Zur näherungsweisen Berechnung des Fixpunktes einer Kontraktion durch ein Einschließungsverfahren

Götz Alefeld und Peter Volkmann

Zusammenfassung. Es wird eine Modifikation eines Einschließungsverfahrens gegeben, mit welchem der Fixpunkt einer Kontraktion $F : I\!R^N \to I\!R^N$ näherungsweise berechnet werden kann; pro Iterationsschritt wird nun weniger Aufwand benötigt. Die Güte der Einschließung wird aber nicht besser, sondern kann schlechter werden.

1. Vorbereitende Tatsachen. Im $I\!R^N$ sei $\|x\| = \max\{|x^1|, \ldots, |x^N|\}$, und $x_1 \leq x_2$ bedeute $x_1^k \leq x_2^k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Die Funktion

$$F : I\!R^N \to I\!R^N \tag{1}$$

genüge einer Lipschitzbedingung

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq \kappa \|x_1 - x_2\|. \tag{2}$$

Nach Jahn [1] und nach [3], [4] existiert dann

$$f : I\!R^N \times I\!R^N \to I\!R^N \tag{3}$$

mit den Eigenschaften

$$\|f(y_1, z_1) - f(y_2, z_2)\| \leq \kappa \max\{\|y_1 - y_2\|, \|z_1 - z_2\|\}, \tag{4}$$

$$f(y_1, z_1) \leq f(y_2, z_2) \ (y_1 \leq y_2, \ z_2 \leq z_1), \tag{5}$$

$$f(x, x) = F(x). \tag{6}$$

Es sei noch

$$\kappa < 1, \tag{7}$$

d. h., die Funktion (1) sei eine Kontraktion. Die Bestimmung einer handlichen Funktion (3) mit den Eigenschaften (4)-(6) kann im konkreten Falle schwierig sein; es geht manchmal leichter, wenn man (unter Beibehaltung von (7)) die Zahl κ etwas vergrößert.

Ab jetzt werden (1)-(7) vorausgesetzt, und es seien y_0, z_0 Elemente des $I\!R^N$ mit

$$y_0 \leq z_0,\ \ y_0 \leq f(y_0, z_0),\ \ f(z_0, y_0) \leq z_0,$$

d. h. (vgl. (5)),

$$y_0 \leq f(y_0, z_0) \leq f(z_0, y_0) \leq z_0 \tag{8}$$

(solche y_0, z_0 lassen sich leicht finden). Dann ist bekannt (und es läßt sich ohne weiteres beweisen, vgl. z. B. Kurpel′ und Šuvar [2]), daß das Iterationsverfahren

$$y_{n+1} = f(y_n, z_n),\ \ z_{n+1} = f(z_n, y_n) \tag{9}$$

einschließend gegen den Fixpunkt x_0 von F konvergiert; insbesondere gilt also

$$y_0 \leq x_0 \leq z_0. \tag{10}$$

2. Das modifizierte Verfahren. Es sei $\varepsilon > 0$; ferner seien y_0, z_0 in $I\!R^N$ vorgelegt, so daß (8) gilt. Wir geben eine Modifikation von (9) an, durch welche a, b in $I\!R^N$ mit den Eigenschaften

$$a \leq x_0 \leq b,\ \ \|b - a\| \leq \varepsilon \tag{11}$$

gefunden werden können: Mit $f = (f^1, \ldots, f^N)$ seien y_n, z_n gegeben durch

$$y_{n+1}^k = \begin{cases} f^k(y_n, z_n) & \text{für} \quad z_n^k - y_n^k > \varepsilon \\ y_n^k & \text{für} \quad z_n^k - y_n^k \leq \varepsilon, \end{cases} \tag{12}$$

$$z_{n+1}^k = \begin{cases} f^k(z_n, y_n) & \text{für} \quad z_n^k - y_n^k > \varepsilon \\ z_n^k & \text{für} \quad z_n^k - y_n^k \leq \varepsilon. \end{cases} \tag{13}$$

Diese Rekursion werde durchgeführt, bis

$$y_{m+1} = y_m,\ \ z_{m+1} = z_m \tag{14}$$

eintritt; $a = y_m,\ \ b = z_m$ erfüllen dann (11). Bedingung (14) gilt sicher für

$$m \geq \frac{\ln \|z_0 - y_0\| - \ln \varepsilon}{-\ln \kappa}. \tag{15}$$

Beweis. Man betrachte (12), (13) zunächst für $n = 0$. Aus (8), (12) folgt

$$y_0 \leq y_1 \leq f(y_0, z_0),$$

und analog folgt aus (8), (13)

$$f(z_0, y_0) \leq z_1 \leq z_0.$$

Mit (8) wird so

$$y_0 \le y_1 \le f(y_0, z_0) \le f(z_0, y_0) \le z_1 \le z_0, \tag{16}$$

und hieraus ergibt sich mit (5)

$$y_1 \le f(y_0, z_0) \le f(y_1, z_1) \le f(z_1, y_1) \le f(z_0, y_0) \le z_1,$$

also gilt

$$y_1 \le f(y_1, z_1) \le f(z_1, y_1) \le z_1.$$

Das ist (8) mit y_1, z_1 an Stelle von y_0, z_0, und entsprechend kann für alle $n \ge 0$ auf

$$y_n \le f(y_n, z_n) \le f(z_n, y_n) \le z_n$$

geschlossen werden. Analog zu (10) gilt dann $y_n \le x_0 \le z_n$, und analog zu (16) erhält man $y_n \le y_{n+1} \le z_{n+1} \le z_n$. Insgesamt haben wir

$$y_0 \le y_1 \le y_2 \le \ldots \le x_0 \le \ldots \le z_2 \le z_1 \le z_0. \tag{17}$$

Aus (12), (13) in Verbindung mit (4) erhält man

$$\|z_{n+1} - y_{n+1}\| \le \max\{\varepsilon, \kappa\|z_n - y_n\|\},$$

also gilt für alle $m \ge 0$ die Abschätzung

$$\|z_m - y_m\| \le \max\{\varepsilon, \kappa^m\|z_0 - y_0\|\}.$$

Für m gemäß (15) ergibt sich dann

$$\|z_m - y_m\| \le \varepsilon, \tag{18}$$

und hieraus folgen mit (12), (13), (17) die Beziehungen

$$y_0 \le y_1 \le \ldots \le y_m = y_{m+1} = \ldots \le x_0 \le \ldots = z_{m+1} = z_m \le \ldots \le z_1 \le z_0. \tag{19}$$

Ist andererseits irgendein $m \ge 0$ vorgelegt, mit welchem (14) gilt, so stellt sich wieder (19) ein, und (18) ist erfüllt (denn $\|z_n - y_n\| \le \varepsilon$ gilt nach dem vorher Gesagten sicher für große n). Wegen (18), (19) gilt also (11) für $a = y_m,\ b = z_m$.

3. Vergleich mit dem Iterationsverfahren (9). Mit (12), (13) ergibt sich also die Zeile (17):

$$y_0 \le y_1 \le y_2 \le \ldots \le x_0 \le \ldots \le z_2 \le z_1 \le z_0.$$

Um vergleichen zu können, schreiben wir (9) in der Form

$$\widetilde{y}_{n+1} = f(\widetilde{y}_n, \widetilde{z}_n), \ \ \widetilde{z}_{n+1} = f(\widetilde{z}_n, \widetilde{y}_n) \ \ (\widetilde{y}_0 = y_0, \ \widetilde{z}_0 = z_0).$$

Man erhält dann

$$y_0 = \widetilde{y}_0 \leq \widetilde{y}_1 \leq \widetilde{y}_2 \leq \ldots \leq x_0 \leq \ldots \leq \widetilde{z}_2 \leq \widetilde{z}_1 \leq \widetilde{z}_0 = z_0, \tag{20}$$

und es gilt stets

$$y_n \leq \widetilde{y}_n \leq x_0 \leq \widetilde{z}_n \leq z_n.$$

Somit liefert (20) eine bessere (genauer: nicht schlechtere) Einschließung von x_0 als (17). Dennoch ist das Verfahren (12), (13) im Vergleich zu (9) attraktiv, da es weniger (genauer: nicht mehr) Rechenaufwand pro Iterationsschritt erfordert, ansonsten aber den Fixpunkt ebenfalls monoton einschließt.

Literatur

[1] Jahn Karl-Udo: *Existenz und Einschließung der bezüglich der Inklusion maximalen Lösung bei Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen.* Wiss. Beitr. M.-Luther-Univ. Halle-Wittenberg **1984**, M33, 55-58 (1984).

[2] Kurpel′ N. S., Šuvar B. A.: *Dvustoronnie operatornye neravenstva i ih primenenija.* Naukova Dumka Kiev 1980.

[3] Volkmann Peter: *Einschließung der Lösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen.* International Series of Numerical Mathematics 71, Birkhäuser Basel, 351-357 (1984).

[4] — (Fol′kmann P.): *Zametka ob integral′nyh neravenstvah tipa Vol′terra.* Ukrain. Mat. Žurn. **36**, 393-395 (1984).

Herstellung des Typoskripts: Marion Ewald.

Adressen der Autoren:

G. Alefeld, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Karlsruhe, 76128 Karlsruhe, Deutschland. (Goetz.Alefeld@mathematik.uni-karlsruhe.de)

P. Volkmann, Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe, 76128 Karlsruhe, Deutschland.