Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik

76128 Karlsruhe

Ein quantitatives Modell zur analytischen Bewertung von Protokollen für abgekoppelte Operationen

Dezember 1996

Dietmar A. Kottmann

Universität Karlsruhe
Institut für Telematik

Interner Bericht 15/96

Kurzfassung

Die jüngste Entwicklung bei Mobilkommunikationssystemen und die weiter fortschreitende Miniaturisierung der Rechnertechnologie haben in den letzten Jahren das Gebiet des "Mobile Computing" entstehen lassen. Darunter versteht man die umfassende Integration mobiler Teilnehmer in verteilte Systeme. Eine zentrale Herausforderung in diesem Gebiet ist die Tatsache, daß Mobilkommunikationssysteme im Vergleich zu Festnetzen nur teure schmalbandige Kommunikationskanäle geringer Konnektivität anbieten können. Dieser Herausforderung wird mit der Replikation von Daten begegnet, womit abgekoppelte Operationen ermöglicht werden, d.h. Operationen, die ohne direkte Kommunikation mit mehreren Replikaten isoliert auf einem einzelnen Rechner stattfinden.

Um Replikationsprotokolle quantitativ zu bewerten haben sich analytische Modelle durchgesetzt. Allerdings gehen die bekannten Modelle von Annahmen aus, die ihre Anwendung auf abgekoppelte Operationen unmöglich machen. Diesem Defizit begegnet das im vorliegenden Bericht kurz vorgestellte spezielle analytische Modell zum Vergleich von Protokollen für abgekoppelte Operationen. Der Schwerpunkt des Berichts liegt auf der beispielhaften Anwendung des Modells auf drei Protokollklassen.

Abstract

Emerging systems for mobile communications and the ongoing miniaturization of computer technology lately sparked the research field "Mobile Computing". The ultimate goal is the seamless integration of mobile useres into distributed systems. However, there are several hurdels on the road to this goal. Probably the most challanging one lies behind the characteristics of mobile communication systems. Compared to communication in fixed networks, they can only be described as expensive low–bandwith channels that suffer from coverage blackholes and frequent disconnections. Replication technology promises to be a remidy for these shortcomings. Specific replication techniques for mobile computing allow users to execute disconnected operations, i.e. to perform operations without communicating with other replicas.

The traditional method to asses the quality of replication techniques is the use of analytical models. Unfortunately, all known models base on assumptions that defy their usage in the case of disconnected operations. This report briefly presents a novel analytical model that is tailored for disconnected operations. The major part of the report is dedicated to show the usage of the model in comparing three different classes of replication techniques for disconnected operations.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Mobilkommunikation ist zweifelsohne einer der prägenden Faktoren in der Telematik der letzten Jahre gewesen. Obwohl bereits 1994 in den USA 19 Millionen Mobilfunkteilnehmer zu verzeichnen waren [WK95] und die Teilnehmerzahl in Deutschland im Oktober 1994 3,34 Millionen erreichte [Hut95], ist ein Endpunkt des explosiven Wachstums noch nicht abzusehen. So prognostizieren aktuelle Studien für das Jahr 2000 10 Millionen Teilnehmer in Deutschland [Hut96] und 40 Millionen in den USA [WK95].

Die Rückwirkung dieser Entwicklung auf die Informatik hat das Anwendungsfeld des "Mobile Computing" entstehen lassen; ein Begriff hinter dem sich die umfassende Integration mobiler Nutzer in ein vernetztes System verbirgt [DH95]. Ein wesentliches Problem bei dieser Entwicklung ist die Nutzung eines gemeinsamen Datenbestandes durch mehrere mobile Nutzer und Nutzer am Festnetz [IB93, AK93, Die95]. Die von Festnetzen her gewohnte Lösung der zentralen Datenablage auf einem gemeinsam genutzten Server ist im mobilen Umfeld auf Grund der teuren schmalbandigen Kommunikationskanäle geringer Konnektivität prohibitiv teuer. Den Ausweg bietet die Replikation von Daten zwischen Festnetz- und Mobilrechnern [Kot95]. Damit werden sogenannte abgekoppelte Operationen [KS92] ermöglicht. Darunter versteht man die Ausführung von Operationen auf einem Replikat ohne zwangsweise sofort andere Replikate kontaktieren zu müssen. Dies ermöglicht es zum einen Operationen ohne die bei Mobilnetzen beachtliche Kommunikationsverzögerung zu vollenden [Cox95] und zudem Abgleichsoperationen en block und eventuell sogar zu Zeiten billiger Kommunikationskapazitäten durchzuführen. Konsequenterweise ist in den letzten Jahren eine Vielzahl von Replikationsprotokollen entstanden, die abgekoppelte Operationen unterstützen.

Die Bewertung von Replikationsprotokollen basiert üblicherweise auf analytischen Modellen [Jal94]. Diese werden in Kapitel 2 kurz vorgestellt und vor dem Hintergrund ihrer Eignung zur Bewertung abgekoppelter Operationen beurteilt. Die dabei aufgezeigten Defizite bilden die Grundlage des in Kapitel 3 kurz skizzierten neuen Modells zur Bewertung von Replikationsprotokollen für abgekoppelte Operationen. Den Schwerpunkt dieses Berichts bildet daraufhin Kapitel 4 mit der exemplarischen Anwendung des Modells. Abschließend erfolgt eine kurze Zusammenfassung in Kapitel 5.

2 Analytischer Vergleich von Replikationsprotokollen

Im folgenden werden einige zentrale Grundlagen von Replikationsprotokollen vorgestellt. Darauf aufbauend erfolgt eine kurze Diskussion der bekannten analytischen Modelle zu deren Bewertung zusammen mit einer Einschätzung, ob diese Modelle für die Bewertung abgekoppelter Operationen geeignet sind.

2.1 Grundlagen von Replikationsprotokollen

Replikationsprotokolle verwalten mehrere Kopien eines logischen Elements. Die einzelnen Kopien werden *Replikate* genannt. Das logische Element wird als *Objekt* bezeichnet. Ein Objekt ist nicht notwendigerweise ein Schreib–/Leseobjekt. Vielmehr kann es eine beliebige Menge von Operationen anbieten. So wird eine Warteschlange zumindest Operationen zum Einfügen und Entfernen von Elementen und einen Test, ob die Schlange leer ist, anbieten. Ein Terminkalender wird hingegen Operationen zum Belegen und Freigeben von Terminen und zum Überprüfen, ob ein Termin belegt ist, anbieten.

Das Ziel von Replikationsprotokollen ist es mit dem Vorhalten mehrerer Replikate Qualitätsparameter wie Antwortzeit oder Verfügbarkeit zu verbessern, ohne die Anwendung, die die Objekte nutzt, ändern zu müssen. Für Anwendungen soll es folglich nicht zu unterscheiden sein, ob ein Objekt direkt physikalisch oder in Form mehrerer Replikate repräsentiert ist. Man spricht hier auch von *Replikationstransparenz*. Dieses Ziel kann formal auf Korrektheitskriterien heruntergebrochen werden. Das vorherrschende Korrektheitskriterium ist die *Ein–Kopien–Serialisierbarkeit* [BG84], das auf dem Arbeiten mit Transaktionen beruht. Protokolle, die dieses Kriterium erfüllen können, auch gewinnbringend in anderen Anwendungsgebieten verwendet werden (vgl. [Bor91]).

Für die ausführliche Diskussion der Replikationstransparenz, der Ein–Kopien–Serialisierbarkeit und deren Auswirkungen sei auf die Standardwerke [BHG87] und [LMWF94] verweisen. An dieser Stelle sei nur ein Aspekt informell diskutiert, der für den weiteren Verlauf der Arbeit noch an Gewicht gewinnen wird. Für eine formale Diskussion sei auf [Kot96] verwiesen. Bei dem angesprochenen Effekt handelt es sich um die Frage, ob sich ein Korrektheitskriterium auf isolierte Objekte oder auf die Gesamtmenge der von einer Anwendung betrachteten Objekten bezieht. Im ersten Fall wird das Kriterium als *kompositional* bezeichnet, im zweiten Fall als *nicht–kompositional*. Ein kompositionales Kriterium können Protokolle erfüllen ohne die Gesamtmenge der von der Anwendung benutzten Objekte zu beachten. Nun sind die Ein–Kopien–Serialisierbarkeit und auch die meisten der anderen vorgeschlagenen Korrektheitskriterien wie beispielsweise die Sequential–Consistency [Lam79] nicht–kompositionale Kriterien.

Parallel zu dieser Diskussion können auch Replikationsprotokolle in kompositionale und nicht–kompositionale unterschieden werden. Diese Unterscheidung muß bei den Mechanismen des Protokolls ansetzen. Dementsprechend heißt ein Replikationsprotokoll *kompositional*, wenn es alle seine Entscheidungen — d.h. die Entscheidung über die Zulässigkeit und das Propagieren von Zugriffen — getrennt für jedes Objekt berechnet. Sonst heißt es nicht–kompositional. Es scheint nun auf der Hand zu liegen, daß ein Replikationsprotokoll, das ein nicht–kompositionales Korrektheitskriterium erfüllen soll, selbst nicht–kompositional strukturiert ist. Erstaunlicherweise sind aber fast alle bekannten Replikationsprotokolle kompositional und treffen allenfalls in Ausnahmesituationen nicht–kompositionale Entscheidungen. Um dennoch Kriterien wie das der Ein–Kopien–Serialisierbarkeit erfüllen zu können, bedürfen Replikationsprotokolle folglich zusätzlich *Nebenläufigkeitsprotokolle*. Da das Nebenläufigkeitsprotokoll selbst keine Kenntnis von der Funktionsweise des Replikationsprotokolls hat, liegt der Verdacht auf der Hand, daß verglichen mit nicht–kompositionalen Replikationsprotokollen, d.h. Protokollen, die die Nebenläufigkeits– und Replikationsentscheidung integrieren, nur eine suboptimale Leistung erreicht werden kann. Genau dieser Frage wird im weiteren Verlauf dieses Berichts durch die beispielhafte Anwendung des analytischen Bewertungsmodells untersucht.

2.2 Analytische Bewertung

Replikationsprotokolle werden üblicherweise nach dem Anteil der Zeit, zu der ein Objekt verfügbar ist, bewertet [Lon90, Jal94]. Da die bekannten Replikationsprotokolle im Dauerbetrieb alle kompositional arbeiten, ist die Analyse auf ein einzelnes Objekt beschränkt. Basierend auf diesen Grundannahmen wird ein analytisches Modell eines physikalischen Systems als Menge an Zuständen aufgebaut. Jeder Zustand repräsentiert eine Fehlersituation, in der gewisse physikalische Komponenten arbeiten oder ausgefallen sind. In einer Teilmenge der Zustände ist das untersuchte Objekt verfügbar, in der Komplementmenge nicht. Mögliche Zustandsübergänge sind durch das zu untersuchende Replikationsprotokoll bestimmt und werden durch den Ausfall und die Reparatur von Systemkomponenten ausgelöst. Diese sind zufallsverteilt. Insgesamt entsteht durch diese Modellierung ein Zufallsprozeß [Lan92]. Um ihn beherrschbar zu halten, wird er durch die Annahme von poisson–verteilten Fehlern und Reparaturen [Lan92] zu einem Markov–Prozeß [Neu77] vereinfacht. Auch danach ist eine allgemeine Analyse noch nicht möglich, so daß als zusätzliche Vereinfachung nur Ausfälle von Rechnern berücksichtigt werden, das Netz aber als voll funktionsfähig betrachtet wird. Anders formuliert gehen diese analytischen Modelle von einer Vollvermaschung und einem Fail–Stop–Verhalten [SS83] der Rechner aus. Aus der Anwendung des Modells ergibt sich dann eine Trendaussage zur Überlegenheit eines Replikationsprotokolls gegenüber anderen unter der Annahme fehlerfreier Netze.

Neben den bekannten, in [Mut90] zusammengetragenen Problemen dieser Modellierung ist sie speziell für abgekoppelte Operationen nicht geeignet. Abgekoppelte Objekte zeichnen sich gerade dadurch aus, daß zwar die Rechner funktionieren, aber bewußt auf die Leistung des Netzes verzichtet werden soll. Das konventionelle Bewertungsmodell geht aber gerade von einer uneingeschränkten Funktionsfähigkeit der Netze aus und untersucht Fehlfunktionen bei den Rechnern. Bei abgekoppelten Operationen liegt der Schwerpunkt gerade umgekehrt. Der Vergleichsmaßstab des Modells sollte auf — durch bewußten Verzicht oder durch Fehlfunktionen — nicht vorhandenen Netzen beruhen. Für die Rechner kann hingegen vereinfachend Fehlerfreiheit unterstellt werden. Die Entwicklung eines solchen Modells bildet den Gegenstand des folgenden Kapitels.

3 Ein analytisches Modell für abgekoppelte Operationen

Im folgenden soll ein analytisches Modell zur Bewertung abgekoppelter Operationen vorgestellt werden. Es ist in seinen Grundannahmen an das Modell [HSW94] zur Analyse von Datenallokationsverfahren im Mobile Computing angelehnt. Die ausführliche Diskussion des Modells und seine Einordnung in einen größeren Kontext erfolgt in [Kot96].

3.1 Grundlegende Modellannahmen

Das Modell betrachtet eine Menge abgekoppelter Rechner, auf denen Replikate allokiert sind. Diese werden *Partitionen* genannt. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß diese Partitionen gleichzeitig aus einer initialen Partition entstanden sind. Für die Diskussion der Auswirkungen dieser vereinfachenden Annahme sei wieder auf [Kot96] verwiesen.

Replikationsprotokolle für abgekoppelte Objekte unterscheiden sich zunächst in der Menge der in einer Partition ohne Kommunikation mit anderen Partitionen ermöglichten Operationen. Dies wird wie folgt modelliert: Sei $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ eine Menge an Partitionen, π ein Replikationsprotokoll und $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ ein Objektbestand wobei $x \in X$ die Operationen $OP(x)$ anbiete. Die durch P und π über X *erlaubten Operationszuordnungen* bilden eine Menge $EO(P, \pi, X)$, deren Mitglieder Funktionen $eo : P \times X \to \bigcup_{x \in X} OP(x)$ mit $eo(p, x) \subseteq OP(x)$ sind, so daß es für jede Funktion $eo \in EO(P, \pi, X)$ eine Ausführung von π gibt, die in allen Partitionen $p \in P$ für jedes $x \in X$ genau die Operationen aus $eo(p, X)$ erlaubt. Jede

Funktion $eo \in EO(P, \pi, X)$ wird *Operationsfestlegung* genannt. Um nicht auf konkrete Replikationsprotokolle beschränkt zu sein, wird auch jede Menge $EO(P, X)$ derartiger Funktionen *Operationszuordnung* für P und X genannt und ihre Mitglieder als *Operationsfestlegung* bezeichnet.

Diese Definition enthält insofern noch Redundanz, als sie eine Operationsfestlegung der Operationszuordnung mehr Operationen zulassen kann als eine andere Operationsfestlegung derselben Operationszuordnung. Damit ist es unnötig, die zweite Operationsfestlegung weiter zu betrachten, da die erste deren Leistungsfähigkeit voll abbildet. Dies wird durch die folgende Definition gefaßt: Sei $EO(P, X)$ eine Operationszuordnung für eine Menge $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ an Partitionen und einen Objektbestand X. Eine Operationszuordnung $EO'(P, X)$ *dominiert* $EO(P, X)$, wenn für jede Operationsfestlegung $eo \in EO(P, X)$ eine Operationsfestlegung $eo' \in EO'(P, X)$ existiert, so daß für alle Partitionen $p \in P$ und alle Objekte $x \in X$ die Bedingung $eo(p, x) \subseteq eo'(p, x)$ erfüllt ist. Eine Menge $GOP(P, X) \subseteq EO(P, X)$ heißt *generierende Operationszuordnung* für $EO(P, X)$, wenn sie $EO(P, X)$ dominiert und keine echte Teilmenge $GOP'(P, X) \subset GOP(P, X)$ die Operationszuordnung $EO(P, X)$ dominiert.

Bis zu diesem Zeitpunkt können Aussagen nur über einzelne Replikationsprotokolle getroffen werden. Ziel dieses Berichts ist jedoch der Vergleich von *Klassen von Replikationsprotokollen*, d.h. von Mengen von Replikationsprotokollen, die ein gemeinsames Kriterium erfüllen, um kompositionale mit nicht–kompositionalen Protokollen zu vergleichen. Dazu ist eine Ausweitung der Begriffsbildung auf solche Klassen vonnöten: Sei Ψ eine Klasse von Replikationsprotokollen, P eine Menge an Partitionen und X ein Objektbestand. Die Menge $EO(P, \Psi, X) := \bigcup_{\pi \in \Psi} EO(P, \pi, X)$ wird als die *mögliche Operationszuordnung* von Ψ bezeichnet. Jede generierende Operationszuordnung $MOP(P, \Psi, X)$ für $EO(P, \Psi, X)$ heißt *maximale Operationszuordnung* für Ψ.

3.2 Das analytische Modell

Mit diesen Begriffsfestlegungen kann nun das analytische Modell nach [Kot96] vorgestellt werden.

Sei $P = p_1, p_2, \ldots, p_n$ eine Menge an Partitionen, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ eine Menge an Objekten und für jedes Objekt $x_i \in X$ $op_i^1 \cdot op_i^2 \cdot \ldots \cdot op_i^{n_i}$ eine Aufzählung der auf x_i möglichen Operationen $OP(x_i)$. Die Leistung von Replikationsprotokollen bei der Replikation der Objekte X in P kann über den Anteil der abgekoppelt durchführbaren Operationen eines Stromes von Operationsaufrufen auf den Partitionen modelliert werden. Dazu seien $\lambda_{p_i, x_j, op_j^k}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n_i$ poisson–verteilte Zufallsvariablen, die den Strom von Aufrufen der Operation op_j^k auf dem Replikat von x_j in Partition p_i quantifizieren. Mit der Größe $\Lambda := \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} \sum_{k=1}^{k=n_j} \lambda_{p_i, x_j, op_j^k}$ bezeichnen dann auf Grund der Gedächtnislosigkeit der Poissonverteilung [Lan92] die Größen $\Theta_{p_i, x_j, op_j^k} := \frac{\lambda_{p_i, x_j, op_j^k}}{\Lambda}$ die jeweilige Wahrscheinlichkeit, daß als nächstes die Operation op_j^k des Objekts x_j auf dem Replikat in Partition p_i aufgerufen wird.

Um die Diskussion, welcher Anteil an Operationen mit einem Replikationsprotokoll durchführbar ist, zu vereinfachen, seien die Größen auf eine gröbere Granularität zurückgeführt. Zunächst bezeichnen die Größen $\Theta_{p_i, x_j} := \sum_{k=1}^{k=n_j} \Theta_{p_i, x_j, op_j^k}$ die jeweilige *Nutzungsintensität* des Objekts x_j in Partition p_i. Sie stellt die Wahrscheinlichkeit dar, daß als nächstes eine Operation des Objekts

x_j in Partition p_i aufgerufen wird. Ferner bezeichnen die Größen $r_{p_i,x_j,op_j^k} := \frac{\lambda_{p_i,x_j,op_j^k}}{\sum_{k=1}^{k=n_j} \lambda_{p_i,x_j,op_j^k}}$ die jeweilige Wahrscheinlichkeit, daß ein Aufruf des Objekts x_j in der Partition p_i die Operation op_j^k betrifft, die natürlich nur für $\Theta_{p_i,x_j} > 0$ definiert ist.

Für feste Parameter λ_{p_i,x_j,op_j^k} kann dann die Leistungsfähigkeit eines Replikationsprotokolls π basierend auf einer generierenden Operationszuordnung $GOP(P,\pi,X)$ wie folgt bestimmt werden: Sei dazu $go \in GOP(P,\pi,X)$ eine Operationsfestlegung. Der durch go ermöglichte Anteil durchführbarer Operationen definiert sich dann über die Wahrscheinlichkeit, daß der nächste Aufruf durch go erlaubt wird. Dazu sei die Funktion $P : GOP(P,\pi,X) \times P \times X \times \bigcup_{x \in X} OP(x) \rightarrow \{0,1\}$ eingeführt, die aussagt, ob go die Durchführung der Operation op_j^k auf dem Objekt x_j in der Partition p_i erlaubt, d.h. es gilt $op_j^k \in go(p_i,x_j) \Rightarrow P(go,p_i,x_j,op_j^k) = 1$ bzw. $op_j^k \notin go(p_i,x_j) \Rightarrow P(go,p_i,x_j,op_j^k) = 0$. Die Wahrscheinlichkeit $P(go)$, daß der nächste Aufruf durch go erlaubt ist, berechnet sich dann zu: $P(go) := \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} P(go,p_i,x_j,op_j^k) * \lambda_{p_i,x_j,op_j^k} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} P(go,p_i,x_j,op_j^k) * \Theta_{p_i,x_j} * r_{p_i,x_j,op_j^k}$. $P(go)$ zeigt damit an, welcher Anteil von Operationen bei der Operationsfestlegung go durch π erlaubt ist. Für unterschiedliche Operationsfestlegungen können dann durchaus unterschiedliche Anteile resultieren. Bildet man das Maximum der Anteile über alle von π erlaubten Operationsfestlegungen, so erhält man den Anteil durchführbarer Operationen, wenn π die für die Parameter λ_{p_i,x_j,op_j^k} optimale Operationsfestlegung wählt. Dieser Wert wird als der *durchführbare Anteil* bezeichnet und ist formal wie folgt definiert: $DA_\pi(\lambda_{p_1,x_1,op_1^1}, \lambda_{p_1,x_1,op_1^2}, \ldots, \lambda_{p_n,x_m,op_m^{n_i}}) := \max_{go \in GO(P,\pi,X)} \{P(go)\}$.

Da die folgenden Diskussionen über Nutzungsintensitäten Θ_{p_i,x_j} und Operationswahrscheinlichkeiten r_{p_i,x_j,op_j^k} geführt werden, wird der durchführbare Anteil durch die Θ_{p_i,x_j} und r_{p_i,x_j,op_j^k} parametrisiert werden, aus denen die jeweiligen λ_{p_i,x_j,op_j^k} nach obiger Gleichung berechenbar sind. Die Schreibweise des durchführbaren Anteils ist damit $DA(\Theta_{p_1,x_1}, r_{p_1,x_1,op_1^1}, r_{p_1,x_1,op_1^2}, \ldots, r_{p_1,x_1,op_1^{n_1-1}}; \Theta_{p_1,x_2}, \ldots)$. In der Schreibweise folgen demnach, durch Kommata getrennt, die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Operationen auf die jeweiligen Nutzungsintensitäten. Man beachte, daß zur Verkürzung der Schreibweise von den n_i Operationswahrscheinlichkeiten nur die ersten $n_i - 1$ aufgeführt sind, aus denen sich die letzte mittels $r_{p_i,x_j,op_j^{n_i}} = 1 - \sum_{k=1}^{k=n_i-1} r_{p_i,x_j,op_j^k}$ berechnen läßt. Mehrere dieser Folgen sind jeweils durch ein Semikolon getrennt. Man beachte, daß immer die Gleichung $1 = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} \Theta_{p_i,x_j}$ gilt, bei Bedarf also auch ein beliebiges Θ_{p_i,x_j} aus den anderen hergeleitet werden kann. Ist die Reihenfolge der Nutzungsintensitäten aus dem Kontext ersichtlich, so wird auf die aufwendige Indizierung verzichtet und statt dessen die Θ_{p_i,x_j} als Θ_h und die r_{p_i,x_j,op_j^k} als r_g durchnumeriert. So vereinfacht sich die Schreibweise im Beispiel eines einzelnen auf zwei Partitionen replizierten Objekts zu $DA_\pi(\Theta, r_1; 1-\Theta, r_2)$.

Mit der eingeführten Methodik kann für bekannte Wahrscheinlichkeiten Θ_i und r_j berechnet werden, welche Operationsfestlegung den höchsten Anteil an durchführbaren Operationen ergibt. Dieselbe Konstruktion kann nicht nur für Replikationsprotokolle, sondern für komplette Klassen Ψ von Replikationsprotokollen angewendet werden, indem die generierende Operationszuweisung $GOP(P,\pi,X)$ durch eine für Ψ maximale Operationszuweisung $MOP(P,\Psi,X)$ ersetzt wird. $DA_\Psi(\Theta_1, r_1, r_2, \ldots, r_{i_1}; \Theta_2, \ldots)$ gibt dann an, welche Zuweisung von Operationsmengen eines beliebigen Protokolls $\pi \in \Psi$ unter diesen Bedingungen die beste ist.

Die Kenngröße $DA_\Psi(\Theta, r_1, r_2)$ ist aber für den Vergleich zweier Klassen von Replikationsprotokollen oft noch zu feingranular, insofern sie einen Wert für jede mögliche Kombination von Nutzungsintensitäten mit Operationswahrscheinlichkeiten angibt. Deshalb werden bei den folgenden Vergleichen Annahmen über das Verhältnis verschiedener Nutzungsintensitäten und Schreibwahrscheinlichkeiten gemacht und dann über verschiedene Wahrscheinlichkeiten gemittelt. Die resultierenden Werte werden *mittlere durchführbare Anteile* unter den jeweiligen Bedingungen genannt. Mit diesen Werten lassen sich analog zu der herkömmlichen Vergleichsmethodik Trendaussagen ableiten.

4 Anwendung der Modells auf ausgewählte Vergleichsklassen

Im folgenden wird das analytische Modell des letzten Kapitels auf drei Klassen von Replikationsprotokollen angewandt. Dabei handelt es sich zunächst um Replikationsprotokolle die nur schreibende und lesende Operationen unterscheiden kennen. Diese werden in die Klasse Ψ_k der kompositionalen Protokolle für Schreib–/Leseobjekte und die Klasse Ψ_n der nicht–kompositionalen Protokolle für Schreib–/Leseobjekte unterteilt. Da beliebige Operationen auf schreibende und lesende Zugriffe zurückgeführt werden können, sind diese Protokolle auch für allgemeine Objekte geeignet. Dennoch soll ihnen als dritte Klasse die Klasse Ψ_s der nicht–kompositionaler Protokolle für allgemeine Objekte, die auf den in [Kot96] diskutierten Relationen zwischen Operationen aufbauen gegenübergestellt werden.

Die Grundlage der folgenden Diskussion bilden jeweils maximale Operationszuordnungen und die aus ihnen abgeleiteten durchführbaren Anteile. Diese Ableitungen sind im folgenden nicht explizit behandelt, sondern werden direkt aus [Kot96] entnommen. Der Grund hierfür ist, daß die Ableitung maximaler Operationszuordnungen für Klassen von Replikationsprotokollen Grenzaussagen über die Leistungsfähigkeit der Protokolle dieser Klassen erfordern. Sind diese Grenzaussagen vorhanden, so ist die Ableitung der maximalen Operationszuordnungen und der durchführbaren Anteile sehr einfach. Die Diskussion der Grenzaussagen an sich würde aber den Rahmen dieses Berichts sprengen. Damit beschränkt sich die folgende Diskussion auf die Methodik zur Berechnung der mittleren durchführbaren Anteile.

4.1 Der Basisvergleich

Die Vergleichsuntersuchung beginnt mit dem einfachsten Fall. Zunächst werden die Klassen Ψ_k und Ψ_n von Protokollen für Schreib–/Leseobjekte verglichen. Der einfachste Fall für den Vergleich ergibt sich, wenn nur ein einzelnes Objekt in genau zwei Partitionen repliziert wird. Dieser einfache Vergleich wird in den nächsten Unterkapiteln dann auf mehrere Objekte, auf mehrere Partitionen und auf den Vergleich mit der Klasse Ψ_s erweitert.

Im Fall eines in zwei Partitionen replizierten Schreib–/Leseobjekts entspricht der Anteil durchführbarer Operationen DA_{Ψ_k} für kompositionale Protokolle bzw. DA_{Ψ_n} für nicht–kompositionale Protokolle nach Lemma 6.47 aus [Kot96]:

$$\begin{aligned}
DA_{\Psi_k}(\Theta, r_1; 1-\Theta, r_2) &= \max\{\Theta, 1-\Theta, r_1\Theta + r_2(1-\Theta),\\
&\qquad (1-r_1)\Theta + (1-r_2)(1-\Theta)\}\\
DA_{\Psi_n}(\Theta, r_1; 1-\Theta, r_2) &= \max\{\Theta + r_2(1-\Theta), r_1\Theta + (1-\Theta), \Theta + (1-r_2)(1-\Theta),\\
&\qquad (1-r_1)\Theta + (1-\Theta)\}
\end{aligned}$$

Zunächst sei der Fall *homogener Anwendungscharakteristiken* untersucht. Darunter werden identische Zugriffsmuster auf das Objekt in beiden Partitionen verstanden. Demnach ist die Verteilung der Schreib–/Leseoperationen in beiden Partitionen identisch und nur von der jeweils durchgeführten Anwendung abhängig. Folglich soll wie in der Literatur üblich [HSW94] nur eine Gleichverteilungsannahme über die Verteilung gemacht werden, da jede andere Verteilungsannahme weitere Annahmen über die Anwendungen erforderte. Insgesamt verbleibt als einziger Parameter die Aufteilung des Zugriffsstromes auf die beiden Partitionen. Dieser entspricht der relativen Nutzungsintensität der Partitionen im Vergleich. Unter diesen Annahmen ergibt sich als Kennzahl der *mittlere durchführbare Anteil im homogenen Fall*, der als

$$MDAH_{\Psi}(\Theta) = \int_{r=0}^{r=1} DA_{\Psi}(\Theta, r; 1-\Theta, r)dr$$

definiert ist und nur mit der relativen Neutzungsintensität parametrisiert ist. Zur Berechnung reicht es aus Symmetriegründen aus, das Intervall $0 \leq \Theta \leq \frac{1}{2}$ zu betrachten.

Für kompositionale Protokolle ergibt er sich zu:

Satz 4.1 (MDAH für kompositionale Protokolle)
Für kompositionale Protokoll ist der mittlere durchführbare Anteil im homogenen Fall im Intervall $\Theta \in [0, \frac{1}{2}]$ für ein auf zwei Partitionen repliziertes Schreib–/Leseobjekt $MDHA_{\Psi_k}(\Theta) = 1 - \Theta + \Theta^2$.

Beweis: Im homogenen Fall vereinfacht sich der durchführbare Anteil an Operationen wie folgt:

$$\begin{aligned} DA_{\Psi_k}(\Theta, r; 1-\Theta, r) &= \max\{\Theta, 1-\Theta, r\Theta + r(1-\Theta), (1-r)\Theta + (1-r)(1-\Theta)\} \\ &= \max\{1-\Theta, r, 1-r\} \end{aligned}$$

Woraus sich für das Integral $MDAH_{\Psi_k}$ die folgende Gleichungskette ergibt:

$$\begin{aligned} MDAH_{\Psi_k}(\Theta) &= \int_{r=0}^{r=1} DA_{\Psi_k}(\Theta, r; 1-\Theta, r)dr \\ &= \int_{r=0}^{r=1} \max\{1-\Theta, r, 1-r\}dr \\ &= \int_{r=0}^{r=\Theta} (1-r)dr + \int_{r=\Theta}^{r=1-\Theta} (1-\Theta)dr + \int_{r=1-\Theta}^{r=1} rdr \\ &= \left[r - \frac{r^2}{2}\right]_0^{\Theta} + [r - r\Theta]_{\Theta}^{1-\Theta} + \left[\frac{r^2}{2}\right]_{1-\Theta}^{1} \\ &= \Theta - \frac{\Theta^2}{2} + 1 - \Theta - \Theta + \Theta^2 - \Theta + \Theta^2 + \frac{1}{2} - \frac{(1-\Theta)^2}{2} \\ &= 1 - \Theta + \Theta^2 \end{aligned}$$

■

Für nicht–kompositionale Protokolle ist er:

Satz 4.2 (MDAH für nicht–kompositionale Protokolle)
Für nicht–kompositionale Protokoll ist der mittlere durchführbare Anteil im homogenen Fall im Intervall $\Theta \in [0, \frac{1}{2}]$ *für ein auf zwei Partitionen repliziertes Schreib–/Leseobjekt* $MDHA_{\Psi_n}(\Theta) = 1 - \frac{1}{4}\Theta$.

Beweis: Im homogenen Fall vereinfacht sich der durchführbare Anteil an Operationen wie folgt:

$$\begin{aligned} DA_{\Psi_n}(\Theta, r; 1-\Theta, r) &= \max\{\Theta + r(1-\Theta), r\Theta + (1-\Theta), \Theta + (1-r)(1-\Theta), \\ &\quad (1-r)\Theta + (1-\Theta)\} \\ &= \max\{r\Theta + 1 - \Theta, (1-r)\Theta + 1 - \Theta\} \end{aligned}$$

Die Gültigkeit dieser Umformung ergibt sich aus den Prädikaten $r\Theta + 1 - \Theta \geq \Theta + r(1-\Theta)$ und $(1-r)\Theta + 1 - \Theta \geq \Theta + (1-r)(1-\Theta)$. Für $\Theta = 0.5$ ist deren Gültigkeit unmittelbar einsichtig. Für den Bereich $0 \leq \Theta < 0.5$ ergibt sie sich aus den Äquivalenzketten

$$\begin{aligned} r\Theta + 1 - \Theta &\geq \Theta + r(1-\Theta) \\ 1 - 2\Theta &\geq r(1-2\Theta) \\ 1 &\geq r \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (1-r)\Theta + 1 - \Theta &\geq \Theta + (1-r)(1-\Theta) \\ 1 - 2\Theta &\geq (1-r)(1-2\Theta) \\ 1 &\geq 1 - r \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für das Integral $MDAH_{\Psi_n}$ die folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned} MDHA_{\Psi_n}(\Theta) &= \int\limits_{r=0}^{r=1} DA_{\Psi_n}(\Theta, r; 1-\Theta, r)dr \\ &= \int\limits_{r=0}^{r=1} \max\{r\Theta + 1 - \Theta, (1-r)\Theta + 1 - \Theta\}\, dr \\ &= \int\limits_{r=0}^{r=0.5} \left((1-r)\Theta + 1 - \Theta dr + \int\limits_{r=0.5}^{r=1} r\Theta + 1 - \Theta \right) dr \\ &= \left[r - \frac{r^2}{2}\Theta \right]_0^{0.5} + \left[\frac{r^2}{2}\Theta + r - r\Theta \right]_{0.5}^{1} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\Theta + \frac{1}{2}\Theta + 1 - \Theta - \frac{1}{8}\Theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Theta \\ &= 1 - \frac{1}{4}\Theta \end{aligned}$$

■

Nun sei die Annahme homogener Anwendungscharakteristiken aufgehoben. Als Beispiel für eine *heterogene Anwendungscharakteristik* sei die Kennzahl

$$MDA1_{\Psi}(\Theta) := \int_{r=0}^{r=1} DA_{\Psi}(\Theta, 1-r; 1-\Theta, 1-(r/2))dr$$

des *mittleren durchführbaren Anteils im heterogenen Fall* berechnet, die aussagt, daß in der Partition 1 doppelt so häufig geschrieben wird, wie in Partition 2.

Für kompositionale Protokolle ergibt sich die Kennzahl zu:

Satz 4.3 (MDA1 für kompositionale Protokolle)
Für kompositionale Protokoll ist der mittlere durchführbare Anteil im heterogenen Fall für ein auf zwei Partitionen repliziertes Schreib–/Leseobjekt

$$MDA1_{\Psi_k}(\Theta) = \begin{cases} 0 \leq \Theta \leq \frac{1}{3} & : \quad \frac{1}{1+\Theta} \\ \frac{1}{3} \leq \Theta \leq 1 & : \quad \frac{9\Theta^2 - 6\Theta + 5}{4(1+\Theta)} \end{cases}$$

Beweis: Im untersuchten Fall vereinfacht sich der durchführbare Anteil an Operationen wie folgt:

$$\begin{aligned} DA_{\Psi_k}(\Theta, 1-r; 1-\Theta, 1-\frac{r}{2}) &= \max\Big\{\Theta, 1-\Theta, (1-r)\Theta + (1-\frac{r}{2})(1-\Theta), \\ &\quad (1-(1-r))\Theta + (1-(1-\frac{r}{2}))(1-\Theta)\Big\} \\ &= \max\Big\{\Theta, 1-\Theta, 1-\frac{r}{2}\Theta - \frac{r}{2}, \frac{r}{2} + \frac{r}{2}\Theta\Big\} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Maximums ist im Intervall $\Theta \in I_1 := [0, 0.5]$ nur der Term $1-\Theta$ und im Komplementintervall $\Theta \in I_2 := [0.5, 1]$ nur der Term Θ relevant.

Zunächst seien die Verhältnisse in I_1 untersucht. Hier gelten die Ungleichungsketten

$$\begin{aligned} 1-\Theta &\leq 1 - \frac{r}{2}\Theta - \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2}(1+\Theta) &\leq \Theta \\ r &\leq \frac{2\Theta}{1+\Theta} =: f_1(\Theta) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 1-\Theta &\leq \frac{r}{2}\Theta + \frac{r}{2} \\ 1-\Theta &\leq \frac{r}{2}(1+\Theta) \\ f_2(r,\Theta) := \frac{2-2\Theta}{1+\Theta} &\leq r \end{aligned}$$

Im Intervall I_1 beschränkt sich der Wertebereich von $f_1(\Theta)$ auf das Intervall $[0, 1]$. Allerdings gilt $f_2(\Theta) \geq 1$ für $\Theta \in [0, \frac{1}{3}]$ und $f_2(\Theta) \in [0, 1]$ für $\Theta \in [\frac{1}{3}, 1]$. Für das Verhältnis von $f_1(\Theta)$ und $f_2(\Theta)$ gilt in I_1 ferner die Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} f_1(\Theta) = \frac{2\Theta}{1+\Theta} &\leq f_2(r,\Theta) = \frac{2-2\Theta}{1+\Theta} \\ 4\Theta &\leq 2 \\ \Theta &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Woraus sich das Integral $MDA1_{\Psi_k}$ zunächst für $\Theta \in [0, \frac{1}{3}]$ nach der folgenden Gleichungskette ergibt:

$$
\begin{aligned}
MDA1_{\Psi_k}(\Theta) &= \int_{r=0}^{r=1} DA_{\Psi_k}(\Theta, 1-r; 1-\Theta, 1-\frac{r}{2})dr \\
&= \int_{r=0}^{r=1} \max\left\{1-\Theta, 1-\frac{r}{2}\Theta-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}+\frac{r}{2}\Theta\right\} dr \\
&= \int_{r=0}^{r=f_1(\Theta)} \left(1-\frac{r}{2}\Theta-\frac{r}{2}\right) dr + \int_{r=f_1(\Theta)}^{r=1} (1-\Theta)\, dr \\
&= \left[r-\frac{r^2\Theta}{4}-\frac{r^2}{4}\right]_0^{f_1(\Theta)} + [r-r\Theta]_{f_1(\Theta)}^{1} \\
&= \frac{2\Theta}{1+\Theta}-\frac{4\Theta^3}{4(1+\Theta)^2}-\frac{4\Theta^2}{4(1+\Theta)^2}+1-\Theta-\frac{2\Theta}{1+\Theta}+\frac{2\Theta^2}{1+\Theta} \\
&= 1-\Theta+\frac{1}{1+\Theta}\left[2\Theta-2\Theta+2\Theta^2\right]+\frac{1}{(1+\Theta)^2}\left[-\Theta^2-\Theta^3\right] \\
&= \frac{1}{1+\Theta}\left[(1-\Theta)(1+\Theta)+2\Theta^2\right]-\frac{1}{(1+\Theta)^2}\left[\Theta^2(1+\Theta)\right] \\
&= \frac{1}{1+\Theta}\left[(1-\Theta^2)+2\Theta^2-\Theta^2\right] \\
&= \frac{1}{1+\Theta}
\end{aligned}
$$

Im Intervall $\Theta \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ gilt hingegen die folgende Gleichungskette:

$$
\begin{aligned}
MDA1_{\Psi_k}(\Theta) &= \int_{r=0}^{r=1} DA_{\Psi_k}(\Theta, 1-r; 1-\Theta, 1-\frac{r}{2})dr \\
&= \int_{r=0}^{r=1} \max\{1-\Theta, 1-\frac{r}{2}\Theta-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}+\frac{r}{2}\Theta\} \\
&= \int_{r=0}^{r=f_1(\Theta)} \left(1-\frac{r}{2}\Theta-\frac{r}{2}\right) dr + \int_{r=f_1(\Theta)}^{r=f_2(\Theta)} (1-\Theta)\, dr + \int_{r=f_2(\Theta)}^{r=1} \frac{r}{2}+\frac{r}{2}\Theta dr \\
&= \left[r-\frac{r^2\Theta}{4}-\frac{r^2}{4}\right]_0^{f_1(\Theta)} + [r-r\Theta]_{f_1(\Theta)}^{f_2(\Theta)} + \left[\frac{r^2}{4}+\frac{r^2\Theta}{4}\right]_{f_2(\Theta)}^{1} \\
&= \frac{2\Theta}{1+\Theta}-\frac{4\Theta^3}{4(1+\Theta)^2}-\frac{4\Theta^2}{4(1+\Theta)^2}+\frac{2-2\Theta}{1+\Theta}-\frac{2\Theta-2\Theta^2}{1+\Theta} \\
&\quad -\frac{2\Theta}{1+\Theta}+\frac{2\Theta^2}{1+\Theta}+\frac{1}{4}+\frac{\Theta}{4}-\frac{(2-2\Theta)^2}{4(1+\Theta)^2}-\frac{(2-2\Theta)^2\Theta}{4(1+\Theta)^2} \\
&= \frac{1}{4}(1+\Theta)+\frac{1}{1+\Theta}\left[2\Theta+2-2\Theta-2\Theta+2\Theta^2-2\Theta+2\Theta^2\right] \\
&\quad +\frac{1}{(1+\Theta)^2}\left[-\Theta^2-\Theta^3-1+2\Theta-\Theta^2-\Theta+2\Theta^2-\Theta^3\right] \\
&= \frac{1}{4}(1+\Theta)+\frac{1}{1+\Theta}\left[2-4\Theta+4\Theta^2\right]+\frac{1}{(1+\Theta)^2}\left[-1+\Theta-2\Theta^3\right]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1+\Theta)^2}\left[\frac{1}{4}(1+\Theta)^3 + \left(2-4\Theta+4\Theta^2\right)(1+\Theta) - 1 + \Theta - 2\Theta^3\right] \\
&= \frac{1}{(1+\Theta)^2}\left[\frac{1}{4}(1+\Theta)(1+2\Theta+\Theta^2)\right. \\
&\quad \left. +(2+2\Theta-4\Theta-4\Theta^2+4\Theta^2+4\Theta^3) - 1 + \Theta - 2\Theta^3\right] \\
&= \frac{1}{(1+\Theta)^2}\left[\frac{1}{4}(1+2\Theta+\Theta^2+\Theta+2\Theta^2+\Theta^3) + 1 - \Theta + 2\Theta^3\right] \\
&= \frac{1}{(1+\Theta)^2}\left[\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\Theta + \frac{3}{4}\Theta^2 + \frac{9}{4}\Theta^3\right] \\
&= \frac{1}{4(1+\Theta)^2}\left[(1+\Theta)(9\Theta^2-6\Theta+5)\right] \\
&= \frac{9\Theta^2-6\Theta+5}{4(1+\Theta)}
\end{aligned}$$

Nun sei das Intervall $I2$ betrachtet. Für die Maximumverhältnisse gelten hier die Ungleichungsketten:

$$\begin{aligned}
\Theta &\leq 1 - \frac{r}{2}\Theta - \frac{r}{2} \\
\frac{r}{2}(1+\Theta) &\leq 1 - \Theta \\
r &\leq \frac{2-2\Theta}{1+\Theta} = f_2(\Theta)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\Theta &\leq \frac{r}{2}\Theta + \frac{r}{2} \\
\Theta &\leq \frac{r}{2}(1+\Theta) \\
f_1(\Theta) = \frac{2\Theta}{1+\Theta} &\leq r
\end{aligned}$$

Im Intervall $I2$ sind die Wertebereiche von $f_1(\Theta)$ und $f_2(\Theta)$ auf das Intervall $[0,1]$ beschränkt. Für das Verhältnis von f_1 und f_2 gilt ferner die bereits für das Intervall $I1$ untersuchte Ungleichungskette. Damit ergibt sich das Integral $MDA1_{\Psi_k}$ nach der folgenden Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
MDA1_{\Psi_k}(\Theta) &= \int_{r=0}^{r=1} DA_{\Psi_k}(\Theta, 1-r; 1-\Theta, 1-\frac{r}{2})dr \\
&= \int_{r=0}^{r=1} \max\{\Theta, 1-\frac{r}{2}\Theta-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}+\frac{r}{2}\Theta\} \\
&= \int_{r=0}^{r=f_2(\Theta)} \left(1-\frac{r}{2}\Theta-\frac{r}{2}\right) dr + \int_{r=f_2(\Theta)}^{r=f_1(\Theta)} \Theta\, dr + \int_{r=f_2(\Theta)}^{r=1} \left(\frac{r}{2}+\frac{r}{2}\Theta\right) dr \\
&= \left[r - \frac{r^2\Theta}{4} - \frac{r^2}{4}\right]_0^{f_2(\Theta)} + [r\Theta]_{f_2(\Theta)}^{f_1(\Theta)} + \left[\frac{r^2}{4}+\frac{r^2\Theta}{4}\right]_{f_1(\Theta)}^1 \\
&= \frac{2-2\Theta}{1+\Theta} - \frac{\Theta(2-2\Theta)^2}{4(1+\Theta)^2} - \frac{(2-2\Theta)^2}{4(1+\Theta)^2} + \frac{2\Theta^2}{1+\Theta} - \frac{2\Theta-2\Theta^2}{1+\Theta}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{4}+\frac{\Theta}{4}-\frac{4\Theta^2}{4(1+\Theta)^2}-\frac{4\Theta^3}{4(1+\Theta)^2} \\
= & \frac{1}{4}(1+\Theta)+\frac{1}{1+\Theta}\left[2-2\Theta+2\Theta^2-2\Theta+2\Theta^2\right] \\
& +\frac{1}{(1+\Theta)^2}\left[-\Theta+2\Theta^2-\Theta^3-1+2\Theta-\Theta^2-\Theta^2-\Theta^3\right] \\
= & \frac{1}{4}(1+\Theta)+\frac{1}{1+\Theta}\left[2-4\Theta+4\Theta^2\right]+\frac{1}{(1+\Theta)^2}\left[-1+\Theta-2\Theta^3\right] \\
= & \frac{1}{1+\Theta}\left[\frac{1}{4}(1+\Theta)^2+2-4\Theta+4\Theta^2\right] \\
& +\frac{1}{(1+\Theta)^2}\left[(1+\Theta)(-1+2\Theta-2\Theta^2)\right] \\
= & \frac{1}{1+\Theta}\left[\frac{1}{4}(1+2\Theta+\Theta^2)+2-4\Theta+4\Theta^2-1+2\Theta-2\Theta^2\right] \\
= & \frac{1}{1+\Theta}\left[\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\Theta+\frac{9}{4}\Theta^2\right] \\
= & \frac{5-6\Theta+9\Theta^2}{4(1+\Theta)}
\end{aligned}
$$

■

Für nicht–kompositionale Protokolle ergibt sich der mittlere durchführbare Anteil wie folgt:

Satz 4.4 (MDA1 für nicht–kompositionale Protokolle)
Für nicht–kompositionale Protokolle ist der mittlere durchführbare Anteil im heterogenen Fall für ein auf zwei Partitionen repliziertes Schreib–/Leseobjekt

$$
MDA1_{\Psi_k}(\Theta)=\begin{cases} 0\le\Theta\le\frac{1}{3} & : \quad 1-\frac{\Theta}{4} \\ \frac{1}{3}\le\Theta\le 1 & : \quad \frac{2+\Theta+\Theta^2}{2(1+\Theta)} \end{cases}
$$

Beweis: Im untersuchten Fall vereinfacht sich der durchführbare Anteil an Operationen wie folgt:

$$
\begin{aligned}
DA_{\Psi_n}(\Theta,1-r;1-\Theta,1-\frac{r}{2}) &= \max\Big\{\Theta+(1-\frac{r}{2})(1-\Theta),(1-r)\Theta+1-\Theta, \\
&\quad \Theta+(1-(1-\frac{r}{2}))(1-\Theta), \\
&\quad (1-(1-r))\Theta+(1-\Theta)\Big\} \\
&= \max\Big\{1-\frac{r}{2}+\frac{r}{2}\Theta,1-r\Theta, \\
&\quad \Theta+\frac{r}{2}-\frac{r}{2}\Theta,1-\Theta+r\Theta\Big\}
\end{aligned}
$$

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich aus der folgenden Ungleichungskette, die für $0\le\Theta<1$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\Theta+\frac{r}{2}-\frac{r}{2}\Theta &\le 1-\frac{r}{2}+\frac{r}{2}\Theta \\
r-r\Theta &\le 1-\Theta \\
r &\le 1
\end{aligned}
$$

Da zudem $\Theta + \frac{r}{2} - \frac{r}{2}\Theta \leq 1 - \frac{r}{2} + \frac{r}{2}\Theta$ für $\Theta = 1$ offensichtlich erfüllt ist, ist der durchführbare Anteil an Operationen:

$$DA_{\Psi_n}(\Theta, 1-r; 1-\Theta, 1-\frac{r}{2}) \quad = \max\left\{1 - \tfrac{r}{2} + \tfrac{r}{2}\Theta, 1 - r\Theta, 1 - \Theta + r\Theta\right\}$$

Zur Untersuchung der Größenverhältnisse sei die folgende Ungleichungskette betrachtet, die für $0 < r \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} 1 - r\Theta &\leq 1 - \frac{r}{2} + \frac{r}{2}\Theta \\ \frac{r}{2} &\leq \frac{3r}{2}\Theta \\ \frac{1}{3} &\leq \Theta \end{aligned}$$

Zudem ist $1 - r\Theta \leq 1 - \frac{r}{2} + \frac{r}{2}\Theta$ für $r = 0$ offensichtlich erfüllt. Demnach sie die Untersuchung in die beiden Intervalle $\Theta \in I1 := [0, \frac{1}{3}]$ und $\Theta \in I2 := [\frac{1}{3}, 1]$ aufgeteilt.

Für $\Theta \in I1$ sei zunächst die folgende Ungleichungskette betrachtet, die für $0 < \Theta$ gilt:

$$\begin{aligned} 1 - r\Theta &\leq 1 - \Theta + r\Theta \\ \Theta &\leq 2r\Theta \\ \frac{1}{2} &\leq r \end{aligned}$$

Auch für $\Theta = 0$ ist $1 - r\Theta \leq 1 - \Theta + r\Theta$ erfüllt. Damit ergibt sich für das Integral $MDA1_{\Psi_n}$ im Intervall $I1$ die folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned} MDA1_{\Psi_n}(\Theta) &= \int_{r=0}^{r=1} DA_{\Psi_n}(\Theta, 1-r; 1-\Theta, 1-\frac{r}{2})dr \\ &= \int_{r=0}^{r=1} \max\left\{1 - \frac{r}{2} + \frac{r}{2}\Theta, 1 - r\Theta, 1 - \Theta + r\Theta\right\} dr \\ &= \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}} (1 - r\Theta)\, dr + \int_{r=\frac{1}{2}}^{r=1} (1 - \Theta + r\Theta)\, dr \\ &= \left[r - \frac{r^2\Theta}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[r - r\Theta + \frac{r^2\Theta}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\Theta}{8} + 1 - \Theta + \frac{\Theta}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\Theta}{2} - \frac{\Theta}{8} \\ &= 1 - \frac{\Theta}{4} \end{aligned}$$

Für $\Theta \in I2$ sei nun die folgende Ungleichungskette betrachtet

$$\begin{aligned} 1 - \frac{r}{2} + \frac{r}{2}\Theta &\leq 1 - \Theta + r\Theta \\ \Theta &\leq \frac{r}{2}\Theta + \frac{r}{2} \\ \frac{2\Theta}{1+\Theta} &\leq r \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das Integral $MDA1_{\Psi_n}$ im Intervall $I2$ die folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
MDA1_{\Psi_n}(\Theta) &= \int_{r=0}^{r=1} DA_{\Psi_n}(\Theta, 1-r; 1-\Theta, 1-\frac{r}{2})dr \\
&= \int_{r=0}^{r=1} \max\left\{1-\frac{r}{2}+\frac{r}{2}\Theta, 1-r\Theta, 1-\Theta+r\Theta\right\} dr \\
&= \int_{r=0}^{r=\frac{2\Theta}{1+\Theta}} \left(1-\frac{r}{2}+\frac{r}{2}\Theta\right) dr + \int_{r=\frac{2\Theta}{1+\Theta}}^{1} 1-\Theta+r\Theta dr \\
&= \left[r-\frac{r^2}{4}+\frac{r^2\Theta}{4}\right]_0^{\frac{2\Theta}{1+\Theta}} + \left[r-r\Theta+\frac{r^2\Theta}{2}\right]_{\frac{2\Theta}{1+\Theta}}^{1} \\
&= \frac{2\Theta}{1+\Theta} - \frac{4\Theta^2}{4(1+\Theta)^2} + \frac{4\Theta^3}{4(1+\Theta)^2} + 1 - \Theta + \frac{\Theta}{2} - \frac{2\Theta}{1+\Theta} + \frac{2\Theta^2}{1+\Theta} \\
&\quad - \frac{4\Theta^3}{2(1+\Theta)^2} \\
&= 1-\frac{\Theta}{2}+\frac{1}{1+\Theta}\left[2\Theta-2\Theta+2\Theta^2\right]+\frac{1}{(1+\Theta)^2}\left[-\Theta^2+\Theta^3-2\Theta^3\right] \\
&= 1-\frac{\Theta}{2}+\frac{1}{1+\Theta}\left[2\Theta^2\right]-\frac{1}{(1+\Theta)^2}\left[\Theta^2(1+\Theta)\right] \\
&= 1-\frac{\Theta}{2}+\frac{\Theta^2}{1+\Theta} \\
&= \frac{2+2\Theta-\Theta-\Theta^2+2\Theta^2}{2(1+\Theta)} \\
&= \frac{2+\Theta+\Theta^2}{2(1+\Theta)}
\end{aligned}$$

■

Durch Vergleich der Werte kann insgesamt geschlossen werden, daß kompositionale Protokolle den nicht–kompositionalen deutlich unterlegen sind. Dieser Abstand wächst weiter beim Übergang vom homogenen zu heterogenen Anwendungscharakteristiken. Diese Tendenz ist auch durchaus plausibel, da kompositionale Protokolle mangels Wissen über die Nebenläufigkeitseigenschaften deutlich weniger Freiheitsgrade für Operationsfestlegungen lassen als nicht–kompositionale. Je heterogener aber eine Anwendungscharakteristik ist, desto besser kann dieser Freiheitsgrad ausgenutzt werden.

4.2 Untersuchung für mehrere Objekte

Als erste Erweiterung der Basisuntersuchung soll die Replikation zweier Objekte in zwei Partitionen untersucht werden. Im Fall von zwei in zwei Partitionen replizierten Schreib–/Leseobjekten entspricht der Anteil durchführbarer Operationen DA_{Ψ_k} für kompositionale Protokolle bzw. DA_{Ψ_n} für nicht kompositionale Protokolle nach Lemma 6.51 aus [Kot96]

$$DA_{\Psi_k}(\ldots) = \max\{\Theta_1+\Theta_2, \Theta_1+\Theta_4, \Theta_1+r_2\Theta_2+r_4\Theta_4,$$

$$\begin{aligned}
&\Theta_1 + (1-r_2)\Theta_2 + (1-r_4)\Theta_4, \Theta_3 + \Theta_2, \Theta_3 + \Theta_4, \Theta_3 + r_2\Theta_2 + r_4\Theta_4,\\
&\Theta_3 + (1-r_2)\Theta_2 + (1-r_4)\Theta_4, r_1\Theta_1 + r_3\Theta_3 + \Theta_2, r_1\Theta_1 + r_3\Theta_3 + \Theta_4,\\
&r_1\Theta_1 + r_3\Theta_3 + r_2\Theta_2 + r_4\Theta_4, r_1\Theta_1 + r_3\Theta_3 + (1-r_2)\Theta_2 + (1-r_4)\Theta_4,\\
&(1-r_1)\Theta_1 + (1-r_3)\Theta_3 + \Theta_2, (1-r_1)\Theta_1 + (1-r_3)\Theta_3 + \Theta_4,\\
&(1-r_1)\Theta_1 + (1-r_3)\Theta_3 + r_2\Theta_2 + r_4\Theta_4,\\
&(1-r_1)\Theta_1 + (1-r_3)\Theta_3 + (1-r_2)\Theta_2 + (1-r_4)\Theta_4\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
DA_{\Psi_n}(\ldots) \quad = \quad & \max\{\Theta_1 + \Theta_2 + r_3\Theta_3 + r_4\Theta_4, \Theta_1 + \Theta_2 + (1-r_3)\Theta_3 + (1-r_4)\Theta_4,\\
& r_1\Theta_1 + r_2\Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4, (1-r_1)\Theta_1 + (1-r_2)\Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4,\\
& \Theta_1 + (1-r_2)\Theta_2 + r_3\Theta_3 + \Theta_4, \Theta_1 + r_2\Theta_r + (1-r_3)\Theta_3 + \Theta_4,\\
& r_1\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + (1-r_4)\Theta_4, (1-r_1)\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + r_4\Theta_4\}
\end{aligned}$$

Für die Festlegung des mittleren Anteils sei wieder eine homogene Nutzung der Objekte unterstellt. Damit verbleiben als Parameter die jeweilige Nutzungsintensität der Partitionen und die relative Intensität der Nutzung der Objekte in den Partitionen. Um diese Parameter auf eine Kennzahl zu reduzieren, sei zunächst die *verbundene Nutzung* der Objekte unterstellt. Darunter ist zu verstehen, daß die Verteilung der Schreib– und Lesezugriffen auf allen Objekten identisch ist. Damit ergibt sich der *mittlere durchführbare Anteil im Fall verbundener Nutzung*, der als

$$MDAH2_{\Psi}(\Theta) = \int\limits_{r=0}^{r=1} DA_{\Psi}(\frac{\Theta}{2}, r; \frac{\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r)dr$$

definiert ist.

Für kompositionale Protokolle ergibt er sich zu:

Satz 4.5 (MDAH2 für kompositionale Protokolle)
Für kompositionale Protokoll ist der mittlere durchführbare Anteil im Fall verbundener Nutzung zweier auf zwei Partitionen replizierter Schreib–/Leseobjekten im Intervall $\Theta \in [0, \frac{1}{2}]$ *gleich* $MDHA2_{\Psi_k}(\Theta) = 1 - \Theta + \Theta^2$.

Beweis: Im verbundenen Fall vereinfacht sich der durchführbare Anteil $DA_{\Psi_k}(\Theta_1, r_1; \Theta_2, r_2; \Theta_3, r_3; \Theta_4, r_4)$ an Operationen zu $DA_{\Psi_k}(\frac{\Theta}{2}, r; \frac{\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
DA_{\Psi_k}(\ldots) \quad = \quad & \max\Big\{\frac{\Theta}{2} + \frac{\Theta}{2}, \frac{\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2}, \frac{\Theta}{2} + r\frac{\Theta}{2} + r\frac{1-\Theta}{2},\\
& \frac{\Theta}{2} + (1-r)\frac{\Theta}{2} + (1-r)\frac{1-\Theta}{2}, \frac{1-\Theta}{2} + \frac{\Theta}{2}, \frac{1-\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2},\\
& \frac{1-\Theta}{2} + r\frac{\Theta}{2} + r\frac{1-\Theta}{2}, \frac{1-\Theta}{2} + (1-r)\frac{\Theta}{2} + (1-r)\frac{1-\Theta}{2},\\
& r\frac{\Theta}{2} + r\frac{1-\Theta}{2} + \frac{\Theta}{2}, r\frac{\Theta}{2} + r\frac{1-\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2},\\
& r\frac{\Theta}{2} + r\frac{1-\Theta}{2} + r\frac{\Theta}{2} + r\frac{1-\Theta}{2}, r\frac{\Theta}{2} + r\frac{1-\Theta}{2} + (1-r)\frac{\Theta}{2} + (1-r)\frac{1-\Theta}{2},\\
& (1-r)\frac{\Theta}{2} + (1-r)\frac{1-\Theta}{2} + \frac{\Theta}{2}, (1-r)\frac{\Theta}{2} + (1-r)\frac{1-\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2},\\
& (1-r)\frac{\Theta}{2} + (1-r)\frac{1-\Theta}{2} + r\frac{\Theta}{2} + r\frac{1-\Theta}{2},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& (1-r)\frac{\Theta}{2}+(1-r)\frac{1-\Theta}{2}+(1-r)\frac{\Theta}{2}+(1-r)\frac{1-\Theta}{2}\Big\} \\
= \; & \max\Big\{\Theta,\frac{1}{2},\frac{\Theta}{2}+\frac{r}{2},\frac{\Theta}{2}+\frac{1}{2}-\frac{r}{2},\frac{1}{2},1-\Theta,\frac{1-\Theta}{2}+\frac{r}{2},\frac{1-\Theta}{2}+\frac{1}{2}-\frac{r}{2}, \\
& \frac{r}{2}+\frac{\Theta}{2},\frac{r}{2}+\frac{1-\Theta}{2},r,\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{r}{2}+\frac{\Theta}{2},\frac{1}{2}-\frac{r}{2}+\frac{1-\Theta}{2},\frac{1}{2},1-r\Big\} \\
= \; & \max\Big\{\Theta,1-\Theta,r,1-r,\frac{1}{2},\frac{\Theta+r}{2},\frac{\Theta+1-r}{2},\frac{1-\Theta+r}{2},\frac{2-\Theta-r}{2}\Big\}
\end{aligned}
$$

Im Intervall $\Theta \in [0,\frac{1}{2}]$ gilt $\Theta \le 1-\Theta$ und $\frac{1}{2} \le 1-\Theta$, so daß als Endform resultiert:

$$
DA_{\Psi_k}(\frac{\Theta}{2},r;\frac{\Theta}{2},r;\frac{1-\Theta}{2},r;\frac{1-\Theta}{2},r) = \max\Big\{1-\Theta,r,1-r,\frac{1-\Theta+r}{2},\frac{2-\Theta-r}{2}\Big\}
$$

Die Untersuchung sei nun in die drei Intervalle $r \in I_1 := [0,\Theta]$, $r \in I_2 := [\Theta, 1-\Theta]$ und $r \in I_3 := [1-\Theta, 1]$ unterteilt.

Im Intervall I_1 gilt zunächst offensichtlich $r \le 1-\Theta \le 1-r$, da sicherlich $r \le \frac{1}{2}$ gilt. Zur Bestimmung der weiteren Größenverhältnisse seien nun die beiden folgenden Ungleichungsketten betrachtet:

$$
\begin{aligned}
\frac{1-\Theta+r}{2} &\le 1-r \\
1-\Theta+r &\le 2-2r \\
r &\le \frac{1+\Theta}{3}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\frac{2-\Theta-r}{2} &\le 1-r \\
2-\Theta-r &\le 2-2r \\
r &\le \Theta
\end{aligned}
$$

Die Gültigkeit von $r \le \Theta$ ist in I_1 offensichtlich. Zur weiteren Untersuchung der ersten Kette betrachte man die folgende Ungleichungskette:

$$
\begin{aligned}
\Theta &\le \frac{1+\Theta}{3} \\
3\Theta &\le 1+\Theta \\
\Theta &\le \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Dies ist genau die Voraussetzung an Θ, so daß im Intervall I_1 die Gleichung $DA_{\Psi_k}(\frac{\Theta}{2},r;\frac{\Theta}{2},r;\frac{1-\Theta}{2},r;\frac{1-\Theta}{2},r) = 1-r$ gilt.

Im Intervall I_2 gilt zunächst sowohl $r \le 1-\Theta$ als auch $1-r \le 1-\Theta$. Für die weiteren Größenverhältnisse seien die beiden folgenden Ungleichungsketten betrachtet:

$$
\begin{aligned}
\frac{1-\Theta+r}{2} &\le 1-\Theta \\
1-\Theta+r &\le 2-2\Theta \\
r &\le 1-\Theta
\end{aligned}
$$

und

$$\begin{aligned}\frac{2-\Theta-r}{2} &\leq 1-\Theta\\ 2-\Theta-r &\leq 2-2\Theta\\ \Theta &\leq r\end{aligned}$$

Dies sind aber genau die für I_2 konstituierenden Bedingungen, so daß in I_2 die Gleichung $DA_{\Psi_k}(\frac{\Theta}{2}, r; \frac{\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r) = 1-\Theta$ gilt.

Im Intervall I_3 gilt zunächst offensichtlich $1-r \leq 1-\Theta \leq r$. Für die weiteren Größenverhältnisse seinen die beiden folgenden Ungleichungsketten betrachtet:

$$\begin{aligned}\frac{1-\Theta+r}{2} &\leq r\\ 1-\Theta+r &\leq 2r\\ 1-\Theta &\leq r\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{2-\Theta-r}{2} &\leq r\\ 2-\Theta-r &\leq 2r\\ \frac{2-\Theta}{3} &\leq r\end{aligned}$$

Die Gültigkeit von $1-\Theta \leq r$ ist in I_3 offensichtlich. Zur weiteren Untersuchung der zweiten Kette betrachte man die Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}\frac{2-\Theta}{3} &\leq 1-\Theta\\ 2-\Theta &\leq 3-3\Theta\\ \Theta &\leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Dies ist wiederum genau die Voraussetzung an Θ, so daß im Intervall I_3 die Gleichung $DA_{\Psi_k}(\frac{\Theta}{2}, r; \frac{\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r) = r$ gilt.

Insgesamt erhält man für das Integral $MDAH2_{\Psi_k}(\Theta)$:

$$\begin{aligned}MDAH2_{\Psi_k}(\Theta) &= \int\limits_{r=0}^{r=1} DA_{\Psi}(\frac{\Theta}{2}, r; \frac{\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r)dr\\ &= \int\limits_{r=0}^{r=\Theta} (1-r)\,dr + \int\limits_{r=\Theta}^{r=1-\Theta} (1-\Theta)\,dr + \int\limits_{r=1-\Theta}^{r=1} r\,dr\end{aligned}$$

Dies ist genau die Formel für $MDHA_{\Psi_k}(\Theta)$ aus Satz 4.1, woraus unmittelbar die Behauptung folgt. ■

Für nicht–kompositionale Protokolle ergibt sich die Berechnung des mittleren durchführbaren Anteils wie folgt:

Satz 4.6 (MDAH2 für nicht–kompositionale Protokolle)
Für nicht–kompositionale Protokoll ist der mittlere durchführbare Anteil im Fall verbundener Nutzung zweier in zwei Partitionen replizierter Schreib–/Leseobjekten im Intervall $\Theta \in [0, \frac{1}{2}]$ *gleich* $MDHA2_{\Psi_n}(\Theta) = 1 - \frac{1}{4}\Theta$.

Beweis: Im verbundenen Fall vereinfacht sich der durchführbare Anteil $DA_{\Psi_n}(\Theta_1, r_1; \Theta_2, r_2; \Theta_3, r_3; \Theta_4, r_4)$ an Operationen zu $DA_{\Psi_n}(\frac{\Theta}{2}, r; \frac{\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
DA_{\Psi_n}(\ldots) \quad = \quad & \max\Big\{\frac{\Theta}{2} + r\frac{1-\Theta}{2} + \frac{\Theta}{2} + r\frac{1-\Theta}{2}, \\
& \frac{\Theta}{2} + (1-r)\frac{1-\Theta}{2} + \frac{\Theta}{2} + (1-r)\frac{1-\Theta}{2}, r\frac{\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2} + r\frac{\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2}, \\
& (1-r)\frac{\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2} + (1-r)\frac{\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2}, \\
& \frac{\Theta}{2} + r\frac{1-\Theta}{2} + (1-r)\frac{\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2}, \frac{\Theta}{2} + (1-r)\frac{1-\Theta}{2} + r\frac{\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2}, \\
& r\frac{\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2} + \frac{\Theta}{2} + (1-r)\frac{1-\Theta}{2}, (1-r)\frac{\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2} + \frac{\Theta}{2} + r\frac{1-\Theta}{2}\Big\} \\
= \quad & \max\{\Theta + r(1-\Theta), \Theta + (1-r)(1-\Theta), r\Theta + 1 - \Theta, \\
& (1-r)\Theta + 1 - \Theta, \frac{1}{2} + \frac{\Theta}{2} - r\Theta + \frac{r}{2}, 1 - \frac{\Theta}{2} - \frac{r}{2} + r\Theta, \\
& 1 - \frac{\Theta}{2} - \frac{r}{2} + r\Theta, \frac{1}{2} + \frac{\Theta}{2} - r\Theta + \frac{r}{2}\Big\}
\end{aligned}$$

Die weitere Vereinfachung folgt aus den beiden folgenden Ungleichungsketten.

Zunächst gilt für $0 \leq \Theta < \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\Theta + r(1-\Theta) &\leq r\Theta + 1 - \Theta \\
r(1-2\Theta) &\leq 1 - 2\Theta \\
r &\leq 1
\end{aligned}$$

Diese Kette wird für $\Theta = \frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{2} + r(1 - \frac{1}{2}) = \frac{r}{2} + \frac{1}{2} \leq \frac{r}{2} + \frac{1}{2} = \frac{r}{2} + 1 - \frac{1}{2}$ fortgesetzt, so daß insgesamt für alle $\Theta \in [0, \frac{1}{2}]$ das Prädikat $\Theta + r(1-\Theta) \leq r\Theta + 1 - \Theta$ gilt.

Ferner gilt für $0 < r \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\Theta + (1-r)(1-\Theta) &\leq (1-r)\Theta + 1 - \Theta \\
1 - r + r\Theta &\leq 1 - r\Theta \\
2r\Theta &\leq r \\
\Theta &\leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Diese Kette wird für $r = 0$ durch $\Theta + (1-0)(1-\Theta) = 1 \leq 1 = (1-0)\Theta + 1 - \Theta$, so daß für alle $\Theta \in [0, \frac{1}{2}]$ das Prädikat $\Theta + (1-r)(1-\Theta) \leq (1-r)\Theta + 1 - \Theta$ gilt.

Damit vereinfacht sich der durchführbare Anteil zu:

$$\begin{aligned}
DA_{\Psi_n}(\ldots) \quad = \quad & \max\Big\{r\Theta + 1 - \Theta, (1-r)\Theta + 1 - \Theta, \frac{1 + \Theta + r - 2r\Theta}{2}, \\
& \frac{2 - \Theta - r + 2r\Theta}{2}\Big\}
\end{aligned}$$

Nun seien die beiden Intervalle $r \in I_1 := [0, \frac{1}{2}]$ und $r \in I_2 := [\frac{1}{2}, 1]$ getrennt betrachtet. Die Unterteilung in die beiden Intervalle ergibt sich aus den beiden folgenden Ungleichungsketten.

Sei zunächst $0 < \Theta \leq \frac{1}{2}$, so gilt:

$$\begin{aligned} (1-r)\Theta + 1 - \Theta &\leq r\Theta + 1 - \Theta \\ \Theta &\leq 2r\Theta \\ \frac{1}{2} &\leq r \end{aligned}$$

Dies kann für $\Theta = 0$ durch die Ungleichung $(1-r) * 0 + 1 - \Theta = 1 - \Theta \leq 1 - \Theta = r * 0 + 1 - \Theta$ auf das ganze Intervall $0 \leq \Theta \leq \frac{1}{2}$ fortgesetzt werden.

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \frac{1 + \Theta + r - 2r\Theta}{2} &\leq \frac{2 - \Theta - r + 2r\Theta}{2} \\ 2r - 4r\Theta &\leq 1 - 2\Theta \\ r &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit gilt im Intervall I_1 die Gleichung $DA_{\Psi_n}(\frac{\Theta}{2}, r; \frac{\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r) = \max\{(1-r)\Theta + 1 - \Theta, \frac{2-\Theta-r+2r\Theta}{2}\}$ und im Intervall I_2 die Gleichung $DA_{\Psi_n}(\frac{\Theta}{2}, r; \frac{\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r) = \max\{r\Theta + 1 - \Theta, \frac{1+\Theta+r-2r\Theta}{2}\}$.

Sei nun im Intervall I_1 die folgende Ungleichungskette betrachtet

$$\begin{aligned} \frac{2 - \Theta - r + 2r\Theta}{2} &\leq (1-r)\Theta + 1 - \Theta \\ 2 - \Theta - r + 2r\Theta &\leq 2\Theta - 2r\Theta + 2 - 2\Theta \\ r(4\Theta - 1) &\leq \Theta \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für $0 \leq \Theta \leq \frac{1}{4}$ offensichtlich erfüllt, da $r(4\Theta - 1) \leq 0 \leq \Theta$ gilt. Für $\frac{1}{4} \leq \Theta \leq \frac{1}{2}$ folgt sie aus $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ und der folgenden Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \frac{\Theta}{4\Theta - 1} \\ 4\Theta - 1 &\leq 2\Theta \\ \Theta &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Insgesamt gilt damit im Intervall I_1 die Gleichung $DA_{\Psi_n}(\frac{\Theta}{2}, r; \frac{\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r) = (1-r)\Theta + 1 - \Theta = 1 - r\Theta$.

Im Intervall I_2 sei nun die folgende Ungleichungskette betrachtet

$$\begin{aligned} \frac{1 + \Theta + r - 2r\Theta}{2} &\leq r\Theta + 1 - \Theta \\ 1 + \Theta + r - 2r\Theta &\leq 2r\Theta + 2 - 2\Theta \\ r(1 - 4\Theta) &\leq 1 - 3\Theta \end{aligned}$$

Ihre Gültigkeit sei nun getrennt für die Intervalle $0 \leq \Theta < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} \leq \Theta \leq \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{3} \leq \Theta < \frac{1}{2}$ untersucht.

Zunächst gilt für $0 \leq \Theta < \frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} r(1-4\Theta) &\leq 1-3\Theta \\ r &\leq \frac{1-3\Theta}{1-4\Theta} \end{aligned}$$

Die Gültigkeit dieser Ungleichung folgt im Intervall $r \in I_2$ aus der folgenden Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{1-3\Theta}{1-4\Theta} \\ 1-4\Theta &\leq 1-3\Theta \\ 0 &\leq \Theta \end{aligned}$$

Für $\frac{1}{4} \leq \Theta \leq \frac{1}{3}$ folgt die Gültigkeit unmittelbar aus $r(1-4\Theta) \leq 0 \leq 1-3\Theta$.

Schließlich gilt in $\frac{1}{3} \leq \Theta \leq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} r(1-4\Theta) &\leq 1-3\Theta \\ r &\geq \frac{1-3\Theta}{1-4\Theta} \end{aligned}$$

Die Gültigkeit dieser Ungleichung folgt aus:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\geq \frac{1-3\Theta}{1-4\Theta} \\ 1-4\Theta &\leq 2-6\Theta \\ \Theta &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich damit im Intervall I_2 die Gleichung $DA_{\Psi_n}(\frac{\Theta}{2}, r; \frac{\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r) = r\Theta + 1 - \Theta$.

Damit ergibt sich das Integral $MDHA2_{\Psi_n}(\Theta)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} MDAH2_{\Psi_n}(\Theta) &= \int_{r=0}^{r=1} DA_{\Psi}(\frac{\Theta}{2}, r; \frac{\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, r) dr \\ &= \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}} (1 - r\Theta)\, dr + \int_{r=\frac{1}{2}}^{r=1} (r\Theta + 1 - \Theta)\, dr \end{aligned}$$

Dies ist genau die Formel für $MDHA_{\Psi_n}(\Theta)$ aus Satz 4.2, woraus unmittelbar die Behauptung folgt. ■

Beide Werte sind mit den Resultaten aus Unterkapitel 4.1 identisch. Dies war für kompositionale Protokolle auch zu erwarten, da das Verhalten dieser Protokolle eben von der Gesamtobjektpopulation unabhängig ist. Bei nicht–kompositionalen Protokollen ergibt sich die Erklärung daraus, daß die Operationsfestlegung, die für ein Objekt bei einer bestimmten Zugriffsverteilung optimal ist, auch für zwei Objekte optimal bleibt und im Fall der verbundenen Nutzung auch zulässig bleibt.

Dieses Argument greift nicht mehr, wenn die Nutzung der beiden Objekte nicht verbunden ist. Nach dem selben Argument wie oben bleibt zwar die Leistungsfähigkeit der kompositionalen

Protokolle gleich, die der nicht–kompositionalen kann sich jedoch ändern. Um dies zu untersuchen sei der Extremfall untersucht, daß die Nutzungscharakteristik der beiden Objekte gerade gegenläufig ist. Dies führt zu der Kennzahl des *mittleren Anteils im Fall unabhängiger Nutzung*, der als

$$MDAH3_\Psi(\Theta) = \int\limits_{r=0}^{r=1} DA_\Psi(\frac{\Theta}{2}, r; \frac{\Theta}{2}, 1-r; \frac{1-\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, 1-r)dr$$

definiert ist. Diese muß nur für nicht–kompositionale Protokolle berechnet werden.

Satz 4.7 (MDAH3 für nicht–kompositionale Protokolle)
Für nicht–kompositionale Protokoll ist der mittlere durchführbare Anteil bei unabhängiger Nutzung zweier in zwei Partitionen replizierter Schreib–/Leseobjekten im Intervall $\Theta \in [0, \frac{1}{2}]$ *gleich* $MDHA3_{\Psi_n}(\Theta) = 1 - \frac{\Theta}{2} + \frac{\Theta^2}{2}$.

Beweis: Im untersuchten Fall vereinfacht sich der durchführbare Anteil $DA_{\Psi_n}(\Theta_1, r_1; \Theta_2, r_2; \Theta_3, r_3; \Theta_4, r_4)$ an Operationen zu $DA_{\Psi_n}(\frac{\Theta}{2}, r; \frac{\Theta}{2}, 1-r; \frac{1-\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, 1-r)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
DA_{\Psi_n}(\ldots) &= \max\Big\{\frac{\Theta}{2} + \frac{\Theta}{2} + r\frac{1-\Theta}{2} + (1-r)\frac{1-\Theta}{2}, \\
&\quad \frac{\Theta}{2} + \frac{\Theta}{2} + (1-r)\frac{1-\Theta}{2} + r\frac{1-\Theta}{2}, r\frac{\Theta}{2} + (1-r)\frac{\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2}, \\
&\quad (1-r)\frac{\Theta}{2} + r\frac{\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2}, \\
&\quad \frac{\Theta}{2} + r\frac{\Theta}{2} + r\frac{1-\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2}, \frac{\Theta}{2} + (1-r)\frac{\Theta}{2} + (1-r)\frac{1-\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2}, \\
&\quad r\frac{\Theta}{2} + \frac{\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2} + r\frac{1-\Theta}{2}, (1-r)\frac{\Theta}{2} + \frac{\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{2} + (1-r)\frac{1-\Theta}{2}\Big\} \\
&= \max\Big\{\Theta + \frac{1-\Theta}{2}, \Theta + \frac{1-\Theta}{2}, \frac{\Theta}{2} + 1 - \Theta, \frac{\Theta}{2} + 1 - \Theta, \frac{1}{2} + \frac{r}{2}, 1 - \frac{r}{2}, \\
&\quad \frac{1}{2} + \frac{r}{2}, 1 - \frac{r}{2}\Big\} \\
&= \max\Big\{\frac{1+\Theta}{2}, \frac{2-\Theta}{2}, \frac{1+r}{2}, \frac{2-r}{2}\Big\} \\
&= \max\Big\{\frac{2-\Theta}{2}, \frac{1+r}{2}, \frac{2-r}{2}\Big\}
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus der Voraussetzung $0 \leq \Theta \leq \frac{1}{2}$.

Zur Bestimmung der Größenverhältnisse seien nun die beiden folgenden Ungleichungsketten betrachtet:

$$\begin{aligned}
\frac{2-\Theta}{2} &\leq \frac{1+r}{2} \\
2-\Theta &\leq 1+r \\
1-\Theta &\leq r
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{2-\Theta}{2} &\leq \frac{2-r}{2} \\
2-\Theta &\leq 2-r \\
r &\leq \Theta
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich das Integral $MDHA3_{\Psi_n}(\Theta)$ wie folgt:

$$
\begin{aligned}
MDAH3_{\Psi_n}(\Theta) &= \int_{r=0}^{r=1} DA_{\Psi}(\frac{\Theta}{2}, r; \frac{\Theta}{2}, 1-r; \frac{1-\Theta}{2}, r; \frac{1-\Theta}{2}, 1-r) dr \\
&= \int_{r=0}^{r=1} \max\left\{\frac{2-\Theta}{2}, \frac{1+r}{2}, \frac{2-r}{2}\right\} dr \\
&= \int_{r=0}^{r=\Theta} \frac{2-r}{2} dr + \int_{r=\Theta}^{r=1-\Theta} \frac{2-\Theta}{2} dr + \int_{r=1-\Theta}^{r=1} \frac{1+r}{2} dr \\
&= \left[r - \frac{r^2}{4}\right]_0^{\Theta} + \left[r - \frac{r\Theta}{2}\right]_{\Theta}^{1-\Theta} + \left[\frac{r}{2} + \frac{r^2}{4}\right]_{1-\Theta}^{1} \\
&= \Theta - \frac{\Theta^2}{4} + 1 - \Theta - \frac{\Theta}{2} + \frac{\Theta^2}{2} - \Theta + \frac{\Theta^2}{2} \\
&\quad + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\Theta}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\Theta}{2} - \frac{\Theta^2}{4} \\
&= 1 - \frac{\Theta}{2} + \frac{\Theta^2}{2}
\end{aligned}
$$

■

Damit kann festgehalten werden, daß der Vorteil nicht–kompositionaler Protokolle mit der Unabhängigkeit der Nutzung mehrerer Objekte zurückgeht. Auch dies ist unmittelbar plausibel, kennen doch kompositionale Protokolle die Gesamtobjektpopulation nicht und müssen folglich ihre Entscheidungen auf worst–case–Annahmen über die Zugriffe auf die Objekte der Gesamtpopulation treffen. Nicht–kompositionale Protokolle hingegen ziehen ihre Überlegenheit gerade aus der Nutzung dieser Kenntnis. Nimmt nun die Objektpopulation zu und kommt es zugleich zu einer ungünstigen Zugriffsverteilung, so kann aus der Kenntnis weniger Nutzen gezogen werden. Salopp formuliert repräsentieren demnach kompositionale Protokolle den Grenzfall nicht–kompositionaler Protokolle für das Anwachsen der Objektpopulation gegen unendlich.

4.3 Untersuchung für mehrere Partitionen

Auch die Untersuchung des Verhaltens von Protokollen bei einer Zunahme der Partitionsanzahl sei auf den Fall homogener Anwendungscharakteristiken beschränkt, da dabei der Vorteil der nicht–kompositionalen Protokolle am geringsten ist. Um die Berechnung nicht unnötig zu komplizieren, weise ferner jede Partition eine identische Nutzungsintensität auf. In diesem Fall ist der Anteil durchführbarer Operationen DA_{Ψ_k} für kompositionale Protokolle bzw. DA_{Ψ_n} für nicht–kompositionale Protokolle nach Lemma 6.53 aus [Kot96]:

$$
\begin{aligned}
DA_{\Psi_k}(\frac{1}{n}, r; \frac{1}{n}, r; \ldots; \frac{1}{n}, r) &= \max\left\{\frac{1}{n}, r, 1-r\right\} \\
DA_{\Psi_n}(\frac{1}{n}, r; \frac{1}{n}, r; \ldots; \frac{1}{n}, r) &= \max\left\{\frac{1+(n-1)r}{n}, \frac{1+(n-1)(1-r)}{n}\right\}
\end{aligned}
$$

Durch die bereits gewohnte Mittelung über die Verteilung der jeweiligen Operationen ergibt sich die Kennzahl des mittleren durchführbaren Anteils im homogenen Fall bei identischer Nutzung von n Partitionen zu

$$MDAHn_{\Psi}(n) = \int\limits_{r=0}^{r=1} DA_{\Psi}(\frac{1}{n}, r; \frac{1}{n}, r; \ldots; \frac{1}{n}, r)$$

Für kompositionale Protokolle ergibt er sich zu:

Satz 4.8 (MDAHn für kompositionale Protokolle)
Für kompositionale Protokolle ist der mittlere Anteil durchführbarer Operationen im homogenen Fall für ein auf n Partitionen mit identischer Nutzungsintensität repliziertes Schreib–/Leseobjekt $MDHAn_{\Psi_k}(n) = \frac{3}{4}$.

Beweis: Zunächst sei die folgende Ungleichungskette betrachtet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &\leq 1 - r \\ r &\leq \frac{n-1}{n} \end{aligned}$$

Deren Gültigkeit folgt für $n \geq 2$ und $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ aus der Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \frac{n-1}{n} \\ n &\leq 2n - 2 \\ 2 &\leq n \end{aligned}$$

Nun sei die folgende Ungleichung betrachtet:

$$\frac{1}{n} \leq r$$

Deren Gültigkeit folgt für $n \geq 2$ und $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$ aus der Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &\leq \frac{1}{2} \\ 2 &\leq n \end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Integral $MDHAn_{\Psi_k}(n)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} MDHAn_{\Psi_k}(n) &= \int\limits_{r=0}^{r=1} DA_{\Psi_k}(\frac{1}{n}, r; \frac{1}{n}, r; \ldots; \frac{1}{n}, r) dr \\ &= \int\limits_{r=0}^{r=1} \max\left\{\frac{1}{n}, r, 1 - r\right\} dr \\ &= \int\limits_{r=0}^{r=\frac{1}{2}} (1 - r) dr + \int\limits_{r=\frac{1}{2}}^{r=1} r dr \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[r - \frac{r^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

■

Für nicht–kompositionale Protokolle ergibt sich der mittlere Anteil zu:

Satz 4.9 (MDAHn für nicht–kompositionale Protokolle)
Für nicht–kompositionale Protokolle ist der mittlere Anteil durchführbarer Operationen im homogenen Fall für ein auf n Partitionen mit identischer Nutzungsintensität repliziertes Schreib–/Leseobjekt $MDHAn_{\Psi_n}(n) = \frac{1+3n}{4n}$.

Beweis: Zunächst sei die folgende Ungleichungskette betrachtet:

$$
\begin{aligned}
\frac{1+(n-1)r}{n} &\leq \frac{1+(n-1)(1-r)}{n} \\
1 + r(n-1) &\leq 1 + (1-r)(n-1) \\
r &\leq 1 - r \\
r &\leq \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich das Integral $MDHAn_{\Psi_n}(n)$ wie folgt:

$$
\begin{aligned}
MDHAn_{\Psi_n}(n) &= \int_{r=0}^{r=1} DA_{\Psi_k}(\frac{1}{n}, r; \frac{1}{n}, r; \ldots; \frac{1}{n}, r) dr \\
&= \int_{r=0}^{r=1} \max\left\{\frac{1+(n-1)r}{n}, \frac{1+(n-1)(1-r)}{n}\right\} dr \\
&= \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}} \frac{1+(n-1)(1-r)}{n} dr + \int_{r=\frac{1}{2}}^{r=1} \frac{1+(n-1)r}{n} dr \\
&= \int_{r=0}^{r=1} \frac{1}{n} dr + \frac{n-1}{n} \left(\int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}} (1-r) dr + \int_{r=\frac{1}{2}} r\, dr \right) \\
&= \left[\frac{r}{n}\right]_0^1 + \frac{n-1}{n} \left(\left[r - \frac{r^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 \right) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{3n-3}{4n} \\
&= \frac{1+3n}{4n}
\end{aligned}
$$

■

Insgesamt kann festgehalten werden, daß der Vorteil nicht–kompositionaler Protokolle mit der Zunahme der Partitionsanzahl sinkt. Auch hier liegt die Erklärung wieder darin, daß die zusätzlichen Freiheitsgrade nicht–kompositionaler Protokolle immer weniger genutzt werden können, je mehr externe Festlegungen greifen. Im Fall der Zunahme der Partitionsanzahl ist aber gerade eine Menge an Zugriffswünschen auf einer zunehmenden Anzahl an Partitionen festgelegt.

4.4 Untersuchung für ein explizites Beispielobjekt

Abschließend sei ein Vergleich der Leistungsfähigkeit der nach den Prinzipien aus [Kot96] aufgebauten semantikbasierten Protokollen mit kompositionalen Protokollen für ein Beispielobjekt durchgeführt. Als Beispielobjekt sei ein einfacher Zähler gewählt, der eine Inkrementierungsoperation zum Erhöhen des Zählerstandes und eine Leseoperation zum Abfragen des Zählerstandes habe. Protokolle, die nur Schreib–/Leseoperationen unterscheiden, können das Lesen des Zählers als Leseoperation behandeln, müssen aber das Erhöhen als eine Kombination aus einer Lese– und einer Schreiboperation werten, da zunächst der Zählerstand in Erfahrung gebracht werden muß, bevor der neue erhöhte Zählerstand geschrieben werden kann. Für ein Objekt dieses Typs entspricht der Anteil durchführbarer Operationen DA_{Ψ_k} für kompositionale Protokolle für Schreib–/Leseobjekte bei der Replikation eines Objekts in 2 Partitionen nach Lemma 6.49 aus [Kot96]:

$$DA_{\Psi_k}(\Theta, r_1; 1-\Theta, r_2) = \max\{\Theta, 1-\Theta, r_1\Theta + r_2(1-\Theta)\}$$

Nach dem gleichen Lemma stimmt $DA_{\Psi_s}()$ mit DA_{Ψ_n} aus Kapitel 4.1 überein. Folglich können für die semantikbasierten Protokolle die dortigen Ergebnisse übernommen werden, sofern nur der mittlere durchführbare Anteil identisch definiert wird. Deshalb sei der als

$$MDAH_{\Psi}(\Theta) = \int_{r=0}^{r=1} DA_{\Psi}(\Theta, r; 1-\Theta, r)dr$$

definierte mittlere durchführbare Anteil im homogenen Fall berechnet. Dazu reicht es aus Symmetriegründen aus, das Intervall $0 \leq \Theta \leq \frac{1}{2}$ zu betrachten.

Satz 4.10 (MDAH für kompositionale Protokolle bei $Typ(x) = SCt$)
Für kompositionale Protokoll ist der mittlere durchführbare Anteil im homogenen Fall im Intervall $\Theta \in [0, \frac{1}{2}]$ für ein auf zwei Partitionen repliziertes Zählerobjekt $MDHA_{\Psi_k}(\Theta) = 1-\Theta+\frac{1}{2}\Theta^2$.

Beweis: Im homogenen Fall vereinfacht sich der durchführbare Anteil an Operationen wie folgt:

$$\begin{aligned} DA_{\Psi_k}(\Theta, r; 1-\Theta, r) &= \max\{\Theta, 1-\Theta, r\Theta + r(1-\Theta)\} \\ &= \max\{1-\Theta, r\} \end{aligned}$$

Woraus sich für das Integral $MDAH_{\Psi_k}$ die folgende Gleichungskette ergibt:

$$MDHA_{\Psi_k}(\Theta) = \int_{r=0}^{r=1} DA_{\Psi_k}(\Theta, r; 1-\Theta, r)dr$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{r=0}^{r=1} \max\{1-\Theta, r,\} dr \\
&= \int_{r=0}^{r=1-\Theta} (1-\Theta) dr + \int_{r=1-\Theta}^{r=1} r dr \\
&= [r - r\Theta]_0^{1-\Theta} + \left[\frac{r^2}{2}\right]_{1-\Theta}^{1} \\
&= 1 - \Theta - \Theta + \Theta^2 + \frac{1}{2} - \frac{(1-\Theta)^2}{2} \\
&= \frac{3}{2} - 2\Theta + \Theta^2 - \frac{1}{2} + \Theta - \frac{1}{2}\Theta^2 \\
&= 1 - \Theta + \frac{1}{2}\Theta^2
\end{aligned}
$$

■

Damit ergibt sich als Ergebnis, daß die Berücksichtigung der Objektsemantik mit den Mitteln aus [Kot96] eine Steigerung der Leistungsfähigkeit mit sich bringt, die über die mit reinen nicht–kompositionalen Protokollen erzielbare hinausgeht.

5 Zusammenfassung

In diesem Bericht wurde ein analytisches Modell zur Bewertung von Protokollen für abgekoppelte Operationen vorgestellt. Nachdem die Unzulänglichkeit bekannter analytischer Modelle zur Bewertung von Protokollen für abgekoppelte Operationen herausgearbeitet worden ist wurde kurz das in [Kot96] entwickelte Modell vorgestellt. Der Schwerpunkt des Berichts lag auf der Anwendung des Modells auf ausgewählte Klassen von Replikationsprotokollen. Dabei stellte sich heraus, daß nicht–kompositionale Protokolle kompositionalen Protokollen generell überlegen sind. Dieser Vorteil steigt mit der Heterogenität der Zugriffscharakteristiken von Anwendungen, sinkt mit wachsender Objektanzahl und mit dem Anwachsen der Partitionsanzahl. Da aber im Mobile Computing meist wenige Objekte auf wenigen Partitionen gleichzeitig repliziert sind, sind nicht–kompositionale Protokolle für dieses Einsatzgebiet sehr gut geeignet. Eine weitere Zunahme der Leistungsfähigkeit kann noch erreicht werden, wenn zusätzlich die Semantik von Objekten durch die generischen Methoden aus [Kot96] berücksichtigt wird. Auch dies wurde an Hand eines Beispielobjekts in dem Modell nachgewiesen.

Literatur

[AK93] R. Alonso und H. Korth. Database System Issues in Nomadic Computing. *SIGMOD Record* **22**(2), Juni 1993, Seite 388–392.

[BG84] P. A. Bernstein und N. Goodman. An Algorithm for Concurrency Control and Recovery in Replicated Distributed Databases. *ACM Trans. on Database Syst.* **9**(4), Dezember 1984, Seite 596–615.

[BHG87] P. A. Bernstein, V. Hadzilacos und N. Goodman. *Concurrency Control and Recovery in Database Systems.* Addison–Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts. 1987.

[Bor91] U. M. Borghoff. Fehlertoleranz in verteilten Dateisystemen: Eine Übersicht über den heutigen Entwicklungsstand bei den Votierverfahren. *Informatik–Spektrum* **14**(1), 1991, Seite 15–27.

[Cox95] D. C. Cox. Wireless Personal Communications: What is it? *IEEE Personal Communications* **2**(2), April 1995, Seite 20–35.

[CP90] L.-F. Cabrera und J.-F. Pâris (Hrsg.). *Proc. of the Workshop on the Management of Replicated Data*, Los Alamitos, California, November 1990. IEEE Computer Society Press.

[DH95] N. Diehl und A. Held. *Mobile Computing: Systeme, Kommunikation, Anwendungen.* International Thomson Publishing, Bonn. 1995.

[Die95] N. Diehl. Systemintegration bei verteilten, mobilen Rechnersystemen — Mobile Computing. *HMD — Theorie und Praxis der Wirtschaftsinformatik* **32**(Heft 184), Juli 1995, Seite 68–86.

[HSW94] Y. Huang, P. Sistla und O. Wolfson. Data Replication for Mobile Computing. In *Proc. of the 1994 ACM SIGMOD Int. Conf. on Management of Data*, Minneapolis, Minnesota, Juni 1994. Seite 13–24.

[Hut95] R. Huttenloher. Telekommunikation im nächsten Jahrtausend: Auf Wachstum getrimmt. *Gateway*, Dezember 1995, Seite 32–34.

[Hut96] R. Huttenloher. 10 Millionen Mobiltelefonteilnehmer im Jahr 2000. *Gateway*, Januar 1996, Seite 18.

[IB93] T. Imielinski und B. R. Badrinath. Data Management for Mobile Computing. *SIGMOD Record* **22**(1), März 1993, Seite 34–39.

[Jal94] P. Jalote. *Fault Tolerance in Distributed Systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 1994.

[Kot95] D. A. Kottmann. Datenmanagement im Mobile Computing. *HMD — Theorie und Praxis der Wirtschaftsinformatik* **32**(Heft 184), Juli 1995, Seite 50–67.

[Kot96] D. A. Kottmann. *Replikation in vernetzten Systemen mit mobilen Teilnehmern.* Nr. 20 der DISDBIS. infix, St. Augustin. 1996.

[KS92] J. J. Kistler und M. Satyanarayanan. Disconnected Operation in the Coda File System. *ACM Trans. on Comp. Syst.* **10**(1), Februar 1992, Seite 3–25.

[Lam79] L. Lamport. How to Make a Multiprocessor Computer that Correctly Executes Multiprocess Programs. *IEEE Trans. on Comp.* **C–28**(9), September 1979, Seite 690–691.

[Lan92] H. Langendörfer. *Leistungsanalyse von Rechensystemen: Messen, Modellieren, Simulation.* Carl Hanser Verlag, München, Wien. 1992.

[LMWF94] N. Lynch, M. Merrit, W. Weihl und A. Feteke. *Atomic Transactions.* Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, California. 1994.

[Lon90] D. D. E. Long. Analysis of Replication Control Protocols. In Cabrera und Pâris [CP90], Seite 117–121.

[Mut90] D. Mutchler. Some (naive?) Questions about Replication Control. In Cabrera und Pâris [CP90], Seite 113–116.

[Neu77] K. Neumann. *Operations Research Verfahren, Band II: Dynamische Optimierung, Lagerhaltung, Simulation, Warteschlangen.* Carl Hanser Verlag, München, Wien. 1977.

[SS83] R. D. Schlichting und F. Schneider. Fail–Stop Processors: An Approach to Designing Fault–Tolerant Computing Systems. *ACM Trans. on Comp. Syst.* **3**(1), Februar 1983, Seite 15–30.

[WK95] M. Wang und W. J. Kettinger. Projecting the Growth of Cellular Communications. *Communications of the ACM* **38**(10), Oktober 1995, Seite 119–122.