

Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5638

**Ein Beitrag zur Analyse
von quasi-optischen
Wellentypwandlern in
Hochleistungsgyrotrons**

A. Wien

Institut für Technische Physik

September 1995

Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt
Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5638

Ein Beitrag zur Analyse von quasi-optischen Wellentypwandlern in
Hochleistungsgyrotrons*

Andreas Wien

Institut für Technische Physik

*Von der Fakultät für Elektrotechnik der Universität Karlsruhe (TH) genehmigte
Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1995

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0947-8620

Ein Beitrag zur Analyse von quasi-optischen Wellentypwandlern in Hochleistungs gyrotrons

Kurzfassung

Diese Arbeit liefert einen Beitrag zur Analyse des Beugungs- und Strahlungsfeldes von Antennen quasi-optischer Wellentypwandler, die in heutigen Hochleistungsmillimeterwellenröhren (Gyrotrons) zur lateralen Hochfrequenzauskopplung eingesetzt werden. Dabei werden numerische Feldberechnungsverfahren, wie die Finite-Integrations-Methode im Zeitbereich (MAFIA-Programm) und Randelementmethode im Frequenzbereich, als auch analytische Verfahren (Methode der erweiterten äquivalenten Kantenströme) vorgestellt und angewendet. Der Einsatz dieser feldtheoretischen Verfahren liefert wichtige Richtlinien zum Entwurf der Wandler, die mit den bisher üblichen konventionellen optischen Methoden nicht gewonnen werden können.

So werden durch die Analyse des Hohlleiter-Freiraum-Übergangs erstmals Reflexionsfaktoren für relevante Kantengeometrien hergeleitet, die eine Abschätzung des minimal erlaubten Hohlleiterdurchmessers gestatten. Ein neuartiger, zu starker Modenkonversion führender Resonanzeffekt läßt sich mit den verwendeten Verfahren verifizieren.

Weiterhin werden zylindrische Hohlleiterwanddeformationen zur Verbesserung des Abstrahlverhaltens der Antenne untersucht, die die Gültigkeitsgrenzen des geometrisch-optischen Entwurfs aufzeigen. Die Analyse ermöglicht die quantitative Auswertung der transversalen Strahlparameter und des Wandlungswirkungsgrades.

Contribution to the analysis of quasi-optical mode converters in high-power gyrotrons

Abstract

The present work analyzes the diffraction and radiation behavior of launchers in quasi-optical mode converters which are used for transverse output beam coupling in advanced high-power microwave tubes (gyrotrons). The analysis is performed by numerical methods which are based on the Finite-Integration-Method in Time Domain (MAFIA-code) and the Boundary-Element-Method in Frequency Domain. Edge diffraction effects leading to backscattering of the incident waveguide field are verified with the equivalent edge current concept (MEC). New design criteria for the launcher can be derived using these analyzing tools which cannot be found using conventional optical methods.

Explicit reflection coefficients are derived for the waveguide to free space transition for relevant geometries (circular, straight and helical edges) giving a lower bound for a tolerable waveguide radius. A new resonance effect leading to a strong mode conversion is found and verified by the different presented methods.

Cylindrical in-waveguide deformations synthesized by a geometric-optical concept for the improvement of the radiation characteristic are investigated. The transverse output beam parameters and the conversion efficiency can be obtained using a two-dimensional Boundary-Element-Method formulation.

Inhaltsverzeichnis

Symbolliste	v
1 Einleitung	1
2 Quasi-optische Wellentypwandler	5
2.1 Geführte Wellen	6
2.1.1 Eigenwellen im Kreishohlleiter	6
2.1.2 Zerlegung der Kreishohlleitermoden in ebene Wellen	8
2.1.3 Grundwelle einer konfokalen Spiegelleitung	12
2.2 Konventioneller quasi-optischer Wellentypwandler	15
2.2.1 Funktionsprinzip	15
2.2.2 Wirkungsgrad	18
2.3 Verbesserte quasi-optische Wellentypwandler	20
2.3.1 Antenne mit periodischen Wanddeformationen	20
2.3.2 Antenne nach dem Hohlleiterspiegelkonzept	23
3 Analyse der Antenne in quasi-optischen Wellentypwandlern	25
3.1 Auswahl geeigneter Verfahren zur Feldberechnung	27
3.1.1 Analytische Verfahren	28
3.1.2 Semi-numerische Verfahren	30
3.1.3 Numerische Verfahren	32
3.2 Dreidimensionale Feldberechnung mit dem MAFIA-Programm	35
3.2.1 Finite-Integrations-Methode im Zeitbereich	35
3.2.2 Lösung von Hohlleiterproblemen mit dem MAFIA-Programm	43
3.2.3 Ergänzung des MAFIA-Programms	45
3.2.4 Simulation der helikalen Aperturantenne	48
3.3 Zweidimensionale Feldberechnung mit der Randelementmethode	51
3.3.1 Herleitung des Randelementverfahrens	51
3.3.2 Randbedingungen bei Hohlleiterproblemen	56
3.3.3 Anwendung auf die transversale Wellenausbreitung	60
3.4 Analyse des Rückstreuverhaltens mit asymptotischen Methoden	62
3.4.1 Methode der äquivalenten Kantenströme	62
3.4.2 Entwicklung der äquivalenten Kantenströme in Hohlleitermoden	67
3.4.3 Streuung von Kreishohlleitermoden für einige Kantengeometrien	70
3.4.4 Reflexionsfaktoren für die anregende Mode	75
3.4.5 Reflexionen des Kreishohlleiters: Moden niedriger Ordnung	77

4	Analyse der nichtdeformierten Antenne	78
4.1	Anwendung des MAFIA-Programms	79
4.1.1	Numerisch berechnete Eigenwerte	79
4.1.2	Modenkonzersion eines Wellenleitersprungs	80
4.1.3	Reflexionen eines halbumendlichen Kreishohlleiters	81
4.2	Methode der äquivalenten Kantenströme (MEC) beim offenen Kreishohlleiter	83
4.2.1	Rückstreuung bei $TE_{0,1}$ -Anregung	83
4.2.2	Rückstreuung bei $TE_{7,3}$ -Anregung	84
4.3	Reflexionen der helikalen Aperturantenne - Vergleich: MAFIA und MEC	86
4.3.1	Rückstreuverhalten	86
4.3.2	Reflexion der anregenden Mode in Abhängigkeit des Wellenleiterradius	89
4.3.3	Einfluß der Schnittlänge auf den Reflexionsfaktor	91
4.4	Studien zum Reflexionsverhalten von Antennen mit praxisrelevanten Abmessungen	92
4.4.1	Reflexionsfaktoren für verschiedene Moden	92
4.4.2	Vergleich: vollständig helikaler - halbhelikaler Schnitt	93
4.4.3	Antenne mit Strahlaufteilung	95
5	Analyse azimuthaler Deformationen nach dem Hohlleiterspiegelkonzept	97
5.1	Anwendbarkeit der Randelementmethode bei der transversalen Wellenausbreitung	98
5.1.1	Nichtdeformierter Kreishohlleiter	98
5.1.2	Fehlerabschätzung bei Verwendung einer gemittelten Wellenzahl	100
5.2	Analyse der transversal deformierten Hohlleiterspiegel	102
5.2.1	Hohlleiterspiegel für die $TE_{7,3}$ -Mode	102
5.2.2	Hohlleiterspiegel für die $TE_{22,6}$ -Mode	104
5.3	Gesamtanalyse der $TE_{22,6}$ -Antenne	106
5.3.1	Analyse des Phasenkorrekturspiegels	106
5.3.2	Analyse des Ausgangsstrahls	109
6	Zusammenfassung	112
7	Anhang	113
A1	Leistungsnormierte Felder einiger Wellentypen	113
A2	Modale Entwicklung von magnetischen Stromdichten in Hohlleitern	116
A3	Analyse von Hohlleiterinhomogenitäten mit dem Mode-Matching-Verfahren	117
A4	Entwicklung einer Gaußschen Verteilung in Kreishohlleitermoden	119
A5	Einheitliche Beugungsfunktionen	121
A6	Analyse von Rechteckhohlleiter-Biegungen mit der Randelementmethode	123
A7	Einfluß des Kantenwinkels auf den Reflexionsfaktor beim offenen Kreishohlleiter	124
8	Literatur	126

Liste der verwendeten Symbole

Koordinaten

u, v, w	kartesische Gitterkoordinaten
x, y, z	kartesische Koordinaten
ρ, φ, z	zylindrische Koordinaten
r, s, t	Strahlkoordinaten des Gaußschen Strahls
ξ, η, ζ	Aperturkoordinaten eines Spiegels
s, Θ, Φ	lokale Kugelkoordinaten (Strahl-Kante)

Physikalische und mathematische Konstanten

c	Lichtgeschwindigkeit
Z_0	Freiraum-Wellenwiderstand
ε	Permittivität des Freiraums
μ	Permeabilität des Freiraums
e	Eulersche Zahl
i	imaginäre Einheit
$X_{m\nu}$	ν -te Nullstelle der Besselfunktion m -ter Ordnung
$X'_{m\nu}$	ν -te Nullstelle der abgeleiteten Besselfunktion m -ter Ordnung
γ	Eulersche Konstante
π	Kreiszahl

Variablen

a_n	Leistungsnormierte Amplitude der Hohlleiterwelle
D	Abstand zwischen zwei Spiegeln
f	Frequenz
$I^{e(m)}$	elektrischer (magnetischer) Linienstrom
k	Freiraumwellenzahl
m, ν	Azimutalindex, Radialindex der Kreishohlleitermode
N_n	Normierungskonstante des n -ten Wellentyps
R_0	Resonatorradius
R	Wellenleiterradius
R_c	Kaustikradius
R_x	Krümmungsradius eines Spiegels
$R(z)$	Phasenfrontradius des Gaußschen Strahls am Ort z
S	Eikonale der ebenen Welle
$w(z)$	Strahlradius des Gaußschen Strahls am Ort z
w_0	Strahltaile des stigmatischen Gaußschen Strahls
w_x, w_y	Strahltaillen des astigmatischen Gaußschen Strahls
V	Beugungsfunktionen nach GTD/UTD auf Beugungskegel
W	Beugungsfunktionen für beliebige Beobachtungsrichtung nach [Mic1]
t	Zeitvariable, Kurvenparameter
Z_n	transversaler Hohlleiterwellenwiderstand
β_n	axiale Ausbreitungskonstante der Hohlleiterwelle
η	Wirkungsgrad
κ_n	transversale Ausbreitungskonstante der Hohlleiterwelle

Symbolliste

λ	Freiraumwellenlänge
$\Psi(z)$	Phasenanomalie des Gaußschen Strahls am Ort z
ω	Kreisfrequenz

Vektoren

B	Magnetische Induktion
D	Verschiebungsflußdichte
E	elektrische Feldstärke
H	magnetische Feldstärke
J	elektrische Stromdichte
M	(äquivalente) magnetische Stromdichte
$\hat{\mathbf{e}}$	transversaler Einheitsvektor
\mathbf{e}_t	transversale elektrische Eigenfunktion der Hohlleiterwelle
$\hat{\mathbf{h}}$	$= \hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{e}}$
\mathbf{h}_t	transversale magnetische Eigenfunktion der Hohlleiterwelle
$\hat{\mathbf{n}}$	Normaleneinheitsvektor
\mathbf{r}	Abstandsvektor
$\hat{\mathbf{s}}$	Strahlvektor
$\hat{\mathbf{t}}$	Tangenteneinheitsvektor einer Kante

Matrizen

C	Topologiematrix
D	Diagonalmatrix
I	Einheitsmatrix
S	Streumatrix

Winkel

α	Steigungswinkel der helikalen Kante
γ	Winkel des Strahlvektors mit der Wandnormalen
θ_n	Spreizwinkel einer Hohlleitermode
Θ	Winkel zwischen Strahlvektor und Kantentangentenvektor
ψ_n	Brillouinwinkel einer Hohlleitermode
\mathcal{G}	stationärer Winkel
Φ	Winkel zwischen projiziertem Strahlvektor und Kantennormalenvektor

Mathematische Funktionen

$H_m^{(k)}(x)$	Hankelfunktion m -ter Ordnung k -ter Art
$J_m(x)$	Besselfunktion m -ter Ordnung
$J'_m(x)$	Abgeleitete Besselfunktion m -ter Ordnung
$\delta(x)$	Dirac-Funktion
$\text{sgn}(x)$	Vorzeichenfunktion
$\text{sinc}(x)$	$= \sin(x) \exp(ix) / x$

Symbole

δ_{mn}	Kronecker-Symbol
$\pm_{\varphi(z)}$	unteres/oberes Vorzeichen: Wellenausbreitung in positiver/negativer $\varphi(z)$ -Richtung

1 Einleitung

Millimeterwellen-Heizung zur Unterstützung der kontrollierten Kernfusion

Die kontrollierte Kernfusion ist eine zukünftige Methode zur effizienten Energieerzeugung durch Verschmelzung von Wasserstoffisotopen (Deuterium und Tritium) zu Heliumkernen. Die dabei erzeugten Neutronen tragen 80 % der entstehenden Energie und werden zur Brütung von Tritium aus Lithium und zur Wärmeauskopplung verwendet. Während der Vorrat fossiler und spaltbarer Brennstoffe zur Energieerzeugung begrenzt ist, sind die Elemente zur Nutzung der Kernfusion (Deuterium und Lithium) praktisch unbegrenzt verfügbar.

Eine technische Realisation der Kernfusion erfolgt durch Magnetfeldeinschluß von Plasmen in torusförmigen Magnetfeldkonfigurationen. Durch eine genügend hohe Energieeinschlußzeit von etwa 2 s, ausreichend hohe Teilchendichte (10^{14} cm^{-3}) und Aufheizung des Plasmas auf 10^8 K kann die Zündung, das heißt die selbständige Aufrechterhaltung des Zustands unter Energieabgabe erfolgen. Zur Erreichung solch hoher Temperaturen haben sich einige Zusatzheizverfahren etabliert, wie z.B. Neutralteilcheninjektion oder Hochfrequenzheizung. Letztere nutzt die hohe Absorption des Plasmas bei Resonanz der Ionen oder Elektronen bei der Zyklotronfrequenz im einschließenden Magnetfeld.

Die Heizung des Plasmas bei der Elektron-Zyklotron-Resonanzfrequenz (ECRH) erfordert die Einstrahlung von Hochleistungsmillimeterwellen (typischerweise 70 bis 280 GHz) in das Fusionsexperiment. Die benötigte Heizleistung hängt von der Größe des Experiments ab. So ist z.B. bei ITER (*International Thermonuclear Experimental Reactor*) eine ECRH-Leistung von 50 MW geplant. Diese Hochfrequenzheizung sollte zur ausreichenden Plasmaaufheizung im Dauerstrich zu Verfügung stehen und mit möglichst wenigen Einheiten erbracht werden, um die Kosten gering zu halten. Machbarkeitsstudien [Iat1] zeigen, daß konventionelle Gyrotronröhren mit einer Ausgangsleistung von 1 MW bzw. Gyrotrons mit koaxialem Innenleiter und Strahlaufteilung mit einer Dauerstrichleistung von 2 MW technisch realisierbar sind. Aus räumlichen Gegebenheiten müssen diese Quellen meist in großen Abständen zu den Fusionsexperimenten aufgebaut werden, so daß die Hochfrequenzleistung über weite Strecken verlustarm transportiert werden muß, bevor sie in das Plasma eingestrahlt werden kann.

In vielen Laboratorien finden Kernfusionstestexperimente statt, die die Bedingungen simulieren, unter denen ein Kernfusionsreaktor arbeiten soll. Bei diesen Experimenten sind die oben genannten Arbeitspunkte einzeln schon erreicht worden. Dabei konnte der erfolgreiche Einsatz der Elektron-Zyklotron-Resonanz-Heizung mit Gyrotrons in Tokamaks [Prat1] und Stellartoren [Erc1] gezeigt werden.

Hochleistungsmillimeterwellen-Erzeugung durch Gyrotrons mit quasi-optischen Wellentypwandlern

Gyrotrons sind Vakuumröhren, die durch Wechselwirkung von Hohlleiterwellen unter Grenzfrequenzbedingung mit in einem magnetischen Längsfeld gyrierenden Elektronen Hoch-

leistungsmillimeterwellen erzeugen. Sie benötigen eine Hochspannungsversorgung (80-90 kV) zur Beschleunigung des Elektronenhohlstrahls, ein starkes Magnetfeld (5.5 T für 140 GHz) zur Elektronenstrahlkompression und zur Erzeugung der erforderlichen Gyrationfrequenz.

In Bild 1-1 ist ein Gyrotron mit seitlicher Hochfrequenzaukoplung skizziert. Es zeigt die Vakuumröhre in dem Bohrloch eines supraleitenden Magneten dessen maximales Magnetfeld in der Mitte des Resonators liegt. Im Gegensatz zu Gyrotrons mit axialer Auskopplung können hier der Millimeterwellen-Ausgangsstrahl und der Kollektor getrennt voneinander optimiert werden. Weiterhin besteht bei axialer Auskopplung die Gefahr von gefangenen Moden durch mögliche Reflexionen der dem Kollektor nachfolgenden Transmissionskomponenten (Fenster, Durchmesserübergänge, Biegungen) [Nic1]. Bei lateraler Auskopplung hingegen kann das Fenster leicht geneigt werden, um den Einfluß von Fensterreflexionen zu reduzieren, und der Kollektor kann zur Wirkungsgraderhöhung vom Gyrotrongehäuse isoliert und mit negativer Spannung vorgespannt werden.

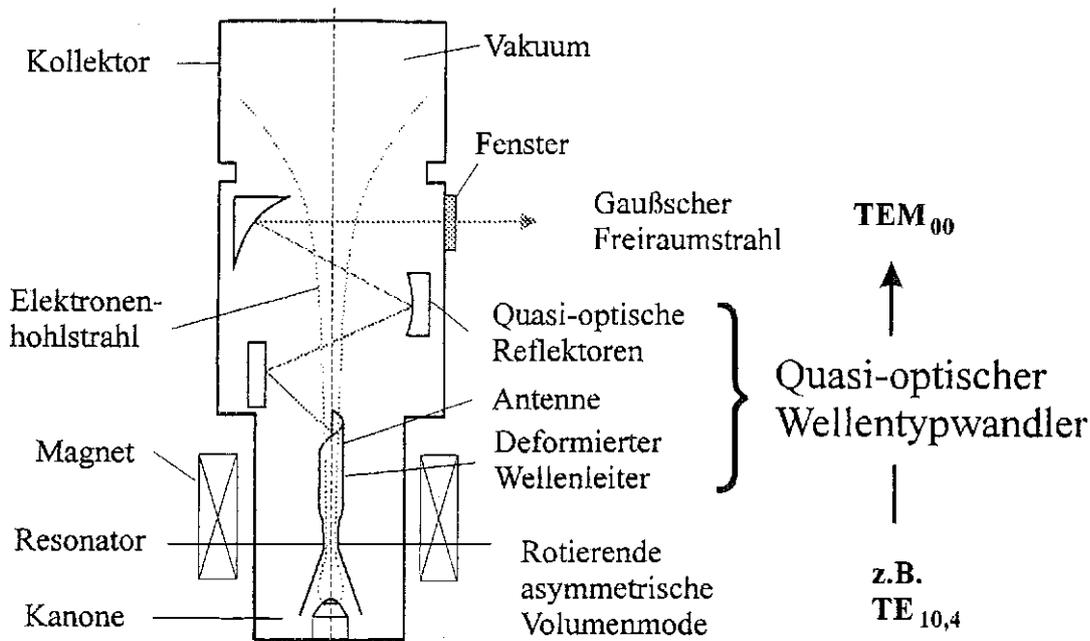


Bild 1-1: Skizze eines Gyrotrons mit seitlicher Auskopplung

Der Wechselwirkungsmechanismus im Gyrotronresonator ist z.B. in [Edg1] beschrieben. Ein am Emittor durch ein statisches elektrisches Feld erzeugter Elektronenhohlstrahl wird unter dem Einfluß eines ansteigenden Magnetfelds in der Kompressionszone fokussiert. Hierbei wird die transversale kinetische Energie der Elektronen zunehmend erhöht, die dann im Resonator an die Hohlleiterwelle abgegeben werden kann. Der Elektronenstrahl koppelt dabei vorzugsweise an rotierende transversal elektrische Moden, die sich nahe ihrer Grenzfrequenz befinden. Der Radius des Hohlstrahls sollte sich dabei möglichst am transversalen Maximum der Feldstärke des Wellentyps befinden.

Für die angeregte Hohlleitermode muß am Eingang des Resonators die Cutoff-Bedingung erfüllt sein, während am Ausgang eine möglichst konversionsarme Ausbreitungsbedingung vorliegen muß. Die teilweise Reflexion durch die Durchmesserergrößerung bewirkt dabei die Resonanzbedingung und bestimmt die Güte des Resonators.

Da sich die Arbeitsmode im Resonator nahe ihrer Grenzfrequenz befindet, ist ihre Ohmsche Dämpfung sehr groß. Technisch akzeptabel sind dabei Verlustleistungen von 2 bis 3 kW/cm², so daß der Resonatordurchmesser groß gegenüber der Freiraumwellenlänge gewählt werden muß ($2R_0/\lambda > 15$). Bei der angestrebten Ausgangsleistung von über 1 MW eignen sich daher Moden hoher Ordnung, deren maximale Leistungsdichte etwa im Bereich des halben Resonatorradius liegt (asymmetrische Volumenmoden z.B. TE_{22,6} bei 140 GHz, TE_{28,8} bei 170 GHz). Zusätzlich zu dieser Forderung muß der realisierbare Elektronenhohlstrahl und dessen Ankopplung an den Wellentyp in Betracht gezogen werden. In [Iat1] sind die Methoden zur Auswahl des optimalen Wellentyps zusammengefaßt. Dem Resonatorausgang schließt sich zunächst ein optimierter Übergang zu einem größeren Durchmesser (Uptaper) an, um die Mode konversionsarm in einen Zustand zu bringen, bei dem keine weitere Wechselwirkung mit dem Elektronenstrahl stattfindet. Zudem sind die Wandverluste um so geringer, je weiter die Mode von ihrer Grenzfrequenz entfernt ist.

Vor der lateralen Auskopplung der Hochfrequenzleistung muß die Welle geeignet gewandelt werden. Diese Aufgabe übernimmt der quasi-optische Wellentypwandler (Bild 1-1).

Wandlung von Gyrotron-Resonatormoden in transportfähige Wellentypen

Die Transformation der rotierenden Resonatormoden in transportfähige Wellentypen erfolgt durch einen quasi-optischen Wellentypwandler, der aus einer helikalen Aperturantenne und Reflektoren besteht. Zum Entwurf nutzt man vor allem das Brillouin-Konzept der Zerlegung der Moden in ebene Wellen. Danach reflektiert die Hohlleiterwand die Strahlen dieser ebenen Wellen unter wellentypabhängigen Winkeln. Bei verbesserten Wandlern erreicht man durch geeignete Deformation der Wand eine Fokussierung des Hohlleiterfeldes, das dann beugungsarm abgestrahlt werden kann [Den1, Den2, Pre1, Möb1]. Die Synthese der Deformationen können zum einen durch störungstheoretische Ansätze erfolgen, zum anderen eignen sich auch geometrisch-optische Verfahren. Eine ausführliche Darstellung erfolgt in Kapitel 2.3.

Die Phase des abgestrahlten Hochfrequenzfeldes muß noch korrigiert werden und anschließende Reflektoren beseitigen dann den Astigmatismus des Ausgangsstrahls. Dieser läßt sich dann außerhalb des Gyrotrons in eine konfokale Spiegelleitung oder in einen korrigierten Hohlleiter zum verlustarmen Transport der Leistung einkoppeln.

Die Realisierung der Hohlleiterdeformation ist besonders für hohe Frequenzen sehr kostenintensiv, da kleine Toleranzen eingehalten werden müssen. Zudem sind komplexe Werkstattmaschinenprogramme notwendig, um die komplizierten Strukturen in den Hohlleiter einzu-

arbeiten. Aus diesem Grund werden bei anderen Konzepten [Den3] nicht der Wellenleiter, sondern die Reflektoren hinsichtlich Wirkungsgraderhöhung optimiert.

Da der Wandler Bestandteil des Vakuumsystems der Röhre ist, unterliegt er Einschränkungen aufgrund geometrischer Gegebenheiten. Vor allem ist die axiale Länge des Wandlers, die im wesentlichen durch den gewählten Abstrahlwinkel (Brillouinwinkel) und somit durch den Hohlleiterdurchmesser bestimmt wird, von dem sich aufweitenden Elektronenstrahl begrenzt. Der maximale Durchmesser des Hohlleiters wird zudem durch den gegebenen Bohrlochdurchmesser des supraleitenden Magneten eingeschränkt. Beide technischen Einschränkungen erfordern einen möglichst kleinen Hohlleiterradius.

Analyse helikaler Aperturantennen von quasi-optischer Wellentypwandlern

Ein kleiner Wellenleiterradius erhöht die Gefahr von Reflexionen des Hochfrequenzfeldes am Hohlleiter-Freiraum-Übergang und kann somit zur Beeinträchtigung der Wechselwirkung im Resonator führen. Wie in [Bor1] gezeigt wird, kann bereits eine Reflexion der Hauptmode von etwa -20 dB den Gyrotronbetrieb stören. Weder eine qualitative noch eine quantitative Abschätzung der Reflexionen von helikalen Aperturantennen ist bisher erfolgt.

Es wird z.B. in [Wein1, Yee1] gezeigt, daß sich die Reflexionen allein als Kantenbeugungseffekte auffassen lassen. Berechnungen für einfache offene Hohlleiter ergeben, daß die Reflexionen in die anregende Mode bei Grenzfrequenzbedingungen sehr hoch sind und sehr schnell bei größer werdenden Abmessungen absinken. Weiterhin findet Modenkonversion statt, insbesondere in ausbreitungsfähige Wellentypen, die sich nahe der Grenzfrequenzbedingung befinden. Da die axiale Länge des Wandlers möglichst kurz sein soll, wird die Antenne nahe der Grenzfrequenz des Wellentyps betrieben (Brillouinwinkel $\psi = 70^\circ$). Daher ist ein Ziel dieser Arbeit, die zu erwartenden Reflexionen quantitativ zu bestimmen. Hierzu wird in Kapitel 3.4 ein asymptotisches Verfahren nach der Methode der äquivalenten Kantenströme vorgestellt, das mit Hilfe eines numerischen Verfahrens (MAFIA-Programm, Kapitel 3.2) verifiziert wird.

Um Beugungsverluste zu vermeiden, ist man dazu übergegangen, die Hohlleiterwelle vor der Abstrahlung von der helikalen Aperturantenne zu formen. Das in dieser Arbeit näher untersuchte geometrisch-optische Konzept der Hohlleiterspiegeldeformationen [Möb1] eignet sich vor allem für den Entwurf von kleinen Wandlerlängen. Eine feldtheoretische Analyse dieser optischen Methode ist bislang nicht erfolgt. Eine konventionelle Analyse z.B. mit Hilfe der Methode der gekoppelten Wellengleichungen ist hier nicht anwendbar (Kapitel 3.1). Wegen der großen Abmessungen des Wandlers und der nicht skalierbaren Deformationen stößt eine numerische dreidimensionale Analyse an Grenzen, die von heutigen Rechnern gesetzt werden.

In dieser Arbeit wird daher ein zweidimensionales Verfahren zur Analyse von azimuthalen Hohlleiterdeformationen vorgestellt. Hierbei können die transversalen Parameter des Ausgangsstrahls und der Wandlungswirkungsgrad bestimmt werden. Das Verfahren basiert dabei auf der Randlementmethode (Kapitel 3.3), deren Resultate in Kapitel 5 dargestellt sind.

2 Quasi-optische Wellentypwandler

Hochleistungsmillimeterwellen müssen von der Quelle zur Anwendung meist aus technischen Gründen über weite Strecken transportiert werden. Um Ohmsche Verluste gering zu halten, eignen sich zur Führung der Wellen überdimensionierte Hohlleiter oder Spiegelleitungen. Die verlustarmen Wellentypen dieser Leitungen sind vor allem Moden niedriger Ordnung.

In Gyrotronresonatoren hingegen koppeln am effektivsten Wellentypen hoher Ordnung, so daß diese geeignet in Moden niedriger Ordnung gewandelt werden müssen. Eine Übersicht der verschiedenen Verfahren zur Wandlung dieser Moden findet man in [Möb2]. Die aussichtsreichste Methode ist dabei die Wandlung in die Grundmode einer konfokalen Spiegelleitung.

Aufgrund der hohen Ausgangsleistungen und Kosten zur Erzeugung der Millimeterwellen ist ein möglichst hoher Wandlungswirkungsgrad notwendig. Wie in Kapitel 2.2 gezeigt wird, lassen sich Wirkungsgrade von 80 % mit relativ einfachen Mitteln erreichen. Die restliche Leistung geht durch die endlichen Reflektorabmessungen oder durch Kantenbeugung verloren. Verfahren zur Verminderung dieser Verluste werden in Kapitel 2.3 dargestellt.

Wie die Bezeichnung Quasi-Optik andeutet, handelt es sich hier um große Abmessungen der Bauteile im Vergleich zur Wellenlänge, bei denen die Beugung im Gegensatz zur reinen Optik eine entscheidende Rolle spielt. Dagegen basieren die meisten Verfahren zum Entwurf quasi-optischer Wellentypwandler auf geometrisch-optischen Prinzipien, die einen anschaulichen Einblick in die Funktionsweise bieten.

Mit Hilfe der geometrischen Optik lassen sich Wellentypwandler entwerfen, deren theoretischer Wirkungsgrad von etwa 80 % experimentell bestätigt wurde [Vla2, Den1]. Mit dieser Methode können auch verbesserte Wandler nach dem Innenspiegelkonzept entworfen werden.

Die Anwendung der physikalischen Optik liefert weitere Entwurfsrichtlinien zur Auslegung quasi-optischer Wellentypwandler. So können mit diesem Verfahren die Aperturbelegung und die Phasenänderung von nicht allzu stark gekrümmten Reflektoren bestimmt werden. Hiermit lassen sich auch Beugungsverluste durch endliche Aperturabmessungen auswerten.

Beide optischen Prinzipien sind jedoch ungeeignet zur Bestimmung von Kantenbeugungseffekten oder Reflexionen in den speisenden Hohlleiter. Diese Effekte können jedoch bei den hohen Forderungen an den Wirkungsgrad und der Empfindlichkeit des Wechselwirkungsmechanismus im Gyrotronresonator nicht außer Acht gelassen werden, so daß eine quantitative Auswertung und Abschätzung notwendig ist.

2.1 Geführte Wellen

Soll kohärente Strahlung im quasi-optischen Bereich über weite Distanzen transportiert werden, so muß sie geeignet geführt werden. Eine verlustarme Führung kann entweder in geschlossenen Hohlleitern oder in offenen Spiegelleitungen erfolgen. Anders als im freien Raum besitzen alle Leitungen ein diskretes charakteristisches Eigenwellenspektrum. Um die im Gyrotron erzeugte Hochfrequenzleistung am Ende der Leitung nutzen zu können, ist es in Hinblick auf Dispersionseffekte erforderlich, die Leitungen möglichst monomodig zu betreiben. Aufgrund räumlicher oder technischer Gegebenheiten muß die Geometrie der Transportleitungen oftmals geändert werden, so daß neue Eigenwellensysteme entstehen. Somit entsteht die Forderung, möglichst verlustarm von einem Eigenwellensystem in ein anderes zu koppeln. Die beiden Eigenwellensysteme des Kreishohlleiters und der Spiegelleitung werden nachfolgend näher beschrieben.

2.1.1 Eigenwellen im Kreishohlleiter

Wegen des separierbaren Koordinatensystems lassen sich Eigenwellen im Hohlleiter mit Kreisquerschnitt analytisch leicht berechnen. Die Maxwell'schen Gleichungen können unter Annahme von linearen, isotropen, homogenen und rückwirkungsfreien Medien und unter Ausschluß von Quelltermen entkoppelt werden. Weiterhin wird eine harmonische Zeitabhängigkeit $\exp(i\omega t)$ vorausgesetzt. Somit gelten für die elektrische Feldstärke \mathbf{E} und die magnetische Feldstärke \mathbf{H} die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{V} &= k^2 \mathbf{V} & \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0 \\ \text{mit} \quad \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} & k &= \frac{\omega}{c} \end{aligned} \quad (2-1)$$

Hierin bedeuten k die Freiraumwellenzahl, ω die Kreisfrequenz, und c die Lichtgeschwindigkeit. Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten läßt sich die z-Komponente des Doppelrotationsterms wie folgt angeben:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{V})_z = \frac{\partial}{\rho \partial \rho} \left(\rho \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \right) - \frac{\partial}{\rho \partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \quad (2-2)$$

Beachtet man die Quellenfreiheit der Felder,

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial}{\rho \partial \rho} (\rho V_\rho) + \frac{\partial}{\rho \partial \varphi} V_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} V_z = 0 \quad (2-3)$$

so lässt sich (2-2) folgendermaßen schreiben:

$$(\text{rotrot } \mathbf{V})_z = -\frac{\partial}{\rho \partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial^2 V_z}{\rho^2 \partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} = -\Delta V_z \quad (2-4)$$

Man erhält somit in Verbindung mit (2-1) die skalare Wellengleichung für die axialen Komponenten in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \Delta E_z + k^2 E_z &= 0 \\ \Delta H_z + k^2 H_z &= 0 \end{aligned} \quad (2-5)$$

Diese partielle Differentialgleichung lässt sich mit Hilfe des Separationsansatzes lösen, und man erhält für die Eigenwellen im Kreishohlleiter:

$$\begin{aligned} E_z &= A_E J_m(\kappa \rho) e^{i(\omega t \pm_z \beta z \pm_\varphi m \varphi)} \\ H_z &= A_H J_m(\kappa \rho) e^{i(\omega t \pm_z \beta z \pm_\varphi m \varphi)} \\ \beta &= \sqrt{k^2 - \kappa^2} \end{aligned} \quad (2-6)$$

Hierin ist m die Ordnung der Besselschen Funktion $J_m(x)$ und ist wegen der Forderung der Periodizität ganzzahlig zu wählen, und A ist zunächst eine beliebige Konstante. Die Separationskonstante κ wird durch die Randbedingung der verschwindenden tangentialen elektrischen Feldstärke auf dem Wellenleiterrand bestimmt und hat abzählbar unendlich viele Lösungen, die im folgenden mit dem Index ν unterschieden werden. Das Vorzeichen \pm_z gibt die axiale Ausbreitungsrichtung und das Vorzeichen \pm_φ bestimmt die Rotationsrichtung der Welle (untere Vorzeichen: Ausbreitung in positiver Koordinatenrichtung). Die Transversalkomponenten erfüllen die skalare Wellengleichung nicht. Sie lassen sich allerdings aus den Axialkomponenten ableiten:

$$\begin{aligned} E_\rho (k^2 - \beta^2) &= \pm_z i \beta \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - i \omega \mu \frac{\partial H_z}{\rho \partial \varphi} \\ H_\rho (k^2 - \beta^2) &= \pm_z i \beta \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + i \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\rho \partial \varphi} \\ E_\varphi (k^2 - \beta^2) &= \pm_z i \beta \frac{\partial E_z}{\rho \partial \varphi} + i \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \\ H_\varphi (k^2 - \beta^2) &= \pm_z i \beta \frac{\partial H_z}{\rho \partial \varphi} - i \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \end{aligned} \quad (2-7)$$

Da die azimutale elektrische Feldstärke auf dem Rand $\rho=R$ verschwinden soll, lassen sich die Eigenwerte κ wie folgt aus den Nullstellen der Besselfunktionen, bzw. aus deren Ableitungen $X_{m\nu}$, bzw. $X'_{m\nu}$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \text{TM - Moden:} \quad & J_m(\kappa_n^E R) = 0 & \kappa_n^E &= \frac{X_{m\nu}}{R} \\ \text{TE - Moden:} \quad & J'_m(\kappa_n^H R) = 0 & \kappa_n^H &= \frac{X'_{m\nu}}{R} \end{aligned} \quad (2-8)$$

Hierin steht der Index n für eine Kombination der Indizes m und ν . Für die Anwendung der Eigenwellenentwicklung ist es günstig, die Wellentypen bezüglich ihrer Leistung zu normieren, so daß die Moden in der Transversalebene ein Orthonormalsystem bilden (Anhang A1).

2.1.2 Zerlegung der Kreishohlleitermoden in ebene Wellen

Ein hilfreiches Konzept in der Wellenleitertheorie ist die Darstellung von Hohlleitermoden durch Überlagerung ebener Wellen. Vor allem für überdimensionierte Hohlleiter eignet sich dieses Konzept zur Auslegung von Wellentypwandlern innerhalb geometrisch optischer Grenzen. Weiterhin bietet diese asymptotische Darstellung die Grundlage zur Anwendung der geometrischen Beugungstheorie. Dieses Konzept soll hier dargestellt werden.

Die Komponenten der TE-Moden in Zylinderkoordinaten lassen sich aus (2-7) mit der Bedingung $I'_z=0$ bestimmen.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= a_n^{II} \frac{\sqrt{Z_n^{II}}}{N_n^H} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\pm_\varphi m}{\kappa_n^H \rho} J_m(\kappa_n^H \rho) \\ i J'_m(\kappa_n^H \rho) \\ 0 \end{array} \right\} e^{i(\pm_\varphi m \varphi \pm_z \beta_n^H z)} \\ \mathbf{H} &= a_n^{II} \frac{\sqrt{Y_n^{II}}}{N_n^H} \left\{ \begin{array}{c} \pm_z i J'_m(\kappa_n^H \rho) \\ \mp_\varphi \pm_z m \\ \frac{\kappa_n^H}{\rho} J_m(\kappa_n^H \rho) \\ \frac{\kappa_n^{II}}{\beta_n^{II}} J_m(\kappa_n^{II} \rho) \end{array} \right\} e^{i(\pm_\varphi m \varphi \pm_z \beta_n^H z)} \end{aligned} \quad (2-9)$$

Hierin bedeutet N_n eine Normierungskonstante (A1-6), so daß das halbe Betragsquadrat der Amplitude a_n der transportierten Leistung entspricht, Z_n ist der transversale Wellenwiderstand und Y_n der transversale Wellenleitwert (A1-3). Der hochgestellte Index bezeichnet dabei eine TE-Mode (H) oder eine TM-Mode (E). Die harmonische Zeitabhängigkeit wurde hier unterdrückt. Durch eine Integraldarstellung der Besselfunktion [Sie1]:

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m\phi - x \sin \phi)} d\phi \quad (2-10)$$

lassen sich die Felder mit Hilfe der Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} \frac{2m}{x} J_m(x) &= J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) \\ 2J'_m(x) &= J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) \end{aligned} \quad (2-11)$$

und des Eulerschen Theorems in ein Spektrum ebener Wellen zerlegen:

$$\mathbf{E} = \frac{\alpha_n^H \sqrt{Z_n^H}}{2\pi N_n^H} e^{i(\pm_\varphi m\varphi \pm_z \beta_n^H z)} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{Bmatrix} \pm_\varphi \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{Bmatrix} e^{i(m\phi - \rho \kappa_n^H \sin \phi)} d\phi \quad (2-12)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\alpha_n^H \sqrt{Y_n^H}}{2\pi N_n^H} e^{i(\pm_\varphi m\varphi \pm_z \beta_n^H z)} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{Bmatrix} \pm_z \sin \phi \\ \mp_\varphi \pm_z \cos \phi \\ \kappa_n^H / \beta_n^H \end{Bmatrix} e^{i(m\phi - \rho \kappa_n^H \sin \phi)} d\phi$$

Die Integrale lassen sich asymptotisch, d.h. für die später interessierenden Werte von $\kappa\rho$, mit Hilfe der Methode der stationären Phase lösen [Jon1]. Die Phase des Integranden wird stationär für $\cos \vartheta_n^H = m / \kappa_n^H \rho$, und man erhält somit für TE-Moden die ebene Welle:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\alpha_n^H \sqrt{Z_n^H}}{N_n^H} \frac{\hat{\mathbf{e}}_n^H}{\sqrt{2\pi \kappa_n^H \rho \sin \vartheta_n^H}} e^{i(-\rho \kappa_n^H \sin \vartheta_n^H + m(\vartheta_n^H \pm_\varphi \varphi) \pm_z \beta_n^H z + \frac{\pi}{4})} \\ \mathbf{H} &= \frac{\alpha_n^H \sqrt{Z_n^H}}{Z_0 N_n^H} \frac{\hat{\mathbf{h}}_n^H}{\sqrt{2\pi \kappa_n^H \rho \sin \vartheta_n^H}} e^{i(-\rho \kappa_n^H \sin \vartheta_n^H + m(\vartheta_n^H \pm_\varphi \varphi) \pm_z \beta_n^H z + \frac{\pi}{4})} \end{aligned} \quad (2-13)$$

Hierin sind die Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten gegeben durch:

$$\hat{\mathbf{e}}_n^{E,H} = \begin{Bmatrix} \pm_\varphi \cos \vartheta_n^{E,H} \\ \sin \vartheta_n^{E,H} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \hat{\mathbf{h}}_n^{E,H} = \begin{Bmatrix} \pm_z \sin \vartheta_n^{E,H} \frac{\beta_n^{E,H}}{k} \\ \pm_z \mp_\varphi \cos \vartheta_n^{E,H} \frac{\beta_n^{E,H}}{k} \\ \frac{\kappa_n^{E,H}}{k} \end{Bmatrix} \quad (2-14)$$

Durch eine analoge Betrachtung, oder auch durch Anwendung des Dualitätsprinzips [Bal1], erhält man die Felder für TM-Moden:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\alpha_n^E Z_0}{\sqrt{Z_n^E N_n^E}} \frac{\hat{\mathbf{h}}_n^E}{\sqrt{2\pi\kappa_n^E \rho \sin \vartheta_n^E}} e^{i\left(-\rho\kappa_n^E \sin \vartheta_n^E + m(\vartheta_n^E \pm \varphi) \pm_z \beta_n^E z + \frac{\pi}{4}\right)} \\ \mathbf{H} &= -\frac{\alpha_n^E}{\sqrt{Z_n^E N_n^E}} \frac{\hat{\mathbf{e}}_n^E}{\sqrt{2\pi\kappa_n^E \rho \sin \vartheta_n^E}} e^{i\left(-\rho\kappa_n^E \sin \vartheta_n^E + m(\vartheta_n^E \pm \varphi) \pm_z \beta_n^E z + \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned} \quad (2-15)$$

Man erkennt, daß die gefundenen Ausdrücke für die Felder von TE- (2-13) und TM-Moden (2-15) sehr ähnlich sind, so daß die nachfolgenden Betrachtungen für beide Wellenarten gültig sind, wobei auf eine wellentypabhängige Indizierung n, E, H verzichtet wird.

Für einen festen Abstand ρ ist es hiermit möglich, die Felder lokal durch ebene Wellen zu repräsentieren, wobei das Eikonal [Born1] durch

$$S(\mathbf{r}) = -\frac{\kappa}{k} \rho \sin \vartheta + \frac{m}{k} (\vartheta \pm \varphi) \pm_z \frac{\beta}{k} z + \frac{\pi}{4k} \quad (2-16)$$

gegeben ist, woraus sich der Strahlvektor berechnen läßt:

$$\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{h}} = -\nabla S(\mathbf{r}) \quad (2-17)$$

Hiermit lassen sich einige charakteristische Strahleigenschaften der Hohlleitermode diskutieren. Für den Radius

$$\rho = R_c = \frac{m}{\kappa} \quad (2-18)$$

verschwindet wegen $\sin \vartheta = 0$ die radiale Komponente des Strahls, das heißt die Strahlen tangieren einen Kreiszyylinder mit dem Radius R_c , und somit bildet in geometrisch-optischer Betrachtung die Hohlleitermode eine kreiszylindrische Kaustik (Bild 2-1) [Vla4].

Unterschreitet der Radius ρ den Kaustikradius R_c , so wird die azimutale Komponente der elektrischen Feldstärke in (2-13) imaginär, was mit der Darstellung durch Besselfunktionen (2-9) nicht konsistent ist. Dies läßt sich korrigieren, indem man einen Phasensprung von 90° auf der Kaustik zuläßt (z.B. [Bal1]). Allerdings verliert spätestens hier die asymptotische Lösung ihre Gültigkeit zur Beschreibung des Hohlleiterfeldes. Weiterhin sieht man, daß das elektrische Feld für einen großen Radius $\rho \gg R$ azimutal polarisiert ist.

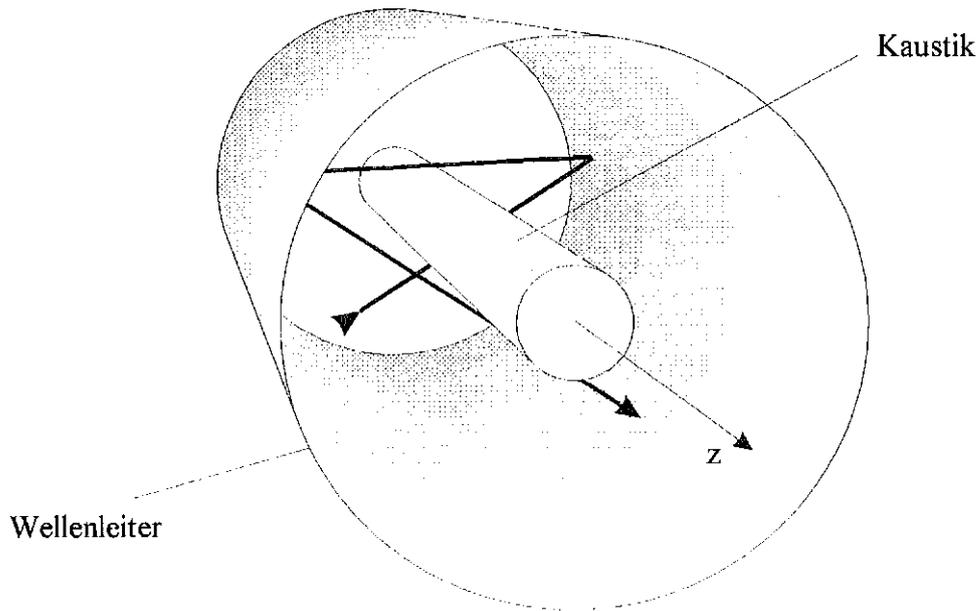


Bild 2-1: Strahldarstellung einer asymmetrischen Mode im Kreishohlleiter

Der Winkel ϑ auf dem Wellenleiterrand entspricht dem sogenannten Spreizwinkel θ_n zwischen dem in die Ebene $z = \text{const}$ projizierten Strahl und der Hohlleiterwand (Bild 2-2):

$$\cos \theta_n = \frac{m}{X_{m\nu}} \quad (2-19)$$

Projiziert man den Strahl auf eine Ebene $\varphi = \text{const}$, so ergibt sich der Brillouinwinkel ψ_n zwischen dem Strahl und der Hohlleiterachse:

$$\sin \psi_n = \frac{\kappa_n}{k} \quad (2-20)$$

Damit lassen sich die wellentypabhängigen Vektoren auf dem Hohlleiterrand in Zylinderkoordinaten in Abhängigkeit der definierten Winkel darstellen:

$$\hat{\mathbf{e}}_n = \begin{Bmatrix} \pm_\varphi \cos \theta_n \\ \sin \theta_n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \hat{\mathbf{h}}_n = \begin{Bmatrix} \pm_z \sin \theta_n \cos \psi_n \\ \pm_z \mp_\varphi \cos \theta_n \cos \psi_n \\ \sin \psi_n \end{Bmatrix} \quad \hat{\mathbf{s}}_n = \begin{Bmatrix} \sin \theta_n \sin \psi_n \\ \mp_\varphi \cos \theta_n \sin \psi_n \\ \mp_z \cos \psi_n \end{Bmatrix} \quad (2-21)$$

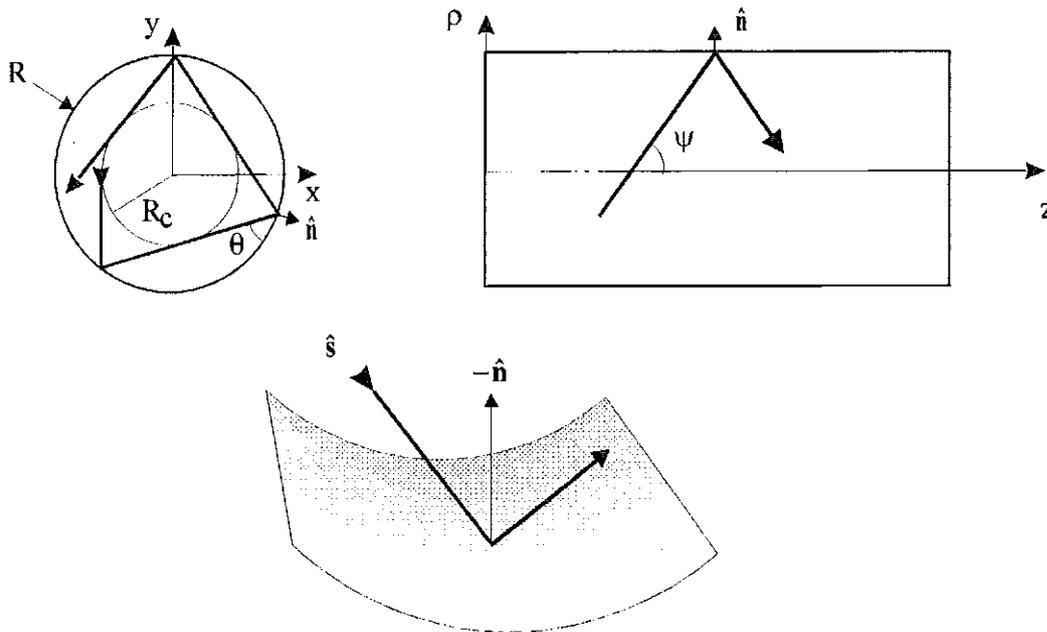


Bild 2-2: Zur Definition der Winkel eines Wellentyps im Kreishohlleiter

2.1.3 Grundwelle einer konfokalen Spiegelleitung

Der Ansatz zur Lösung der Eigenwellen in offenen Systemen unterscheidet sich grundlegend von dem in geschlossenen Systemen, da die Randbedingungen sehr komplex sein können. Eine allgemeine Lösung für eine Leitung mit flach sphärisch gekrümmten Spiegeln kann aufgrund der Periodizität mit Hilfe einer homogenen Integralgleichung gefunden werden, die sich aus der physikalischen Optik herleiten läßt:

$$F(x, y) = \mu \iint_s F(\xi, \eta) K(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2-22)$$

Hierin beschreibt $F(x, y)$ die zur Ausbreitungsrichtung transversale Feldgröße auf der Spiegelapertur, die auf jedem Spiegel bis auf einen konstanten Faktor gleich sein soll. Der Kern des Integrals $K(x, y, \xi, \eta)$ beschreibt dabei die Ausbreitung des Wellenfeldes unter Berücksichtigung der Phasenänderung des Quellspiegels. Der Eigenwert μ trägt den Beugungsverlusten aufgrund der endlichen Aperturabmessungen Rechnung. Dieser sollte bei einer verlustarmen Leitung möglichst groß sein, was Grundmoden konfokal angeordneter Spiegel sehr gut erfüllen. Wie in [Gou1] gezeigt wird, ist die Verteilung der fundamentalen Eigenlösung von konfokalen Spiegeln in sehr guter Näherung Gauß-förmig.

Gaußsche Grundmode

Im Falle großer Aperturabmessungen entspricht $F(x, y)$ der Gaußverteilung, wenn man für den Kern eine Fresnel-Näherung vornimmt, was für große Spiegelabstände D gerechtfertigt ist.

$$K(x, y, \xi, \eta) = \frac{i k e^{-i k r_{pq}}}{2\pi r_{pq}} e^{\frac{i}{2}(p(x,y)+p(\xi,\eta))} \quad (2-23)$$

$$k r_{pq} = k \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \approx k(z-\zeta) + \frac{k(x-\xi)^2}{2(z-\zeta)} + \frac{k(y-\eta)^2}{2(z-\zeta)}$$

Hierin ist r_{pq} der Betrag des Abstandsvektors (Bild 2-3), und $p(x,y)$ beschreibt die Phasenkorrektur der Spiegel. Die Grundmode des Gaußschen Freiraumstrahls erhält man aus der Lösung der paraxialen Wellengleichung. Der Betrag der elektrischen Feldstärke läßt sich wie folgt darstellen:

$$E(r, s, t) = E_0 \frac{w_0}{w(s)} e^{-\frac{r^2+t^2}{w^2(s)} - i k \frac{r^2+t^2}{2R(s)} - i k s + i \Psi(s)} \quad (2-24)$$

Hierin sind die Strahlparameter (2-25) durch den Tailenradius w_0 bestimmt:

$$w^2(s) = w_0^2 \left(1 + \left(\frac{2s}{k w_0^2} \right)^2 \right)$$

$$R(s) = s \left(1 + \left(\frac{k w_0^2}{2s} \right)^2 \right) \quad (2-25)$$

$$\Psi(s) = \arctan \frac{2s}{k w_0^2}$$

Setzt man für $F(\xi, \eta)$ den Betrag der Feldstärke unter Berücksichtigung der Transformation

$$\xi = r \cos \gamma \quad \eta = t \quad \zeta = \left(s - \frac{D}{2} \right) \cos \gamma \quad (2-26)$$

in die Integralgleichung ein, so wird diese erfüllt, wenn die flach sphärisch gekrümmten Spiegel die Phasenkorrektur

$$p(x, y) = k \left(\frac{x^2}{R_x} + \frac{y^2}{R_y} \right)$$

$$p(\xi, \eta) = k \left(\frac{\xi^2}{R_\xi} + \frac{\eta^2}{R_\eta} \right) \quad (2-27)$$

erzeugen, wobei die Krümmungsradien und w_0 wie folgt zu wählen sind:

$$R_{\xi} = R_x = \frac{D}{2} \cos \gamma \qquad R_{\eta} = R_y = \frac{D}{2 \cos \gamma} \qquad w_0 = \sqrt{\frac{2D}{k}} \qquad (2-28)$$

Man erhält somit elliptisch geformte Spiegel. Für eine im Hinblick auf Beugungsverluste und räumliche Gegebenheiten optimierte Spiegelleitung ist die Strahltaile der Grundmode somit festgelegt.

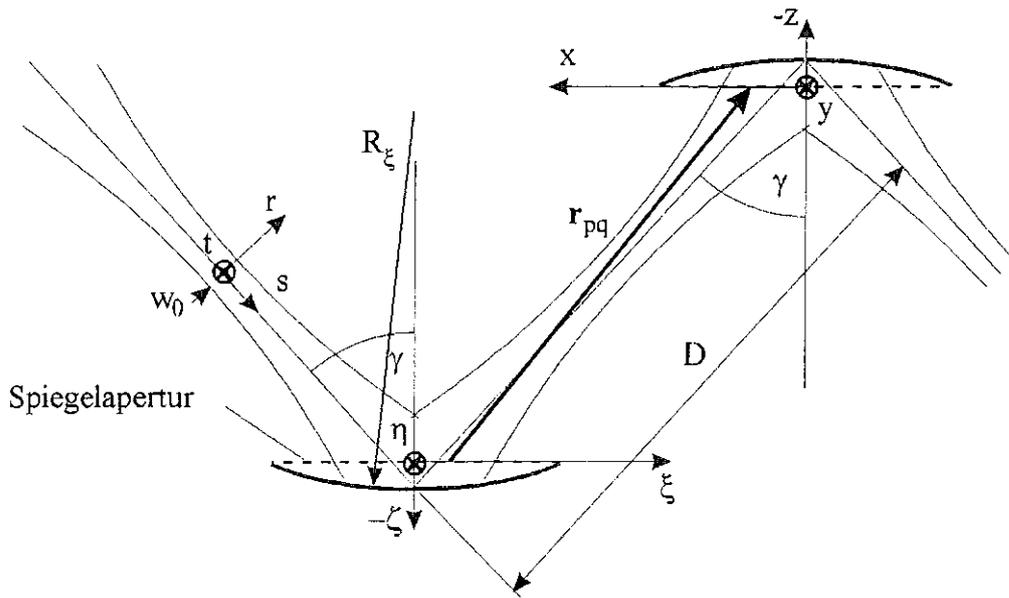


Bild 2-3: Geometrie und Koordinatensystem einer Spiegelleitung

2.2 Konventioneller quasi-optischer Wellentypwandler

Der hier betrachtete quasi-optische Wellentypwandler hat die Aufgabe, eine im Gyrotron-resonator erzeugte Kreishohlleitermode in einen linear polarisierten, stigmatischen Gaußschen Strahl zu wandeln. Hierbei handelt es sich um die in Kapitel 2.1.3 beschriebene Grundwelle einer Spiegelleitung. Ist die Hohlleitermode symmetrisch (Azimutalindex $m=0$), so kann es vorteilhaft sein, in eine Gaußsche Mode höherer Ordnung zu wandeln [Vla1]. Da dieser Wellentyp nur bei Gyrotrons mit niedriger Ausgangsleistung verwendbar ist, wird dieser Wandler hier nicht behandelt.

Somit werden nur die asymmetrischen, rotierenden Kreishohlleitermoden und deren Wandlung beschrieben, wie sie in Hochleistungs-gyrotrons angeregt werden.

2.2.1 Funktionsprinzip

Ein konventioneller Wellentypwandler besteht aus einer abstrahlenden helikalen Apertur-antenne, einem Reflektor zur Phasenkorrektur der Hohlleitermode sowie ein bis zwei Reflektoren zur Beseitigung des Astigmatismus [Vla2].

Helikale Aperturantenne

Zur Erklärung der Funktion eignet sich die in Kapitel 2.1.2 behandelte Darstellung der Kreishohlleitermoden als Strahlen ebener Wellen. Diese Strahlen beschreiben bei der Ausbreitung eine polygonale Helix um eine kreiszylindrische Kaustik, deren Radius durch Gleichung (2-18) gegeben ist. Man erkennt, daß für symmetrische Moden die Kaustik mit der Hohlleiterachse zusammenfällt und daß für sogenannte Whispering-Gallery-Moden ($m \gg 1$, $\nu=1,2$) sich die Kaustik nahe dem Wellenleiterradius befindet. Für die im Gyrotron verwendeten asymmetrischen Volumenmoden gilt meist ein Verhältnis $R/R_c \approx 2$.

Schneidet man den Wellenleiter bei $\varphi = \text{const}$ auf und wickelt ihn in einer Ebene ab, so bilden sich aus den Reflexionspunkten eines Strahls Parallelegramme (Bild 2-4).

Da die Strahlen auf der Hohlleiterwand gleichverteilt sind und dieselbe Richtung haben, sieht man leicht ein, daß alle Strahlen genau einmal auf dem Parallelogramm $\overline{P_1 P_2 P_3 P_4}$ auftreffen und reflektiert werden. Schneidet man ein solches Viereck aus der Hohlleiterwand, so würde in geometrisch-optischer Näherung die gesamte Hochfrequenzleistung unter dem Winkel $\cos \gamma = \hat{s} \cdot \hat{\rho}$ (2-21) zur Wellenleiternormalen abgestrahlt.

Wegen der homogenen Verteilung der Strahlen reflektieren jedoch alle flächengleiche Parallelegramme mit der Grundseite $\overline{P_1 P_2}$ und der Höhe h alle Strahlen genau einmal.

Zur Abstrahlung eignet sich vor allem das Parallelogramm $\overline{P_1 P_2 P_3' P_4'}$ mit der Schnittkante $\varphi = \text{const}$, da hierbei die Änderung des Abstrahlwinkels γ in axialer Richtung minimal ist und somit die nachfolgenden Reflektoren einfacher entworfen werden können.

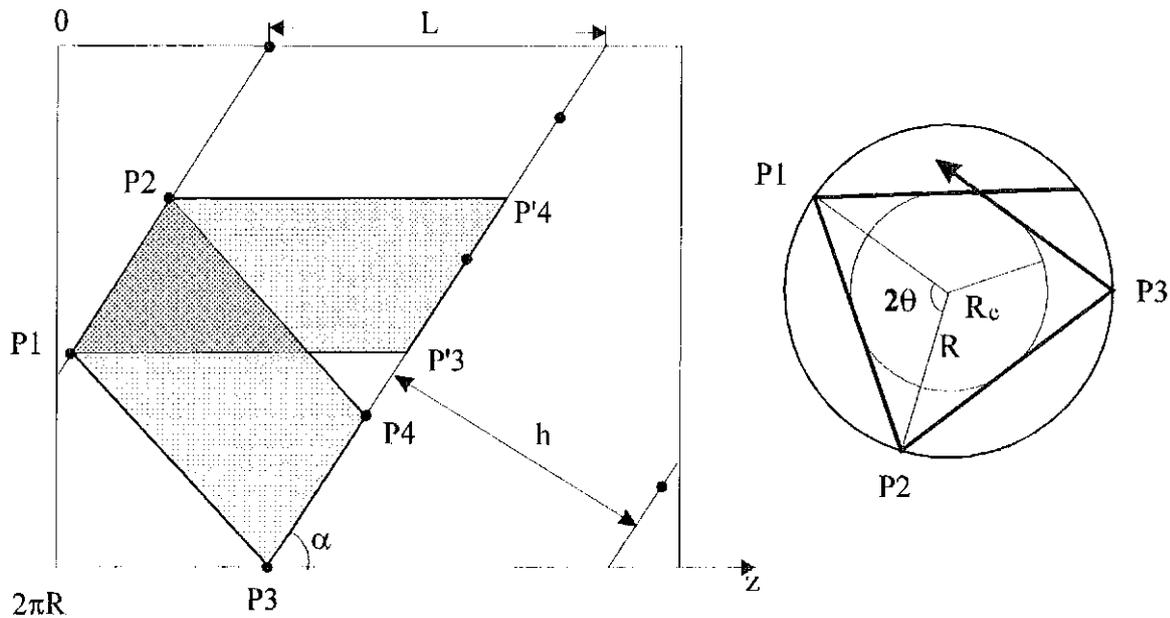


Bild 2-4: Abwicklung des Wellenleiters in eine Ebene

Der konstante Schnittwinkel α , der die helikale Schnittkante in Form einer Schraubenlinie ergibt, läßt sich aus dem Verhältnis der Bogenlänge $2\theta R$ und der räumlichen Länge des Strahls zwischen zwei Reflexionspunkten berechnen. Letztere erhält man aus der transversalen Länge des Strahls zwischen zwei Reflexionspunkten $2\sqrt{R^2 - R_c^2}$ multipliziert mit dem Kotangens des Brillouinwinkels ψ .

$$\cot \alpha = \frac{\sin \theta}{\theta} \cot \psi \quad (2-29)$$

Die Länge der axialen Schnittkante L ergibt sich somit wie folgt:

$$L = 2\pi R \cot \alpha \quad (2-30)$$

Die Länge ist somit abhängig vom anregenden Wellentyp und vom Wellenleiterdurchmesser. Eine dreidimensionale Ansicht des so aufgeschnittenen Wellenleiters zeigt Bild 2-5. Eine Variante der dargestellten Antenne ist der vollständig helikale Schnitt, so daß die beugende Kante bei $\varphi = \text{const} + 2\theta$ entfällt.

In Bild 2-5 ist bei $\varphi = \text{const}$ die Aperturfläche angedeutet, die z.B. in [Möb2] zur Berechnung der Kantenlänge L mit Hilfe der physikalischen Optik herangezogen wird, die mit (2-30) sehr gut übereinstimmt.

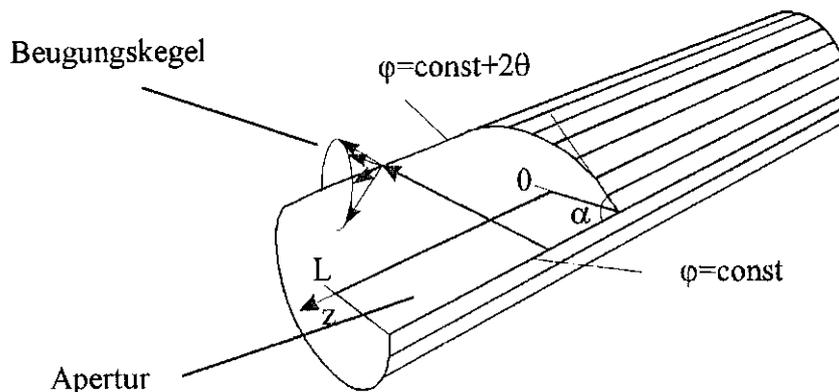


Bild 2-5: Dreidimensionale Darstellung der (halb-)helikalen Aperturantenne

Reflektoren zur Formung des Gaußschen Strahls

Zur Einkopplung in eine Spiegelleitung müssen die austretenden Strahlen zu einem linear polarisierten stigmatischen Gaußschen Strahl gewandelt werden. Bei nicht allzu großen Krümmungen, das heißt kleinen Divergenzwinkeln, lassen sich die beiden Strahlebenen getrennt behandeln. Da für den Gaußschen Strahl ähnliche Abbildungsgleichungen wie in der Strahlenoptik gelten, erhält man einen stigmatischen Gaußschen Strahl aus einem astigmatischen durch entsprechende Wahl der Krümmungsradien der Reflektoren.

Die Aufgabe einen astigmatischen Gaußschen Strahl aus dem Strahlungsfeld der Antenne zu bilden, übernimmt dabei ein spezieller phasenkorrigierender Spiegel (Bild 2.6). Dieser muß die lineare Phasenvariation entlang der Kaustik $\rho = R_c$ abwickeln, so daß in einem Fokus F eine ebene Phasenfront vorliegt. Die Spiegelkontur stellt somit eine spezielle Bi-Evolvente zweier Kreise dar, wobei ein Kreis zu einem Punkt entartet ist. Aufgrund der engen Verwandtschaft zur Ellipse wird diese Kontur auch Quasi-Ellipse genannt.

Die Aufgabe des quasi-elliptischen Spiegels ist es, die Strahlen mit der gleichen optischen Weglänge C zu fokussieren.

$$\Theta_1 R_c + d_1(\Theta_1, \Theta_2) + d_2(\Theta_1, \Theta_2) = C \quad (2-30)$$

(2-30) ist eine implizite Gleichung für die Kurve des Spiegels mit den freien Parametern F_x, F_y und G in Abhängigkeit von Θ_1 und Θ_2 , die sich mit Hilfe elementarer Geometrie nach dem Winkel Θ_2 auflösen läßt.

Die Anwendung bi-evolventer Spiegel auf offene Kreishohlleiter findet man in [Vla3], die ersten Vorschläge zu quasi-elliptischen Spiegeln zur Fokussierung auf einen Punkt in [Möb3].

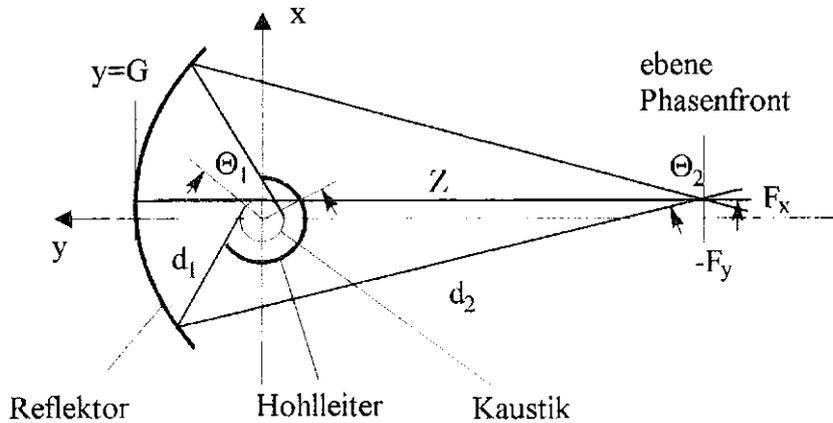


Bild 2-6: Quasi-elliptischer Reflektor zur Formung eines Gaußschen Strahls

Die Intensitätsverteilung im fokalen Punkt erhält man aus dem Wegquotienten d_2/d_1 . Für $F_x=R_c$ ist dieses Verhältnis für den Zentralstrahl Z am größten und man erhält einen leichten Randabfall an den Reflektorenden, was sich wirkungsgraderhöhend auswirkt.

2.2.2 Wirkungsgrad

Zur Abschätzung des Wirkungsgrads muß der Leistungsanteil der Gaußschen Grundmode einer gegebenen Feldverteilung gleicher Phase bestimmt werden. Für die Wirkungsgradberechnung eines astigmatischen Gaußschen Strahls eignet sich hierzu (2-31).

$$\eta(w_x, w_y) = \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\rho_{cop}(x, y)} g(x, y) dx dy \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dx dy} \quad (2-31)$$

Hierin ist $g(x,y)$ die leistungsnormierte transversale Leistungsdichte des Gaußschen Strahls und ist gegeben durch (2-32). Die Funktion $p(x,y)$ ist dabei z.B. die Leistungsdichte auf der Apertur. Der Index *cop* soll dabei besagen, daß nur der zum Gaußschen Strahl kopolare Anteil zum Wirkungsgrad beiträgt.

$$g(x, y) = \frac{2}{\pi w_x w_y} e^{-2\left(\frac{x}{w_x}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{w_y}\right)^2} \quad (2-32)$$

Der Wirkungsgrad ist noch abhängig von den Parametern w_x und w_y , die unter gewissen Einschränkungen frei wählbar sind, so daß hierdurch der Wirkungsgrad maximiert werden kann.

Für den quasi-optischen Wellentypwandler läßt sich der Gesamtwirkungsgrad aus der transversalen und der axialen Verteilung getrennt berechnen. In axialer Richtung wird dabei eine Gleichverteilung angenommen und man erhält einen Wirkungsgrad von etwa 88 %. In der transversalen Ebene ist die Verteilung von den Parametern der Reflektordistanz und der Lage des fokalen Punktes abhängig. In dieser Ebene sind Wirkungsgrade bis zu 91 % realisierbar und experimentell überprüft worden [Möb3].

Der sich somit ergebende Gesamtwirkungsgrad von nur 80 % ist für die Anwendung in Hochleistungsgyrotrons nicht tolerierbar, so daß Methoden zur Verminderung der Beugungsverluste angewendet werden müssen, die im nächsten Kapitel dargestellt werden.

2.3 Verbesserte quasi-optische Wellentypwandler

Im letzten Kapitel wurde gezeigt, daß der Wirkungsgrad zur Wandlung einer asymmetrischen Hohlleitermode in die Grundmode des Gaußschen Freiraumstrahls bei konventioneller Bauweise nur rund 80 % beträgt. Zeitgleich zu dieser Arbeit wurden von verschiedenen Autoren an Konzepten zur Verbesserung des Wirkungsgrades gearbeitet. Die wichtigsten Konzepte sollen im folgenden diskutiert werden.

2.3.1 Antenne mit periodischen Wanddeformationen

Zur Erzielung einer Gauß-ähnlichen Amplitudenverteilung auf der strahlenden Apertur zur Vermeidung von Kantenbeugung eignet sich die Abstrahlung von bestimmten Modengemischen [Den1, Pre1]. Die zur Synthese dieser Verteilung benötigten Moden und deren relativen Amplituden sollen im folgenden dargestellt werden.

Synthese einer beugungsarmen Verteilung

Eine Gaußsche Verteilung läßt sich mit sehr hohem Wirkungsgrad durch eine *Raised-Cosine*-Verteilung annähern. Für die normierten äquivalenten Leistungsdichten erhält man z.B. für die axiale Koordinate:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi w}} e^{-2\frac{z^2}{w^2}} \approx \frac{b}{3\pi} (1 + \cos(bz))^2 \quad (2-33)$$

Man kann zeigen, daß der Wirkungsgrad $\eta(w, b)$ (Kapitel 2.2.2) nur von dem Produkt wb abhängig ist, so daß bezüglich des Intervalls $-\pi \leq 2bz \leq \pi$ und des Strahlradius w skaliert werden kann. Man findet durch numerische Integration für den maximalen Wirkungsgrad:

$$\eta(wb = 1.760) = 99.703\% \quad (2-34)$$

Die *Raised-Cosine*-Verteilung läßt sich durch Überlagerung von drei ebenen Wellen mit bestimmten Amplituden- und Phasenverhältnissen darstellen:

$$1 + \cos(bz) = 1 + \frac{1}{2} e^{+ibz} + \frac{1}{2} e^{-ibz} \quad (2-35)$$

Bei der Problemstellung des verbesserten Wellentypwandlers ist eine zweidimensionale Formung des Millimeterwellen-Ausgangsstrahls erwünscht. Zum einen soll eine Gaußsche Verteilung über den Azimut auf der Kaustik im Intervall $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + 2\theta$ erfolgen und zum anderen in axialer Richtung im Intervall $0 \leq z \leq L$ mit der Schnittkantenlänge L . Die gewünschte Amplitudenverteilung läßt sich dabei wie folgt annähern:

$$f(\varphi, z) = \left(1 + \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{\theta}\varphi} + \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{\theta}\varphi} \right) \left(1 + \frac{1}{2} e^{i\frac{2\pi}{L}z} + \frac{1}{2} e^{-i\frac{2\pi}{L}z} \right) \quad (2-36)$$

Diese Darstellung der Verteilung gibt eine Vorschrift an, welche Hohlleitermoden zur Synthese geeignet sind. Die Wellentypen müssen die Bedingung erfüllen, daß ihre Amplitudenterme in (2-13) etwa gleich groß sind, so daß ihre Überlagerung im wesentlichen durch die Phasenterme gegeben ist. Dann folgt für die Phasendifferenzen in (2-36) die Bedingung (2-37) für die Satelliten der Hauptmode:

$$\Delta m = \pm \frac{\pi}{\theta} \qquad \Delta \beta = \pm \frac{2\pi}{L} \quad (2-37)$$

Für ein typisches Verhältnis des Wellenleiterradius zu Kaustikradius von 2 liefert die erste Bedingung $\Delta m = \pm 3$, und die zweite Bedingung ist für $\Delta \beta = \beta_{mv} - \beta_{m\pm 1, v}$ sehr gut erfüllt, wenn die Mode nicht sehr nahe ihrer Grenzfrequenz betrieben wird. Somit ergibt sich folgendes Modenschema, wobei zusätzlich die relativen Leistungen dargestellt sind.

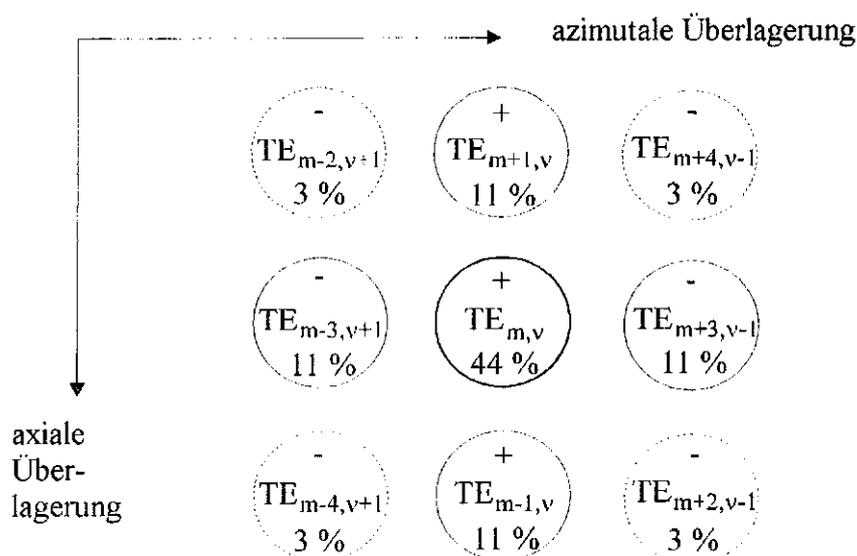


Bild 2-7: Modendiagramm zur Komposition einer beugungsarmen Aperturverteilung

Die Moden in den gepunkteten Kreisen entstehen, wenn der Ausdruck in (2-36) ausmultipliziert wird. Diese Moden müssen phasenrichtig und mit bestimmten Leistungsanteilen auf der strahlenden Apertur überlagert werden. Diese Leistungsanteile können näherungsweise durch die relativen Amplituden in (2-36) bestimmt werden. Bild 2-8 zeigt das Quadrat der tangentialen elektrischen Feldstärke auf der Apertur $\varphi = const.$ Zur genaueren Bestimmung dieser Anteile kann die Eigenwellenentwicklung herangezogen werden, wobei berücksichtigt

werden muß, daß diese Moden auf der betrachteten Fläche nicht orthogonal sind, so daß ein Gleichungssystem gelöst werden muß (Anhang A4).

3% TE _{20,7}	11% TE _{23,6}	3% TE _{26,5}	7.0% TE _{20,7}	9.8% TE _{23,6}	1.2% TE _{26,5}
11% TE _{19,7}	44% TE _{22,6}	11% TE _{25,5}	8.3% TE _{19,7}	45% TE _{22,6}	13% TE _{25,5}
3% TE _{18,7}	11% TE _{21,6}	3% TE _{24,5}	0.2% TE _{18,7}	9.6% TE _{21,6}	6.5% TE _{24,5}

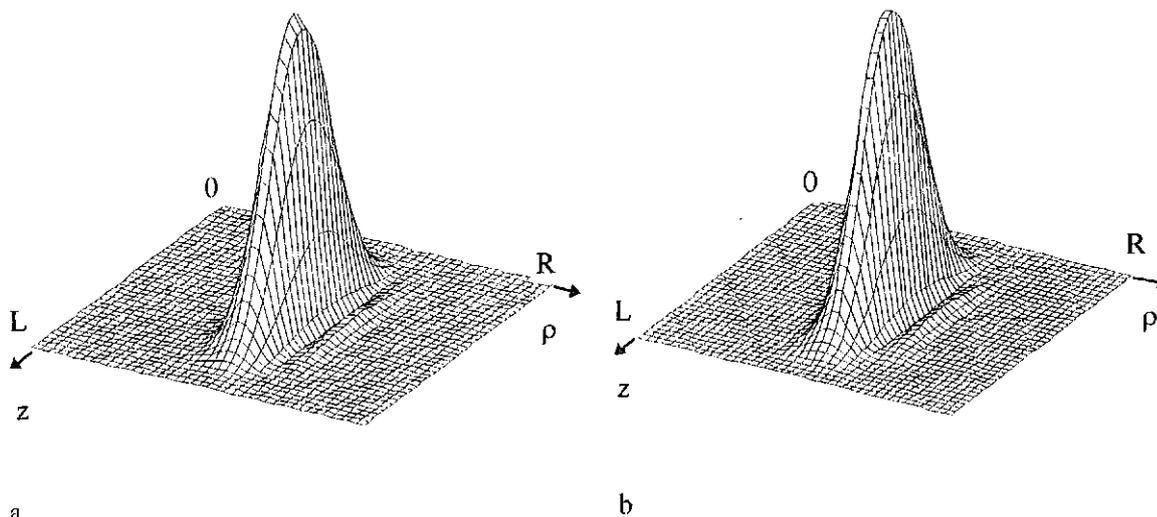


Bild 2-8: Aperturfeld aus Modenmischung für TE_{22,6} bei 140 GHz und R=19 mm a) Verhältnis aus Bild 2-7, b) Verhältnis optimiert nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Anhang A4)

Wanddeformationen

Aus der Theorie der gekoppelten Moden (Kapitel 3.1) lassen sich Deformationen synthetisieren, die die gewünschten Amplituden- und Phasenanteile erzeugen. Die Wandstörungen lassen sich durch (2-38) beschreiben.

$$\rho(\varphi, z) = R(1 + \varepsilon_1 \cos(\Delta\beta_1 z \mp \varphi) + \varepsilon_2 \cos(\Delta\beta_2 z \mp 3\varphi)) \quad (2-38)$$

$$\Delta\beta_1 \approx \beta_{m,v} - \beta_{m\pm 1,v} \quad \Delta\beta_2 \approx \beta_{m,v} - \beta_{m\pm 3,v\mp 1}$$

Die benötigten Amplituden der einzelnen Moden erhält man durch geeignete Wahl der Störampplituden ε_1 und ε_2 , die sich aus Koppelkoeffizienten berechnen lassen. Die phasenrichtige Überlagerung erhält man bei entsprechender Wahl der Wandlerlänge. Sie ist nach [Tra1] gegeben durch:

$$L_{min} = \frac{\pi}{2|\beta_{mv} - \beta_{m+3,v-1} - \beta_{m-3,v+1}|} \quad (2-39)$$

Sie entspricht der maximalen Schwebungswellenlänge der betrachteten Moden. Diese kann für große Wellenleiterradien sehr groß werden, so daß dieses Wandlerprinzip nicht immer einsetzbar ist.

2.3.2 Antenne nach dem Hohlleiterspiegelkonzept

Das erstmals in [Möb1] vorgestellte Verfahren basiert auf der geometrisch-optischen Interpretation der Hohlleitermoden, wonach ein bestimmtes Segment auf der Wellenleiterinnenfläche (Fresnel-Gebiet) von den gesamten Strahlen einmal getroffen wird (Kapitel 2.2.1). Die Deformationen folgen dabei dem helikalen Ausbreitungsweg der Strahlen, die in jedem Fresnel-Gebiet jeweils nur in axialer oder azimuthaler Richtung gebündelt werden, so daß die transversale und die axiale Feldformung getrennt voneinander behandelt werden können. Die Anwendbarkeit dieser Methode ist abhängig von der Fresnel-Zahl, die ein Maß für die Beugungsverluste darstellt.

$$N^F = \frac{a_1 a_2}{D \lambda} \quad (2-40)$$

Hierin ist λ die Wellenlänge in der betrachteten Ausbreitungsrichtung, D der Abstand und $2a_1$ bzw. $2a_2$ sind die Abmessungen zweier Spiegel. Für die hier betrachteten Segmente errechnen sich die Fresnel-Zahlen getrennt für azimuthale und axiale Hohlleiterspiegel wie folgt:

$$N_{\varphi}^F = \frac{m \theta^2}{4\pi \sin \theta \cos \theta} \quad N_z^F = \cot^2 \psi \frac{\pi m \sin \theta}{4\theta^2 \cos \theta} \quad (2-41)$$

Für große Fresnel-Zahlen sind die Beugungsverluste vernachlässigbar, und die Anwendbarkeit der geometrischen Optik ist gewährleistet. Die Form der azimuthalen Deformation erhält man aus der Lösung einer Differentialgleichung unter der Forderung, daß die Strahlen nach zwei Reflexionen die gleiche Kaustik (2-17) haben, die Amplitudenverteilung jedoch möglichst Gauß-verteilt ist (Bild 2-8). Hier ist die Fresnel-Zahl in den meisten Fällen groß genug, so daß zwei Fresnel-Gebiete hintereinander als Spiegel benutzt werden können. Da die Wandstörung zur Vermeidung von Reflexionen möglichst gering sein soll, müssen oft mehrere Hohlleiterspiegelpaare hintereinander verwendet werden. Die Gauß-ähnliche Amplitudenverteilung hat zudem den Vorteil, daß der phasenkorrigierende Spiegel (Kapitel 2.2.1) in das Konzept integriert werden kann.

Die axialen Deformationen im Hohlleiter werden nach dem gleichen Prinzip wie bei den azimuthalen Spiegeln synthetisiert. Es tritt allerdings die Schwierigkeit auf, daß die Fresnel-Zahl für große Brillouinwinkel sehr klein werden kann. Technisch kann das Problem dadurch gelöst werden, indem diese Spiegel durch die azimuthalen Spiegel separiert werden. Somit können sehr kompakte Antennen quasi-optischer Wellentypwandler entworfen werden, deren Gesamtlänge im wesentlichen durch die Anzahl Fresnel-Gebiete gegeben ist:

$$l_S = 2R \left(\pi + N^S \theta \right) \cot \psi \frac{\sin \theta}{\theta} \quad (2-42)$$

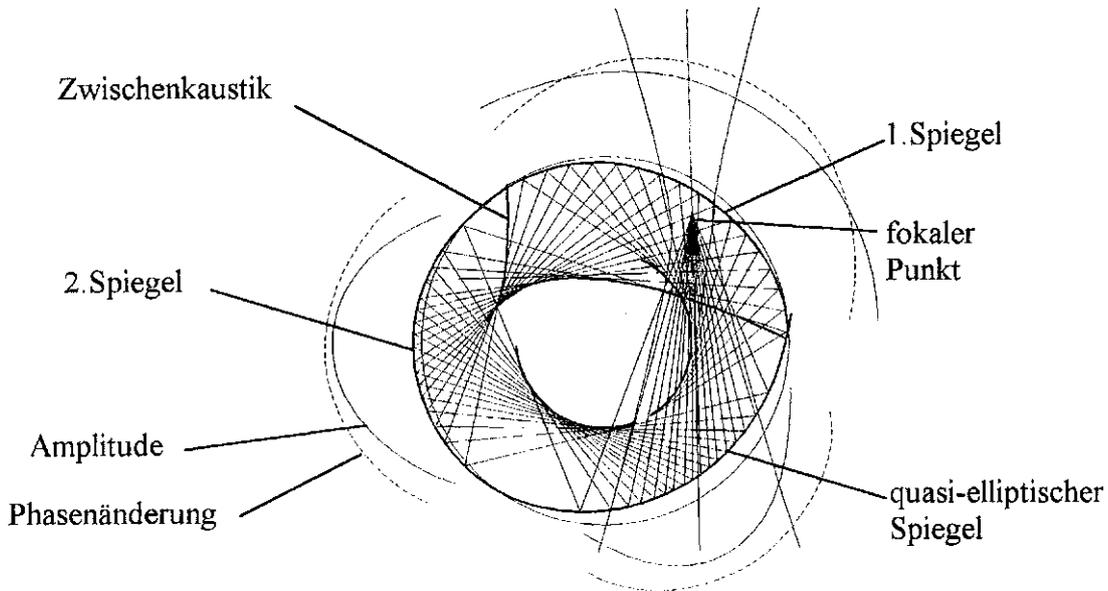


Bild 2-8: Deformierter Hohlleiter nach Innenspiegelkonzept

Bild 2-9 zeigt die Wandlerlängen (einschließlich der Schnittkante) nach (2-39) und (2-42) mit $N^S = 6$ sowie deren Verluste (ideales, kaltes Kupfer) für die $TE_{22,6}$ Mode bei 140 GHz nach den zwei vorgestellten Syntheseverfahren in Abhängigkeit des Wellenleiterradius [Möb6]. Man erkennt, daß das Hohlleiterspiegelkonzept insbesondere für Moden hoher Ordnung und großen Abmessungen vorteilhaft ist.

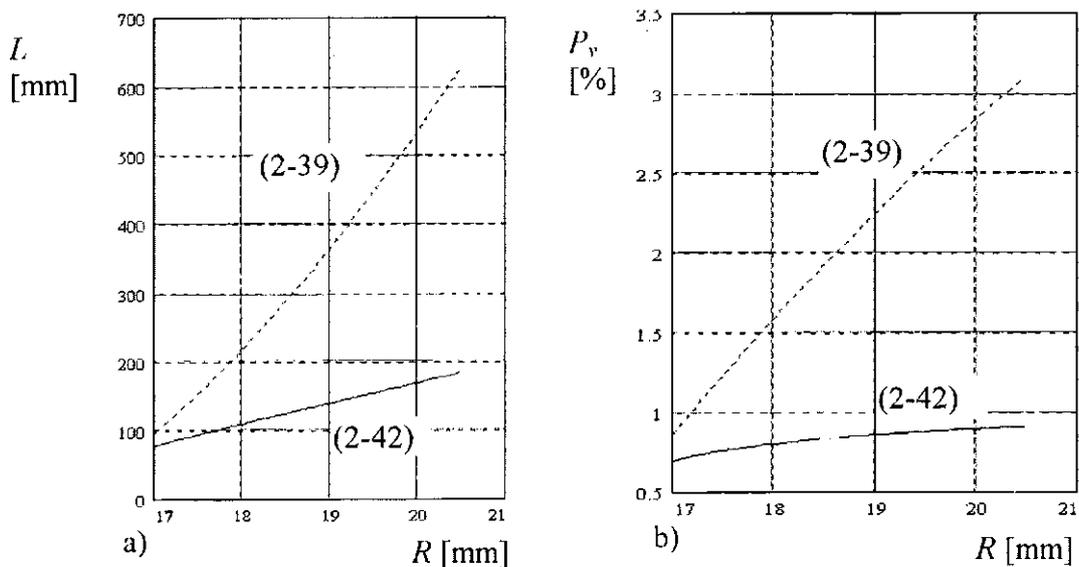


Bild 2-9: Gegenüberstellung der verbesserten Wellentypwandler für die $TE_{22,6}$ -Mode bei 140 GHz

a) axiale Länge b) Verlustleistung bei der jeweiligen Wandlerlänge in Abhängigkeit des Radius

3 Analyse der Antenne in quasi-optischen Wellentypwandler

Wie in Kapitel 2 gezeigt wurde, basieren Entwurfskonzepte für Wellentypwandler zumeist auf optischen Prinzipien. Der Begriff Quasi-Optik soll dabei die Methoden der geometrischen Optik (z. B. Fokussierung, Kaustikbildung) mit denen der physikalischen Optik (Beugungsverluste aufgrund endlicher Aperturabmessungen) vereinen. Bei der physikalischen Optik berechnet man das Feld in einem Beobachtungspunkt durch eine Kugelwellentransformation einer gegebenen Aperturbelegungsfunktion (Kirchhoffsche Methode). Diese Belegungsfunktion kann jedoch immer nur näherungsweise als bekannt vorausgesetzt werden, da sie im allgemeinen Lösung einer Integralgleichung ist. Diese Integralgleichung beschreibt dabei die Rückwirkung der Randbedingungen und ist selten mit analytischen Methoden lösbar.

Um nun Aussagen machen zu können, die über die der geometrischen und physikalischen Optik hinausgehen, muß eine Analyse quasi-optischer Wellentypwandler mit exakteren Methoden erfolgen. Hierunter fallen zum einen feldtheoretische Methoden, die auf der Lösung der Wellengleichung unter Berücksichtigung der Randbedingungen beruhen. Zu diesen Methoden zählen auch die diskreten numerischen Verfahren. Zum anderen lassen sich die optischen Methoden auch entsprechend erweitern. So liefert z.B. die geometrische Beugungstheorie asymptotische Entwicklungsterme zur Berechnung von Kantenbeugungseffekten.

Da die Reflektoren als Bestandteil des quasi-optischen Wellentypwandlers wegen der großen Dimensionen gegenüber der Wellenlänge einer feldtheoretischen Berechnung unzugänglich sind und aus demselben Grund auch mit optischen Methoden genau genug beschrieben werden können, beschränkt sich die Analyse allein auf die helikale Aperturantenne.

Analyse der undeformierten helikalen Aperturantenne

Die Analyse der undeformierten helikalen Aperturantenne birgt einige Schwierigkeiten. Zum einen ist die Wellenlänge nicht verschwindend klein im Vergleich zu den Abmaßen der Antenne, so daß die Anwendbarkeit geometrisch-optischer Methoden zur Auslegung überprüft werden muß. Zum anderen wird ein Teil der Leistung vor allem bei der undeformierten helikalen Aperturantenne durch Kantenbeugung über die helikale Berandung abgestrahlt, so daß der strahlenden Apertur (Bild 2-5) dieser Anteil nicht zur Verfügung steht. Hieraus resultiert ein gewisser Randabfall der Feldverteilung zum Aperturende $z=L$, was in [Wie2] mit numerischen Verfahren (MAFIA-Programm) untersucht wurde.

Da die physikalische Optik nur dann eine Vorhersage des Strahlungsfeldes liefert, wenn das einfallende Feld auf der Apertur bekannt ist, kann die Anwendung dieser Methode zu unrealistischen Ergebnissen führen. Weiterhin bieten diese optischen Methoden keine Möglichkeit einer Abschätzung des rückgestreuten Feldes.

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, mit Hilfe feldtheoretischer oder asymptotischer Verfahren Rückstreu- und Kantenbeugungseffekte quantitativ zu erfassen und somit Entwurfsrichtlinien für quasi-optische Wellentypwandler bereitzustellen.

Analyse von verbesserten Wellentypwandlern nach dem Hohlleiterspiegelkonzept

Wie in Kapitel 2.3 gezeigt, versucht man bei Antennen von verbesserten Wellentypwandlern durch gezielte Wanddeformationen Beugungseffekte zu vermeiden. Das zu dem periodisch deformierten Wandler alternative Konzept der Hohlleiterspiegel bietet die Möglichkeit einer kompakten Bauweise. Eine vollständig dreidimensionale Analyse dieses Wellenwandlers mit Hilfe der Methode der gekoppelten Gleichungen ist jedoch nicht sinnvoll, da die axiale Länge der Deformation zu klein ist, als daß sich ausgezeichnete Moden bilden könnten. Zudem treten bei diesem Konzept an den Spiegelgrenzen Kanten auf, die nicht mit diesem Analyseverfahren berechenbar sind. Wie später gezeigt wird, ist eine dreidimensionale numerische Analyse aufgrund der großen Abmessungen gegenüber der Wellenlänge nicht möglich. Da bei dem in Kapitel 2.3 dargestellten Syntheseverfahren zwischen azimuthaler und axialer Bündelung unterschieden wird, kann jedoch eine zweidimensionale Analyse sinnvoll sein.

Somit ergibt sich als ein weiteres Ziel dieser Arbeit die Entwicklung eines geeigneten Berechnungsverfahrens auf feldtheoretischer Basis zur Analyse von verbesserten Wellentypwandlern nach dem Hohlleiterspiegelkonzept und zur Bestimmung der transversalen Strahlparameter und des Konversionswirkungsgrades.

In diesem Kapitel sollen zunächst einige mögliche Methoden zur Analyse zusammengestellt, auf deren Anwendbarkeit hin untersucht und eine Auswahl geeigneter Verfahren getroffen werden. Auf die ausgewählten Verfahren wird dann in den folgenden Abschnitten näher eingegangen.

3.1 Auswahl geeigneter Verfahren zur Feldberechnung

Die Methoden zur Berechnung von elektromagnetischen Feldern aus den Maxwell'schen Gleichungen lassen sich grob unterteilen in analytische, semi-numerische und numerische Verfahren, wobei die Übergänge fließend und die Definitionen eher willkürlich sind.

Bei einer mit Hilfe eines analytischen Verfahrens gewonnenen Lösung sollen sich die Feldgrößen durch geschlossene Funktionen des Ortes und der Zeit darstellen lassen. Dabei kann eine geschlossene Funktion z.B. auch ein Parameterintegral oder eine unendliche Summe enthalten. Diese Verfahren leiten sich aus den Maxwell'schen Gleichungen meist unter vielen Näherungen und vereinfachenden Annahmen ab. Als Beispiele hierfür wären das Separationsverfahren bei den Eigenlösungen von geführten Wellen, die Faktorisierungsmethode bei der Lösung von Beugungsproblemen von offenen Hohlleitern oder die geometrische Beugungstheorie zu nennen.

Rein numerische Verfahren zeichnen sich dadurch aus, daß Lösungen durch Rekursionen oder Iterationen gewonnen werden. Der grundlegende Unterschied zu analytischen Verfahren ist, daß die Lösung in vorgebbaren, diskreten Punkten des Raums berechnet wird. Diese Verfahren ermöglichen oft eine Lösung der Maxwell'schen Gleichungen ohne einschränkende Vereinfachungen, allerdings erfordert die Berechnung einigen Rechenaufwand. Hier wären als Beispiele die Finite-Elemente-Methode, die Finite-Differenzen-Methode oder die Randelementmethode zu nennen.

Semi-numerische Verfahren lassen sich nicht ohne weiteres in das ein oder andere Schema eingliedern. So existieren Verfahren, z. B. die aus der Störungstheorie abgeleitete Methode der gekoppelten Wellengleichungen zur Berechnung von Wellenleiterinhomogenitäten, die durch iterative Lösung von gekoppelten Differentialgleichungen Felder im kontinuierlichen Raum berechnen. Oder es lassen sich durch Diskretisierung der Wellenleiterinhomogenitäten mit Hilfe von Mode-Matching-Verfahren die Lösung in Wellenleiterschichten bestimmen. Tabelle 3-1 gibt einen Überblick der für die Anwendung in der Quasi-Optik anwendbaren Analyseverfahren.

Numerisch gewonnene Lösungen haben den Nachteil, daß sie nur Aussagen für ein konkret gestelltes Problem liefern. So lassen sich z. B. nur mit Hilfe von rechenintensiven Parameterstudien Aussagen über das Verhalten in Abhängigkeit von Einflußgrößen machen. Weiterhin muß die Genauigkeit der so gewonnenen Lösung durch Konvergenztests, wie z. B. durch Verfeinerung des Gitters oder durch Erhöhung der Anzahl Iterationen überprüft werden. Daher ist im Regelfall eine analytisch gewonnene Lösung der numerischen vorzuziehen.

In diesem Kapitel sollen die Möglichkeiten einer Analyse der helikalen Aperturantenne mit den verschiedenen Verfahren abgeschätzt und die Grenzen ihrer Anwendbarkeit diskutiert werden. Hierzu ist es notwendig, die grundlegenden Konzepte dieser Verfahren darzustellen und für die Anwendung zu bewerten.

Tabelle 3-1: Einige Verfahren zur Analyse von Wellenausbreitungsproblemen

Analytische Verfahren	Semi-numerische Verfahren	Numerische Verfahren
Greensche Funktionen	Methode der Geraden	Finite-Elemente-Methode
Geometrische Optik	Mode-Matching-Verfahren	Finite-Differenzen-Methode
Physikalische Optik	Spektralbereichsmethode	Momentenmethode
Faktorisierungsmethode	Ray-Tracing-Verfahren	Randelementmethode
Geometrische Beugungstheorie	Methode der gekoppelten Wellengleichungen Mehrfach-Multipol-Methode	Transmission-Line-Matrix-Method

3.1.1 Analytische Verfahren

Da die Theorie der elektromagnetischen Wellen nur wenige Vereinfachungen der Maxwell'schen Gleichungen zulassen, existieren nur wenige analytische Verfahren für die dreidimensionale Berechnung.

Greensche Funktionen

Greensche Funktionen $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ sind exakte Lösungen einer Feldgleichung mit dem linearen Operator L für eine punktförmige Quelle unter Erfüllung der homogenen Randbedingungen.

$$Lg = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3-1)$$

$$f^d g + f^n \frac{\partial g}{\partial n} = 0$$

Die Funktionen f entscheiden dabei über die Art der Randbedingung, die z.B. nach [Bro1] die Dirichletsche ($f^n=0$), die Neumannsche ($f^d=0$) oder eine gemischte Randbedingung sein kann. Aufgrund der Filtereigenschaft der Dirac-Funktion lassen sich Felder mit Hilfe der Greenschen Sätze als Integrale über Quellterme darstellen. Da allerdings die Geometrie des Randes sehr komplex sein kann, wie im Fall der helikalen Aperturantenne, sind Greensche Funktionen nur für separierbare Koordinatensysteme (Ebene, Kugel, Zylinder, usw.) bekannt. Ist die Lösung der beschreibenden Differentialgleichung für Vektorfelder gesucht, so wird die dyadische Greenschen Funktion verwendet.

Physikalische Optik

Die physikalische Optik ist eine direkte Anwendung der Greenschen Funktionen unter vereinfachenden Annahmen der Randbedingungen. Das auch unter der Kirchhoffschen Methode bekannte Verfahren geht dabei vom Huygensschen Prinzip der Superposition von

Elementarwellen aus. Schließt man Quellen im Inneren des von der Fläche A eingehüllten Volumens aus, so läßt sich die Feldstärke wie folgt berechnen:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \iint_A \left(\mathbf{G}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \right) dA \quad (3-2)$$

Hierin ist \mathbf{F} im allgemeinen ein Vektorfeld und \mathbf{G} die dyadische Greensche Funktion für den unbegrenzten Raum. Die Näherung der Kirchhoffschen Methode liegt darin, daß die Randwerte $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$, bzw. deren Normalenableitungen als bekannt vorausgesetzt werden können. So wird meist bei der Berechnung von Strahlungsfeldern das Aperturfeld durch das einfallende Feld vorgegeben und das Feld auf der restlichen Hüllfläche zu Null angenommen. Diese Näherung erlaubt somit keine Möglichkeit zur Auswertung von Reflexionen in Einstrahlrichtung von angestrahlten Reflektoren oder Blenden.

Im Falle der undeformierten Aperturantenne kann aufgrund des geringen Randabfalls das tatsächliche Feld auf der Apertur nur näherungsweise als bekannt vorausgesetzt werden. Bei der durch Innenwanddeformationen zur Vermeidung von Kantenbeugung verbesserten Antenne ist dieses Verfahren jedoch eine adäquate Methode zur Berechnung des strahlenden Feldes.

Faktorisierungsmethode

Zum Verständnis des Verhaltens der helikalen Aperturantenne ist es oftmals hilfreich, das analoge Problem des halbumendlichen Kreishohlleiters zu betrachten. Hierbei wird eine einfallende Hohlleiterwelle in den offenen Raum abgestrahlt. Durch Kantenbeugung wird diese Welle zum Teil durch Konversion in andere Moden reflektiert. Dieses Problem wurde mit Hilfe der Faktorisierungsmethode in [Wein1] gelöst.

Dieses auch unter der Wiener-Hopf-Technik bekannte Verfahren eignet sich zur Lösung von Integralgleichungen von komplexen skalaren Funktionen, die in zwei Faktoren zerlegt werden können, die jeweils ihre Polstellen allein in der positiven oder negativen Halbebene haben. Die Anwendbarkeit ist im wesentlichen auf zweidimensionale Geometrien beschränkt.

Hiermit ist es z. B. möglich, die Reflexion und das Strahlungsfeld eines offenen abstrahlenden Kreishohlleiters analytisch zu berechnen. Für Moden hoher azimuthaler Ordnung bietet jedoch die Auswertung der analytischen Lösung einige Schwierigkeiten, so daß in diesem Fall die Berechnung mit Mode-Matching-Verfahren vorteilhaft ist.

Geometrische Beugungstheorie GTD

Die in [Kel1] begründete Theorie stellt eine Erweiterung der geometrischen Optik unter Einbeziehung von Beugungseffekten dar. Die grundlegende Idee ist dabei, daß ähnlich wie bei der Reflexion und Brechung von Wellen, die Beugung ein lokales Phänomen darstellt. Somit

ist zusätzlich zum einfallenden Feld das resultierende Feld gegeben durch gebeugte Wellen, die abhängig von der einfallenden Welle und der beugenden Geometrie sind. Das resultierende Feld läßt sich wie folgt darstellen:

$$\mathbf{E}_{res} = \mathbf{E}_{inc} + \mathbf{E}_{ref} + \mathbf{E}_{diff} \quad (3-3)$$

Hierbei erhält man die gebeugten Feldanteile durch eine asymptotische Entwicklung der Wirkung der Randbedingungen, verursacht durch das einfallende Feld.

$$\mathbf{E}_{diff} = \mathbf{D}\mathbf{E}_{inc} \quad (3.4)$$

Die Dyade \mathbf{D} enthält dabei die Beugungskoeffizienten, die von der Polarisation der ebenen Welle und der Kantengeometrie abhängig sind. Das gebeugte Feld kann vor allem bei Anwesenheit mehrerer Kanten selbst Ursache von Beugung sein, und man spricht von Mehrfachbeugung.

Die in der Literatur behandelten Problemstellungen sind vor allem einfallende Wellen auf ideal leitende, gerade Kanten. Ist die beugende Kante endlich und gekrümmt, so lassen sich mit Hilfe der Beugungskoeffizienten näherungsweise äquivalente Kantenströme berechnen, aus denen sich durch Integration das Strahlungsfeld ergibt.

Da es sich bei der Theorie um eine asymptotische Entwicklung der gebeugten Felder handelt die nur für große Abstände gültig ist, kann die Problemstellung der undeformierten helikalen Aperturantenne nur unter der vereinfachenden Annahme angewendet werden, daß die Wechselwirkung der geraden und der helikalen Kante vernachlässigbar ist. Auf die Anwendung dieser Methode zur Abschätzung von Beugungsverlusten wird in Kapitel 3.4 eingegangen.

3.1.2 Semi-numerische Verfahren

Diese Verfahren entstehen meist durch eine Kombination aus analytischen und numerischen Verfahren. So kann z. B. in einer Dimension das Feld wegen einfacher Randbedingungen durch eine modale Feldentwicklung beschrieben werden, während in einer anderen Dimension wegen Inhomogenitäten mit Finiten Elementen gearbeitet werden muß.

Methode der gekoppelten Wellengleichungen

Das aus der Störungstheorie stammende Verfahren eignet sich zur modalen Beschreibung von Wellenleiterinhomogenitäten für kleine Störungsamplituden, bei denen die Störungslänge viel größer als die Freiraumwellenlänge ist. Hierbei werden durch die Wellenleiterstörung hervorgerufene Feldänderungen in die orthogonalen Moden des ungestörten Wellenleiters entwickelt. Eine Einführung in die Herleitung des Verfahrens findet man z.B. bei [Sch1] und

[Spo1]. Man erhält ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem für die Modenamplituden A_q und B_q in Abhängigkeit der axialen Position z .

$$\frac{\partial}{\partial z} A_q(z) = \sum_n \left(T_{qn}(z) A_n(z) + \Gamma_{qn}(z) B_n(z) \right) \quad (3-5)$$

Einen entsprechenden Satz von Gleichungen erhält man für die rücklaufenden Wellen B_q . Die Matrizen T_{qn} und Γ_{qn} enthalten dabei die Koppelfaktoren zwischen den Moden q und n aufgrund der Deformation $r(\varphi, z) = R + \delta(\varphi, z)$ des Wellenleiters.

Das Verfahren eignet sich vor allem zur Beschreibung von kontinuierlichen Wandstörungen, wie sie bei der Auslegung von Wellentypwandlern mit periodischen Wanddeformationen auftreten. Bei der Analyse von Wandlern mit dem Hohlleiterspiegelkonzept versagt jedoch diese Methode zum einen wegen der auftretenden Kanten und zum anderen können sich auf der kurzen Deformationslänge keine Moden etablieren [Möb2].

Eine Umformulierung von (3-5) mit φ als Variable zur Analyse der azimutalen Deformationen ist prinzipiell möglich, allerdings ist das Differentialgleichungssystem wegen der Nichtorthogonalität der Moden in der $\hat{\varphi}$ -Ebene erheblich schwieriger zu lösen.

Mode-Matching-Verfahren

Eine weitere Methode zur Beschreibung von Wellenleiterinhomogenitäten ist das Mode-Matching-Verfahren. Das Grundprinzip besteht darin, die Inhomogenität zwischen zwei Gebieten mit bekannten Eigenfunktionen \mathbf{e}_n und \mathbf{h}_n und gemeinsamer Trennfläche A durch eine Eigenwellenentwicklung der tangentialen Felder zu beschreiben.

$$\begin{aligned} \iint_A \mathbf{E}_t^1 \cdot \mathbf{e}_n^2 \, dA &= \iint_A \mathbf{E}_t^2 \cdot \mathbf{e}_n^1 \, dA \\ \iint_A \mathbf{H}_t^1 \cdot \mathbf{h}_n^1 \, dA &= \iint_A \mathbf{H}_t^2 \cdot \mathbf{h}_n^1 \, dA \end{aligned} \quad (3-6)$$

Stellt man die tangentialen Felder durch Eigenfunktionen dar, so erhält man mit (3-6) ein Gleichungssystem für die unbekanntenen Modenamplituden. Mit Hilfe von Matrixinversionen erhält man die gesuchte Streumatrix. Dieses Verfahren eignet sich für abrupte Inhomogenitäten sowie für kontinuierliche Störungen unter Zuhilfenahme der Generalisierten-Streumatrix-Methode und Kaskadierung der Streumatrizen. Die Anwendbarkeit ist jedoch nur auf einfache Geometrien und Störungen beschränkt, da die Wellentypen der anzupassenden Gebiete bekannt sein müssen.

In dieser Arbeit wird diese Methode für zwei Anwendungsfälle benötigt. Zum einen lassen sich hiermit die Kreishohlleitermodenanteile der Gaußschen Freiraummode auf der strahlenden Apertur der helikalen Aperturantenne bestimmen. Zum anderen kann die Reflexion eines halb-

unendlichen Kreishohlleiters durch Approximation des freien Raums durch einen Hohlleiter mit sehr großem Radius abgeschätzt werden. Eine detaillierte Darstellung ist in Anhang A3 gegeben.

3.1.3 Numerische Verfahren

Mit der steigenden Leistungsfähigkeit digitaler Rechner ist die Lösbarkeit dreidimensionaler elektromagnetischer Feldprobleme mit Hilfe von numerischen Verfahren eng verbunden. Numerische Verfahren bilden den kontinuierlichen Raum auf ein diskretes Gitter ab, auf dessen Begrenzungsflächen die Feldgleichungen gelöst werden. Hierbei sind kaum Vereinfachungen der Maxwell'schen Gleichungen notwendig, und die Genauigkeit der Lösung ist nur von der auflösenden Diskretisierung abhängig. Die Grenze der Berechenbarkeit ist dabei lediglich von der Leistungsfähigkeit des Rechners und der Effizienz der Lösungsalgorithmen abhängig. Bei Anwendungen mit harmonischer Zeitabhängigkeit der Feldgrößen ist dabei die minimale Diskretisierungsweite durch das Abtasttheorem gegeben, wonach je Wellenlänge mindestens zwei Stützpunkte zur Auflösung des Feldes notwendig sind.

Zur Abschätzung der Anwendbarkeit numerischer Verfahren bei quasi-optischen Feldproblemen ist es günstig, die Methoden in Frequenz- und Zeitbereichsverfahren sowie in Gebiets- und Randverfahren einzuteilen (Tabelle 3-2). Hierbei lassen sich generell Gebietsverfahren im Frequenzbereich als auch im Zeitbereich formulieren.

Tabelle 3-2: Aufwand numerischer Verfahren für hochfrequente Anwendungen

Numerische Methode	Frequenzbereichsverfahren				Zeitbereichsverfahren			
	Speicher		Rechenzeit		Speicher		Rechenzeit	
Aufwand	Zellenzahl	Byte/Zelle	Matrix-generierung	Lösung	Zellenzahl	Byte/Zelle	Matrix-generierung	Lösung
Gebiets-verfahren	groß	groß	klein	groß	groß	klein	klein	klein
Rand-verfahren	klein	groß	groß	groß	-	-	-	-

Da Randverfahren nicht zur direkten Lösung von hyperbolischen Differentialgleichungen geeignet sind, ist eine Zeitbereichsformulierung nicht möglich. Allerdings lassen sich transiente Felder mit dieser Methode berechnen, indem man die Zeitableitung durch Differenzen nähert und somit wieder eine elliptische Differentialgleichung erhält. Hierbei treten jedoch ortsabhängige Quellterme im Gebiet auf, so daß das Gebiet diskretisiert werden muß und der Vorteil der Reduktion der Dimensionalität entfällt.

Diskretisierungsaufwand bei quasi-optischen Problemstellungen

Bei monofrequenten Wellenausbreitungsproblemen läßt sich auf einfache Weise die benötigte Zahl Gitterzellen angeben. Um das Feld in einer Zelle zu bestimmen, müssen die Beiträge der Felder von den Nachbarzellen bekannt, d. h. auflösbar sein. Nach dem Abtasttheorem liegt die Grenze der Auflösbarkeit bei zwei Abtastwerten pro Wellenlänge.

In der Literatur empfohlene, wie auch in dieser Arbeit festgestellte Abtastraten von 8 bis 12 pro Wellenlänge liefern bei den meisten Problemstellungen brauchbare Ergebnisse. Problemstellungen in der Quasi-Optik beginnen bei Abmessungen von mehreren Wellenlängen je Dimension, so daß bei einer dreidimensionalen Anwendung die benötigte Zellenzahl kaum noch numerisch beherrschbar ist.

Anwendung von Gebietsmethoden im Frequenzbereich

Dieses numerische Verfahren ist immer verbunden mit der Lösung eines dünnbesetzten Gleichungssystems. Die Zahl der Unbekannten beträgt dabei je nach Verwendung von Potentialen oder Feldgrößen das drei- bis sechsfache der Zellenzahl. Die Lösung eines solch großen Systems erfordert einerseits sehr stabile, iterative Lösungsverfahren, andererseits einen sehr effizienten Algorithmus hinsichtlich des begrenzten Speicherplatzes und der Rechenzeit. Diese beiden Forderungen widersprechen sich und können nicht gleichzeitig erfüllt werden, so daß diese Methoden für diese Aufgabenstellungen nicht anwendbar sind.

Anwendung von Randmethoden

Randmethoden erlauben die Reduktion der Dimensionalität, wenn der Rand ein homogenes Medium umschließt. Sie haben allerdings den Nachteil, daß ein vollbesetztes, im allgemeinen komplexes Gleichungssystem gelöst werden muß. Die Grenze der Lösbarkeit solcher Systeme mit iterativen Methoden liegt derzeit bei einigen hunderttausend Unbekannten bei Verwendung von Supercomputern. Ein schwerwiegenderer Nachteil besteht jedoch in der enormen Rechenzeit. Diese ist zum einen durch das Lösen des Gleichungssystems bedingt, zum anderen ist das Aufstellen der Matrizen sehr aufwendig, da die Matrixelemente numerisch zu berechnende Integrale darstellen.

Anwendung von Zeitbereichsmethoden

Diese Methoden haben den Vorteil, daß kein Gleichungssystem gelöst werden muß. Da sie eine direkte Lösung eines Anfangsrandwertproblems einer hyperbolischen oder auch parabolischen Differentialgleichung darstellen, entwickelt sich das Feld mit jedem Iterationsschritt. Für die Lösung einer monofrequenten Aufgabenstellung muß dabei der eingeschwingene Zustand erreicht werden. Dieser Zustand ist vor allem bei Aufgaben mit dissipativen Elementen, wie z.B. leitenden Medien oder offenen Rändern, schnell erreicht, so daß dieses numerische Verfahren für quasi-optische Strahlungsprobleme am ehesten geeignet ist.

Die rekursive Lösung des Anfangsrandwertproblems basiert auf einem einfachen Algorithmus, dessen Stabilität durch geeignete Wahl der Zeitschrittweite (hinreichend kleine Zellen vorausgesetzt) gewährleistet wird. Zur Abschätzung der Anwendbarkeit des Verfahrens, ist es hilfreich den Arbeitsspeicherbedarf zu ermitteln.

$$SB = N(F \cdot SB_F + ZI_G \cdot SB_G + ZI_M \cdot SB_M) + OV \quad (3-7)$$

Hierin ist N die Anzahl Zellen, F die Anzahl Feldkomponenten und ZI die Information über die Geometrie (G) und Material (M) der Zelle. SB_X ist dabei der Speicherbedarf für die jeweiligen Komponenten. Zusätzlich ist ein gewisser Überhang OV zu berücksichtigen, der nicht proportional zu N ist.

In den meisten Zeitbereichsformulierungen werden sechs Feldkomponenten verwendet und mit einfach genauen Zahlen dargestellt. Die Geometrieinformation ZI_G kann vor allem bei Verwendung unregelmäßiger Gitter, wie z.B. bei der Finite-Elemente-Methode sehr hoch sein, so daß ein regelmäßiges Gitter erhebliche Einsparung von Speicher ermöglicht. Hat man nur wenige unterschiedliche Materialien, so läßt sich auch der dritte Summand in (3-7) hinsichtlich Speicherbedarf minimieren.

Somit läßt sich der Speicheraufwand auf 30 Byte/Zelle [Kun1] bei homogenen Gittern und quellfreien Feldern (FDTD), bzw. auf 64 Byte/Zelle [Doh1] bei inhomogenen Gittern mit quellenbehafteten Feldern (FIM, MAFIA) reduzieren.

Weiterhin ist es nützlich, die Anzahl Fließkomma-Operationen pro Zeitschritt aus dem Algorithmus zu bestimmen.

$$FO = N \cdot F \cdot OP_F \quad (3-8)$$

Hierin ist OP_F die Anzahl Operationen pro Komponente. In [Kun1] werden in der FDTD-Formulierung 60 Operationen pro Zelle benötigt, während die FIM-Formulierung [Doh1] mit 39 Operationen auskommt.

3.2 Dreidimensionale Feldberechnung mit dem MAFIA-Programm

Im vorigen Unterkapitel wurde gezeigt, daß die diskrete numerische Feldberechnung quasi-optischer Bauelemente vor allem durch den verfügbaren Arbeitsspeicher begrenzt ist und daß Zeitbereichsmethoden daher zumindest für nichtresonante Probleme geeignet sind. In der jüngsten Zeit sind diese Methoden stark ausgebaut und verbessert worden, und kommerzielle Programme haben in die Arbeitswelt der Ingenieure Eingang gefunden. Das numerische Feldberechnungsprogramm MAFIA (*Lösung der Maxwell'schen Gleichungen mit Hilfe des Finiten Integrations Algorithmus*) steht dem Institut für Höchstfrequenztechnik und Elektronik für Forschungszwecke zur Verfügung. Dieses Programm versucht einer Vielzahl elektromagnetischer Aufgabenstellungen, wie z.B. statische, stationäre oder transiente Felder sowie konsistente Feldberechnungen mit bewegten Ladungen in dreidimensionaler Geometrie, gerechtzuwerden. Es konnte in dieser Arbeit gezeigt werden, daß dieses Programm unter gewissen Einschränkungen für die Lösung quasi-optischer Feldprobleme mit Erfolg eingesetzt werden kann. In diesem Abschnitt wird die verwendete Methode ausführlicher in Hinblick auf die Berechnung quasi-optischer Feldprobleme dargestellt.

3.2.1 Finite-Integrations-Methode im Zeitbereich

Die von MAFIA benutzte Finite-Integrations-Methode ist mit der Methode der Finiten Differenzen eng verwandt. Sie gehört daher zu den Bereichsverfahren bei denen nicht die Lösungsfunktion, sondern die Operatoren approximiert werden. Im Gegensatz zu den Finiten Differenzen werden dabei die Integraloperatoren der Maxwell'schen Gleichungen in Integralform zur Approximation benutzt:

$$\oint_{(A)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_A \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (3-9)$$

$$\oint_{(A)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{A}$$

$$\oiint_{(F)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (3-10)$$

$$\oiint_{(V)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Die Gleichungen (3-9) beschreiben den Zusammenhang der zeitlichen Änderung der Durchflutung einer Fläche A mit den Flußdichten \mathbf{B} und \mathbf{D} und der Induktion von Spannungen durch die Feldstärken \mathbf{E} und \mathbf{H} auf deren Berandung, während (3-10) die Quelleneigenschaften der

Felder beschreibt. Dabei sind die elektrischen und magnetischen Größen über Materialgleichungen verknüpft. Für zeitinvariante und lineare Medien lautet der Zusammenhang folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_e \end{aligned} \quad (3-11)$$

Hierin sind μ die Permeabilität, ε die Permittivität und σ die Leitfähigkeit im allgemeinen ortsabhängige Tensoren des Mediums, und \mathbf{J}_e hat die Bedeutung einer eingepprägten Stromdichte. Da in dieser Arbeit die Stromdichte nicht benötigt wird, wird sie bei der folgenden Darstellung unterdrückt.

Zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen wird der dreidimensionale Raum zunächst in endlich viele Zellen unterteilt. Anwendung der Gleichungen (3-9) auf eine Elementarzelle und Approximation der Integrale liefert den Zusammenhang zwischen den auf dem Zellenrand lokalisierten Feldkomponenten. Durch Stetigkeitsbedingungen werden die Felder der angrenzenden Zellen miteinander verknüpft. Man erhält somit ein diskretes Analogon zu den Maxwell'schen Gleichungen.

Zur Diskretisierung des Lösungsgebiets

Die Unterteilung des Raumes kann prinzipiell in krummlinig berandeten Zellen erfolgen. Um jedoch einen effizienten Algorithmus zu bilden, sollte sowohl die Topologie als auch die Form der Zellen möglichst regelmäßig sein. Die Effizienz des Algorithmus ist schließlich ausschlaggebend für die Berechenbarkeit großer Gebiete. Es kann zudem gezeigt werden, daß der numerische Aufwand zur Lösung von dreidimensionalen Feldproblemen bei Verwendung von quaderförmigen Zellen, wie in Bild 3-1 dargestellt, im Gegensatz zu z.B. sektorförmigen Zellen selbst bei Aufgabenstellungen mit kreisförmiger Geometrie geringer sein kann.

In Bild 3-2 ist eine quaderförmige Elementarzelle dargestellt. Auf den Kanten sind die Komponenten der elektrischen Feldstärken lokalisiert. Die Komponenten der magnetischen Induktion stehen dabei senkrecht auf der von den jeweiligen Kanten berandeten Fläche. Es lassen sich somit die Maxwell'schen Gleichungen (3-9) für die (innere) n -te Zelle wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} -\iint_{A_w^n} \dot{B}_w^n dA &= \int_{\delta v^n} (E_v^{n+J_w+J_u} - E_v^{n+J_w}) dv + \int_{\delta u^n} (E_u^{n+J_w} - E_u^{n+J_v+J_w}) du \\ \iint_{A_v^{n+J_u}} \varepsilon_v \dot{E}_v^{n+J_u} dA &= \int_{\delta w^n} \left(\frac{B_w^{n-J_w}}{\mu_w^n} - \frac{B_w^{n-J_w+J_u}}{\mu_w^{n+J_u}} \right) dw + \int_{\delta u^n} \left(\frac{B_u^n}{\mu_u^n} - \frac{B_u^{n-J_w}}{\mu_u^{n-J_w}} \right) du \end{aligned} \quad (3-12)$$

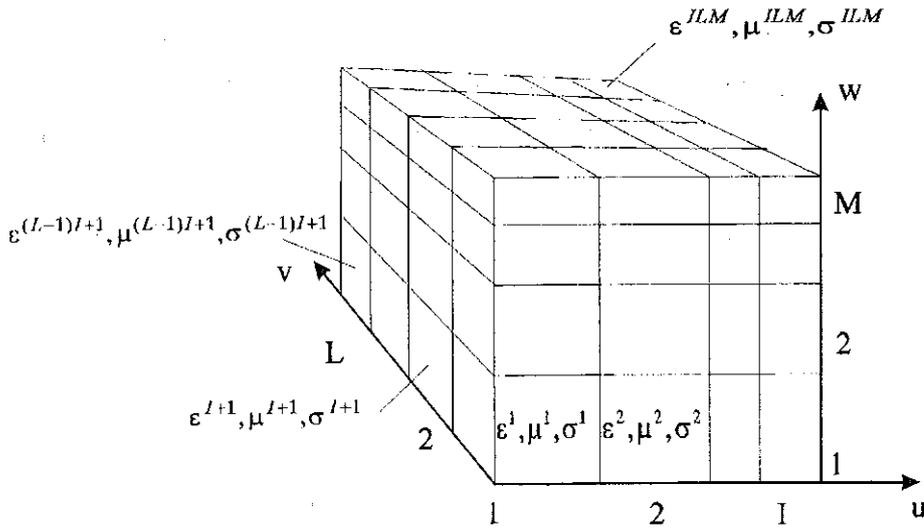


Bild 3-1: Unterteilung des Lösungsgebiets in quaderförmige Elementarzellen

Folgende Indizierung ist für die n -te Zelle festgelegt:

$$n = (i-1)J_u + (l-1)J_v + (m-1)J_w \quad (3-13)$$

$$\begin{array}{lll} i = 1 \dots I & l = 1 \dots L & m = 1 \dots M \\ J_u = 1 & J_v = I & J_w = IL \end{array}$$

Durch zyklische Vertauschung der Koordinaten u, v, w erhält man die entsprechenden Gleichungen für die restlichen Berandungsflächen. Nähert man nun die Integration durch eine Mittelung, so erhält man die Gleichungen (3-12) in diskreter Form:

$$\begin{aligned} -\dot{B}_w^n A_w^n &= \left(E_v^{n+J_u+J_w} - E_v^{n+J_w} \right) \delta v^n + \left(E_u^{n+J_w} - E_u^{n+J_v+J_w} \right) \delta u^n \\ \tilde{A}_v^{n+J_u} \epsilon_v \dot{E}_v^{n+J_u} &= \frac{\delta \tilde{w}^{n-J_w}}{\mu_w^n} B_w^{n-J_w} - \frac{\delta \tilde{w}^{n-J_w}}{\mu_w^{n+J_u}} B_w^{n-J_w+J_u} + \frac{\delta \tilde{u}^n}{\mu_u^n} B_u^n - \frac{\delta \tilde{u}^n}{\mu_u^{n-J_w}} B_u^{n-J_w} \end{aligned} \quad (3-14)$$

Das Symbol $\tilde{\cdot}$ hat die Bedeutung einer mit den Materialparametern der angrenzenden Zellen gewichteten Fläche bzw. Länge, die sich wie folgt ausdrücken läßt:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_v^{n+J_u} \epsilon_v &= \frac{1}{4} \left(A_v^n \epsilon_v^n + A_v^{n+J_u} \epsilon_v^{n+J_u} + A_v^{n-J_w} \epsilon_v^{n-J_w} + A_v^{n+J_u-J_w} \epsilon_v^{n+J_u-J_w} \right) \\ \frac{\delta \tilde{u}^n}{\mu_u^n} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u^n}{\mu_u^n} + \frac{\delta u^{n+J_u}}{\mu_u^{n+J_u}} \right) \end{aligned} \quad (3-15)$$

Hierin kommt die Ortsabhängigkeit und die Anisotropie des Mediums zum Ausdruck. Mit dieser Formulierung ist es möglich, jeder Zelle eine andere Materialeigenschaft zuzuschreiben. Betrachtet man in (3-14) die Summanden als Flüsse und Spannungen, so wird die erste Maxwell'sche Gleichung exakt gelöst, während die Näherung nur in der Mittelung der Materialparameter besteht. Wird also ein Feldproblem mit einem homogenen Medium gelöst, so besteht die einzige Fehlerquelle in der Erfüllung der Randbedingungen und der expliziten Zeitintegration. Darin ist der eigentliche Vorteil gegenüber der sonst ähnlichen Finiten-Differenzen-Methode zu sehen.

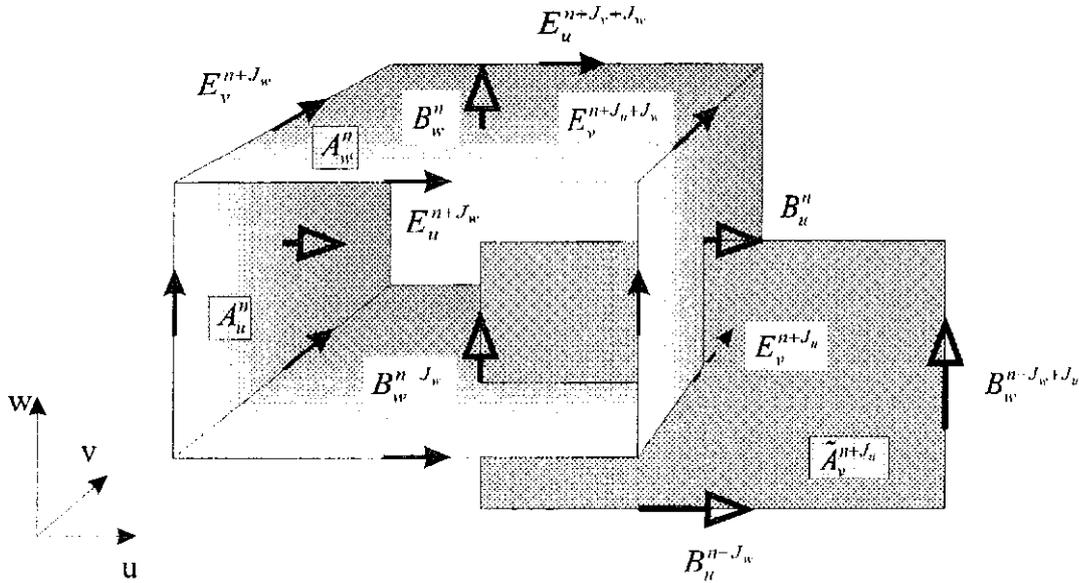


Bild 3-2: Einheitszelle bei der Finiten Integrations-Methode

Bei der oben dargestellten Numerierung der Zellen und Einführung von Vektoren und Matrizen lassen sich für das innere Lösungsgebiet die diskreten Maxwell'schen Gleichungen anschreiben:

$$\begin{aligned}
 -\mathbf{D}_A \mathbf{b} &= \mathbf{C} \mathbf{D}_s \mathbf{e} \\
 \tilde{\mathbf{D}}_A \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{e}} &= \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{D}_s \mathbf{D}_\mu^{-1} \mathbf{b}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{e} = \left\{ E_u^1, \dots, E_u^I, \dots, E_u^{II}, \dots, E_u^{ILM}, E_v^1, \dots, E_v^{ILM}, E_w^1, \dots, E_w^{ILM} \right\}^T$$

$$\mathbf{b} = \left\{ B_u^1, \dots, B_u^I, \dots, B_u^{II}, \dots, B_u^{ILM}, B_v^1, \dots, B_v^{ILM}, B_w^1, \dots, B_w^{ILM} \right\}^T$$

$$\mathbf{D}_s = \text{diag} \left\{ \delta u^1, \dots, \delta u^I, \dots, \delta u^{II}, \dots, \delta u^{ILM}, \delta v^1, \dots, \delta v^{ILM}, \delta w^1, \dots, \delta w^{ILM} \right\}$$

$$\mathbf{D}_A = \text{diag} \left\{ A_u^1, \dots, A_u^I, \dots, A_u^{II}, \dots, A_u^{ILM}, A_v^1, \dots, A_v^{ILM}, A_w^1, \dots, A_w^{ILM} \right\}$$
(3-16)

\mathbf{D} ist eine Diagonalmatrix und \mathbf{C} eine Topologiematrix mit den Elementen $(-1,0,1)$, die den Beitrag einer bestimmten Feldkomponente zu einem Umlaufintegral beschreibt.

Unter Einbeziehung von Randbedingungen gilt es nun (3-16) zu lösen. Dabei wird bei statischen oder stationären Feldern ein Gleichungssystem gelöst, oder es findet bei transienten Feldern unter Einbeziehung von Anfangswerten eine rekursive Zeitintegration statt. Da sich Diagonalmatrizen einfach durch Kehrwertbildung ihrer Elemente invertieren und die Elemente der Topologiematrizen sich aus Permutationen der Indizes bestimmen lassen, sind zum einen die Zahl der Rechenoperationen und zum anderen der Speicheraufwand vor allem bei Zeitbereichsverfahren sehr gering.

Zeitintegration nach dem Leap-Frog-Verfahren

Zur Integration von Gleichung (3-16) wird wie bei den meisten Zeitbereichsverfahren das Leap-Frog-Schema [Yee3] benutzt, bei dem die Lösung zweier gekoppelter Differentialgleichungen gesucht wird. Die Zeitableitung wird durch einen zentralen Differenzenoperator approximiert, und das System der Differentialgleichungen kann durch Angabe der Anfangswerte \mathbf{b}^0 und $\mathbf{e}^{1/2}$ rekursiv integriert werden. Dabei wird eine der Gleichungen zu einem halben Zeitschritt später als die andere berechnet und beim nächsten Zeitschritt in die andere eingesetzt.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^{p+1} &= \mathbf{b}^p - \delta t \left(\mathbf{D}_A^{-1} \mathbf{C} \mathbf{D}_s \right) \mathbf{e}^{p+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{e}^{p+\frac{3}{2}} &= \mathbf{e}^{p+\frac{1}{2}} + \delta t \left(\mathbf{D}_\varepsilon^{-1} \tilde{\mathbf{D}}_A^{-1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{D}_s \mathbf{D}_\mu^{-1} \right) \mathbf{b}^{p+1} \end{aligned} \quad (3-17)$$

Hierbei muß die Zeitschrittweite δt das Courant-Kriterium erfüllen um Stabilität des Verfahrens zu garantieren:

$$\delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\left(\frac{1}{\delta u}\right)^2 + \left(\frac{1}{\delta v}\right)^2 + \left(\frac{1}{\delta w}\right)^2}} \quad (3-18)$$

Da nach den Maxwell'schen Gleichungen die Wirkung einer Ursache verzögert mit der Lichtgeschwindigkeit c erfolgt (Retardierung), wäre bei Verletzung des Kriteriums das Abtasttheorem nicht erfüllt. Dieses Kriterium stellt eine große Einschränkung bezüglich der räumlichen Diskretisierung dar. Will man nur einen Teil des Lösungsgebietes fein diskretisieren, ist man gezwungen mit einer der feineren Diskretisierung entsprechenden kleinen Zeitschrittweite zu arbeiten, was zu langen Rechenzeiten führt. Dieses kann durch die Einführung von lokal variablen Zeitschritten vermieden werden, bedeutet aber einen erheblichen Eingriff in den Algorithmus und dessen Effizienz.

Die Zeitbereichsmethode bietet unter anderem den Vorteil, daß Ergebnisse durch Fouriertransformation für ein ganzes Frequenzspektrum mit nur einem Rechengang gewonnen werden können, indem die zeitliche Anregung einer Quelle entsprechend gewählt wird. Jedoch unabhängig vom Anregungsverlauf muß ein stationärer Zustand abgewartet werden, was z.B. bedeutet, daß sich die Feldamplitude bei sinusförmiger Anregung kaum noch ändert, oder daß bei impulsförmiger Anregung die verbleibenden Reflexionen vernachlässigt werden können. Mit diesen Überlegungen erkennt man, daß resonante Strukturen hoher Güte mit Zeitbereichsverfahren nur bedingt berechenbar sind. Für niederfrequente Anwendungen ist dieses Verfahren nur für impulsförmige Anregungen geeignet, da bei harmonischer Anregung unter Umständen die Periodendauer die Zeitschrittweite um Größenordnungen übertrifft, so daß eine Rechnung nicht in angemessener Zeit ausgeführt werden kann.

Randbedingungen

Zur Lösung des Anfangswertproblems müssen die Randwerte in diskreter Form vorgegeben werden. Hierbei sind im MAFIA-Programm die wichtigsten Randbedingungen (elektrische, magnetische, offene sowie Wellenleiter-Randbedingung) implementiert. Während elektrische und magnetische Randbedingungen durch Nullsetzen der entsprechenden Feldkomponente erreicht werden können, erfordern Strahlungsrandbedingungen einigen numerischen Aufwand.

1. Strahlungsrandbedingungen

Sollen an den Grenzen des Berechnungsgebiets offene Ränder simuliert werden, so muß ein kontinuierliches Winkelspektrum ebener Wellen reflexionsfrei absorbiert werden. Dies läßt sich nur näherungsweise erreichen und ist abhängig von dem Grad der Approximation. Dieses Problem ist zur Zeit Gegenstand der Forschung der numerischen Feldberechnung, z.B. [Dohl, Ito1, Mil1].

Eine mögliche Methode geht von der Näherung des d'Alembertschen Operators (3-19) aus, der für ein- (+) und auslaufende (-) Wellen an der Berandungsfläche formal separiert werden kann:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_+ \mathbf{D}_- \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3-19)$$

Soll nun beispielsweise an der Berandung $u=u_{\min}$ eine Strahlungsrandbedingung vorliegen, so läßt sich der Operator wie folgt aufspalten:

$$\mathbf{D}_\pm = \frac{\partial}{\partial u} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{1 - \frac{\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2}}{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}} \quad (3-20)$$

Durch formales Entwickeln des Wurzelterms in eine gebrochen rationale Approximation läßt sich der Pseudo-Differentialoperator als eine Summe darstellen. Für eine Approximation bis zur dritten Ordnung lautet sie folgendermaßen:

$$D_{\pm} = \frac{\partial}{\partial u} \left(q_0 \frac{\partial}{\partial t} + q_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right) \right) \pm \left(p_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + p_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right) \right) \quad (3-21)$$

Die Parameter q und p lassen sich je nach Kriterium und Einfallswinkel der ebenen Welle optimieren. Durch Approximation der Differentialoperatoren mit Differenzenoperatoren gewinnt man Randoperatoren, die leicht in den Algorithmus eingearbeitet werden können. Hieraus lassen sich auch Operatoren für die Kanten und Ecken der Berandungsfläche ableiten. Wieder erhält man durch zyklische Vertauschung der Koordinaten die entsprechenden Randbedingungen für die anderen Berandungsflächen.

2. Wellenleiter-Randbedingungen

War unter Punkt 1 ein kontinuierliches Winkelspektrum auslaufender Wellen reflexionsarm zu absorbieren, so läßt sich bei einer Wellenleiter-Randbedingung das ausstrahlende Feld in ein diskretes Spektrum auslaufender Wellentypen zerlegen. Wird eine harmonische Zeitabhängigkeit mit der Kreisfrequenz ω vorausgesetzt, so läßt sich ganz analog zu den analytisch berechenbaren Hohlleitermoden zunächst die axiale Abhängigkeit von der Wellengleichung separieren und man erhält eine zweidimensionale Eigenwertgleichung für die komplexen Feldvektoren $\underline{\mathbf{e}}$ und $\underline{\mathbf{b}}$. Wird eine Ausbreitung in u -Richtung sowie ein homogenes Medium vorausgesetzt, so läßt sich (3-16) wie folgt umformen:

$$\underline{\mathbf{e}}(u, v, w, \omega) = \underline{\mathbf{e}}(v, w, \omega) e^{-i\beta \delta u} \quad (3-22)$$

$$0 = \left(\tilde{\mathbf{D}}_A^{-1} \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{D}}_s \tilde{\mathbf{D}}_A^{-1} \mathbf{C} \mathbf{D}_s + \kappa^2 \right) \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{e}} \\ \underline{\mathbf{b}} \end{Bmatrix}$$

$$\kappa^2 = k^2 - \beta^2$$

Die Felder sind dabei in Ebene $u=i\delta u$ lokalisiert, das heißt die Vektoren und Matrizen haben die Ordnung LM . Unter Einbeziehung der zweidimensionalen Randbedingung in dieser Ebene lassen sich die Eigenwerte κ und die zugehörigen diskreten Eigenvektoren $\underline{\mathbf{e}}$ und $\underline{\mathbf{b}}$ bestimmen. Analog zu den kontinuierlichen Wellentypen lassen sich diese Eigenvektoren in transversal elektrische und transversal magnetische Moden unterscheiden, wenn ein homogenes Medium in der Wellenleiterebene vorausgesetzt wird. Im Falle der transversalen Inhomogenität, wenn z.B. unterschiedliche Permittivitäten vorhanden sind, existieren im allgemeinen nur noch Hybridmoden.

Die Eigenvektoren sind orthogonal zueinander, bzw. lassen sich im Falle der Entartung orthogonalisieren. Zudem ist das System der Eigenvektoren innerhalb der durch das Gitter begrenzten Auflösung vollständig. Somit lassen sich in der Wellenleiterebene durch Überlagerung von ausbreitungsfähigen Wellentypen (fast) beliebige Anregungen realisieren.

Um nun zu einer Wellenleiter-Randbedingung zu gelangen, muß das sich in Richtung des zu simulierenden Wellenleiters ausbreitende Feld in die Hohlleitermoden zerlegt werden. Diese Entwicklung geschieht dabei eine Gitterschicht vor der Wellenleiterebene, so daß sich das komplexe Feld am Hohlleitereingang durch Moden wie folgt darstellen läßt:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{e}} &= \sum_q \left(a_q e^{-i\beta_q \delta u} + b_q e^{+i\beta_q \delta u} \right) \hat{\underline{\mathbf{e}}}_q \\ \underline{\mathbf{h}} &= \sum_q \left(a_q e^{-i\beta_q \delta u} - b_q e^{+i\beta_q \delta u} \right) \hat{\underline{\mathbf{h}}}_q\end{aligned}\quad (3-23)$$

Hierin sind a_q die Amplituden der vorwärtslaufenden, anregenden Wellentypen und b_q die Amplituden der rückgestreuten Wellentypen, wobei die Eigenvektoren leistungsnormiert wurden:

$$\begin{Bmatrix} \hat{\underline{\mathbf{e}}}_q \\ \hat{\underline{\mathbf{h}}}_q \end{Bmatrix} = \frac{\begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{e}}_q \\ \underline{\mathbf{h}}_q \end{Bmatrix}}{\iint_A (\underline{\mathbf{E}}_q \times \underline{\mathbf{H}}_q) \cdot d\mathbf{A}} = \frac{\begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{e}}_q \\ \underline{\mathbf{h}}_q \end{Bmatrix}}{[\underline{\mathbf{D}}_s \underline{\mathbf{e}}_q]^T \tilde{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{D}}_s \underline{\mathbf{h}}_q}\quad (3-24)$$

Aufgrund der harmonischen Zeitabhängigkeit läßt sich das komplexe Feld aus zwei zeitdiskreten Werten am Hohlleitereingang berechnen [Doh1]:

$$\underline{\mathbf{e}}_t = \frac{-i e^{-i\omega(p+\frac{1}{2})\delta t}}{\sin \omega \delta t} \left(e^{p+\frac{1}{2}}(u=i\delta u) e^{i\omega \delta t} + e^{p-\frac{1}{2}}(u=i\delta u) \right)\quad (3-25)$$

Durch die Forderung der Stetigkeit der transversalen Feldstärken auf der Trennfläche und durch Ausnutzung der Orthonormalität der Eigenvektoren (3-24) lassen sich die unbekanntenen Amplituden in jedem Zeitschritt ermitteln:

$$b_q = e^{-i\beta_q \delta u} \underline{\mathbf{e}}_t^T \underline{\mathbf{D}}_s \tilde{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{D}}_s \underline{\mathbf{h}}_q - a_q e^{-i2\beta_q \delta u}\quad (3-26)$$

Somit ist das Feld in der Gitterschicht $i=1$ bekannt, und durch Annahme eines homogenen Leitungsstücks δu läßt sich aus (3-23) die Randbedingung in der Schicht $i=0$ bestimmen.

3.2.2 Lösung von Hohlleiterproblemen mit dem MAFIA-Programm

Die Anwendungsmöglichkeiten des MAFIA-Programms für verschiedene elektromagnetische Aufgabenstellungen werden in Bild 3-3 aufgezeigt. In diesem Kapitel sollen die für die Lösung von dreidimensionalen quasi-optischen Feldproblemen wichtigen Programmteile (Gittererzeugung, Eigenwertlöser, Zeitbereichlöser und Postprozessor) beschrieben werden.

Gittererzeugung

Die Erzeugung eines Gitters ist vom Benutzer auszuführen. Dabei hat man die Möglichkeit, durch Vorgabe von sich schneidenden Flächen $u=const$, $v=const$ und $w=const$ die Gitterlinien zu definieren. Somit ist eine lokale Verfeinerung des Gitters nicht möglich.

Der Gittererzeuger bietet eine große Anzahl vordefinierter Körper mit dem das Rechengebiet gefüllt werden kann. Jedem dieser Körper kann dabei später im entsprechendem Lösungsmodul eine bestimmte Materialeigenschaft zugewiesen werden. Die so definierten Gebilde werden dem Gitter angepaßt, wobei eine Triangulierung, das heißt eine teilweise Ausfüllung der Zellen möglich ist.

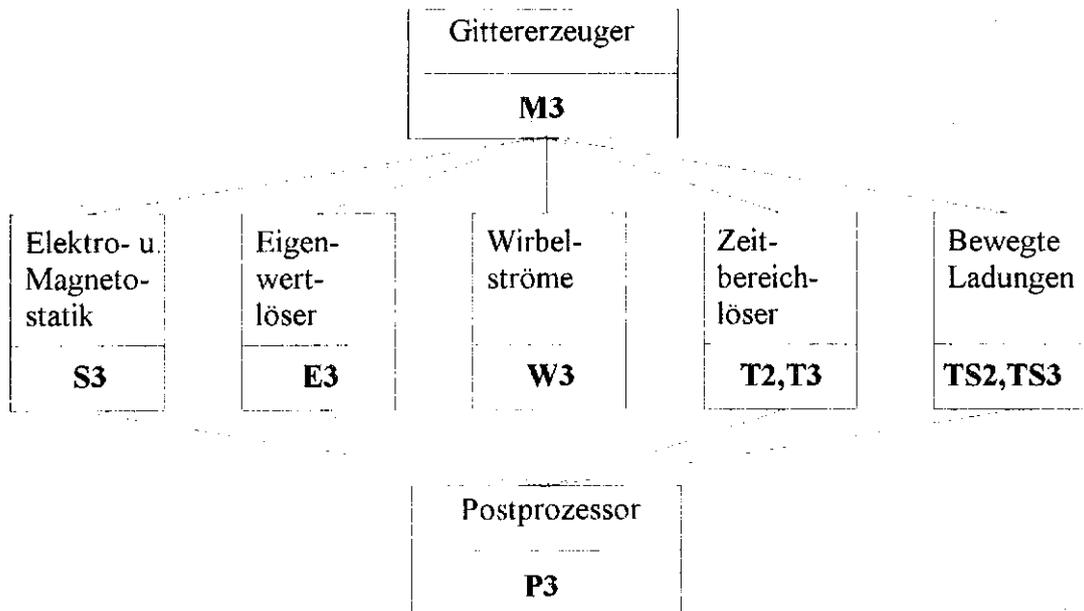


Bild 3-3: Modulkonzept des MAFIA-Programms

Da die Module eigenständige Programme sind, werden die Daten in sogenannten 'direct access files' gespeichert und so den anderen Programmen zur Verfügung gestellt.

Bei Rechnungen mit Wellenleiter-Randbedingung muß zusätzlich zum dreidimensionalen Gitter je Tor ein zweidimensionales Gitter erstellt werden. Hierbei müssen die Gittergeometrien und die Materialdefinitionen in der Berandungsebene übereinstimmen.

Eigenwertlöser für zweidimensionale Anwendungen

Die mit dem Gittererzeuger erstellten zweidimensionalen Geometrien werden mit Hilfe eines Matrixgenerators zu Randwertaufgaben formuliert. Je nach Aufgabenstellung berechnet der Eigenwertlöser die Resonanzfrequenzen eines zweidimensionalen Resonators oder für eine gegebene Frequenz die Ausbreitungskonstanten von Wellentypen als Eigenwerte. Ist Entartung zu erwarten, was vor allem bei symmetrischen Problemen auftaucht, so besteht die Möglichkeit einer Orthogonalisierung der Eigenvektoren. Gefundene Eigenvektoren werden mit Hilfe von Divergenztests auf reale Moden hin untersucht. Vor allem Moden hoher Ordnung, das heißt Wellentypen mit kleinen oder imaginären Ausbreitungskonstanten, lassen Genauigkeitsprobleme erwarten.

Nachdem das Randwertproblem gelöst ist, werden alle gefundenen Eigenvektoren, die aus Real- und Imaginärteil des elektrischen und magnetischen Feldes bestehen, bis zu einer maximalen Zahl abgespeichert. Der dazu benötigte Speicherbedarf läßt sich wie folgt abschätzen:

$$SB^{Moden} = 48LMN^{Moden} [Bytes] \quad (3-27)$$

Bei einer für diese Arbeit typischen Aufgabenstellung (Anzahl Zellen in transversaler Ebene $LM=10000$ und Anzahl Moden $N^{Moden}=150$) erreicht die Größe des Datenfiles selbst bei einfach genauen Zahlendarstellung 72 MByte. Eine selektive Abspeicherung, wie sie bei welligen Wellenleitern vorteilhaft wäre, ist in der benutzten Version 3.1 nicht möglich.

Aus diesem Grund und wegen Genauigkeitsproblemen bei der Berechnung von Moden hoher Ordnung wurde dieses Programm um eine benutzerdefinierte Schnittstelle ergänzt, worauf im nächsten Kapitel eingegangen wird.

Zeitbereichlöser

Dieses Programm berechnet das dreidimensionale Feldproblem mit Hilfe des Yee-Algorithmus (3-17) [Yee3]. Dazu werden zunächst die Gitterdaten geladen und daraus nach dem Kriterium (3-18) eine Zeitschrittweite vorgeschlagen. Die Anzahl der Zeitschritte muß dabei vom Benutzer vorgegeben werden und ist abhängig von der Güte des Systems. Ein allgemein gültiges Kriterium dafür läßt sich nicht angeben sondern muß experimentell ermittelt werden. Durch die Möglichkeit eines Neustarts mit Anfangswerten aus den Endwerten einer vorangegangenen Rechnung ist dabei der Verlust an Rechenzeit gering.

Für die sechs Berandungsflächen des Gitters können die Randbedingungen 'elektrisch', 'magnetisch', 'offen' oder 'Wellenleiter' vorgegeben werden. Bei letzterem müssen dann die mit dem Eigenwertlöser berechneten Wellentypen geladen werden, wobei hier ein selektives Laden möglich ist. Bei der offenen Randbedingung muß darauf geachtet werden, daß das Gebiet einige Gitterlinien vor dem Rand homogen ist.

Den im Gittererzeuger definierten Körpern werden Materialeigenschaften zugewiesen. Hierbei können die Permittivität, Permeabilität und Leitfähigkeit jeweils als tensorielle Größe definiert werden, wenn die Hauptachsen des Tensors mit den Koordinatenachsen zusammenfallen. Weiterhin kann ein Körper als elektrisch oder magnetisch leitend definiert werden. Als anregende Größe können Dipole, ebene Wellen oder Hohlleitermoden mit beliebigen Signalformen vorgegeben werden, wenn bei letzteren Homogenität in der Wellenleiterebene herrscht, da dann die Moden von der Frequenz unabhängig sind. Sollen Streuparameter ermittelt werden, so ist es ratsam ein harmonisches Zeitsignal zu verwenden und den eingeschwungenen Zustand abzuwarten. Da in jedem Zeitschritt während der Lösung sehr viele Daten anfallen und nicht alles abgespeichert werden kann, muß definiert werden, welche Größen von Interesse sind und dem Postprozessor zur weiteren Auswertung zu Verfügung gestellt werden sollen.

Postprozessor

Der Postprozessor erlaubt eine Vielzahl von Darstellungsformen der berechneten Felder in Form von zwei- oder dreidimensionalen Konturplots oder Vektorpfeildarstellungen. Weiterhin sind verschiedene Möglichkeiten zur weiteren Berechnung implementiert. So lassen sich zum Beispiel aus den berechneten Feldgrößen Energiedichte oder Wandverluste mit der Power-loss-Methode [Ram1] ermitteln. Aus den Zeitsignalen können Einhüllende gebildet werden oder durch diskrete Fourier-Transformation das Frequenzspektrum analysiert werden.

3.2.3 Ergänzung des MAFIA-Programms

Die Berechnung der Antennen quasi-optischer Wellentypwandler erfordert wegen der Überdimensioniertheit der in dieser Arbeit betrachteten Hohlleiter die Anregung mit Wellentypen hoher Ordnung. Es hat sich gezeigt (Kapitel 4.1), daß Moden hoher Ordnung nicht mit der erforderlichen Genauigkeit mit Hilfe des Eigenwertlösers bestimmt werden konnten. Die Genauigkeit der Eigenwerte und Eigenvektoren ließe sich erhöhen, indem unter Inkaufnahme längerer Rechenzeiten das zweidimensionale Gitter feiner aufgelöst würde. Dies hätte allerdings zufolge, daß bei der eigentlichen dreidimensionalen Berechnung dasselbe feine Gitter benutzt werden müßte, was zu nichtannehmbaren Rechenzeiten führt.

Da die Eigenwerte und Eigenvektoren im Kreishohlleiter analytisch bekannt sind, wäre es sinnvoll, diese, anstatt der mit dem Eigenwertlöser berechneten, vorgeben zu können. Diese Möglichkeit ist jedoch mit der benutzten Programmversion nicht vorgesehen. Allerdings bietet das Programm die Möglichkeit einer Erweiterung mit Hilfe eines vom Benutzer veränderbarem Unterprogramms.

Anpaßbares Unterprogramm

Jedes Programmmodul enthält neben den spezifischen Menüs ein vom Benutzer veränderbares Fortran-Unterprogramm. Dieses wird dem entsprechenden Modul nach Veränderung und

Übersetzung dem ausführbaren Programm zugebunden. Da diese Möglichkeit in der Version 3.1 nicht dokumentiert ist, wurde nach Absprache mit der MAFIA-Betreuung das Programm so verändert, daß nach bestimmten Richtlinien erstellte Datenfiles in ein 'direct-access-file' eingelesen werden können. Kennt man die Struktur der vom Eigenwertlöser abgespeicherten Eigenvektor-Daten, so können nach derselben Struktur Daten von analytisch berechneten Wellentypen dem Programm vorgegeben werden.

Datenstruktur der Eigenvektoren

Ein mit dem Eigenwertlöser berechneter diskreter Wellentyp wird getrennt nach elektrischer und magnetischer Feldstärke sowie Real- und Imaginärteil abgespeichert. Dabei werden die vektoriellen Komponenten entsprechend der Lokalisierung der Einheitszelle über Längen bzw. Flächen gemittelt. Ist die Wellenleiterebene durch $u=u_{min}$ definiert, und ist L die Anzahl Gitterzellen in der v -Ausdehnung und M die Anzahl Gitterzellen in w -Richtung, so stellt sich ein Eigenvektor folgendermaßen dar:

$$\operatorname{Re}\{\mathbf{e}\} = \left\{ \begin{array}{l} E_u^{J_u}, E_u^{J_u+J_v}, \dots, E_u^{J_u+(L-1)J_v}, E_u^{J_u+J_w}, E_u^{J_u+J_v+J_w}, \dots, E_u^{J_u+(L-1)J_v+(M-1)J_w} \\ E_v^{J_u}, E_v^{J_u+J_v}, \dots, E_v^{J_u+(L-1)J_v}, E_v^{J_u+J_w}, E_v^{J_u+J_v+J_w}, \dots, E_v^{J_u+(L-1)J_v+(M-1)J_w} \\ E_w^{J_u}, E_w^{J_u+J_v}, \dots, E_w^{J_u+(L-1)J_v}, E_w^{J_u+J_w}, E_w^{J_u+J_v+J_w}, \dots, E_w^{J_u+(L-1)J_v+(M-1)J_w} \end{array} \right\} \quad (3-28)$$

Wieder läßt sich durch zyklisches Vertauschen der Indizes die Randbedingung für eine andere Berandung finden. Gleichung (3-28) gilt entsprechend für die Imaginärteile der Felder um eine Viertelperiode versetzt. Will man nun Wellentypen benutzerdefiniert vorgeben, so muß man die analytische Lösung in diskreten Punkten der Wellenleiterebene entsprechend dieser Struktur berechnen.

Diskretisierung der analytischen Lösung

Die leistungsnormierten Feldstärken der TE- und TM-Hohlleitermoden werden nun in der Ebene $u=u_{min}$ diskretisiert, wobei $z=0$ gesetzt werden kann. Wie in Bild 3-4 angedeutet, muß dabei eine mögliche Verschiebung des Mittelpunktes in der Gitterebene berücksichtigt werden. Da die Gitterkoordinaten über den Rand des Wellenleiters hinausgehen, müssen die Felder noch mit einer Sprungfunktion gewichtet werden.

Drückt man die unterschiedliche Lokalisierung der Feldkomponenten innerhalb der Elementarzelle durch einen Offset p und q aus, so lassen sich die Hohlleiterkoordinaten bei einer gleichmäßigen Diskretisierung angeben:

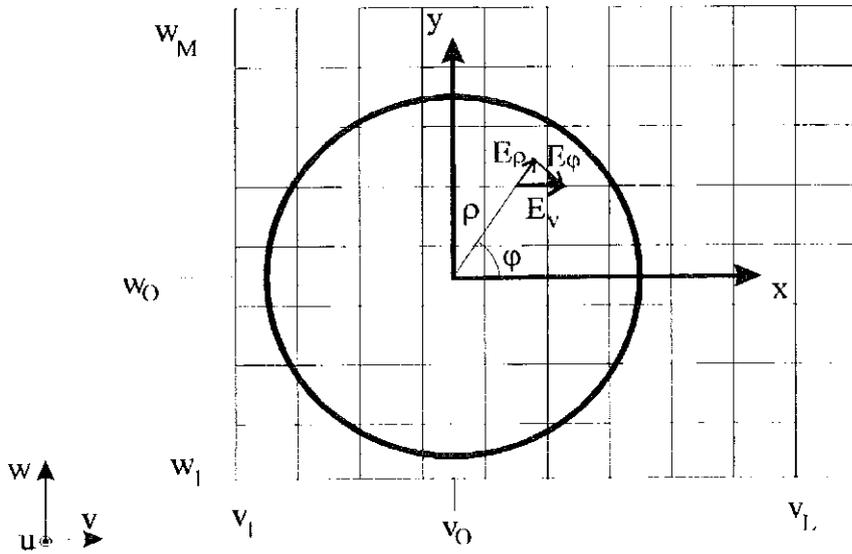


Bild 3-4: Zur Diskretisierung einer Mode in der Wellenleiterebene

$$\begin{aligned}
 x_l^p &= v_1 + \frac{l-1}{L-1}(v_L - v_1) - v_0 + \frac{p}{2}\delta v \\
 y_m^q &= w_1 + \frac{m-1}{M-1}(w_M - w_1) - w_0 + \frac{q}{2}\delta w \\
 \rho_{lm}^{pq} &= \sqrt{(x_l^p)^2 + (y_m^q)^2} \quad \varphi_{lm}^{pq} = \arctan\left(\frac{y_m^q}{x_l^p}\right)
 \end{aligned} \tag{3-29}$$

Hiermit lassen sich die diskreten Eigenvektoren \underline{e} und \underline{h} für transversal elektrische Wellentypen folgendermaßen bestimmen:

$$\begin{aligned}
 E_u^{J_u+(l-1)J_v+(m-1)J_w} &= 0 \\
 E_v^{J_u+(l-1)J_v+(m-1)J_w} &= E_\rho^{TE}(\rho_{lm}^{10}, \varphi_{lm}^{10}, 0) \cos \varphi_{lm}^{10} - E_\varphi^{TE}(\rho_{lm}^{10}, \varphi_{lm}^{10}, 0) \sin \varphi_{lm}^{10} \\
 E_w^{J_u+(l-1)J_v+(m-1)J_w} &= E_\rho^{TE}(\rho_{lm}^{01}, \varphi_{lm}^{01}, 0) \sin \varphi_{lm}^{01} + E_\varphi^{TE}(\rho_{lm}^{01}, \varphi_{lm}^{01}, 0) \cos \varphi_{lm}^{01}
 \end{aligned} \tag{3-30}$$

$$\begin{aligned}
 B_u^{J_u-1+(l-1)J_v+(m-1)J_w} &= \mu H_z^{TE}(\rho_{lm}^{11}, \varphi_{lm}^{11}, 0) \\
 B_v^{J_u+(l-1)(J_v-1)+(m-1)J_w} &= \mu H_\rho^{TE}(\rho_{lm}^{01}, \varphi_{lm}^{01}, \frac{1}{2}\delta u) \cos \varphi_{lm}^{01} - \mu H_\varphi^{TE}(\rho_{lm}^{01}, \varphi_{lm}^{01}, \frac{1}{2}\delta u) \sin \varphi_{lm}^{01} \\
 B_w^{J_u+(l-1)J_v+(m-1)(J_w-1)} &= \mu H_\rho^{TE}(\rho_{lm}^{10}, \varphi_{lm}^{10}, \frac{1}{2}\delta u) \sin \varphi_{lm}^{10} + \mu H_\varphi^{TE}(\rho_{lm}^{10}, \varphi_{lm}^{10}, \frac{1}{2}\delta u) \cos \varphi_{lm}^{10}
 \end{aligned} \tag{3-31}$$

Für transversal magnetische Moden enthält man entsprechend:

$$\begin{aligned}
 E_u^{J_u+(l-1)J_v+(m-1)J_w} &= E_z^{TM}(\rho_{lm}^{00}, \varphi_{lm}^{00}, \frac{1}{2}\delta u) \\
 E_v^{J_u+(l-1)J_v+(m-1)J_w} &= E_\rho^{TM}(\rho_{lm}^{10}, \varphi_{lm}^{10}, 0)\cos\varphi_{lm}^{10} - E_\varphi^{TM}(\rho_{lm}^{10}, \varphi_{lm}^{10}, 0)\sin\varphi_{lm}^{10} \\
 E_w^{J_u+(l-1)J_v+(m-1)J_w} &= E_\rho^{TM}(\rho_{lm}^{01}, \varphi_{lm}^{01}, 0)\sin\varphi_{lm}^{01} + E_\varphi^{TM}(\rho_{lm}^{01}, \varphi_{lm}^{01}, 0)\cos\varphi_{lm}^{01}
 \end{aligned} \tag{3-32}$$

$$\begin{aligned}
 B_u^{J_u-1+(l-1)J_v+(m-1)J_w} &= 0 \\
 B_v^{J_u+(l-1)(J_v-1)+(m-1)J_w} &= \mu H_\rho^{TM}(\rho_{lm}^{01}, \varphi_{lm}^{01}, \frac{1}{2}\delta u)\cos\varphi_{lm}^{01} - \mu H_\varphi^{TM}(\rho_{lm}^{01}, \varphi_{lm}^{01}, \frac{1}{2}\delta u)\sin\varphi_{lm}^{01} \\
 B_w^{J_u+(l-1)J_v+(m-1)(J_w-1)} &= \mu H_\rho^{TM}(\rho_{lm}^{10}, \varphi_{lm}^{10}, \frac{1}{2}\delta u)\sin\varphi_{lm}^{10} + \mu H_\varphi^{TM}(\rho_{lm}^{10}, \varphi_{lm}^{10}, \frac{1}{2}\delta u)\cos\varphi_{lm}^{10}
 \end{aligned} \tag{3-33}$$

Mit diesen Vorschriften werden die Vektoren jeweils nach Real- und Imaginärteil getrennt in Datenfiles mit dem Ordnungsprinzip (3-28) abgespeichert und mit Hilfe der Ergänzung im Eigenwertlöser eingelesen.

3.2.4 Simulation der helikalen Aperturantenne

Die Anwendung des Programms ist im wesentlichen nur durch die räumliche Ausdehnung der helikalen Aperturantenne begrenzt. Mit Hilfe der Gleichung (3-7) läßt sich, wie unten gezeigt wird, der Arbeitsspeicherbedarf in Abhängigkeit des anregenden Wellentyps, der Ausdehnung und des verwendeten Algorithmus abschätzen und die Berechenbarkeit für einen bestimmten Rechner angeben. Mit dem zur Verfügung stehenden Rechner (HP9000/755) ist die Analyse durch den Diskretisierungsbedarf von etwa 10 Abtastungen je Wellenlänge vornehmlich auf die undeformierte helikale Aperturantenne mit Anregung von Moden mit Ordnungen $X_{mv} < 30$ bei Betrieb nahe der Grenzfrequenz beschränkt.

Trotz der eingeschränkten Anwendbarkeit lassen sich unter Anwendung dieses Programms Aussagen zum Rückstreuverhalten und zu Kantenbeugungsverlusten gewinnen, und somit wichtige Parameter zur Auslegung des Wellentypwandlers bestimmen.

Maximale Diskretisierungsschrittweite

Die helikale Aperturantenne ist durch die anregende Mode bei gegebener Frequenz bestimmt. Der Diskretisierungsaufwand läßt sich wie folgt abschätzen.

1. Azimutale Abhängigkeit

Bei Verwendung von quaderförmigen Elementarzellen kann die Abtastung der Schwingung $\cos(m\varphi)$ entlang des Azimuts nahe dem Nullpunkt nur für $m < 2$ erreicht werden. Für $m > 1$ kann allerdings die Evaneszenz der Feldverteilung innerhalb des Kaustikradius (2-18) ausgenutzt werden. Fordert man nun eine Abtastung in K Schritten,

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{mK} \quad (3-34)$$

so läßt sich für die Diskretisierungsschrittweiten δx und δy folgende Ungleichung angeben:

$$\delta x = \delta y \leq \frac{\sqrt{2}\pi R \cos\theta}{mK} \quad (3-35)$$

2. Radiale Abhängigkeit

In radialer Richtung beginnt die Schwingung erst ab dem Kaustikradius. Der radiale Index ν gibt dabei die halbe Schwingungszahl an, so daß man ähnlich wie in (3-35) eine Ungleichung für die minimale Diskretisierung erhält.

$$\delta x = \delta y \leq \frac{\sqrt{2}R(1 - \cos\theta)}{\nu K} \quad (3-36)$$

Beide Forderungen lassen sich mit der Minimumfunktion zusammenfassen.

$$\delta x = \delta y \leq \frac{\sqrt{2}R}{K} \min\left(\frac{\pi \cos\theta}{m}, \frac{1 - \cos\theta}{\nu}\right) \quad (3-37)$$

3. Axiale Abhängigkeit

In Ausbreitungsrichtung läßt sich die Tatsache ausnutzen, daß die Hohlleiterwellenlänge immer größer als die Freiraumwellenlänge ist. Man erhält somit mit dem Brillouinwinkel ψ (2-20) die folgende Ungleichung:

$$\delta z \leq \frac{1}{Kk \cos\psi} \quad (3-38)$$

Diskretisiertes Volumen

Das zu diskretisierende Volumen ist durch die Abmessungen der helikalen Aperturantenne gegeben. Zusätzlich müssen M Gitterlinien Abstand zur Antenne eingehalten werden, um Strahlungs- bzw. Wellenleiter-Randbedingungen vorgeben zu können. Die transversale Ausdehnung ist somit wie folgt gegeben.

$$\begin{aligned} A_x &= 2(R + M\delta x) \\ A_y &= 2(R + M\delta y) \end{aligned} \quad (3-39)$$

Die axiale Ausdehnung ist durch die Schnittlänge (2-30) gegeben.

$$A_z = 2\pi R \frac{\sin\theta}{\theta} \cot\psi + 2M\delta z \quad (3-40)$$

Der Parameter M läßt sich dabei auch individuell für jede Begrenzungsfläche vorgeben und kann experimentell optimiert werden.

Anzahl Gitterzellen

Man erhält die minimal erforderliche Zellenzahl, indem die minimale Ausdehnung durch die maximale Schrittweite aufgelöst wird:

$$N_{\min} = \left[2M + \frac{\sqrt{2}K}{\min\left(\frac{\pi \cos \theta}{m}, \frac{1 - \cos \theta}{v}\right)} \right]^2 \left[2M + K \cot^2 \psi \frac{m \sin \theta}{\theta \cos \theta} \right] \quad (3-41)$$

Bild 3-5 zeigt für einige Moden den erforderlichen Arbeitsspeicherbedarf für verschiedene Brillouinwinkel. Hierbei wurde mit einem Aufwand von 60 Byte/Zelle ausgegangen. In der Grafik wurde der Bereich schattiert dargestellt, der mit dem zur Verfügung stehenden Rechner nicht behandelt werden kann. Man erkennt, daß praxisrelevante Moden, wie z. B. $TE_{10,4}$ bei 50° oder $TE_{22,6}$ bei 70° , nicht mehr modellierbar sind. Um dennoch Aussagen mit den zur Verfügung stehenden Mitteln machen zu können, ist eine Skalierung nötig ($TE_{7,3}$), deren Gültigkeit in Kapitel 4.1 diskutiert wird.

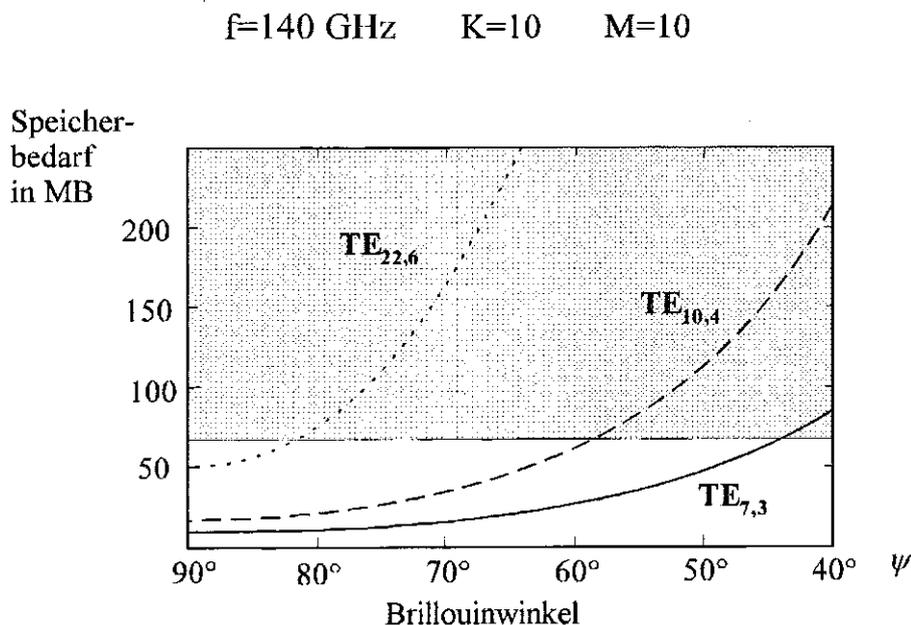


Bild 3-5: Speicherbedarf zur Simulation der helikalen Aperturantenne mit MAFIA

3.3 Zweidimensionale Feldberechnung mit der Randelementmethode

In Kapitel 2.3 wurde gezeigt, daß Innenwanddeformationen zur Formung des Ausgangsstrahls dem geometrischen Ausbreitungsweg der anregenden rotierenden Mode folgen. Es liegt somit eine 'helikale Symmetrie' vor, die zur Berechnung der Felder genutzt werden kann. Im Falle von azimutalen Deformationen kann die Ausbreitung in axialer Richtung separiert werden, und es ergibt sich die skalare zweidimensionale Wellengleichung für die z-Komponente der magnetischen Feldstärke für TE-Moden. Unter der Annahme, daß sich die transversale Ausbreitungskonstante nur gering ändert, was im Falle schwacher Deformationen der Fall ist, kann die Wellengleichung mit Hilfe der Randelementmethode näherungsweise gelöst werden. Für die zweidimensionale Approximation bedeutet dies, daß die Ausbreitung des Feldes in transversaler Richtung mit der Grenzfrequenz erfolgt. Das Feld ist somit transversal magnetisch polarisiert (TM-Wellen).

3.3.1 Herleitung des Randelementverfahrens

Wie bereits in Kapitel 3.1 angesprochen, eignet sich das Randelementverfahren vor allem zur Lösung von Randwertproblemen in homogenen Gebieten, da hier der Vorteil der Reduktion der Dimensionalität im Gegensatz zu Bereichsmethoden zur Geltung kommt. Diese Randwertaufgaben gehen aus linearen elliptischen Differentialgleichungen, wie z.B. der Laplace-, Poisson- oder Helmholtz-Gleichung, hervor. Das Randelementverfahren gehört zu den Methoden der gewichteten Residuen, wobei als Gewichtsfunktion die Fundamentallösung der jeweiligen Differentialgleichung für eine punktförmige Quelle benutzt wird, die der Greenschen Funktion für den unbegrenzten Raum entspricht.

Greensches Theorem

Gesucht ist die Lösung der homogenen zweidimensionalen Wellengleichung für die skalare Funktion u in einem quellfreien Gebiet Ω unter Erfüllung der Randbedingungen auf der Kurve Γ :

$$\Delta_2 u + \kappa^2 u = 0 \quad (3-42)$$

Mit Hilfe der Greenschen Funktion läßt sich u als Integral über die Randkurve darstellen, wobei die Greensche Funktion g die Fundamentallösung der Gleichung

$$\Delta_2 g + \kappa^2 g = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3-43)$$

darstellt. Sie beschreibt das Feld an der Stelle \mathbf{r} einer strahlenden Linienquelle am Ort \mathbf{r}' . Wegen der Rotationssymmetrie der Quelle ist sie nur eine Funktion des Abstands und ist z.B. nach [Zho1] gegeben durch:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(\kappa|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (3-44)$$

Hierin ist $H_0^{(2)}$ die Hankelfunktion zweiter Art nullter Ordnung, die nach Unendlich laufende Wellen beschreibt. Anwendung des Greenschen Theorems in der Ebene liefert aufgrund der Siebeigenschaft der Dirac-Funktion $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ die folgende Darstellung für die gesuchte Funktion u :

$$Cu(\mathbf{r}) = \oint_{\Gamma} \left(u(\mathbf{r}') \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3-45)$$

Der Faktor C ist dabei abhängig davon, ob u_i innerhalb, außerhalb oder auf der Berandung Γ liegt. Ist diese glatt, so ergibt sich:

$$C = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathbf{r} \notin \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{für } \mathbf{r} \in \Gamma \\ 1 & \text{für } \mathbf{r} \in \Omega \end{cases} \quad (3-46)$$

Hat die Berandung Kanten, so ergibt sich für C ein Wert, der dem Raum- bzw. Flächenwinkel proportional ist.

Physikalisch gesehen beschreibt (3-45) das Huygenssche Prinzip. Von jedem Randwert breitet sich eine Zylinderelementarwelle aus, die mit der Greenschen Funktion als Propagator zum Ort \mathbf{r} gelangt. Integration über alle Elementarwellen ergibt dann das Feld $u(\mathbf{r})$.

Wären die Randwerte vollständig bekannt, so wäre das Randwertproblem bereits mit (3-45) gelöst. Bei einem korrekt gestellten Problem jedoch ist nur eine Linearkombination der Randwerte bekannt:

$$f''(\mathbf{r}')u(\mathbf{r}') + f''(\mathbf{r}') \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n} = s(\mathbf{r}') \quad (3-47)$$

Da (3-45) auch für die Randwerte gilt, stellt die Gleichung zusammen mit den Randbedingungen eine Integralgleichung für $u(\mathbf{r}')$ dar, die es zu lösen gilt.

Diskretisierung der Randwerte

Wie bei allen numerischen Verfahren, die zur Methode der gewichteten Residuen gehören, wird nicht der Differentialoperator sondern die gesuchte Funktion $u(\mathbf{r}')$ approximiert. Hierbei wird die Randkurve wie in Bild 3-7 in Elemente unterteilt auf denen u durch Formfunktionen, die nur auf den jeweiligen Elementen von Null verschieden sind, angenähert wird. Die Anzahl der Parameter der Formfunktionen bestimmt damit die Zahl der Stützstellen, die sogenannten Knoten. In dieser Arbeit werden lineare Formfunktionen verwendet:

$$\begin{aligned}
 u(\xi) &= \frac{1}{2}(1-\xi)u_k^L + \frac{1}{2}(1+\xi)u_k^R \\
 \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} &= \frac{1}{2}(1-\xi)q_k^L + \frac{1}{2}(1+\xi)q_k^R
 \end{aligned}
 \tag{3-48}$$

Der dimensionslose Parameter ξ variiert von -1 bis +1 und wandert dabei über das Element k . An den Endpunkten der Elemente befinden sich die Knoten L und R, an denen die Funktion die Werte u^R und u^L bzw. die Normalenableitung die Werte q^R und q^L annehmen. Auf den Elementen ändern sich die Größen linear. Nach Konvention werden die Elemente beim mathematisch positiven Durchlaufen der Kurve in aufsteigender Folge nummeriert, so daß nach Bild 3-7 die Knoten R des k -ten Elements und L des $k+1$ -ten Elements identisch sind. Die Kurve Γ soll (wenn auch im Unendlichen) geschlossen und einfach zusammenhängend sein. Dann kann man ohne Beschränkung fordern, daß der Knoten L des ersten Elements und der Knoten R des letzten Elements K dieselben sind.

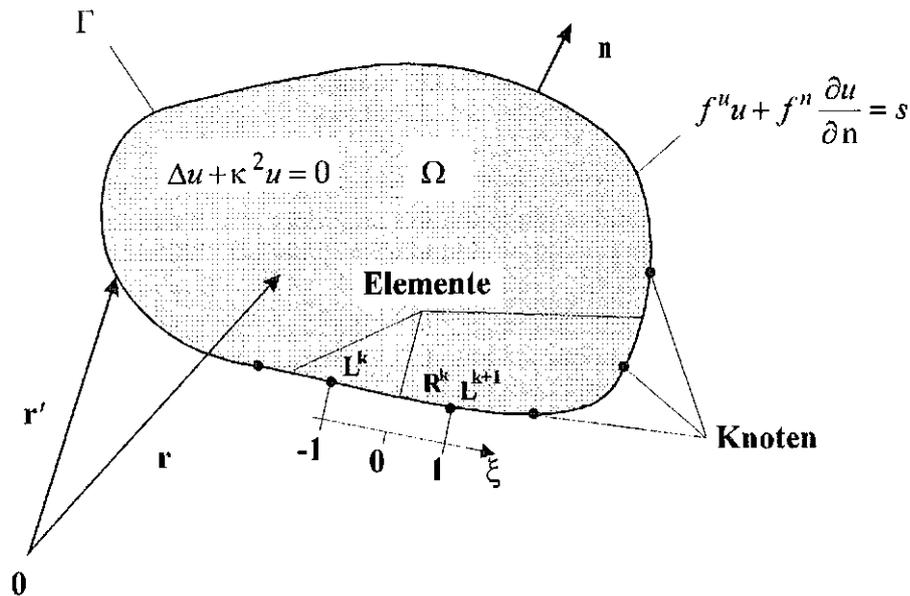


Bild 3-7: Diskretisierung der Randkurve in lineare Elemente

Setzt man nun die approximierten Funktionen (3-48) in die Integralgleichung (3-45) ein, so erhält man das diskrete Analogon.

$$C u_j^R = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \left\{ \int_{I_k} \left[u_k^R (1-\xi) \frac{\partial g}{\partial n} + u_k^L (1+\xi) \frac{\partial g}{\partial n} - q_k^R (1-\xi) g - q_k^L (1+\xi) g \right] d\Gamma \right\}
 \tag{3-49}$$

Diese Gleichung beschreibt die Wirkung der Elemente k auf den j -ten Knoten. Da die Anzahl Knoten und Elemente bei Verwendung linearer Elemente gleich sind, bildet (3-49) ein Gleichungssystem mit K Gleichungen. Zur übersichtlichen Darstellung werden die folgenden Matrizen eingeführt:

$$H_{jk} = C\delta_{jk} - \frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_k} (1-\xi) \frac{\partial g(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j)}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Gamma_{k+1}} (1+\xi) \frac{\partial g(\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_j)}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \right) \quad (3-50)$$

$$G_{jk} = -\frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_k} (1-\xi) g(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j) d\Gamma + \int_{\Gamma_{k+1}} (1+\xi) g(\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_j) d\Gamma \right)$$

Hierin ist δ_{jk} das Kronecker-Symbol. Hiermit läßt sich das Gleichungssystem (3-49) kompakt in Matrixschreibweise formulieren:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (3-51)$$

An dieser Stelle werden die Randbedingungen (3-47) in diskreter Form eingesetzt, und das Randwertproblem kann gelöst werden.

Bestimmung der Matrixelemente

Zur Berechnung der Integrale (3-50) muß zunächst eine Variablentransformation durchgeführt werden. Das Kurvenstück $d\Gamma$ der Länge ℓ_k läßt sich näherungsweise durch $d\xi$ wie folgt ausdrücken:

$$d\Gamma = \frac{1}{2} |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k+1}| d\xi = \frac{1}{2} \ell_k d\xi \quad (3-52)$$

Wie man in Bild 3-8 sieht, variiert der Abstandsvektor \mathbf{r} von \mathbf{r}_k bis \mathbf{r}_{k+1} während ξ von -1 bis +1 verändert wird. Somit läßt sich \mathbf{r} als Funktion von ξ angeben:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_k + (1+\xi) \frac{\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k}{2} - \mathbf{r}_j \quad (3-53)$$

Die Normalenableitung der Greenschen Funktion kann mit Hilfe des Richtungskosinus ausgedrückt werden:

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = \frac{i\kappa}{4} H_1^{(2)}(\kappa r) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \quad (3-54)$$

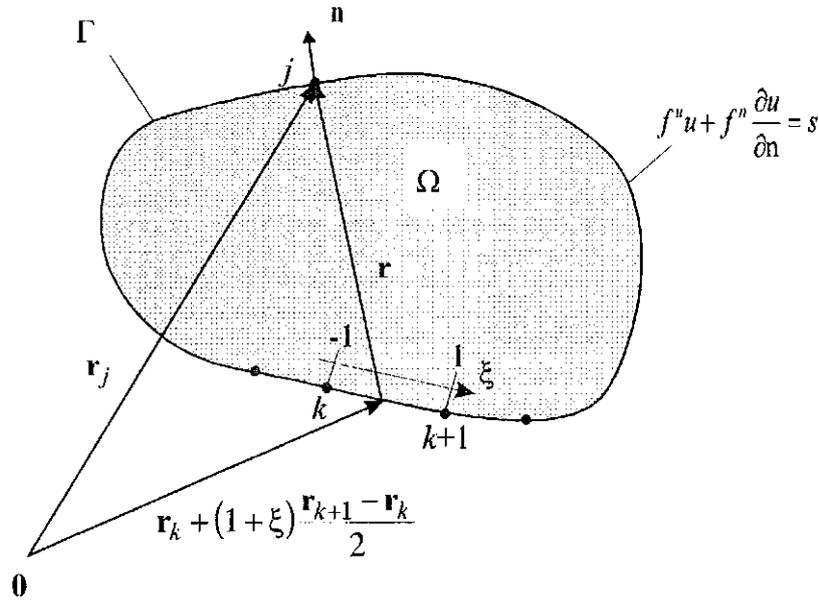


Bild 3-8: Zur Integration über die Randkurve

Der Normalenvektor kann auf dem Element näherungsweise als konstant angesehen werden und läßt sich folgendermaßen ermitteln:

$$\mathbf{n} = -\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k) \quad (3-55)$$

Mit diesen Überlegungen kann man die Integrale über die Randkurvenstücke in (3-50) als Integrale über den Elementparameter ξ schreiben, wobei die Auswertung der Integrale numerisch mit dem Romberg-Verfahren erfolgt.

$$I_1^\pm = \int_{\Gamma_k} (1 \pm \xi) g d\Gamma = \frac{-i\ell_k}{8} \int_{-1}^1 (1 \pm \xi) H_0^{(2)}(\kappa r(\xi)) d\xi \quad (3-56)$$

$$I_2^\pm = \int_{\Gamma_k} (1 \pm \xi) \frac{\partial g}{\partial n} d\Gamma = \frac{i\kappa\ell_k}{8} \int_{-1}^1 (1 \pm \xi) H_1^{(2)}(\kappa r(\xi)) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}(\xi)) d\xi$$

Eine Schwierigkeit bei der Auswertung tritt dann auf, wenn die Wirkung des k -ten Elements auf den k -ten oder $(k+1)$ -ten Knoten berechnet wird. Der Abstand (3-53) wird dann an den Endpunkten des Intervalls null, und die Hankelfunktion in den Integralen (3-56) wird unendlich. Da in diesem Fall der Normalen- und der Abstandsvektor orthogonal zueinander sind, verschwindet das Integral I_2 . Das Integral I_1 läßt sich als Cauchyscher Hauptwert analytisch berechnen [Kag1].

$$I_1^+ = \frac{-i\ell_k}{2} \left(\frac{H_1^{(2)}(\kappa\ell_k)}{\kappa\ell_k} - \frac{2i}{\pi\kappa^2\ell_k^2} \right) \quad (3-57)$$

$$I_1^- = \frac{i\ell_k}{2} \left(\frac{H_1^{(2)}(\kappa\ell_k)}{\kappa\ell_k} - \frac{2i}{\pi} \left[\frac{1}{\kappa^2\ell_k^2} + \ln \frac{\kappa\ell_k}{2} + \gamma - 1 \right] + 1 + S\left(\frac{\kappa\ell_k}{2}\right) \right)$$

mit

$$S(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m} \left(1 - \frac{2i}{\pi} \left[\ln x + \gamma - \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} - \frac{1}{2m+1} \right] \right)}{(m!)^2 (2m+1)} \quad (3-58)$$

Für Elemente höherer Ordnung lassen sich die uneigentlichen Integrale ebenfalls analytisch berechnen. Damit sind alle Matrixelemente bekannt und unter Einbeziehung der Randbedingung ist das Gleichungssystem vollständig bestimmt. Zur Lösung muß (3-51) entsprechend den Randbedingungen umgeordnet werden, worauf im nächsten Abschnitt eingegangen wird.

3.3.2 Randbedingungen bei Hohlleiterproblemen

Zur endgültigen Lösung des Randwertproblems muß das Gleichungssystem (3-51) nach den unbekanntenen Größen aufgelöst werden, was eindeutig durch die Randbedingungen (3-47) bestimmt ist. Entsprechend (3-48) wird die Normalenableitung am Knoten j mit q_j bezeichnet, so daß die Randbedingungen in diskreter Form wie folgt geschrieben werden können:

$$f_j'' u_j + f_j'' q_j = s_j \quad (3-59)$$

Hierin beschreibt s_j einen Quellterm, für $f_j'' = 0$ erhält man eine Dirichletsche und für $f_j'' = 0$ eine Neumannsche Randbedingung. Eine gemischte Randbedingung tritt hier vor allem bei offenen, strahlenden Rändern auf. Die Randbedingungen können auch abschnittsweise auf der Berandung vorgegeben werden.

Für die wichtigsten Randbedingungen bei zweidimensionalen Wellenleiterproblemen wird die Auflösung des Gleichungssystems im folgenden gezeigt. Für das betrachtete Problem der TM-Felder in einem Hohlleiter mit Deformationen in der transversalen Ebene wird sich die homogene Neumannsche und die Wellenleiter-Randbedingung als ausreichend erweisen.

Homogene Dirichletsche Randbedingungen

Im Falle transversal elektrisch polarisierter Wellenfelder gilt die Wellengleichung für die z-Komponente der elektrischen Feldstärke. Ist eine ideal leitende Berandung in der Lösungsebene vorhanden, so muß die dazu tangentialen Feldkomponente verschwinden. Somit gilt die Bedingung:

$$u_j^D = 0 \quad (3-60)$$

Eine weitere Anwendung dieser Randbedingung gilt für transversal magnetische Felder auf Symmetrieachsen. Hier spricht man dann auch von magnetisch leitenden Wänden. Da interne Quellen bei der Betrachtung ausgeschlossen wurden, macht diese Randbedingung nur dann einen Sinn, wenn sie lediglich für einen Teil der Randkurve gilt oder wenn Eigenwertprobleme gelöst werden sollen.

Homogene Neumannsche Randbedingungen

Für transversal magnetisch polarisierte Wellenfelder erfüllt die z-Komponente der magnetischen Feldstärke die Wellengleichung. Ist eine ideal leitende Berandung in der Lösungsebene vorhanden, so muß die Normalenableitung der dazu tangentialen Feldkomponente verschwinden. Somit gilt die Bedingung:

$$q_j^N = 0 \quad (3-61)$$

Hohlleiter-Randbedingung

Eine typische Aufgabenstellung zeigt Bild 3-9. Dargestellt ist eine zweidimensionale Hohlleiterverbindung mit mehreren Toren, an denen sich homogene Parallelplattenleitungen anschließen. In der Literatur werden dabei ausschließlich TE-Felder behandelt, die man zur Berechnung von in der Grundmode betriebenen Rechteckhohlleiter-Verbindungen oder von planaren Schaltungen verwenden kann. In dieser Arbeit hingegen werden TM-Felder in den Parallelplattenleitungen benötigt, da beim Kreishohlleiter nur die z-Komponenten der Feldstärken die Wellengleichung erfüllen und bei TE-Moden nur die magnetische Feldstärke eine z-Komponente besitzt.

Die leistungsnormierten Amplituden der von Unendlich einfallenden Parallelplattenmoden werden mit **a** gekennzeichnet und die durch die Inhomogenität des Wellenleiters gestreuten Wellentypen mit **b**. Für eine TM-Mode lautet der Ausdruck für die z-Komponente der magnetischen Feldstärke der Parallelplattenleitung in Abhängigkeit der lokalen Variablen η, ζ folgendermaßen.

$$u(\eta, \zeta) = \sum_p \frac{2a_p \sqrt{Y_p}}{\sqrt{h(1 + \delta_{0p})}} \cos \frac{p\pi\eta}{h} e^{i\beta_p\zeta} \quad (3-62)$$

Hierbei ist h der Abstand zwischen den Platten, β_p sind die Ausbreitungskonstanten der TM-Moden und Y_p der transversale Wellenleitwert (3-63). Für $p=0$ tritt dabei eine TEM Welle auf.

$$Y_p = Y_0 \frac{\kappa}{\beta_p} \quad \beta_p = \sqrt{\kappa^2 - \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2} \quad (3-63)$$

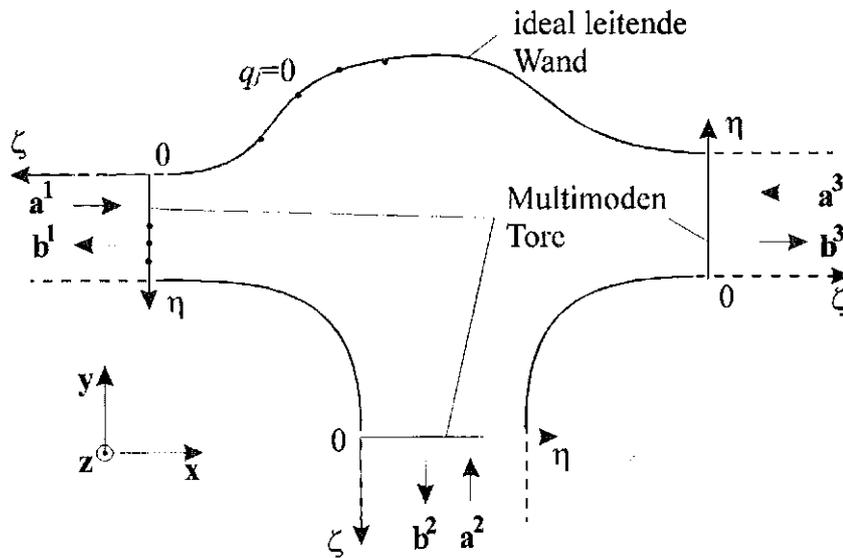


Bild 3-9: Parallelplattenleiterverbindung mit mehreren Toren

An der Stelle $\zeta=0$ wird nun die Funktion u sowie deren Normalenableitung, die mit der Ableitung nach ζ identisch ist, diskretisiert. Hiermit gelangt man dann zur diskreten Hohlleiter-Randbedingung:

$$u_j^{W,N} = \sum_p \frac{2\sqrt{Y_p^N}}{\sqrt{h^N(1+\delta_{0p})}} \cos \frac{p\pi\eta_j}{h^N} (a_p^N + b_p^N) = \sum_p E_{jp} (a_p^N + b_p^N) \quad (3-64)$$

$$q_j^{W,N} = \sum_p \frac{2i\beta_p \sqrt{Y_p^N}}{\sqrt{h^N(1+\delta_{0p})}} \cos \frac{p\pi\eta_j}{h^N} (a_p^N - b_p^N) = \sum_p F_{jp} (a_p^N - b_p^N)$$

Hierbei ist N die Nummer des Tores. Man ist nun in der Lage, die unbekanntenen Größen u und q in das Gleichungssystem einzusetzen. Bei dieser direkten Diskretisierung muß jedoch beachtet werden, daß die Anzahl der Moden mit der Anzahl Stützstellen des Tores übereinstimmt, da sonst mit (3-64) das System über- bzw. unterbestimmt ist. Diese Einschränkung läßt sich umgehen, indem man Teilintegrale I_j über $d\eta$ bildet, anstatt direkt zu diskretisieren. Es hat sich aber gezeigt, daß diese Formulierung bezüglich Konvergenz und Stabilität hinreichend ist.

Einsetzen der Randbedingungen in das Gleichungssystem

Mit den diskretisierten Randbedingungen läßt sich (3-51) unter der Annahme, daß nur die besprochenen Randbedingungen vorliegen, wie folgt schreiben:

$$\left\{ \mathbf{H}^D \quad \mathbf{H}^N \quad \mathbf{H}^W \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^D \\ \mathbf{u}^N \\ \mathbf{u}^W \end{Bmatrix} = \left\{ \mathbf{G}^D \quad \mathbf{G}^N \quad \mathbf{G}^W \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^D \\ \mathbf{q}^N \\ \mathbf{q}^W \end{Bmatrix} \quad (3-65)$$

Setzt man nun (3-64) in das System ein, so erhält man unter Verwendung der Matrixschreibweise:

$$\left\{ \mathbf{H}^D \quad \mathbf{H}^N \quad \mathbf{H}^W \mathbf{E} \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^D \\ \mathbf{u}^N \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \left\{ \mathbf{G}^D \quad \mathbf{G}^N \quad \mathbf{G}^W \mathbf{F} \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^D \\ \mathbf{q}^N \\ \mathbf{a} - \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (3-66)$$

Dieses System läßt sich nun nach den unbekanntenen Größen \mathbf{u}^N , \mathbf{q}^D und \mathbf{b} auflösen und berechnen:

$$\left\{ -\mathbf{G}^D \quad \mathbf{H}^N \quad \mathbf{H}^W \mathbf{E} + \mathbf{G}^W \mathbf{F} \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^D \\ \mathbf{u}^N \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \left\{ -\mathbf{H}^D \quad \mathbf{G}^N \quad \mathbf{G}^W \mathbf{F} - \mathbf{H}^W \mathbf{E} \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^D \\ \mathbf{q}^N \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix} \quad (3-67)$$

Da auf der rechten Seite lediglich ein Vektor steht, läßt sich dieses System nun z.B. mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens lösen, und man erhält somit die unbekanntenen Wandströme \mathbf{u}^N , die Werte der Normalenableitung \mathbf{q}^D auf einer möglichen Symmetrielinie sowie die Amplituden der gestreuten Wellentypen \mathbf{b} . Es ist allerdings auch möglich, durch Inversion der linken Matrix die gesamte Streumatrix \mathbf{S} zu erhalten.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}^D \\ \mathbf{u}^N \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{M} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^D \\ \mathbf{q}^N \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{M}^{DD} & \mathbf{M}^{DN} & \mathbf{M}^{DW} \\ \mathbf{M}^{ND} & \mathbf{M}^{NN} & \mathbf{M}^{NW} \\ \mathbf{M}^{WD} & \mathbf{M}^{WN} & \mathbf{S} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^D \\ \mathbf{q}^N \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix} \quad (3-68)$$

$$\mathbf{M} = \left\{ -\mathbf{G}^D \quad \mathbf{H}^N \quad \mathbf{H}^W \mathbf{E} + \mathbf{G}^W \mathbf{F} \right\}^{-1} \left\{ -\mathbf{H}^D \quad \mathbf{G}^N \quad \mathbf{G}^W \mathbf{F} - \mathbf{H}^W \mathbf{E} \right\}$$

Bei der hier betrachteten Aufgabenstellung sind die einzigen Quellterme die anregenden Wellentypen \mathbf{a} , so daß die Vektoren \mathbf{u}^D und \mathbf{q}^N Null zu setzen sind (homogene Randbedingung) und somit auch die Berechnung der Teilmatrizen \mathbf{H}^D und \mathbf{G}^N entfällt.

Die Werte im Inneren des Gebiets erhält man nun mit (3-49), da alle Randwerte bekannt sind. Hierbei ist die Konstante $C=1$ zu setzen, da der Aufpunkt innerhalb der Randkurve liegt.

3.3.3 Anwendung auf die transversale Wellenausbreitung

Um die Randelementmethode auf das Problem der deformierten Antenne anwenden zu können, müssen noch die aus der Dreidimensionalität hervorgehenden Eigenschaften berücksichtigt werden. Zum einen erstreckt sich die azimutale Deformationslänge der Antenne oftmals über mehr als 2π , so daß die Antenne in Segmente unterteilt und in mehreren Schritten berechnet werden muß. Zum anderen ist die Struktur der einfallenden Welle am Tor durch die Besselfunktion gegeben, so daß diese in Parallelplattenmoden entwickelt werden muß, die dann in die Berechnung eingehen.

Kaskadierung der azimutal deformierten Antenne

Die Ausbreitungsrichtung rotierender Moden in Kreishohlleitern läßt sich in eine axiale und transversale zerlegen. Die zugehörigen Ausbreitungskonstanten β und κ sind über die Freiraumwellenzahl k vernüpft. Unter der Voraussetzung, daß sich β nur geringfügig ändert, läßt sich die transversale Ausbreitung im Kreishohlleiter durch die Ausbreitung in einem Parallelplattensystem beschreiben. Ein typisches Beispiel zeigt Bild 3-10. Die gepunkteten Linien deuten darin die homogenen Parallelplattenleitung an. Die Annahme, daß sich das Feld in axialer Richtung im Lösungsgebiet nur wenig ändert, kann dadurch erreicht werden, daß nur Segmente des Wellentypwandlers betrachtet und anschließend kaskadiert werden. Als Schnittstelle zwischen den Segmenten dienen dabei die Tore, die reflexionsfrei durch die Wellenleiter-Randbedingung abgeschlossen sind.

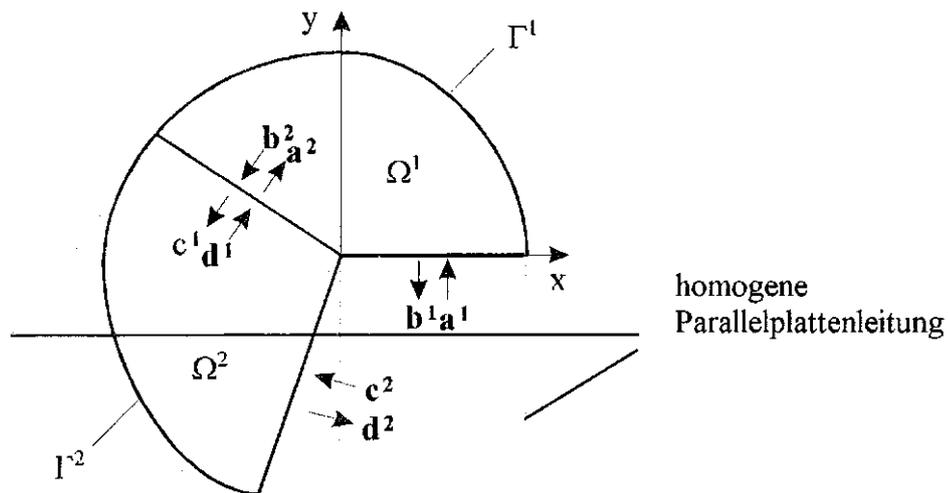


Bild 3-10: Zur azimutalen Segmentierung des Hohlleiters

Die Streumatrizen der einzelnen Segmente werden mit (3-68) berechnet. Um nun zu einer Gesamtstreuematrix zu kommen, muß man das folgende Gleichungssystem für die gesuchten Größen \mathbf{b}^1 und \mathbf{d}^2 in Abhängigkeit von \mathbf{a}^1 und \mathbf{c}^2 umstellen.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \end{Bmatrix} = \mathbf{S}^{ba} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^1 \\ \mathbf{d}^2 \end{Bmatrix} = \mathbf{S}^{dc} \begin{Bmatrix} \mathbf{c}^1 \\ \mathbf{c}^2 \end{Bmatrix} \quad (3-69)$$

Beachtet man, daß $\mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^1$ und $\mathbf{a}^2 = \mathbf{d}^1$ gilt, so läßt sich mit Hilfe der Matrixalgebra die Lösung wie folgt anschreiben:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{d}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_{11}^{ba} + \mathbf{S}_{12}^{ba} (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{11}^{dc} \mathbf{S}_{22}^{ba})^{-1} \mathbf{S}_{11}^{dc} \mathbf{S}_{21}^{ba} & \mathbf{S}_{12}^{ba} (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{11}^{dc} \mathbf{S}_{22}^{ba})^{-1} \mathbf{S}_{12}^{dc} \\ \mathbf{S}_{21}^{dc} (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}^{ba} \mathbf{S}_{11}^{dc})^{-1} \mathbf{S}_{21}^{ba} & \mathbf{S}_{22}^{dc} + \mathbf{S}_{21}^{dc} \mathbf{S}_{22}^{ba} (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{11}^{dc} \mathbf{S}_{22}^{ba})^{-1} \mathbf{S}_{21}^{ba} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{c}^2 \end{Bmatrix} \quad (3-70)$$

Anregung des zweidimensionalen Wellenleiters

Die Anregungsfunktion am Eingangstor ist durch die radiale Abhängigkeit der entsprechenden rotierenden Kreishohlleitermode vorgegeben. Für die z-Komponente des Wellentyps ist sie bestimmt durch die Besselfunktion:

$$u(\eta) = A J_m \left(\frac{X'_{mv}}{h} \eta \right) \quad (3-71)$$

Hierin ist h der Breite der Parallelplattenleitung, X'_{mv} ist die Nullstelle der TE_{mv} -Mode und A eine beliebige Konstante. Diese Abhängigkeit muß durch eine Modenmischung der Parallelplatten-Wellentypen wiedergegeben werden. Die Modenamplituden werden durch eine Fourierzerlegung gewonnen:

$$\alpha_p = \frac{2}{N} \sqrt{\frac{\beta_p}{h(1 + \delta_{0p})}} \int_0^h J_m \left(\frac{X'_{mv}}{h} \eta \right) \cos \left(\frac{p\pi}{h} \eta \right) d\eta \quad (3-72)$$

Hierbei wird die Normierungskonstante N so gewählt, daß die Summe der Amplitudenquadrate der ausbreitungsfähigen Moden und somit der eingespeisten Leistung gerade 1 ergibt. Der Index p läuft von 0 bis zur Anzahl Elemente des Kurvenstücks, welches das Tor beschreibt. Mit diesen Überlegungen wurden die in Kapitel 5 dargestellten Ergebnisse erzielt.

3.4 Analyse des Rückstreuverhaltens der helikalen Aperturantenne mit asymptotischen Methoden

Reflexionen offen abstrahlender Hohlleiter werden vor allem durch die Beugung der geführten Wellen an Kanten verursacht. Dieser Kanteneffekt läßt sich bei großen Abmessungen gegenüber der Freiraumwellenlänge mit Hilfe asymptotischer Verfahren beschreiben. Hierzu zählen unter anderem die in [Kel1] formulierte Geometrische Beugungstheorie (GTD), die in [Ufi1] abgeleitete Physikalische Beugungstheorie (PTD) sowie die aus beiden Verfahren synthetisierbare Methode der äquivalenten Kantenströme (MEC) [Kno1]. Vor allem letztere wird für die Aufgabenstellung offener Hohlleiter in der Literatur angewendet.

Die Anwendung dieser Methode bei der Bestimmung des Rückstreuverhaltens offener Hohlleiter erfolgt dadurch, daß die Hohlleiterwellen durch Strahlen dargestellt werden, die unter einem bestimmten Winkel auf die Kante treffen. Diese regen auf den Kanten anisotrop strahlende äquivalente Linienströme an. Der Teil der Strahlung, der dabei in Einfallrichtung abgestrahlt wird, trägt somit zur Rückstreuung in den speisenden Hohlleiter bei. In der Literatur werden dabei ausnahmslos Probleme behandelt, bei denen Kanten senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Wellen liegen. Für die Beschreibung der helikalen Aperturantenne ist jedoch ein beliebiger Winkel zuzulassen, was die Analyse der Reflexionen erschwert.

Bei beliebigem Einfallswinkel verlassen nach der GTD und somit auch der aus ihr abgeleiteten MEC die Strahlen gebeugter Wellen die Kante unter dem Reflexionswinkel und bilden damit einen Beugungskegel. Hiernach wird daher in Einfallrichtung nicht gestrahlt. Durch eine in [Mic1] gezeigte Erweiterung der MEC, abgeleitet aus der PTD für beliebige Beobachtungsrichtungen, ist es jedoch möglich, auch die Rückstreuung bei beliebigem Einfallswinkel zu bestimmen. Diese Ergebnisse wurden in dieser Arbeit für die Rückstreuanalyse der helikalen Aperturantenne angewendet.

3.4.1 Methode der äquivalenten Kantenströme

Dieses Verfahren geht ursprünglich aus der Geometrischen Beugungstheorie hervor. Die Kantenströme werden dadurch bestimmt, daß sie dasselbe Strahlungsfeld erzeugen, wie das von der GTD berechnete. Da das gebeugte Feld nun nicht mehr durch Strahlen repräsentiert wird, läßt sich diese Methode vor allem bei gekrümmten Kanten anwenden, bei denen die Strahlen Kaustiken bilden können und somit Singularitäten verursachen. Weiterhin ist die Behandlung endlich langer Kanten mit dieser Methode möglich.

Geometrische Beugungstheorie

Die in [Kel1] erstmals systematisch formulierte Theorie der Beugung von Lichtstrahlen stellt eine Erweiterung der geometrischen Optik dar. Demnach erzeugen Lichtstrahlen, die auf leitende Kanten, Ecken oder Steigungen treffen, gebeugte Wellen, die von der Richtung

und Polarisation der einfallenden Welle abhängig sind. Diese Wellen können dann selbst wieder Ursache von Beugungen sein. Bei den so gefundenen Lösungen muß zwischen verschiedenen Licht- und Schattenregionen unterschieden werden, und die Lösungen sind an den Grenzen nicht stetig.

Zur Bestimmung des gebeugten Feldes wird die Greensche Funktion für das kanonische Problem einer Linienquelle in Anwesenheit einer leitenden Kante bestimmt, und zwar je nach Polarisation der Welle mit Dirichletschen Randbedingungen (weiche Polarisation) oder Neumannschen Randbedingungen (harte Polarisation). Mit Hilfe einer Integraldarstellung der modalen Entwicklung dieser Lösung lassen sich durch die Sattelpunkts-Integrationsmethode [Fel1] in asymptotischer Näherung Koeffizienten für die gebeugten Wellen bestimmen. Diese Lösung besitzt an den Schattengrenzen Singularitäten, die der Integrationsmethode zuzuschreiben sind. Eine verbesserte Methode nach Pauli-Clemmov [Cle1] zur asymptotischen Integration der Lösungsfunktion liefert Übergangsfunktionen, so daß Singularitäten vermieden werden und die Lösungen im gesamten Gebiet stetig sind. Diese Lösung gilt auch als einheitliche Beugungstheorie (*Uniform Theory of Diffraction UTD*) und wurde in [Kou1] formuliert. In dieser Arbeit ist vor allem die Beugung an gekrümmten, endlichen Kanten verursacht von einfallenden ebenen Wellen mit beliebigem Einfallswinkel von Interesse. Legt man ein strahl-orientiertes Koordinatensystem zugrunde, so lassen sich gebeugte Wellen sehr kompakt wie folgt darstellen:

$$\mathbf{E}^{diff}(s) = \begin{Bmatrix} E_{\Phi}^{diff} \\ E_{\Theta}^{diff} \end{Bmatrix} = A(s) \mathbf{D} \mathbf{E}^{inc} = -A(s) \begin{bmatrix} D_s & 0 \\ 0 & D_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{\Phi'}^{inc} \\ E_{\Theta'}^{inc} \end{Bmatrix} \quad (3-73)$$

Hierin ist $A(s)$ die Dämpfung entlang des Ausbreitungsweges s und D sind die von den Ein- und Ausfallswinkeln abhängigen Beugungskoeffizienten für harte D_h und weiche D_s Polarisation. Die Geometrie zu diesem Problem ist in Bild 3-11 dargestellt. Es zeigt eine unter dem Winkel Θ' zur Kante einfallende ebene Welle. Die Polarisation der Welle läßt sich zerlegen in einen Anteil senkrecht und parallel zu der von dem Tangentenvektor \mathbf{t} der Kante und der Richtung der ebenen Welle $\hat{\mathbf{s}}'$ aufgespannten Ebene. Die Einheitsvektoren senkrecht und parallel hierzu lassen sich wie folgt bestimmen:

$$\hat{\Phi} = \frac{\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{t}}}{|\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{t}}|} \quad \hat{\Theta} = -\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\Phi} \quad (3-74)$$

Für die gestrichenen Größen gilt (3-74) entsprechend. Durch Skalarmultiplikation des elektrischen Feldvektors der einfallenden Welle mit diesen Vektoren erhält man den Anteil weiche bzw. harte Polarisation der erzeugten Welle an der beugenden Kante. Die Werte der Winkel zwischen Strahl und Kante sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \cos \Theta' &= \hat{\mathbf{s}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} & \cos \Theta &= \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{t}} \\ \cos \Phi' &= \frac{\hat{\mathbf{s}}' \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\sin \Theta'} & \cos \Phi &= -\frac{\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\sin \Theta} \end{aligned} \quad (3-75)$$

Hierbei ist beachtet worden, daß Φ den Winkel des Strahls mit der Normale in der projizierten Ebene $\hat{\mathbf{t}}$ darstellt. Die in (3-75) gegebene Definition der Winkel Φ, Φ' ist jedoch eindeutig nur für $0 \leq \Phi, \Phi' \leq \pi$.

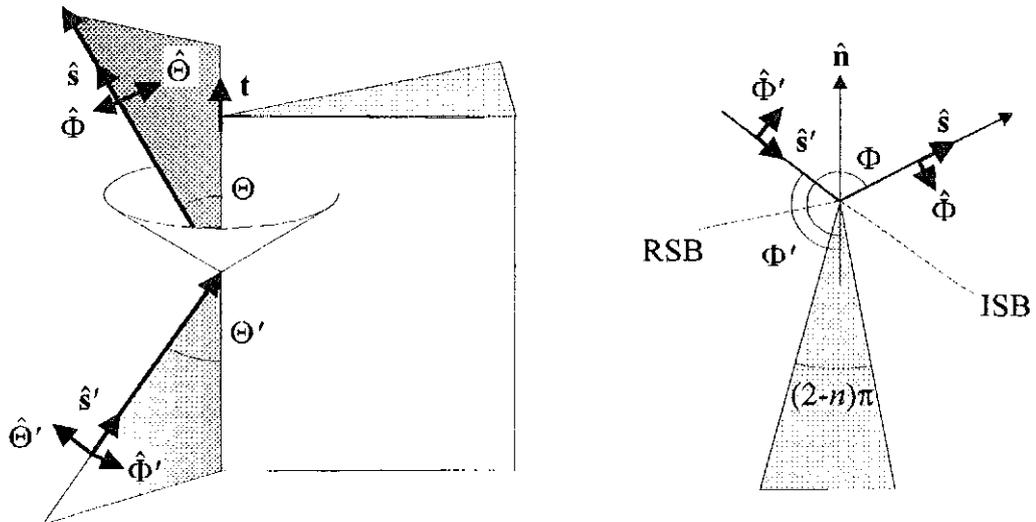


Bild 3-11: Einfall einer ebenen Welle auf eine gerade Kante

Nach der GTD werden analog zu den Reflexionsgesetzen die gebeugten Strahlen unter dem Winkel $\Theta = \Theta'$ von der Kante reflektiert. Jedoch bilden sie einen Strahlenkegel um die Kante auf dessen Mantel die Intensitätsverteilung vom Einfallswinkel Φ' abhängt. Diese Abhängigkeit wird durch die Beugungskoeffizienten für $n=2$, das heißt für eine Halbebene, wie folgt beschrieben:

$$\begin{aligned} D_s &= \frac{e^{i\frac{3}{4}\pi}}{4\sqrt{2\pi k \sin \Theta'}} V_s(\Phi, \Phi') & V_s(\Phi, \Phi') &= V_i(\Phi, \Phi') - V_r(\Phi, \Phi') \\ D_h &= \frac{e^{i\frac{3}{4}\pi}}{4\sqrt{2\pi k \sin \Theta'}} V_h(\Phi, \Phi') & V_h(\Phi, \Phi') &= V_i(\Phi, \Phi') + V_r(\Phi, \Phi') \end{aligned} \quad (3-76)$$

In der GTD sind die Beugungsfunktionen V durch

$$\begin{aligned}
 V_i(\Phi, \Phi') &= -\frac{2}{\cos \frac{\xi^-}{2}} \\
 V_r(\Phi, \Phi') &= -\frac{2}{\cos \frac{\xi^+}{2}}
 \end{aligned}
 \tag{3-77}$$

während in der UTD Formulierung diese durch

$$\begin{aligned}
 V_i(\Phi, \Phi') &= \left\{ \cot \frac{\pi + \xi^-}{4} F[g^+(\xi^-)] + \cot \frac{\pi - \xi^-}{4} F[g^-(\xi^-)] \right\} \\
 V_r(\Phi, \Phi') &= \left\{ \cot \frac{\pi + \xi^+}{4} F[g^+(\xi^+)] + \cot \frac{\pi - \xi^+}{4} F[g^-(\xi^+)] \right\}
 \end{aligned}
 \tag{3-78}$$

gegeben sind. Hierin ist F eine Übergangsfunktion, die die Singularitäten der Kotangensfunktion an den Schattengrenzen (ISB, RSB) beseitigt. Die eingeführten Abkürzungen lauten folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 F[x] &= 2i \sqrt{x} e^{ix} \int_{\sqrt{x}}^{\infty} e^{-iu^2} du \\
 g^+(\xi^\pm) &= k\rho \left[1 + \cos(\xi^\mp - 4\pi N^+) \right] \\
 g^-(\xi^\pm) &= k\rho \left[1 + \cos(\xi^\mp - 4\pi N^-) \right] \\
 \xi^\pm &= \Phi \pm \Phi'
 \end{aligned}
 \tag{3-79}$$

Hierbei ist ρ ein Längenparameter, der die Stetigkeit des geometrisch-optischen und gebeugten Feldes an den Schattengrenzen sichert, und N^\pm sind ganzen Zahlen, die dadurch bestimmt werden, daß die Funktionen g die Singularitäten der Kotangensfunktionen kompensieren.

Äquivalente Kantenströme aus der GTD-Formulierung

Bei der Betrachtung von endlich langen sowie kaustikerzeugenden gekrümmten Kanten, was im Fall der helikalen Aperturantenne beides der Fall ist, muß die geometrische Beugungstheorie abgewandelt werden. Hierbei hat sich die Methode der äquivalenten Kantenströme als geeignet herausgestellt. Dabei werden unter Annahme großer Abstände von der Kante aus den Beugungskoeffizienten Stromterme hergeleitet, die in einiger Entfernung das gleiche Feld hervorrufen wie das von der Beugungstheorie vorhergesagte. Dabei handelt es sich um anisotrop strahlende Linienströme. Man unterscheidet dabei je nach weicher oder harter Polarisation zwischen elektrischen bzw. magnetischen Linienströmen [Kno1].

$$I^e(t) = \frac{V_s(\Phi, \Phi')}{2i Z_0 k \sin^2 \Theta'} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{E}^i$$

$$I^m(t) = \frac{Z_0 V_h(\Phi, \Phi')}{2i k \sin^2 \Theta'} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{H}^i$$
(3-80)

Hierin ist \mathbf{t} der Tangentenvektor der Kante. Da in dieser Arbeit als Anregung nur TE-Moden betrachtet werden, lassen sich die zur Kante tangentialen Komponenten wie folgt darstellen:

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{E}^i = \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_q \frac{a_q}{\sqrt{2\pi k R \sin \psi_q \sin \theta_q}} \frac{\sqrt{Z_q}}{N_q} e^{-ikS_q}$$

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{H}^i = \frac{\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{h}}_q}{Z_0} \frac{a_q}{\sqrt{2\pi k R \sin \psi_q \sin \theta_q}} \frac{\sqrt{Z_q}}{N_q} e^{-ikS_q}$$
(3-81)

Die mit q indizierten Größen sind dabei charakteristische Größen des anregenden Wellentyps (Kapitel 2.1). Das Strahlungsfeld dieser Linienströme berechnet sich z.B. nach [Mic1] wie folgt:

$$\mathbf{E}^d = ik \int_C \left[Z_0 I^e \hat{\mathbf{s}} \times (\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{t}}) + I^m \hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{t}} \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dt$$
(3-82)

Hierin ist G die Greensche Funktion für den Freiraum. $\hat{\mathbf{s}}$ gibt die Beobachtungsrichtung in Strahlkoordinaten an, wie in Bild 3-11 dargestellt. Diese Richtung ist jedoch innerhalb dieser Theorie nicht beliebig sondern auf dem Beugungskegel fixiert. Für die in dieser Arbeit benötigten Strahlungsfelder für beliebige Beobachtungsrichtungen wurden äquivalente Kantenströme in [Mic1] hergeleitet.

Äquivalente Kantenströme für beliebige Beobachtungsrichtungen

Bei der Herleitung der GTD (als auch bei der UTD) mit Hilfe von asymptotischen Integrationsmethoden wird die Stationarität der Phase des Integranden ausgenutzt. Dies hat zur Folge, daß die Lösung nur dann gültig ist, wenn der Ausfallswinkel der gebeugten Strahlen gleich dem Einfallswinkel ist, was zu dem Beugungskegel führt. Dasselbe gilt somit für äquivalente Kantenströme, die aus der GTD/UTD abgeleitet sind.

In [Mic1] wurde diese Einschränkung aufgehoben und für das kanonische Problem, d.h. für unendlich lange, gerade Kanten, Lösungen für Kantenströme abgeleitet, die für beliebige Beobachtungsrichtungen gültig sind. Hierbei wurden Methoden der PTD angewendet, das heißt, Bestimmung der Oberflächenströme in der Nähe der Kante und asymptotische Reduktion der Flächenströme zu Linienströmen. Für den hier betrachteten Kantenwinkel von 0° (Halbebene) lautet die Lösung folgendermaßen:

$$I^e(t) = \frac{i}{kZ_0} W_e(\Phi, \Theta, \Phi', \Theta') \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{E}^i + \frac{i}{k} W_h(\Phi, \Theta, \Phi', \Theta') \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{H}^i \quad (3-83)$$

$$I^m(t) = \frac{Z_0}{ik} W_m(\Phi, \Theta, \Phi', \Theta') \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{H}^i$$

Die von den Einfallswinkel- (gestrichene Größen) und Beobachtungswinkeln (ungestrichene Größen) abhängige Abkürzungen lauten wie folgt:

$$W_m(\Phi, \Theta, \Phi', \Theta') = \frac{2\sqrt{2} \sin \Phi \cos \frac{\Phi'}{2} \sqrt{\sin \Theta'}}{\sin \Theta (\sin \Theta \cos \Phi + \sin \Theta' \cos \Phi') \sqrt{\sin \Theta' - \sin \Theta \cos \Phi}}$$

$$W_e(\Phi, \Theta, \Phi', \Theta') = \frac{2\sqrt{2} \sin \frac{\Phi'}{2} \sqrt{\sin \Theta' - \sin \Theta \cos \Phi}}{\sqrt{\sin^3 \Theta'} (\sin \Theta \cos \Phi + \sin \Theta' \cos \Phi')} \quad (3-84)$$

$$W_h(\Phi, \Theta, \Phi', \Theta') = \frac{2\sqrt{2} \cos \Phi \cos \frac{\Phi'}{2} (\sin^2 \Theta \cos \Theta' - \sin^2 \Theta' \cos \Theta)}{\sqrt{\sin^3 \Theta'} \sin \Theta (\sin \Theta \cos \Phi + \sin \Theta' \cos \Phi') \sqrt{\sin \Theta' - \sin \Theta \cos \Phi}}$$

Für $\Theta = \Theta'$, also auf dem Beugungskegel, reduzieren sich diese Ausdrücke zu den in (3-80) gegebenen. Diese Lösung besitzt, ähnlich den GTD-Koeffizienten Singularitäten für bestimmte Beobachtungsrichtungen:

$$\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = |\hat{\mathbf{s}}' \times \hat{\mathbf{t}}| \quad \sin \Theta \cos \Phi = \sin \Theta'$$

$$\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{s}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{bzw.} \quad \sin \Theta \cos \Phi = -\sin \Theta' \cos \Phi' \quad (3-85)$$

und die Beugungsfunktionen in (3-84) werden singularär. Wie später noch gezeigt wird, liegt eine solche Singularität z.B. dann vor, wenn die Streuung eines Wellentyps in eine Mode mit gleichem azimuthalen Index für gleiche Rotationsrichtung an einer axialen Kante betrachtet wird. Ähnlich der UTD-Formulierung lassen sich dann, wie in [Mic2] und [Mic3] gezeigt wird, Übergangsfunktionen finden, die die Singularität aufheben. Diese Beugungsfunktionen sind in Anhang A5 dargestellt.

3.4.2 Entwicklung der äquivalenten Kantenströme in Hohlleitermoden

Die durch die einfallende Welle auf den Kanten des Hohlleiters angeregten Linienströme können durch eine modale Entwicklung in gestreute Wellen des geschlossenen Hohlleiters dargestellt werden. Man erhält somit vor allem die Möglichkeit, die Rückstreuung der helikalen Aperturantenne auszuwerten. Die hier behandelte Methode vernachlässigt dabei Mehrfach-

beugungseffekte, die dadurch entstehen, daß das Feld von Kantenströmen selbst wieder Ursache für die Induktion von Strömen auf Kanten ist.

Modale Entwicklung von Stromquellen in einem Hohlleiter

Die Streuung in Wellentypen angeregt durch Stromquellen in einem endlichen Volumen V eines geschlossenen Hohlleiters (Bild 3-12) lassen sich unter Verwendung des Lorentzischen Reziprozitätstheorems [Col1] und unter Ausnutzung der Orthogonalität der Moden bestimmen.

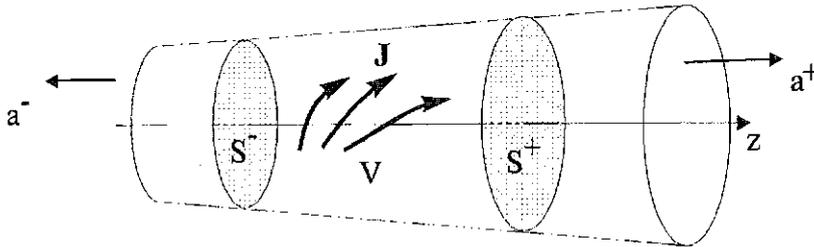


Bild 3-12: Anregung von Hohlleitermoden durch Stromquellen

Die Amplituden der angeregten Wellentypen werden demnach wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}
 a_n^+ a_n^- &= \iint_{S^+} (\mathbf{E}_n^- \times \mathbf{H}_n^+) \cdot \mathbf{z} \, dA = -\frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{E}_n^- \cdot \mathbf{J} \, dv \\
 a_n^+ a_n^- &= \iint_{S^-} (\mathbf{E}_n^+ \times \mathbf{H}_n^-) \cdot \mathbf{z} \, dA = -\frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{E}_n^+ \cdot \mathbf{J} \, dv
 \end{aligned}
 \tag{3-86}$$

Es ist \mathbf{J} die anregende elektrische Stromdichte im Volumen V , das von den Flächen S^+ , S^- und der Hohlleiterwand begrenzt ist. Die Vorzeichen für die Rotationsrichtung in den Phasentermen (2-6) müssen dabei so gewählt werden, daß das Flächenintegral in (3-86) das Produkt der Amplituden ergibt (Anhang A2). Durch Anwendung des Dualitätsprinzips [Bal1] läßt sich analog für magnetische Stromdichten \mathbf{M} die Streuung in Hohlleitermoden angeben. Zusammengefaßt folgt:

$$\begin{aligned}
 a_n^+ &= -\frac{1}{2\alpha_n^-} \iiint_V (\mathbf{E}_n^- \cdot \mathbf{J} - \mathbf{H}_n^- \cdot \mathbf{M}) \, dv \\
 a_n^- &= -\frac{1}{2\alpha_n^+} \iiint_V (\mathbf{E}_n^+ \cdot \mathbf{J} - \mathbf{H}_n^+ \cdot \mathbf{M}) \, dv
 \end{aligned}
 \tag{3-87}$$

Für die hier betrachtete Anregung von rücklaufenden Wellentypen durch Linienströme vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$a_n^- = -\frac{1}{2a_n^+} \int_C (\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{E}_n^+ I^e - \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{H}_n^+ I^m) dt \quad (3-88)$$

$$\mathbf{E}_n^+; \mathbf{H}_n^+ \propto e^{i(\omega t \pm \varphi m_n \varphi - \cos \psi_n z)}$$

Zur Verdeutlichung ist der Phasenterm der Felder nach denen entwickelt wird angegeben. Da beim offenen Hohlleiter die Eigenfunktionen nicht mehr gültig sind, muß man für diese Felder wieder die asymptotische Näherung der ebenen Wellen ansetzen.

Die Gesamtleistung der gestreuten Wellentypen erhält man dabei durch Summation der halben Amplitudenquadrate über alle ausbreitungsfähigen Moden.

Reflexionsfaktoren von Hohlleiterkanten

Eine anregende TE-Mode (Index q , untere Vorzeichen) erzeuge auf einer Hohlleiterkante einen äquivalenten Kantenstrom. Die Rückstreuung in die n -te Mode läßt sich nun wie folgt angeben.

Rückstreuung in TE-Moden

$$\frac{a_n^-}{a_q^+} = \frac{i}{4\pi R} \frac{1}{k^2 N_n N_q} \frac{\int_C (\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n (W_e \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_q + W_h \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{h}}_q) + \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{h}}_n W_m \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{h}}_q) e^{ik(S_q + S_n)} dt}{\sqrt{\cos \psi_n \cos \psi_q} \sqrt{\sin \psi_n \sin \theta_n \sin \psi_q \sin \theta_q}} \quad (3-89)$$

Rückstreuung in TM-Moden

$$\frac{a_n^-}{a_q^+} = \frac{i}{4\pi R} \frac{1}{k^2 N_n N_q} \frac{\int_C (\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{h}}_n (W_e \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_q + W_h \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{h}}_q) - \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n W_m \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{h}}_q) e^{ik(S_q + S_n)} dt}{\sqrt{\cos \psi_n \cos \psi_q} \sqrt{\sin \psi_n \sin \theta_n \sin \psi_q \sin \theta_q}} \quad (3-90)$$

Hierbei wurden für die Feldstärken nach denen entwickelt wird wieder die asymptotische Näherung (2-13) bzw. (2-15) verwendet. Die Eikonale in (2-16) lauten ausgeschrieben:

$$S_q = -\rho \sin \psi_q \sin \theta_q + \frac{m_q}{k} (\theta_q - \varphi) - z \cos \psi_q \quad (3-91)$$

$$S_n = -\rho \sin \psi_n \sin \theta_n + \frac{m_n}{k} (\theta_n \pm \varphi) - z \cos \psi_n$$

und müssen auf der Kante $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{t}$ ausgewertet werden. Die wellentypabhängigen Vektoren (2-21) lauten unter Berücksichtigung der Vorzeichenkonvention wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{e}}_q &= \begin{Bmatrix} -\cos \theta_q \\ \sin \theta_q \\ 0 \end{Bmatrix} & \hat{\mathbf{h}}_q &= \begin{Bmatrix} -\sin \theta_q \cos \psi_q \\ -\cos \theta_q \cos \psi_q \\ \sin \psi_q \end{Bmatrix} & \hat{\mathbf{s}}' &= \begin{Bmatrix} \sin \theta_q \sin \psi_q \\ \cos \theta_q \sin \psi_q \\ \cos \psi_q \end{Bmatrix} \\
 \hat{\mathbf{e}}_n &= \begin{Bmatrix} \pm_\varphi \cos \theta_n \\ \sin \theta_n \\ 0 \end{Bmatrix} & \hat{\mathbf{h}}_n &= \begin{Bmatrix} -\sin \theta_n \cos \psi_n \\ \pm_\varphi \cos \theta_n \cos \psi_n \\ \sin \psi_n \end{Bmatrix} & \hat{\mathbf{s}} &= \begin{Bmatrix} -\sin \theta_n \sin \psi_n \\ \pm_\varphi \cos \theta_n \sin \psi_n \\ -\cos \psi_n \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3-92}$$

Wie bereits angedeutet, ist nun der Beobachtungsvektor durch $\hat{\mathbf{s}} = -\hat{\mathbf{e}}_n \times \hat{\mathbf{h}}_n$ gegeben, was aus der Anwendung des Lorentzischen Reziprozitätstheorems folgt. Die Winkel der Beugungsfunktionen W sind dabei von den Parametern der einfallenden und der gestreuten Mode sowie im allgemeinen von der lokalen Kantenvariablen t abhängig. Somit lassen sich (3-89) und (3-90) nur für konkrete Probleme weiter vereinfachen. Für die hier wichtigen Fälle einer Kreiskante, einer geraden Kante sowie einer helikalen Kante konstanter Steigung sollen im folgenden die Reflexionsfaktoren abgeleitet werden. Alle Fälle haben gemeinsam, daß die Strahlen einen konstanten Winkel mit der Kante bilden, so daß das Integral einfach berechnet werden kann.

3.4.3 Streuung von Kreishohlleitermoden für einige Kantengeometrien

Reflexion eines halbumendlichen Kreishohlleiters

Als anregendes Feld wird eine sich in positiver z-Richtung ausbreitende, rechtsrotierende TE-Mode (Index q) betrachtet. Die Streuung in eine Mode (Index n) wird im folgenden untersucht. Die Kante eines halbumendlichen Kreishohlleiters wird durch $\hat{\mathbf{t}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad dt = R d\varphi$ charakterisiert. Die Skalarprodukte in (3-89) sowie (3-90) sind durch

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_q &= \sin \theta_q & \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{h}}_q &= -\cos \psi_q \cos \theta_q \\
 \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n &= \sin \theta_n & \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{h}}_n &= \pm_\varphi \cos \psi_n \cos \theta_n
 \end{aligned} \tag{3-93}$$

gegeben. Die Winkel (Bild 3-13) in (3-75) lassen sich wie folgt ausrechnen:

$$\begin{aligned}
 \cos \Theta' &= \hat{\mathbf{s}}' \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = \sin \psi_q \cos \theta_q & \cos \Theta &= \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = \pm_\varphi \sin \psi_n \cos \theta_n \\
 \cos \Phi' &= \frac{\hat{\mathbf{s}}' \cdot \hat{\mathbf{z}}}{\sin \Theta'} = \frac{\cos \psi_q}{\sqrt{1 - \sin^2 \psi_q \cos^2 \theta_q}} & \cos \Phi &= -\frac{\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{z}}}{\sin \Theta} = \frac{\cos \psi_n}{\sqrt{1 - \sin^2 \psi_n \cos^2 \theta_n}}
 \end{aligned} \tag{3-94}$$

Die in (3-92) und (3-93) berechneten Größen sind konstant und können vor das Integral in (3-89) und (3-90) gezogen werden. Es verbleibt somit die Integration über den Phasenterm:

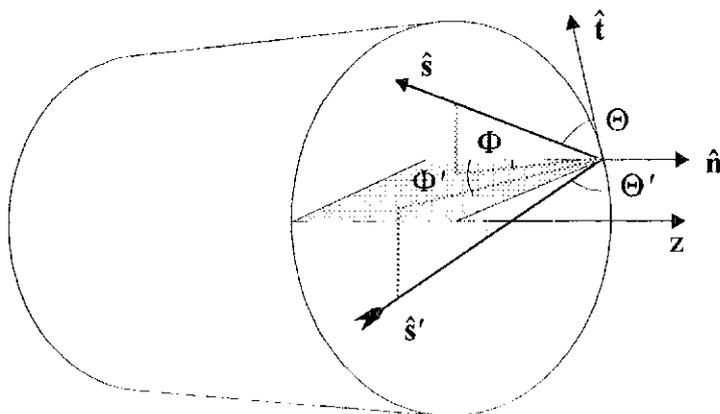


Bild 3-13: Reflexion an der Kreishohlleiterkante

$$\int_C e^{ik(S_q + S_n)} dt = R e^{iP} \int_0^{2\pi} e^{-i(m_q \mp_\varphi m_n)\varphi} d\varphi = 2\pi R e^{iP} \delta_{m_q, \pm_\varphi m_n} \quad (3-94)$$

$$P = -kR(\sin \psi_q \sin \theta_q + \sin \psi_n \sin \theta_n) + m_q \theta_q + m_n \theta_n$$

Der konstante Phasenterm P ist für die hier behandelte Aufgabenstellung nicht bedeutsam. Das Integral verschwindet, wenn der Azimutalindex m der anregenden und gestreuten Mode unterschiedlich ist sowie wenn das untere Vorzeichen gewählt wird. Somit bleibt die Rotationsrichtung bezüglich der Ausbreitungsrichtung und der Azimutalindex erhalten. Es vereinfachen sich (3-89) und (3-90) wie folgt:

Rückstreuung in TE-Moden

$$\frac{\alpha_n^-}{\alpha_q^+} = \frac{i \sin \theta_n \sin \theta_q W_e - \sin \theta_n \cos \psi_q \cos \theta_q W_h - \cos \psi_n \cos \theta_n \cos \psi_q \cos \theta_q W_m}{2 k^2 N_n N_q \sqrt{\cos \psi_n \cos \psi_q} \sqrt{\sin \psi_n \sin \theta_n \sin \psi_q \sin \theta_q}} \quad (3-95)$$

Rückstreuung in TM-Moden

$$\frac{\alpha_n^-}{\alpha_q^+} = \frac{i \cos \psi_n \cos \theta_n (\sin \theta_q W_e - \cos \psi_q \cos \theta_q W_h) + \sin \theta_n \cos \psi_q \cos \theta_q W_m}{2 k^2 N_n N_q \sqrt{\cos \psi_n \cos \psi_q} \sqrt{\sin \psi_n \sin \theta_n \sin \psi_q \sin \theta_q}} \quad (3-96)$$

Da für symmetrische Moden $\cos \theta = 0$ gilt, können, wie bereits z.B. in [Wein1] und [Yee1] gezeigt, durch einfallende TE_{0q} -Moden keine TM_{0n} -Moden angeregt werden. Weiterhin erkennt man, daß Moden, die sich nahe ihrer Grenzfrequenz befinden $\psi_n \approx 90^\circ$, besonders stark angeregt werden.

Reflexion einer axialen Kante

Wie zuvor wird als anregendes Feld eine sich in positiver z-Richtung ausbreitende, rechtsrotierende TE-Mode (Index q) betrachtet. Die Streuung in eine Mode (Index n) an einer geraden Kante wird im folgenden untersucht. Für die zur Kante tangentialen Feldkomponenten gilt:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_q &= 0 & \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{h}}_q &= \sin \psi_q \\ \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n &= 0 & \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{h}}_n &= \sin \psi_n \end{aligned} \quad (3-97)$$

Für die Winkel (Bild 3-14) in (3-75) folgt der einfache Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \cos \Theta' &= \hat{\mathbf{s}}' \cdot \hat{\mathbf{z}} = \cos \psi_q & \cos \Theta &= \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = -\cos \psi_n \\ \cos \Phi' &= \frac{\hat{\mathbf{s}}' \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\sin \Theta'} = \cos \theta_q & \cos \Phi &= -\frac{\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\sin \Theta} = \mp_\varphi \cos \theta_n \end{aligned} \quad (3-98)$$

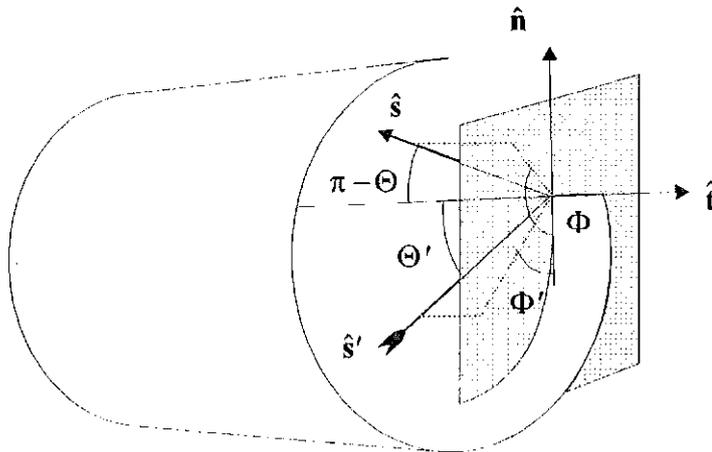


Bild 3-14: Reflexion an der axialen Kante

Die Integration über den Phasenterm liefert:

$$\begin{aligned} \int_C e^{ik(S_q + S_n)} dt &= e^{iP} \int_0^L e^{-ik(\cos \psi_q + \cos \psi_n)z} dz \\ &= L e^{iP} \operatorname{sinc} \left(\frac{kL}{2} (\cos \psi_q + \cos \psi_n) \right) \end{aligned} \quad (3-99)$$

Hierin ist der konstante Phasenterm P in (3-94) gegeben und L ist die Länge der Kante. Die hier auftretende Funktion $\operatorname{sinc}(x)$ ist dabei durch

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} e^{-ix} \quad (3-100)$$

definiert und hat ihr globales Maximum für $x=0$, das heißt die Beugung findet vor allem in Vorwärtsrichtung statt. Die Reflexionsfaktoren lassen sich nun wie folgt ausdrücken.

Rückstreuung in TE-Moden

$$\frac{a_n^-}{a_q^+} = \frac{i}{4\pi} \frac{L}{R k^2 N_n N_q} \frac{\sqrt{\sin \psi_n \sin \psi_q} W_m}{\sqrt{\cos \psi_n \cos \psi_q} \sqrt{\sin \theta_n \sin \theta_q}} \text{sinc} \left(\frac{kL}{2} (\cos \psi_q + \cos \psi_n) \right) \quad (3-101)$$

Rückstreuung in TM-Moden

$$\frac{a_n^-}{a_q^+} = \frac{i}{4\pi} \frac{L}{R k^2 N_n N_q} \frac{\sqrt{\sin \psi_n \sin \psi_q} W_h}{\sqrt{\cos \psi_n \cos \psi_q} \sqrt{\sin \theta_n \sin \theta_q}} \text{sinc} \left(\frac{kL}{2} (\cos \psi_q + \cos \psi_n) \right) \quad (3-102)$$

Reflexion einer helikalen Kante konstanter Steigung

Im nachfolgenden wird eine helikale Kante betrachtet, die eine Schraubenlinie mit dem Steigungswinkel α (Bild 3-15) darstellt. Wie zuvor wird als anregendes Feld eine sich in positiver z-Richtung ausbreitende, rechtsrotierende TE-Mode (Index q) betrachtet. Die Streuung in eine Mode n wird im folgenden für TE- und TM-Moden hergeleitet. Der Steigungswinkel α wird bestimmt durch:

$$\cot \alpha = \frac{L}{2\pi R} \quad (3-103)$$

Hierin ist α zunächst beliebig, wird jedoch für die helikale Antenne gleich (2-29) gesetzt und ist somit von der anregenden Mode q abhängig. Die kantenabhängigen Vektoren lassen sich wie folgt ermitteln:

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}} + \hat{\mathbf{z}} \cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{-\hat{\boldsymbol{\phi}} \cot \alpha + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} \quad (3-104)$$

Somit ergeben sich die zur Kante tangentialen Komponenten:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_q &= \frac{\sin \theta_q}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} & \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{h}}_q &= \frac{-\cos \theta_q \cos \psi_q + \sin \psi_q \cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} \\ \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n &= \frac{\sin \theta_n}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} & \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{h}}_n &= \frac{\pm_{\varphi} \cos \theta_n \cos \psi_n + \sin \psi_n \cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} \end{aligned} \quad (3-105)$$

Für die Einfallswinkel- und Beobachtungswinkel (Bild 3-15) in (3-75) folgt:

$$\begin{aligned}
 \cos \Theta' &= \frac{\sin \psi_q \cos \theta_q + \cos \psi_q \cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} \\
 \cos \Theta &= \frac{\pm_\varphi \sin \psi_n \cos \theta_n - \cos \psi_n \cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} \\
 \cos \Phi' &= \frac{-\sin \psi_q \cos \theta_q \cot \alpha + \cos \psi_q}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha - (\sin \psi_q \cos \theta_q + \cos \psi_q \cot \alpha)^2}} \\
 \cos \Phi &= \frac{\pm_\varphi \sin \psi_n \cos \theta_n \cot \alpha + \cos \psi_n}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha - (\sin \psi_n \cos \theta_n \mp_\varphi \cos \psi_n \cot \alpha)^2}}
 \end{aligned} \tag{3-106}$$

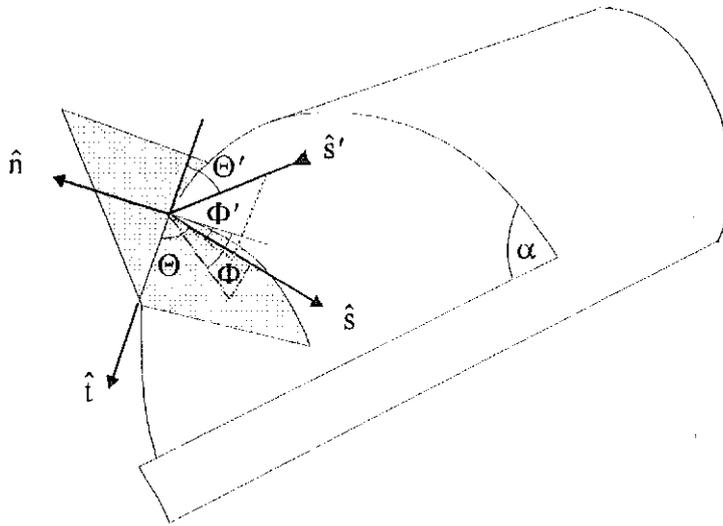


Bild 3-15: Reflexion an der helikalen Kante

Auch hier sind die Koeffizienten von der Kantenvariablen t unabhängig, so daß nur die Integration über den Phasenterm verbleibt.

$$\begin{aligned}
 \int_C e^{ik(S_q + S_n)} dt &= R\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} e^{iP} \int_0^{2\pi} e^{-i\left(m_q \mp_\varphi m_n + \frac{kL}{2\pi}(\cos \psi_q + \cos \psi_n)\right)\varphi} d\varphi \\
 &= 2\pi R\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} e^{iP} \operatorname{sinc}\left(\pi\left(m_q \mp_\varphi m_n\right) + \frac{kL}{2}(\cos \psi_q + \cos \psi_n)\right)
 \end{aligned} \tag{3-107}$$

Hierin ist P in (3-94) gegeben und L ist die axiale Länge der Kante. Für $L \rightarrow 0$ geht dabei dieses Integral über in die Lösung für die Kreiskante (3-95/96), und für $L \rightarrow \infty$ ist das Ergebnis gleich

dem für die gerade Kante (3-101/102). Für die Rückstreuung ist der zweite Summand in der sinc-Funktion immer positiv. Für die maximale Rückstreuung müßte demnach der erste Summand entsprechend negativ sein. Dies wird nur dann erreicht, wenn die Mode 'falsch' rotiert (vor m_q erscheint ein Minuszeichen), oder es gilt bei Verwendung des oberen Vorzeichens $m_n \gg m_q$, was auf die Anregung von Whispering-Gallery-Moden hindeutet.

Die Reflexionsfaktoren lassen sich nun wie folgt ausdrücken.

Rückstreuung in TE-Moden

$$\frac{a_n^-}{a_q^+} = \frac{i}{2} \frac{\text{sinc}\left(\pi(m_q \mp_\varphi m_n) + \frac{kL}{2}(\cos\psi_q + \cos\psi_n)\right)}{k^2 N_n N_q \sqrt{\cos\psi_n \cos\psi_q} \sqrt{\sin\theta_n \sin\theta_q \sin\psi_n \sin\psi_q} \sqrt{1 + \cot^2\alpha}} \times \begin{pmatrix} \sin\theta_n \sin\theta_q W_e - (\cos\theta_q \cos\psi_q - \sin\psi_q \cot\alpha) \sin\theta_n W_h \\ -(\pm_\varphi \cos\theta_n \cos\psi_n + \sin\psi_n \cot\alpha) (\cos\theta_q \cos\psi_q - \sin\psi_q \cot\alpha) W_m \end{pmatrix} \quad (3-108)$$

Rückstreuung in TM-Moden

$$\frac{a_n^-}{a_q^+} = \frac{i}{2} \frac{\text{sinc}\left(\pi(m_q \mp_\varphi m_n) + \frac{kL}{2}(\cos\psi_q + \cos\psi_n)\right)}{k^2 N_n N_q \sqrt{\cos\psi_n \cos\psi_q} \sqrt{\sin\theta_n \sin\theta_q \sin\psi_n \sin\psi_q} \sqrt{1 + \cot^2\alpha}} \times \begin{pmatrix} (\pm_\varphi \cos\theta_n \cos\psi_n + \sin\psi_n \cot\alpha) (\sin\theta_q W_e - (\cos\theta_q \cos\psi_q - \sin\psi_q \cot\alpha) W_h) \\ + \sin\theta_n (\cos\theta_q \cos\psi_q - \sin\psi_q \cot\alpha) W_m \end{pmatrix} \quad (3-109)$$

Die hier abgeleiteten Ausdrücke für die Reflexion von Hohlleiterkanten stellen die Grundlage für die in Kapitel 4 diskutierten Ergebnisse. Vor allem die Reflexion läßt sich mit numerischen Mitteln überprüfen. Allerdings ist es mit dieser asymptotischen Näherung auch möglich, die Beugungsverluste in Vorwärtsrichtung zu bestimmen (Streuung in vorwärtslaufende Wellentypen innerhalb eines gedachten Hohlleiters).

3.4.4 Reflexionsfaktoren für die anregende Mode

In diesem Abschnitt sollen die zuletzt abgeleiteten Formeln für die wichtige Rückstreuung in die anregende Mode vereinfacht werden. Dabei gilt es grundsätzlich die zwei möglichen Rotationsrichtungen zu berücksichtigen.

Reflexionsfaktoren für den Kreishohlleiter

Wie bereits gezeigt, können gestreute Moden an der Hohlleiterkante aufgrund der Axialsymmetrie nur eine Rotationsrichtung annehmen. In Gleichung (3-96) ist somit das obere

Vorzeichen zu wählen. Für die Rückstreuung in die anregende Mode $n=q$ heißt dies, daß die Beobachtungsrichtung auf dem Beugungskegel liegt $\Theta = \Theta'$, und es gilt $\Phi = \Phi'$.

Die Beugungsfunktionen (3-86) vereinfachen sich folgendermaßen:

$$W_m = \frac{1 + \cos \Phi'}{\sin^2 \Theta' \cos \Phi'} \quad W_e = \frac{1 - \cos \Phi'}{\sin^2 \Theta' \cos \Phi'} \quad W_h = 0 \quad (3-110)$$

Hiermit läßt sich die Reflexion in die anregende Mode wie folgt darstellen:

$$\frac{a_n^-}{a_n^+} = \frac{i \sin^2 \theta_n (1 - \cos \Phi') - \cos^2 \psi_n \cos^2 \theta_n (1 + \cos \Phi')}{2 k^2 N_n^2 \cos \psi_n \sin \psi_n \sin \theta_n \sin^2 \Theta' \cos \Phi'} \quad (3-111)$$

Diese Lösung wird später noch mit der in [Yee1] angegebenen verglichen.

Reflexionsfaktoren für die axiale Kante

Bei dieser Problemstellung können grundsätzlich beide Rotationsrichtungen auftreten. Für die Rückstreuung in die anregende Mode $n=q$ folgt $\Theta = \pi - \Theta'$ und $\Phi = \Phi'$ sowie $\Phi = \pi - \Phi'$, wobei im letzteren Fall die Beobachtungsrichtung auf der Reflexionsschattengrenze liegt.

Bei der geraden Kante ist bei Anregung mit TE-Moden nur die Beugungsfunktion W_m von Bedeutung und ist für die Gegenrotationsrichtung (unteres Vorzeichen) durch (3-110) gegeben. Für diesen Fall folgt für den Reflexionsfaktor:

$$\frac{a_n^-}{a_n^+} = \frac{i L}{4\pi R} \frac{\sin \psi_n (1 + \cos \Phi')}{k^2 N_n^2 \cos \psi_n \sin \theta_n \sin^2 \Theta' \cos \Phi'} \text{sinc}(kL \cos \psi_n) \quad (3-112)$$

Für gleichsinnige Rotation muß die Beugungsfunktion W_m in (A5-7) gewählt werden.

$$\frac{a_n^-}{a_n^+} = \frac{1}{2\pi} \frac{L}{R} \sqrt{\pi k R} \frac{\sin \psi_n}{k^2 N_n^2 \cos \psi_n \sin \theta_n} \sqrt{\frac{\sin \Phi'}{\sin^3 \Theta'}} \text{sinc}(kL \cos \psi_n) e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad (3-113)$$

Reflexionsfaktoren für die helikale Kante

Eine einfache geometrische Interpretation der Winkel in (3-106) ist nur dann möglich, wenn das untere Vorzeichen gewählt wird. Für die Rückstreuung in die anregende Mode $n=q$ folgt dann $\Theta = \pi - \Theta'$ und $\Phi = \Phi'$. Die Beugungsfunktionen sind dann durch

$$W_m = \frac{1 + \cos \Phi}{\sin^2 \Theta \cos \Phi} \quad W_e = \frac{1 - \cos \Phi}{\sin^2 \Theta \cos \Phi} \quad W_h = \frac{2 \cos \Theta (1 + \cos \Phi)}{\sin^2 \Theta \sin \Phi} \quad (3-114)$$

gegeben. Berechnungen in Kapitel 4.2 zeigen allerdings, daß die Anregung der anderen Rotationsrichtung signifikanter ist, so daß auf eine Angabe des Reflexionsfaktors verzichtet wird.

3.4.5 Reflexionen des Kreishohlleiters: Moden niedriger Ordnung

In [Yee1] wird zur Bestimmung der Reflexion des Kreishohlleiters eine ähnliche asymptotische Methode verwendet. Im Gegensatz zu der hier dargestellten wird von einer Einfallrichtung senkrecht zur Kante ausgegangen. Dies läßt sich für Moden rechtfertigen, für die $\cos \theta_n \ll 1$ und $\sin \psi_n \ll 1$ gilt, da hier eine andere Näherung für die Besselfunktionen erlaubt ist.

Rückstreuung nach [Yee1]

Die dort angegebene Lösung für die Rückstreuung einer einfallenden TE-Mode in TE-Moden läßt sich folgendermaßen schreiben.

$$\frac{a_n^+}{a_q^-} = \frac{i}{4kR \sin^2 \theta_n} \left(\frac{\sin \psi_n}{\cos \psi_n \sin \psi_q} V_s(\psi_q, \psi_n) + \cos^2 \theta_q \cos \psi_q V_h(\psi_q, \psi_n) \right) \quad (3-116)$$

Hierin sind die Beugungsfunktionen (3-76) in der GTD-Formulierung (3-77) definiert. Für die Rückstreuung in die anregende Mode ergibt sich:

$$\frac{a_n^+}{a_n^-} = \frac{i}{4kR \sin^2 \theta_n} \left(\frac{1 - \cos \psi_n}{\cos^2 \psi_n} - \cos^2 \theta_n (1 + \cos \psi_n) \right) \quad (3-117)$$

Rückstreuung nach Gleichung (3-111)

Mit der Näherung $\sin \psi_n \ll 1$ lassen sich die Einfalls- und Beobachtungswinkel durch $\sin \Theta \approx 1$ und $\cos \Phi \approx \cos \psi_n$ approximieren. Die Normierungskonstante in (3-111) läßt sich asymptotisch wie folgt angeben:

$$k^2 N_n^2 = \frac{2kR \sin \theta_n}{\sin \psi_n} \quad (3-118)$$

Somit folgt für die Reflexion des Kreishohlleiters für Moden niedriger Ordnung:

$$\frac{a_n^+}{a_n^-} = \frac{i}{4kR} \frac{\sin^2 \theta_n (1 - \cos \psi_n) - \cos^2 \psi_n \cos^2 \theta_n (1 + \cos \psi_n)}{\cos^2 \psi_n \sin^2 \theta_n} \quad (3-119)$$

Dieser Ausdruck ist bis auf den Faktor $\sin^2 \theta_n$ im Zähler identisch mit (3-117) und ist dadurch zu erklären, daß die Lösung nach [Yee1] unter der Annahme $\cos \theta_n \ll 1$ abgeleitet wurde.

4 Analyse der nichtverbesserten Antenne

In Kapitel 3.4 wurde zur Beschreibung des Beugungsproblems eine analytische Methode und in Kapitel 3.2 ein numerisches Verfahren vorgestellt. Beide Verfahren haben Gültigkeitsgrenzen, die im wesentlichen von den Abmessungen gegenüber der Wellenlänge abhängen. Das analytische Verfahren ist vor allem bei großen Abmessungen der helikalen Aperturantenne gültig, da es eine asymptotische Lösung eines lokalen Feldproblems darstellt. Dabei wurden mögliche Mehrfachbeugungseffekte aufgrund der komplexen Geometrie vernachlässigt.

Im Gegensatz dazu steht das numerische Verfahren, dessen Anwendbarkeit bei großen Abmessungen aufgrund der benötigten Elementarzellenzahl scheitert. Mögliche Fehlerquellen bei dieser Methode sind die räumlichen und zeitlichen Diskretisierungen, als auch insbesondere die nichtidealen Randbedingungen. Diese Fehler lassen sich mit Konvergenztests, wie z.B. durch höhere Auflösung des Rechengbietes, einschränken. Jedoch besteht der Hauptnachteil von rein numerischen Verfahren in der geringen Aussagekraft bei Parametervariationen. Zumindest für den quasi-optischen Bereich beschränkt sich auch in Zukunft die Anwendbarkeit von numerischen Verfahren auf die Analyse von Bauteilen, so daß eine Synthese mit approximativen Mitteln erfolgen muß.

In diesem Kapitel sollen zunächst beide Verfahren anhand eines einfacheren Beugungsproblems getestet werden. Hier hat sich das Mode-Matching-Verfahren [Wie1] für axialsymmetrische Wellenleiterinhomogenitäten als brauchbar erwiesen. Das Reflexionsverhalten der helikalen Aperturantenne wird dann zunächst für kleine Abmessungen mit Hilfe des MAFIA-Programms analysiert. Ein Vergleich mit den asymptotisch gewonnenen Lösungen liefert dann Aussagen zur Anwendbarkeit der verwendeten Verfahren zur Analyse der nichtverbesserten helikalen Aperturantenne.

Es schließen sich Studien zum Beugungs- und Reflexionsverhalten von praxisrelevanten Moden und Abmessungen an. Weiterhin werden auch alternative Antennentypen, wie z.B. Antennen mit halbhelikalem Schnitt (Bild 2-5) oder Antennen mit Strahlaufteilung in Hinblick auf Kantenbeugung untersucht.

4.1 Anwendung des MAFIA-Programms

In Kapitel 3.1 wurde gezeigt, daß das verfügbare Programmpaket MAFIA unter gewissen Einschränkungen für die Feldberechnung im quasi-optischen Bereich verwendet werden kann. Zur Anwendbarkeit dieses Programms werden in diesem Kapitel einige Studien vorgestellt, die die Grenzen und Möglichkeiten bei der hier behandelten Aufgabenstellung aufzeigen.

4.1.1 Numerisch berechnete Eigenwerte

Da die Anregung mit Kreishohlleitermoden erfolgt, lassen sich die gewonnenen Lösungen direkt mit den analytisch berechneten Lösungen vergleichen und deren Fehler angeben. Für eine typische Aufgabenstellung ($TE_{10,4}$ -Anregung, Brillouinwinkel 70°) sind die ermittelten Ausbreitungskonstanten der relevanten Moden in Tabelle 4-1 dargestellt. Aus Rechenzeit- und Speicherplatzgründen wurde dabei nur ein Sektor mit dem Winkel $\pi/10$ des Wellenleiters betrachtet. In diesem treten unter Verwendung elektrischer Randbedingungen $TE_{10m,n}$, $TM_{10m,n}$ sowie $TE_{0,n}$ -Moden auf. Studien haben gezeigt, daß sich die berechneten Eigenwerte und Eigenvektoren anderer Geometrien (Viertel- und Vollkreis) entsprechend verhalten.

Man erkennt, daß der Fehler der berechneten Eigenwerte bei den relevanten Moden hoher Ordnung ansteigt. Besonders kritisch ist dabei die Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren (Moden). Der Fehler bei der Eigenwertberechnung läßt sich verringern, indem man das verwendete homogene Gitter feiner auflöst, oder entsprechend der Geometrie durch ein inhomogenes Netz besser annähert. Da das zweidimensionale Gitter mit dem dreidimensionalen Gitter in der Wellenleiterebene übereinstimmen muß, verursachen jedoch beide Methoden für die anschließende dreidimensionale Berechnung ein zu feines Gitter und somit zu viele Gitterzellen zur Lösung des Anfangsrandwertproblems.

Tab. 4-1: Ermittelte Ausbreitungskonstanten in $1/m$ für Moden hoher Ordnung

Mode	Eigenwert- nummer	β_n analytisch	β_n numerisch quadr. Gitter	relativer Fehler	β_n numerisch angep. Gitter	relativer Fehler
$TE_{10,1}$	4	2621,32	2651	-1,13%	2621	0,01%
$TM_{10,1}$	6	2444,41	2445	-0,02%	2444	0,02%
$TE_{10,2}$	7	2281,48	2322	-1,78%	2285	-0,15%
$TM_{10,2}$	9	2008,4	2082	-3,66%	2090	-4,06%
$TE_{10,3}$	11	1859,41	1816	2,33%	1882	-1,21%
$TM_{10,3}$	12	1576,08	1575	0,07%	1560	1,02%
$TE_{10,4}$	15	1221,87	1369	-12,04%	1317	-7,79%
$TM_{10,4}$	17	636,59	661	-3,83%	740	-16,24%

4.1.2 Modenkonzersion eines Wellenleitersprungs

Als Beispiel für die dreidimensionale Feldberechnung bei Wellenleiteranregung wird die Berechnung der Modenkonzersion bei einer abrupten Durchmesserergrößerung angegeben. Hierbei wird ein (überdimensionierter) Wellenleiter mit einer Mode hoher Ordnung angeregt. Die Stufe erzeugt dabei eine Streuung des Wellentyps in andere ausbreitungsfähige Moden. Wegen der Axialsymmetrie werden dabei nur Wellentypen mit gleicher azimuthaler Abhängigkeit angeregt. Die Geometrie ist in Bild 4-1 dargestellt.

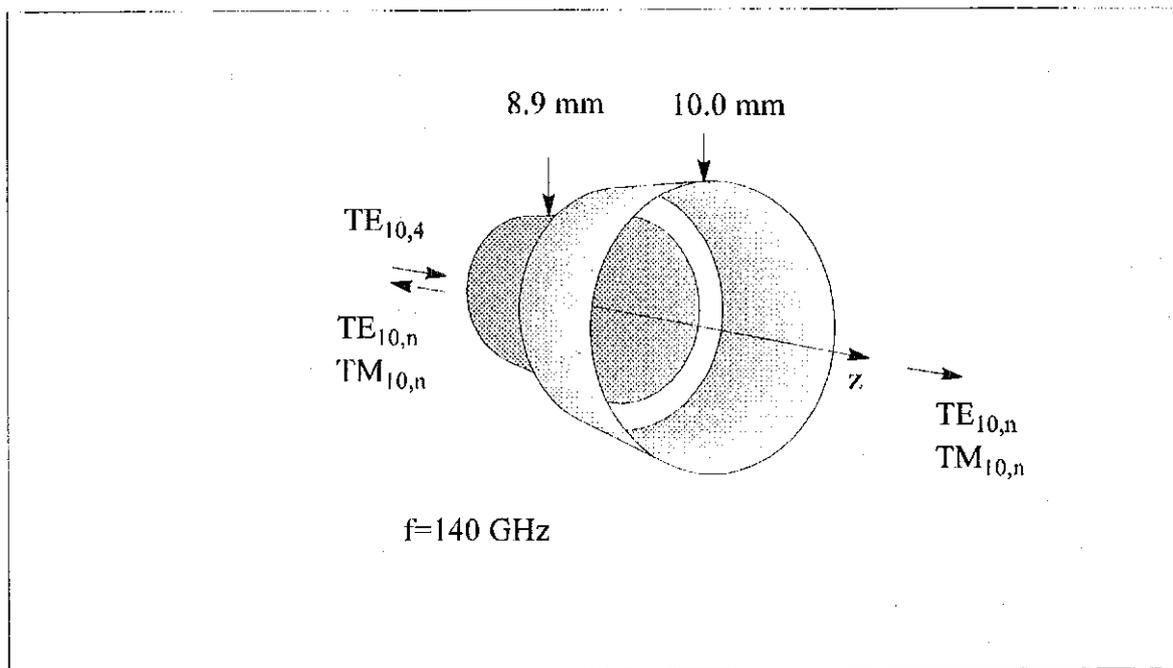


Bild 4-1: Geometrie eines Kreishohlleitersprungs

Die Referenzdaten wurden mit Hilfe eines in [Wie1] entwickelten Streumatrixprogramms mit Hilfe der Mode-Matching-Methode (Anhang A3) erzeugt und dessen Ergebnisse von anderen Programmen (Univ. Stuttgart, Univ. Maryland) bestätigt.

Wegen der Rotationssymmetrie wurde bei der numerischen Rechnung die bereits oben angeführte Geometrie eines $\pi/10$ Sektors benutzt.

Aufgrund der geringen reflektierten Leistung sind nur die Ergebnisse der transmittierten Leistung in Tabelle 4-2 angegeben. Hierin sind die Ergebnisse nach der Finiten-Integrations-Methode zum einen mit Eigenvektoren mit Hilfe des Eigenwertlösers und zum anderen mit der in Kapitel 3.2.3 dargestellten Ergänzung des MAFIA-Programms zusammengefasst. Weiterhin ist der absolute Fehler angegeben, da die Angabe des relativen Fehlers die Abweichung bei nichtrelevanten Moden (niedrige Leistung) überbewerten würde.

Tab. 4-2: Modenkonzersion im Hohlleiter verursacht durch einen Durchmessersprung

Mode	Transmitierte Leistung (Mode-Matching)	Transmitierte Leistung (MAFIA: Lösung mit Eigenwertlöser)	absoluter Fehler	Transmitierte Leistung (MAFIA: Lösung mit Ergänzung)	absoluter Fehler
TE _{10,1}	0,486%	0,16%	0,33%	0,20%	0,29%
TM _{10,1}	1,922%	1,44%	0,48%	2,19%	-0,27%
TE _{10,2}	3,295%	1,19%	2,11%	2,72%	0,57%
TM _{10,2}	1,186%	0,94%	0,25%	1,37%	-0,18%
TE _{10,3}	6,000%	5,56%	0,44%	5,84%	0,16%
TM _{10,3}	0,639%	0,45%	0,19%	0,69%	-0,05%
TE _{10,4}	12,365%	16,84%	-4,47%	12,87%	-0,50%
TM _{10,4}	0,270%	5,48%	-5,21%	0,82%	-0,55%
TE _{10,5}	73,710%	57,61%	16,10%	72,20%	1,51%
TM _{10,5}	0,056%	7,73%	-7,67%	0,46%	-0,40%

An diesem Beispiel erkennt man, daß die mit dem Eigenwertlöser berechneten Moden hoher Ordnung nicht zur Gewinnung der Streuparameter geeignet sind. Die mit Hilfe der Ergänzung gewonnenen Ergebnisse zeigen eine wesentliche Verbesserung und rechtfertigen die Analyse von überdimensionierten Hohlleitern mit Hilfe der Finiten-Integrations-Methode.

4.1.3 Reflexion eines halbumendlichen Kreishohlleiters

Ein weiterer Test des numerischen Verfahrens im Hinblick auf die Anwendbarkeit für die Analyse der helikalen Aperturantenne ist die Berechnung der Reflexionen eines offen abstrahlenden Kreishohlleiters. Als anregender Wellentyp wurde die TE_{7,3}-Mode gewählt und für verschiedene Wellenleiterradien die Reflexion in die anregende Mode ausgewertet.

Das Berechnungsgebiet wurde nach ähnlichen Kriterien diskretisiert, wie in Kapitel 3.2.4 dargestellt. Der Parameter M , der die Anzahl Gitterlinien von der Quelle zum Berechnungsrand angibt, wurde variiert um mögliche Reflexionen von der nichtidealen Strahlungsrandbedingung zu verringern.

Zum Vergleich zu den numerischen Ergebnissen wurde mit dem bereits in 4.1.2 verwendeten Streumatrixprogramm die Reflexion des halbumendlichen Kreishohlleiters durch Verwendung eines sehr großen Ausgangsradius ($R_{\text{aus}}/R_{\text{cin}}=20$) simuliert (Bild 4-1). Hierbei wurden im größeren Wellenleiter bis zu 600 Moden verwendet, um gesicherte Ergebnisse zu erhalten.

Während man beim Streumatrixprogramm den Ausgangsradius zur Konvergenzüberprüfung genügend groß wählen kann, macht man dabei durch Einführung einer leitenden Ebene einen systematischen Fehler (Kantenwinkel 90°). Dieser Effekt konnte mit den Lösungen in [Yee1]

analysiert und für die TE_{01} -Mode bei Brillouinwinkeln im Bereich $20^\circ > \psi > 90^\circ$ mit kleiner als 1 dB abgeschätzt werden (Anhang A7).

In Bild 4-2 ist die reflektierte Leistung in dB in Abhängigkeit des Brillouinwinkels ψ aufgetragen. Die durchgezogene Linie ist dabei die mit dem Streumatrixprogramm berechnete Lösung und die einzelnen Symbole sind numerisch gewonnene Ergebnisse.

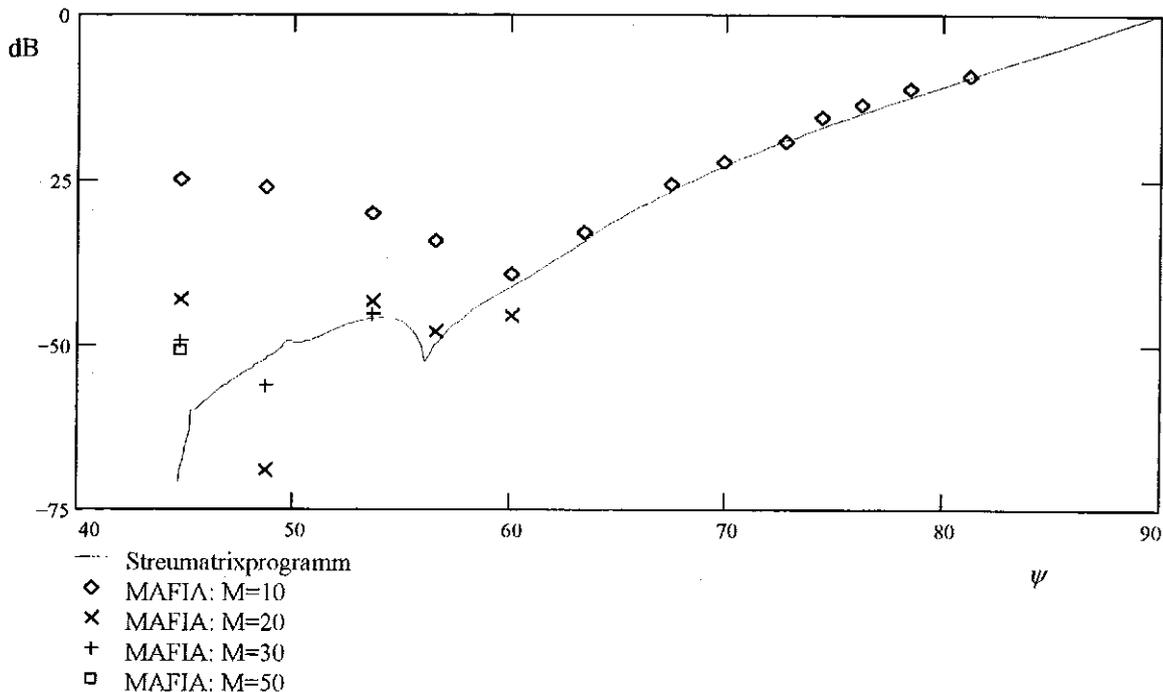


Bild 4-2: Reflektierte Leistung der $TE_{7,3}$ -Mode in Abhängigkeit des Brillouinwinkels bei 140 GHz

Man erkennt für einen Winkelbereich von 60° - 80° eine gute Übereinstimmung des numerischen Verfahrens mit der Referenzkurve. Bei den Ergebnissen mit den Karos wurden $M=10$ Gitterlinien Abstand zwischen Wellenleiter und axialen Berandung verwendet. Für kleinere Winkel als 60° steigt der Reflexionsfaktor an, was darauf hindeutet, daß der Rand stärker reflektiert. Bei Verwendung größerer Abstände nähern sich die Ergebnisse wieder der Referenzkurve.

Wie bereits in Bild 3-5 angedeutet, ist eine Analyse für kleinere Winkel als 45° wegen des Speicherbedarfs nicht mehr durchführbar. Zudem steigt mit kleiner werdendem Winkel, wie man Bild 4-2 entnimmt, der Bedarf an zusätzlichen Gitterlinien zur Simulation von genügend gut absorbierenden Rändern. Weiterhin vergrößert sich auch die benötigte Rechenzeit, so daß eine Simulation aus Kostengründen nicht mehr sinnvoll ist.

4.2 Methode der äquivalenten Kantenströme (MEC) beim offenen Kreishohlleiter

Die Anwendbarkeit der erweiterten Methode der äquivalenten Kantenströme nach [Mic1] soll in diesem Kapitel anhand der Rückstreuung des halbumendlichen Kreishohlleiters dargestellt werden. Bei dieser Problemstellung lassen sich die in Kapitel 3.4 hergeleiteten Reflexionsfaktoren mit anderen Verfahren verifizieren. Als alternative Methoden werden die Ergebnisse aus [Yee1] und das in Anhang A3 dargestellte Mode-Matching-Verfahren (SMP) verwendet.

4.2.1 Rückstreuung bei TE_{01} -Anregung

Bei symmetrischen Moden ist die Einfallsrichtung der Strahlen senkrecht zur Kante. Dieser Fall wird in der Literatur oft behandelt, so daß Vergleichsmöglichkeiten bestehen. In Bild 4-3 ist die Rückstreuung der TE_{01} -Mode in Abhängigkeit des normierten Wellenleiterradius kR aufgetragen. Dabei ist zum einen die Reflexion in die anregende Mode und zum anderen die gesamte reflektierte Leistung dargestellt. Den Hauptanteil der reflektierten Leistung tragen dabei jeweils ausbreitungsfähige Moden, die ihrer Grenzfrequenz am nächsten sind.

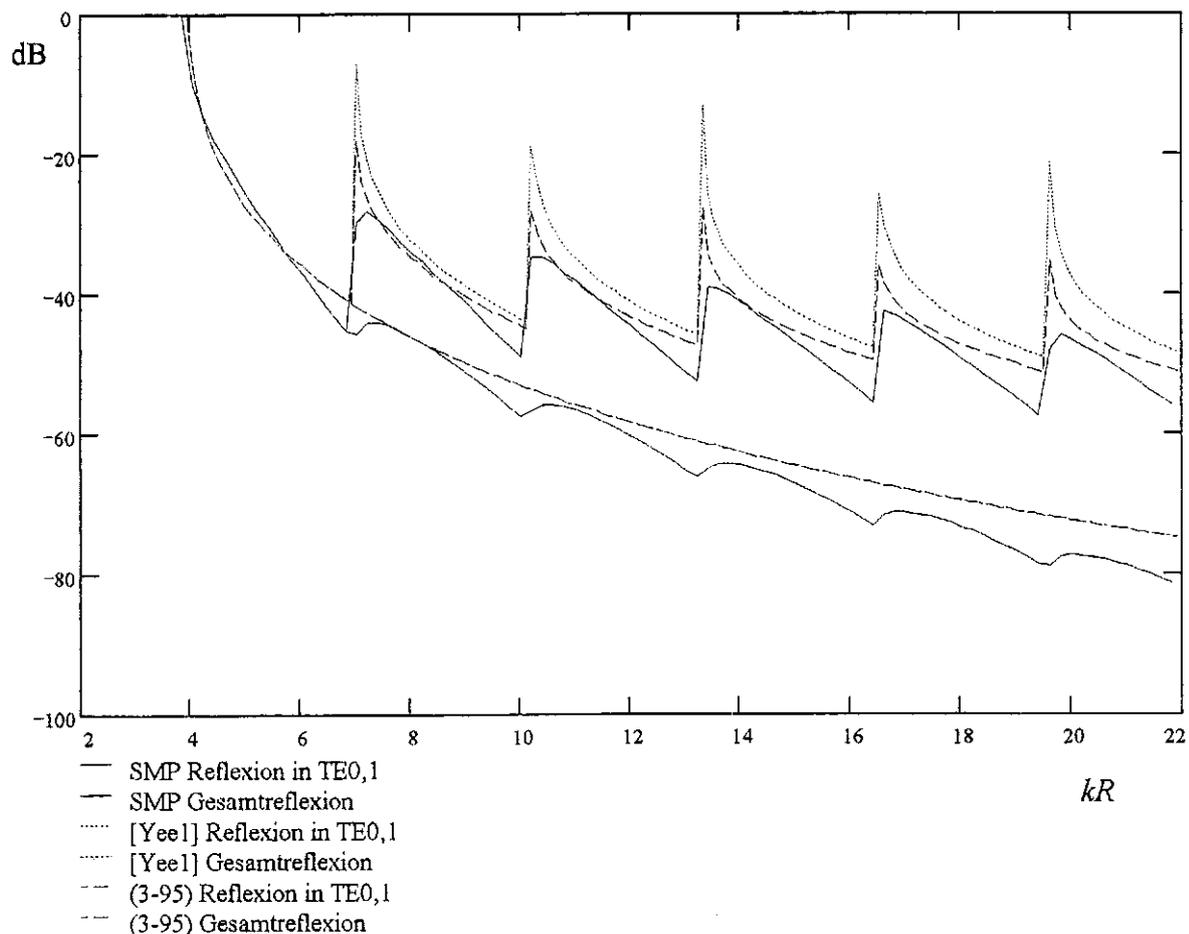


Bild 4-3: Reflexionen des Kreishohlleiters bei Anregung mit der TE_{01} -Mode in Abhängigkeit des Radius

Für die Selbstreflexion fallen die Kurven der beiden asymptotischen Lösungen für symmetrische Moden zusammen, was bereits in Kapitel 3.4.5 gezeigt wurde. Bei der Konversion der anregenden Mode in andere reflektierte Moden zeigt sich jedoch, daß die mit Hilfe von (3-95) berechnete Gesamtreflexion besser mit der Referenzlösung übereinstimmt.

4.2.2 Rückstreuung bei $TE_{7,3}$ -Anregung

Als Repräsentant einer Volumenmode wurde wieder die $TE_{7,3}$ -Mode ausgewählt. Hier wird erwartet, daß die in [Yee1] dargestellte Lösung scheitert. Das Mode-Matching-Verfahren ist dabei jedoch unter den bereits angesprochenen Einschränkungen weiterhin gültig.

Bild 4-4 zeigt die reflektierte Leistung der Mode in Abhängigkeit des Brillouinwinkels ψ . Aufgetragen sind die mit dem MAFIA-Programm erzielten Ergebnisse, die Lösung mit Hilfe des Streumatrixprogramms (SMP), die mit [Yee1] gewonnene Lösung und das Ergebnis mit Gleichung (3-111).

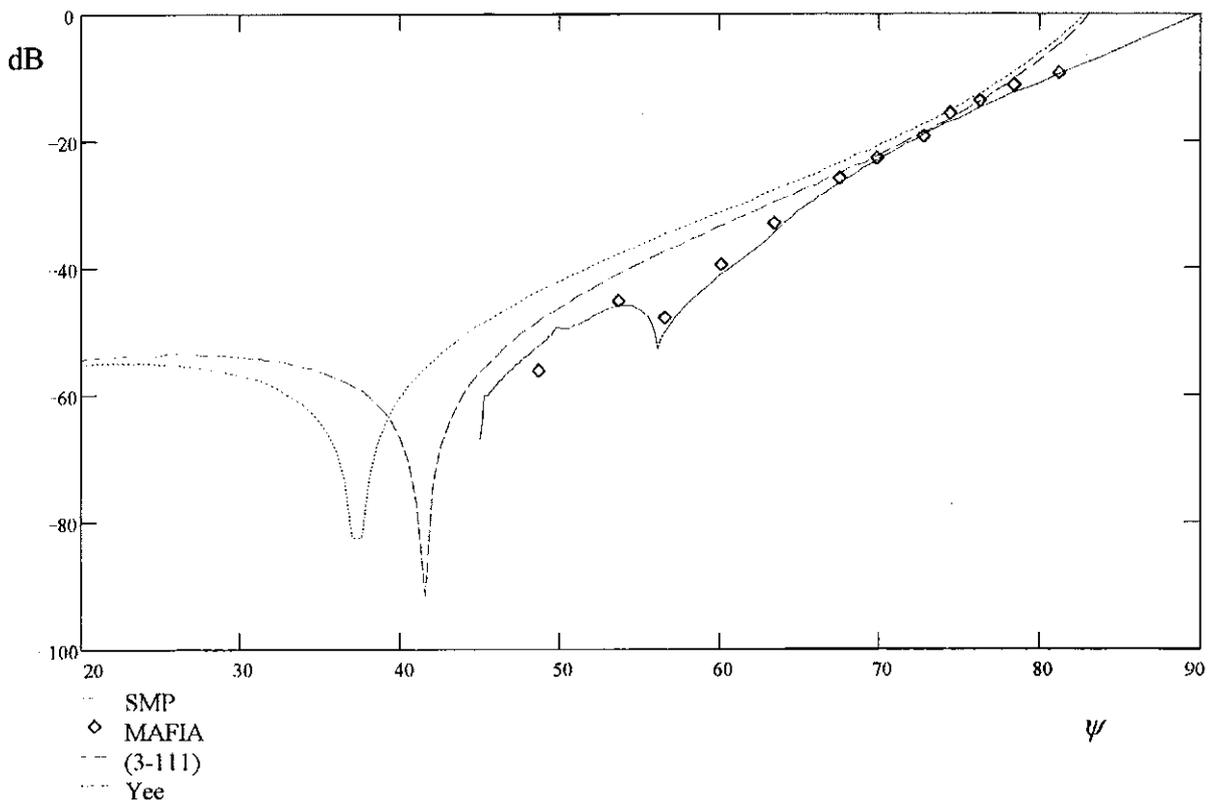


Bild 4-4: Reflexion der $TE_{7,3}$ -Mode als Funktion des Brillouinwinkels

Deutlich zu erkennen ist der Einbruch der durchgezogenen Kurve bei $\psi_1=56^\circ$, welcher auch von der numerisch berechneten Punkten gut beschrieben wird. Dieser Effekt kann als Mehrfachbeugungseffekt identifiziert werden, und wird daher mit den asymptotischen

Ergebnissen nicht erfaßt. Die gestrichelte Kurve nach (3-111) hüllt wie erwartet die Referenzlösung besser ein als die gepunktete nach [Yee1].

Da die Beobachtungsrichtung der reflektierten $TE_{7,3}$ -Mode bei der Kreiskante auf dem Beugungskegel liegt (Kapitel 3.4.4), ist dieses Ergebnis allerdings noch kein Beweis für die Notwendigkeit der Verwendung der erweiterten Methode der äquivalenten Kantenströme nach [Mic1]. Daher wird im folgenden die Konversion der anregenden Mode in rücklaufende Wellentypen ($TE_{7,n}$ und $TM_{7,n}$) betrachtet.

In Bild 4-5 ist neben der Selbstreflexion die gesamte reflektierte Leistung aufgetragen, diesmal in Abhängigkeit des normierten Radius kR . Wieder ist die durchgezogene Linie die Referenzlösung (Anhang A3).

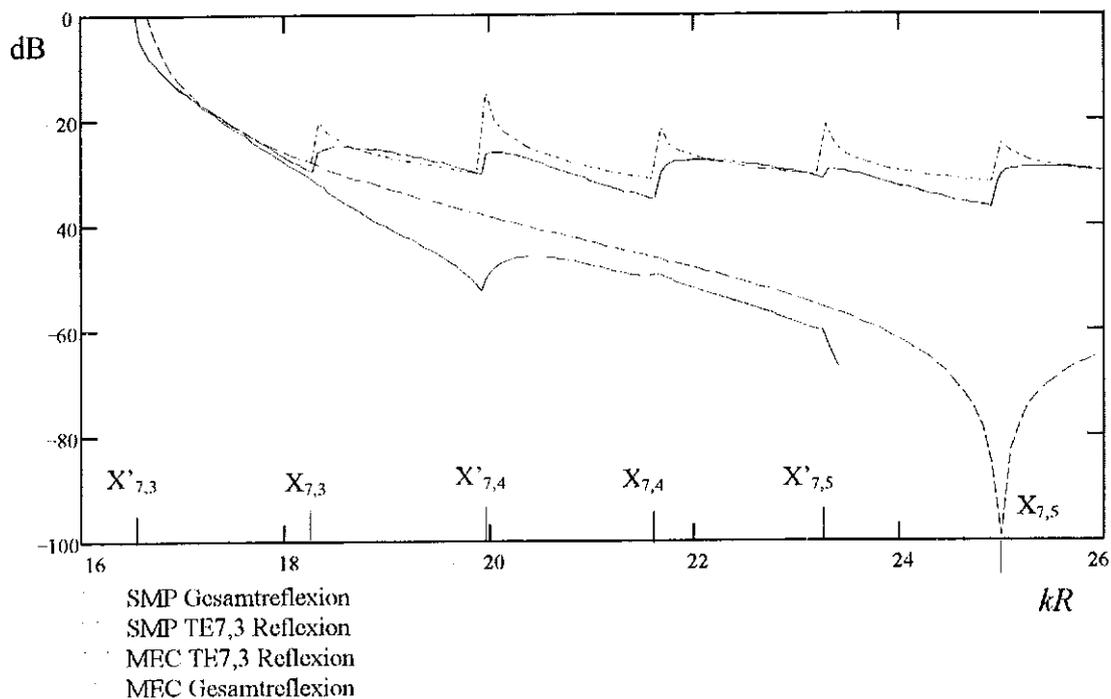


Bild 4-5: Rückstreuung der $TE_{7,3}$ -Mode als Funktion von kR

Man erkennt eine gute Übereinstimmung der Konversion und damit der gesamt rückgestreuten Leistung. Vor allem in den Intervallen $X_{7,n} \leq kR \leq X'_{7,n}$ herrscht eine sehr gute Übereinstimmung der Konversion, während in den dazwischenliegenden Intervallen ein Unterschied von etwa 3 dB zu verzeichnen ist. Dieser Effekt ist auf den Einfluß der gestreuten TM-Moden zurückzuführen, deren Reflexionsfaktor nach (3-96) geringer abfällt als bei der Referenzlösung. Diese Diskrepanz könnte auf die Einführung einer leitenden Ebene zurückgeführt werden, deren Einfluß für TM-Moden nicht abgeschätzt wurde.

Die Ergebnisse stimmen allerdings ausreichend überein, so daß die Brauchbarkeit der asymptotischen Methode für Kreiskanten gezeigt ist.

4.3 Reflexionen der helikalen Aperturantenne Vergleich: MAFIA und Methode der äquivalenten Kantenströme

Zur Überprüfung der Anwendbarkeit der erweiterten Methode der äquivalenten Kantenströme für die für den quasi-optischen Wellentypwandler relevanten Kantengeometrien wurden mit dem MAFIA-Programm Studien zum Reflexionsverhalten durchgeführt. Der direkte Vergleich soll die Leistungsfähigkeit der Methoden demonstrieren.

4.3.1 Rückstreuverhalten

Jede Änderung der Geometrie in einem vielwelligen Wellenleiter verursacht Konversion der anregenden Mode in andere ausbreitungsfähige Moden. Während man, wie im vorhergehenden Kapitel gezeigt, das reflektierte Modenspektrum bei einer axialsymmetrischen Störung einschränken kann, werden bei einer asymmetrischen Störung im Prinzip alle möglichen Moden angeregt.

Die Diskussion der in Kapitel 3.4 abgeleiteten Rückstreuformeln lassen die folgenden Schlüsse zur hauptsächlichlichen Streuung der anregenden Mode zu:

- | | |
|---|--|
| 1. Die gestreuten Moden sind nahe ihrer Grenzfrequenz | $\sin \psi_n \approx 1$ |
| 2. Die gestreuten Moden sind Whispering-Gallery-Moden | $\cos \theta_n \approx 1$ |
| 3. Die Strahlen der gestreuten Mode liegen auf einer Schattengrenze | $\hat{s} \cdot \hat{n} \approx \hat{s}' \cdot \hat{n}$ |
| 4. Die Phasenbelegung auf der Kante ist in Resonanz | $S_n \approx -S_q \Big _{r=r_0+t}$ |

Zur Überprüfung dieser qualitativen Aussagen wurde mit Hilfe des MAFIA-Programms eine vollständige Rückstreuanalyse durchgeführt und mit der Methode der äquivalenten Kantenströme verglichen. Als Anregung wurde eine rechtsrotierende Volumenmode (untere Vorzeichen in (2-13)) verwendet, deren Eigenschaften in Tabelle 4-3 dargestellt sind.

Tab. 4-3: Parameter der Simulation

anregende Mode	Frequenz	Wellenleiter-radius	Brillouin-winkel	Steigungswinkel	Länge der axialen Kante	Anzahl Moden
TE _{7,3}	f=140 GHz	R=6 mm	$\psi=70^\circ$	$\alpha=74^\circ$	L=11 mm	80

In Bild 4-6 ist die mit MAFIA berechnete rückgestreute Leistung in dB der TE-Moden dargestellt. Dem gegenübergestellt sind in Bild 4-7 die mit Hilfe von (3-101) und (3-108) berechneten Ergebnisse. Hierbei wurde jeweils die reflektierte Leistung der beiden möglichen Rotationsrichtungen zusammengefaßt. Bei der analytischen Lösung wurde auf die phasenrichtige Überlagerung der Reflexionsfaktoren für die axiale und helikale Kante geachtet.

Rückstreuanalyse (MAFIA)

TE-Moden

TE 7,3 Mode $f=140\text{ GHz}$, $R=6\text{mm}$

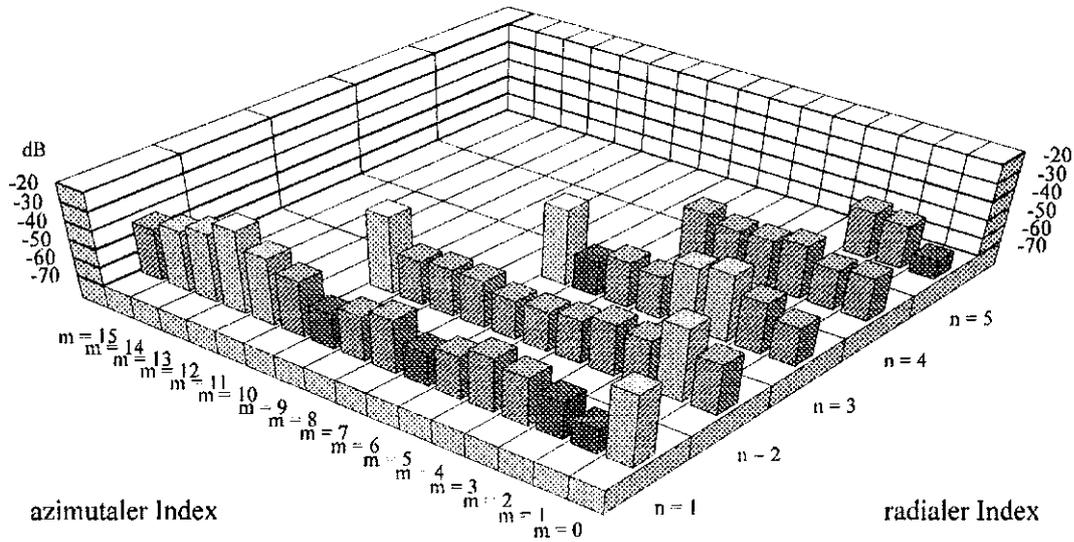


Bild 4-6: Rückgestreute Leistung in TE-Moden berechnet mit MAFIA

Rückstreuanalyse (MEC)

TE-Moden

TE 7,3 Mode $f=140\text{ GHz}$, $R=6\text{mm}$

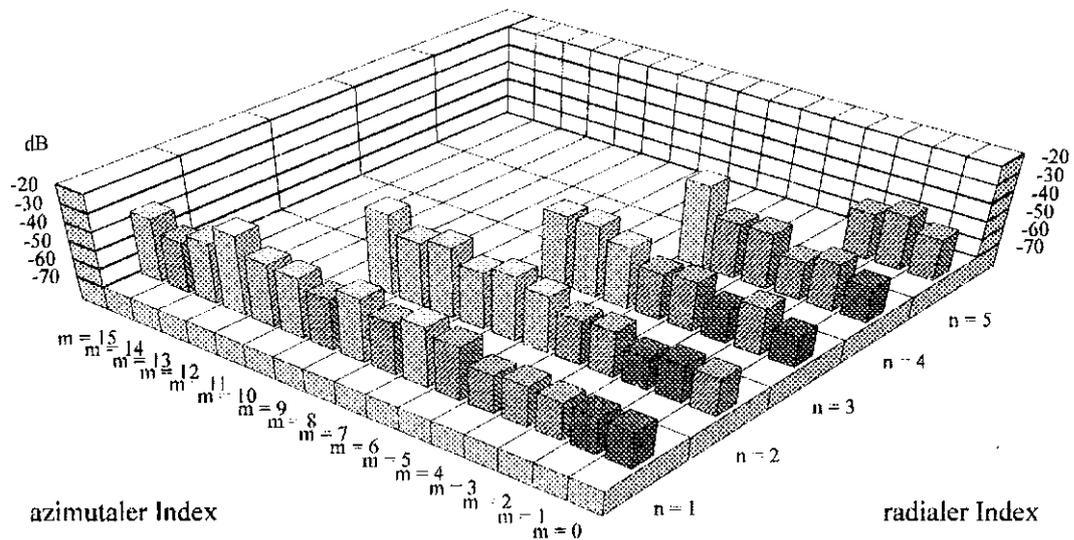


Bild 4-7: Rückgestreute Leistung in TE-Moden berechnet mit der Methode der äquivalenten Kantenströme

In Bild 4-8 ist entsprechend die mit MAFIA und in Bild 4-9 die mit (3-102/109) berechnete rückgestreute Leistung in dB der TM-Moden dargestellt.

Rückstreuanalyse (MAFIA)

TM-Moden

TE 7,3 Mode $f=140\text{ GHz}$, $R=6\text{ mm}$

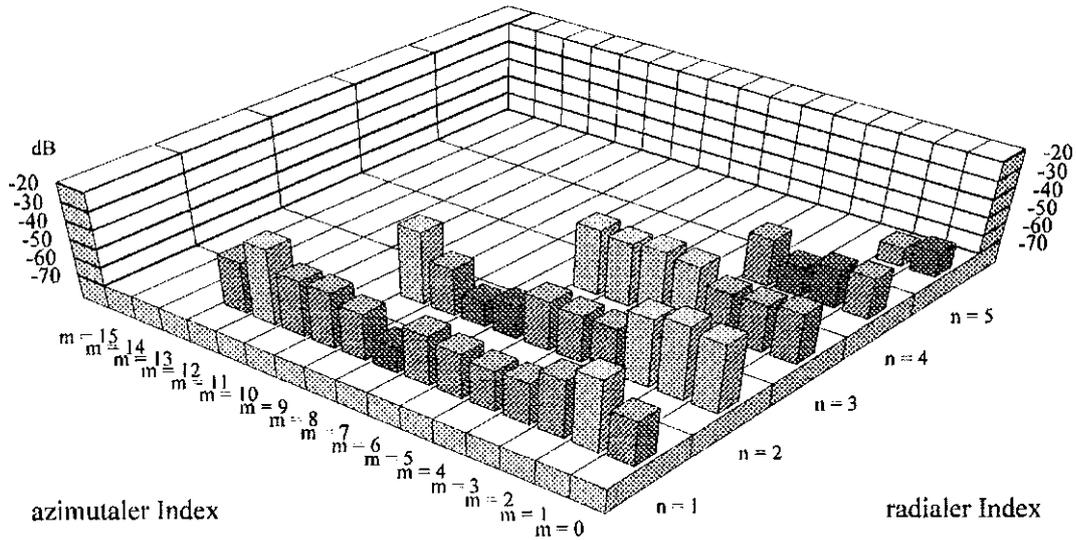


Bild 4-8: Rückgestreute Leistung in TM-Moden berechnet mit MAFIA

Rückstreuanalyse (MEC)

TM-Moden

TE 7,3 Mode $f=140\text{ GHz}$, $R=6\text{ mm}$

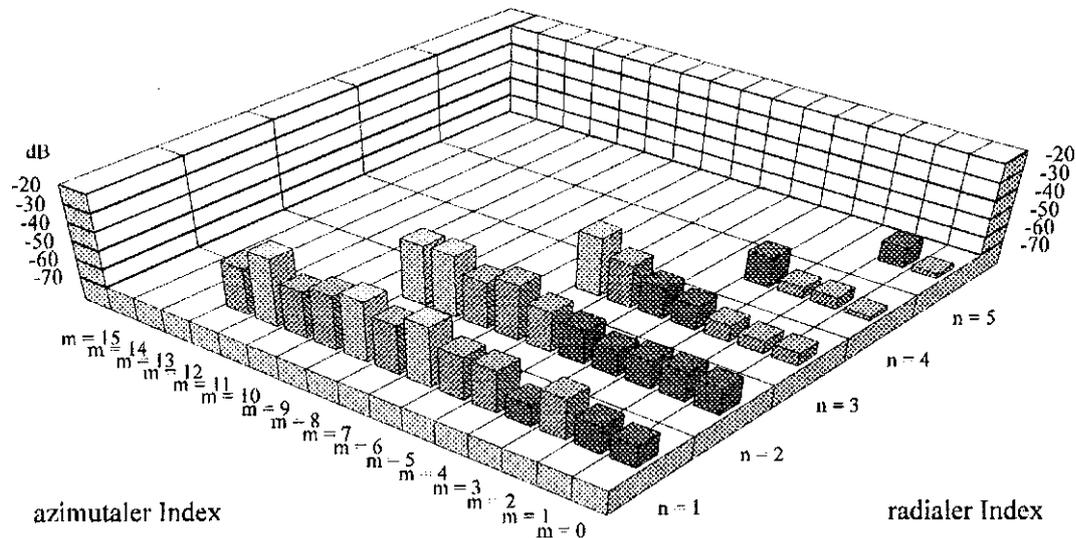


Bild 4-9: Rückgestreute Leistung in TM-Moden berechnet mit der Methode der äquivalenten Kantenströme

Der direkte Vergleich bestätigt die Annahme der Anregung von Whispering-Gallery- und Cutoff-Moden. Insbesondere liegt eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse für Moden hoher

Ordnung vor. So wird z.B. die Mode $TE_{12,1}$ stärker angeregt als Moden, die die Bedingung 1.) und 2.) eher erfüllen (wie z.B. $TE_{15,1}$). Der Grund dafür ist, daß die Resonanzbedingung 4.) auf der helikalen Kante für die Mode $TE_{12,1}$ sehr gut erfüllt wird:

$$\pi(m_q - m_n) + \frac{kL}{2}(\cos\psi_q + \cos\psi_n) = -0.26 \quad (4-1)$$

Ähnliche Überlegungen erklären die Anregung von $TE_{10,2}$, $TM_{12,1}$ usw. Allerdings zeigt die numerische Analyse die Anregung von Grundmoden (z.B. $TE_{0,1}$, $TE_{1,2}$, $TM_{1,1}$, $TM_{1,2}$ usw.). Dieser Effekt läßt sich erklären, wenn man die Streuung in vorwärtslaufende Moden betrachtet. Die in Vorwärtsrichtung gestreuten Moden können, wie in Kapitel 4.1 gezeigt wurde, stark von der nichtidealen Randbedingung reflektiert werden und so zurück in den speisenden Wellenleiter gelangen wenn diese Moden, wie im Fall der Grundmoden, mit flachem Brillouinwinkel propagieren. Eine weitere Erklärung der Unterschiede vor allem der Konversion in Grundmoden ist, daß durch die von Null verschiedene Zeitschrittweite bei der numerischen Simulation ein gewisser Anteil des gegenrotierenden Wellentyps erzeugt wird. Berechnungen mit der asymptotischen Methode zeigen, daß die Streuung in Grundmoden bei dieser Rotationsrichtung relativ groß ist. Eine genauere Untersuchung dieses Effekts wird wegen der geringen Relevanz nicht durchgeführt.

Unter Berücksichtigung der Vernachlässigung der Mehrfachbeugung läßt sich feststellen, daß sowohl qualitativ als auch quantitativ eine gute Übereinstimmung beider Verfahren vorliegt.

4.3.2 Reflexion der anregenden Mode in Abhängigkeit des Wellenleiter-radius

Die für die Gyrotronanwendung wichtige Reflexion der anregenden Mode soll nun für verschiedene Hohlleiterradien betrachtet werden. Bild 4-10 zeigt die reflektierte Leistung in dB der anregenden $TE_{7,3}$ -Mode in Abhängigkeit des Brillouinwinkels ψ .

Die asymptotische Lösung ist dabei aufgeschlüsselt in die einzelnen Beiträge der axialen und der helikalen Kante, jeweils für die beiden möglichen Rotationsrichtungen. Die durchgezogene Linie stellt die Summe der Beiträge dar und ist mit den numerisch berechneten Werten (Karas) zu vergleichen. Da die in (3-100) eingeführte sinc-Funktion bei den verwendeten Argumenten eine schnell oszillierende Funktion darstellt, wurde der Übersichtlichkeit wegen nur deren Einhüllende bei der Auswertung verwendet. Dies ist zudem dadurch gerechtfertigt, daß bei den Nullstellen dieser Funktion die Mehrfachbeugung überwiegt.

Man erkennt eine gute Übereinstimmung, wobei die analytische Lösung den Reflexionsfaktor im Bereich zwischen 60° und 80° im Gegensatz zur numerischen Lösung etwas unterschätzt. Für kleinere Winkel ergibt die numerische Lösung eine größere Reflexion und kann wie vorher als Beitrag der nichtidealen Randbedingung gedeutet werden.

Man sieht, daß für Winkel kleiner als 70° der wesentliche Beitrag der Reflexion von der axialen Kante geleistet wird und zwar in der Rotationsrichtung bei der der Strahl auf der Reflexionsschattengrenze liegt.

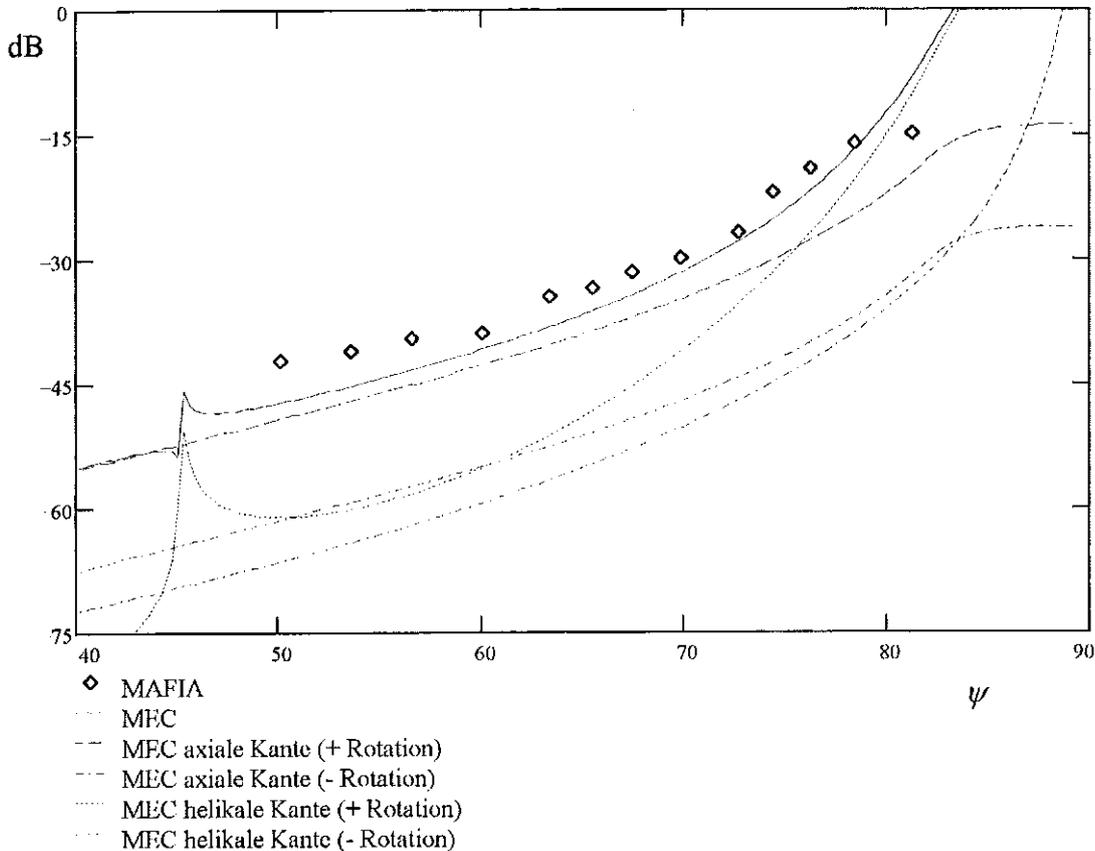


Bild 4-10: Reflexion der helikalen Aperturantenne in Abhängigkeit des Brillouinwinkels

Für größere Winkel überwiegt der Beitrag der helikalen Kante in der gleichen (+) Rotationsrichtung. Diese Kurve weist bei einem Winkel von etwa 45° eine Singularität auf. Es läßt sich zeigen, daß für diese Rotationsrichtung (oberes Vorzeichen (3-106)) die Bedingung aus (3-85)

$$\hat{s} \cdot \hat{n} = |\hat{s}' \times \mathbf{t}| \quad (4-2)$$

für den Brillouinwinkel

$$\cos \psi^s = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \frac{\cos \theta}{\theta \sin \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2}}} \quad (4-3)$$

erfüllt ist. Für die TE_{7,3}-Mode ergibt die Auswertung einen Wert von $\psi^s = 45.156^\circ$. Für diesen Winkel müßten die Beugungsfunktionen (3-84) für die äquivalenten Kantenströme durch die einheitlichen Beugungsfunktionen aus Anhang A5 ersetzt werden.

4.3.3 Einfluß der Schnittlänge auf den Reflexionsfaktor

Für Toleranzstudien interessant ist die Abhängigkeit des Reflexionsfaktors von der Länge L der axialen Kante, bzw. dem Steigungswinkel der helikalen Kante. Für das in Tabelle 4-4 dargestellte Beispiel wurde diese Länge variiert.

Tab. 4-4: Parameter der Simulation

anregende Mode	Frequenz	Wellenleiter-radius	Brillouin-winkel	Steigungswinkel	Länge der axialen Kante	Variationsbereich
TE _{10,4}	$f=140$ GHz	$R=8.62$ mm	$\psi=70^\circ$	$\cot \alpha = \frac{L_{var}}{2\pi R}$	$L=15.7$ mm	$L_{var}=\varepsilon L$

Wie man in Bild 4-11 erkennt, geht der Reflexionsfaktor für die helikale Kante für die Schnittlänge $L=0$ über in den Reflexionsfaktor für den Kreishohlleiter. Weiterhin sieht man, daß die Reflexionen der axialen Kante für fast den gesamten Variationsbereich konstant sind. In dem für Toleranzstudien interessanten Bereich um $\varepsilon=1$ variiert der Reflexionsfaktor nur unwesentlich.

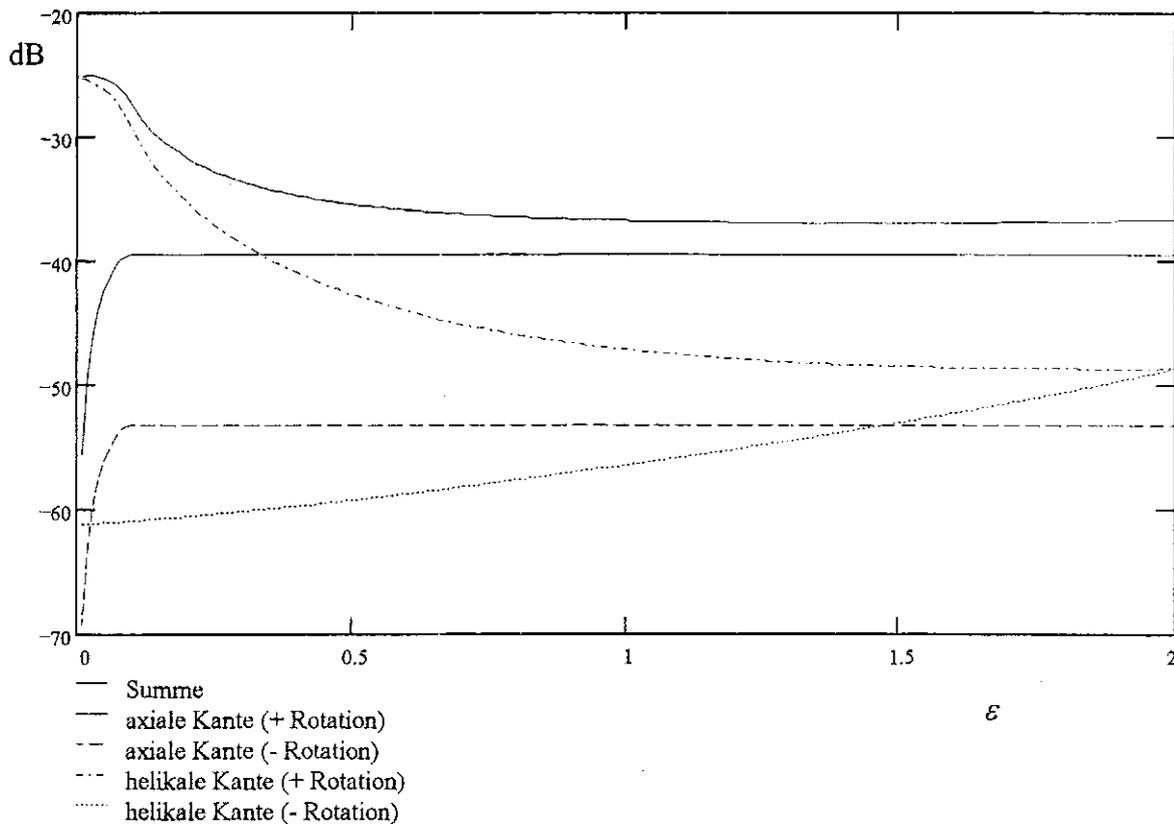


Bild 4-11: Einfluß der Schnittlänge auf den Reflexionsfaktor

4.4 Studien zum Reflexionsverhalten von Antennen mit praxisrelevanten Abmessungen

Im letzten Kapitel wurde die Anwendbarkeit der hier entwickelten asymptotischen Methode zur Berechnung des Reflexionsfaktors durch Vergleich mit numerischen Verfahren gezeigt. Da diese Methode insbesondere für große Abmessungen geeignet ist, kann erwartet werden, daß für praxisrelevante Antennen hinreichend genaue Voraussagen getroffen werden können.

4.4.1 Reflexionsfaktoren für verschiedene Moden

Im folgenden soll der Reflexionsfaktor für verschiedene realitätsnahe Moden ausgewertet werden. Die hier ausgesuchten Moden (Tabelle 4-5) werden dabei zum Teil in verschiedenen Gyrotrons verwendet. Damit diese Moden direkt verglichen werden können, wird der Reflexionsfaktor in Abhängigkeit des Brillouinwinkels in Bild 4-12 dargestellt.

Tabelle 4-5: Ausgesuchte Moden und Eigenschaften

Mode	Nummer	X'_{mv}	R_c/R	θ [rad]	ψ^s [°]
TE _{7,3}	75	16,529	0,424	1,134	45,156
TE _{16,2}	143	23,264	0,688	0,812	63,048
TE _{10,4}	147	23,761	0,421	1,136	44,971
TE _{15,4}	232	29,906	0,502	1,045	51,084
TE _{22,6}	535	45,624	0,482	1,068	49,684

Zum Vergleich ist die zuvor ausführlich behandelte TE_{7,3}-Mode mit aufgeführt. Deutlich zu erkennen sind die in der Tabelle 4-4 vorhergesagten Singularitäten an den Stellen $\psi = \psi^s$. Physikalisch bedeuten sie eine Phasenumkehr des Stromes auf der helikalen Kante.

Wie zu erwarten sinkt die Reflexion mit steigender Ordnung der Moden. Man erkennt, daß die Reflexion mit sinkendem Brillouinwinkel sehr schnell abnimmt. Die für den Gyrotronbetrieb notwendige Reflexionsdämpfung von -20 dB wird schon für Winkel kleiner als 75° unterschritten. Das zur Abschätzung oftmals verwendete Modell des Impedanzsprungs des transversalen Wellenwiderstands, bezogen auf den Freiraumwellenwiderstand, würde den Reflexionsfaktor um ein Vielfaches überschätzen.

Somit ist es möglich, den Ausgangsdurchmesser sehr klein zu wählen, ohne daß die Gefahr von Reflexionen besteht.

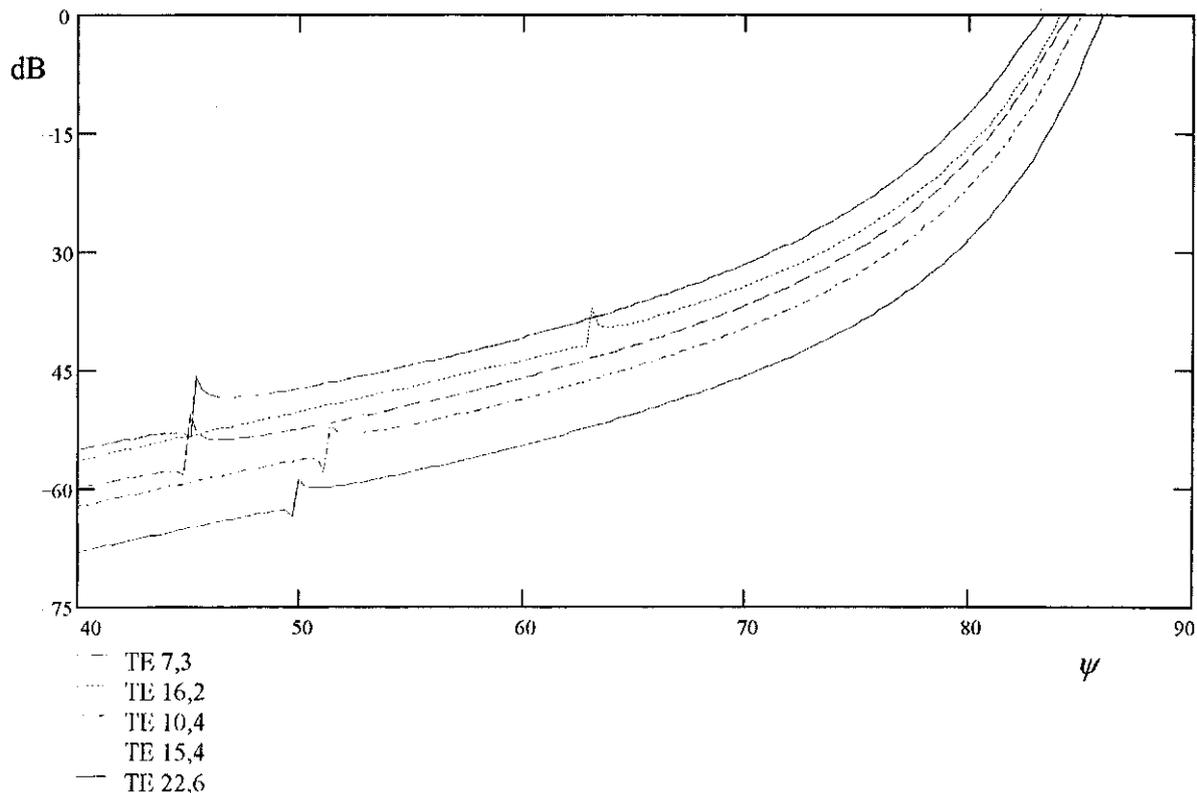


Bild 4-12: Reflexionsfaktor in Abhängigkeit des Brillouinwinkels für praxisrelevante Moden

4.4.2 Vergleich: vollständig helikaler - halbhelikaler Schnitt

Der bisher analysierte Antennentyp war durch die Kanten

$$\begin{array}{llll}
 \text{axiale Kante:} & \rho = R & \varphi = 0 & 0 \leq z \leq L \\
 \text{helikale Kante:} & \rho = R & 0 \leq \varphi \leq 2\pi & z(\varphi) = L \frac{\varphi}{2\pi}
 \end{array} \quad (4-4)$$

mit L aus (2-30) charakterisiert. In Bild 2-5 ist eine Variante der Antenne skizziert, die innerhalb geometrisch-optischer Näherung die gleichen Eigenschaften wie die Antenne mit vollständig helikalem Schnitt besitzt. Die Kanten dieser Variante mit halbhelikalem Schnitt werden beschrieben durch:

$$\begin{array}{llll}
 \text{axiale Kante:} & \rho = R & \varphi = 0 & 0 \leq z \leq L \\
 \text{helikale Kante:} & \rho = R & 0 \leq \varphi \leq 2\theta & z(\varphi) = L \frac{\varphi}{2\pi} \\
 \text{axiale Kante:} & \rho = R & \varphi = 2\theta & L \frac{\theta}{\pi} \leq z \leq L
 \end{array} \quad (4-5)$$

Die Unterschiede im Reflexionsverhalten der beiden Antennentypen soll im folgenden näher untersucht werden.

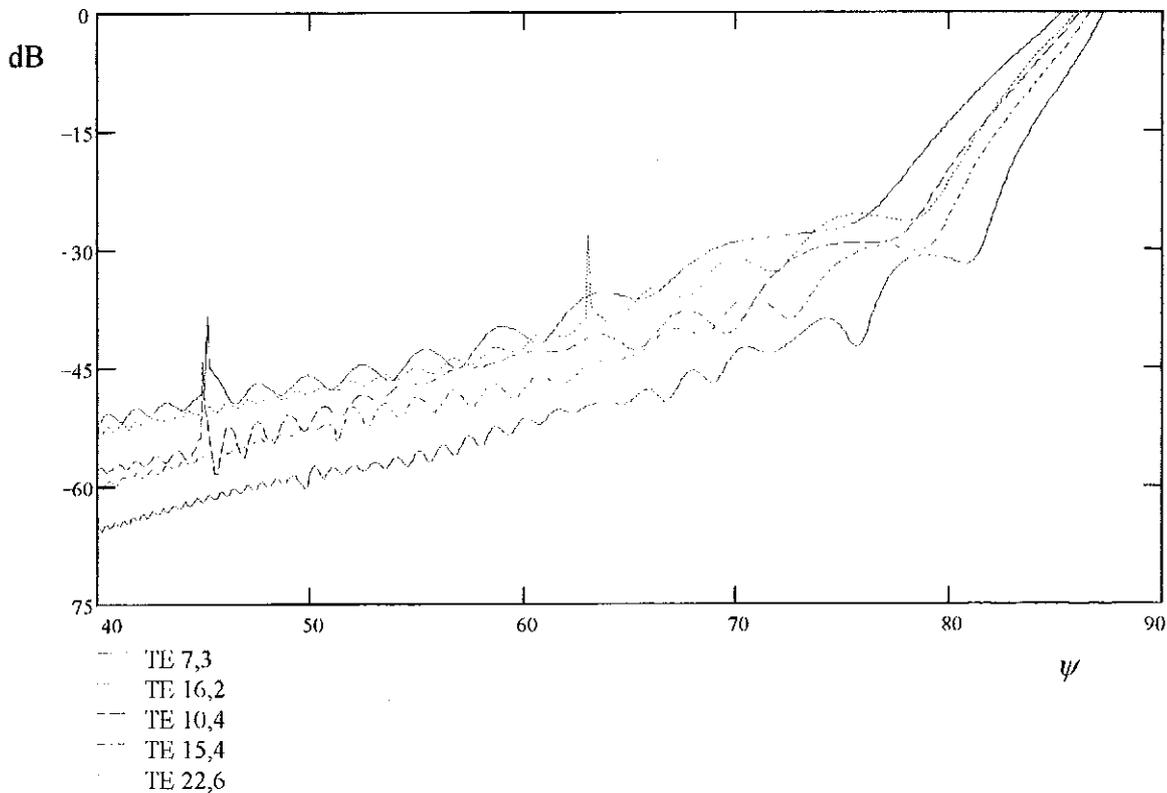


Bild 4-13: Reflexionsfaktor in Abhängigkeit des Brillouinwinkels für die Antenne mit halbhelikalem Schnitt

Dargestellt sind wie in Bild 4-12 die Reflexionsfaktoren für praxisrelevante Moden nach Tabelle 4-4. Anders als zuvor entsteht der Reflexionsfaktor durch Überlagerung von drei Kantenbeiträgen (4-5). Für die axiale Kante bei $\varphi=0$ gilt (3-101) unverändert, und für das helikale Stück muß in den Reflexionsfaktoren in (3-108) lediglich die Länge L entsprechend nach (4-5) eingesetzt werden. Bei der Anwendung des Reflexionsfaktors (3-101) auf die zweite axiale Kante bei $\varphi=2\theta$ muß beachtet werden, daß sich die Normalenrichtung umkehrt und daß das Integral (3-99) die folgende Lösung besitzt:

$$\int_C e^{ik(S_q+S_n)} dt = e^{iP} L \left(1 - \frac{\theta_q}{\pi}\right) e^{i2\theta_q \left(m_q \pm \varphi m_n - \frac{kL}{2\pi}\right)} \text{sinc} \left(\frac{kL}{2} \left(1 - \frac{\theta_q}{\pi}\right) (\cos \psi_n + \cos \psi_q) \right) \quad (4-6)$$

Da nun die von ψ abhängigen Phasenterme der Reflexionsfaktoren nicht mehr identisch sind, haben die Kurven in Bild 4-13 Interferenzmuster. Den Hauptanteil der Reflexionen tragen dabei die Beiträge der beiden axialen Kanten in jeweils der Rotationsrichtung, bei der die Beobachtungsrichtung auf der Reflexionsschattengrenze liegt. Somit ergibt sich im Mittel ein um 3 dB höherer Reflexionsfaktor als bei der Antenne mit vollständig helikalem Schnitt.

4.4.3 Antenne mit Strahlaufteilung

Für Ausgangsleistungen >1 MW ist es wegen des begrenzten Transmissionsvermögen des Fensters erforderlich, den Hochfrequenzstrahl aufzuspalten und durch zwei Fenster zu leiten. Diese Aufteilung kann durch einen Doppelschnitt der Antenne erfolgen. Das Funktionsprinzip und eine dreidimensionale Ansicht einer solchen Antenne ist in Bild 4-14 skizziert.

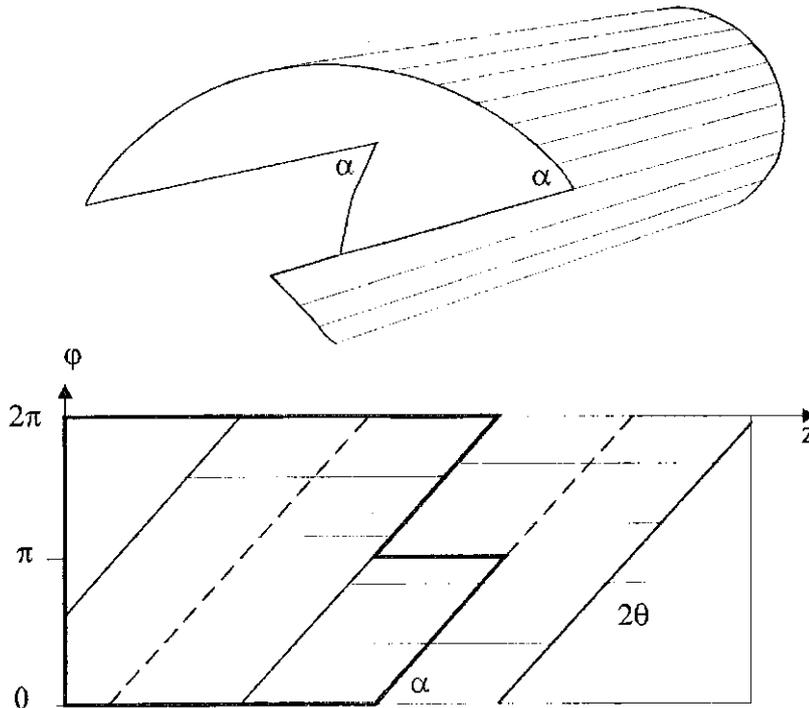


Bild 4-14: Helikale Aperturantenne mit Doppelschnitt zur Strahlaufteilung mit einem Versatz von 180°

Dieses Verfahren zur Strahlaufteilung ist besonders für Moden mit kleinem Spreizwinkel θ geeignet. Der Steigungswinkel α ist dabei identisch mit (2-29), während die Länge der axialen Kanten um den Faktor 2 reduziert ist.

Der Einfluß der zusätzlichen Kante bei $\varphi = \pi$ auf den Reflexionsfaktor wird im folgenden untersucht. Den Reflexionsfaktor erhält man durch die Änderung der Integrationsgrenzen in (3-99) für die axiale Kante und in (3-107) für die helikale Kante. Für das Argument der sinc-Funktion muß daher der halbierte Wert angesetzt werden. Die komplexe Addition der Reflexionsfaktoren, getrennt für axiale und helikale Kanten, liefert dabei einen zusätzlichen Faktor, der für die axialen Kanten in (3-101/102) durch

$$\frac{1}{2} \left(1 + e^{-i(m_q \mp m_n) \pi} \right) \quad (4-7)$$

gegeben ist, und der Reflexionsfaktor für die helikale Kante in (3-108/109) muß mit dem Faktor

$$\frac{1}{2} \left(1 + e^{i(m_q \pm m_n + \frac{kL}{2\pi}(\cos \psi_q + \cos \psi_n))\pi} \right) \quad (4-8)$$

multipliziert werden. Hierbei wurde der in Bild 4-14 angedeutete Strahlteilungswinkel von 180° zugrundegelegt. Der Faktor (4-7) verschwindet für Moden, bei denen die Summe der azimutalen Indizes ungeradzahlig ist, was auch aus Symmetriegründen zu erwarten ist. Im anderen Fall wird der Faktor zu Eins und durch die Halbierung des Arguments der sinc-Funktion wird die reflektierte Leistung in Bereichen, in denen $\text{sinc}(x) \approx 1/x$ gilt, vervierfacht. Eine ähnliche Überlegung gilt für den Faktor (4-8), wobei dieser zusätzlich frequenzabhängig ist.

Eine Anwendung dieses Antennentyps ist für das Gyrotron mit koaxialem Resonator (FZK, 1996) geplant. Dabei wird die Resonatorarbeitsmode $TE_{28,16}$ zunächst in die zu ihr fast entartete Mode $TE_{76,2}$ gewandelt. Diese Mode eignet sich wegen des kleinen Spreizwinkels zur Strahlaufteilung. In Bild 4-15 ist der Reflexionsfaktor der $TE_{76,2}$ -Mode als Funktion des Brillouinwinkels aufgetragen. Dabei sind wie in Bild 4-10 die einzelnen Beiträge der Kanten für verschiedenen Rotationsrichtungen der gestreuten Mode aufgeteilt.

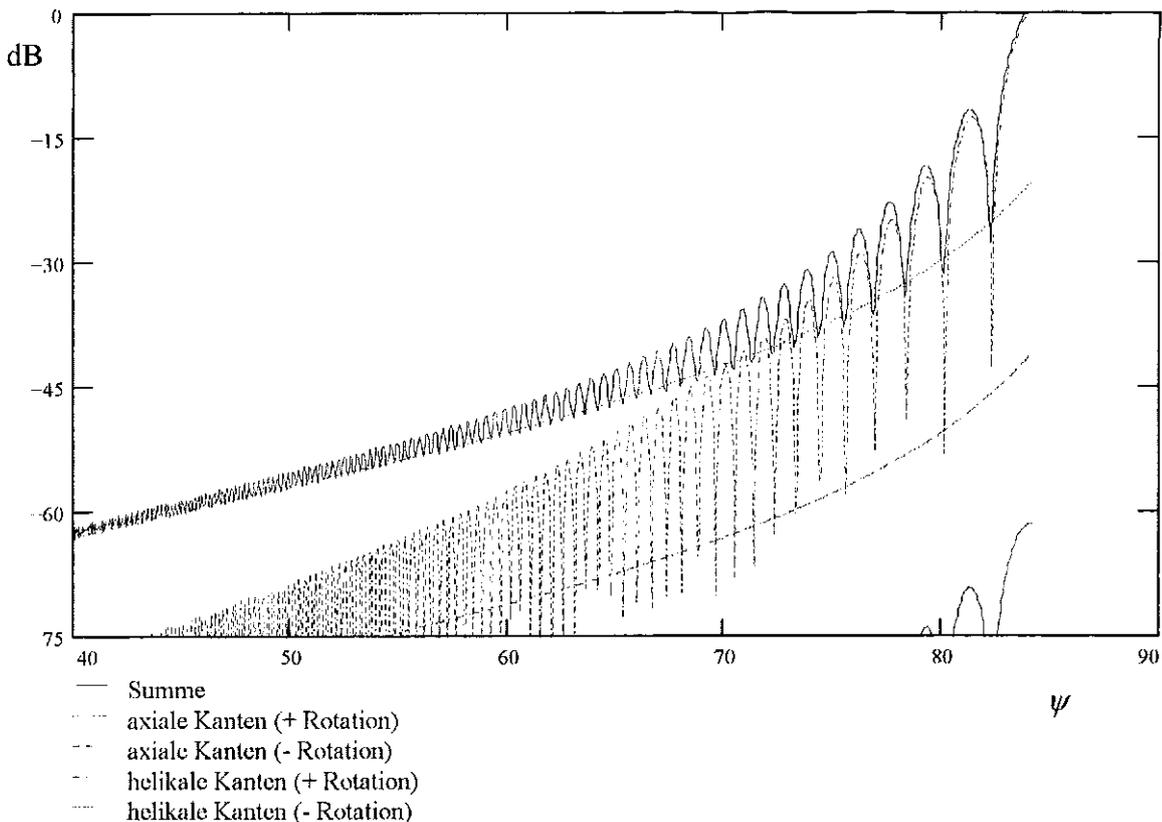


Bild 4-15: Reflexion der $TE_{76,2}$ -Mode an dem Doppelschnitt als Funktion des Brillouinwinkels

5 Analyse azimuthaler Deformationen nach dem Hohlleiterspiegelkonzept

Zur Vermeidung von Beugungsverlusten ist man bei dem Entwurf quasi-optischer Wellentypwandler dazu übergegangen, die Hohlleiterwelle schon vor ihrer Auskopplung in den Freiraum zu formen. Die wichtigsten Konzepte wurden in Kapitel 2.3 vorgestellt. Zur Analyse von Wellenleiterdeformationen nach dem Hohlleiterspiegelkonzept wurde in dieser Arbeit mit der in Kapitel 3.3 dargestellten Randelementmethode ein Analyseprogramm erstellt.

Dieses Programm berechnet, bei Vorgabe der mit Hilfe der geometrischen Optik synthetisierten Randkonturen und Anregung durch eine rotierende Hohlleitermode, das Feld der sich transversal ausbreitenden Welle. Die Analyse erfolgt unter der Annahme, daß sich die transversale Ausbreitungskonstante wenig ändert. Dies ist bei geringen Deformationsamplituden gewährleistet und hat auf die axiale Ausbreitungskonstante einen vernachlässigbaren Einfluß wenn die Mode nicht nahe ihrer Grenzfrequenz betrieben wird.

Wie in Kapitel 3.3.3 gezeigt wurde, lassen sich einzelne Hohlleiterspiegelsegmente getrennt voneinander berechnen und im Anschluß mit Hilfe der Generalisierten-Streumatrix-Methode zusammenschalten. Diese Prozedur läßt sich erheblich vereinfachen, wenn die rückgestreuten Moden (z.B. \mathbf{b}^1 und \mathbf{d}^1 in Bild 3-10) vernachlässigt werden können. In diesem Fall kann die Ausgangsverteilung eines Winkelsegmentes als Eingangsanregung des folgenden Segmentes gleichgesetzt werden.

Im Anschluß an die Lösung des Randwertproblems kann das innere Feld durch Integration der Randbeiträge in beliebigen Beobachtungspunkten ermittelt werden. Von besonderem Interesse sind dabei die Wandströme sowie die Feldgrößen in Kaustikregionen und im Ausgangsstrahl des Wandlers. Hiermit lassen sich durch Wirkungsgradoptimierung die transversalen Parameter des Gaußschen Freiraumstrahls bestimmen.

Die Analyse von axialen Deformationen läßt sich mit dem hier vorgestellten Verfahren nicht durchführen. In diesem Fall muß auf physikalisch-optische Methoden zurückgegriffen werden oder mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate eine Entwicklung der Feldgrößen auf den Spiegeln in Gaußsche Moden höherer Ordnung durchgeführt werden. Letztere Methode wird zur Zeit am FZK entwickelt.

5.1 Anwendbarkeit der Randelementmethode bei der transversalen Wellenausbreitung

In diesem Kapitel sollen einige Tests zur Anwendbarkeit und Zuverlässigkeit des entwickelten Programms dargestellt werden. Da für die Problemstellung der azimuthalen Wellenleiterdeformationen keine direkten Vergleichsdaten herangezogen werden können, wird die Funktionsprüfung auf andere Problemstellungen beschränkt. Dabei wurde als erster Test das Transmissionsverhalten von Rechteckhohlleiterbiegungen mit Literaturdaten verglichen (Anhang A6). Ein weiterer Test, der vor allem die Reduktion von der dreidimensionalen Aufgabenstellung auf eine Zweidimensionale rechtfertigen soll, ist die Wellenausbreitung einer TM-Welle in einem azimuthalen Wellenleiter, dessen Berandung ein Kreis ist. Erfolgt die Anregung mit einer Eigenlösung des Kreishohlleiters (Kapitel 3.3.3), so sollte sich die Verteilung am Eingangstor des Hohlleiters am Ausgang des Wellenleiters reproduzieren.

Bei dieser Aufgabenstellung erfolgt die Ausbreitung mit der konstanten Wellenzahl:

$$\kappa = \frac{X'_{mv}}{R} \quad (5-1)$$

Bei einem deformierten Wellenleiter hingegen, ist die Wellenzahl eine Funktion des Winkels, so daß bei der Anwendung der Randelementmethode eine Mittelung stattfinden muß:

$$\bar{\kappa} = \frac{X'_{mv}}{\frac{1}{\Delta\varphi} \int_0^{\Delta\varphi} R(\varphi) d\varphi} \quad (5-2)$$

Bei kleinen Deformationsamplituden $\delta(\varphi) = R - R(\varphi)$ ändert sich die transversale Wellenzahl κ nur wenig, so daß die axiale Wellenzahl β (2-6) nahezu konstant bleibt, wenn die Mode nicht nahe ihrer Grenzfrequenz betrieben wird.

Um nun den Fehler bei der Verwendung einer gemittelten Wellenzahl abschätzen zu können, wird in Kapitel 5.1.2 der nichtdeformierte Wellenleiter mit unterschiedlichen Ausbreitungskonstanten betrieben und die Abweichung festgestellt.

5.1.1 Nichtdeformierter Kreishohlleiter

In Bild 5-2 ist exemplarisch für eine $TE_{7,3}$ -Anregung bei einem Wellenleiterradius von $R=6$ mm das Ein- und Ausgangsmodenspektrum, sowie der Feldverlauf an den Toren exemplarisch für einen Kreissektor von 135° dargestellt. Man erkennt eine annähernd identische Feldverteilung. Dieses Ergebnis ist fast unabhängig von der Wahl des Sektorwinkels, was auf die Güte des Verfahrens hinweist.

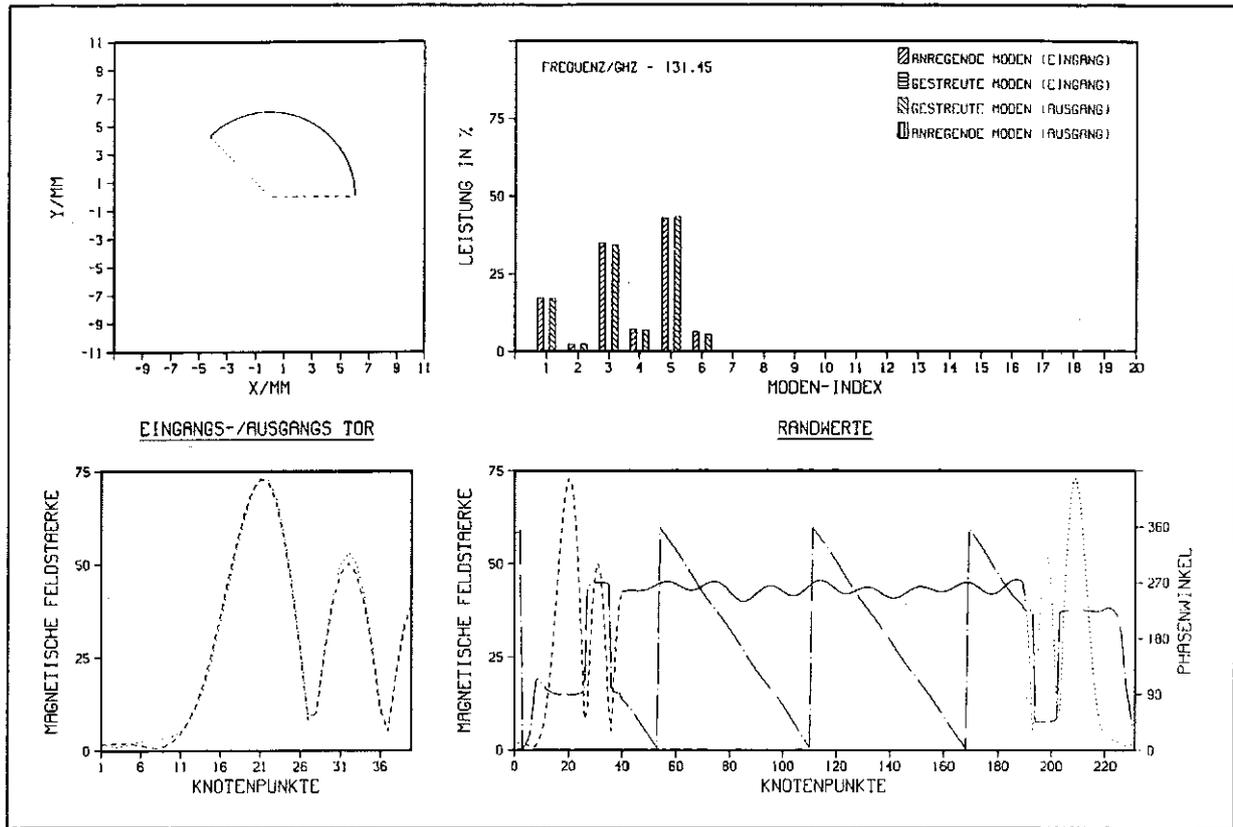


Bild 5-1: Zweidimensionale Wellenausbreitung in einem Kreishohlleiter

In Bild 5-1 ist das typische Ausgabeformat des für die Randelementmethode entwickelten Postprozessors dargestellt und soll an dieser Stelle erläutert werden.

Im Fenster oben links ist die verwendete Geometrie dargestellt, wobei die durchgezogene Linie die Hohlleiterwand, die gestrichelte Linie das Eingangstor und die gepunktete Linie das Ausgangstor darstellt. Die Numerierung der Knotenpunkte beginnt bei dem Eingangstor und die Knotennummern steigen dabei beim mathematisch positiven Durchlaufen der Kurve. Eine äquidistante Diskretisierung hat sich als brauchbar herausgestellt.

Das Fenster oben rechts stellt das leistungsnormierte Modenspektrum der Parallelplattenwellentypen für das Ein- und Ausgangstor dar. Hierbei gilt vereinbarungsgemäß bei Verwendung von TM-Moden, daß der auftretenden TEM-Mode der Index 1 zugewiesen wird.

Für die Synthese der Eigenwelle des Kreishohlleiters ist dabei eine Fourierzerlegung der Besselfunktion (3-72) nötig. Dargestellt werden anregende Moden am Ein- oder Ausgangstor sowie gestreute Wellentypen. Weiterhin ist die verwendete Frequenz angegeben, die wie folgt mit der transversalen Ausbreitungskonstante (5-2) zusammenhängt:

$$f_t = \frac{c\bar{k}}{2\pi} \quad (5-3)$$

Das Fenster unten links zeigt den Betrag der Feldstärke an den Toren. Dabei entspricht die gestrichelte Kurve der Verteilung am Eingangstor und die gepunktete Linie zeigt den Feldstärkeverlauf am Ausgang. Die Abszisse zeigt die Knotenpunkte des Eingangstores, dessen Stützstellenverteilung nicht notwendigerweise mit denen des Ausgangstors übereinstimmen muß.

Das Fenster rechts unten zeigt den Verlauf der berechneten Randwerte über die Knotenpunkte. Hierin sind somit auch die Verteilungen an den Toren wiedergegeben. Die Feldstärke auf dem Wellenleiterrand entspricht dabei dem Strombelag. Die strichpunktierte Linie gibt den Phasenverlauf wieder. Man erkennt, daß neben einer kleinen Welligkeit die Feldstärke nahezu konstant und die Phase linear ist, wie es bei einer rotierenden Kreishohlleitermode zu erwarten ist.

5.1.2 Fehlerabschätzung bei Verwendung einer gemittelten Wellenzahl

Die Deformationsamplituden $\delta(\varphi)$ von azimuthal deformierten Wellenleitern sind Lösungen einer Differentialgleichung und können nicht geschlossen angegeben werden. Ihr Maximum liegt in der Größenordnung von $R/20$, was bedeutet, daß die transversale Ausbreitungskonstante κ um $\pm 5\%$ schwanken kann. In Bild 5-2 ist eine Analyse des nichtdeformierten Wellenleiters bei einer um -5% und in Bild 5-3 um $+5\%$ geänderten Ausbreitungskonstante dargestellt. Man erkennt, daß trotz der verstimmten Anregung das Eingangsfeld am Ausgang gut reproduziert wird.

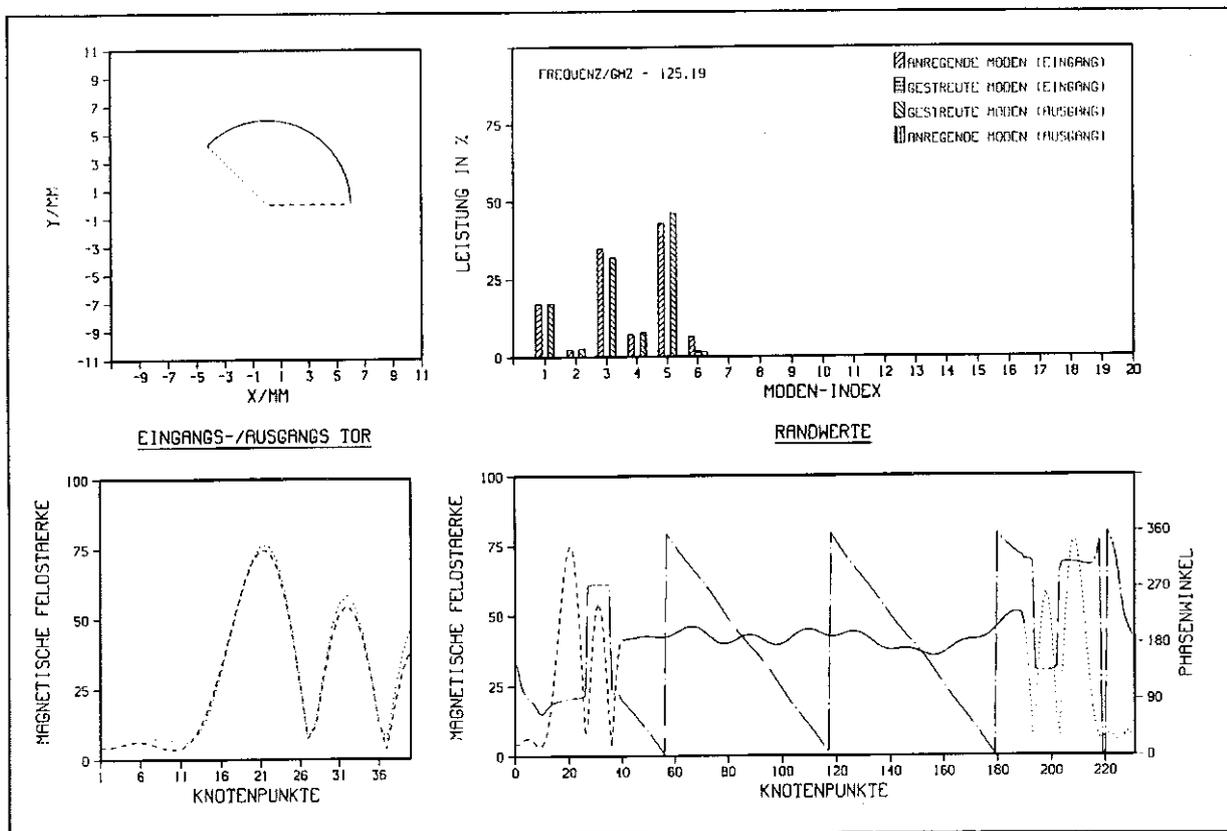


Bild 5-2: Zweidimensionale Wellenausbreitung in einem Kreishohlleiter: Frequenzverstimmung um -5%

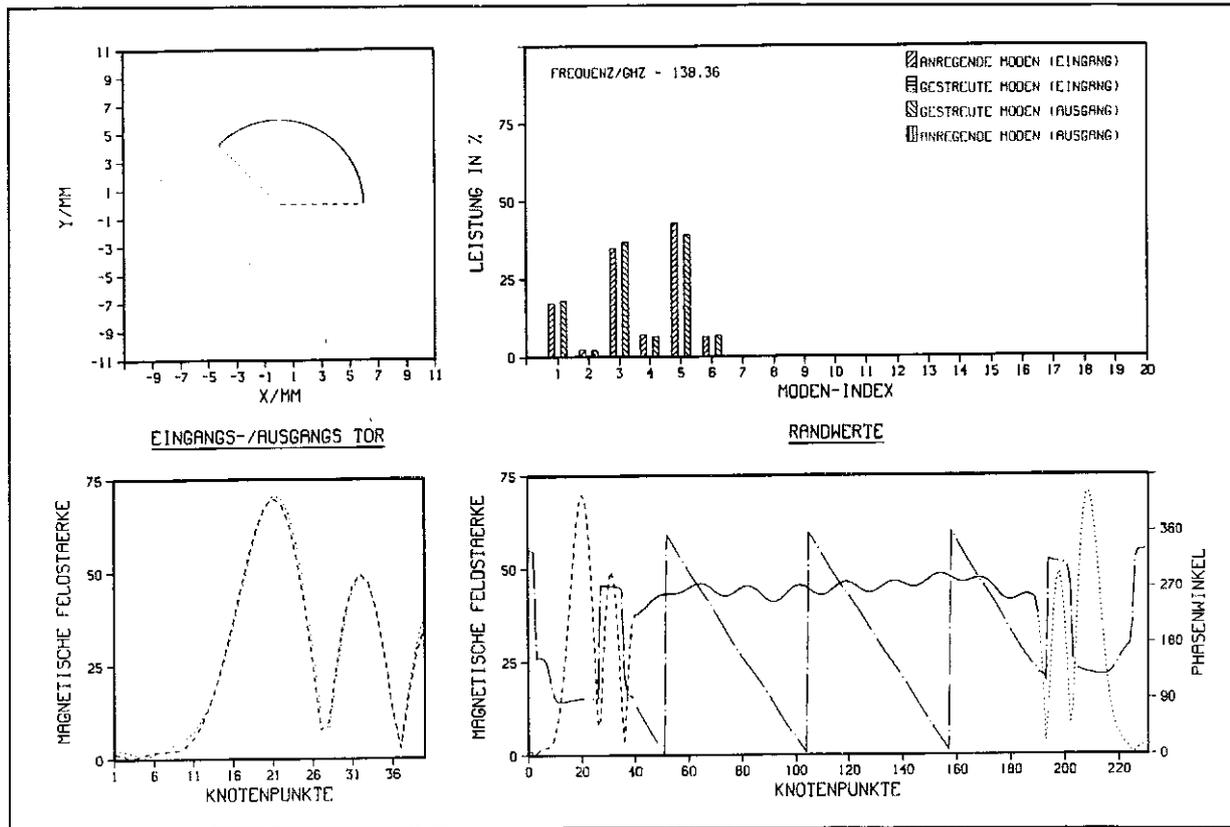


Bild 5-3: Zweidimensionale Wellenausbreitung in einem Kreishohlleiter: Frequenzverstimmung um +5 %

Der Fehler ist hierbei im allgemeinen abhängig vom Sektorwinkel $\Delta\varphi$. Bei den folgenden Berechnungen wurden daher Konvergenztests in Form von Winkelsektorhalbierungen und Kaskadierung durchgeführt. Es zeigt sich, daß bei den hier vorhandenen Innenspiegeln mit einem Winkelbereich von etwa 120° die Ergebnisse sehr stabil sind.

5.2 Analyse der transversal deformierten Hohlleiterspiegel

Die in Kapitel 2.3 dargestellten azimuthalen Hohlleiterdeformationen haben die Aufgabe, die anfänglich homogene Verteilung auf der Kaustik in eine Gauß-ähnliche zu wandeln. Die Deformationen zweier aufeinanderfolgender Spiegel erzwingen dabei eine Defokussierung und eine Fokussierung der Strahlen. Da die Hohlleiterstörungen aufgrund möglicher Reflexionen nicht zu groß sein dürfen, können dabei mehrere dieser Spiegelpaare hintereinandergeschaltet werden. Für eine herabskalierte Mode ($TE_{7,3}$) sowie für die praxisrelevante Gyrotronarbeitsmode ($TE_{22,6}$) sollen im folgenden der Einfluß der azimuthalen Deformationen analysiert werden. Die Daten der Wandstörungen wurden mit Hilfe des in [Möb1] dargestellten Syntheseverfahrens erzeugt.

5.2.1 Hohlleiterspiegel für die $TE_{7,3}$ Mode

Dieser Wellentyp eignet sich vor allem für Studienzwecke wegen der nicht zu großen Abmessungen gegenüber der Freiraumwellenlänge. Die Geometrie des ersten Spiegels sowie die Analyseergebnisse sind in Bild 5-4 dargestellt. Die Parameter der numerischen Berechnung sind in Tabelle 5-1 zusammengefaßt.

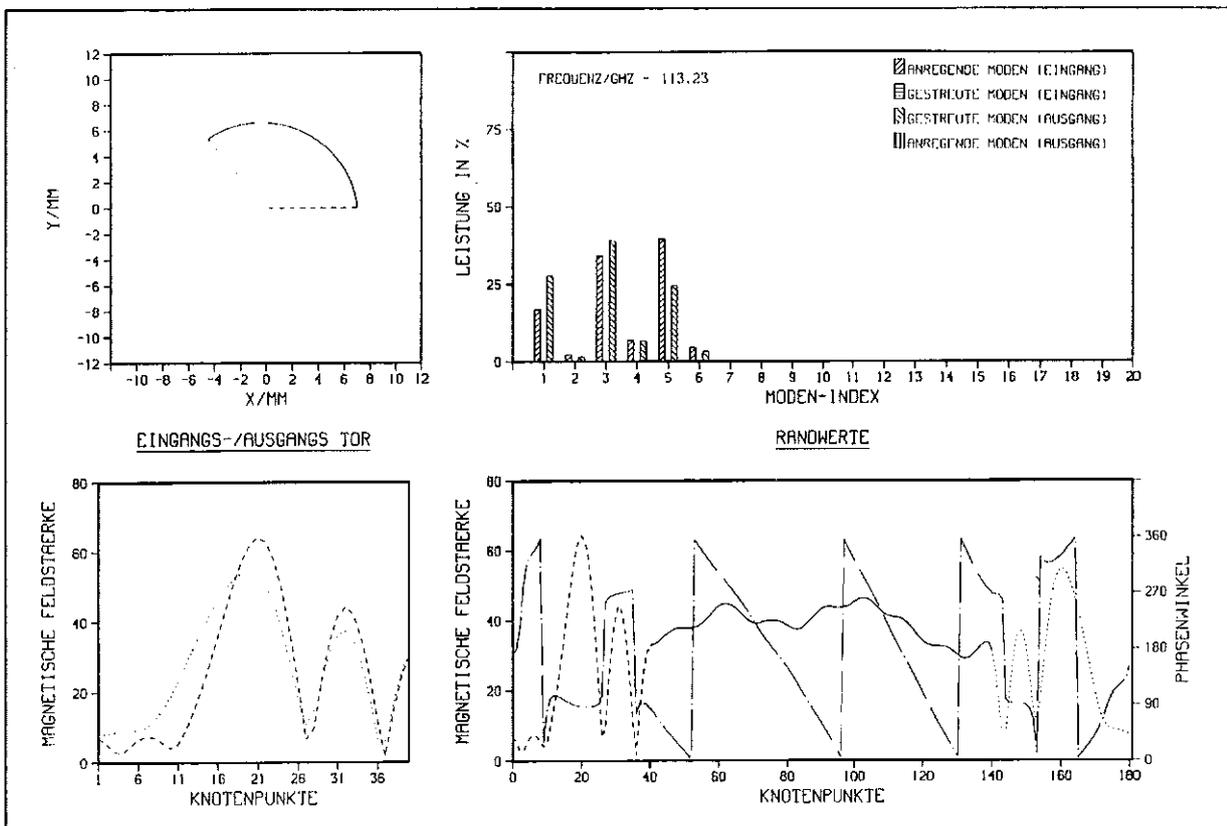


Bild 5-4: Analyse des transversalen defokussierenden Spiegels eines $TE_{7,3}$ Wellentypwandlers

Tabelle 5-1: Simulationsparameter für die Analyse des TE_{7,3} Wellentypwandlers

Wellenleiter-radius R [mm]	Ausbr.-konstante $\bar{\kappa}$ [1/mm]	Anzahl Moden (ein/aus)	Anzahl Knoten K	relative Genauigkeit Integrale ϵ	Abtast-rate AR [1/ λ]	CPU-Zeit [s]
7	2.36	40/40	180	0.0001	16	62

Die Abtastrate in der Tabelle ist bei der hier verwendeten äquidistanten Diskretisierung definiert durch

$$AR = \frac{\lambda}{\Delta l} = \frac{\pi K}{\bar{\kappa} R (1 + \Delta\varphi)}, \quad (5-4)$$

wobei für den Winkelbereich meist $\Delta\varphi = 2\theta$ verwendet wird.

In Bild 5-4 ist die Randkontur $R_s(\varphi) > R$ des ersten Hohlleiterspiegels für einen Winkelbereich von $0 < \varphi < 2\theta$ dargestellt. Dem Modenspektrum entnimmt man, daß wie bereits angedeutet, die reflektierten Moden vernachlässigt werden können.

Bild 5-5 zeigt die Analyse der fokussierenden Störung $R_s(\varphi) < R$ für $2\theta < \varphi < 4\theta$. Hierbei wurde die Ausgangsverteilung des ersten Spiegels als Eingangsverteilung des nachfolgenden Spiegels verwendet.

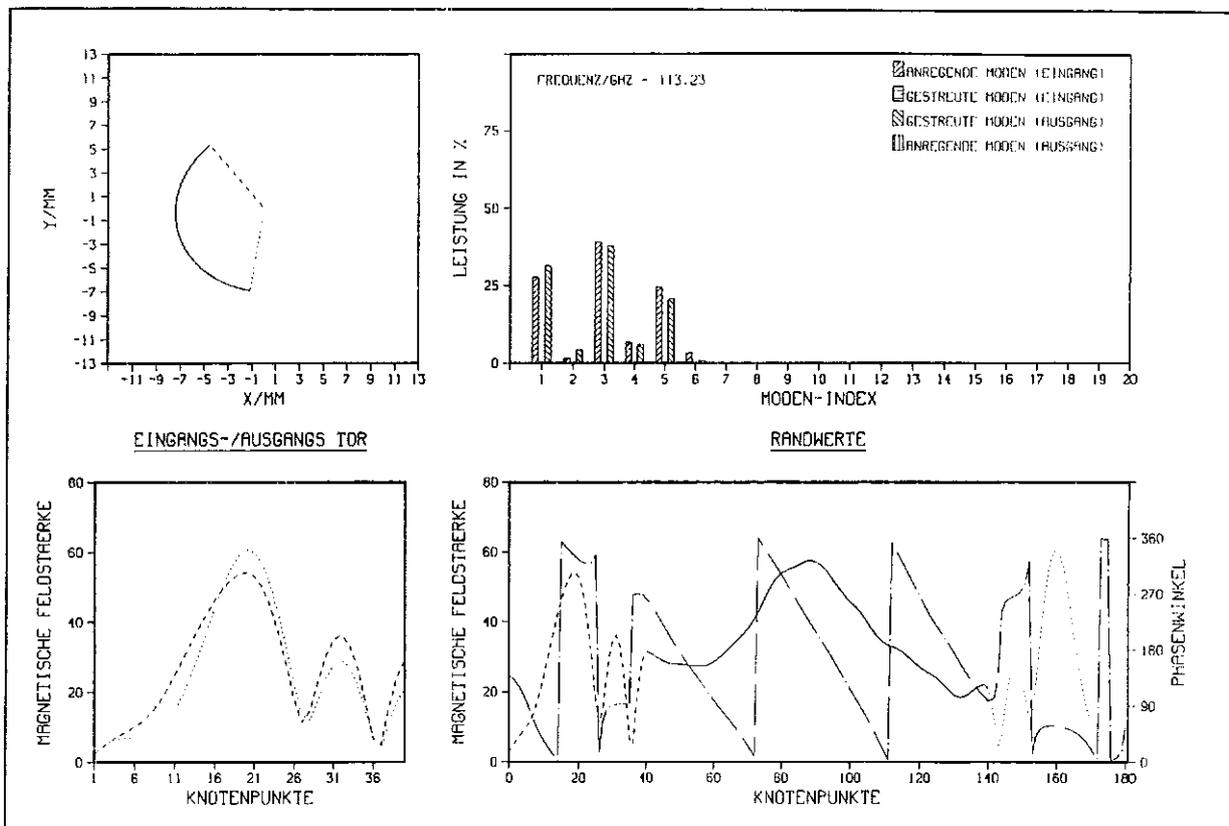


Bild 5-5: Analyse des transversalen fokussierenden Spiegels eines TE_{7,3} Wellentypwandlers

Die Wandströme (durchgezogene Linie des unteren rechten Fensters) zeigen eine Gauß-ähnliche Verteilung auf dem zweiten Spiegel. Eine Analyse der Verteilung auf der Spiegelwand ergibt einen Transformationswirkungsgrad von 94.2 %. Eventuell nachfolgende Spiegelpaare haben identische Deformationen. Die Ausgangsverteilung wird nach der Abstrahlung mit Hilfe eines phasenkorrigierenden Reflektors in einen (astigmatischen) Gaußschen Strahl gewandelt.

5.2.2 TE_{22,6} Wellentypwandler

Für die im Februar 1995 im Forschungszentrum Karlsruhe in Betrieb genommene 1 MW-140 GHz-Gyrotronröhre wurde ein Wellentypwandler für die TE_{22,6} Arbeitsmode nach derselben Methode ausgelegt. Zusätzlich zu den Hohlleiterspiegeln wurde der phasenkorrigierende Reflektor mit in den Hohlleiter integriert. Die vollständige Analyse wird im nächsten Kapitel behandelt. In Tabelle 5-2 sind die relevanten Parameter der numerischen Simulation aufgelistet.

Tabelle 5-2: Simulationsparameter für die Analyse des TE_{22,6} Wellentypwandlers

Wellenleiter-radius [mm]	Ausbr.-konstante $\bar{\kappa}$ [1/mm]	Anzahl Moden (ein/aus)	Anzahl Knoten	relative Genauigkeit Integrale ϵ	Abtast-rate AR [1/λ]	CPU-Zeit [s]
19	2.401	100/100	400	0.0001	13	402

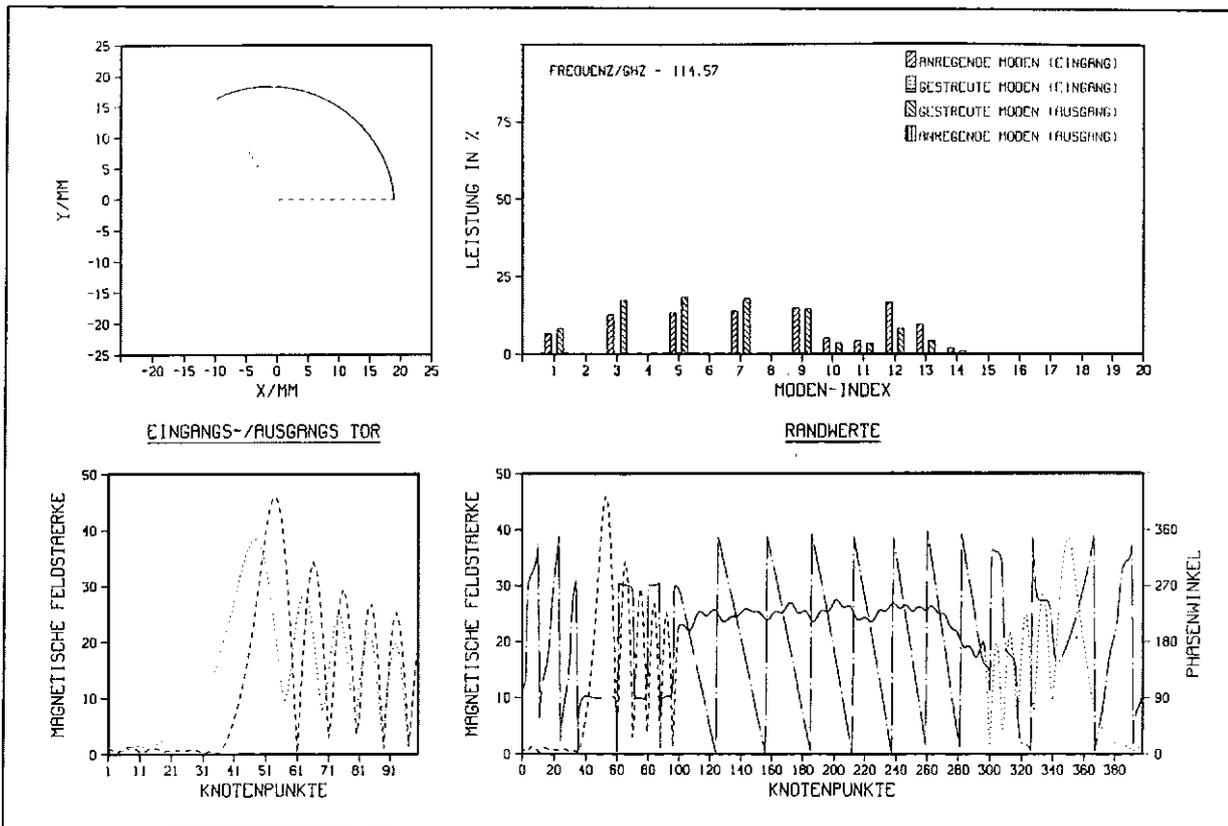


Bild 5-6: Transversale Geometric und Analyse des ersten Innenspiegels für die TE_{22,6}-Mode

In Bild 5-6 ist die Geometrie des ersten Hohlleiterspiegels, dessen Eingangs- und Ausgangsverteilung und die zugehörigen Modenspektren dargestellt und in Bild 5-7 die entsprechenden Daten für den zweiten Spiegel.

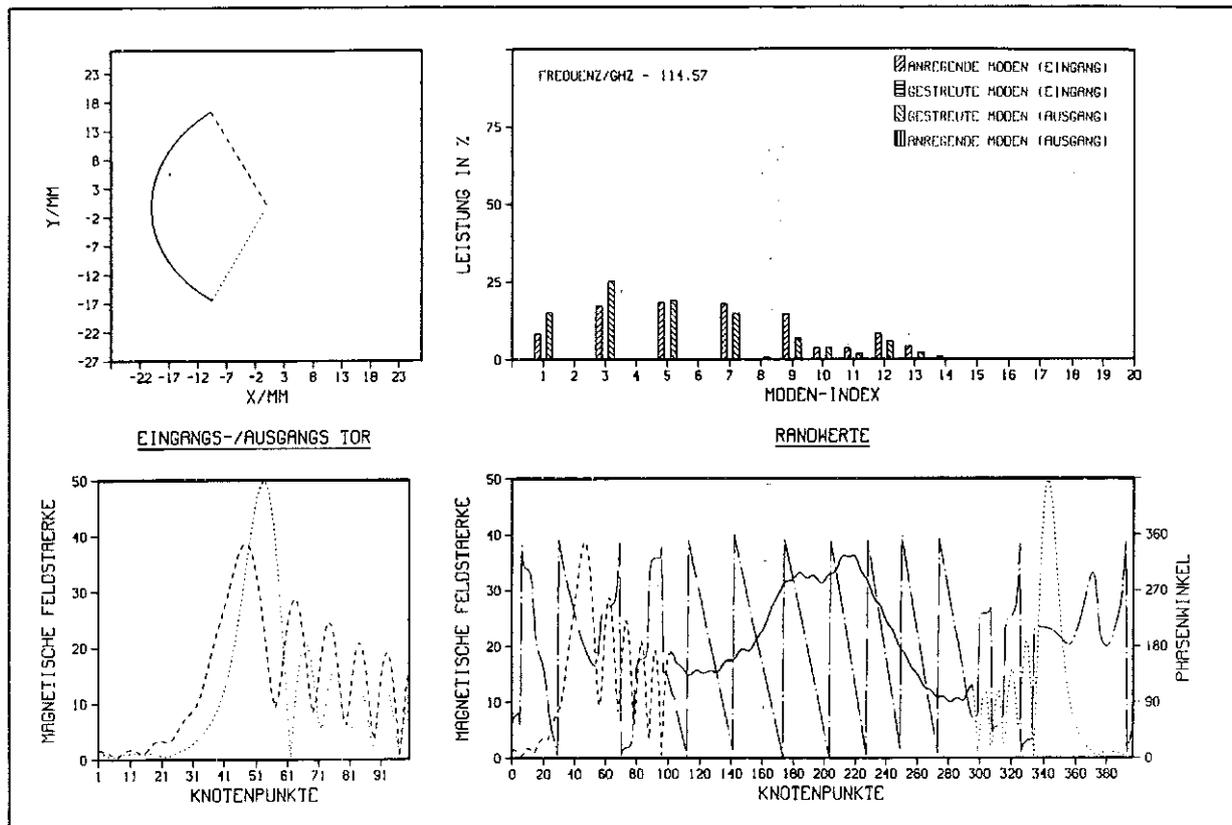


Bild 5-7: Transversale Geometrie und Analyse des zweiten Innenspiegels für die $TE_{22,6}$ -Mode

Wie schon bei dem $TE_{7,3}$ Wandler zeigen die Wandströme eine Fokussierung auf dem zweiten Spiegel, während die Ströme auf dem ersten Spiegel nahezu konstant sind. Im Gegensatz zu der herabskalierten Anregung zeigt die Ausgangsverteilung des zweiten Spiegels eine deutlichere Transformationswirkung, was darauf zurückgeführt werden kann, daß bei den größeren Abmessungen die Anwendbarkeit der geometrischen Optik eher gewährleistet ist. Eine Auswertung des Wirkungsgrades der Wandströme ergibt hier einen Wert von 95.1 %. Anders als das Syntheseverfahren nach der geometrischen Optik voraussagt, sind die Wandströme zu den Spiegelgrenzen hin deutlich von Null verschieden, was sich auch in den relativ niedrigen Wirkungsgraden widerspiegelt. Ein größerer Wirkungsgrad ließe sich durch Hintereinanderschaltung mehrerer Spiegelpaare erzielen und entsprechend mit der hier dargestellten Methode verifizieren.

5.3 Gesamtanalyse der $TE_{22,6}$ -Antenne

In diesem Kapitel soll die Antenne des zum Einsatz kommenden $TE_{22,6}$ -Wellentypwandlers im Hinblick ihrer transversalen Struktur analysiert werden. Der Taperausgangsradius wurde zu 19 mm gewählt und somit propagieren die Strahlen unter einem Brillouinwinkel von 55° . Der erste Entwurf dieses Wandlers besteht aus vier Innenspiegeln und zwei außerhalb des Hohlleiters angebrachten Reflektoren.

Die Hohlleiterspiegel sind nacheinander mit einem axial fokussierenden Spiegel, zwei Spiegel mit azimuthaler Deformation sowie einem phasenkorrigierenden Spiegel angeordnet (Bild 5-8). Der defokussierende axiale Spiegel ist dabei in dem ersten Reflektor integriert. Die Reflektoren sind dabei so ausgelegt, daß der Astigmatismus des Strahls korrigiert wird.

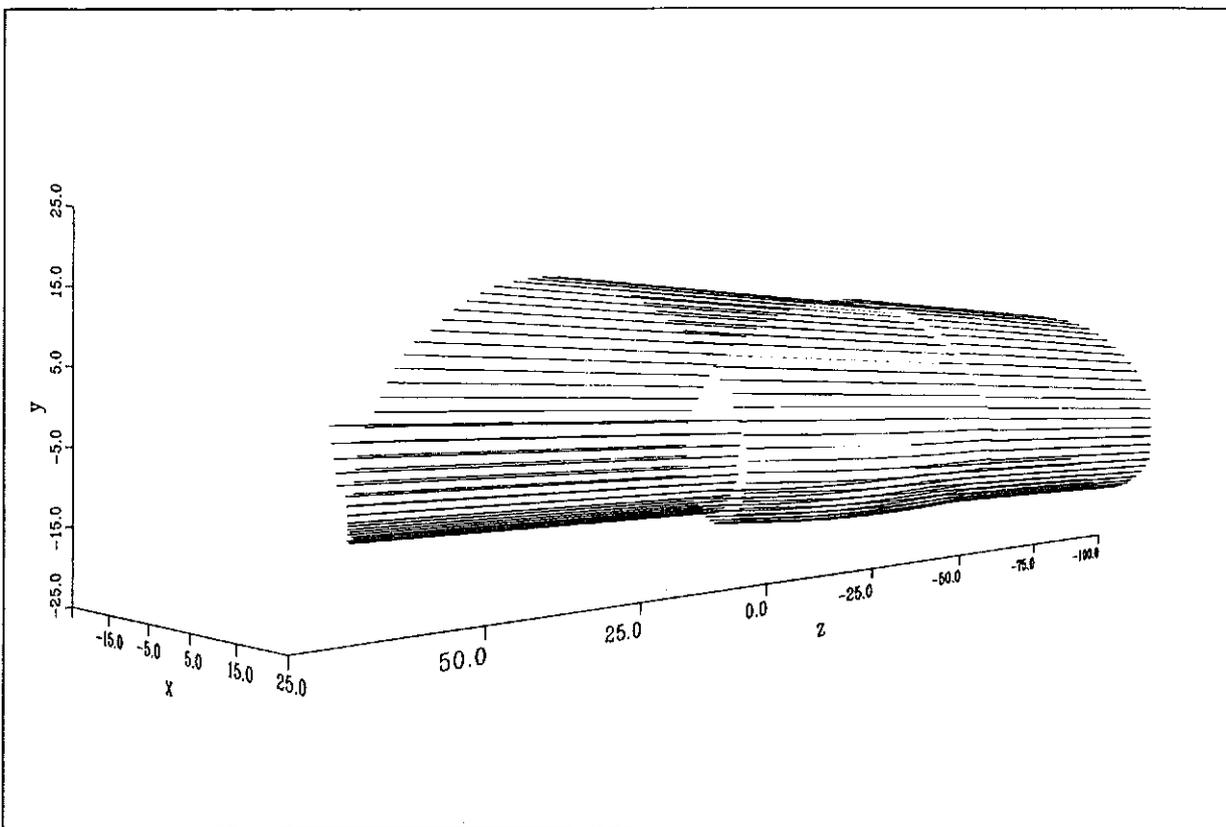


Bild 5-8: Dreidimensionale Ansicht der verbesserten Antenne

5.3.1 Gesamtanalyse der drei azimuthal deformierten Innenspiegel

Die Analyse der ersten beiden dieser Hohlleiterspiegel wurde bereits in Kapitel 5.2.2 durchgeführt. Den beiden Spiegeln schließt sich der phasenkorrigierende Spiegel an. Dieser ist nach der in Kapitel 2.2 dargestellten Methode entworfen und stellt somit eine Quasi-Ellipse dar.

Phasenkorrigierender Spiegel

Dieser Spiegel soll die lineare Phase auf der kreiszylindrischen Kaustik in eine konstante Phase im Fokus abwickeln. Für die gewählten Spiegelparameter ergibt sich eine nach innen gerichtete Deformation. Die Anregung durch das Ausgangsfeld der zwei vorhergehenden Spiegel ergibt die in Bild 5-9 dargestellte Ausgangsverteilung.

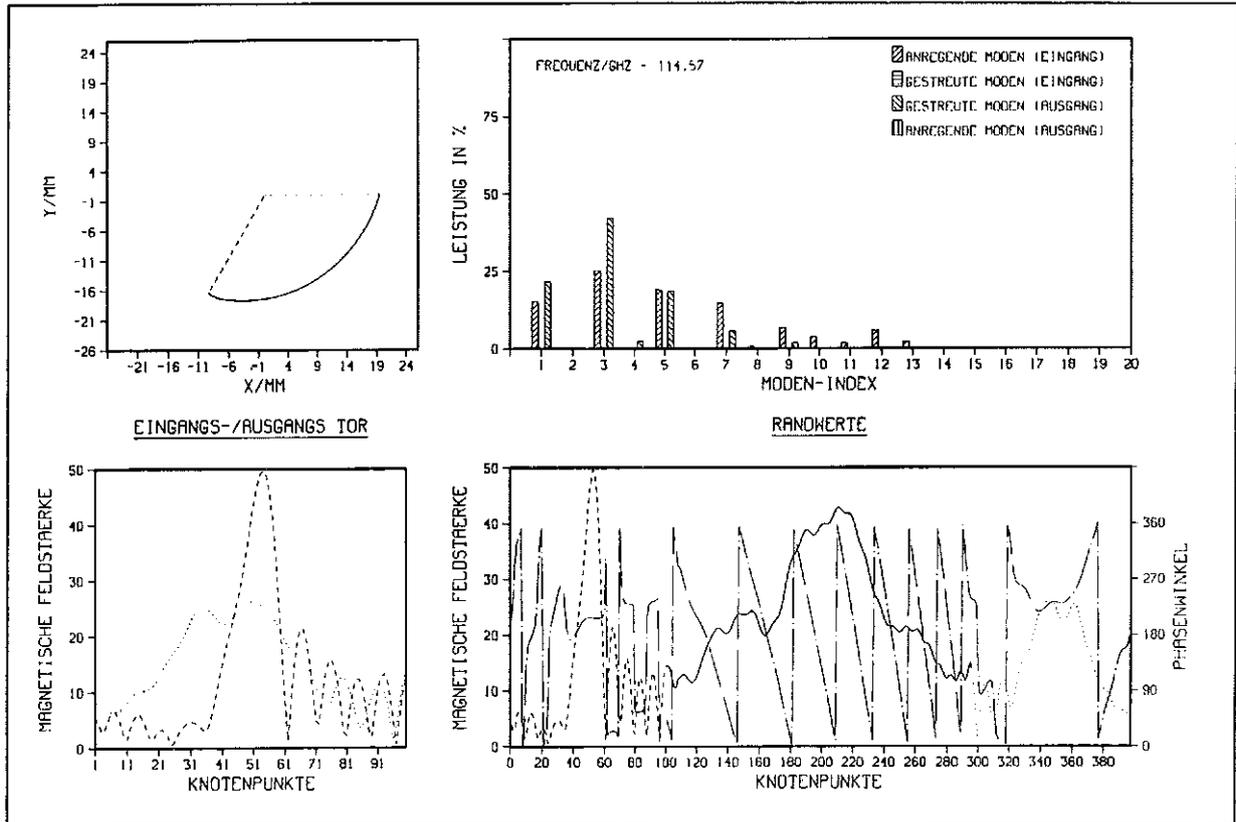


Bild 5-9: Analyse des Phasenkorrekturspiegels

Man erkennt an der Ausgangstorverteilung eine Gauß-ähnliche Verteilung mit einem leichten Einbruch im Maximum und einer überlagerten Schwingung zur Kante hin. Da die Taille des Strahls außerhalb des Hohlleiters liegt, ist der Phasenverlauf am Ausgangstor nahezu quadratisch.

Ausgangsstrahl

Nach dem Phasenkorrekturspiegel wird die Welle in den Freiraum abgestrahlt. Zur Berechnung dieses Feldes wird (3-49) benutzt, wobei als Randkurve das Ausgangstor mit der in Bild 5-9 dargestellten Feldverteilung und die unendlich ferne Hülle mit verschwindender Feldstärke verwendet wird. Diese Näherung entspricht dabei der Kirchhoffschen Methode, die in diesem Fall ohne großen Fehler angewendet werden kann, da das Feld an den Kanten gering ist. In Bild 5-10 ist das Ausgangsfeld in einem Graustufenplot dargestellt.

magnetische Feldstaerke

HZ

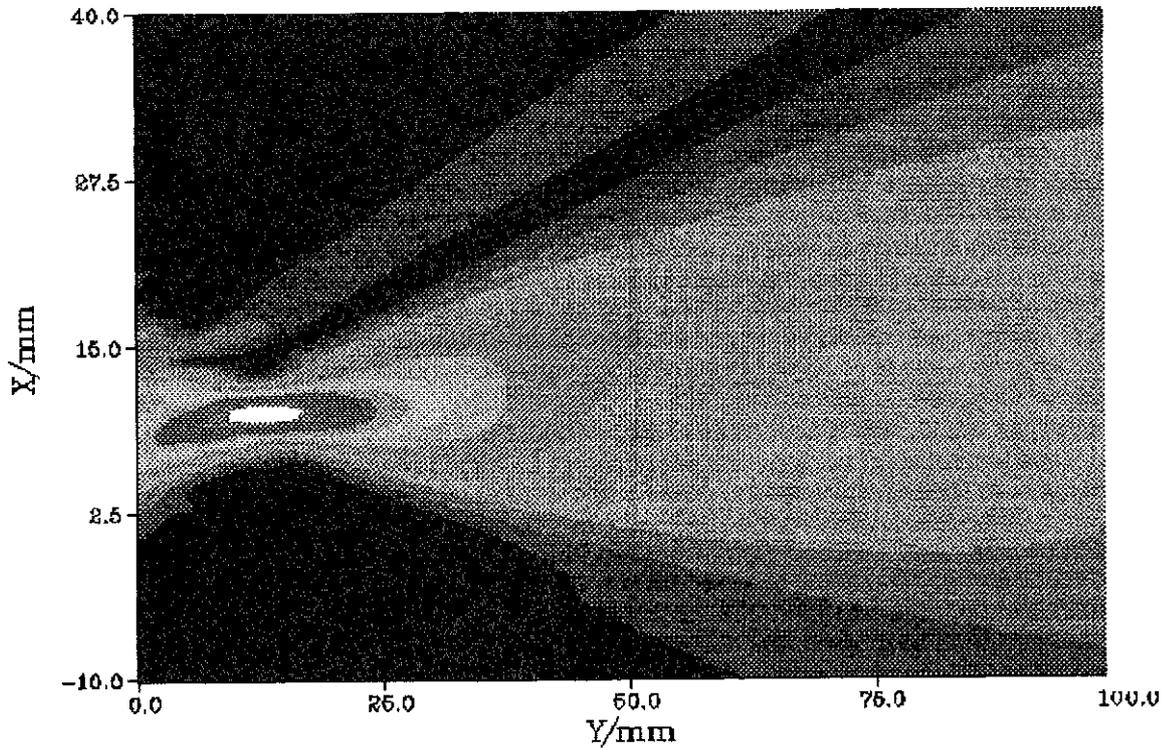


Bild 5-10: Graustufenplot des transversalen Ausgangsstrahls

Man erkennt eine leichte Unsymmetrie des Strahls, dessen Taille etwa bei $x=10\text{mm}$ und $y=14\text{mm}$ liegt, was auf die Anregung höherer Freiraumwellentypen hindeutet. Eine quantitative Auswertung wird im nächsten Kapitel vorgenommen.

Inneres Wellenfeld

Einen Einblick in die Funktionsweise gibt die Auswertung des inneren transversalen Feldes. Dazu wird wiederum mit Hilfe von (3-49) das Feld aus den zuvor berechneten Randwerten ermittelt. In Bild 5-11 ist die magnetische Feldstärke in den drei Spiegeln zusammen mit dem Ausgangsstrahl in einem Graustufenplot dargestellt. Da der Winkelbereich 360° übersteigt, wurde das Feld auf eine Schraubenfläche dargestellt, deren Steigung mit denen der geometrisch optischen Strahlen identisch ist. Die Einhüllende des Feldes gibt die deformierte Randkurve wieder, wobei zusätzlich eine Kurve mit konstantem Radius dargestellt ist.

Die anfänglich durch die Besselfunktion $J_{22}(\kappa\rho)$ gegebene Verteilung wird während des Umlaufs in eine Gauß-ähnliche Verteilung transformiert. Man erkennt starke Interferenzmuster zwischen den einzelnen Spiegeln (niedrige Feldstärken an den Wänden der Spiegelgrenzen, hohe Feldstärken in den Spiegelzentren). Deutlich zu erkennen ist auch die in Bild 2-8 angegebene Zwischenkaustik bei etwa 160° .

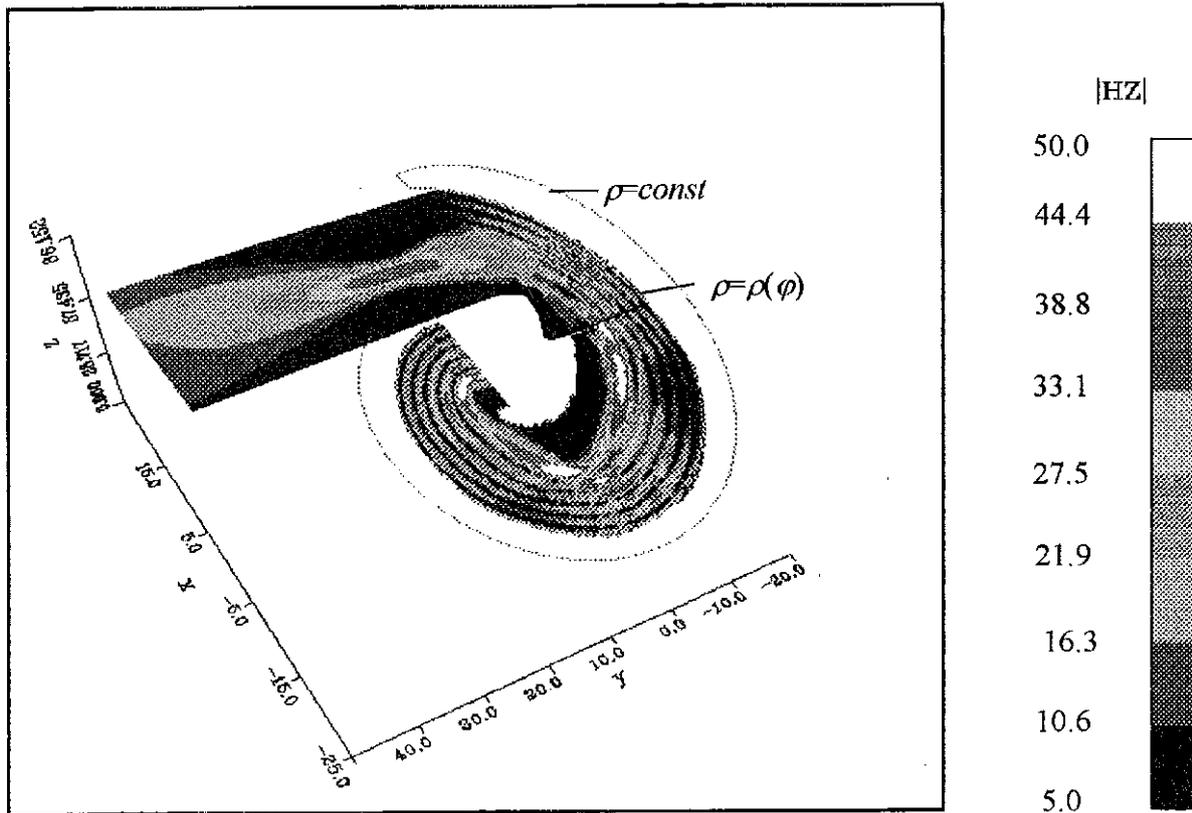


Bild 5-11: Gesamtdarstellung der inneren Feldstärke und des transversalen Ausgangsstrahls

5.3.2 Analyse des Ausgangsstrahls

Der transversale Ausgangsstrahl läßt sich nun im Hinblick auf Lage der Taille, Tailengröße und Wirkungsgrad der Grundmode analysieren. Die Bestimmung von Falschmoden (höhere Freiraumwellentypen) wäre im Prinzip machbar, ist allerdings sehr aufwendig, da viele Freiheitsgrade vorhanden sind. Zur Bestimmung des Grundmodenanteils ist es hierzu vorteilhaft, zunächst das Feld mit möglichst ebener Phasenfront auf einer Geraden zu bestimmen. Auf dieser Geraden kann dann die Wirkungsgradmaximierung nach (2-31) erfolgen.

In Bild 5-12 ist der Betrag und in Bild 5-13 die Phase der magnetischen Feldstärke des Ausgangsstrahls als Konturplot dargestellt. Man erkennt auf der Geraden $y=14$ mm das Maximum der Betragsfeldstärke und eine annähernd konstante Phase im Bereich $5 \text{ mm} < x < 15 \text{ mm}$, in dem das Feld konzentriert ist. Die Anwendung von (2-31) in diesem Bereich ergibt einen Wirkungsgrad von 96 % bei einem Strahlradius von 2.6 mm in der Taille. Die genaueren Parameter sind in Tabelle 5-3 zusammengefaßt.

Zum Vergleich sind in Bild 5-14 und Bild 5-15 jeweils Betrag und Phase der Feldstärke des idealen Gaußschen Ausgangsstrahls dargestellt. Die Abweichung von dem numerisch berechneten Feld ist dabei den Falschmoden (4 % Leistungsanteil) zuzuschreiben.

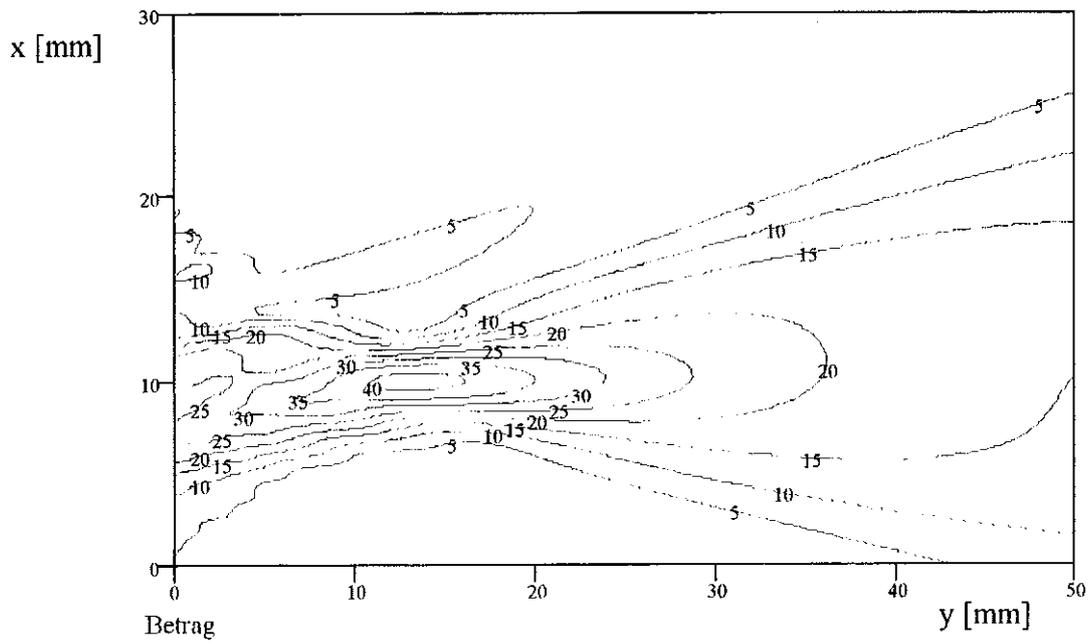


Bild 5-12: Linien konstanten Betrags der magnetischen Feldstärke im Ausgangsstrahl

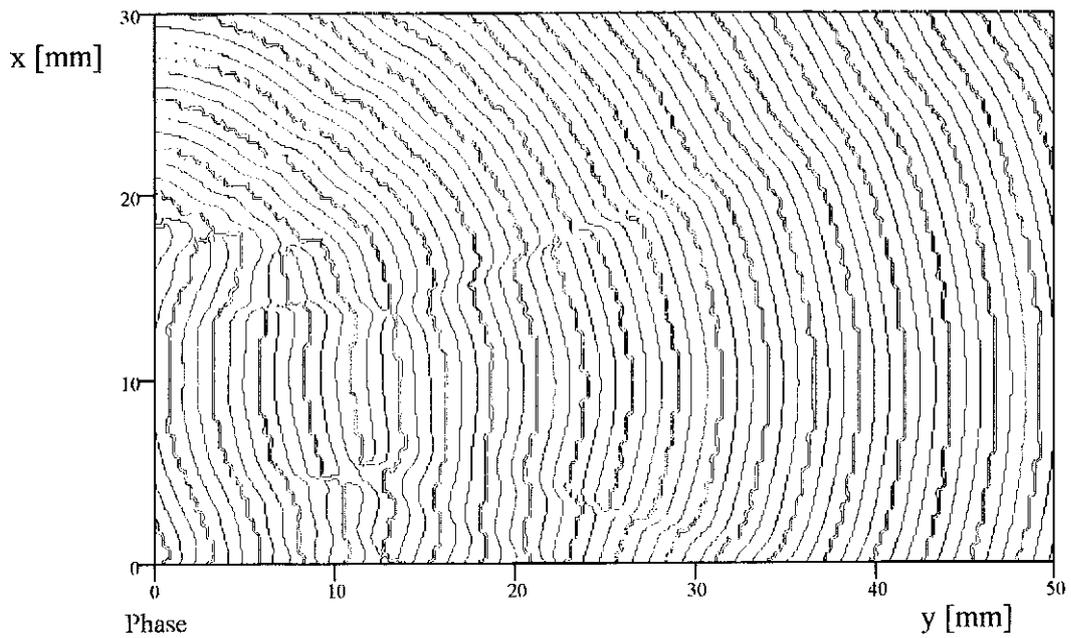


Bild 5-13: Linien konstanter Phase der magnetischen Feldstärke im Ausgangsstrahl

Tabelle 5-3: Transversale Strahlparameter

Taillenort	Taillenort	Taillenradius	Wirkungsgrad
x_0 [mm]	y_0 [mm]	w_0 [mm]	η [%]
9.8	13.8	2.6	96

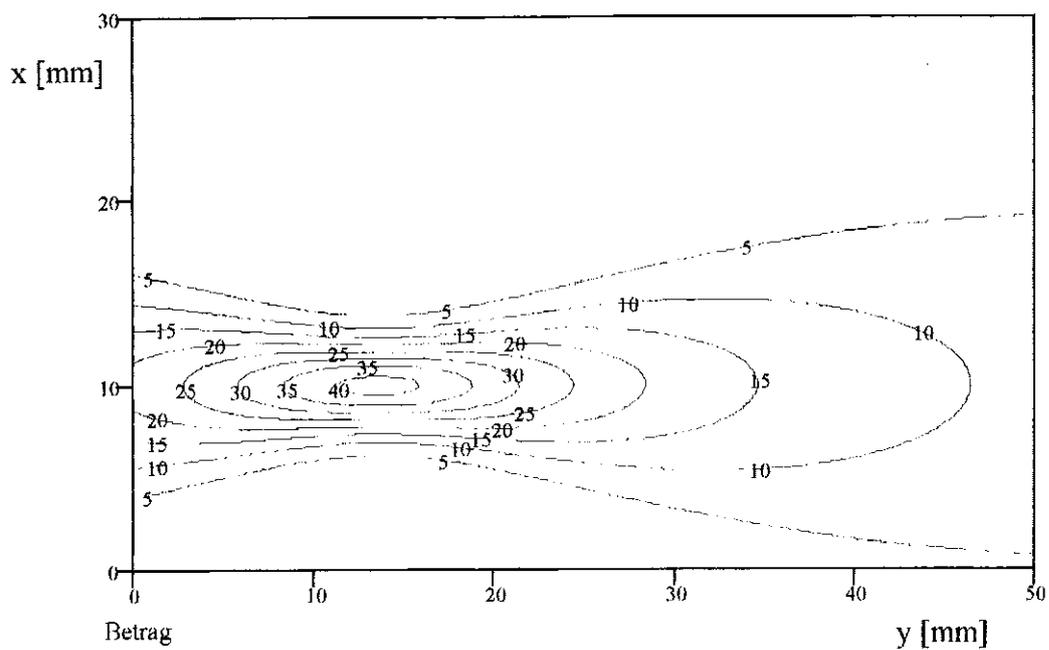


Bild 5-14: Linien konstanten Betrags der idealen Gaußschen Grundmode

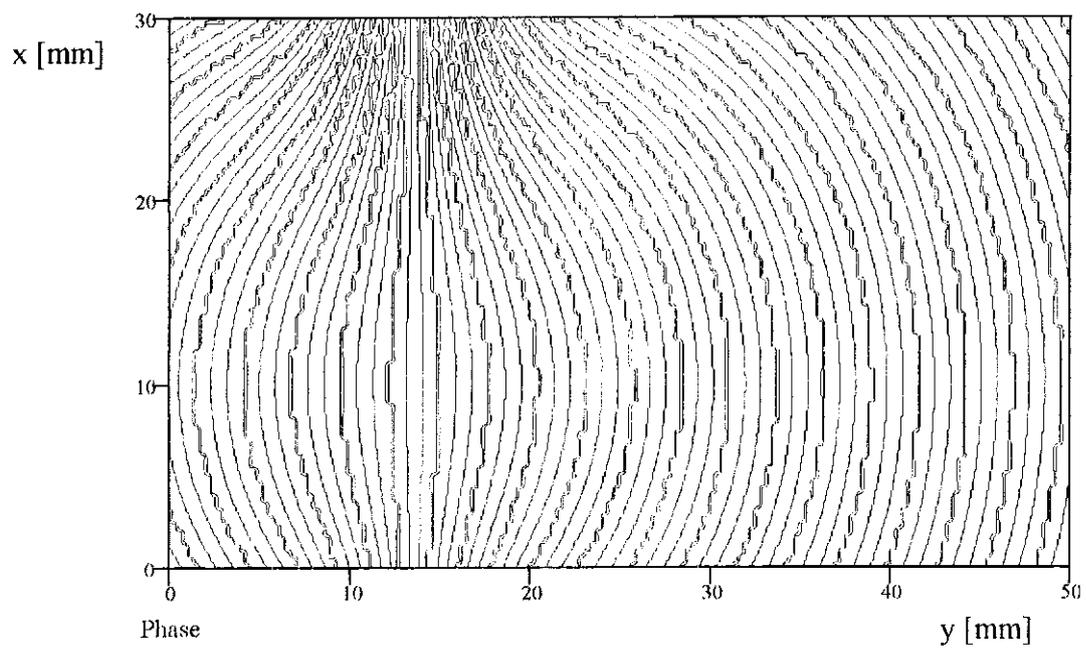


Bild 5-15: Linien konstanter Phase der idealen Gaußschen Grundmode

6 Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Methoden zur feldtheoretischen Analyse von Antennen quasi-optischer Wellentypwandler, wie sie in heutigen Gyrotrons eingesetzt werden, vorgestellt und auf skalierte und praxisrelevante Aufgabenstellungen angewendet. Der Einsatz von numerischen sowie asymptotischen Verfahren erlaubt erstmals die Abschätzung des Rückstreuverhaltens dieser helikalen Aperturantennen aufgrund von Kantenbeugungseffekten. Weiterhin wird die Funktion der transversalen Strahlformung in verbesserten Antennen nach dem Hohlleiterspiegelkonzept mit Hilfe eines zweidimensionalen Randelementverfahrens gezeigt, woraus die transversalen Strahlparameter gewonnen werden können.

Zur Analyse von Kantenbeugungseffekten wird ein asymptotisches Verfahren auf der Basis der Methode der erweiterten äquivalenten Kantenströme benutzt. Dieses Verfahren wird in dieser Arbeit erstmals auf die Problemstellung überdimensionierter Kreishohlleiter angewendet. Dazu wird die notwendige asymptotische Strahldarstellung der Kreishohlleitereigenwellen gezeigt und die Entwicklung der Kantenströme in Moden beschrieben. Es werden für einige praxisrelevante Kantengeometrien explizit Reflexionsfaktoren angegeben, aus denen sich qualitativ und quantitativ Aussagen zur Streuung in Moden ableiten lassen. Die Ergebnisse dieser Methode werden mit Resultaten alternativer Verfahren (MAFIA, Mode-Matching) für skalierte Abmessungen verglichen und gut bestätigt. Es stellt sich heraus, daß die für den Gyrotronbetrieb wichtige Reflexion der Arbeitsmode für praxisrelevante Abmessungen vernachlässigt werden kann, wenn die Antenne des Wellentypwandlers nicht sehr nahe an der Grenzfrequenz der Mode betrieben wird (Brillouinwinkel $\psi < 75^\circ$).

Die nötige Erweiterung des benutzten MAFIA-Programms zur Berechnung von Streuparametern bei Problemstellungen mit vielwelligen Hohlleitern wird vorgestellt. Hiermit ist es möglich, Wellenleiterrandbedingungen mit analytisch gewonnenen Eigenwerten selektiv zu simulieren. Es wird durch Vergleich mit asymptotischen Lösungen und auf der Eigenwellenentwicklung basierenden Verfahren (Mode-Matching) gezeigt, inwieweit das numerische Feldberechnungsverfahren bei quasi-optischen Problemstellungen verwendet werden kann.

Zur Analyse azimuthaler Wellenleiterdeformationen wird ein zweidimensionales Randelementverfahren beschrieben. Die Reduktion der dreidimensionalen Wellengleichung auf die zweidimensionale ist für die Axialkomponente der magnetischen Feldstärke für kleine Deformationsamplituden und rotierende Moden hoher Ordnung gültig. Hiermit ist es erstmals gelungen, das geometrisch-optische Konzept der Hohlleiterspiegel in verbesserten quasi-optischen Wellentypwandlern mit feldtheoretischen Mitteln zu verifizieren und die transversalen Ausgangsstrahlparameter zu bestimmen. Wie zu erwarten, bestätigt die Methode das Funktionsprinzip insbesondere für Moden hoher Ordnung. Wandlungswirkungsgrade in der transversalen Ebene können demnach von etwa 91 % bei konventioneller Bauweise auf 96 % (TE_{22,6}-Mode, $f=140$ GHz, $R=19$ mm) verbessert werden.

A1 Leistungsnormierte Felder einiger Wellentypen

Betrachtet werden sich in z-Richtung ausbreitende, geführte Wellen. Von besonderem Interesse ist dabei die in Ausbreitungsrichtung transportierte Leistung:

$$P_t = \frac{1}{2} \iint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \hat{\mathbf{z}} \, dA \quad (\text{A1-1})$$

Die Felder einer Mode n lassen sich dabei immer in einen transversalen und einen longitudinalen Anteil wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= a_n \frac{\sqrt{Z_n}}{N_n} \mathbf{e}_t^n + E_z \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{H} &= a_n \frac{\sqrt{Y_n}}{N_n} \mathbf{h}_t^n + H_z \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (\text{A1-2})$$

Hierin ist N_n eine noch zu bestimmende Konstante und Z_n bzw. Y_n sind der transversale Wellenwiderstand bzw. Wellenleitwert und dabei wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lll} \text{TE - Moden} & Z_n = \frac{\omega\mu}{\beta_n^H} & Y_n = \frac{1}{Z_n} \\ \text{TM - Moden} & Z_n = \frac{\beta_n^E}{\omega\varepsilon} & Y_n = \frac{1}{Z_n} \\ \text{TEM - Mode} & Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} & Y_0 = \frac{1}{Z_0} \end{array} \quad (\text{A1-3})$$

Dabei ist β_n eine wellentypabhängige Ausbreitungskonstante. Beachtet man, daß für die magnetischen Eigenfunktionen $\mathbf{h}_t^n = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_t^n$ gilt, so läßt sich (A1-1) folgendermaßen schreiben:

$$P_t = \frac{|a_n|^2}{2N_n^2} \iint_A \mathbf{e}_t^n \cdot \mathbf{e}_t^{n*} \, dA \quad (\text{A1-4})$$

Wählt man nun die in (A1-2) eingeführte Konstante so, daß sie das Integral kompensiert, so gibt die Hälfte des Quadrats des Amplitudenfaktors a_n die transportierte Leistung an. Somit ist es möglich, verschiedene Wellentypen miteinander zu vergleichen.

Für die in dieser Arbeit benötigten Wellentypen sollen nun die entsprechenden Normierungen dargestellt werden.

Rotierende TE-Moden im Kreishohlleiter

Elektrische Eigenfunktionen:

$$\mathbf{e}_t^n = \left(-\frac{m}{\kappa_n^H \rho} J_m(\kappa_n^H \rho) \hat{\rho} + i J'_m(\kappa_n^H \rho) \hat{\phi} \right) e^{-i(m\varphi + \beta_n^H z)} \quad (\text{A1-5})$$

Normierungsfaktor:

$$N_n^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \mathbf{e}_t^n \cdot \mathbf{e}_t^n * \rho d\rho d\varphi = \pi R^2 J_m^2(X'_{mv}) \sin^2 \theta_n \quad (\text{A1-6})$$

Rotierende TM-Moden im Kreishohlleiter

Elektrische Eigenfunktionen:

$$\mathbf{e}_t^n = \left(-i J'_m(\kappa_n^E \rho) \hat{\rho} - \frac{m}{\kappa_n^E \rho} J_m(\kappa_n^E \rho) \hat{\phi} \right) e^{-i(m\varphi + \beta_n^E z)} \quad (\text{A1-7})$$

Normierungsfaktor:

$$N_n^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \mathbf{e}_t^n \cdot \mathbf{e}_t^n * \rho d\rho d\varphi = \pi R^2 J_m^2(X_{mv}) \quad (\text{A1-8})$$

TE-Moden in Parallelplattenleitung

Elektrische Eigenfunktionen:

$$\mathbf{e}_t^n = \hat{y} \sin \frac{n\pi x}{h} e^{-i\beta_n^H z} \quad (\text{A1-9})$$

Normierungsfaktor:

$$N_n^2 = \int_0^h \mathbf{e}_t^n \cdot \mathbf{e}_t^n * dx = \frac{4}{h} \quad (\text{A1-10})$$

TM-Moden in Parallelplattenleitung

Elektrische Eigenfunktionen:

$$\mathbf{e}_t^n = \hat{\mathbf{x}} \cos \frac{n\pi x}{h} e^{-i\beta_n^H z} \quad (\text{A1-11})$$

Normierungsfaktor:

$$N_n^2 = \int_0^h \mathbf{e}_t^n \cdot \mathbf{e}_t^n^* dx = \frac{4}{h(1 + \delta_{0n})} \quad (\text{A1-12})$$

Symmetrische Gaußsche Grundmode

Elektrische Eigenfunktionen:

$$\mathbf{e}_t^0 = \hat{\mathbf{y}} e^{-\left(\frac{\rho}{w}\right)^2} e^{-i\left(k \frac{\rho^2}{2R} + kz - \psi\right)} \quad (\text{A1-13})$$

Normierungsfaktor:

$$N_0^2 = \int_0^{2\pi\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{e}_t^0 \cdot \mathbf{e}_t^0^* \rho d\rho d\varphi = \frac{\pi w^2}{2} \quad (\text{A1-14})$$

Unsymmetrische Gaußsche Grundmode

Elektrische Eigenfunktionen:

$$\mathbf{e}_t^0 = \hat{\mathbf{y}} e^{-\left(\frac{x}{w_x}\right)^2 - \left(\frac{y}{w_y}\right)^2} e^{-i\left(k \frac{x^2}{2R_x} + k \frac{y^2}{2R_y} + kz - \psi\right)} \quad (\text{A1-13})$$

Normierungsfaktor:

$$N_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}_t^0 \cdot \mathbf{e}_t^0^* dx dy = \frac{\pi w_x w_y}{2} \quad (\text{A1-14})$$

A2 Modale Entwicklung magnetischer Stromdichten im Hohlleiter

In [Coll] wird für elektrische Stromdichten die Entwicklung in Hohlleitermoden unter Anwendung des Lorentzischen Reziprozitätstheorems gezeigt. Analog dazu lassen sich (äquivalente) magnetische Stromdichten in diese Moden zerlegen. Nach den Maxwell'schen Gleichungen verursacht eine elektrische Stromdichte \mathbf{J} im Volumen V die Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} :

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^e = i\omega\epsilon\mathbf{E}^e + \mathbf{J} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^e = -i\omega\mu\mathbf{H}^e \quad (\text{A2-1})$$

Unter Anwendung des Dualitätsprinzips folgt für die Felder der magnetischen Stromdichte \mathbf{M} :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^m = -i\omega\mu\mathbf{H}^m - \mathbf{M} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}^m = i\omega\epsilon\mathbf{E}^m \quad (\text{A2-2})$$

Betrachtet man die (stromfreien) Felder der Kreishohlleitermoden außerhalb des Volumens V ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n^- &= \alpha_n^- (\hat{\mathbf{e}}_n + \hat{\mathbf{z}}E_n) e^{i(\beta_n z \pm \varphi_{m_n \varphi})} & \mathbf{E}_p^+ &= \alpha_p^+ (\hat{\mathbf{e}}_p + \hat{\mathbf{z}}E_p) e^{i(-\beta_p z \pm \varphi_{m_p \varphi})} \\ \mathbf{H}_n^- &= \alpha_n^- (\hat{\mathbf{h}}_n + \hat{\mathbf{z}}H_n) e^{i(\beta_n z \pm \varphi_{m_n \varphi})} & \mathbf{H}_p^+ &= \alpha_p^+ (-\hat{\mathbf{h}}_p + \hat{\mathbf{z}}H_p) e^{i(-\beta_p z \pm \varphi_{m_p \varphi})} \end{aligned} \quad (\text{A2-3})$$

so folgen unter Anwendung des Gaußschen Integralsatzes die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} (\mathbf{E}_p^+ \times \mathbf{H}^e - \mathbf{E}^e \times \mathbf{H}_p^+) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA &= \iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_p^+ \, dv \\ \iiint_{(V)} (-\mathbf{H}_p^+ \times \mathbf{E}^m + \mathbf{H}^m \times \mathbf{E}_p^+) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA &= \iiint_V \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_p^+ \, dv \end{aligned} \quad (\text{A2-4})$$

Entsprechende Gleichungen erhält man für die mit - indizierten Felder. Das Volumen V wird von der Hohlleiterwand, auf der das Flächenintegral verschwindet, und zwei Flächen S^- und S^+ eingeschlossen (Bild 3-12), wobei die Normale ins Innere des Volumens zeigt. Entwickelt man die Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} auf der Fläche S^- in die Moden \mathbf{E}_n^- und auf der Fläche S^+ in die Moden \mathbf{E}_p^+ (A2-3), so folgt für die Integration über S^- :

$$\begin{aligned} \iint_{S^-} (\mathbf{E}_p^+ \times \mathbf{H}_n^- - \mathbf{E}_n^- \times \mathbf{H}_p^+) \cdot \hat{\mathbf{z}} \, dA &= -2\alpha_p^+ \alpha_n^- \delta_{p,n} \delta_{m_p, \mp m_n} \\ \iint_{S^-} (-\mathbf{H}_p^+ \times \mathbf{E}_n^- + \mathbf{H}_n^- \times \mathbf{E}_p^+) \cdot \hat{\mathbf{z}} \, dA &= 2\alpha_p^+ \alpha_n^- \delta_{p,n} \delta_{m_p, \mp m_n} \end{aligned} \quad (\text{A2-5})$$

wobei das Integral über S^+ verschwindet und man erhält somit die Gleichungen (3-86/87).

A3 Analyse von Wellenleiterinhomogenitäten mit dem Mode-Matching-Verfahren

Bilden zwei Wellenleiter mit bekannten Eigenfunktionen eine Diskontinuität mit gemeinsamer Trennfläche, so läßt sich mit Hilfe des Mode-Matching-Verfahrens die Streumatrix bestimmen, die die Streuung der anregenden Wellentypen $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ in die Moden $\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2$ beschreibt.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11}^{12} & \mathbf{S}_{12}^{12} \\ \mathbf{S}_{21}^{12} & \mathbf{S}_{22}^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A3-1})$$

Hierin sind \mathbf{a} und \mathbf{b} Vektoren, die die (leistungsnormierten) Modenamplituden (Anhang A1) enthalten, und \mathbf{S}^{12} ist die Streumatrix, deren Rang von der endlichen Zahl verwendeter Moden begrenzt ist. Der obere Index bezeichnet dabei den jeweiligen Wellenleiter.

Um zur gesuchten Streumatrix zu kommen, wird die Stetigkeit der tangentialen Feldstärken auf der gemeinsamen Trennfläche ($z=\text{const}$ bei einem zylindrischen Wellenleiter) ausgenutzt:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^P \frac{\sqrt{Z_p^1}}{N_p^1} (a_p^1 + b_p^1) \mathbf{e}_p^1 &= \sum_{q=1}^Q \frac{\sqrt{Z_q^2}}{N_q^2} (a_q^2 + b_q^2) \mathbf{e}_q^2 \\ \sum_{p=1}^P \frac{\sqrt{Y_p^1}}{N_p^1} (a_p^1 - b_p^1) \mathbf{h}_p^1 &= \sum_{q=1}^Q \frac{\sqrt{Y_q^2}}{N_q^2} (-a_q^2 + b_q^2) \mathbf{h}_q^2 \end{aligned} \quad (\text{A3-2})$$

Hierin sind die indizierten Größen in Anhang A1 definiert, wobei bei den transversalen Eigenfunktionen der Index t unterdrückt wurde. Unter der Annahme, daß die Fläche des Wellenleiters 1 vollständig in der Fläche des Wellenleiters 2 enthalten ist, lassen sich die Felder unter Ausnutzung der Orthogonalität nach den Eigenfunktionen entwickeln. Dabei wird die erste Gleichung, die die Stetigkeit der elektrischen Feldstärke beschreibt, mit den Eigenfunktionen des Wellenleiters 2 multipliziert und anschließend über die gemeinsame Fläche integriert. Die Gleichung für die magnetische Feldstärke wird entsprechend nach den Eigenfunktionen des Wellenleiters 1 entwickelt. Die Entwicklungsrichtung ist wegen der nicht verschwindenden tangentialen magnetischen Feldstärke auf dem metallischen Teil der Trennfläche festgelegt. Man gelangt somit zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^P \frac{\sqrt{Z_p^1}}{N_p^1} (a_p^1 + b_p^1) \iint_A \mathbf{e}_p^1 \cdot \mathbf{e}_q^2 \, dA &= \frac{\sqrt{Z_q^2}}{N_q^2} (a_q^2 + b_q^2) \\ \frac{\sqrt{Y_p^1}}{N_p^1} (a_p^1 - b_p^1) &= \sum_{q=1}^Q \frac{\sqrt{Y_q^2}}{N_q^2} (-a_q^2 + b_q^2) \iint_A \mathbf{h}_q^2 \cdot \mathbf{h}_p^1 \, dA \end{aligned} \quad (\text{A3-3})$$

Nach Einführung der Matrix

$$E_{qp} = \frac{\sqrt{Z_p^1 N_q^2}}{\sqrt{Z_q^2 N_p^1}} \iint_A \mathbf{e}_p^1 \cdot \mathbf{e}_q^2 dA, \quad (\text{A3-4})$$

läßt sich (A3-3) in Matrixnotation angeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{a}^1 + \mathbf{b}^1) &= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 \\ \mathbf{a}^1 - \mathbf{b}^1 &= \mathbf{E}^T(-\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) \end{aligned} \quad (\text{A3-5})$$

Dieses System läßt sich mit Hilfe der Matrixalgebra nach den Größen \mathbf{b}^1 , \mathbf{b}^2 auflösen, und man erhält die gesuchte Streumatrix:

$$\mathbf{S}^{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - 2\mathbf{E}^T(\mathbf{E}\mathbf{E}^T + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{E} & 2\mathbf{E}^T(\mathbf{E}^T\mathbf{E} + \mathbf{I})^{-1} \\ 2(\mathbf{E}\mathbf{E}^T + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{E} & 2\mathbf{E}\mathbf{E}^T(\mathbf{E}^T\mathbf{E} + \mathbf{I})^{-1} - \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A3-6})$$

Die Anzahl Moden P und Q in den Wellenleitern 1 und 2 sollten zur guten Konvergenz so gewählt werden, daß sie der Wurzel aus dem Verhältnis der beiden Flächen entsprechen [Pie1]. Numerische Studien zeigen, daß zur zuverlässigen Berechnung der Transmissionsfaktoren mindestens alle ausbreitungsfähigen Moden berücksichtigt werden müssen, und bei den Reflexionsfaktoren nochmals die gleiche Anzahl Moden, deren Grenzfrequenz unterschritten ist.

Die Matrixelemente (A3-4) lassen sich für einige Wellenleiterdiskontinuitäten, wie im Fall des axialsymmetrischen Wellenleitersprungs des Kreishohlleiters, geschlossen berechnen. Wegen dieser Symmetrie bleibt auch der Azimutalindex erhalten, so daß die Größe des Spektrum der gestreuten Moden auch in stark überdimensionierten Hohlleitern beherrschbar bleibt.

A4 Entwicklung der Gaußschen Grundmode in rotierende Kreishohlleitermoden hoher Ordnung

Zur beugungsarmen Abstrahlung von der Apertur wird bei Wandlern nach dem Denisov-Prinzip [Den1] durch gezielte Deformationen eine Modenmischung aus der Arbeitsmode erzeugt. Zur Bestimmung der notwendigen Moden und deren Leistungsanteile kann die Feldentwicklung nach Anhang A3 herangezogen werden.

Feldanpassung auf der Fläche $\rho = \text{const}$

Die Anpaßfläche wird beschrieben durch $-\theta \leq \varphi \leq \theta$ und $-L \leq 2z \leq L$ und liegt zweckmäßigerweise auf der Kaustik $\rho = R_c$. Die Parameter θ , L und R_c werden durch die Arbeitsmode nach den Gleichungen (2-19), (2-30) und (2-18) festgelegt. Unter Vernachlässigung von Reflexionen reicht zur Anpassung der Felder die Stetigkeit der zur Fläche tangentialen elektrischen Felder aus. Diese sind im Kreishohlleiter für rechtsrotierende TE-Moden gegeben durch:

$$\mathbf{E}_t = \hat{\varphi} \sum_n \alpha_n \frac{\sqrt{Z_n}}{N_n} J'_{m_n}(m_n) e^{-i(\beta_n z + m_n \varphi)} \quad (\text{A4-1})$$

Die Parameter der Gaußschen Verteilung wählt man zweckmäßigerweise so, daß die Strahleigenschaften der Arbeitsmode erhalten bleiben, um möglichst wenig Leistung konvertieren zu müssen. Die elektrische Feldstärke der Gaußschen Grundmode lautet somit:

$$\mathbf{E}_t^g = \hat{\varphi} \sqrt{ZP} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi w_\varphi w_z}} e^{-\frac{R_c^2 \varphi^2}{w_\varphi^2} - \frac{z^2}{w_z^2}} e^{-i(\beta_0 z - m_0 \varphi)} \quad (\text{A4-2})$$

Hierin ist Z der Freiraumwellenwiderstand und P die Leistung im Gaußschen Strahl. Zur Bestimmung der optimalen Parameter w_φ und w_z kann wieder von der Ähnlichkeit der Raised-Cosine-Verteilung mit der Gauß-Verteilung (2-33) Gebrauch gemacht werden:

$$\mathbf{E}_t^g = \hat{\varphi} \frac{1}{3} \sqrt{\frac{ZP}{2L\theta R_c}} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi\varphi}{2\theta}\right) \right) \left(1 + \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \right) e^{-i(\beta_0 z - m_0 \varphi)} \quad (\text{A4-3})$$

Zur Anpassung der Felder nach der Methode der kleinsten Quadrate fordert man nun, daß das Integral der quadratischen Abweichung der Felder in den Intervallen minimal ist, bzw. dessen Ableitung nach den Koeffizienten α_p verschwindet. Man erhält somit die folgenden p Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_p} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}-\theta}^{\theta} (E_t^g - E_t)^2 R_c \, d\varphi \, dz = 0 \quad (\text{A4-4})$$

Führt man die Rechnung aus, so erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} & \sum_n a_n \frac{\sqrt{Z_n}}{N_n} J'_{m_n}(m_n) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}-\theta}^{\theta} e^{-i((\beta_n - \beta_p)z + (m_n - m_p)\varphi)} \, d\varphi \, dz \\ & = \frac{\sqrt{ZP}}{3\sqrt{2L\theta R_c}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}-\theta}^{\theta} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi\varphi}{\theta}\right)\right) \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{L}\right)\right) e^{-i((\beta_0 - \beta_p)z + (m_0 - m_p)\varphi)} \, d\varphi \, dz \end{aligned} \quad (\text{A4-5})$$

Die auftretenden Integrale lassen sich geschlossen angeben. In Matrixform läßt sich das System folgendermaßen schreiben:

$$\mathbf{Ea} = \mathbf{g} \quad (\text{A4-6})$$

Durch Inversion der Matrix \mathbf{E} erhält man somit die gesuchten Amplituden der Hohlleitermoden. Im Gegensatz zur Orthogonalentwicklung birgt die Bestimmung der Amplituden neben der Lösung des Gleichungssystems einige Schwierigkeiten. Zum einen ist das Funktionensystem nicht vollständig, da nur ausbreitungsfähige Moden einen Beitrag zur gewünschten Verteilung liefern können. Dies hat zur Konsequenz, daß nicht jede beliebige Verteilung durch eine Mischung hergestellt werden kann. Zum anderen sind die gefundenen Werte für die Amplituden abhängig von der Art und Zahl der berücksichtigten Moden.

Es stellt sich jedoch heraus, daß bei der Verwendung des Modenschemas in Bild 2-7 bei stark überdimensionierten Hohlleitern (z.B. $f=140$ GHz, $R=19$ mm) gute Ergebnisse erzielt werden Bild 2-8.

A5 Einheitliche Beugungsfunktionen

Die Beugungsfunktionen in (3-84) werden für

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= |\hat{\mathbf{s}}' \times \hat{\mathbf{t}}| & \sin \Theta \cos \Phi &= \sin \Theta' \\ & & \text{bzw.} & \\ \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \hat{\mathbf{s}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} & \sin \Theta \cos \Phi &= -\sin \Theta' \cos \Phi' \end{aligned} \quad (\text{A5-1})$$

singulär. In [Mic2] und [Mic3] werden äquivalente Ströme hergeleitet, die diese Singularitäten vermeiden. Die zugrundeliegende Idee ist dabei, die Stromdichten in der Nähe der Kante in zwei Anteile zu spalten, die dann getrennt voneinander mit Hilfe von asymptotischen Integrationstechniken zu Linienströmen reduziert werden können. In [Mic2] wird gezeigt, daß die erste Singularitätsbedingung in (A5-1) für sogenannte *fringe currents* (Randströme), zutrifft, während die zweite Singularitätsbedingung nur bei *P.O. currents* (Physikalisch Optische Ströme) auftritt. Analog zu (3-86) lassen sich die äquivalenten Linienströme wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} I^e &= \frac{i}{kZ_0} (W_e^f + W_e^{PO}) \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{E}^i + \frac{i}{k} (W_h^f + W_h^{PO}) \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{H}^i \\ I^m &= \frac{Z_0}{ik} (W_m^f + W_m^{PO}) \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{H}^i \end{aligned} \quad (\text{A5-2})$$

Für eine Halbebene (Kantenwinkel 0) erhält man für die Beugungsfunktionen W^f :

$$\begin{aligned} W_m^f &= -\frac{2 \sin \Phi}{\sin \Theta \sin \Theta' \cos \Phi' + \chi} \frac{1}{\sqrt{1-\chi}} \left[1 - \frac{\sqrt{2} \cos \frac{\Phi'}{2}}{\sqrt{1-\chi}} \right] \\ W_e^f &= \frac{2\sqrt{2}}{\sin^2 \Theta' \cos \Phi' + \chi} \frac{\sin \frac{\Phi'}{2}}{\sqrt{1-\chi} - \sqrt{2} \cos \frac{\Phi'}{2}} \\ W_h^f &= \frac{2}{\sin \Theta'} \frac{\cot \Theta' \cos \Phi' + \cot \Theta \cos \Phi + \frac{\chi \cot \Theta' - \cot \Theta \cos \Phi'}{\sqrt{1-\chi}} \sqrt{2} \cos \frac{\Phi'}{2}}{\cos \Phi' + \chi} \end{aligned} \quad (\text{A5-3})$$

mit der Abkürzung

$$\chi = \frac{\sin \Theta' \sin \Theta \cos \Phi + \cos \Theta' \cos \Theta - \cos^2 \Theta'}{\sin^2 \Theta'} \quad (\text{A5-4})$$

Die Singularität für die P.O.-Ströme resultiert aus der Vernachlässigung höherer Terme in der Phase des Integranden. Diese Terme enthalten z.B. die lokale Krümmung der Kante, sowie die Krümmungsradien der einfallenden Welle. Letztere können hier vernachlässigt werden. Man erhält für einen Einfallswinkel $\Phi' \leq \pi$ die Beugungsfunktionen W^{PO} :

$$\begin{aligned}
 W_m^{PO} &= i\sqrt{8kR} \frac{\sin \Phi}{\sin \Theta} \frac{\operatorname{sgn}((\hat{s} - \hat{s}') \cdot \hat{n})}{\sqrt{\sin \Theta \sin \Phi + \sin \Theta' \sin \Phi'}} \mathbf{F} \left[\frac{\sqrt{\frac{kR}{2}} |(\hat{s} - \hat{s}') \cdot \hat{n}|}{\sqrt{\sin \Theta \sin \Phi + \sin \Theta' \sin \Phi'}} \right] \\
 W_e^{PO} &= i\sqrt{8kR} \frac{\sin \Phi'}{\sin \Theta'} \frac{\operatorname{sgn}((\hat{s} - \hat{s}') \cdot \hat{n})}{\sqrt{\sin \Theta \sin \Phi + \sin \Theta' \sin \Phi'}} \mathbf{F} \left[\frac{\sqrt{\frac{kR}{2}} |(\hat{s} - \hat{s}') \cdot \hat{n}|}{\sqrt{\sin \Theta \sin \Phi + \sin \Theta' \sin \Phi'}} \right] \\
 W_h^{PO} &= \sqrt{8kR} \frac{(\cot \Theta' \cos \Phi' + \cot \Theta \cos \Phi) \operatorname{sgn}((\hat{s} - \hat{s}') \cdot \hat{n})}{i\sqrt{\sin \Theta \sin \Phi + \sin \Theta' \sin \Phi'}} \mathbf{F} \left[\frac{\sqrt{\frac{kR}{2}} |(\hat{s} - \hat{s}') \cdot \hat{n}|}{\sqrt{\sin \Theta \sin \Phi + \sin \Theta' \sin \Phi'}} \right]
 \end{aligned} \tag{A5-5}$$

Hierin ist \mathbf{F} eine modifizierte Fresnelfunktion:

$$\mathbf{F}(x) = e^{ix^2} \int_x^\infty e^{-it^2} dt \tag{A5-6}$$

An der Unstetigkeitsstelle $\hat{s} \cdot \hat{n} = \hat{s}' \cdot \hat{n}$ besitzen die Ströme eine Sprungstelle, die somit die Stetigkeit des geometrisch optischen Feldes an der Schattengrenze garantieren. Bei der Entwicklung der Ströme in Hohlleitermoden an der Schattengrenze ist dabei die Vorzeichenfunktion $\operatorname{sgn}(x)$ durch den Faktor 2 zu ersetzen. In diesem Grenzfall lassen sich die Ströme wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
 W_m^{PO} &= i2\sqrt{2\pi kR} \frac{\sin \Phi}{\sin \Theta} \frac{1}{\sqrt{\sin \Theta \sin \Phi + \sin \Theta' \sin \Phi'}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \\
 W_e^{PO} &= i2\sqrt{2\pi kR} \frac{\sin \Phi'}{\sin \Theta'} \frac{1}{\sqrt{\sin \Theta \sin \Phi + \sin \Theta' \sin \Phi'}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \\
 W_h^{PO} &= -i2\sqrt{2\pi kR} \frac{\cot \Theta' \cos \Phi' + \cot \Theta \cos \Phi}{\sqrt{\sin \Theta \sin \Phi + \sin \Theta' \sin \Phi'}} e^{-i\frac{\pi}{4}}
 \end{aligned} \tag{A5-7}$$

mit

$$\mathbf{F}[0] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1-i)$$

A6 Analyse von Rechteckhohlleiter-Biegungen mit der Randelementmethode

Eine in der Literatur oft behandelte Aufgabenstellung ist das Reflexions- und Transmissionsverhalten von Monomode-Hohlleiterbiegungen und wird zum Test des entwickelten Programms nach der Randelementmethode herangezogen.

Die zweidimensionale Wellengleichung, die von der hier entwickelten Randelementmethode gelöst werden kann, ist für Rechteckhohlleiter, die mit TE_{0n} Moden betrieben werden erfüllt. Biegungen, die in der E-Ebene erfolgen, lassen sich durch transversal elektrische Wellen beschreiben. Von praktischem Interesse ist dabei das Transmissionsverhalten dieser Biegungen in Abhängigkeit der Frequenz.

Bild A6-1 zeigt dieses Verhalten für eine rechteckförmige und einer abgewinkelten Biegung zusammen mit den in [Kos1] angegebenen Lösungen. Die gute Übereinstimmung zeigt, daß das Verfahren zuverlässig arbeitet. Eine Auswertung der Leistungsbilanz zeigt, daß abhängig von der Diskretisierungsweite eine teilweise Diffusion der Leistung (ca. 3-4 %) durch die Wände stattfindet. Dieser Effekt wird auch in [Kos1] beobachtet und ist auf die Verwendung linearer Randelemente zurückzuführen. Die Verwendung quadratischer Elemente verringert demnach diesen Effekt. Da jedoch das Verhältnis von Reflexion zu Transmission offensichtlich genau beschrieben wird, werden die linearen Elemente beibehalten.

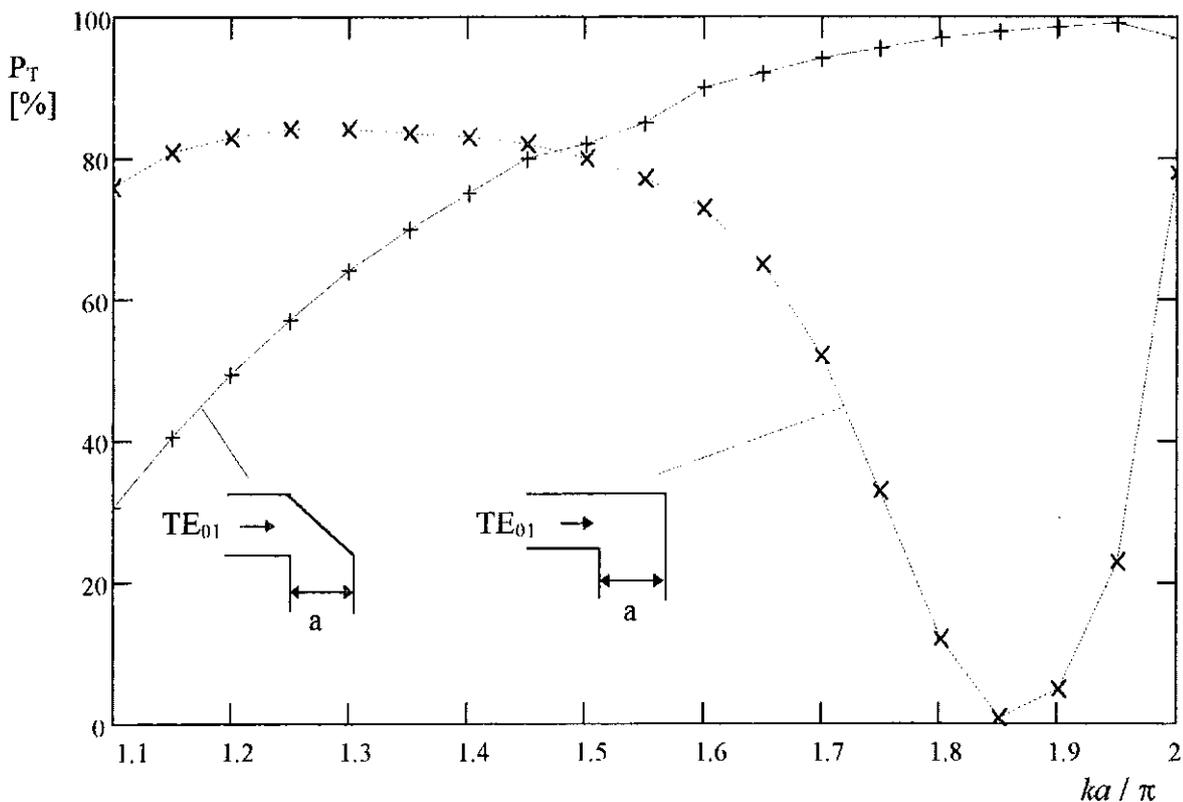


Bild A6-1: Transmittierte Leistung bei Rechteckhohlleiterbiegungen in der E-Ebene

A7 Einfluß des Kantenwinkels auf den Reflexionsfaktor beim offenen Kreishohlleiter

Die Analyse des Reflexionsfaktors beim offenen Kreishohlleiter mit Hilfe des Mode-Matching-Verfahrens setzt ein diskretes Modenspektrum in den anzupassenden Teilgebieten voraus. Da der Freiraum ein kontinuierliches Spektrum besitzt, wird er bei dieser Methode durch einen stark überdimensionierten Hohlleiter approximiert. Zusätzlich macht man dabei einen systematischen Fehler, indem eine leitende Ebene eingeführt wird (Bild A7-1).

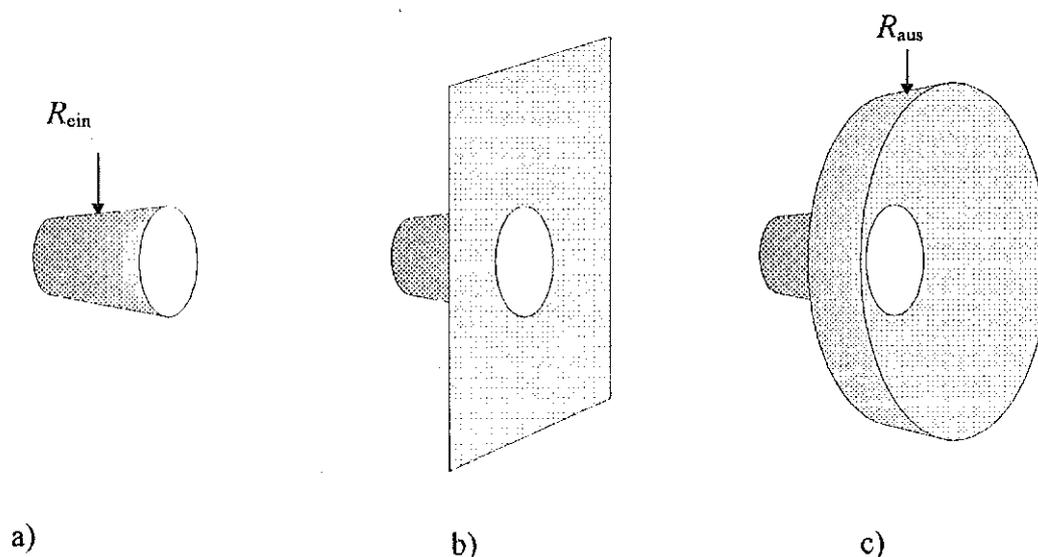


Bild A7-1: Reflexion am offenen Kreishohlleiter a) Hohlleiter-Freiraum, Kantenwinkel 0° , b) Hohlleiter-Freiraum, Kantenwinkel 90° , c) Hohlleiter-Hohlleiter, Kantenwinkel 90°

Der Einfluß des endlichen Hohlleiterdurchmessers kann durch Konvergenzstudien $R_{\text{aus}}/R_{\text{ein}} \gg 1$ im Fall c) abgeschätzt werden. Tabelle A7-1 gibt für einige Moden und Winkelbereiche Erfahrungswerte an, bei denen sich der Reflexionsfaktor weniger als 3 dB ändert.

Tab. A7-1: Konvergenzstudien zum Reflexionsfaktor

Mode	Brillouin-winkelbereich	$R_{\text{aus}}/R_{\text{ein}}$	Anzahl Moden im kleineren Hohlleiter	Anzahl Moden im größeren Hohlleiter
TE ₀₁	$30^\circ < \psi < 90^\circ$	20	25	500
TE _{7,3}	$50^\circ < \psi < 90^\circ$	20	30	600

Der Einfluß der leitenden Ebene kann für Moden niedriger Ordnung mit den Ergebnissen aus [Yee1] studiert werden. Die dort behandelte strahlenoptische Methode zur Berechnung der Reflexionen durch Kantenbeugung läßt einen beliebigen Kantenwinkel zu. Somit können die Fälle a) und b) aus Bild A7-1 behandelt werden.

In Bild A7-2 sind die Ergebnisse aus [Yee1] für die Reflexion der TE_{01} -Mode über dem normierten Radius kR aufgetragen. Hierbei wurden Mehrfachbeugungseffekte mit einbezogen. Zusätzlich zu diesen Kurven ist die Lösung mit dem Mode-Matching-Verfahren dargestellt.

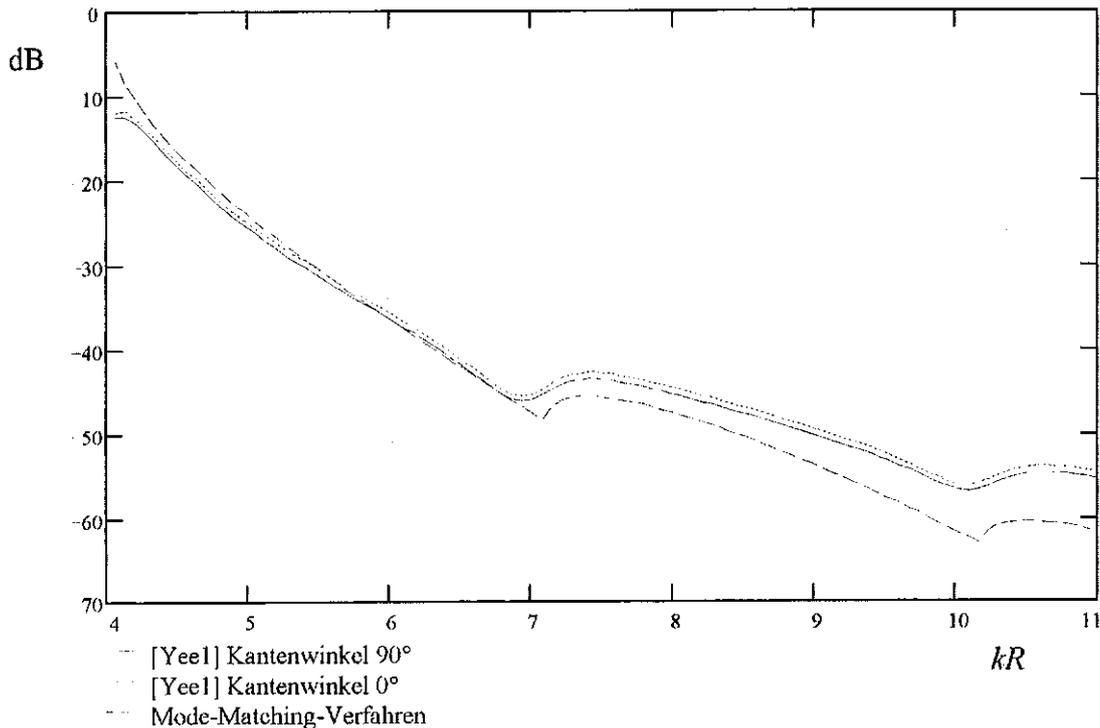


Bild A7-2: Reflexion in TE_{01} für die in Bild A7-1 angegebenen Fälle

Für den betrachteten Bereich unterscheiden sich die Kurven für die verschiedenen Kantenwinkel nur kaum (< 1 dB). Die Kurve nach dem Mode-Matching-Verfahren zeigt für größer werdende Hohlleiterradien ($kR > 8$ bzw. Brillouinwinkel $\psi < 30^\circ$) größere Abweichungen, die somit auf den endlichen Hohlleiterdurchmesser R_{aus} , bzw. auf die verwendete Modenzahl zurückzuführen sind.

8 Literatur

- [Bal1] C.A. Balanis, 1989, *Advanced Engineering Electromagnetics*, New York: John Wiley & Sons
- [Bar1] T. Barts et al., 1992, Maxwell's Grid Equations, *Frequenz*, **44**, 9-15
- [Bor1] E. Borie, B. Jödicke, 1989, Rieke Diagrams for Gyrotrons, Conference Digest *14th Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves*, Würzburg, **SPIE 1240**, 209-210
- [Born1] M. Born, E. Wolf, 1959, *Principles of Optics*, Frankfurt: Pergamon Press
- [Boro1] V.A. Borovikov, B.Ye. Kinber, 1994, *Geometrical Theory of Diffraction*, London: The Institution of Electrical Engineers
- [Bow1] J.J. Bowman, 1970, Comparison of Ray Theory with Exact Theory for Scattering by Open Waveguides, *SIAM J. Appl. Math.*, **18** (4), 818-828
- [Bro1] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, 1979, *Taschenbuch der Mathematik*, Leipzig: B.G. Teubner
- [Cle1] P.C. Clemmow, 1956, Edge Currents in Diffraction Theory, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **AP-4**, 282-287
- [Coll] R.E. Collin, 1960, *Field Theory of Guided Waves*, New York: McGraw-Hill Book Company
- [Den1] G.G. Denisov et al., 1992, 110 GHz Gyrotron with a Built-In High-Efficiency Converter, *Int. J. of Infrared and Millimeter Waves*, **72**, 1079-1091
- [Den2] G.G. Denisov, M.I. Petclin, D.V. Vinogradov, 1992, Effective Conversion of High Waveguide Modes to Eigenwaves of Open Mirror Lines, Conference Digest *17th Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves*, Pasadena, **SPIE 1929**, 124-125
- [Den3] G.G. Denisov, 1994, Quasi-Optical Mode Converters for Short-Wave Gyrotrons, *Proc. of the 6th Joint Russian-German Meeting on ECRH and Gyrotrons*, Moskau-Nizhny Novgorod, 413-436
- [Doa1] J.L. Doane, 1985, Propagation and Mode Coupling in Corrugated and Smooth-Wall Circular Waveguides, in K. Button (Hrsg.), *Infrared and Millimeter Waves*, **13**, New York: Academic Press, 123-170
- [Dohl] M. Dohlus, 1992, *Ein Beitrag zur numerischen Berechnung elektromagnetischer Felder im Zeitbereich*, Dissertation, **D17**, Darmstadt
- [Edg1] C.J. Edgcombe, 1993, Principles of interaction, in Edgcombe (Hrsg.): *Gyrotron Oscillators - Their Principles and Practice*, London: Taylor and Francis, 9-44
- [Erc1] V. Erckmann et al., 1990, Electron Cyclotron Resonance Heating Transmission Line and Launching Systems for the Wendelstein VII-AS Stellarator, *Fusion Technology*, **17**, 76-85
- [Fel1] L.B. Felsen, N. Marcuvitz, 1973, *Radiation and Scattering of Waves*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall
- [Fly1] V.A. Flyagin, G.S. Nusinovich, 1988, Gyrotron Oscillators, *Proceedings of the IEEE*, **76** (6), 644-656
- [Gou1] G. Goubau, 1968, Beam Waveguides, *Advanced Microwaves*, **3**, 67-126

- [Hen1] W. Henle et al., 1990, Microwave Technology of the Quasi-Optical 140 GHz ECRH on the Advanced Stellarator W VII-AS, *Proc. 16th Symposium on Fusion Technology*, London, 1142-1146
- [Höc1] O. Höchtl, M. Thumm, A. Wien, 1994, Numerical Analysis of Mode Conversion in Coaxial Waveguide Components, *Conference Digest 19th Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves*, Sendai, **AP 941228**, 335-336
- [Iat1] C.T. Iatrou et al., 1994, Feasibility Study of the EU Home Team on a 170 GHz 1 MW CW Gyrotron for ECH on ITER, submitted to *Int. J. of Infrared and Millimeter Waves*
- [Ito1] T. Itoh, 1986, An Overview on Numerical Techniques for Modeling Miniaturized Passive Components, *Annales des Telecommunications*, **41**, 449-462
- [Jon1] D.S. Jones, 1986, *Acoustic and Electromagnetic Waves*, Oxford: Clarendon Press, 715-716
- [Kag1] S. Kagami, I. Fukai, 1984, Application of Boundary-Element-Method to Electromagnetic Field Problems, *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **MTT-32** (4), 445-461
- [Kat1] B.Z. Katsenelenbaum, 1964, Quasioptical Methods of Generation and Transmission of Millimeter Waves, *Soviet Physics Uspekhi*, **7** (3), 385-400
- [Kel1] J.B. Keller, 1962, Geometrical Theory of Diffraction, *J. Opt. of America*, **52** (2), 116-130
- [Kno1] E.F. Knott, T.B. Senior, 1956, Comparison of Three High-Frequency Diffraction Techniques, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **AP-4**, 312-312
- [Kno2] E.F. Knott, 1985, The Relationship Between Mitzner's ILDC and Michaeli's Equivalent Currents, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **AP-33** (1), 112-114
- [Kos1] M. Koshiba, M. Suzuki, 1986, Application of the Boundary-Element-Method to Waveguide Discontinuities, *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **MTT-34** (2), 301-307
- [Kou1] R.G. Kouyoumjian, P.H. Pathak, 1974, A Uniform Geometrical Theory of Diffraction for an Edge in a Perfectly Conducting Surface, *Proc. IEEE*, **62** (11), 1448-1461
- [Kun1] K.S. Kunz, R.J. Luebbers, 1993, *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*, London: CRC Press
- [Lee1] S.W. Lee, 1970, Ray Theory of Diffraction by Open-Ended Waveguides. I. Field in Waveguides, *Journal of Mathematical Physics*, **11** (9), 2830-2850
- [Lor1] J.A. Lorbeck, R.J. Vernon, 1991, Singly Curved Dual-Reflector Synthesis Technique Applied to a Quasi-Optical Antenna for a Gyrotron with a Whispering-Gallery Mode Output, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **AP-39** (12), 1733-1741
- [Mic1] A. Michaeli, 1984, Equivalent Edge Currents for Arbitrary Aspects of Observation, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **AP-32** (3), 252-258
- [Mic2] A. Michaeli, 1986, Elimination of Infinities in Equivalent Edge Currents, Part I: Fringe Current Components, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **AP-34** (7), 912-918
- [Mic3] A. Michaeli, 1986, Elimination of Infinities in Equivalent Edge Currents, Part II: Physical Optics Components, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **AP-34** (8), 1034-1037

- [Mil1] E.K. Miller, 1988, A Selective Survey of Computational Electromagnetics, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, AP-36 (9), 1281-1305
- [Möb1] A. Möbius, J. Pretterebner, 1991, Avoidance of Edge Diffraction Effects of WGM-Fed Quasi-Optical Antennas by Feed Waveguide Deformation, Conference Digest 16th Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves, Lausanne, SPIE 1576, 531-532
- [Möb2] A. Möbius, M. Thumm, 1993, Gyrotron Output Launchers and Output Tapers, in Edgcombe (Hrsg.): *Gyrotron Oscillators - Their Principles and Practice*, London: Taylor and Francis, 179-222
- [Möb3] A. Möbius et al., 1992, An Improved Design for Quasi-Optical Mode Conversion of Whispering Gallery Mode Gyrotron Radiation, *Int. J. of Infrared and Millimeter Waves*, 13, 1033-1063
- [Möb4] A. Möbius, J. Pretterebner, 1992, Conditions to Achieve Stable Propagation of a Gaussian-like Mode Mixture in a Deformed Waveguide, Conference Digest 17th Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves, Pasadena, SPIE 1929, 34-35
- [Möb5] A. Möbius, J. Pretterebner, 1992, On the Validity of Geometric-Optical Mode Converter Design, Conference Digest 17th Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves, Pasadena, SPIE 1929, 46-47
- [Möb6] A. Möbius, J. Pretterebner, M. Thumm, A. Wien, 1994, Generalisation of Ohmic Loss Formulas for Waveguides with Wall Perturbation, Conference Digest 19th Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves, Sendai, AP 941228, 339-340
- [Nic1] H.U. Nickel, 1995, *Hochfrequenztechnische Aspekte zur Entwicklung rückwirkungsarmer Ausgangsfenster für Millimeterwellengyrotrons hoher Leistung*, Dissertation, Universität Karlsruhe, Wissenschaftliche Berichte des Forschungszentrums Karlsruhe, FZKA 5513
- [Pie1] G. Piefke, 1977, *Feldtheorie III*, Mannheim: Bibliographisches Institut
- [Pra1] R. Prater, 1990, Recent Results on the Application of Electron Cyclotron Heating in Tokamaks, *J. Fusion Energy*, 9, 19-30
- [Pre1] J. Pretterebner, A. Möbius, M. Thumm, 1992, Improvement of Quasi-Optical Mode Converters by Launching an Appropriate Mixture of Modes, Conference Digest 17th Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves, Pasadena, SPIE 1929, 40-41
- [Ram1] S. Ramo, J.R. Whinnery, T. van Duzer, 1965, *Fields and Waves in Communication Electronics*, New York: John Wiley & Sons, Inc.
- [Sch1] S.A. Schelkunoff, 1952, Generalized Telegraphists Equations for Waveguides, *Bell. Syst. Tech. J.*, 31, 784-801
- [Sha1] M.A. Shapiro, S.N. Vlasov, A.N. Kuftin, 1992, Built-In Converter for High-Power Gyrotron, Conference Digest 17th Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves, Pasadena, SPIE 1929, 492-493
- [Sie1] N. Sieber, H.J. Sebastian, 1988, *Spezielle Funktionen*, Leipzig: BSB Teubner
- [Spo1] F. Sporleder, H.G. Unger, 1979, *Waveguide Taper Transitions and Couplers*, Stevenage UK: Peter Peregrinus Ltd.

- [Thu1] M. Thumm, 1994, Progress in the Development of High-Power Millimeter- and Submillimeter Wave Gyrotrons and of Free Electron Masers, *Archiv für Elektrotechnik*, **77**, 51-55
- [Thu2] M. Thumm, W. Kasperek, 1995, Recent Advanced Technology in Electron Cyclotron Heating Systems, *Fusion Engineering and Design*, **26**, 291-317
- [Tra1] M.Q. Tran et al., 1994, Feasibility Studies of the EU Home Team on the Manufacture of ECW Sources for ITER, *Net Report*, **105**
- [Ufi1] P.Ya. Ufimtsev, 1957, Approximate Calculation of the Diffraction of Plane Electromagnetic Waves by Certain Metal Bodies: I. Diffraction Patterns at a Wedge and a Ribbon, *Sov. Phys.-Tech. Phys.*, **27** (8), 1708-1718
- [Vla1] S.N. Vlasov, I.M. Orlova, 1974, Quasi-Optical Transformer which Transforms the Waves in a Waveguide having a Circular Cross-Section into a Highly-Directional Wave Beam, *Radio Physics and Quantum Electronics*, **17**, 115-119
- [Vla2] S.N. Vlasov, L.I. Zagryadskaya, M.I. Petelin, 1975, Transformation of a Whispering Gallery Mode, Propagating in a Circular Waveguide, into a Beam of Waves, *Radio Engineering and Electron Physics*, **20**, 14-17
- [Vla3] S.N. Vlasov, M.A. Shapiro, 1989, Use of Bi-Involute Mirrors to Transport Caustic Surfaces, *Soviet Technical Physics Letters*, **15** (5), 374-375
- [Vla4] S.N. Vlasov, M.A. Shapiro, 1992, Geometrical Optics of Waveguide Mode Converters, *Optics Communications*, **88**, 455-463
- [Wein1] L.A. Weinstein, 1969, *The Theory of Diffraction and the Factorization Method*, Boulder Colorado: The Golem Press
- [Weil1] T. Weiland, 1984, On the Unique Numerical Solution of Maxwellian Eigenvalue Problems in Three Dimensions, *Particle Accelerators*, **17**, 227-242
- [Wie1] A. Wien, 1992, Eigenwellenentwicklung in einem konischen Leiter bei Feldeinkopplung durch einen zylindrischen Leiter, Diplomarbeit, Universität Siegen
- [Wie2] A. Wien, M. Thumm, 1994, Numerische Analyse der Aperturbelegung einer Vlasov-Antenne, ITG Fachbericht *Antennen*, **128**, 165-168
- [Wie3] A. Wien, M. Thumm, 1994, Numerical Analysis of Backscattering from a Helically Cut Quasi-Optical Antenna, Conference Digest *19th Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves*, Sendai, AP **941228**, 337-338
- [Yee1] H.Y. Yee, L.B. Felsen, 1969, Ray-Optical Analysis of Electromagnetic Scattering in Waveguides, *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, MTT-17 (9), 671-683
- [Yee2] H.Y. Yee, L.B. Felsen, J.B. Keller, 1968, Ray Theory of Reflection from the Open End of a Waveguide, *J. Appl. Math.*, **16** (2), 268-300
- [Yee3] K.S. Yee, 1966, Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, AP-14, 302-307
- [Zho1] P. Zhou, 1993, *Numerical Analysis of Electromagnetic Fields*, Berlin: Springer Verlag