhängigkeit linear ist, dann kann die Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der Temperatur und der temperaturabhängigen Dichte $\rho_f(T - T_0)$ als

$$f_{\text{res}}(\rho_f, \Delta T) = \frac{f_0}{\sqrt{1 + \chi \rho_f(\Delta T)}} (1 - \alpha_T(\Delta T)) \quad (4.19)$$

geschrieben werden, wobei $\Delta T = T - T_0$ ist. Dabei ist in diesem Fall α_T der *effektive* thermische Ausdehnungskoeffizient und darf nicht mit dem thermischen Ausdehnungskoeffizient eines Titan-Titan-Sensors verwechselt werden (siehe auch Abschnitt 1.4.1).

Die Dichte von Wasser ist im Bereich zwischen 20 °C und 50 °C bekannt [25]. Kennt man zusätzlich noch die Kopplungsgröße χ des Sensors, dann kann mit Hilfe von Gl. (4.19) der Wert von α_T bestimmt werden. Für den hier benutzten Sensor ist die Bestimmung von α_T ausführlich im Anhang dargestellt. Mit Hilfe einer Dichtemessung⁶, mit der die Kopplungsgröße χ festgelegt wird und der in Abbildung 4.15 dargestellten Kalibrierkurve erhält man für f_0 , α_T und χ die Werte⁷

$$\begin{aligned} f_0 &= 2.431 \text{ MHz}, \alpha_T = 5.559 \times 10^{-4} \frac{1}{\text{°K}} \quad \text{sowie} \\ \chi &= 1.0018 \text{ cm}^3/\text{g}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Es kann nun eine Dichtemessung in einem Medium mit einer anderen Dichte durchgeführt werden. In diesem Fall wurde eine wässrige Kaliumjodid-Lösung benutzt, deren Temperatur zwischen 21 °C und 50 °C variiert wurde. Die gemessene Resonanzfrequenz ist in Abbildung 4.17 durch die schwarzen Punkte gekennzeichnet. Werden die gemessenen Resonanzfrequenzen nun durch $(1 - \alpha_T \Delta T)$ dividiert, so ergeben sich gemäß Formel (4.19)

$$f'_{\text{res}} = \frac{f_{\text{res}}(\rho_f, \Delta T)}{1 - \alpha_T \Delta T} \quad (4.21)$$

die Werte, die in Abbildung 4.17 durch die Quadrate markiert sind. Wegen (4.19) und (4.21) kann die Dichte durch

$$\rho_f = \frac{1}{\chi} \left[\left(\frac{f_0}{f'_{\text{res}}} \right)^2 - 1 \right] \quad (4.22)$$

⁶siehe Anhang

⁷ $T_0=20^\circ\text{C}$

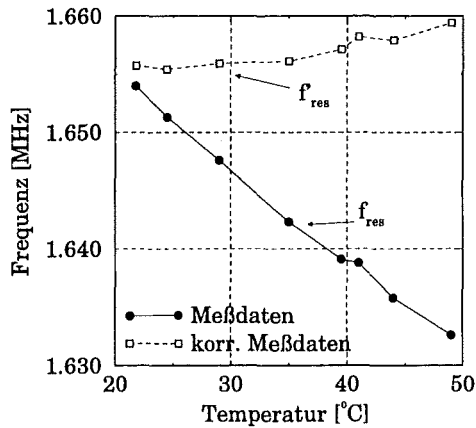


Abbildung 4.17: Temperaturkurve des Sensors in einer Kaliumjodid-Lösung. (□) Korrigierte Werte mit Hilfe der Kalibrierung (4.20)

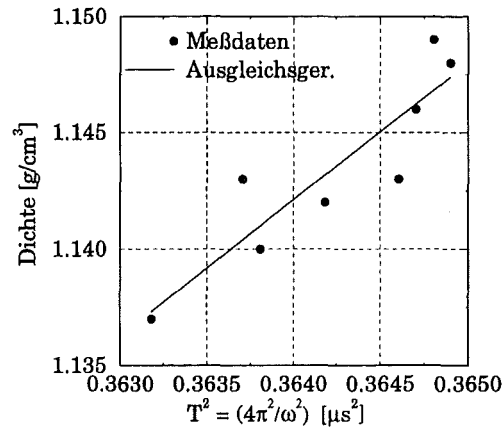


Abbildung 4.18: Gemessene Dichte in Abhängigkeit von den mittels (4.20) korrigierten Werten der Resonanzfrequenz

berechnet werden. Wenn die Kalibrierung genau genug ist, erwartet man also einen linearen Zusammenhang zwischen der Dichte ρ_f und $1/(f'_{res})^2$. In Abbildung 4.18 ist die gemessene Dichte in Abhängigkeit von $1/(f'_{res})^2$ aufgetragen, wobei f'_{res} mittels (4.21) berechnet wurde.

Die Streuung der Meßwerte um die Ausgleichsgerade erscheint zwar groß, liegt aber im gleichen Bereich wie bei Dichtemessungen mit konstanter Temperatur. Paßt man eine Ausgleichsgerade an die Daten in Abbildung 4.18 an, erhält man eine Standardabweichung von ca. 1.78 Promille auf den Meßwert bezogen. Für die Ausgleichsgerade ergibt sich

$$\rho_f = \frac{1}{1.012 \text{ cm}^3/\text{g}} \left[\left(\frac{2.433}{f'_{res}} \right)^2 - 1 \right]. \quad (4.23)$$

Die somit bestimmten Werte von f_0 und χ stimmen gut mit den Werten von (4.20) überein. Die Abweichung kann auf den Fehler bei der Temperaturkalibration und darauf zurückgeführt werden, daß sich die gemessenen Dichteänderungen im Bereich der maximalen Meßgenauigkeit bewegen.

Die Messung zeigt jedoch, daß es möglich ist, nach einer Korrektur der Resonanzfrequenz die Dichte einer Flüssigkeit auch dann zu bestimmen, wenn die Temperatur nicht konstant ist. Zur Durchführung dieser Korrektur muß der Sensor zusätzlich zur Dichtekalibration auch einmalig in einem Temperaturbad kalibriert werden. Bei der Messung selbst muß dann außer der Resonanzfrequenz auch die Temperatur gemessen werden.

Temperaturstabilität von Mikromembranen

Da Mikromembranen bei ca. 400 Grad ausgebacken werden und mit einem Epoxidharz (temperaturstabil bis ca. 200 °C) auf dem Zylinder befestigt sind, können die Sensoren auch bei sehr hohen Temperaturen eingesetzt werden. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn der Behälter, in dem sich der Sensor befindet, einem Reinigungsprozeß ausgesetzt ist. Typische Temperaturen bei solchen Prozessen betragen ca. 135 °C.

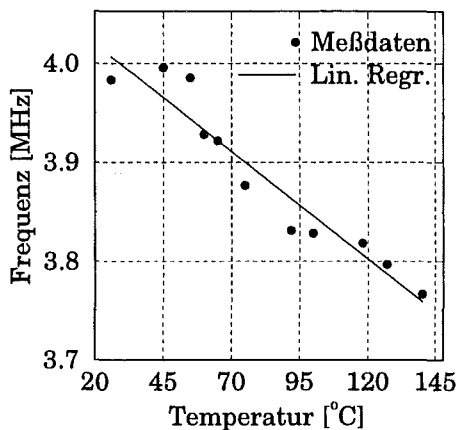


Abbildung 4.19: Abhängigkeit der Resonanzfrequenz eines Titan-Polyimid-Sensors von der Temperatur eines Ölbad. Auch bei hohen Temperaturen ist die Güte des Signals ausreichend, um einen Meßwert zu erhalten.

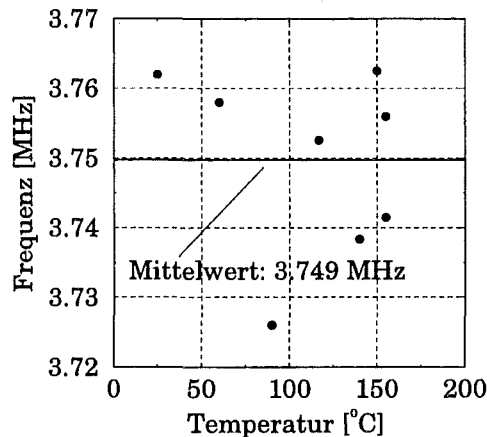


Abbildung 4.20: Resonanzfrequenz eines Titan-Polyimid-Sensors nach einem Zyklus Wasser-Öl-Wasser, wobei die Öltemperatur kontinuierlich erhöht wurde (Wassertemperatur ca. 21 °C.)

Abbildung 4.19 zeigt die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz eines Titan-Polyimid-Sensors von der Temperatur. Bei diesem Sensor handelt es sich um einen gekapselten Sensor des Typs H(40;10;11), der nicht druckstabilisiert war (vgl. Abschnitt 1.3). Der Sensor zeigt eine gute Signalstabilität bis hin zu hohen Temperaturen. Solche Sensoren können auch hohen Temperaturgradienten ausgesetzt werden.

Bei der in Abbildung 4.20 dargestellten Messung wurde wie folgt vorgegangen: Ein Sensor wurde abwechselnd in ein Wasserbad ($T = 20\text{ °C}$) und ein Ölbad eingetaucht, dessen Temperatur kontinuierlich erhöht wurde. Nachdem der Sensor in das Ölbad getaucht wurde, schreckte man ihn wieder in Wasser ab und bestimmt dann die Resonanzfrequenz. Diese Frequenz ist in Abhängigkeit von der Temperatur des Ölbad aufgetragen. Die Streuung von ca. $\pm 20\text{ kHz}$ um den Mittelwert von 3.749 MHz entsteht dadurch, daß der Sensor erst nach einer gewissen Zeit die Umgebungstemperatur aufgenommen hat.

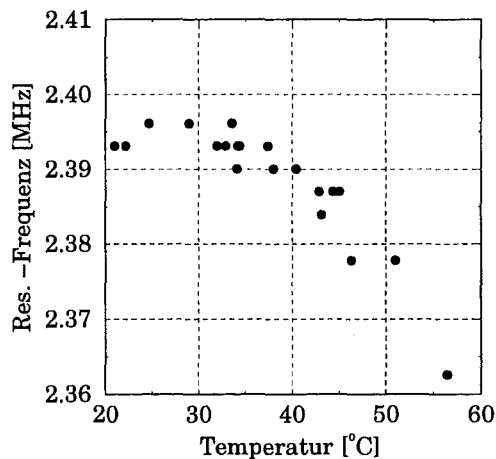
Diese beiden Graphiken zeigen, daß es möglich ist, Mikromembransensoren aus Titan und Polyimid herzustellen, die auch bei hohen Temperaturen eingesetzt werden

können. Muß bei solchen Temperaturen die Dichte gemessen werden, dann ist eine Kalibrierung des Sensors nötig. Diese erfolgt nach der oben beschriebenen Weise.

Idealerweise sind Membran und Mikrostruktur aus Titan, da in diesem Fall keine Biegemomente aufgrund unterschiedlicher thermischer Ausdehnungskoeffizienten auftreten können. In Abbildung 4.21 ist der Temperaturverlauf eines gekapselten Titan-Titan-sensors des Typs H(48;46;7) zu sehen. Die Mikrostruktur lag dabei direkt auf dem tragenden Titanzylinder auf, sodaß der Sensor gegenüber Druckänderungen unempfindlich war (vgl. Abschnitt 1.3).

Es zeigt sich, daß die Resonanzfrequenz im Bereich zwischen 20 °C und 35 °C praktisch konstant ist. Das Absinken der Resonanzfrequenz bei höheren Temperaturen wird auf ein Absinken der inneren Spannung der Membranfolie zurückgeführt. Dies kann dann entstehen, wenn der Klebstoff, der für die Verbindung von Membranfolie zum Trägermaterial zuständig ist, sich aufgrund ungenügender Haftung von der Membranfolie löst.

Abbildung 4.21: Resonanzfrequenz eines gekapselten Titan-Titan-Sensors des Typs H(48;46;7) in Abhängigkeit von der Temperatur eines Wasserbades. Im Bereich zwischen $T = 20^{\circ}\text{C}$ und 35°C ist die Resonanzfrequenz praktisch konstant.



4.5 Chemische Resistenz der Sensoren

Die chemische Resistenz der Mikromembransensoren wurde geprüft, indem sie über einen Zeitraum von mehreren Wochen verschiedenen aggressiven Flüssigkeiten ausgesetzt wurden. Dabei wurde in regelmäßigen Abständen eine Funktionsüberprüfung unternommen. Die untersuchten Flüssigkeiten waren:

- 5- und 90 prozentige Schwefelsäure
- 5- und 37 prozentige Salzsäure
- 40-prozentige Natronlauge
- Isopropanol
- verschiedene Kohlenwasserstoff-Gemische

- 65-prozentige Kaliumjodid-Wasser-Lösungen
- Glycerin

In den Schwefelsäurebädern wurde der Sensor zerstört, da das Titan sich auflöste. In der hochprozentigen Salzsäure kam es zu einem Ablösen der Klebeschicht vom makroskopischen Rahmen. Dies kann darauf zurückgeführt werden, daß die Klebeschichten nicht vollständig gesäubert wurden. In allen anderen Flüssigkeiten traten auch nach einem längeren Beobachtungszeitraum keine Störungen auf.

Das Ablösen der Klebeschicht vom makroskopischen Rahmen könnte vermieden werden, wenn der Sensor gekapselt wird, d.h. nur die Titanfolie mit dem Medium in Berührung steht, alle anderen Teile aber beispielsweise durch eine Teflonschicht geschützt werden. In Schwefelsäurebädern könnte die Titanfolie durch eine zusätzlich aufgesputterte Goldschicht geschützt werden.

Kapitel 5

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden Mikromembransensoren im Hinblick auf ihren Einsatz zur Bestimmung der Dichte flüssiger Medien untersucht. Regt man Mikromembranen mittels eines Ultraschallpulses zu Schwingungen an, so geben sie in der Folgezeit ein Signal bei ihrer Resonanzfrequenz ab. Aus der Resonanzfrequenz lassen sich Informationen über die Parameter des umgebenden Mediums gewinnen, beispielsweise über dessen Dichte. Für eine genaue Bestimmung der Dichte ist es erforderlich, den Einfluß aller relevanten Parameter auf die Resonanzfrequenz zu kennen. Dazu gehören außer den Materialparametern des Mikromembransensors vor allem die Masse der Mikrostruktur und die physikalischen Parameter des umgebenden Mediums. Der Einfluß der genannten Parameter wurde durch ein Modell beschrieben, welches durch Experimente verifiziert wurde.

In diesem Modell wurde vereinfachend angenommen, daß die Kopplung der Mikromembranen untereinander keinen Einfluß auf die Schwingung hat. Die Resonanzfrequenz des Sensors kann deshalb aus dem Verhalten einer einzelnen Mikromembran berechnet werden. Die Masse der Mikrostruktur, welche die Mikromembran hält, wird dabei in Form einer Linienmasse entlang des Membranrandes berücksichtigt. Durch ein Variationsverfahren wurde eine Näherungslösung für die Auslenkungsform einer einzelnen Mikromembran bestimmt. Mit ihr kann die Resonanzfrequenz der Mikromembran näherungsweise berechnet werden.

Die Resonanzfrequenz hängt außer von den charakteristischen Parametern der Mikromembran auch vom Massenverhältnis von Mikrostruktur und -membran ab. Es zeigt sich, daß nur bei einem sehr großen Massenverhältnis von einer festen Einspannung der Mikromembran ausgegangen werden kann, sodaß die Mikrostruktur bei den Schwingungen in Ruhe bleibt. Dies ist jedoch eher die Ausnahme. In der Regel nimmt die Mikrostruktur an den Schwingungen teil. Die theoretisch berechneten Auslenkungsformen und die damit berechneten Resonanzfrequenzen zeigen für Titan-Nickel-Sensoren und Titan-Polyimid-Sensoren eine gute Übereinstimmung mit Ergebnissen, die durch Finite-Elemente-Rechnungen erzielt wurden [5].

Durch die Berücksichtigung des dynamischen Druckes an der Grenzfläche zwischen Mikromembran und Medium wurde der Einfluß der Dichte des umgebenden Mediums auf die Resonanzfrequenz erfaßt. Die Kopplungsgröße des Dichteeffekts kann für Auslenkungsformen der Art

$$u(r) = \sum_{k=0}^N \lambda_k \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^k \quad (5.1)$$

analytisch berechnet werden kann. Da alle radialsymmetrischen Schwingungsformen, deren Neigung am Rand gleich null ist, in eine Potenzreihe vom Typ (5.1) entwickelt werden können, kann die Kopplungsgröße des Dichteeffekts für eine weit größere Menge an Auslenkungsformen als hier betrachtet berechnet werden [10].

Die Theorie zeigt, daß zwischen dem Quadrat der Schwingungsdauer und der gemessenen Dichte ein linearer Zusammenhang besteht, wenn die Viskosität des Mediums im untersuchten Dichtebereich konstant ist. Diese Tatsache wurde am Beispiel einer Dichtemessung in Kaliumjodid nachgewiesen. Die Messungen ergaben, daß die Dichte in solchen Fällen auf ca. ± 2 Promille genau gemessen werden kann.

Der Vergleich der theoretisch berechneten Kopplungsgröße des Dichteeffekts mit der Kopplungsgröße, die man aus dem Experiment erhält, zeigt, daß nur dann eine Übereinstimmung von Theorie und Experiment erreicht werden kann, wenn das Mitschwingen der Mikrostruktur bei den Berechnungen berücksichtigt wird. Dabei wird eine steile Kennlinie dann erreicht, wenn die Masse der Mikrostruktur sehr groß im Verhältnis zur Masse der Mikromembran ist, und die Mikrostruktur deshalb kaum an den Schwingungen teilnimmt. In diesem Fall ist allerdings die Dämpfung der Membranschwingungen durch Schallabstrahlung größer, sodaß die Länge des Ultraschallsignals, aus dem die Resonanzfrequenz bestimmt werden kann, kürzer wird. Aus einem kürzeren Signal kann die Resonanzfrequenz jedoch nur noch mit verminderter Genauigkeit ermittelt werden. In der Praxis muß hier aus diesem Grund ein Kompromiß eingegangen werden.

Die theoretischen Untersuchungen zeigen, daß die Resonanzfrequenz der Mikromembransensoren auch von der Wellenlänge des Ultraschallsignals abhängt. Die Größenordnung dieses Effekts liegt jedoch unterhalb der Meßgenauigkeit und sollte deshalb zu keiner störenden Querempfindlichkeit führen. Eine Dichtemessung in wässrigen Kochsalz- und Äthanol-Lösungen zeigt jedoch eine systematische Abweichung der gemessenen Dichtewerte vom linearen Zusammenhang zwischen der Dichte und dem Quadrat der Schwingungsdauer. Diese Abweichung kann für Äthanol auf die vergleichsweise starke Änderung der Viskosität im untersuchten Dichtebereich zurückgeführt werden. Bei Kochsalz ist die Änderung der Viskosität vernachlässigbar klein, nicht aber die Änderung der Schallgeschwindigkeit. Der hier beobachtete Fehler könnte deshalb ein Hinweis auf die Abhängigkeit des Dichteeffekts von der Wellenlänge der abgestrahlten Schallwellen sein.

Der Einfluß der Viskosität auf die Resonanzfrequenz kann analytisch berechnet werden, wenn die Amplitude der Schwingungen klein im Vergleich zu ihrer lateralen Ausdehnung ist und die Eindringtiefe $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ ebenfalls gegen die laterale

Ausdehnung der Membran vernachlässigt werden kann. Man erhält als Lösung aus der Theorie eine lineare Abhängigkeit der Kopplungsgröße des Dichteeffekts von der Eindringtiefe. Diese Abhängigkeit konnte experimentell anhand einer Dichtemessung in Glycerin-Wasser-Lösungen bestätigt werden. Aus der Messung kann mittels eines nichtlinearen Fits die Kopplungsgröße des Viskositätseffekts und daraus die Amplitude der Membranschwingungen bestimmt werden. Für die Amplitude ergibt sich ein Wert von ca. $12 \mu\text{m}$. Dieser etwas zu große Wert kann auf den fehlenden Einfluß der nichtlinearen Terme in den Navier-Stokes Gleichungen sowie auf die im Modell nicht berücksichtigte Wechselwirkung zwischen benachbarten Mikromembranen zurückgeführt werden.

Der Einfluß der Viskosität zeigt, daß schon bei vergleichsweise geringen Viskositäten von ca. $4 \text{ mm}^2/\text{s}$ die Änderung der Kopplungsgröße so groß ist, daß die Vernachlässigung der Viskosität zu einem Meßfehler von einem Prozent führen würde. Die Kopplungsgröße der Viskosität und damit der Fehler könnte durch eine größere Dicke der Mikromembranen verringert werden. Dies würde auch zu einer Verkleinerung der Eindringtiefe führen, da in diesem Fall auch die Resonanzfrequenz ansteigt. Da eine größere Resonanzfrequenz auch zu einer größeren Dämpfung und damit zu einer geringeren Meßgenauigkeit führt, ist eine Änderung der Dicke aber nicht geeignet, den Viskositätseffekt zu verkleinern. Dasselbe gilt für eine Vergrößerung der Mikrostrukturhöhe. Auch sie führt zu einer kleineren Kopplungsgröße, vergrößert jedoch gleichzeitig auch die Dämpfung. Eine Vergrößerung des Radius der Mikromembran führt zwar zu einer kleineren Kopplungsgröße, dies wird jedoch durch die Vergrößerung der Eindringtiefe kompensiert, da diese ungefähr proportional zum Radius der Mikromembran ist. Es ist daher nicht möglich, durch eine Veränderung des Sensordesigns den Mikromembransensor dahingehend zu optimieren, daß er eine vernachlässigbar kleine Querempfindlichkeit auf Änderungen der Viskosität zeigt.

Eine genaue Messung der Dichte auch in hochviskosen Medien erfordert deshalb die Kenntnis der Viskosität. Prinzipiell wäre ihre Berechnung aus der Dämpfung möglich. Da die Dämpfung jedoch vielfältigen Einflüssen ausgesetzt ist und daher einem weitaus größeren Fehler als die Resonanzfrequenz unterliegt, ist die Bestimmung der Viskosität aus der Dämpfung nicht mit der erforderlichen Genauigkeit möglich. Es müßte dann ein externes Meßgerät zur Bestimmung der Viskosität eingesetzt werden, was in Hinsicht auf eine industrielle Verwertung des Meßprinzips nicht wünschenswert ist. Darüber hinaus führen Viskositäten oberhalb von $200 \text{ mm}^2/\text{s}$ zu einer sehr großen Dämpfung des Signals, sodaß eine Signalauswertung nicht mehr ohne weiteres möglich ist. Hohe Viskositäten führen auch zu einer Grenzschichtdicke δ , die im Bereich der Membrandicke selbst liegt und daher ebenfalls einen Einfluß auf das Schwingungsverhalten der Mikromembransensoren ausübt. Aus diesem Grund sind Dichtemessungen mit Mikromembransensoren, bei denen die Dichte auf ca. ± 1 Prozent bestimmt werden soll und bei denen die Viskosität nicht berücksichtigt wird, nur in niedrigviskosen Medien möglich, deren Viskosität über einen weiten Bereich konstant bleibt.

Der Einfluß des hydrostatischen Drucks äußert sich in erster Linie über eine Änderung der inneren Spannung der Membran. Wird diese nicht abgesätzt, so führt eine Druckdifferenz zu einer Auslenkung der gesamten Membranfolie und damit zu einer Änderung der inneren Spannung, die wiederum eine Verschiebung der Resonanzfrequenz zur Folge hat. Der funktionale Zusammenhang zwischen der Resonanzfrequenz und dem hydrostatischen Druck kann in guter Näherung durch die theoretischen Gleichungen beschrieben werden. Bei kleinen Drücken ist dieser Zusammenhang parabolisch, bei größeren Drücken jedoch linear.

Vergleicht man die Empfindlichkeit auf Druckänderungen mit der Empfindlichkeit auf Dichteänderungen, so wird deutlich, daß der Einfluß des hydrostatischen Drucks auch bei vergleichsweise kleinen Druckänderungen nicht vernachlässigt werden darf. Dies konnte experimentell durch geeignete Mikromembransensoren nachgewiesen werden. Die theoretisch bestimmte Belastbarkeitsgrenze solcher Sensoren liegt nur bei einigen hundert hPa, da der Berstdruck umgekehrt proportional zu dem Radius ist, über den die makroskopische Folie ausgelenkt wird. Dementsprechend zeigen Experimente, daß solche Sensoren bei Druckbelastungen von ein paar tausend hPa zerstört werden.

Wenn die Mikrostruktur auf einer stabilen Fläche aufliegt, dann wird bei einer Druckdifferenz nicht die Membranfolie, sondern jede Mikromembran für sich ausgelenkt. Die theoretisch zu erwartende Änderung der inneren Spannung ist dann so klein, daß der Einfluß des Drucks bis zu einem Wert von 0.45 MPa vernachlässigt werden kann. Eine Druckmessung mit solchermaßen hergestellten Mikromembransensoren zeigt, daß die Verschiebung der Resonanzfrequenz unterhalb der Nachweisgrenze von 2.4 kHz liegt und damit vernachlässigt werden kann. Setzt man diese Sensoren Drücken bis 0.6 MPa aus, so werden diese Sensoren nicht zerstört. Nach Wegnahme des Drucks ist darüber hinaus auch keine Verschiebung der Resonanzfrequenz meßbar. Dies läßt auf eine hohe Stabilität solcher Sensoren in Bezug auf Druckänderungen schließen.

Die Querempfindlichkeit der Resonanzfrequenz auf Temperaturänderungen hängt u. a. von der Höhe der Mikrostruktur und den damit verbundenen inneren Spannungen ab. Es ist daher möglich, unterschiedliche funktionale Zusammenhänge zwischen der Resonanzfrequenz und der Temperatur zu erhalten. Dies wurde an Sensoren mit unterschiedlich hohen Mikrostrukturen demonstriert. Wenn die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Temperatur linear ist, ist die Möglichkeit gegeben, eine Temperaturänderung mit Hilfe einer zusätzlichen Messung der Temperatur und einer Kalibrierkurve zu berücksichtigen und somit die Temperaturabhängigkeit der Dichte flüssiger Medien nachzuweisen. Dies wurde am Beispiel einer Dichtemessung in wässrigen Kaliumjodid-Lösungen gezeigt. Die dabei erreichbare Meßgenauigkeit liegt, auf den Meßwert bezogen, ebenfalls bei ca. ± 2 Promille.

Titan-Polyimid-Sensoren zeigen bis zu einer Temperatur von 140 °C ein stabiles Signal, sodaß eine Auswertung dieses Signals möglich ist. Diese Sensoren sind darüber hinaus auch weitgehend unempfindlich gegenüber großen Temperaturgradienten, was durch Messungen der Resonanzfrequenz in Wasser (20 °C) gezeigt werden konnte, nach dem sie kurzzeitig in einem Ölbad Temperaturen bis 150 °C ausgesetzt waren.

Wenn die Mikromembran, die sie haltende Mikrostruktur und der makroskopische Rahmen aus demselben Material gefertigt werden, tritt keine Querempfindlichkeit auf Temperaturänderungen auf. Darauf deutet ein Experiment mit einem Sensor hin, bei dem fast alle Komponenten aus Titan hergestellt wurden. Wegen Unzulänglichkeiten der Verklebung war der Nachweis allerdings auf Temperaturen bis 35 °C beschränkt.

Das Problem, eine temperaturstabile Verbindung zwischen der Membran und dem tragenden Rahmen zu erhalten, entsteht dadurch, daß die Reinheit der Klebeflächen in starkem Maße von den Ätzverfahren abhängt, die beim Herstellungsprozeß verwendet wurden. Dieses Problem könnte umgangen werden, wenn die Möglichkeit besteht, Mikrostrukturen aus Titan galvanisch abzuscheiden, da in diesem Fall bei der Herstellung keine Ätzverfahren benutzt werden müssen.

Mikromembransensoren weisen durch die verwendeten Materialien eine vergleichsweise hohe chemische Inertheit gegenüber aggressiven Stoffen auf. Die Signalstabilität wurde in Säuren, Laugen und verschiedenen Kohlenwasserstoffen und elektrolytischen Flüssigkeiten überprüft. Es zeigt sich, daß nur in hochprozentigen Säuren eine Ablösung der verbindenden Klebeschicht vom tragenden Rahmen auftrat. Dies könnte durch eine zusätzliche Kapselung des Sensors vermieden werden.

Der Einsatz von Mikromembransensoren zur Messung der Dichte flüssiger Medien erscheint insbesondere dort sinnvoll, wo die Dichte niedrigviskoser Medien mit einer Genauigkeit von ca. 1 Prozent bestimmt werden muß. Der Einfluß der Viskosität kann dann vernachlässigt werden, wenn sie über den Meßbereich hinweg konstant bleibt und geringer als ca. 200 mm²/s ist.

Da die Dichteempfindlichkeit nicht nachweisbar von der Schallgeschwindigkeit abhängt, besteht in dieser Hinsicht keine Beschränkung auf bestimmte Medien. Dies ist in Hinsicht auf Meßmethoden von Vorteil, bei denen die Dichte über die Schallgeschwindigkeit bestimmt wird. Andererseits ist für die Messung keine Probenentnahme nötig, was eine Online-Überwachung der Dichte bei industriellen Prozessen möglich macht. Die hohe Druckstabilität der Mikromembransensoren läßt darüber hinaus auch die Messung der Dichte in Umgebungen zu, die hohe Drücke bzw. hohe Druckgradienten aufweisen. Wegen ihrer hohen Temperaturstabilität und der hohen chemischen Resistenz eignen sie sich auch für den Einsatz in chemisch aggressiven Medien, in denen Temperaturen bis 140 °C auftreten können.

Literaturverzeichnis

- [1] Normenausschuß Materialprüfung (NMP) im Deutschen Institut für Normung: *Bestimmung der Dichte*. 1994. DIN 51757.
- [2] W.K. Schomburg, M. Vitt, M.W. Börner, W. Bacher, W. Menz: *Measurements of Physical Parameters with Ultrasound and Microdiaphragms*. MEMS, Seiten 139–144, 1995.
- [3] M. Vitt: *Mikromembranen für berührungslose Messungen mit Ultraschall*. Forschungszentrum Karlsruhe, 1994. Diplomarbeit am Institut für Mikrostrukturtechnik, Forschungszentrum Karlsruhe.
- [4] Sir Horace Lamb: *On the vibrations of an elastic plate in contact with water*. Proc. R. Soc, A:205–216, 1920.
- [5] R. Elsässer, M. Kamlah, Ch. Tsakmakis: *Untersuchungen zum dynamischen Verhalten mikrostrukturierter Membranen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente*. Forschungszentrum Karlsruhe, 1997. FZK-Bericht: FZKA5870.
- [6] Sir Rayleigh: *Theory of Sound*, Band I und II. Dover Publications, 2. Auflage, 1945.
- [7] W. Ritz: *Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme in der mathematischen Physik*. Journal für reine und angewandte Mathematik, 35:60–61, 1909.
- [8] P.M. Morse, K.U. Ingard: *Theoretical Acoustics*. McGraw-Hill, 1968.
- [9] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger: *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 2. Auflage, 1959.
- [10] P.M. Morse, H. Feshbach: *Methods of Theoretical Physics*, Band I und II. McGraw-Hill, 1953.
- [11] H. Goldstein: *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 6. Auflage, 1959.
- [12] S.G. Mikhlin: *Variational Methods in Mathematical Physics*. Pergamon Press, 1964.
- [13] J.J. Sakurai: *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, korr. Auflage, 1988.

- [14] I. N. Bronstein, K.A. Semendjadjew: *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch Verlag Leipzig, 24. Auflage, 1989.
- [15] E. Skudrzyk: *The Foundations of Acoustics*. Springer Verlag, 1971.
- [16] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik: *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, 5. Auflage, 1979.
- [17] R.L. Pritchard: *Mutual Acoustic Impedance between Radiators in an Infinite Rigid Plane*. Journal of the Acoustic Society of America, 32:730–737, 1960.
- [18] L.D. Landau, E.M. Lifschitz: *Course of Theoretical Physics*, Band 6. Pergamon Press, 1. Auflage, 1959.
- [19] J.W. Beams: *Mechanical Properties of Thin Films of Gold and Silver*. Proceedings of Structure and Properties of Thin Films, Seiten 183–192, 1959. Wiley and Sons.
- [20] R.D. Blevins: *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*. Krieger Malabar, FL, 1. Auflage, 1979.
- [21] E.O. Brigham: *The Fast Fourier Transformation and its Applications*. Prentice Hall, London, 1988.
- [22] C. Gerthsen, H. Kneser, H.Vogel: *Physik*. Springer Verlag, 16. Auflage, 1989.
- [23] G. Stern: *Mündliche Mitteilung*.
- [24] W.K. Schomburg, K. Kadel, G. Stern, R. Broßard: *Entwicklung eines subtraktiven Strukturierungsverfahrens zur Herstellung von Röntgenzwischenmasken für das LIGA-Verfahren*. KfK-Bericht 5262, 1993.
- [25] Landolt, Börnstein: *Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaften und Technik*, Band 1 “Dichten flüssiger Systeme” (Neue Serie), Band 5 “Molekularakustik” (Neue Serie) und Band 5a “Transportphänomene”. Springer Verlag, Heidelberg, 1967.
- [26] Firma Olin: *Datenblatt für den Lack PIQ 7020*, 1996.

Anhang

A Materialdaten

In Tabelle A sind die Materialdaten angegeben, die den durchgeführten Berechnungen zugrundeliegen. Für die Dicke einer Titanmembran wurde durchweg $h_m = 2.7 \mu\text{m}$ angenommen.

Material	Dichte ρ [kg/m ³]	E-Modul [GPa]	ν_p	Vorsp. σ_0 [MPa]	α_T [1/°C]
Titan	4500	115	0.36	200	9×10^{-6}
Polyimid	ca. 1600	ca. 2.5		ca. 50	50×10^{-6}
Nickel	8900	186			12.8×10^{-6}

Tabelle A: Daten der bei der Herstellung von Mikromembransensoren verwendeten Materialien [22, 26].

B Mathematischer Anhang

Berechnung der potentiellen Energie einer Mikromembran

In Kapitel 1, Abschnitt 1.1, Gleichung (1.16) ist die potentielle Energie einer Mikromembran zu berechnen.

Potentielle Energie aufgrund von Biegemomenten

Zu lösen ist ein Integral des Typs

$$I = \int (\Delta^2 u) u r dr \quad (\text{B.1})$$

Man schreibt das Quadrat des Laplace-Operators um, sodaß sich

$$I = \int \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) \right] u r dr \quad (\text{B.2})$$

ergibt. Eine partielle Integration führt zu

$$V_B = \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u}{\partial r}) \right) \right] u \Big|_0^a - \int_0^a \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u}{\partial r}) \right) \frac{\partial u}{\partial r} r \, dr \quad (\text{B.3})$$

Eine nochmalige partielle Integration des Integrals in B.3 überführt dieses in

$$\int_0^a \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u}{\partial r}) \right) \frac{\partial u}{\partial r} r \, dr = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u}{\partial r}) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} r \right) \Big|_0^a - \int_0^a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) r \, dr \quad (\text{B.4})$$

Berücksichtigt man noch, daß

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \Delta u \quad (\text{B.5})$$

ist, dann kann das Integral (B.1) als

$$I = \int_0^a (\Delta u)^2 r \, dr + \quad (\text{B.6})$$

$$\left[r \frac{\partial}{\partial r} \Delta u \right] u \Big|_0^a - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u}{\partial r}) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} r \right) \Big|_0^a \quad (\text{B.7})$$

geschrieben werden.

Bei der Herleitung der Randbedingungen mußte das Integral

$$I = \int_0^a \Delta u \cdot \Delta(\delta u) r \, dr \quad (\text{B.8})$$

berechnet werden. Dieses Integral kann gelöst werden, wenn im Integranden von (B.7) auf der rechten Seite eines der beiden u durch δu ersetzt wird und dann die partielle Integration rückwärts ausgeführt wird.

Berechnung der potentiellen Energie durch die innere Spannung

Zu lösen ist das Integral

$$I = \int_0^a (\Delta u) u r \, dr. \quad (\text{B.9})$$

Ersetzt man den Laplace Operator, ergibt sich

$$I = \int_0^a \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] u r \, dr \quad (\text{B.10})$$

Eine partielle Integration führt dann zu

$$V_s = \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) u \Big|_0^a - \int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 r \, dr. \quad (\text{B.11})$$

Bei der Herleitung der Randbedingungen war ein Integral des Typs

$$I = \int_0^a \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial r} r \, dr \quad (\text{B.12})$$

zu lösen. Auch dieses Integral kann mit Hilfe einer partiellen Integration gelöst werden. Dazu ersetzt man im Integranden der rechten Seite von (B.11) ein u durch δu und führt die partielle Integration dann rückwärts aus.

Differentialoperator Λ

Es soll die Wirkung des Differentialoperators

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{B.13})$$

auf Parameterintegrale des Typs

$$G(z) = \int_z^\infty h(x, z) \, dx \quad (\text{B.14})$$

berechnet werden. Dabei ist speziell in diesem Fall $h(x, z)$ durch

$$h(x, z) = f(x) (x^2 - z^2)^{n-1/2} \quad (\text{B.15})$$

gegeben.

Bewiesen werden soll die Behauptung

$$\Lambda^n G(z) = \int_z^\infty \Lambda^n h(x, z) \, dx \quad (\text{B.16})$$

Beweis:

Für Parameterintegrale des Typs $G(z)$ mit stetigen Grenzen $\phi(z)$ und $\psi(z)$ und im Intervall (z, ∞) definiertem stetigen Integranden gilt:

$$\begin{aligned} \Lambda G(z) &= \int_\phi^\psi \frac{1}{z} \frac{\partial h}{\partial z} \, dx \\ &\quad + \frac{1}{z} h(\psi, z) \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{z} h(\phi, z) \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

In unserem Fall ist $\psi = \infty$ und $\phi = z$, daher gilt $\psi' = 0$ und $h(\phi, z) = 0$. Damit reduziert sich (B.17) zu

$$\Lambda G(z) = \int_\phi^\psi \frac{1}{z} \frac{\partial h}{\partial z} \, dx = \int_z^\infty \Lambda h(x, z) \, dx \quad (\text{B.18})$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß für alle $k < n$

$$\Lambda^k (x^2 - z^2)^{n-1/2} \Big|_{x=\phi} = 0 \quad (\text{B.19})$$

gilt. Ist $k = n - 1$, gilt daher

$$\Lambda^{n-1}G(z) = \int_{\phi}^{\psi} \Lambda^{n-1}h(x, z) dx \quad (\text{B.20})$$

Wendet man auf Gleichung (B.20) den Operator Λ an, dann erhält man

$$\begin{aligned} \Lambda^n G(z) &= \int_{\phi}^{\psi} \Lambda^n h(x, z) dx \\ &+ \frac{1}{z} \left(\Lambda^{n-1} h(x, z) \right) \Big|_{x=\psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{z} \left(\Lambda^{n-1} h(x, z) \right) \Big|_{x=\phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Wegen $\psi' = 0$ und Gleichung (B.19) ergibt sich die Behauptung (B.16).

Zur Berechnung der Integrale $\mathcal{A}_{n \neq m}$

Bei der Berechnung der kinetischen Energie des umgebenden Mediums ergaben sich u.a. die Integrale

$$I = \int_z^{\infty} \frac{J_{n+1}(x) J_{m+1}(c)}{x^{n+m+2} \sqrt{x^2 - z^2}} x dx. \quad (\text{B.22})$$

Diese Integrale können durch mehrere nacheinander ausgeführte Substitutionen in eine lösbare Form gebracht werden. Zuerst wird $\mu = m + 1$ und $\nu = n + 1$ gesetzt. damit wird (B.22) zu

$$I = \int_z^{\infty} \frac{J_{\mu}(x) J_{\nu}(x)}{x^{\mu+\nu} z \sqrt{\frac{x^2}{z^2} - 1}} x dx \quad (\text{B.23})$$

Nun wird $x = z \cosh t$ bzw. $dx/dt = z \sinh t$ gesetzt. Damit erhält man

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \frac{J_{\mu}(z \cosh t) J_{\nu}(z \cosh t) z \cosh t}{z^{\mu} \cosh^{\mu} t z^{\nu} \cosh^{\nu} t} dt \\ &= \frac{1}{z^{\mu+\nu-1}} \int_0^{\infty} \frac{J_{\mu}(z \cosh t) J_{\nu}(z \cosh t) \cosh t}{\cosh^{\mu} t \cosh^{\nu} t} dt. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Nun wird $t = iu$ bzw. $dt = i du$ gesetzt. Es ergibt sich für (B.24) somit

$$I = \frac{1}{z^{\mu+\nu-1}} i \int_0^{i\infty} \frac{J_{\mu}(z \cos u) J_{\nu}(z \cos u)}{\cos^{\mu} u \cos^{\nu} u} \cos u du. \quad (\text{B.25})$$

Substituiert man zuletzt noch $u = \phi - \pi/2$ bzw. $du = -d\phi$, dann erhält man

$$I = \frac{1}{z^{\mu+\nu-1}} \int_{\frac{\pi}{2}+i0}^{\frac{\pi}{2}+i\infty} \frac{J_{\mu}(z \sin \phi) J_{\nu}(z \sin \phi)}{\sin^{\mu} \phi \sin^{\nu} \phi} \sin \phi d\phi. \quad (\text{B.26})$$

Dieses Integral ist in Integralen des Typs

$$I' = \frac{1}{i} \int_{\frac{\pi}{2}+i0}^{\frac{\pi}{2}+i\infty} \frac{J_{\mu'}(kx \sin \phi) J_{\nu'}(ky \sin \phi) J_{\xi'}(kz \sin \phi)}{\sin^{\mu'} \phi \sin^{\nu'} \phi \sin^{\xi'} \phi} \sin \phi \, d\phi \quad (\text{B.27})$$

enthalten. Diese Klasse von Integralen wurde von Pritchard gelöst [17].

Krümmungsradius einer Membran

In Kapitel 1, Abschnitt 1.3 ist die Resonanzfrequenz einer Mikromembran in Abhängigkeit von ihrem Krümmungsradius angegeben. Da der Krümmungsradius vom anliegenden statischen Druck abhängt, ergibt sich eine Abhängigkeit der Resonanzfrequenz vom Druck.

Nach [19] ist die Auslenkungsform einer Membran in erster Näherung durch

$$u = u_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \quad (\text{B.28})$$

gegeben. Der Krümmungsradius von (B.28) läßt sich durch

$$R_k = \frac{1}{2} \frac{a^2 \left(1 + 4 \frac{u_0^2 r^2}{a^4}\right)^{3/2}}{u_0} \quad (\text{B.29})$$

angeben [14]. Nimmt man nun an, daß die Auslenkung u_0 klein im Vergleich zum Radius a der Membran ist, kann im Zähler von (B.29) der zweite Summand gegen die 1 vernachlässigt werden. Damit ergibt sich für den Krümmungsradius einer Membran

$$R_k(u) = \frac{a^2}{2u_0} \quad (\text{B.30})$$

Kleinwinkel-Näherung bei der Reibungskraft auf ein Flächenelement

In Kapitel 1, Abschnitt 1.2.8 wurde die Reibungskraft auf ein ein Flächenelement der Mikromembran berechnet. Diese hängt von der Neigung $\tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial r}$ der Auslenkungsform $u(r)$ ab. Wenn die Neigung klein ist, dann kann $\tan \alpha = \sin \alpha = \alpha$ gesetzt werden. Es genügt zu zeigen, daß diese Näherung auch für den größten Wert der Ableitung erfüllt ist.

Das Maximum von $u(r)$, wenn $u(r)$ in der Form (1.39) angesetzt wird, erhält man bei

$$x = \frac{1}{10} \sqrt{90a^2 + 10\sqrt{41}a^2}$$

was ungefähr $x = a/2$ entspricht. Der Wert der Ableitung an dieser Stelle ist

$$0.739\beta(1 + \lambda)$$

Dabei ist β das Verhältnis aus maximal möglicher Auslenkung und Radius der Membran. Wie im Kapitel 1, Abschnitt 1.3 gezeigt wurde, ist β ungefähr $1/10$. Setzt man nun für den Variationsparameter¹ λ_0 einen Wert von 0.4 an, was sicherlich an der oberen Grenze liegt, erhält man

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{x=a/2} = 0.103$$

Da die Ableitung gleich dem $\tan \alpha$ an dieser Stelle ist, wird für $\tan \alpha = 0.10357$ der Winkel zu $\alpha = 0.10320$, Das entspricht selbst im ungünstigsten Fall nur einer Abweichung von ca. 3 Promille. Es kann daher in sehr guter Näherung mit der Klein-Winkel-Näherung gearbeitet werden.

Kinetische Energie der Mikrostruktur

Die zusätzliche Trägheitskraft F , die durch die Anwesenheit der Mikrostruktur entsteht, kann durch

$$F = \omega^2 \tilde{m}_s \delta(r - a) u(r) \quad (\text{B.31})$$

beschrieben werden (vgl. Gl. (1.46)). Hier ist $\tilde{m}_s = m_s/2\pi a$ die Masse der Mikrostruktur pro Linienelement. Durch Multiplikation mit $u/2$ erhält man als zu lösendes Integral

$$T_s = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_A F u r dr d\vartheta = \frac{1}{2} \tilde{m}_s \int_0^{2\pi} \int_0^a \delta(r - a) u(r) r dr d\vartheta. \quad (\text{B.32})$$

Dabei ist T_s gerade die kinetische Energie der Mikrostruktur. Da $u(r)$ außerhalb von $[0, a]$ gleich null ist, also

$$u(r) = \begin{cases} 0 & \text{falls } r < 0, \\ 0 & \text{falls } r > a \end{cases} \quad (\text{B.33})$$

gilt, kann man (B.32) auch als

$$T_s = \frac{1}{2} \tilde{m}_s \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(r - a) u(r) r dr d\vartheta \quad (\text{B.34})$$

schreiben. Aufgrund der Eigenschaften der Delta-Funktion gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(r - a) f(r) r dr = f(a) \cdot a. \quad (\text{B.35})$$

Damit ergibt sich für (B.34)

$$T_s = \frac{1}{2} 2\pi \tilde{m}_s u(a)^2 a = \frac{1}{2} m_s (u(a))^2. \quad (\text{B.36})$$

¹Dabei entspricht λ_0 der Membranauslenkung am Rand

C Bestimmung der Kopplungsgröße α_T

In Abschnitt 4.4.1 wurde gezeigt, daß der Einfluß der Temperatur auf die Resonanzfrequenz eliminiert werden kann, wenn die Resonanzfrequenz linear von der Temperatur abhängt. Um diese Korrektur durchführen zu können, muß die Kopplungsgröße α_T bekannt sein. Ihr Wert gibt an, wie stark die Resonanzfrequenz von der Temperatur abhängt. Wie sich zeigt, erfordert die Bestimmung dieser Größe die Aufnahme von Kalibrierkurven für die Dichte- und die Temperaturmessung.

Die Resonanzfrequenz f_{res} eines Mikromembransensors kann als Funktion der Dichte ρ_f und der Temperaturänderung $\Delta T = T - T_0$ durch

$$f_{\text{res}} = \frac{f_0}{\sqrt{1 + \chi\rho_f}}(1 - \alpha_T\Delta T) \quad (\text{C.1})$$

beschrieben werden. Multipliziert man beide Seiten mit $\sqrt{1 + \chi\rho_f}$, dann ergibt sich

$$f'_{\text{res}} = f_{\text{res}}\sqrt{1 + \chi\rho_f} = f_0(1 - \alpha_T\Delta T). \quad (\text{C.2})$$

Da die Dichte ρ_f von Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur und die Resonanzfrequenz f_{res} des Sensors bekannt sind (siehe [25]), kann, wenn darüber hinaus auch die Kopplungsgröße χ des Sensors bekannt ist, die Größe f'_{res} für verschiedene Temperaturen berechnet werden. Aus dem linearen Zusammenhang zwischen f'_{res} und der Temperaturdifferenz kann man dann den Wert für α_T bestimmen.

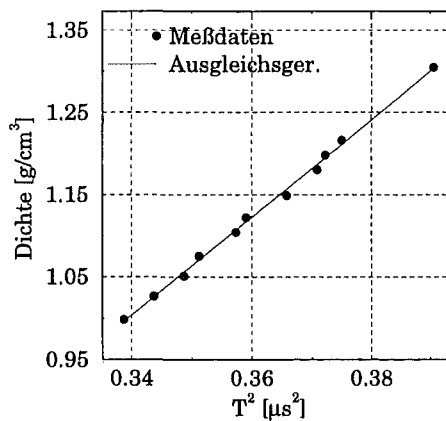


Abbildung A: Kalibrierkurve für die Dichtemessung für den in Abschnitt 4.4.1 verwendeten Sensor. (aufgenommen bei $T = 21^\circ\text{C}$)

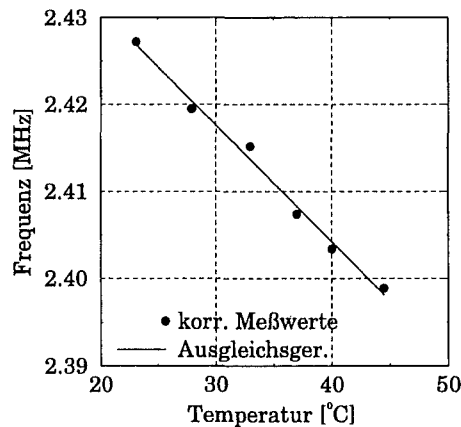


Abbildung B: Korrigierte Resonanzfrequenz f'_{res} in Abhängigkeit von der Temperatur des umgebenden Wasserbades. Die Werte von f'_{res} wurden mit Hilfe der gemessenen Resonanzfrequenz f_{res} und der Dichte ρ_f gemäß Gl. (C.2) berechnet.

Die in Abbildung A dargestellte Kalibriermessung wurde bei der konstanten Temperatur $T = 21^\circ\text{C}$ durchgeführt. Setzt man daher $f'_0 = f_0(1 - \alpha_T(21 - T_0))$, dann kann

Gl. (C.1) zu

$$\rho_f = \frac{1}{\chi} \left[\left(\frac{f'_0}{f'_{\text{res}}} \right)^2 - 1 \right] \quad (\text{C.3})$$

umgeformt werden. Aus den Daten der Kalibrierung erhält man für die Koppelungsgröße χ dann einen Wert von $1.0018 \text{ cm}^3/\text{g}$ und für f'_0 den Wert 2.429 MHz .

Die Daten für die Temperaturkalibration können der Abbildung 4.15 entnommen werden. Mit Hilfe der dort gezeigten Daten kann nun gemäß Gleichung (C.2) zusammen mit dem Wert für χ und der Dichte des Wassers für jede Temperatur der Wert von f'_{res} berechnet werden. Das Ergebnis dieser Berechnung ist in Abbildung B dargestellt. Eine lineare Regression ergibt, wenn man $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ setzt,

$$f'_{\text{res}} = 2.431[\text{MHz}] \left(1 - 5.559 \times 10^{-4} \frac{1}{^\circ\text{C}} (T - 20^\circ\text{C}) \right). \quad (\text{C.4})$$

Für α_T ergibt sich damit der Wert $5.559 \times 10^{-4}/^\circ\text{C}$.

D Abkürzungsverzeichnis

Zeichen Beschreibung

a	Radius einer Mikromembran
a_{eff}	effektiver Radius einer Mikromembran
h_m	Dicke einer Mikromembran
σ_0	Vorspannung der Membranfolie
ρ_m	Dichte der Membranfolie
h_{ms}	Höhe der Mikrostruktur
m_m	Masse der Mikromembran
m_s	Masse der Mikrostruktur
E	Elastizitätsmodul
ν_p	Poisson'sche Querkontraktionszahl
ρ_f	Dichte des umgebenden Mediums
p_s	hydrostatischer Druck
f_{res}	Resonanzfrequenz einer Mikromembran im belasteten Zustand $f_{\text{res}} = \omega/2\pi$
f_0	Resonanzfrequenz im unbelasteten Zustand $f_0 = \omega_0/2\pi$
Δ	Laplace-Operator in Polarkoordinaten
ω	Kreisfrequenz einer Mikromembran im belasteten Zustand (Medium)
ω_0	Kreisfrequenz einer Mikromembran im unbelasteten Zustand (Vakuum)
ν	Dynamische Viskosität des umgebenden Mediums
c	Schallgeschwindigkeit im Medium
k	Wellenzahl der abgestrahlten Schallwellen $k = \omega/c$
κ	Helmholtzzahl $\kappa = ka$
δ	Eindringtiefe in ein viskoses Medium, $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$
χ	Kopplungsgröße des Dichteeffekts
α	Dämpfung der Membranschwingungen
T_m	kinetische Energie der Mikromembran
T_f	kinetische Energie des umgebenden Mediums
T_s	kinetische Energie der Mikrostruktur
T_ν	kinetische Energie des Mediums, viskoser Anteil
V_D	potentielle Energie aufgrund von Biegemomenten
V_{σ_0}	potentielle Energie aufgrund der inneren Spannung
β	Kopplungsgröße des Viskositätseffekts
FFT	Schnelle Fourier Transformation
α_T	Effektiver thermischer Ausdehnungskoeffizient einer Mikromembran
T	Temperatur allgemein
λ_n	Koeffizienten der Versuchsfunktion für das Variationsverfahren