HYDROMECHANIK

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Prof. Gerhard H. Jirka, Ph.D.
Dipl.-Ing. Tobias Bleninger

Institut für Hydromechanik
Universität Karlsruhe

2001

Teil 2

Lösungen

Hydromechanik I

Hydromechanik II

1 Lösungen zu Kapitel 2: Hydrostatik

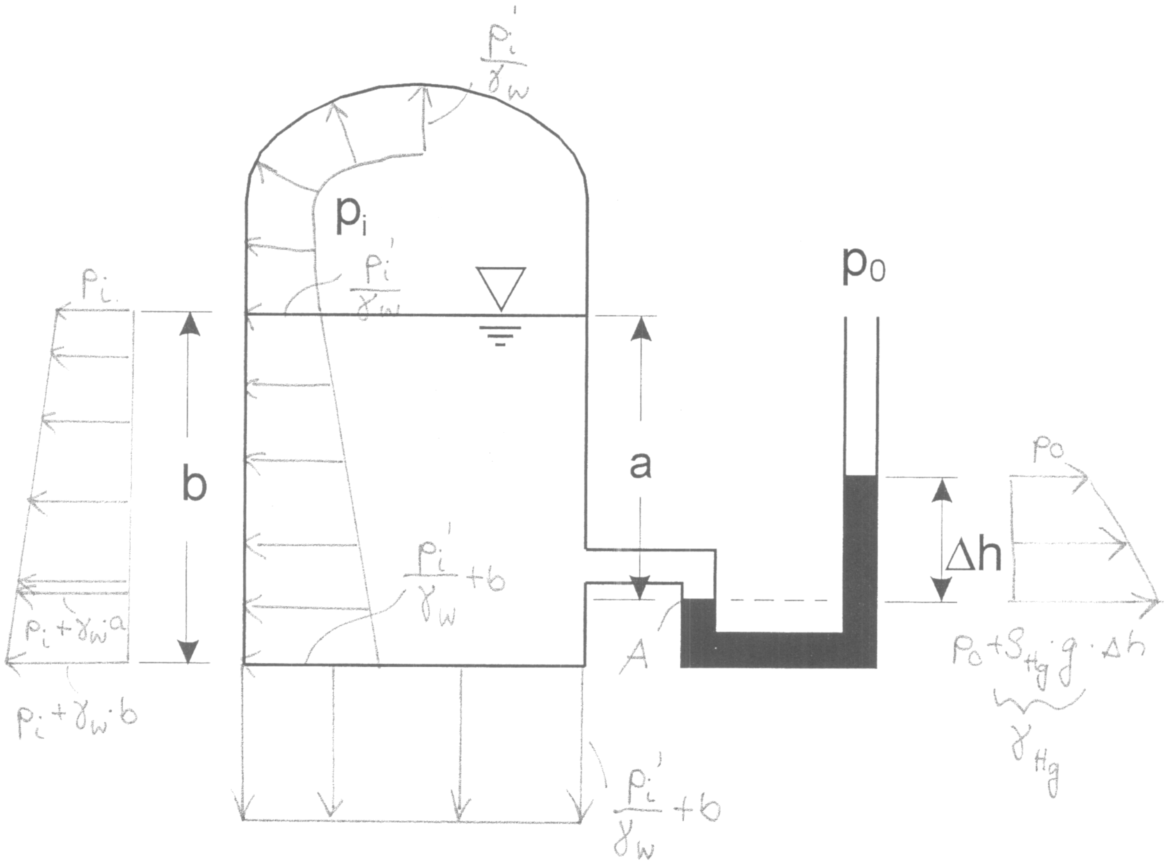
Aufgabe 2.1:

2.1.1:

$$p_A = p_i + \rho_W \cdot g \cdot a = p_o + \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h$$

$$p_i' = p_i - p_0 = \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h - \rho_W \cdot g \cdot a$$

2.1.2:



Aufgabe 2.2:

Methode 1:

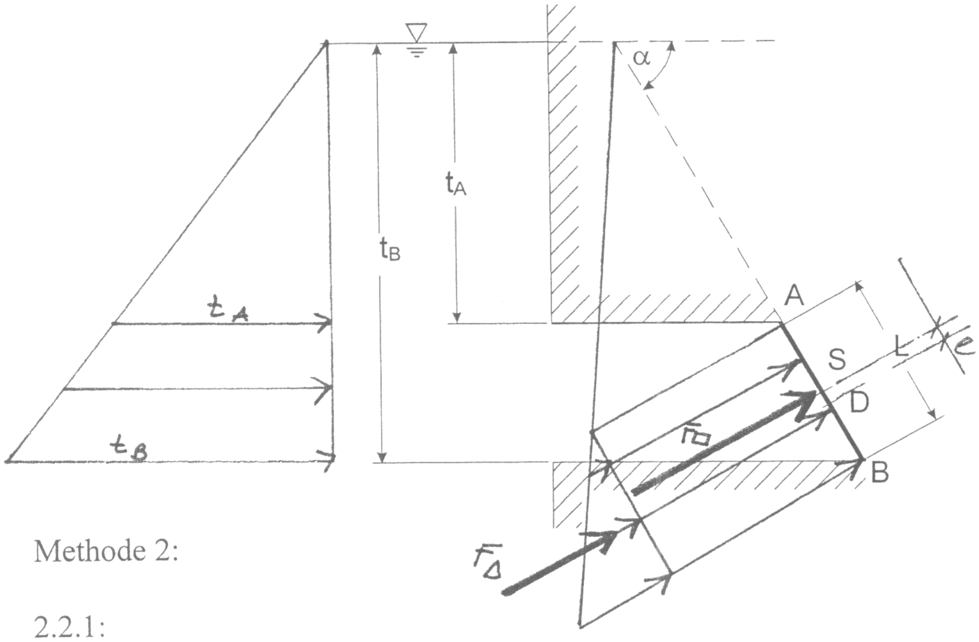
2.2.1:

$$F = F_{Rechteck} + F_{Dreieck} = \rho \cdot g \cdot b \cdot \left(t_A + \frac{1}{2}(t_B - t_A)\right) \cdot L = \rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot (t_A + t_B) \cdot L$$

2.2.2:

$$\curvearrowleft \sum M_S = F_{Rechteck} \cdot 0 + F_{Dreieck} \cdot \frac{L}{6} = F \cdot e$$

$$e = \frac{L}{6} \cdot \frac{F_{Dreieck}}{F} = \frac{L}{6} \cdot \frac{t_B - t_A}{t_B + t_A}$$



Methode 2:

2.2.1:

$$F = p_S \cdot A = \rho \cdot g \cdot t_S \cdot A = \rho \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot (t_A + t_B) \cdot b \cdot L$$

2.2.2:

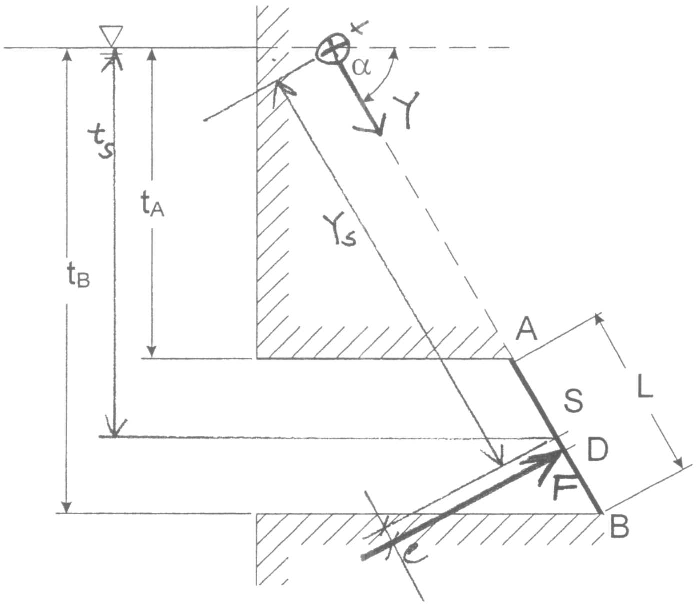
$$e = y_D - y_S = \frac{I'_x}{y_S \cdot A}$$ entsprechend Hydromechanik I und II Vorlesungen ,Gl. (2.15)

$$I'_x = \frac{b \cdot L^3}{12}$$

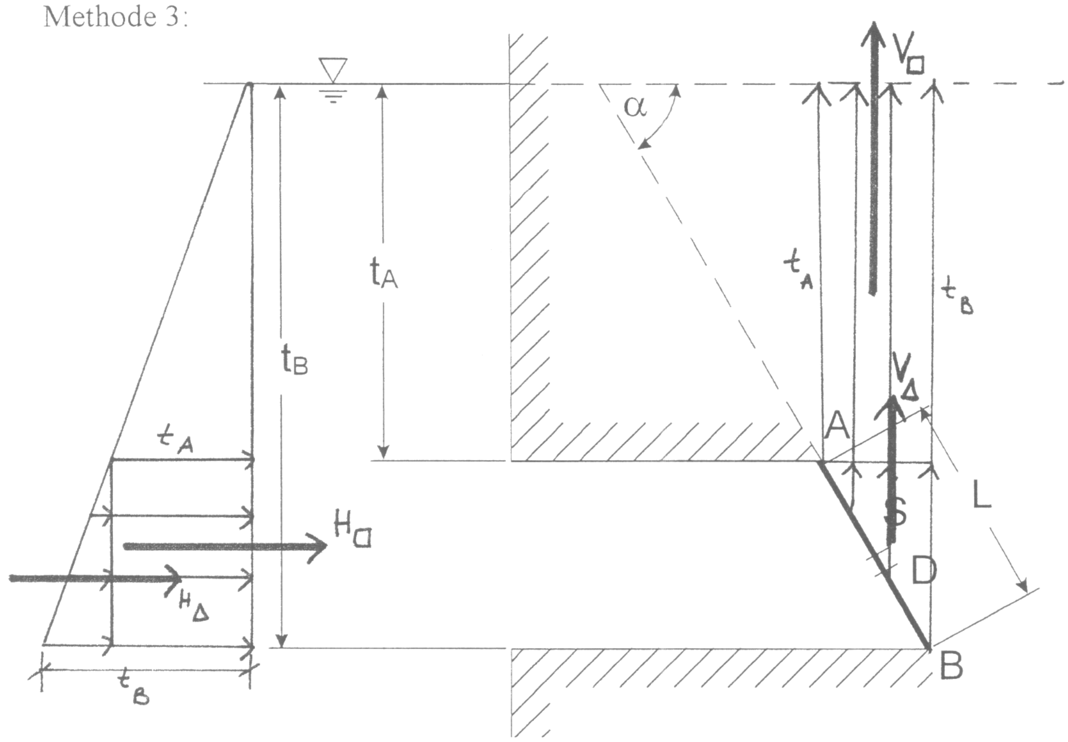
$$y_S = \frac{t_S}{\sin\alpha} = \frac{(t_A + t_B)}{2 \cdot \sin\alpha}$$

$$A = b \cdot L$$

$$e = \frac{b \cdot L^3 \cdot \sin\alpha}{12 \cdot (t_A + t_B) \cdot b \cdot L} = \frac{L}{6} \cdot \frac{L \cdot \sin\alpha}{t_B + t_A} = \frac{L}{6} \cdot \frac{t_B - t_A}{t_B + t_A}$$



Methode 3:



2.2.1:

$$H = H_{Rechteck} + H_{Dreieck} = \rho \cdot g \cdot b \cdot \left(t_A + \frac{t_B - t_A}{2} \right) \cdot (t_B - t_A) = \rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot (t_A + t_B) \cdot L \cdot \sin\alpha$$

$$V = V_{Rechteck} + V_{Dreieck} = \rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot (t_A + t_B) \cdot L \cdot \cos\alpha$$

$$F^2 = H^2 + V^2$$

$$F = \rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot (t_A + t_B) \cdot L$$

2.2.2:

$$\sum M_S = H_{Rechteck} \cdot 0 + H_{Dreieck} \cdot (t_B - t_A) \cdot \frac{1}{6} + V_{Rechteck} \cdot 0 + V_{Dreieck} \cdot \frac{L}{6} \cdot \cos\alpha = F \cdot e$$

$$H_{Dreieck} = \rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot (t_B - t_A) \cdot L \cdot \sin\alpha$$

$$V_{Dreieck} = \rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot (t_B - t_A) \cdot L \cdot \cos\alpha$$

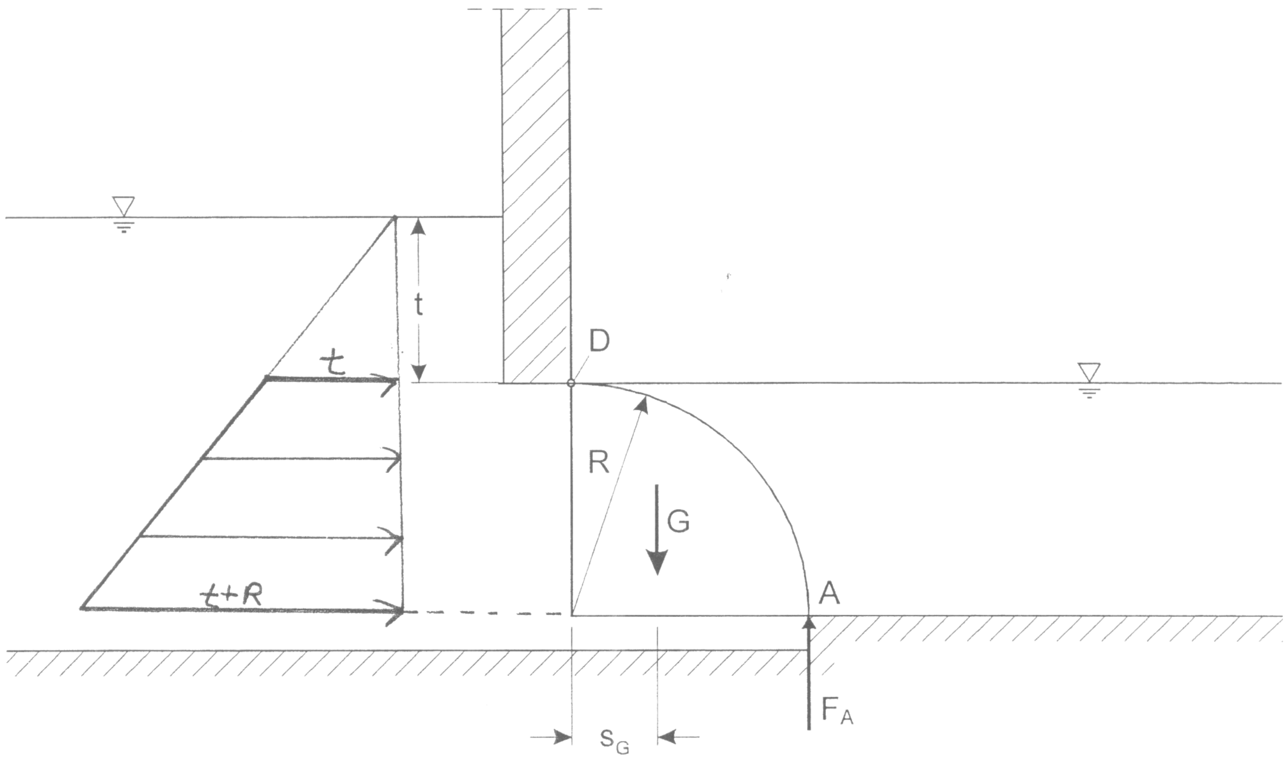
$$\sum M_S = \rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot (t_B - t_A) \cdot L \cdot \sin\alpha \cdot \frac{L}{6} \cdot \sin\alpha + \rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot (t_B - t_A) \cdot L \cdot \cos\alpha \cdot \frac{L}{6} \cdot \cos\alpha$$

$$= \rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot (t_A + t_B) \cdot L \cdot e$$

$$e = \frac{L}{6} \cdot \frac{t_B - t_A}{t_B + t_A}$$

Aufgabe 2.3:

2.3.1:



2.3.2:

$$\curvearrowleft \sum M_D = F_A \cdot R$$
$$+\rho_F \cdot g \cdot (t+R) \cdot R \cdot \frac{R}{2} + \rho_F \cdot g \cdot t \cdot R \cdot \frac{R}{2} + \rho_F \cdot g \cdot R \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot R$$
$$-\rho_S \cdot g \cdot R \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot R - \rho_S \cdot g \cdot R \cdot R \cdot \frac{R}{2} + \rho_S \cdot g \cdot \frac{\pi}{4} \cdot R^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi} - s_G \cdot G = 0$$

$$F_A = -\rho_F \cdot g \cdot R \cdot t - \rho_F \cdot g \cdot \frac{5}{6} \cdot R^2 + \rho_S \cdot g \cdot \frac{R^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot G$$

2.3.3:

$t = t_0$ für $F_A = 0$

$$t_0 = \left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_S}{\rho_F} \right) \cdot R + \frac{G}{3 \cdot \rho_F \cdot g \cdot R} = 0{,}70 \text{ m}$$

Aufgabe 2.4:

2.4.1:

$$p_1 = p_0 + \rho \cdot g \cdot y_1 = p_i + \rho \cdot g \cdot y_2$$

$$p_i - p_0 = \rho \cdot g \cdot (y_1 - y_2)$$

$$\sum F_y = -A + G = 0$$

$$A = \rho \cdot g \cdot (y_1 - y_2) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 = (p_i - p_0) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 = G$$

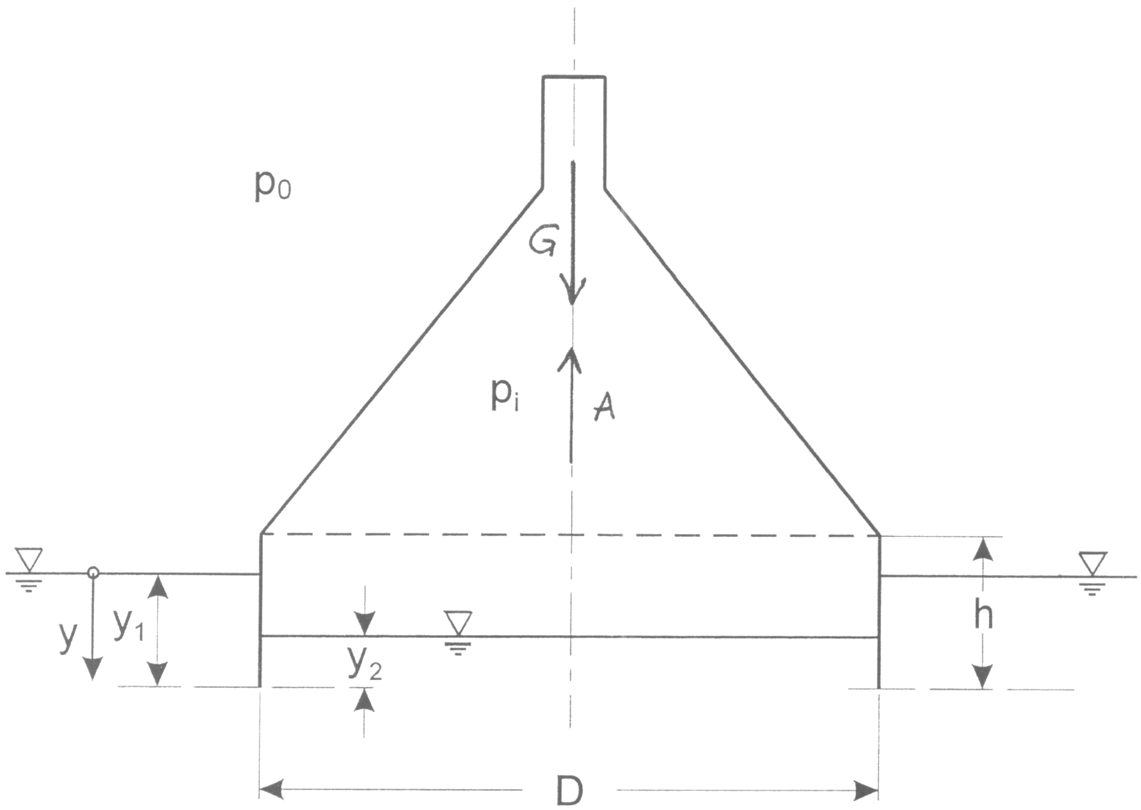
$$p_i = p_0 + \frac{4 \cdot G}{\pi \cdot D^2} = 10^5 \text{ Pa} + \frac{4 \cdot 1{,}5 \cdot 10^7 \text{ N}}{\pi \cdot (50 \text{ m})^2} = 107{,}64 \text{ kPa}$$

$$p_0 \cdot V_0 = p_i \cdot V_i \qquad \text{(Boyle – Mariotte)}$$

$$V_i = V_0 - \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot y_2 = V_0 \cdot \frac{p_0}{p_i}$$

$$y_2 = V_0 \cdot 4 \cdot \frac{1 - \frac{p_0}{p_i}}{\pi \cdot D^2} = 30000 \text{ m}^2 \cdot 4 \cdot \frac{1 - \frac{100}{107{,}39}}{\pi \cdot (50 \text{ m})^2} = 1{,}084 \text{ m}$$

$$y_1 = y_2 + \frac{p_i - p_0}{\rho \cdot g} = 1{,}084 \text{ m} + \frac{107{,}64 \text{ kPa} - 100 \text{ kPa}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1{,}863 \text{ m}$$

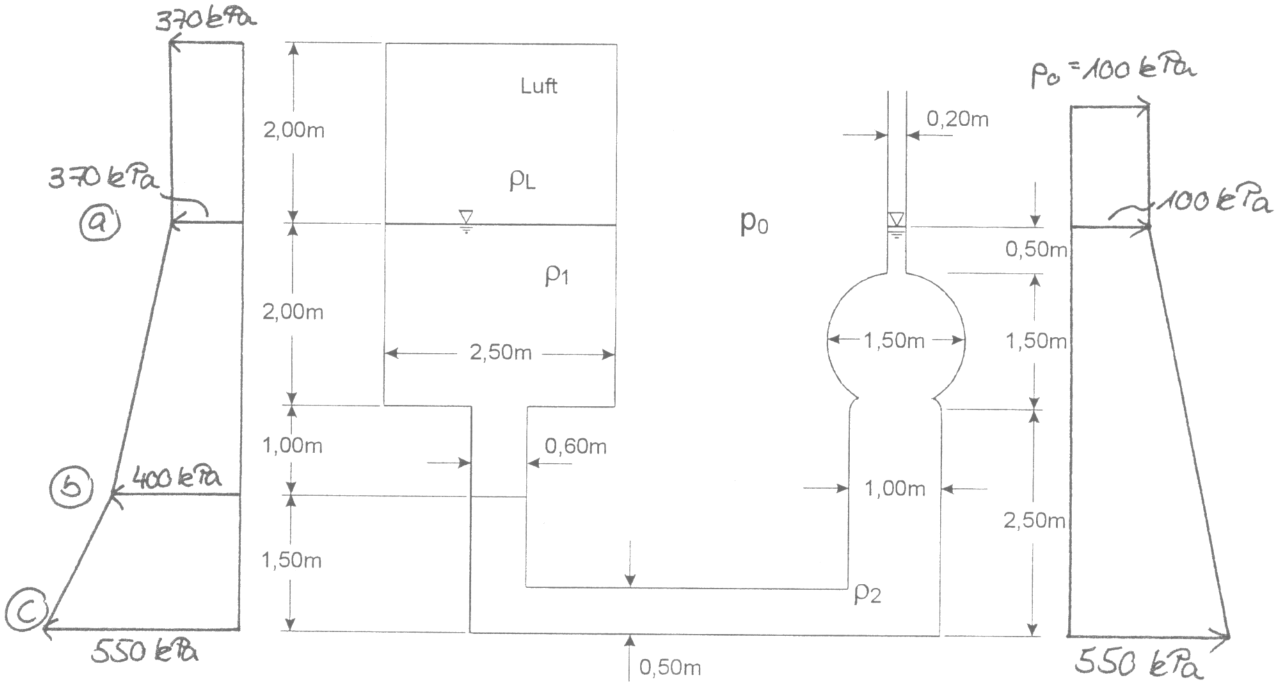


Aufgabe 2.5:

2.5.1:

$$\rho_1 \cdot g = 1019{,}4\ \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2} = 10^4\ \frac{N}{m^3} = 10^4\ Pa$$

$$\rho_2 \cdot g = 10194\ \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2} = 10^5\ \frac{N}{m^3} = 10^5\ Pa$$



$$p_b = p_i + \rho_1 \cdot g \cdot (2{,}00 + 1{,}00)\ m = p_0 + \rho_2 \cdot g \cdot (0{,}50 + 1{,}50 + 1{,}00)\ m$$

$$p_i = p_0 + \rho_2 \cdot g \cdot 3\ m - \rho_1 \cdot g \cdot 3\ m = \left(10^5 + \left(10^5 - 10^4\right) \cdot 3\right)\ Pa = 370\ kPa$$

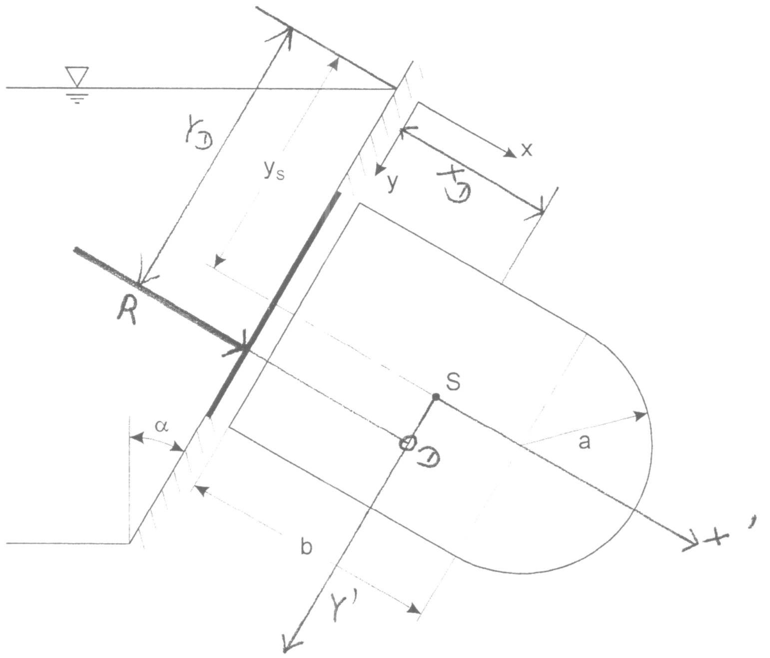
2.5.2:

$$p_a = p_i = 370\ kPa$$

$$p_b = p_i + \rho_1 \cdot g \cdot (2{,}00 + 1{,}00)\ m = 400\ kPa$$

$$p_c = p_b + \rho_2 \cdot g \cdot 1{,}50\ m = 550\ kPa$$

Aufgabe 2.6:



2.6.1:

$$\left.\begin{aligned} x_D &= x_S + \frac{I_{x'y'}}{y_S \cdot A} \\ y_D &= y_S + \frac{I_{x'}}{y_S \cdot A} \end{aligned}\right\} \quad \text{aus Hydromechanik I und II Vorlesungen, Gl. (2.14) und (2.15)}$$

$$A = 2 \cdot a \cdot b + \frac{\pi \cdot a^2}{2} = \left(2 \cdot 1 \cdot 2 + \frac{\pi \cdot 1^2}{2}\right) m^2 = 5{,}57\ m$$

$$x_S = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{b}{2} + \frac{\pi \cdot a^2}{2} \cdot \left(b + \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot a\right)}{2 \cdot a \cdot b + \frac{\pi \cdot a^2}{2}} = 1{,}40\ m$$

$I_{x'y'} = 0$ (Symmetrie bezüglich der x' - Achse)

$$x_D = x_S + 0 = 1{,}40\ m$$

$$y_S = 2{,}0\ m$$

$$I_{x'} = \frac{b \cdot (2 \cdot a)^3}{12} + \frac{\pi \cdot a^4}{8} = 1{,}726\ m^4$$

$$y_D = y_S + \frac{I_{x'}}{y_S \cdot A} = 2{,}0\ m + \frac{1{,}726\ m^4}{2{,}0\ m \cdot 5{,}57\ m^2} = 2{,}155\ m$$

2.6.2:

$$R = p_S \cdot A = \rho \cdot g \cdot t_S \cdot A = \rho \cdot g \cdot y_S \cdot \cos\alpha \cdot A = 10^3\ \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2} \cdot 2{,}0\ m \cdot \cos 30° \cdot 5{,}57\ m^2 = 94{,}64\ kN$$

Aufgabe 2.7:

2.7.1:

$$L = \frac{4{,}0\ \text{m}}{\sin 60°} = 4{,}62\ \text{m}$$

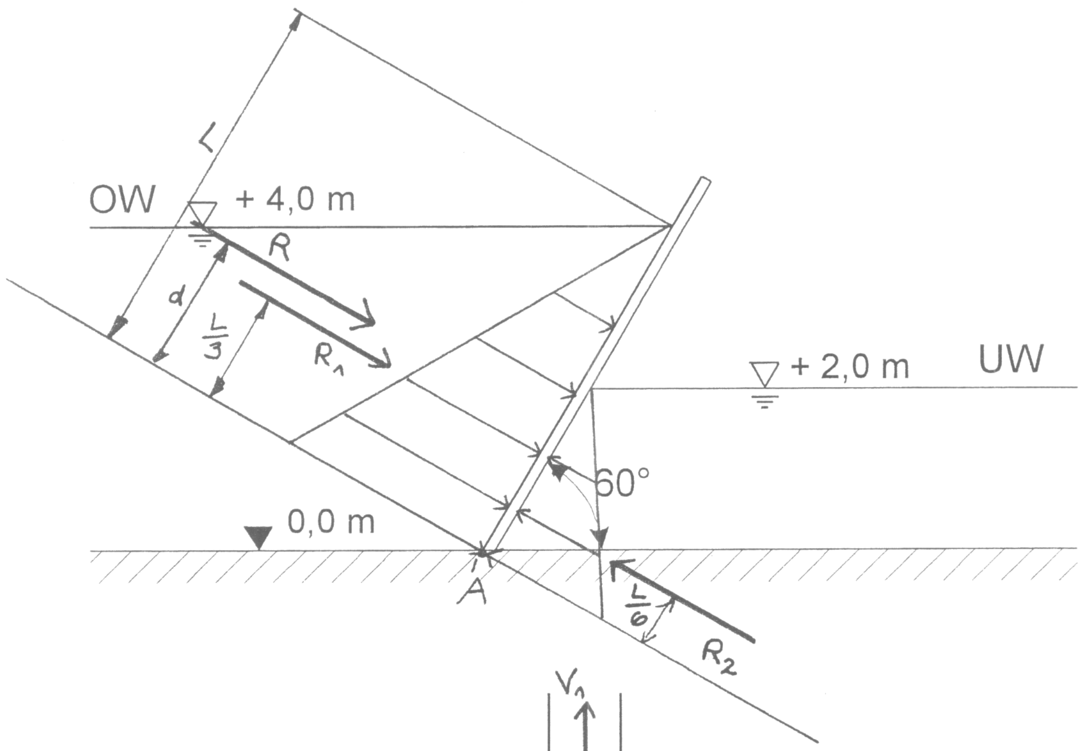
$$R_1 = \rho \cdot g \cdot B \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\ \text{m} \cdot L = 906{,}45\ \text{kN}$$

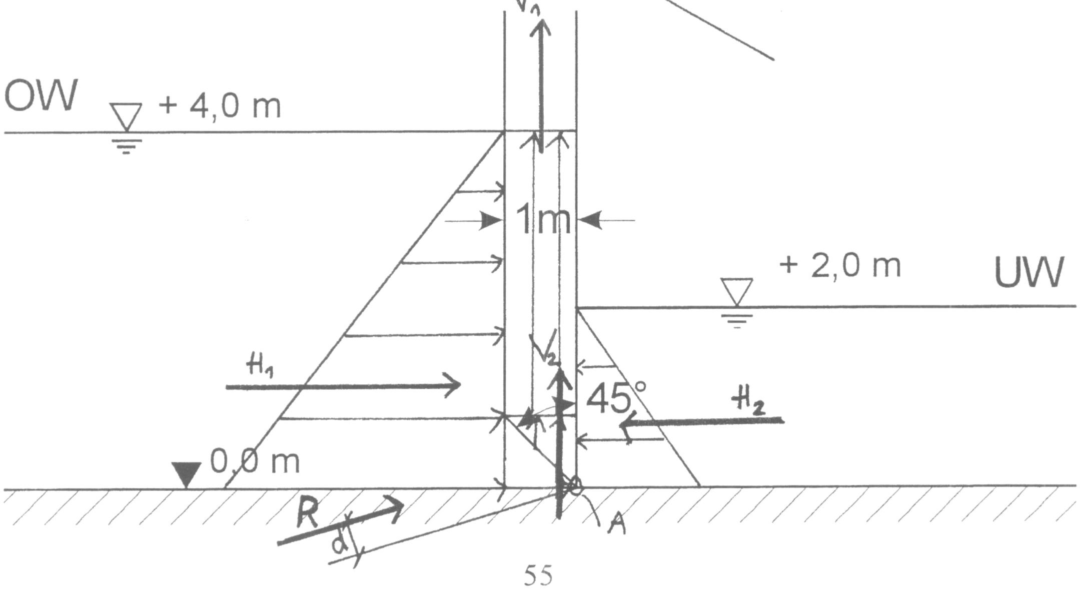
$$R_2 = \rho \cdot g \cdot B \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\ \text{m} \cdot \frac{L}{2} = 226{,}60\ \text{kN}$$

$$R = R_1 - R_2 = 679{,}85\ \text{kN}$$

$$\curvearrowright \sum M_A = R \cdot d = R_1 \cdot \frac{L}{3} - R_2 \cdot \frac{L}{6}$$

$$d = \frac{R_1 \cdot \frac{L}{3} - R_2 \cdot \frac{L}{6}}{R} = 1{,}80\ \text{m}$$





2.7.2:

$$H_1 = \rho \cdot g \cdot B \cdot \frac{1}{2} \cdot (4{,}0\ \text{m})^2 = 784{,}80\ \text{kN}$$

$$H_2 = \rho \cdot g \cdot B \cdot \frac{1}{2} \cdot (2{,}0\ \text{m})^2 = 196{,}20\ \text{kN}$$

$$H = H_1 - H_2 = 588{,}6\ \text{kN}$$

$$V_1 = \rho \cdot g \cdot B \cdot 3\ \text{m} \cdot 1\ \text{m} = 294{,}30\ \text{kN}$$

$$V_2 = \rho \cdot g \cdot B \cdot \frac{1}{2}\ \text{m} \cdot 1\ \text{m} = 49{,}06\ \text{kN}$$

$$V = V_1 + V_2 = 343{,}36\ \text{kN}$$

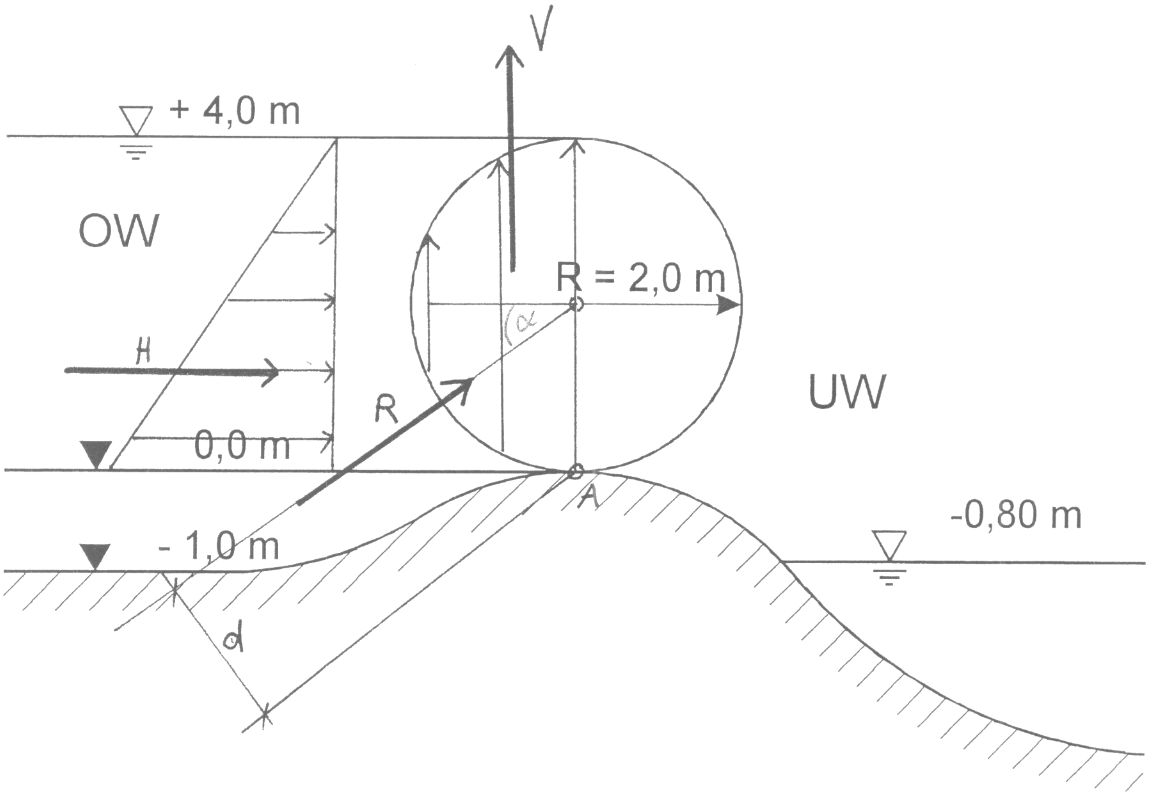
$$R = \sqrt{H^2 + V^2} = 681{,}42\ \text{kN}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{V}{H} = 0{,}583 \quad \rightarrow \quad \alpha = 30{,}26^\circ$$

$$\curvearrowright \sum M_A = R \cdot d = H_1 \cdot \frac{4}{3}\ \text{m} - H_2 \cdot \frac{2}{3}\ \text{m} + V_1 \cdot \frac{1}{2}\ \text{m} + V_2 \cdot \frac{1}{3}\ \text{m}$$

$$d = \frac{H_1 \cdot \frac{4}{3} - H_2 \cdot \frac{2}{3} + V_1 \cdot \frac{1}{2} + V_2 \cdot \frac{1}{3}}{R}\ \text{m} = 1{,}584\ \text{m}$$

2.7.3:



$$e = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} = 0{,}849 \text{ m}$$

$$H = \rho \cdot g \cdot B \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(4 \text{ m}\right)^2 = 784{,}80 \text{ kN}$$

$$V = \rho \cdot g \cdot B \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(2 \text{ m}\right)^2 = 616{,}38 \text{ kN}$$

$$R = \sqrt{H^2 + V^2} = 997{,}91 \text{ kN}$$

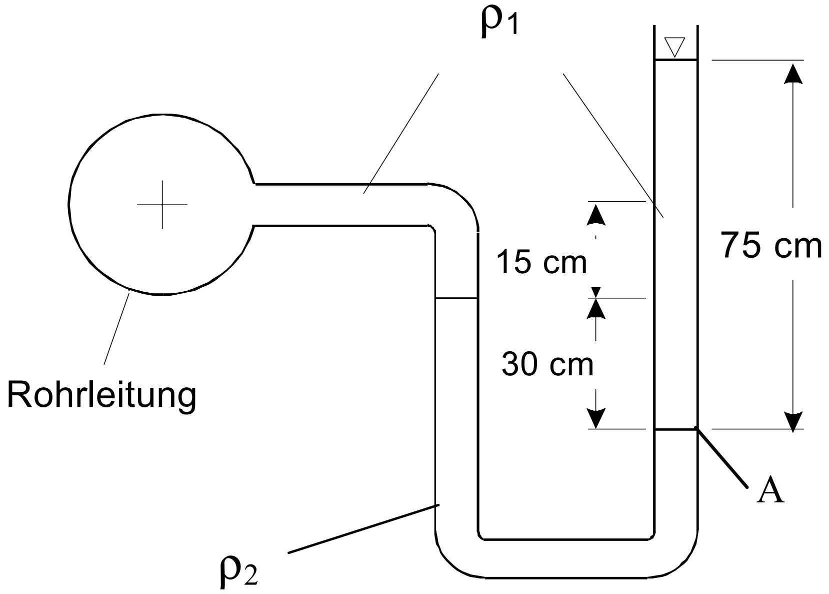
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{V}{H} = 0{,}785 \quad \rightarrow \quad \alpha = 38{,}15^\circ$$

$$\curvearrowright \sum M_A = R \cdot d = H \cdot \frac{4 \text{ m}}{3} + V \cdot \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}$$

$$d = \frac{H \cdot \frac{4}{3} + V \cdot \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot \pi}}{R} \text{ m} = 1{,}573 \text{ m}$$

$d = R \cdot \cos\alpha = 2 \text{ m} \cdot \cos 38{,}15^\circ = 1{,}573 \text{ m}$ (R geht durch den Kreismittelpunkt)

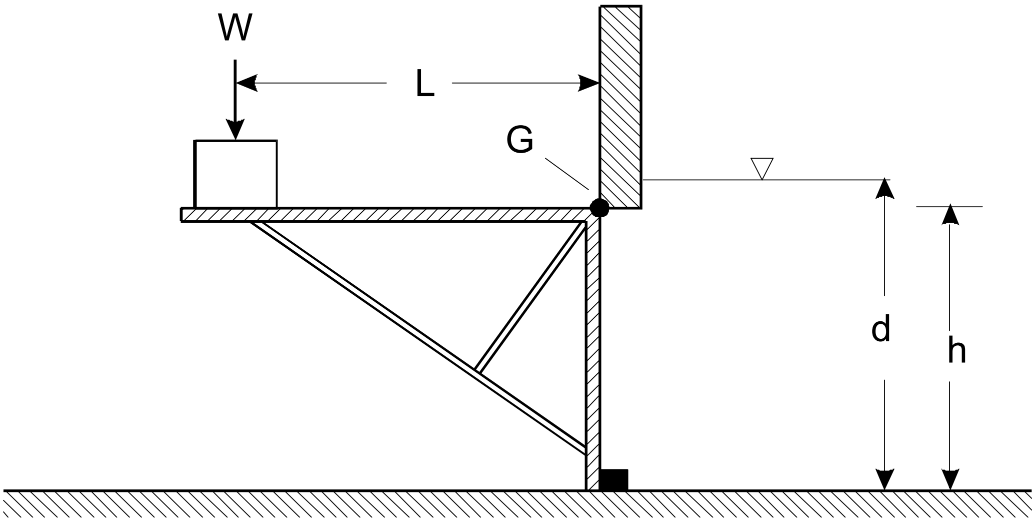
<u>Aufgabe 2.8</u>:



$$p_A = p + \rho_1 \cdot g \cdot 0{,}15 \text{ m} + \rho_2 \cdot g \cdot 0{,}30 \text{ m} = p_0 + \rho_1 \cdot g \cdot 0{,}75 \text{ m}$$

$$p - p_0 = \rho_1 \cdot g \cdot 0{,}60 \text{ m} - \rho_2 \cdot g \cdot 0{,}30 \text{ m} = \rho_1 \cdot g \cdot 0{,}60 \text{ m} - 2 \cdot \rho_1 \cdot g \cdot 0{,}30 \text{ m} = 0$$

Aufgabe 2.9:



$$\curvearrowleft \sum M_G = W \cdot L - R_1 \cdot \frac{h}{2} - R_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot h$$

$$R_1 = h \cdot b \cdot \rho \cdot g \cdot (d-h)$$

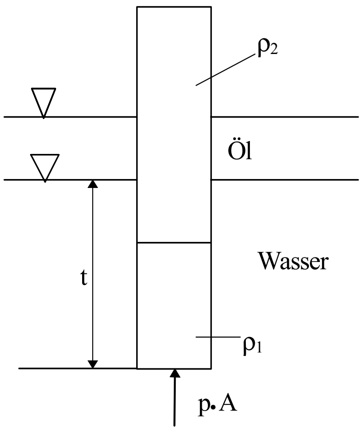
$$R_2 = h \cdot b \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{h}{2}$$

$$\curvearrowleft \sum M_G = W \cdot L - h \cdot b \cdot \rho \cdot g \cdot (d-h) \cdot \frac{h}{2} - h \cdot b \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot h = 0$$

$$W \cdot L = \left(h \cdot b \cdot \rho \cdot g\right) \cdot \left((d-h) \cdot \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot h\right)$$

$$W = 115{,}104\,\text{kN}$$

Aufgabe 2.10 :



$$\sum F_z = p \cdot A - W$$

Druck in der Tiefe t:

$$p = \rho_{Öl} \cdot g \cdot 1\text{ m} + \rho_{Wasser} \cdot g \cdot t$$

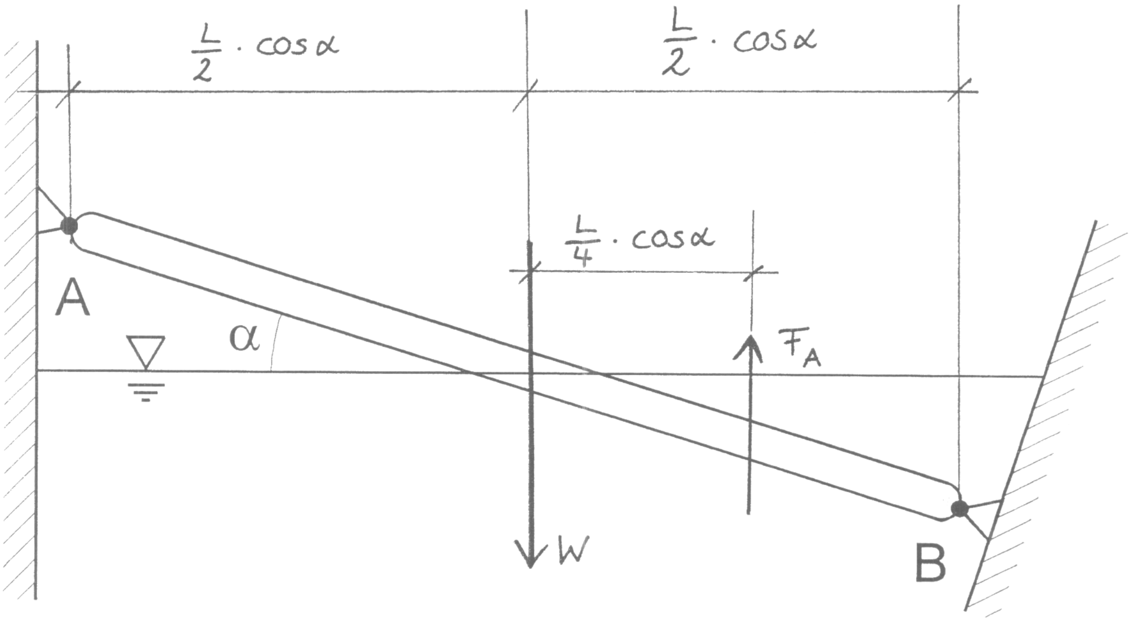
Gewicht des Zylinders:

$$W = \left(\rho_1 \cdot g \cdot 1\text{ m} + \rho_2 \cdot g \cdot 3\text{ m}\right) \cdot A$$

$$\sum F_z = \left(\rho_{Öl} \cdot g \cdot 1\text{ m} + \rho_{Wasser} \cdot g \cdot t\right) \cdot A - \left(\rho_1 \cdot g \cdot 1\text{ m} + \rho_2 \cdot g \cdot 3\text{ m}\right) \cdot A = 0$$

$$t = \frac{\rho_1 \cdot 1\text{ m} + \rho_2 \cdot 3\text{ m} - \rho_{Öl} \cdot 1\text{ m}}{\rho_{Wasser}} = 2{,}70\text{ m}$$

Aufgabe 2.11:



$$\curvearrowleft \sum M_A = F_A \cdot \frac{3}{4} \cdot L \cdot \cos\alpha - W \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos\alpha$$

$$F_A = \rho_F \cdot g \cdot \frac{L}{2} \cdot A$$

$$W = \rho_B \cdot g \cdot L \cdot A$$

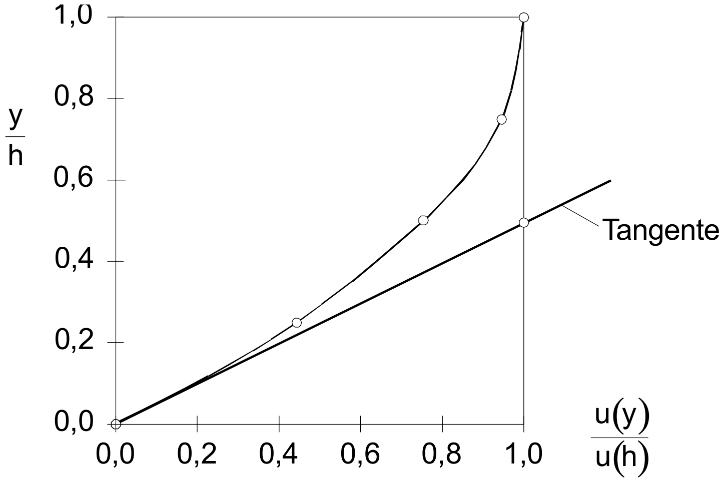
$$\curvearrowleft \sum M_A = \left(\rho_F \cdot g \cdot \frac{L}{2} \cdot A \cdot \frac{3}{4} - \rho_B \cdot g \cdot L \cdot A \cdot \frac{L}{2}\right) \cdot \cos\alpha =$$

$$= \left(\frac{3}{4} \cdot \rho_F - \rho_B\right) \cdot g \cdot \frac{L}{2} \cdot A \cdot L \cdot \cos\alpha < 0 \quad \text{(rechtsdrehend)}$$

Das Moment ist negativ. Der Stab dreht sich im Uhrzeigersinn: Antwort (b).

2 Lösungen zu Kapitel 3: Kinematik

Aufgabe 3.1:



3.1.1:

$$u(y) = C \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2\right]$$

$$y = h \quad : \quad u(y) = u(h) = C \cdot \left(1 - 0^2\right) = C$$

$$u(y) = u(h) \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2\right]$$

$$\frac{u(y)}{u(h)} = 1 - \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2$$

$\frac{y}{h}$	$\frac{u(y)}{u(h)}$
0,00	0,00
0,25	0,44
0,50	0,75
0,75	0,94
1,00	1,00

3.1.2:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \;\; , \text{ da } \frac{\partial u}{\partial t}, \; \frac{\partial u}{\partial x}, \; v, \; w \; = 0$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \;\; , \text{ da } \frac{\partial v}{\partial t}, \; \frac{\partial v}{\partial x}, \; v, \; w = 0$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \;\; , \text{ da } \frac{\partial w}{\partial t}, \; \frac{\partial w}{\partial x}, \; v, \; w = 0$$

Die Strömung ist stationär ($\frac{\partial V}{\partial t} = 0$) und gleichförmig ($\frac{\partial V}{\partial x} = 0$).

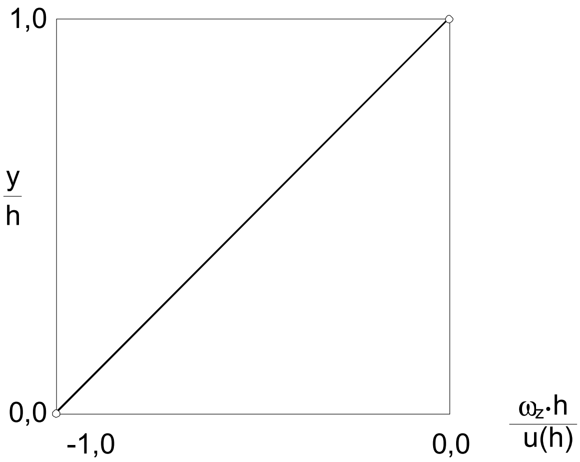
3.1.3:
Drehung (Rotationsvektor)

$$2\,\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \;\; , \;\; \text{da } w, v \; = 0$$

$$2\,\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \;\; , \;\; \text{da } \frac{\partial u}{\partial z}, \; w = 0$$

$$2\,\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - C \cdot \left[0 - 2 \cdot \left(1 - \frac{y}{h} \right) \cdot \frac{-1}{h} \right]$$

$$\omega_z = C \cdot \left(1 - \frac{y}{h} \right) \cdot \frac{-1}{h} = -\frac{u(h)}{h} \cdot \left(1 - \frac{y}{h} \right)$$



Rotationsvektor:

$$\vec{\omega} = \left(\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z \right) = \left(0,\ 0,\ -\frac{u(h)}{h} \cdot \left(1 - \frac{y}{h} \right) \right)$$

3.1.4:
Winkeldeformation

$$\vartheta_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 + 2 \cdot C \cdot \left(1 - \frac{y}{h} \right) \cdot \frac{1}{h}$$

$$\vartheta_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 + 0 = 0$$

$$\vartheta_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 + 0 = 0$$

Aufgabe 3.2:

Kartesische Koordinaten

$$a_x = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{(a) lokale}} + \underbrace{u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{(b) konvektive}}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z}$$

(a) lokale (b) konvektive Beschleunigungskomponenten

Natürliche Koordinaten

$$a_t = \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \cdot \frac{\partial V_s}{\partial s}$$

$$a_n = \frac{\partial V_n}{\partial t} + \frac{V_s^2}{r}$$

$$a_m = \frac{\partial V_m}{\partial t}$$

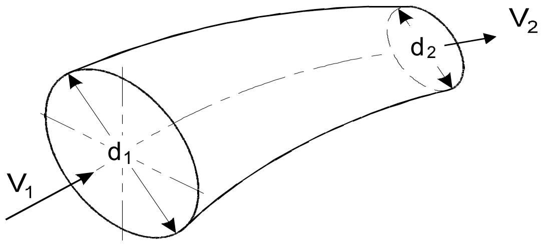
(a) lokale (b) konvektive Beschleunigungskomponenten

Aufgabe 3.3:

Kontinuitätsgleichung

$$-V_1 \cdot A_1 + V_2 \cdot A_2 = 0$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot d_2^2}{\frac{\pi}{4} \cdot d_1^2} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = \left(\frac{5}{10}\right)^2 = 0{,}25$$



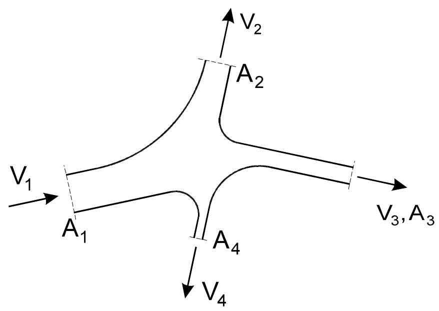
Aufgabe 3.4:

Kontinuitätsgleichung

$$-V_1 \cdot A_1 + V_2 \cdot A_2 + V_3 \cdot A_3 + V_4 \cdot A_4 = 0$$

$$V_4 = V_1 \cdot \frac{A_1}{A_4} - V_2 \cdot \frac{A_2}{A_4} - V_3 \cdot \frac{A_3}{A_4} =$$

$$= \left(2 \cdot \frac{4{,}5}{1{,}0} - 1 \cdot \frac{3{,}0}{1{,}0} - 3 \cdot \frac{2{,}0}{1{,}0}\right) \frac{m}{s} = 0 \; \frac{m}{s}$$



Aufgabe 3.5:

$$Q = \int_A \vec{V}\, d\vec{A} = \iint_A V(x,y)\, dx\, dy = \int_{x=-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \int_{y=0}^{D} V_s \cdot \left(1 - \frac{4\,x^2}{W^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{y^2}{D^2}\right) dx\, dy$$

$$= V_s \int_{x=-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \left(1 - \frac{4\,x^2}{W^2}\right) \left(\int_{y=0}^{D} \left(1 - \frac{y^2}{D^2}\right) dy\right) dx = V_s \int_{x=-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \left(1 - \frac{4\,x^2}{W^2}\right) \left[y - \frac{y^3}{3\,D^2}\right]_{y=0}^{D} dx$$

$$= V_s \cdot \frac{2}{3} \cdot D \int_{x=-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \left(1 - \frac{4\,x^2}{W^2}\right) dx = V_s \cdot \frac{2}{3} \cdot D \cdot \left[x - \frac{4\,x^3}{3\,W^2}\right]_{x=-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} =$$

$$= V_s \cdot \frac{2}{3} \cdot D \cdot 2 \cdot \left(\frac{W}{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{W}{8}\right)$$

$$= \frac{4}{9} \cdot V_s \cdot W \cdot D$$

Aufgabe 3.6:

3.6.1: Kontinuitätsgleichung

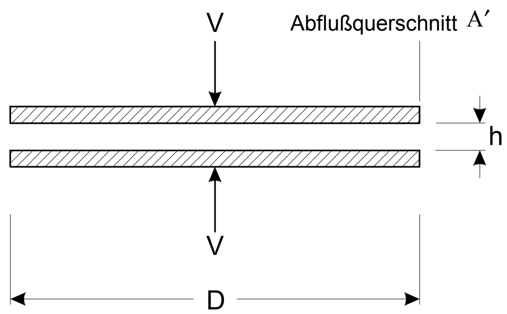
$$-2\ V \cdot A + V' \cdot A' = 0$$

$$V' = 2\ V \cdot \frac{A}{A'} = 2\ V \cdot \frac{\frac{\pi\ D^2}{4}}{\pi\ D \cdot h} = \frac{1}{2} \cdot V \cdot \frac{D}{h} = V \cdot \frac{r}{h}$$

$$a_r = \frac{dV'}{dt} = \underbrace{\frac{\partial V'}{\partial t}}_{a_{lokal}} + \underbrace{V' \cdot \frac{\partial V'}{\partial r}}_{a_{konvektiv}}$$

$$a_k = V' \cdot \frac{\partial V'}{\partial r} = V \cdot \frac{r}{h} \cdot V \cdot \frac{1}{h} = V^2 \cdot \frac{r}{h^2} = \frac{1}{2} \cdot V^2 \cdot \frac{D}{h^2}$$

3.6.2:



$$a_L = \frac{\partial V'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} V \cdot \frac{r}{h} = \frac{\partial}{\partial t} V \cdot \frac{r}{h(t)} = -V \cdot \frac{r}{h^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

für $t = 0:\ h = h_0$

$t = t:\ h = h_0 - 2\ V \cdot t$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -2\ V$$

$$a_L = V \cdot \frac{r}{h^2} \cdot 2\ V = 2\ V^2 \cdot \frac{r}{h^2} = V^2 \cdot \frac{D}{h^2}$$

Aufgabe 3.7

3.7.1 (a), (b):

$$\beta = \frac{B}{V} = \frac{M}{V} = \rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$$

3.7.2 (a):

$$\sum_{K.O.} \beta \cdot \vec{V} \cdot \vec{A} = -\rho \cdot V \cdot A = -1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 3 \frac{m}{s} \cdot 0{,}15 m^2 = -450 \frac{kg}{s}$$

3.7.2 (b):

$$\sum_{K.O.} \beta \cdot \vec{V} \cdot \vec{A} = -\rho_1 \cdot V_1 \cdot A_1 + \rho_2 \cdot V_2 \cdot A_2 = (-1000 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 1000 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}1) \frac{kg}{s} = 0 \frac{kg}{s}$$

3.7.3 (a):

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{Sys} = \int_{K.V.} \frac{\partial \beta}{\partial t} \cdot d\cancel{V} + \sum_{K.O.} \beta \cdot \vec{V} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\int_{K.V.} \frac{\partial \beta}{\partial t} \cdot d\cancel{V} = -\sum_{K.O} \beta \cdot \vec{V} \cdot \vec{A} = 450 \frac{kg}{s}$$

3.7.3 (b):

$$\int_{K.V.} \frac{\partial \beta}{\partial t} \cdot d\mathcal{V} = -\sum_{K.O.} \beta \cdot \vec{V} \cdot \vec{A} = 0 \frac{kg}{s}$$

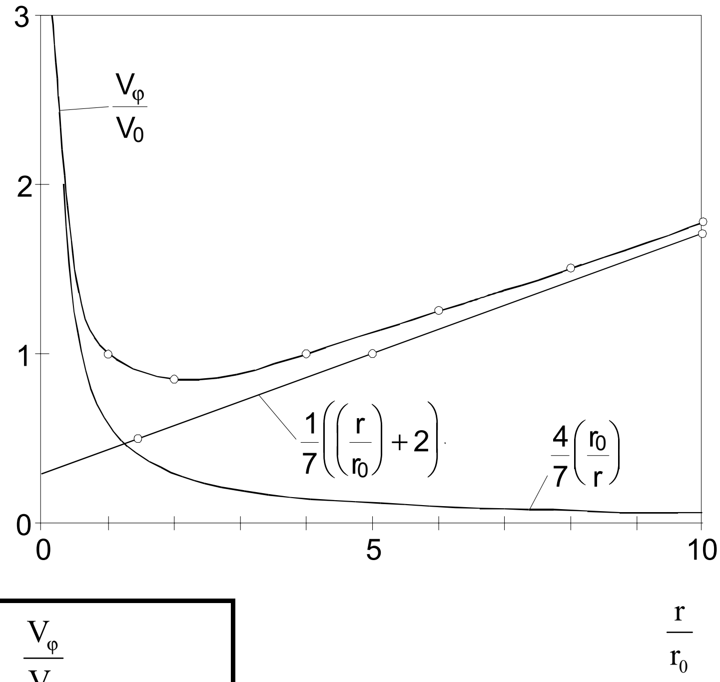
Aufgabe 3.8:

3.8.2: richtig

Aufgabe 3.9:

3.9.1:

$$V_\varphi = \frac{V_0}{7} \cdot \left(4 \cdot \left(\frac{r_0}{r} \right) + \left(\frac{r}{r_0} \right) + 2 \right)$$



$\frac{r}{r_0}$	$\frac{V_\varphi}{V_0}$
0	∞
1	1
2	0,857
4	1
6	1,238
8	1,5
10	1,771

3.9.2:

$$V_\varphi = \frac{V_0}{7} \cdot \underbrace{\left(4 \cdot \left(\frac{r_0}{r} \right)\right.}_{\text{Potentialwirbel}} + \underbrace{\left.\frac{r}{r_0} + 2 \right)}_{\text{Festkörperrotation}}$$

3.9.3:
V_r , $V_z = 0$, somit ist die Kontinuitätsgleichung erfüllt.

3 Lösungen zu Kapitel 4: Impulsgleichung

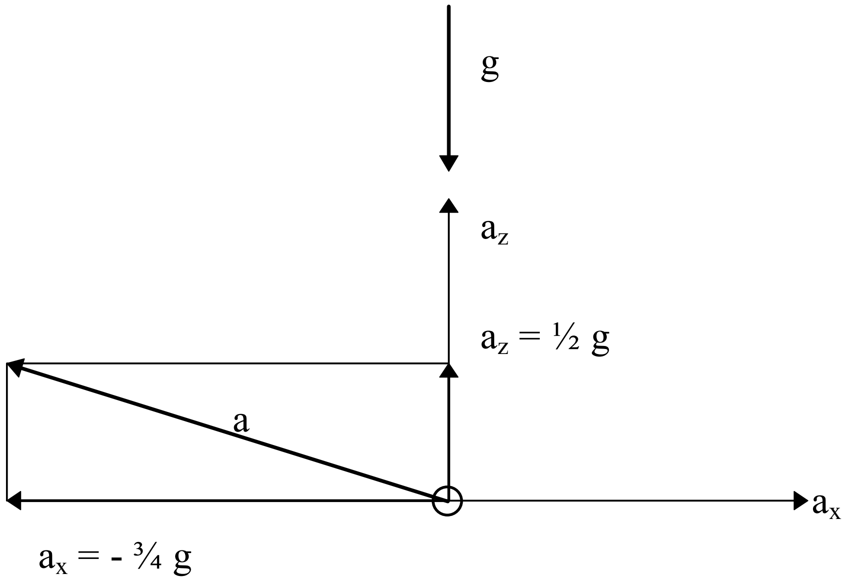
Aufgabe 4.1:

$$a_\ell = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\gamma h)}{\partial \ell}$$

$$h = \frac{p}{\gamma} + z$$

γ = konst.:

$$\frac{a_\ell}{g} = -\frac{\partial h}{\partial \ell}$$



4.1.1:

$$\left.\begin{aligned}\frac{a_x}{g} &= -\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{3}{4}\\ \frac{a_z}{g} &= -\frac{\partial h}{\partial z} = +\frac{1}{2}\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} h &= \frac{3}{4}x + f_1(z)\\ h &= -\frac{1}{2}z + f_2(x)\end{aligned}\right.$$

Vergleich: $f_1(z) = -\frac{1}{2}z + C_1$

$$f_2(x) = \frac{3}{4}x + C_2$$

$$h = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}z + C_1 = \frac{3}{4}x + C_2 - \frac{1}{2}z$$

$$C_1 = C_2 = C$$

$$h = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}z + C = \frac{p}{\gamma} + z$$

Randbedingung:

$x = 0$, $z = H$, $\frac{p}{\gamma} = 0$ (Atmosphärendruck):

$$h = \frac{3}{4}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot H + C = 0 + H$$

$$C = \frac{3}{2}H = \frac{3}{10}L$$

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}z + \frac{3}{10}L$$

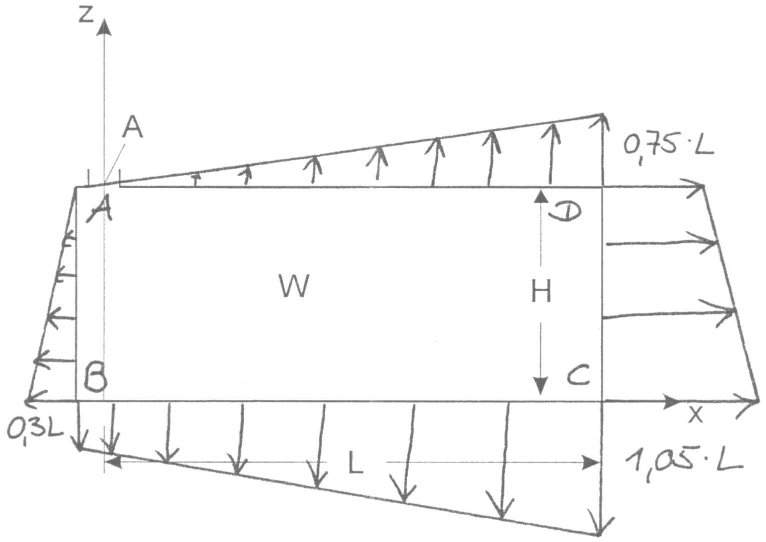
4.1.2:

A: $x = 0,\ z = H = \frac{L}{5}$: $\frac{p}{\gamma} = 0$

B: $x = 0,\ z = 0$: $\frac{p}{\gamma} = \frac{3}{10}L$

C: $x = L,\ z = 0$: $\frac{p}{\gamma} = 1{,}05\,L$

D: $x = L,\ z = H$: $\frac{p}{\gamma} = 0{,}75\,L$

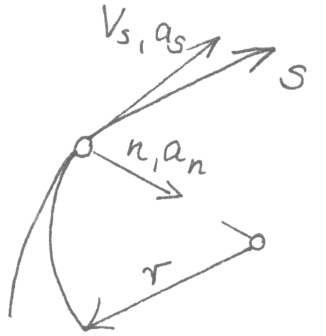


Aufgabe 4.2:

$$a_s = \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \frac{\partial V_s}{\partial s} = 0$$

$$a_n = \frac{\partial V_n}{\partial t} + \frac{V_s^2}{r} = \omega^2 r$$

da $\frac{\partial V_s}{\partial t}, \frac{\partial V_s}{\partial s}, \frac{\partial V_n}{\partial t} = 0,\ V_s = \omega\, r$



$$\frac{a_\ell}{g} = -\frac{\partial h}{\partial \ell}, \ \gamma = \text{konst.}$$

$\ell = n$

$$\frac{a_n}{g} = -\frac{\partial h}{\partial n} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

$\partial n = -\partial r$

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

$$h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C = \frac{p}{\gamma} + z$$

Randbedingung:

$r = 0,\ z = H,\ \dfrac{p}{\gamma} = 0$ (Atmosphärendruck):

$h = 0 + C = 0 + H$

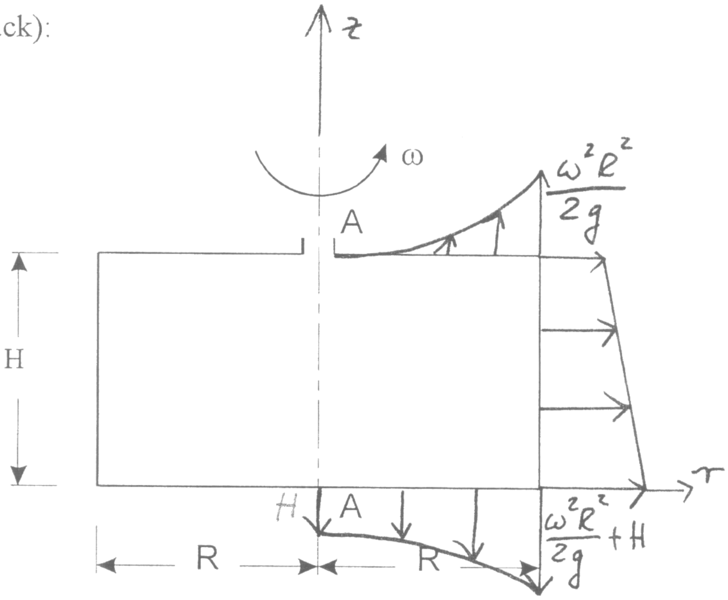
$\Rightarrow\ C = H$

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + H - z$$

Deckel: $z = H:\ \dfrac{p}{\gamma} = \dfrac{\omega^2 r^2}{2g}$

Seiten: $r = R:\ \dfrac{p}{\gamma} = \dfrac{\omega^2 R^2}{2g} + H - z$

Boden: $z = 0:\ \dfrac{p}{\gamma} = \dfrac{\omega^2 r^2}{2g} + H$



Aufgabe 4.3:

4.3.1:

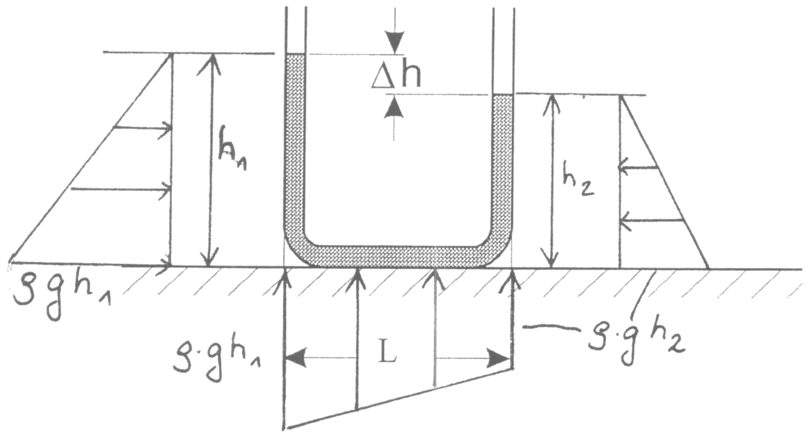
$$\frac{a_x}{g} = -\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\Delta h}{L} = -\frac{50\,\text{mm}}{20\text{cm}} = -\frac{1}{4}$$

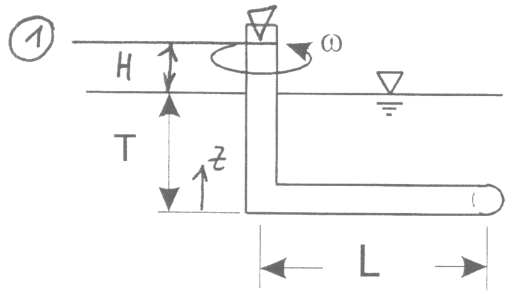
$a_x = a$

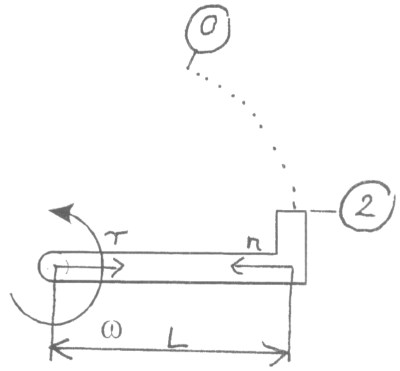
$a = \dfrac{\Delta h}{L} g = \dfrac{1}{4} g$ unabhängig von der Fluiddichte

4.3.2:



Aufgabe 4.4:





Eulergleichung für das Fluid im Pitotrohr:

$$\frac{a_n}{g} = -\frac{\partial h}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

$$h = \frac{p}{\gamma} + z = \frac{(\omega\ r)^2}{2g} + C$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 - \frac{(\omega\ r_1)^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 - \frac{(\omega\ r_2)^2}{2g}$$

$\frac{p_1}{\gamma} = 0$ (Atmosphärendruck), $z_1 = T{+}H$, $r_1 = 0$, $z_2 = 0$, $r_2 = L$

$$\Rightarrow 0 + T + H - 0 = \frac{p_2}{\gamma} + 0 - \frac{(\omega\ L)^2}{2g}$$

$$H = \frac{p_2}{\gamma} - T - \frac{(\omega\ L)^2}{2g}$$

Bernoulligleichung von einem relativ zum Pitotrohr bewegten Punkt 0 zum relativ zum Pitotrohr ruhenden Staupunkt 2:

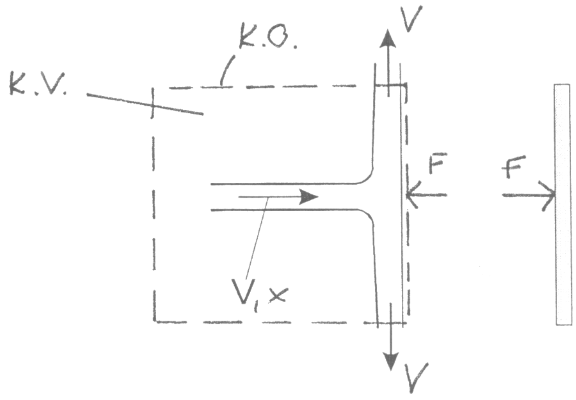
$$\frac{p_0}{\gamma} + z_o + \frac{V_o^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$\frac{p_0}{\gamma} = T$, $z_0 = 0$, $|V_0| = \omega L$, $z_2 = 0$, $V_2 = 0$ (Staupunkt):

$$\Rightarrow T = \frac{p_2}{\gamma} - \frac{(\omega\ L)^2}{2g}$$

$$H = \frac{p_2}{\gamma} - \left(\frac{p_2}{\gamma} - \frac{(\omega\ L)^2}{2g}\right) - \frac{(\omega\ L)^2}{2g} = 0$$

Aufgabe 4.5:



4.5.1:

$$\sum F_x = u\,(\rho\,\vec{V}\cdot\vec{A})$$

$$-F = V(-\rho V A)$$

$$F = \rho V^2 A$$

$$V = \sqrt{\frac{F}{\rho\cdot A}} = \sqrt{\frac{1000\,\mathrm{N}}{1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 0{,}01\,\mathrm{m}^2}} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

F wirkt von der Platte auf das Fluid. Die Kraft vom Fluid auf die Platte ist entgegengesetzt gleich.

4.5.2:

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A + \frac{V_A^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} + z + \frac{V^2}{2g}$$

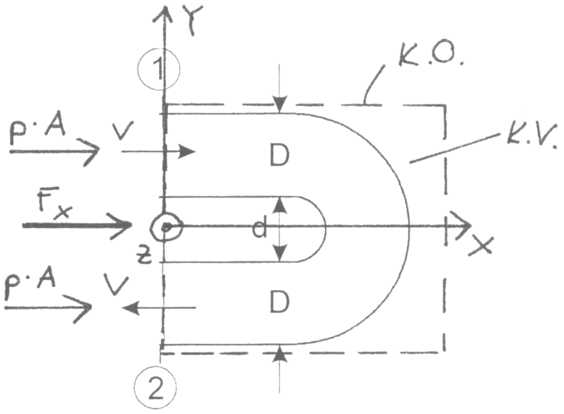
$$z_A = z$$

$V_A << V$ (großer Behälter)

$$\frac{p}{\gamma} = 0$$

$$p_A = \gamma\,\frac{V^2}{2g} = \rho\,\frac{V^2}{2} = \quad 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot\frac{\left(10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2} = 50\cdot 1000\,\frac{\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{m}^2} = 50\ \mathrm{kPa}$$

Aufgabe 4.6:



4.6 (a):

$$\sum F_x = \sum_{\mathrm{K.O.}} u(\rho\,\vec{V}\cdot\vec{A})$$

$$F_x + 2pA = V\left(-\rho Q\right) - V\rho Q$$

$$F_x = -2\left(pA + V\rho Q\right)$$

$$= -2\left(pA + \rho\frac{Q^2}{A}\right)$$

$$= -2\left(120\,\mathrm{kPa}\cdot\frac{\pi}{4}\left(0{,}3\,\mathrm{m}\right)^2 + 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\,\frac{\left(0{,}6\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right)^2}{\frac{\pi}{4}\left(0{,}3\,\mathrm{m}\right)^2}\right)$$

$$= -2\left(120\cdot 1000\,\frac{\pi}{4}\,0{,}3^2 + 1000\,\frac{0{,}6^2}{\frac{\pi}{4}\,0{,}3^2}\right)\mathrm{N} = -27{,}15\,\mathrm{kN}$$

4.6 (b):

$$F_z = G + \gamma \cdot \cancel{V} = 500\,\text{N} + 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0{,}1\,\text{m}^3$$
$$= (500 + 1000\cdot 9{,}81\cdot 0{,}1)\,\text{N} = 1{,}481\,\text{kN}$$
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{27{,}15^2 + 0^2 + 1{,}481^2}\,\text{kN} = 27{,}19\,\text{kN}$$

Aufgabe 4.7:

4.7.1:

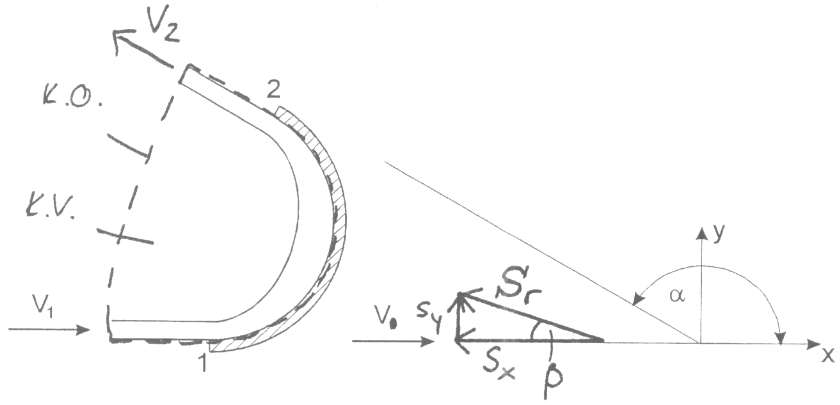
$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad \text{(Bernoulligleichung)}$$

$p_1 = p_2 = 0$ (Atmosphärendruck, Freistrahl)

$z_1 = z_2$ (horizontal)

$$0 + 0 + \frac{V_1^2}{2g} = 0 + 0 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$\Rightarrow V_2 = V_1$ (Freistrahl)



$$\sum \vec{F} = \int_{K.V.} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V})\,d\cancel{V} + \sum_{K.O.} \vec{V}(\rho \vec{V}\cdot\vec{A}) \quad \text{(Impulsgleichung)}$$

$$\sum \vec{F} = \sum_{K.O.} \vec{V}(\rho \vec{V}\cdot\vec{A}) \quad \text{stationär}$$

$$\sum F_x = \sum_{K.O.} u(\rho \vec{V}\cdot\vec{A}): \; -S_x = V_1(-\rho Q) - V_2 \underbrace{\cos(180-\alpha)}_{-\cos\alpha}\rho Q$$

$$\sum F_y = +\sum_{K.O.} v(\rho \vec{V}\cdot\vec{A}): \; S_y = \quad 0 \quad + V_2 \underbrace{\sin(180-\alpha)}_{\sin\alpha}\rho Q$$

$$S_x = V_1\,\rho Q\left(1 + \cos(180-\alpha)\right) = 1679\,\text{N}$$

$$S_y = V_1\,\rho Q \sin(180-\alpha) = 450\,\text{N}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{S_y}{S_x} = \frac{\sin(180-\alpha)}{1+\cos(180-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \operatorname{tg} 15°$$

$$\Rightarrow \beta = 15°$$

$$S_r = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = 1738\,\mathrm{N}$$

S_r wirkt von der Schaufel auf das Fluid. Vom Fluid auf die Schaufel wirkt die entgegengesetzt gleiche Kraft.

4.7.2:

Mit Schaufelgeschwindigkeit V_0 bewegtes K.V.

$$V_{rel} = V_1 - V_0 = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

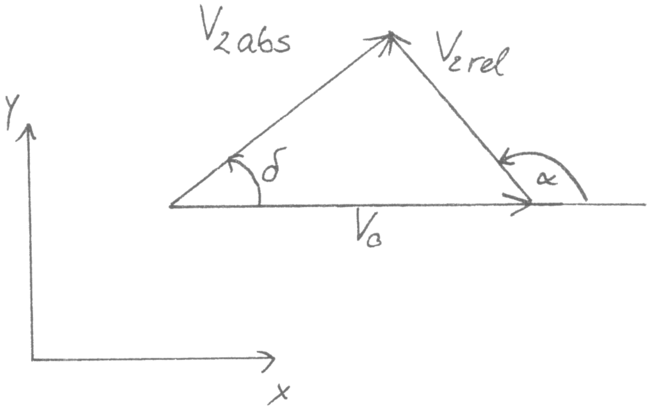
$$Q_{rel} = V_{rel} \cdot A = 0{,}001\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

$$S_x = V_{rel}\,\rho\,Q_{rel}\left(1+\underbrace{\cos(180-\alpha)}_{-\cos\alpha}\right) = 187\,\mathrm{N}$$

$$S_y = V_{rel}\,\rho\,Q_{rel}\,\underbrace{\sin(180-\alpha)}_{\sin\alpha} = 50\,\mathrm{N}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \operatorname{tg} 15° \Rightarrow \beta = 15°$$

$$S_b = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = 194\,\mathrm{N}$$



4.7.3:

$$\vec{V}_{2\,abs} = \vec{V}_{2\,rel} + \vec{V}_0$$

$$\left|V_{2\,rel}\right| = \left|V_{rel}\right|$$

$$\left(V_{2\,abs}\right)_x = V_0 - V_{rel}\,\underbrace{\cos(180-\alpha)}_{-\cos a} = 11{,}34\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

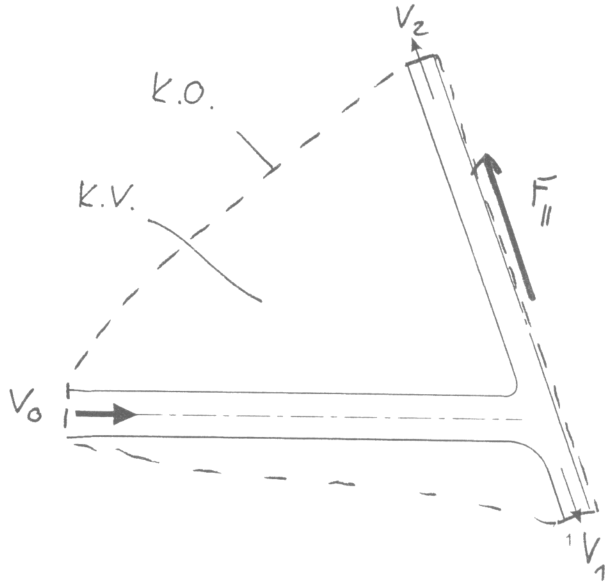
$$\left(V_{2\,abs}\right)_y = 0 + V_{rel}\,\underbrace{\sin(180-\alpha)}_{\sin\alpha} = 5{,}00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\left(V_{2\,abs}\right)_y}{\left(V_{2\,abs}\right)_x} \Rightarrow \delta = 23{,}79°$$

$$V_{2\,abs} = \sqrt{\left(V_{2\,abs}\right)_x^2 + \left(V_{2\,abs}\right)_y^2} = 12{,}39\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Aufgabe 4.8:

$$\sum \vec{F} = \sum_{K.O.} \vec{V}\left(\rho \vec{V} \cdot \vec{A}\right) \quad \text{(Abfluß positiv)}$$



4.8.1: ohne Reibung entlang der Platte

$\sum F_\parallel = - V_0 \sin\beta\,(-\rho\, Q) - V_1\, \rho\, Q_1 + V_2\, \rho\, Q_2 = 0$

$V_1 = V_2 = V_0$ (Bernoulli)

$Q = Q_1 + Q_2$ (Kontinuität)

$Q_1 = Q - Q_2$

$\Rightarrow + \sin\beta\, Q - (Q - Q_2) + Q_2 = 0$

$(1 - \sin\beta)\, Q = 2\, Q_2$

$Q_2 = \dfrac{1-\sin\beta}{2}\, Q = 1{,}99\ \ell/\text{s}$ (mit β aus 4.8.2)

$Q_1 = Q - Q_2 = 3{,}01\ \ell/\text{s}$

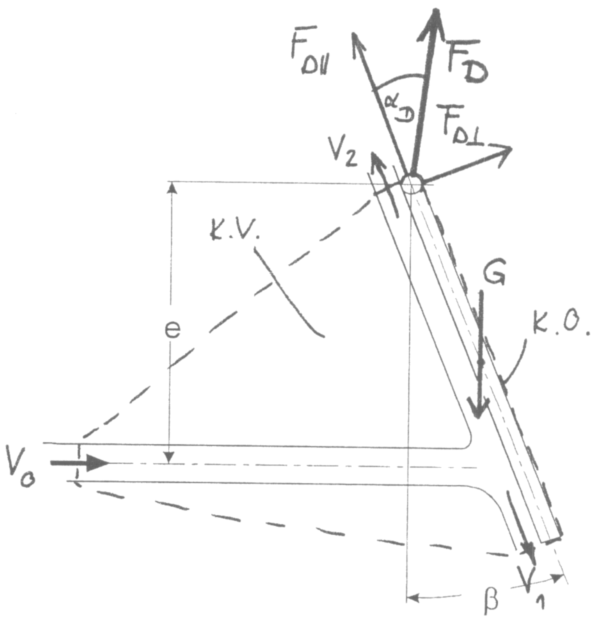
4.8.2:

$$\sum M_D = -G\,\frac{L}{2}\sin\beta = V_0\left(-\rho\, Q\right)\cdot e$$

(Momente von $V_1\, \rho\, Q_1, V_2\, \rho\, Q_2$ vernachlässigt)

$$\sin\beta = \frac{V_0\, \rho\, Q\, e}{G\,\frac{L}{2}}$$

$$\beta = \arcsin\frac{V_0\, \rho\, Q\, e}{G\,\frac{L}{2}} = 11{,}8°$$



4.8.3:

$\sum F_\parallel = F_{D\parallel} - G\cos\beta = -V_0 \sin\beta\,(-\rho\, Q) - V_1\, \rho\, Q_1 + V_2\, \rho Q_2 = 0$ (reibungsfrei: 4.8.1)

$F_{D\parallel} = G\cos\beta = 576{,}2$ N (wie Platte allein)

$\sum F_\perp = F_{D\perp} - G\sin\beta = V_0\cos\beta\,(-\rho\, Q)$

$F_{D\perp} = \underline{G\sin\beta - V_0}\cos\beta\rho\, Q = 46{,}95$ N

$F_D = \sqrt{F^2_{D\parallel} + F^2_{D\perp}} = 578{,}07$ N

$\alpha_D = \text{arctg}\,(F_{D\perp}/F_{D\parallel}) = 4{,}65^0$

Aufgabe 4.9:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = L \cdot tg\,30^\circ = 0{,}46\,m$$

$$\frac{P_1}{\gamma} = b + \frac{d}{2} \cdot \cos 30^\circ = 0{,}42\,m$$

$$\frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} = a \quad \text{(Pitotrohr)}$$

$$0 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + a$$

$$V_1 = \sqrt{2g\left(z_2 + a - \frac{P_1}{\gamma}\right)} = 2{,}58\,m/s$$

$$Q = V_1 \cdot A_1 = 5{,}07 \;\; l/s$$

Aufgabe 4.10:

$$\sum F_x = \sum_{K.O.} u(\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{A})$$

$$F_x = V \cdot \cos 45^\circ \cdot (-\rho \cdot Q) + V \cdot \cos 60^\circ \cdot (\rho \cdot \frac{Q}{2}) + 0$$

$$= V \cdot (-\cos 45^\circ + \frac{\cos 60^\circ}{2}) \cdot \rho \cdot Q$$

$$= 15\,m/s \cdot (-\cos 45^\circ + \frac{\cos 60^\circ}{2}) \cdot 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}1\,m^3/s$$

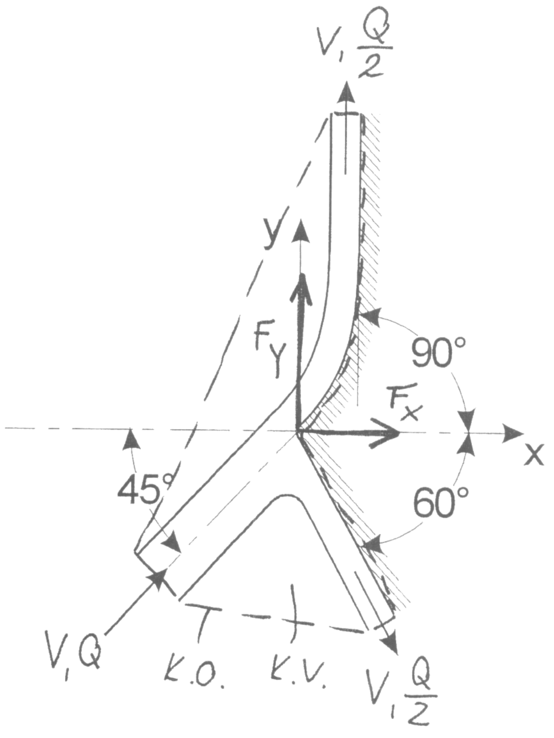
$$= -685{,}66\,N$$

$$F_y = V \cdot \sin 45^\circ \cdot (-\rho \cdot Q) - V \cdot \sin 60^\circ \cdot (\rho \frac{Q}{2}) + V \cdot (\rho \frac{Q}{2})$$

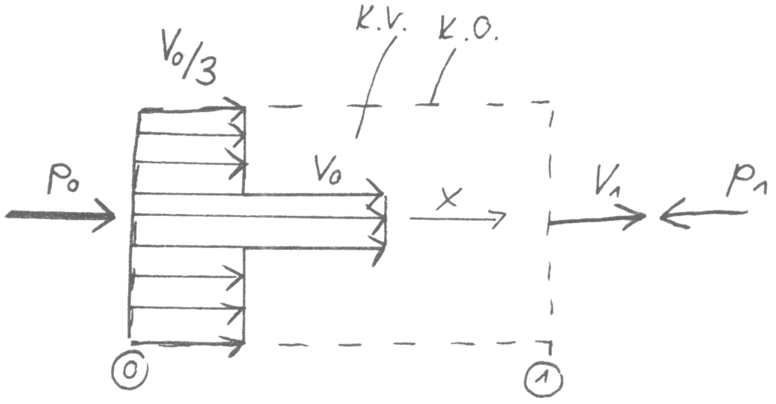
$$= V \cdot (-\sin 45^\circ - \frac{\sin 60^\circ}{2} + \frac{1}{2}) \cdot \rho \cdot Q$$

$$= 15\,m/s \cdot (-\sin 45^\circ + \frac{1 - \sin 60^\circ}{2}) \cdot 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}1\,m^3/s$$

$$= -960{,}18\,N$$



Aufgabe 4.11:



$$\sum \vec{F} = \sum_{K.O.} \vec{V} \cdot (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{A})$$

$$\sum F_x = \sum_{K.O.} u \cdot (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{A})$$

$$p_0 \cdot A - p_1 \cdot A = V_0 \cdot (-\rho_a \cdot V_0 \cdot a) + \frac{V_0}{3} \cdot (-\rho_b \cdot \frac{V_0}{3} \cdot (A - a)) + V_1 \cdot (\rho_1 \cdot V_1 \cdot A)$$

$$\rho_1 \cdot V_1 \cdot A - \rho_a \cdot V_0 \cdot a - \rho_b \cdot \frac{V_0}{3} \cdot (A - a) = 0 \quad \text{(Massenerhaltung)}$$

$$(p_0 - P_1) \cdot A = V_0 \cdot (-\rho_a \cdot V_0 \cdot a) + \frac{V_0}{3} \cdot (-\rho_b \cdot \frac{V_0}{3} \cdot (A - a))$$

$$+ V_1 \cdot (\rho_a \cdot V_0 \cdot a + \rho_b \cdot \frac{V_0}{3} \cdot (A - a))$$

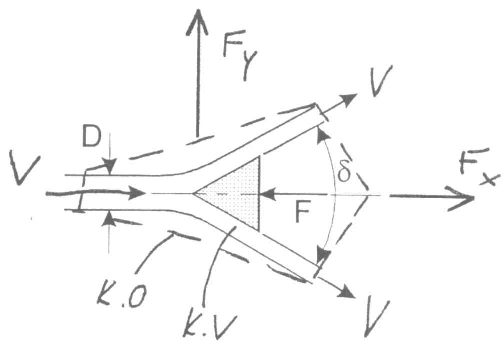
$$= V_0 \cdot (-\rho_a \cdot V_0 \cdot \frac{A}{3}) + \frac{V_0}{3} \cdot (-3 \cdot \rho_a \cdot \frac{V_0}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot A)$$

$$+ V_1 \cdot (\rho_a \cdot V_0 \cdot \frac{A}{3} + 3 \cdot \rho_a \cdot \frac{V_0}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot A)$$

$$p_0 - p_1 = \rho_a \cdot V_0 \cdot (-\frac{V_0}{3} - \frac{2}{9} \cdot V_0 + V_1 \cdot (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}))$$

$$= \rho_a \cdot V_0 \cdot (V_1 - \frac{5}{9} \cdot V_0)$$

Aufgabe 4.12:



$$F_x = \sum_{K.O} u \cdot (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{A})$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2}$$

$$-F = V \cdot (-\rho \cdot Q) + V \cdot \cos\frac{\delta}{2} \cdot (\rho \cdot Q)$$

$$= -V \cdot (1 - \cos\frac{\delta}{2}) \cdot \rho \cdot Q$$

$$= -\frac{1 - \cos\frac{\delta}{2}}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2} \cdot \rho \cdot Q^2$$

4 Lösungen zu Kapitel 5: Energiegleichung

Aufgabe 5.1:

5.1.1:
Zur Ermittlung des durch Kavitation gefährdeten Bereichs der Rohrleitung ist die Drucklinie erforderlich.
Druckbehälter:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \qquad z = z_i = 5\text{ m} \qquad p = p_i \qquad V \approx 0$$

$$H = z_i + \frac{p_i}{\gamma}$$

Bereich 1-2:

$$H = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} \qquad V_1 = \frac{Q}{A_1}$$

Bereich 3 - 5:

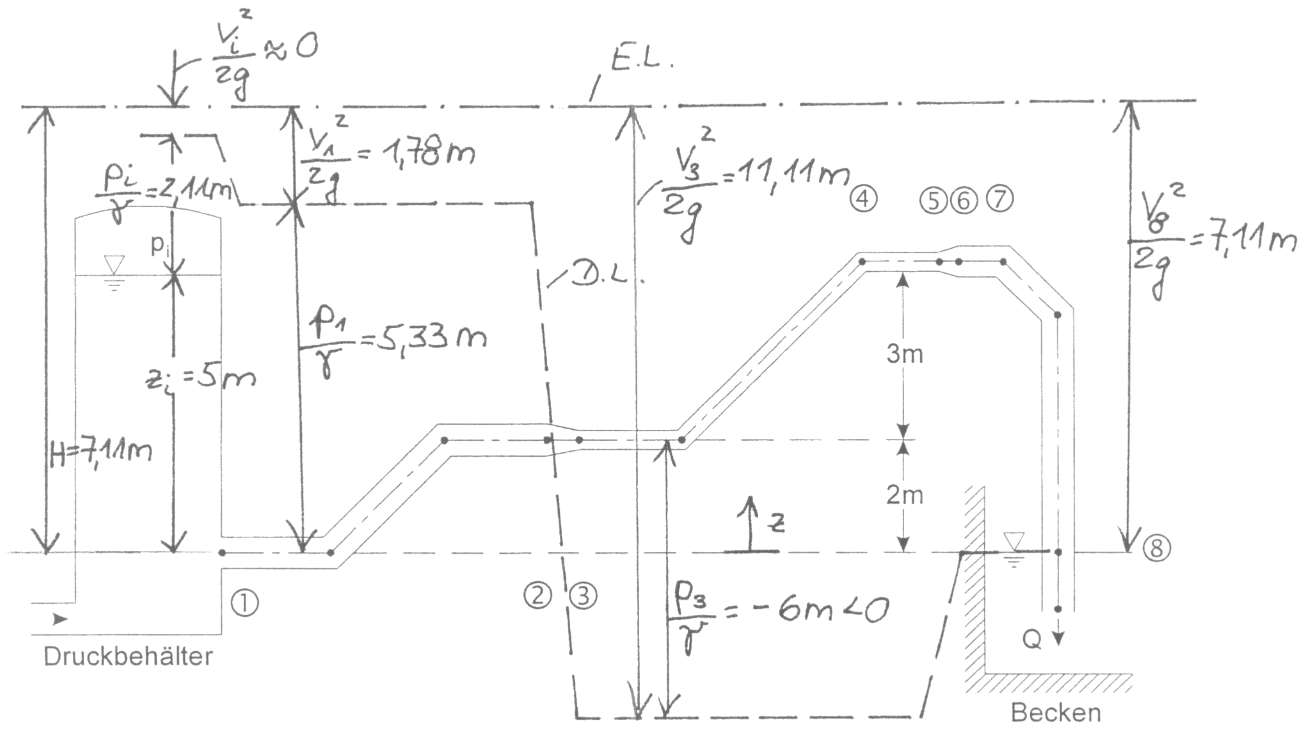
$$H = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} \qquad V_3 = \frac{Q}{A_3}$$

Bereich 6 -7:

$$H = z_6 + \frac{p_6}{\gamma} + \frac{V_6^2}{2g} \qquad V_6 = \frac{Q}{A_6} \qquad V_1 < V_6 < V_3$$

Bereich 7 - 8:

$$H = z_8 + \frac{p_8}{\gamma} + \frac{V_8^2}{2g} \qquad V_8 = V_6 \qquad z_8 = 0 \qquad p_8 = 0 \qquad H = \frac{V_8^2}{2g} = \frac{V_6^2}{2g}$$



Der gefährdete Bereich ist der Bereich mit dem niedrigsten Druck p, d.h. hier der Bereich mit der größten geodätischen Höhe $z = z_{max}$ und der größten Geschwindigkeit $V = V_{max}$ (kleinster Querschnitt): im Einzelfall prüfen. Der geringste mögliche Druck ist der Dampfdruck der Flüssigkeit.

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_5 = \frac{p_{min}}{\gamma} = \frac{p_D}{\gamma} = -9 \text{ m}$$

$$H = z_5 + \frac{p_5}{\gamma} + \frac{V_5^2}{2g} = \frac{V_6^2}{2g}$$

$$z_5 = 5\,\text{m} \qquad \left(\text{genau: } z_5 = 5\text{ m} + \frac{d_5}{2},\ \text{mit } d_5 = d_3 = \sqrt{\frac{A_3}{\frac{\pi}{4}}}\right)$$

$$V_6 A_6 = V_5 A_5$$

$$V_6 = \frac{A_5}{A_6} V_5$$

$$\frac{V_6^2}{2g} = \left(\frac{A_5}{A_6}\right)^2 \frac{V_5^2}{2g}$$

$$\left(1 - \left(\frac{A_5}{A_6}\right)^2\right) \frac{V_5^2}{2g} = -\frac{p_5}{\gamma} - z_5 = (9-5)\,\text{m} = 4\text{ m}$$

$$\frac{V_5^2}{2g} = 11{,}11\text{ m}$$

$$V_5 = 14{,}76\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Q = V_5 A_5 = 59{,}06\,\frac{\text{l}}{\text{s}}$$

5.1.2:

$$H = z_5 + \frac{p_5}{\gamma} + \frac{V_5^2}{2g} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$$

$$z_5 = 5\,\text{m}$$

$$\frac{p_5}{\gamma} = \frac{p_D}{\gamma} = -9\text{ m}$$

$$\frac{V_5^2}{2g} = 11{,}11\text{ m}$$

$$z = 5\,\text{m} = z_5$$

$$p = p_i$$

$$V \approx 0$$

$$H = z_5 + \frac{p_D}{\gamma} + \frac{V_5^2}{2g} = z_5 + \frac{p_i}{\gamma} + 0$$

$$\frac{p_i}{\gamma} = H - z_5 = \frac{p_D}{\gamma} + \frac{V_5^2}{2g} = 2{,}11\text{ m}$$

$$p_i = \rho \cdot g \cdot \frac{p}{\gamma} = 20{,}71\text{ kPa}$$

5.1.3:
siehe Skizze 5.1.1

$$H = z_5 + \frac{p_D}{\gamma} + \frac{V_5^2}{2g} = 7{,}11 \text{ m}$$

$$h_{1-2} = H - \frac{V_1^2}{2g}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = \left(\frac{A_5}{A_1}\right)^2 \frac{V_5^2}{2g} = 1{,}78 \text{ m}$$

Aufgabe 5.2:

5.2.1:

$$H = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$z_1 = z_2 = 0$$

$$p_1 - p_2 = \Delta p$$

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}$$

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$V_1 = \frac{A_2}{A_1} V_2$$

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right) \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{\frac{\Delta p}{\gamma}}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2} = 3 \text{ m}$$

$$V_2 = 7{,}67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_1 = \frac{A_2}{A_1} \cdot V_2 = 4{,}43 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = 1 \text{ m}$$

$$Q = V_1 A_1 = 4{,}43 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

5.2.2:

$$H = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g}$$

$$z_0 = c = 6 \text{ m}$$

$$p_o = p_i$$

$V_0 \approx 0$

$z_3 = c + b = 13{,}5\ \text{m}$

$\frac{p_3}{\gamma} = a = 5\ \text{m}$

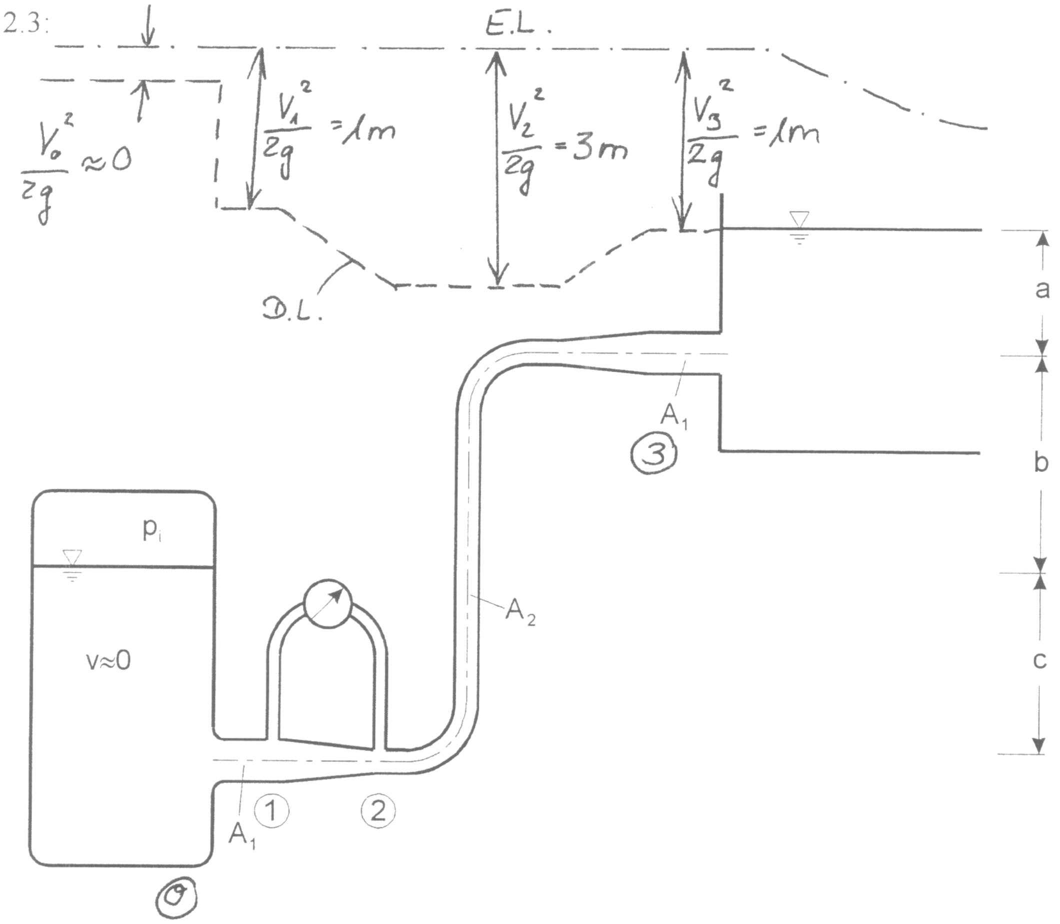
$\frac{V_3^2}{2g} = \frac{V_1^2}{2g} = 1\ \text{m}$

$c + \frac{p_i}{\gamma} + 0 = (c + b) + a + \frac{V_1^2}{2g}$

$\frac{p_i}{\gamma} = a + b + \frac{V_1^2}{2g} = 13{,}5\ \text{m}$

$p_i = \rho g \frac{p_i}{\gamma} = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 13{,}5\ \text{m} = 132{,}44\ \text{kPa}$

5.2.3:



Aufgabe 5.3:

5.3.1:

Arbeitsenergiegleichung:

$$h_{V_{1\text{-}2}} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + h_p - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} \right)$$

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = 3{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$V_2 = \frac{Q}{A_2} = 7 \ \frac{m}{s}$

$$h_p = \frac{\dot{W}_P}{\rho\, g\, Q} = \frac{350\ kW}{1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2} \cdot 1{,}4\ \frac{m^3}{s}} = 25{,}48\ m \text{ (Pumpenenergiehöhe)} \quad \left(1W = 1\frac{kg\, m^2}{s^3}\right)$$

$$h_{V_{1-2}} = 16\ m + \frac{70\ k\,Pa}{9810\ \frac{N}{m^3}} + 1{,}05\frac{\left(3{,}5\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2}} + 25{,}48\ m - \left[24\ m + \frac{150\ kPa}{9810\ \frac{N}{m^3}} + 1{,}05\frac{\left(7\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2}}\right] =$$

$$= \underbrace{23{,}79\ m}_{H_1} + \underbrace{25{,}48\ m}_{h_P} - \underbrace{41{,}89\ m}_{H_2} = 7{,}38\ m$$

$$\frac{h_{V_{1-2}}}{h_P} = \frac{7{,}38}{25{,}48} = 28\ \%$$

$h_{V\ 1\text{-}2}$ enthält alle Verluste in Pumpe und Rohr infolge der Flüssigkeitsreibung. Wirkungsgrad von Pumpen 80-90 % effektiv, d.h. 10-20 %Verlust in der Pumpe. Rest des Verlusts gegenüber 28 % aus der Rohrreibung.

5.3.2:

Annahme: gut isoliertes System ohne Wärmefluß nach außen.

$P_{V\,1-2} = \rho\, g Q\, h_{V\,1-2} = \rho\, c_P\, \Delta T\, Q$ (Leistungsverlust)

$c_P = 4217 \frac{J}{kg \cdot K}$ (spezifische Wärme von Wasser pro Masseneinheit)

$$\Delta T = \frac{g \cdot h_{V\,1-2}}{c_P} = \frac{9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 7{,}38\, m}{4217 \frac{J}{kg\, K}} = 0{,}02\, K = 0{,}02°\, C \qquad \text{(vernachlässigbar)} \quad \left(1\, J = 1 kg \frac{m^2}{s^2}\right)$$

- Hohe spezifische Wärme des Wassers
- Vorgang irreversibel

Aufgabe 5.4:

5.4.1:

Behälter:

$$H = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g}$$

$z_0 = 5m$

$\frac{p_0}{\gamma} = 0$ (Atmosphärendruck)

$V_0 \approx 0$ (großer Behälter)

$H = 5m + 0 + 0 = 5m$ (reibungsfrei: Energielinie horizontal)

Rohrende:

$$H = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g}$$

$z_1 = 0$

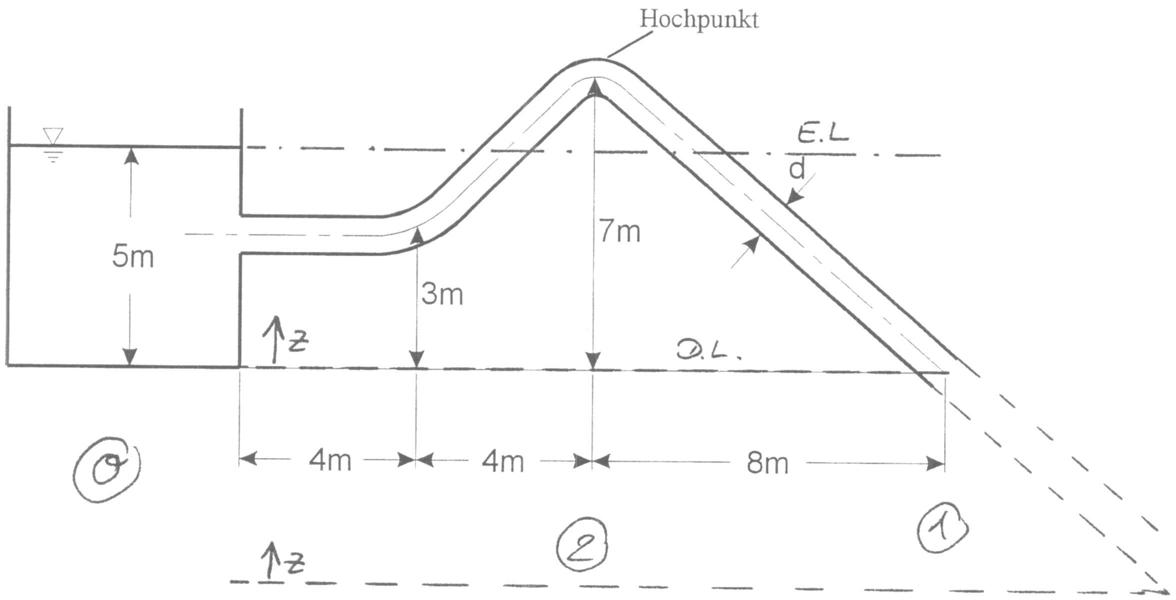
$$\frac{p_1}{\gamma} = 0 \qquad \text{(Atmosphärendruck)}$$

$$H = 0 + 0 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_1^2}{2g}$$

Rohr:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$$

$V = V_1$ (D.L. ‖ E.L., da V = konst. im Rohr)



5.4.2:

$$H = \frac{V_1^2}{2g}$$

$$V_1 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 5m} = 9{,}9\frac{m}{s}$$

$$Q = V_1 \cdot A = V_1 \cdot \frac{\pi}{4} D^2 = 9{,}9\frac{m}{s} \cdot \frac{\pi}{4}(0{,}5\ m)^2 = 1{,}95\frac{m^3}{s}$$

5.4.3:

Kavitation am höchstgelegenen Rohrleitungspunkt (Stelle 2: $z_2 = z_{max}$, $p_2 = p_{min}$): Unterdruck

$$H = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$z_2 = 7m$

$$H = \frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g}$$

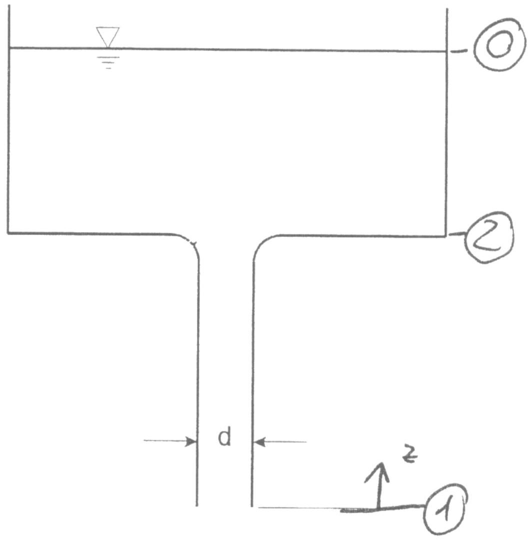
$$\frac{p_2}{\gamma} = -z_2 = -7m \qquad \text{(Unterdruck)}$$

Der Unterdruck (die Kavitationsgefahr) nimmt mit wachsender geodätischer Höhe z_2 des Rohres zu.

5.4.3(a):
Der Flüssigkeitsstand im Behälter ist hier ohne Einfluß auf die Kavitationsgefahr im Punkt 2.

5.4.3(b).
Bei einer Verlängerung des Rohrendes nach unten (strichliert) vergrößert sich die mechanische Energiehöhe H und infolgedessen der Durchfluß Q gegenüber 5.4.2. Die geodätische Höhe z_2 wächst an, ebenso die Kavitationsgefahr.

Aufgabe 5.5:



5.5.1:

$$H = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g}$$

$$z_0 = L + h$$

$$\frac{p_0}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} = 0 \qquad \text{(Atmosphärendruck)}$$

$$V_0 \approx 0$$

$$z_1 = 0$$

$$H = L + h + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{V_1^2}{2g}$$

$$H = L + h = \frac{V_1^2}{2g}$$

$$V_1 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2g(L+h)}$$

$$Q = V_1 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 = \sqrt{2g(L+h)} \cdot \frac{\pi}{4} d^2$$

5.5.2:

$$H = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_2 = V_1 \quad \text{(Kontinuität)}$$

$$H = \frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = -z_2 \qquad \text{(Kavitationsgefahr am Behälterauslauf: } z_2 = L\text{)}$$

$$\left(\frac{p_2}{\gamma}\right)_{min} = -L$$

Die Kavitationsschwelle $(p_2/\gamma)_{min}$ ergibt sich aufgrund von Beobachtungen aus der Kavitationszahl K.

$$K = \frac{p - p_D}{\frac{\rho}{2} V^2} \leq K_{krit} \approx 0{,}82$$

$$p = (p_2)_{min}$$

$$V = V_1$$

$$(p_2)_{min} = p_D + 0{,}82 \frac{\rho}{2} V_1^2$$

$$\left(\frac{p_2}{\gamma}\right)_{min} = \frac{p_D}{\gamma} + 0{,}82 \frac{V_1^2}{2g} =$$

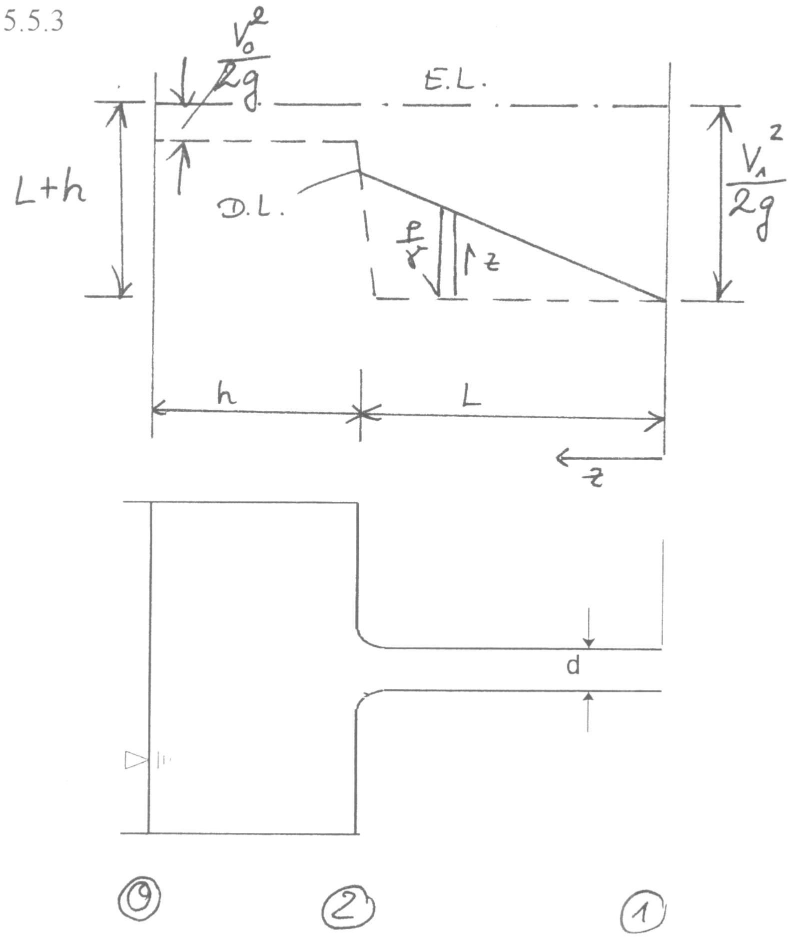
$$= \frac{p_D}{\gamma} + 0{,}82(L + h) = -L$$

$$1{,}82 \cdot L = -\frac{p_D}{\gamma} - 0{,}82\,h$$

$$L = \frac{-\frac{p_D}{\gamma} - 0{,}82 \cdot h}{1{,}82} =$$

$$= \frac{-(-7\,m) - 0{,}82 \cdot 1\,m}{1{,}82} = 3{,}40\,m$$

5.5.3



Im Rohr:

$z + \frac{p}{\gamma} = 0$

Aufgabe 5.6:

5.6.1:

$$H = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g}$$

$$z_2 = z_3$$

$$\frac{p_2 - p_3}{\gamma} = \Delta h$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} \quad ; \quad V_3 = \frac{Q}{A_3}$$

$$z_2 + \Delta h + \left(\frac{1}{A_2}\right)^2 \frac{Q^2}{2g} = z_3 + \left(\frac{1}{A_3}\right)^2 \frac{Q^2}{2g}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\frac{1}{A_3^2} - \frac{1}{A_2^2}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 20\ m}{\frac{1}{\left(\frac{\pi}{4} \cdot 0{,}1^2 m^2\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{\pi}{4} \cdot 0{,}2^2 m^2\right)^2}}} = 0{,}16\ \frac{m^3}{s}$$

5.6.2:

Für die Rohre 6 und 7 stimmen Energielinie und Drucklinie überein, d.h. die Geschwindigkeits- höhen sind gleich.

$$\frac{V_6^2}{2g} = \frac{V_7^2}{2g}$$

$$V_6 = V_7$$

$$Q_6 \quad = \quad 2Q_7$$

$$V_6 \frac{\pi}{4} d_6^2 = \ 2V_7 \frac{\pi}{4} d_7^2 = 2V_6 \frac{\pi}{4} d_7^2$$

$$d_6^2 = 2d_7^2$$

$$d_7 = \frac{d_6}{\sqrt{2}} = 0{,}0707\ m$$

5.6.3:

$$H = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_7 + \frac{p_7}{\gamma} + \frac{V_7^2}{2g}$$

$$z_A = 30\ m$$

$$\frac{p_A}{\gamma} = 0$$

$$V_A \approx 0$$

$$z_7 = 0$$

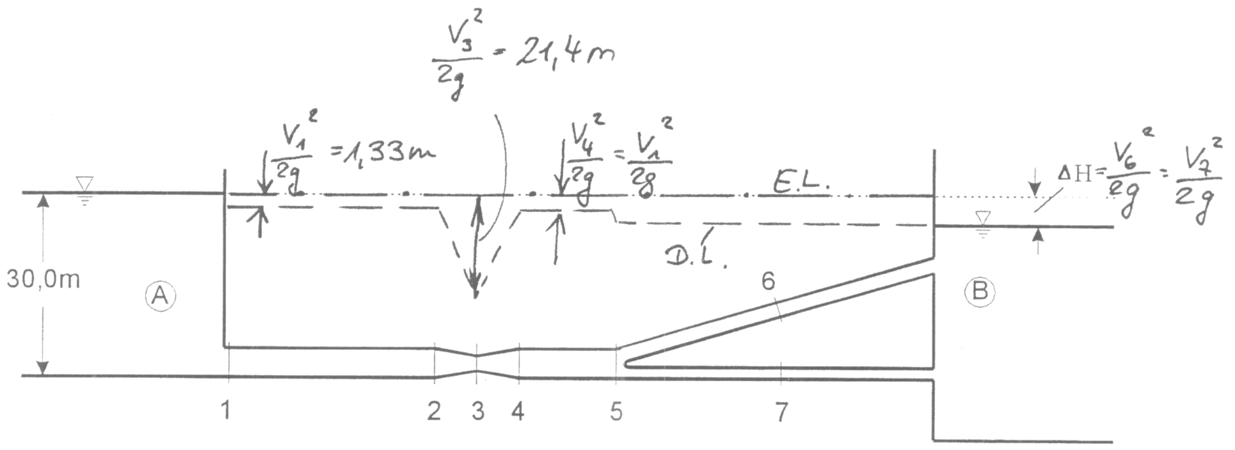
$$\frac{p_7}{\gamma} = z_A - \Delta H$$

$$V_7 = \frac{\frac{1}{3}Q}{A_7} = \frac{\frac{1}{3}Q}{\frac{\pi}{4}d_7^2}$$

$$H = z_A + 0 \ + 0 = 0 + z_A - \Delta H + \frac{V_7^2}{2g}$$

$$\Delta H = \frac{V_7^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{\frac{1}{3}Q}{\frac{\pi}{4}d_7^2}\right)^2 = \frac{1}{2\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}\left(\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}16\frac{m^3}{s}}{\frac{\pi}{4}\cdot(0{,}0707\,m)^2}\right)^2 = 9{,}40\text{ m}$$

5.6.4:



Aufgabe 5.7:

$$H = z \ + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$z = z$

$p = 0$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{\pi}{4}d^2}$$

$z_2 = y$

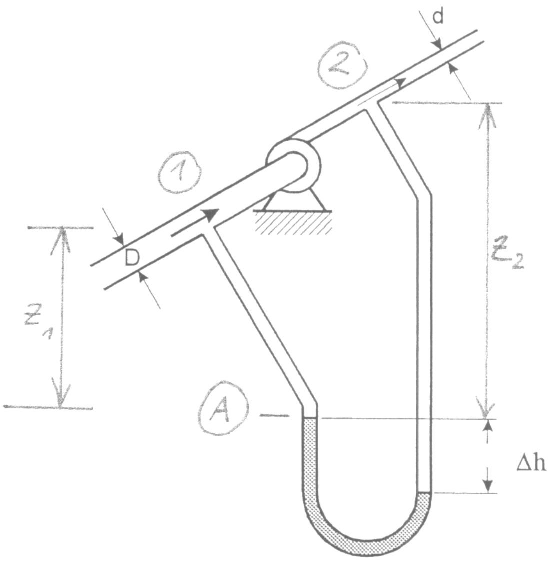
$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{\frac{\pi}{4}D^2}$$

$$z + 0 + \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{\frac{\pi}{4}d^2}\right)^2 = y + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{\frac{\pi}{4}D^2}\right)^2$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = z - y + \frac{1}{2g}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\left(\frac{1}{d^4} - \frac{1}{D^4}\right)Q^2 =$$

$$= 8\,m - 2\,m + \frac{1}{2\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\left(\frac{1}{0{,}15^4} - \frac{1}{0{,}3^4}\right)\frac{0{,}2^2\,m^4}{m^4 s^2} = 12{,}12\text{ m}$$

Aufgabe 5.8:



$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma_{Öl}} + \frac{V_1^2}{2g} + h_P = z_2 + \frac{p_2}{\gamma_{Öl}} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$z = 0$: $\quad p = p_A$

$z = z_2$: $\quad p_A = p_2 + \gamma_{Öl}\ z_2$

$z = z_1$: $\quad p_A = p_1 + \gamma_{Öl}\,(z_1 - \Delta h) + \gamma_{Hg}\,\Delta h$

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma_{Öl}} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma_{Öl}} + \left(\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_{Öl}} - 1\right)\Delta h$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma_{Öl}} + \frac{V_1^2}{2g} + h_P = z_1 + \frac{p_1}{\gamma_{Öl}} + \left(\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_{Öl}} - 1\right)\Delta h + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$h_P = \left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho_{Öl}} - 1\right)\Delta h + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}$$

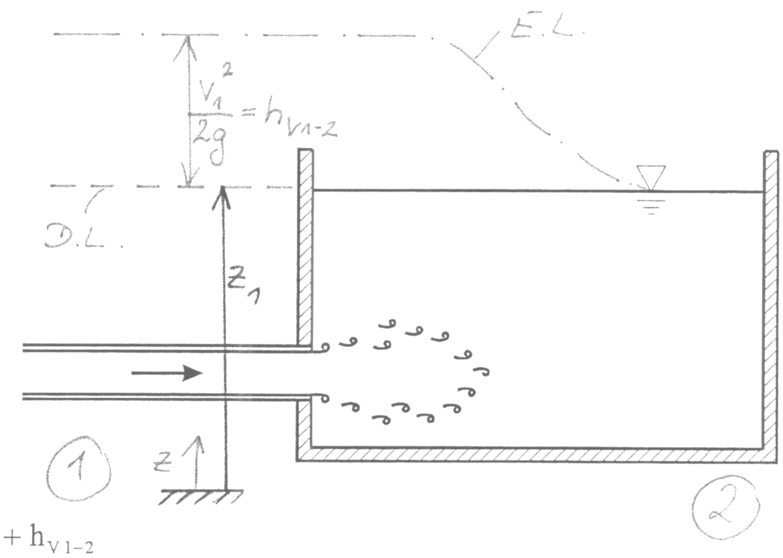
$$V_1 = \frac{Q}{\frac{\pi}{4}D^2} = \frac{0{,}1}{\frac{\pi}{4}0{,}3^2}\,\frac{m}{s} = 1{,}41\ \frac{m}{s}$$

$$V_2 = \frac{Q}{\frac{\pi}{4}d^2} = \frac{0{,}1}{\frac{\pi}{4}0{,}15^2}\,\frac{m}{s} = 5{,}66\ \frac{m}{s}$$

$$h_P = \left(\frac{13550}{880} - 1\right)\ 0{,}9\ m + \frac{\left(5{,}66^2 - 1{,}41^2\right)\left(\frac{m}{s}\right)^2}{2\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}} = 14{,}49\ m$$

$$P = \gamma_{Öl}\ Q\ h_P = 880\ \frac{kg}{m^3}\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}1\frac{m^3}{s}\cdot 14{,}49\ m = 12{,}51\ kW$$

Aufgabe 5.9:



$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_{V\,1-2}$$

Aufgabe 5.10

5.10.1:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + h_P = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_V$$

$z_1 = 30 \text{ m}$

$\frac{p_1}{\gamma} = 0$

$V_1 \approx 0$

$z_2 = 50 \text{ m}$

$\frac{p_2}{\gamma} = 0$

$V_2 = V$

$$h_V = h_{L1} + h_{L2} = 0{,}015 \frac{L_1 + L_2}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$z_1 + 0 + 0 + h_P = z_2 + 0 + \frac{V^2}{2g} + h_V$$

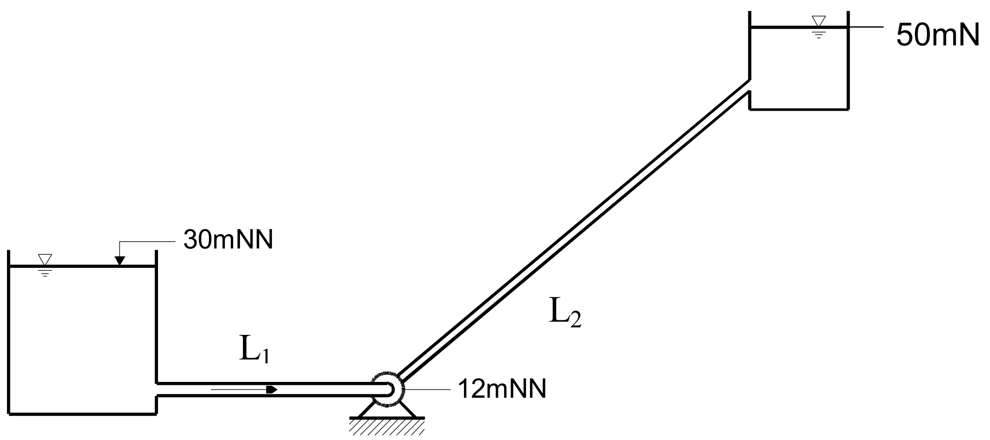
$$h_P = z_2 - z_1 + h_V + \frac{V^2}{2g} = z_2 - z_1 + \left(0{,}015 \frac{L_1 + L_2}{D} + 1\right) \frac{V^2}{2g}$$

$$= (50 - 30)\,\text{m} + \left(0{,}015 \frac{350 + 700}{0{,}2} + 1\right) \frac{1}{2 \cdot 9{,}81} \left(\frac{0{,}08}{\frac{\pi}{4} \cdot 0{,}2^2}\right)^2 \text{m} = 46{,}36 \text{ m}$$

$$P = \gamma Q h_p = 1000 \,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81 \,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}08 \,\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot 46{,}36 \text{ m} =$$

$$= 36383{,}33 \text{ W} = 36{,}38 \text{ kW} \quad \left(1\text{W} = 1 \frac{\text{kg}\,\text{m}^2}{\text{s}^3}\right)$$

5.10.2:



5 Lösungen zu Kapitel 6: Dimensionsanalyse

Aufgabe 6.1:

6.1.1:

Dimensionsanalyse

1) Alle signifikanten Variablen feststellen und in funktionale Form bringen.

$$\underbrace{\underset{[T]}{t}}_{\text{abh. Var.}} = f\,\underbrace{(\underset{\left[\frac{L}{T^2}\right]}{b},\ \underset{[L]}{H})}_{\text{unabh. Var.}} \qquad \left.\begin{array}{l} N = 3 \\ M = 2 \end{array}\right\} N - M = 1 \text{ dimensionsloser Parameter}$$

2) Eine unabhängige Variable, die eine bestimmte Dimension enthält, wählen und mit allen anderen Variablen so kombinieren, daß die Dimension eliminiert wird.

L: H [L]

$$t = f_2 \left(\frac{b}{H}\right) \quad \left[\frac{1}{T^2}\right]$$

3) Prozedur mit anderen unabhängigen Variablen wiederholen, bis die Gleichung dimensionslos ist.

T: $\frac{b}{H}\left[\frac{1}{T^2}\right]$

$$t \cdot \sqrt{\frac{b}{H}} = f_3 = \text{konst.}$$

$$t = \text{konst.} \cdot \sqrt{\frac{H}{b}}$$

Modellähnlichkeit:

1) Geometrische Ähnlichkeit

$$\frac{H_m}{H_P} = \frac{1}{5} = H_r$$

H_m......Erde

H_P.......Mond

2) Dynamische Ähnlichkeit

$$\frac{b_m}{b_P} = \frac{g}{\frac{g}{6}} = 6 = b_r$$

b_m.......Erde

b_P........Mond

3) Folgerung

$$\frac{t_m}{t_P} = \sqrt{\frac{H_m}{H_P} \cdot \frac{b_P}{b_m}} = \sqrt{\frac{H_r}{b_r}} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 6}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

t_m.......Erde

t_P.......Mond

$$t_P = \sqrt{30}\, t_m = \sqrt{30} \cdot 60\,\text{s} = 329\,\text{s}$$

6.1.2 a:
Einfluß der kinematischen Viskosität ν

Dimensionsanalyse

1) $t = f(b, \quad H, \quad \nu)$

$$[T] \quad \left[\frac{L}{T^2}\right] \quad [L] \quad \left[\frac{L^2}{T}\right] \qquad \left.\begin{matrix} N = 4 \\ M = 2 \end{matrix}\right\} N - M = \text{ 2 dimensionslose Parameter}$$

2) L: H [L]

$$t = f_2 = \left(\frac{b}{H}, \frac{\nu}{H^2}\right)$$

3) T: $\frac{b}{H}\left[\frac{1}{T^2}\right]$

$$t\sqrt{\frac{b}{H}} = f_3\left(\frac{\nu}{H^2}\sqrt{\frac{H}{b}}\right)$$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{bH}}{\frac{H}{t}}}_{\frac{1}{Fr}} \qquad \frac{\nu}{H\sqrt{bH}} = \underbrace{\frac{\nu}{V \cdot H}}_{\frac{1}{Re}} \; \underbrace{\frac{V}{\sqrt{b\,H}}}_{Fr} = \frac{Fr}{Re}$$

$$V = \frac{H}{t}$$

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{b\,H}}, \qquad Re = \frac{V \cdot H}{\nu}$$

$$\frac{1}{Fr} = f_3\left(\frac{Fr}{Re}\right)$$

$$Fr = f_4\,(Re)$$

6.1.2 b:

Einfluß der dynamischen Viskosität μ
Dimensionsanalyse

1) $t = f(b, \quad H, \quad \mu, \quad \rho)$

$$[T] \quad \left[\frac{L}{T^2}\right] \quad [L] \quad \left[\frac{F \cdot T}{L^2}\right] \quad \left[\frac{F \cdot T^2}{L^4}\right] \qquad \left.\begin{matrix} N = 5 \\ M = 3 \end{matrix}\right\} N - M = \text{ 2 dimensionslose Parameter}$$

2) L: H [L]

$$t = f_2 \left(\frac{b}{H}, \quad \mu \cdot H^2, \rho\, H^4\right)$$

$$\left[\frac{1}{T^2}\right] \quad [F \cdot T] \, [F \cdot T^2]$$

3) T: $\frac{b}{H}\left[\frac{1}{T^2}\right]$

$$t\sqrt{\frac{b}{H}} = f_3\left(\underbrace{\mu\, H^2\sqrt{\frac{b}{H}}}_{[F]}, \underbrace{\rho H^4\,\frac{b}{H}}_{[F]}\right)$$

$\underline{F}$: $\mu\, H^2 \sqrt{\frac{b}{H}}$

$$\underbrace{\underbrace{t\sqrt{\frac{b}{H}}}_{\frac{t}{H}\sqrt{b\,H}}}_{\frac{1}{Fr}} = \underbrace{f_4\left(\frac{\rho\, H^4 \frac{b}{H}}{\mu\, H^2\sqrt{\frac{b}{H}}}\right)}_{\frac{\rho}{\mu} H^2\sqrt{\frac{b}{H}} =} \qquad V = \frac{H}{t}$$

$$\frac{\rho}{\mu}\, H\sqrt{b\,H} = \frac{V\cdot H}{\nu}\frac{\sqrt{b\,H}}{V} = \frac{Re}{Fr}$$

$$\frac{1}{Fr} = f_4\left(\frac{Re}{Fr}\right)$$

$Fr = f_5(Re)$ wie Einfluß der kinematischen Viskosität ν auf Seite 88 unter 3

Aufgabe 6.2:

6.2.1:
Es ist (a) die Dichte ρ wegen der Trägheit und (b) das spezifische Gewicht γ bzw. die Erdbeschleunigung g wegen der Gravitation (freie Oberfläche) erforderlich.

6.2.2: Dimensionsanalyse

1) $N = f(d, D, h, y, \omega, \rho, \gamma, \mu)$ $\qquad \mu = \nu\cdot\rho$

$$\underbrace{\left[\frac{F\cdot L}{T}\right]}_{\left[\frac{M\,L}{T^2}\cdot\frac{L}{T}\right]} \quad [L] \quad \left[\frac{1}{T}\right] \left[\frac{M}{L^3}\right] \underbrace{\left[\frac{F}{L^3}\right]}_{\left[\frac{M}{L^2T^2}\right]} \left[\frac{L^2}{T}\frac{M}{L^3}\right]$$

$$= \left[M\frac{L^2}{T^3}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} N = 9 \text{ Variable} \\ M = 3 \text{ Dimensionen} \end{array}\right\} N - M = 6 \text{ dimensionslose Parameter}$$

2) $\underline{L:}$ d [L]

$$\frac{N}{d^2} = f_1\left(\frac{D}{d}, \frac{h}{d}, \frac{y}{d}, \omega,\ \rho\, d^3, \gamma\, d^2,\ \mu\, d\right)$$

$$\left[\frac{1}{T}\right][M]\left[\frac{M}{T^2}\right]\left[\frac{M}{T}\right]$$

3) <u>T:</u> $\omega = \left[\frac{1}{T}\right]$

$$\frac{N}{d^2\omega^3} = f_2\left(\frac{D}{d},\frac{h}{d},\frac{y}{d},\ \rho d^3, \frac{\gamma d^2}{\omega^2},\ \frac{\mu d}{\omega}\right)$$

$$[M] \qquad\qquad\qquad [M]\ [M]\quad [M]$$

<u>M:</u> $\rho d^3 [M]$

$$\frac{N}{\rho d^5\omega^3} = f_3\left(\frac{D}{d},\frac{h}{d},\frac{y}{d},\frac{\gamma d^2}{\omega^2 \rho d^3},\ \frac{\mu d}{\omega \rho d^3}\right)$$

$$\left[\frac{g}{d\omega^2}\right] \quad \left[\frac{\nu}{d^2\omega}\right]$$

$$\frac{N}{\rho d^5\omega^3} = f_3\left(\frac{D}{d},\frac{h}{d},\frac{y}{d},\frac{g}{d\omega^2},\frac{\nu}{d^2\omega}\right)$$

<u>6.2.3 (a)</u>: Froudezahl

$$\frac{g}{d\omega^2} = \left(\frac{\sqrt{g\cdot d}}{d\cdot\omega}\right)^2 = \frac{1}{Fr^2}$$

$$Fr = \frac{d\cdot\omega}{\sqrt{g\cdot d}} = \sqrt{\frac{d}{g}}\ \omega$$ $d\,\omega$ Geschwindigkeit

<u>6.2.3 (b):</u> Reynoldszahl

$$\frac{\nu}{d^2\omega} = \frac{\nu}{(d\omega)d} = \frac{1}{Re}$$

$$Re = \frac{d^2\,\omega}{\nu}$$

<u>6.2.4 (a)</u>: Froudesches Ähnlichkeitsgesetz

$$\frac{Fr_m}{Fr_p} = \sqrt{\underbrace{\frac{d_m}{d_p}}_{L_r}\ \underbrace{\frac{g_p}{g_m}}_{\frac{1}{g_r}}}\ \frac{\omega_m}{\omega_p} = Fr_r \overset{!}{=} 1$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{g_r}{L_r}}\omega_p = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}}}\omega_p = \sqrt{2}\cdot\omega_p$$

<u>6.2.4 (b) Reynoldssches Ähnlichkeitsgesetz</u>

$$\frac{Re_m}{Re_p} = \left(\frac{d_m}{d_p}\right)^2 \frac{\omega_m}{\omega_p}\frac{\nu_p}{\nu_m} = \frac{L_r^2}{\nu_r}\frac{\omega_m}{\omega_p} \overset{!}{=} 1$$

$$\omega_m = \frac{\nu_r}{L_r^2}\omega_p = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\omega_p = 4\omega_p$$

DILEMMA: $\omega_{m\,\text{Froude}} = \sqrt{2}\,\omega_p \neq \omega_{m\,\text{Reynolds}} = 4\,\omega_p$

a) Froudesche und Reynoldssche Ähnlichkeit sind nur bei großen Reynoldszahlen möglich.

b) Die Froudesche Ähnlichkeit ist wegen der freien Oberfläche wichtig, die Reynoldssche Ähnlichkeit nur bei Fortfall oder vernachlässigbarem Einfluß der freien Oberfläche zu verwirklichen.

Aufgabe 6.3:

1) $Q = f(\vartheta, h, \rho, \gamma)$ $\quad \left.\begin{matrix} N = 5 \\ M = 3 \end{matrix}\right\}$ N - M = 2 dimensionslose Parameter

$$\left[\frac{L^3}{T}\right] \quad [1]\,[L]\left[\frac{M}{L^3}\right]\left[\frac{M}{L^2T^2}\right]$$

2) $\underline{L}$: $\quad h\,[L]$

$$\frac{Q}{h^3} = f_2\left(\vartheta, \rho h^3, \gamma h^2\right)$$

$$\left[\frac{1}{T}\right] \quad [1]\,[M]\left[\frac{M}{T^2}\right]$$

3) $\underline{M}$: $\quad \rho h^3 [M]$

$$\frac{Q}{h^3} = f_3\left(\vartheta, \frac{\gamma h^2}{\rho h^3}\right) = f_3\left(\vartheta, \frac{g}{h}\right)$$

$$\left[\frac{1}{T}\right] \qquad [1]\left[\frac{1}{T^2}\right]$$

$\underline{T}$: $\quad \frac{g}{h}\left[\frac{1}{T^2}\right]$

$$\frac{Q}{h^3}\sqrt{\frac{h}{g}} = f_4(\vartheta)$$

$$\frac{Q}{\sqrt{g h^5}} = f_4(\vartheta)$$

$$Q = \underbrace{f_4(\vartheta)}_{\equiv\, k\, = k(\vartheta)} \cdot \sqrt{g}\; h^{\frac{5}{2}}$$

Aufgabe 6.4:

1) $\Delta h = f(d, h, U, \gamma, \rho, \mu)$

$$[L] \quad [L]\left[\frac{L}{T}\right]\left[\frac{F}{L^3}\right]\left[\frac{F T^2}{L^4}\right]\left[\frac{F T}{L^2}\right]$$

2) <u>L</u>: $d\,[L]$

$$\frac{\Delta h}{d} = f_2\left(\frac{h}{d},\ \frac{U}{d}, \gamma d^3, \rho d^4,\ \mu d^2\right)$$

$$[1] \qquad [1]\ \left[\frac{1}{T}\right] [F]\ \left[F T^2\right]\left[F T\right]$$

3) <u>F</u>: $\gamma d^3 [F]$

$$\frac{\Delta h}{d} = f_3\left(\frac{h}{d},\ \frac{U}{d}, \frac{\rho d^4}{\gamma d^3}, \frac{\mu d^2}{\gamma d^3}\right)$$

$$= f_3\left(\frac{h}{d},\ \frac{U}{d}, \frac{d}{g}, \frac{\nu}{g d}\right)$$

$$[1] \qquad [1]\ \left[\frac{1}{T}\right]\left[T^2\right]\left[T\right]$$

<u>T</u>: $\frac{U}{d}\left[\frac{1}{T}\right]$

$$\frac{\Delta h}{d} = f_4\left(\frac{h}{d},\ \frac{d}{g}\left(\frac{U}{d}\right)^2, \frac{\nu}{g d}\frac{U}{d}\right) =$$

$$= f_4\left(\frac{h}{d}, \underbrace{\frac{U^2}{g d}}_{\frac{h}{d}\cdot Fr^2}, \underbrace{\frac{\nu}{U d}}_{\frac{1}{Re}} \cdot \underbrace{\frac{U^2}{g d}}_{Fr^2\cdot\frac{h}{d}}\right) =$$

$$= f_5\left(\frac{h}{d}, Fr,\ Re\right)$$

<u>Aufgabe 6.5:</u>

6.5.1:

$$Q = \frac{2}{3} C \cdot L \quad \sqrt{2 g} \quad H^{\frac{3}{2}}$$

$$\left[\frac{L^3}{T}\right] \qquad [1]\cdot [L]\cdot \left[\frac{\sqrt{L}}{T}\right]\cdot\left[\sqrt{L^3}\right] = \left[L\frac{\sqrt{L}}{T}\sqrt{L^3}\right] = \left[\frac{L^3}{T}\right]$$ homogen

6.5.2:

$$V = K_{St} \quad R^{\frac{2}{3}} \quad S^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\frac{L}{T}\right] \quad \left[L^{-\frac{1}{6}}\right]\cdot\left[L^{\frac{2}{3}}\right]\ [1] = \left[L^{-\frac{1}{6}+\frac{4}{6}}\right] = \left[L^{\frac{1}{2}}\right]$$ NICHT homogen

6.5.3:

$$h_f = f\ \frac{L}{D}\ \frac{V^2}{2 g}$$

$$[L] \quad [1][1]\ \left[\frac{L^2}{T^2}\ \frac{T^2}{L}\right] = [L]$$ homogen

6.5.4:

$$D = \frac{0{,}074}{Re^{0,2}} \quad \cdot \quad \frac{B \cdot x \cdot \rho \cdot V^2}{2}$$

$$[F] \quad [1] \qquad \left[L^2 \frac{1}{L^3} F \frac{T^2}{L} \frac{L^2}{T^2}\right] = [F] \qquad \text{homogen}$$

Aufgabe 6.6:

Dimensionsanalyse

1)
$$\frac{\Delta p}{\Delta \ell} = f(\mu, \quad V, \quad D)$$

$$\left[\frac{F}{L^3}\right] \quad \left[\frac{F \cdot T}{L^2}\right]\left[\frac{L}{T}\right][L]$$

2) L: D [L]

$$\frac{\Delta p}{\Delta \ell} D^3 = f_2\left(\mu D^2, \ \frac{V}{D}\right)$$

$$[F] \qquad [F \cdot T] \ \left[\frac{1}{T}\right]$$

3) T: $\frac{V}{D}\left[\frac{1}{T}\right]$

$$\frac{\Delta p}{\Delta \ell} D^3 = f_2\left(\mu D^2 \frac{V}{D}\right) = f_3(\mu D V)$$

$$[F] \qquad\qquad [F]$$

F: μ D V $[F]$

$$\frac{\Delta p}{\Delta \ell} \frac{D^3}{\mu D V} = f_4 = \text{konst.}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta \ell} = \text{konst.} \cdot \frac{\mu \cdot V}{D^2}$$

Aufgabe 6.7:

Dimensionsanalyse

1)

$$e \quad = f\left(\underbrace{E, \sigma,}_{} \quad Br, \ V, \ d, \ \dot{M} p, D\right)$$

$$\left[\frac{M}{L^2 T}\right] \quad \left[\frac{M \cdot L}{L^2 T^2}\right][1] \ \left[\frac{L}{T}\right][L]\left[\frac{M}{T}\right][L]$$

2) L: D [L]

$$e \cdot D^2 \quad = f_2\left(\underbrace{E \cdot D, \sigma \cdot D,}_{} \quad Br, \ \frac{V}{D}, \ \frac{d}{D}, \ \dot{M} p\right)$$

$$\left[\frac{M}{T}\right] \qquad \left[\frac{M}{T^2}\right] \qquad [1] \ \left[\frac{1}{T}\right] [1] \ \left[\frac{M}{T}\right]$$

3) M: $E \cdot D \left[\frac{M}{T^2}\right]$

$$\frac{e \cdot D^2}{E \cdot D} = f_3\left(\frac{\sigma \cdot D}{E \cdot D},\ Br,\ \frac{V}{D},\ \frac{d}{D},\ \frac{\dot{M} p}{E \cdot D}\right)$$

$$[T] \qquad [1] \qquad [1] \left[\frac{1}{T}\right] \quad [1] \quad [T]$$

T: $\frac{V}{D}\left[\frac{1}{T}\right]$

$$\frac{e \cdot D^2}{E \cdot D}\ \frac{V}{D} = f_4\left(\frac{\sigma}{E}, Br, \frac{d}{D}, \frac{\dot{M} p}{E \cdot D}\ \frac{V}{D}\right) =$$

$$\frac{e\, V}{E \cdot} = f_4\left(\underbrace{\frac{\sigma}{E}, Br, \frac{d}{D}}_{[1]}, \frac{\dot{M} p \cdot V}{E \cdot D^2}\right)$$

$$[1]$$

Aufgabe 6.8:

Widerstandskoeffizient $c \sim \frac{F}{\rho V^2 D^2} = f(Re)$

$$Re = \frac{V \cdot L}{\nu}$$

Reynoldssches Ähnlichkeitsgesetz

$$Re_r = \frac{Re_m}{Re_p} = \frac{V_r \cdot L_r}{\nu_r} \overset{!}{=} 1$$

$$V_r = \frac{\nu_r}{L_r}$$

Dynamisches Ähnlichkeitsgesetz

$$c_r = \frac{\left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_m}{\left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_p} = \frac{F_m}{F_p} \cdot \frac{1}{\rho_r V_r^2 L_r^2} \overset{!}{=} 1$$

$$F_p = \frac{F_m}{\rho_r V_r^2 L_r^2} = \frac{F_m}{\rho_r \left(\frac{\nu_r}{L_r}\right)^2 L_r^2} = \frac{F_m}{\rho_r \nu_r^2} \qquad \text{unabhängig von } L_r$$

$F_m = 90$ N

$$\rho_r = \frac{\rho_m}{\rho_p} = 800 \text{ bei } 15°C$$

$$\nu_r = \frac{\nu_m}{\nu_p} = 0{,}08 \text{ bei } 15°C$$

$$F_p = \frac{F_m}{\rho_r \, \nu_r^2} = \frac{90\,N}{800 \cdot 0{,}08^2} = 17{,}57\,N$$

Aufgabe 6.9:

Froudesches Ähnlichkeitsgesetz

$$\frac{Fr_m}{Fr_p} = \frac{V_m}{V_p} \frac{1}{\sqrt{g_r \cdot L_r}} \overset{!}{=} 1$$

$$V_m = \sqrt{g_r \, L_r} V_p = \sqrt{1 \cdot \frac{1}{10}} \cdot 110 \frac{km}{h} = \frac{110}{\sqrt{10}} \frac{km}{h} = 34{,}78 \frac{km}{h}$$

6 Lösungen zu Kapitel 7: Grenzschichten

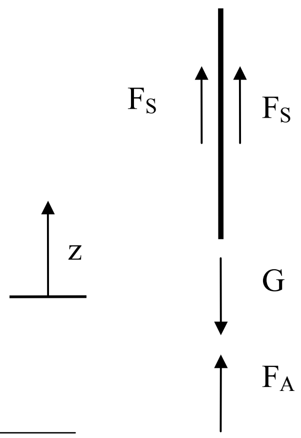
<u>Aufgabe 7.1:</u>

$$\sum F_z = F_S + F_A - G = 0$$

$$F_S = c_f \cdot A \cdot \rho \cdot \frac{V^2}{2},\ A = 2 \cdot B \cdot L$$

$$F_A = \rho \cdot g \cdot \cancel{V},\ \cancel{V} = B \cdot L \cdot d$$

$$c_f \cdot A \cdot \rho \cdot \frac{V^2}{2} = G - F_A$$



$$V = \sqrt{\frac{2(G - F_A)}{c_f \cdot A \cdot \rho}}$$

Annahme: $c_{fo} = 0{,}003$ (Schätzung)

$$V_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(23\ \mathrm{N} - 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot 0{,}001\,\mathrm{m}\right)}{0{,}003 \cdot 2 \cdot 1\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}}$$

$$1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2\ (23 - 2 \cdot 9{,}81)\,\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2}}{12\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}}} = 0{,}75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Kontrolle:

$$Re_{L_0} = \frac{V_0 \cdot L}{\nu} = \frac{0{,}75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 2\,\mathrm{m}}{10^{-6}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}} = 1{,}5 \cdot 10^6$$

$$c_f = \frac{0{,}074}{Re_{L_0}^{\frac{1}{5}}} - \frac{1700}{Re_{L_0}} = \frac{0{,}074}{\left(1{,}5 \cdot 10^6\right)^{0,2}} - \frac{1700}{1{,}5 \cdot 10^6} = 0{,}0032$$

Hydromechanik I und II Vorlesungen, Abb.7.11

Korrektur:

$$V = \sqrt{\frac{c_{f_0}}{c_f}} V_0 = \sqrt{\frac{0{,}0030}{0{,}0032}}\ 0{,}75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}73\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Kontrolle:

$$Re_L = \frac{V \cdot L}{\nu} = \frac{0{,}73 \cdot 2}{10^{-6}} = 1{,}46 \cdot 10^6 < 10^7 \text{ laminar}$$

$$c_f = \frac{0{,}074}{\left(1{,}46 \cdot 10^6\right)^{0,2}} - \frac{1700}{1{,}46 \cdot 10^6} = 0{,}0032$$

Anderer Lösungsweg:

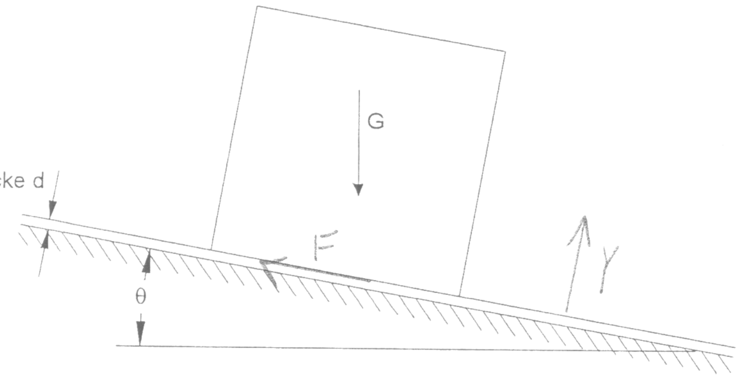
$$c_f \cdot A \cdot \rho \cdot \frac{V^2}{2} = G - F_A$$

mit

$$c_f = \frac{0{,}074}{Re_L^{\frac{1}{5}}} - \frac{1700}{Re_L} \text{ und } Re_L = \frac{V \cdot L}{\nu}$$

durch Iteration hinsichtlich V lösen.

Aufgabe 7.2:



Oberflächenreibungskraft am Würfel:

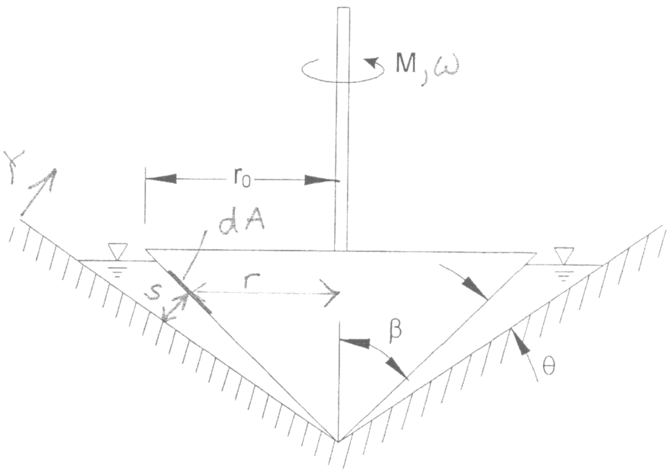
$F = G \cdot \sin\theta$

Schubspannung am Würfel:

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{G \cdot \sin\theta}{L^2} = \mu \frac{dV}{dy} = \mu \frac{V}{\Delta y} = \mu \frac{V}{d}$$

$$V = d\frac{\tau}{\mu} = d\ \frac{G \cdot \sin\theta}{\mu \cdot L^2} = 0{,}0001\,\text{m}\ \frac{100\,\text{N} \cdot \sin 10°}{10^{-2}\,\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \cdot (0{,}3\,\text{m})^2} = 1{,}93\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 7.3:



$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} = \mu \frac{u}{s} = \mu \frac{r \cdot \omega}{r \cdot \theta} \sin\beta$$

$$dM = \tau \cdot dA \cdot r = \tau \cdot \frac{2\,\pi\,r\,dr}{\sin\beta} \cdot r$$

$$M = \int_{r=0}^{r_0} \tau\, dA \cdot r =$$

$$\int_{r=0}^{r_0} \mu \frac{r\omega}{r\theta} \sin\beta \cdot \frac{2\,\pi\,r\,dr}{\sin\beta} \cdot r =$$

$$\mu \frac{\omega}{\theta} 2\,\pi \cdot \int_{r=0}^{r_0} r^2\, dr = \frac{2}{3}\,\mu \frac{\omega}{\theta}\,\pi\, r_0^3$$

Aufgabe 7.4:

$$\mathrm{Re}_{L\,20} = \frac{V \cdot L_{20}}{\nu} = \frac{10\,\frac{m}{s} \cdot 20m}{10^{-6}\,\frac{m^2}{s}} = 2 \cdot 10^8$$

$$\mathrm{Re}_{L\,10} = \frac{V \cdot L_{10}}{\nu} = \frac{10\,\frac{m}{s} \cdot 10m}{10^{-6}\,\frac{m^2}{s}} = 10^8$$

$$F = c_f\ A \cdot \rho \frac{V^2}{2}, \quad A = B \cdot L$$

$$c_f = \frac{0{,}455}{\left(\log_{10}\ \mathrm{Re}_L\right)^{2{,}58}} - \frac{1700}{\mathrm{Re}_L}$$

Hydromechanik I und II
Vorlesungen, Abb.7.11

$$c_{f\,20} = \frac{0{,}455}{\left(\log_{10}\left(2 \cdot 10^8\right)\right)^{2{,}58}} - \frac{1700}{2 \cdot 10^8} = 0{,}00193$$

$$c_{f\,10} = 0{,}00211$$

$$\frac{F_{20}}{F_{10}} = \frac{c_{f\,20}\ A_{20} \cdot \rho\,\frac{V^2}{2}}{c_{f\,10}\ A_{10} \cdot \rho\,\frac{V^2}{2}} = \frac{c_{f\,20}}{c_{f\,10}}\,\frac{B \cdot L_{20}}{B \cdot L_{10}} = \frac{0{,}00193}{0{,}00211} \cdot \frac{20}{10} = 1{,}83$$

7 Lösungen zu Kapitel 8: Rohrleitungen

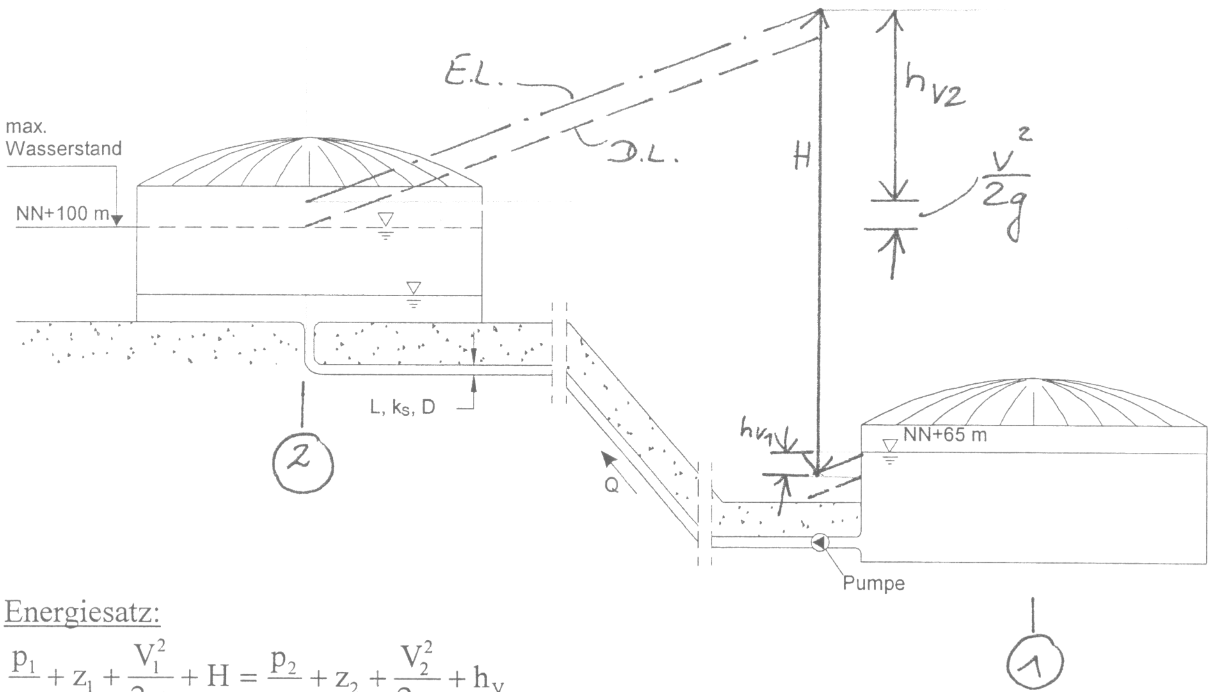
Aufgabe 8.1:

$P = \gamma \cdot Q \cdot H$ Nettoleistung ($P_A = P/\eta$ Antriebsleistung)

Förderhöhe der Pumpe:

$$H = \frac{P}{\gamma \cdot Q} = \frac{1560\,\text{kW}}{10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2{,}5\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}} = 63{,}6\text{ m}$$

$$1\,\text{kW} = 10^3\,\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3}$$



Energiesatz:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2\,g} + H = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2\,g} + h_V$$

$p_1 = p_2 = p_0$ = Atmosphärendruck (belüftete Behälter)

$z_2 = NN + 100$ m

$z_1 = NN + 65$ m

$V_1 = 0$

$V_2 = V$

$H = 63{,}6$ m

$$h_V = \left(\lambda \frac{L}{D}\right) \frac{V^2}{2g}$$

$$z_1 + H = z_2 + \frac{V^2}{2g} + h_V$$

$$H = h_V + \frac{V^2}{2g} + z_2 - z_1 = h_V + \frac{V^2}{2g} + \Delta H = \left(\lambda \frac{L}{D} + 1\right) \frac{V^2}{2g} + \Delta H$$

$$V = \sqrt{\frac{2\,g\,(H - \Delta H)}{\lambda \frac{L}{D} + 1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}\,\left(63{,}6 - (100 - 65)\right) m}{\lambda \frac{L}{D} + 1}} = \sqrt{\frac{565{,}1}{\lambda \frac{L}{D} + 1}}\,\frac{m}{s}$$

Andererseits:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4}{\pi}\,\frac{Q}{D^2} = \frac{4}{\pi}\,\frac{2{,}5 \frac{m^3}{s}}{D^2}$$

Bestimmung des Durchmessers D:
A) Taschenrechneriteration

$$\sqrt{\frac{565{,}1}{1 + \lambda \frac{L}{D}}}\,\frac{m}{s} = \frac{4}{\pi}\,\frac{2{,}5 \frac{m^3}{s}}{D^2}$$

z.B. mit $\lambda = \dfrac{0{,}25}{\left[\lg\left(\dfrac{\frac{k_s}{D}}{3{,}7} + \dfrac{5{,}74}{Re^{0,9}}\right)\right]^2}$

Swamee/Jain
turbulent
Hydromechanik I und II Vorlesungen, Gl. (8.27)

und $Re = \dfrac{V \cdot D}{\nu} = \dfrac{4}{\pi}\,\dfrac{2{,}5 \frac{m^3}{s}}{D \cdot \nu}$

B) „Manuelle" Iteration
Geschätzter Anfangswert von D = 1 m (weder D = 0,1 m noch D = 10 m erscheinen sinnvoll)

$D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V}}$	$V = \frac{4}{\pi}\,\frac{Q}{D^2}$	$Re = \frac{V \cdot D}{\nu}$	$\frac{k_s}{D}$	λ	$V = \sqrt{\frac{565{,}1}{1 + \lambda \frac{L}{D}}}$
m	m/s	1	1	1	m/s
1,00	3,18	$2{,}1 \cdot 10^6$	$6{,}0 \cdot 10^{-4}$	0,0185	1,94
1,28	1,94	$1{,}7 \cdot 10^6$	$4{,}7 \cdot 10^{-4}$	0,0170	2,29
1,18	2,29	$1{,}8 \cdot 10^6$	$5{,}1 \cdot 10^{-4}$	0,0170	2,20
1,20	2,20	$1{,}8 \cdot 10^6$	$5{,}0 \cdot 10^{-4}$	0,0170	2,22

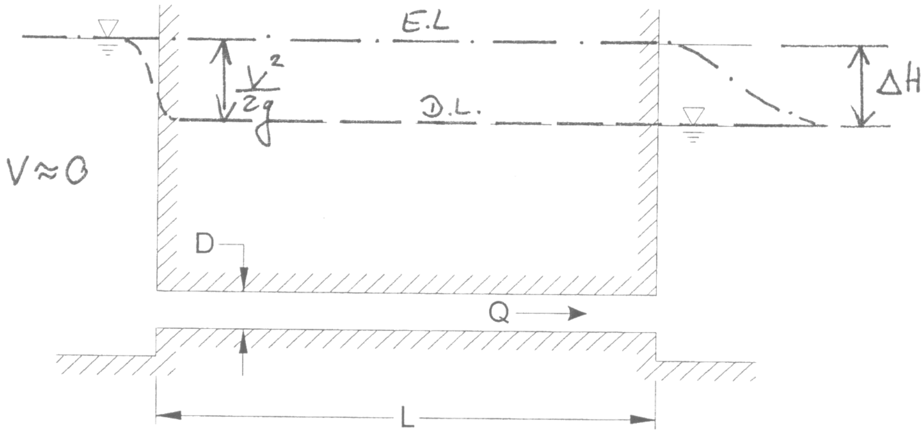
<u>D = 1,20 m</u>

Aufgabe 8.2:

8.2.1 (a):
Ohne Verluste verläuft die Energielinie horizontal. Wegen der Größe des hohen Behälters ist die Geschwindigkeit und erst recht die Geschwindigkeitshöhe des Wasserspiegels sehr gering $\left(V,\ \frac{V^2}{2g} \approx 0\right)$. Auf dem Wasserspiegel herrscht der Umgebungsdruck $p = p_0$, d.h. der Überdruck $p - p_0 = 0$ gegenüber dem Atmosphärendruck p_0. Deshalb liegt die Energielinie auf der Höhe des Wasserspiegels des linken Behälters.

Da der Rohrdurchmesser und mithin die Geschwindigkeitshöhe konstant ist, verläuft die Drucklinie parallel zur Energielinie.

Auf dem Wasserspiegel des rechten Behälters herrscht der Umgebungsdruck $p = p_0$, so daß die Drucklinie auf der Höhe des Wasserspiegels des rechten Behälters verläuft.

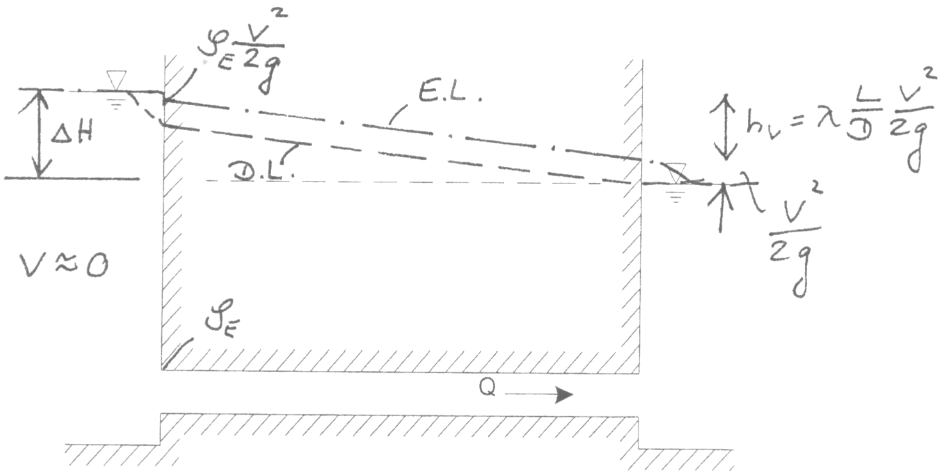


$$\frac{V^2}{2g} = \Delta H$$

$$V = \sqrt{2g\Delta H} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 5m} = 9{,}9\ \frac{m}{s}$$

$$Q = V \cdot A = V \cdot \pi\, \frac{D^2}{4} = 9{,}9\ \frac{m}{s} \cdot \pi\, \frac{(0{,}3m)^2}{4} = 0{,}7\ \frac{m^3}{s} = 700\ \frac{\ell}{s}$$

8.2.1 (b):



Wegen des örtlichen Einlaufverlusts beginnt die Energielinie mit einem Sprung vom Wasserspiegel des linken Behälters und ist wegen des kontinuierlichen Verlusts h_V geneigt. Die Drucklinie verläuft parallel zur Energielinie (D = konst.) und endet auf dem Wasserspiegel des rechten Behälters ($p-p_0 = 0$).

$$\zeta_E \frac{V^2}{2g} + \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + \frac{V^2}{2g} = \Delta H$$

$$\left(\zeta_E + \lambda\left(\frac{V \cdot D}{\nu}, \frac{k_s}{D}\right) \frac{L}{D} + 1\right) \frac{V^2}{2g} = \Delta H$$

mit $\lambda = \dfrac{0{,}25}{\left[\lg\left(\dfrac{\frac{k_S}{D}}{3{,}7} + \dfrac{5{,}74}{\left(\frac{V \cdot D}{\nu}\right)^{0{,}9}}\right)\right]^2}$

Swamee/ Jain
turbulent
Hydromechanik I und II Vorlesungen, Gl. (8.27)

A) Taschenrechneriteration

B) „Manuelle" Iteration

Annahme $V = \sqrt{2g\Delta H} = 9{,}9\ \frac{m}{s}$ aus 8.2.1 (a)

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{9{,}9 \frac{m}{s} \cdot 0{,}3\,m}{1{,}3 \cdot 10^{-6} \frac{m}{s^2}} = 2{,}28 \cdot 10^6$$

$$\frac{k_S}{D} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}\,m}{0{,}3\,m} = 5 \cdot 10^{-3}$$

Moody- Diagramm, hydraulisch rauh, Hydromechanik I und II Vorlesungen, Abb. 8.8

$\lambda = 0{,}03$

$$\left(\zeta_E + \lambda \frac{L}{D} + 1\right) \frac{V^2}{2g} = \Delta H$$

$$V = \sqrt{\frac{2g\Delta H}{\zeta_E + \lambda \frac{L}{D} + 1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 5\,m}{0{,}06 + \underbrace{0{,}03 \frac{30\,m}{0{,}3\,m}}_{3\ \text{(Hauptanteil)}} + 1}} = \frac{9{,}9 \frac{m}{s}}{2{,}0149} = 4{,}91 \frac{m}{s}$$

<u>Kontrolle</u>, ob tatsächlich hydraulisch rauh:

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{4{,}91 \frac{m}{s} \cdot 0{,}3\,m}{1{,}3 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}} = 1{,}13 \cdot 10^6$$

$$\frac{k_S}{D} = 5 \cdot 10^{-3}$$

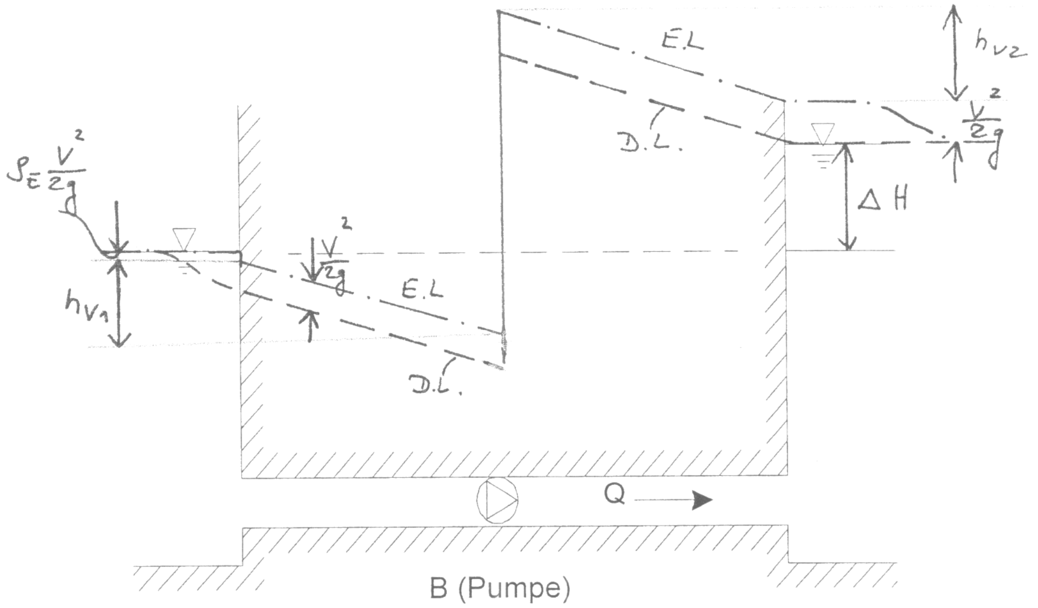
Moody-Diagramm:
hydraulisch rauh, $\lambda = 0{,}03$

$$Q = V \cdot A = V \cdot \pi \frac{D^2}{4} = 4{,}91 \frac{m}{s} \cdot \pi \frac{(0{,}3\,m)^2}{4} = 0{,}347 \frac{m^3}{s} = 347 \frac{\ell}{s}$$

(nur die Hälfte von Q unter 8.2.1a)

8.2.2 (c):

$$P_A = \frac{\gamma \cdot Q \cdot H}{\eta}$$



$$H = \zeta_E \frac{V^2}{2g} + h_{V_1} + h_{V_2} + \frac{V^2}{2g} + \Delta H = \left(\zeta_E + \lambda \frac{L}{D} + 1\right) \frac{V^2}{2g} + \Delta H$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi \frac{D^2}{4}} = \frac{0{,}6 \frac{m^3}{s}}{\pi \cdot \frac{(0{,}3\,m)^2}{4}} = 8{,}49 \frac{m}{s}$$

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{8{,}49 \frac{m}{s} \cdot 0{,}3\,m}{1{,}3 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}} = 1{,}96 \cdot 10^6$$

$$\frac{k_S}{D} = 5 \cdot 10^{-3}$$

Moody-Diagramm, hydraulisch rauh:
$\lambda = 0{,}03$

$$H = \left(\zeta_E + \lambda \frac{L}{D} + 1\right) \frac{V^2}{2g} + \Delta H = \left(0{,}06 + 0{,}03 \frac{30\,m}{0{,}3\,m} + 1\right) \frac{\left(8{,}49 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}} + 5\,m = 19{,}92\,m$$

$$P_A = \frac{\gamma \cdot Q \cdot H}{\eta} = \frac{10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}6 \frac{m^3}{s} \cdot 19{,}92\,m}{0{,}75} = 156{,}33 \cdot 10^3 kg \frac{m}{s^2}\, m \frac{1}{s} = 156{,}33\ kW$$

Aufgabe 8.3:

$$h_V = \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

8.3.1 (a): t = 10°C

$$\frac{h_V}{L} = \frac{\lambda}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi \frac{D^2}{4}} = \frac{1 \frac{m^3}{s}}{\pi \frac{(1m)^2}{4}} = 1{,}27 \ \frac{m}{s}$$

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{1{,}27 \frac{m}{s} \cdot 1m}{1{,}31 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}} = 0{,}97 \cdot 10^6$$

$$\frac{k_S}{D} = \frac{0{,}1 \cdot 10^{-3} \, m}{1m} = 10^{-4}$$

Moody-Diagramm:

$\lambda = 0{,}0135$

$$\frac{h_V}{L} = \frac{\lambda}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{0{,}0135}{1m} \frac{\left(1{,}27 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}} = 0{,}00111 \frac{m}{m}$$

8.3.1 (b): t = 40°C

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{1{,}27 \cdot 1}{0{,}66 \cdot 10^{-6}} = 1{,}929 \cdot 10^6$$

$$\frac{k_S}{D} = 10^{-4}$$

Moody-Diagramm:

$\lambda = 0{,}013$

$$\frac{h_V}{L} = \frac{\lambda}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{0{,}013}{1m} \frac{\left(1{,}27 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}} = 0{,}001069 \frac{m}{m}$$

8.3.2 (a): t = 10°C

$$Re = 0{,}97 \cdot 10^6$$

$$\frac{k_S}{D} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \, m}{1m} = 1 \cdot 10^{-3}$$

$$\lambda = 0{,}0195 \ \left(\text{hydraulisch rauh}\right)$$

$$\frac{h_V}{L} = \frac{\lambda}{D}\frac{V^2}{2g} = \frac{0{,}0195}{1\,\text{m}}\;\frac{\left(1{,}27\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}00161$$

8.3.2 (b): $t = 40°C$

$Re = 1{,}929 \cdot 10^6$

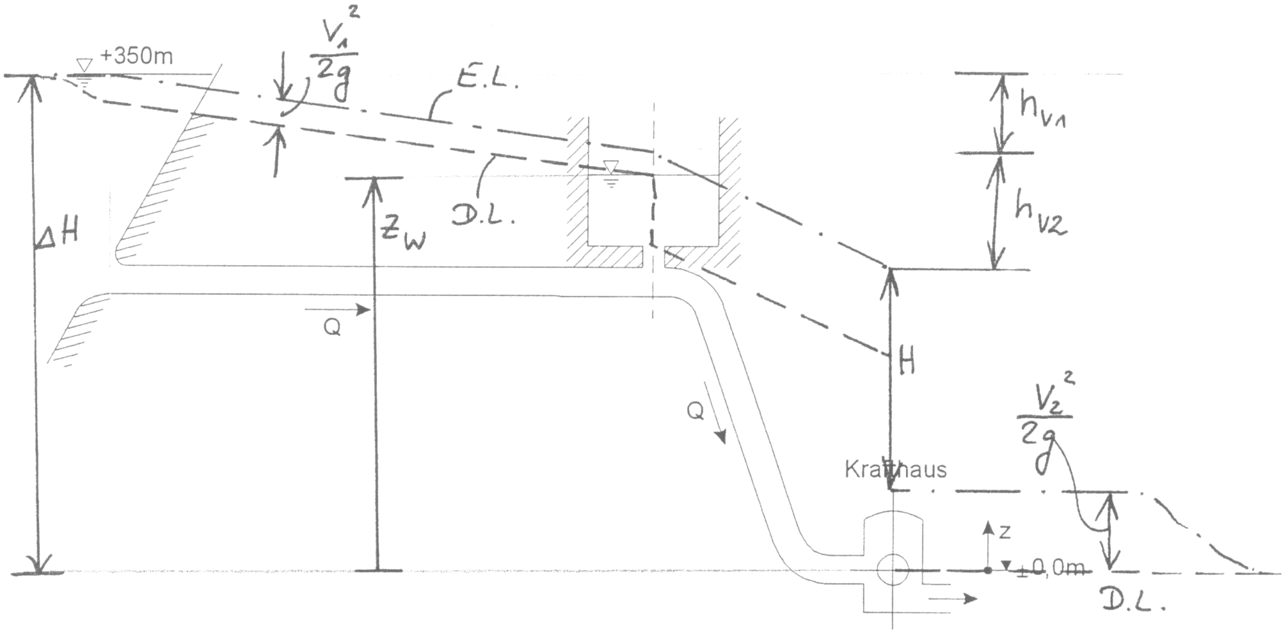
$\frac{k_S}{D} = 1 \cdot 10^{-3}$

$\lambda = 0{,}0195$ (wie 8.3.2 (a))

$\frac{h_V}{L} = \frac{\lambda}{D}\frac{V^2}{2g} = 0{,}00161$

Aufgabe 8.4:

8.4.1:



8.4.2:

$$\Delta H = z_W + \frac{V_1^2}{2g} + h_{V_1} = z_W + \left(1 + \lambda_1 \frac{L_1}{D_1}\right)\frac{V_1^2}{2g}$$

$$z_W = \Delta H - \left(1 + \lambda_1 \frac{L_1}{D_1}\right)\frac{V_1^2}{2g}$$

$\Delta H = 350\,\text{m}$

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{\pi\,\frac{D_1^2}{4}} = \frac{20\,\frac{m^3}{s}}{\pi\,\frac{(3\,m)^2}{4}} = 2{,}53\,\frac{m}{s}$$

$$Re_1 = \frac{V_1 \cdot D_1}{\nu} = \frac{2{,}83 \cdot 3}{1{,}3 \cdot 10^{-6}} = 6{,}53 \cdot 10^6$$

$$\frac{k_{S1}}{D} = \frac{10 \cdot 10^{-3}\,m}{3\,m} = 3{,}33 \cdot 10^{-3}$$

Moody-Diagramm

$\lambda_1 = 0{,}028$

$$z_W = \Delta H - \left(1 + \lambda_1\,\frac{L_1}{D_1}\right)\frac{V_1^2}{2g} =$$

$$= 350\,m - \left(1 + 0{,}028\,\frac{3200\,m}{3m}\right)\frac{\left(2{,}83\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = 337{,}41\,m$$

8.4.3:

$$P_E = \eta \cdot \gamma \cdot Q \cdot H$$

$$\Delta H = H + \frac{V_2^2}{2g} + h_{V_2} + h_{V_1}$$

$$\Delta H = z_W + \frac{V_1^2}{2g} + h_{V_1} \quad (\text{aus } 8.4.2)$$

$$H + \frac{V_2^2}{2g} + h_{V_2} + h_{V_1} = z_W + \frac{V_1^2}{2g} + h_{V_1}$$

$$H = z_W + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} - h_{V_2} =$$

$$= z_W + \frac{V_1^2}{2g} - \left(1 + \lambda_2\,\frac{L_2}{D_2}\right)\frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{\pi\,\frac{D_2^2}{4}} = \frac{20\,\frac{m^3}{s}}{\pi\,\frac{(2{,}5\,m)^2}{4}} = 4{,}07\,\frac{m}{s}$$

$$Re_2 = \frac{V_2 \cdot D_2}{\nu} = \frac{4{,}07 \cdot 2{,}5}{1{,}3 \cdot 10^{-6}} = 7{,}83 \cdot 10^6$$

$$\frac{k_{S2}}{D_2} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}\,m}{2{,}5\,m} = 0{,}6 \cdot 10^{-3}$$

Moody-Diagramm

$\lambda_2 = 0{,}018$

$$H = z_W + \frac{V_1^2}{2\,g} - \left(1+\lambda_2\,\frac{L_2}{D_2}\right)\frac{V_2^2}{2\,g} =$$

$$= 337{,}41\,\mathrm{m} + \frac{\left(2{,}83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} - \left(1+0{,}018\,\frac{750}{2{,}5}\right)\frac{\left(4{,}07\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$$

$$= 337{,}41\,\mathrm{m} + 0{,}41\,\mathrm{m} - 5{,}42\,\mathrm{m}$$

$$= 332{,}4\,\mathrm{m}$$

$$P_E = \eta\cdot\gamma\cdot Q\cdot H = 0{,}74\cdot 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 20\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\cdot 332{,}4\,\mathrm{m} = 48{,}3\ \ \mathrm{MW} \qquad 1\,\mathrm{W} = 1\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}$$

Aufgabe 8.5:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}002\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}}{\pi\,\frac{(0{,}05\,\mathrm{m})^2}{4}} = 1{,}019\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{V\cdot D}{\nu} = \frac{1{,}019\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 0{,}05\,\mathrm{m}}{\frac{\left(0{,}048\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2}\right)}{\left(940\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)}} = 997$$

Energiegleichung:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2\,g} + z_2 + 32\,\frac{\mu}{\gamma}\,\frac{L}{D^2}\,V_2$$

$$V_1 = V_2 = V,\quad z_1 = z_2$$

$$p_1 - p_2 = 32\,\mu\,\frac{L}{D^2}\,V = 32\cdot 0{,}048\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2}\cdot\frac{100\,\mathrm{m}}{(0{,}05\,\mathrm{m})^2}\cdot 1{,}019\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} =$$

$$= 62{,}6\cdot 10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 62{,}6\,\mathrm{kPa}$$

Aufgabe 8.6:

$$\mathrm{Re} = \frac{V\cdot D}{\nu} = \frac{3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 0{,}4\,\mathrm{m}}{10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}} = 1{,}2\cdot 10^5$$

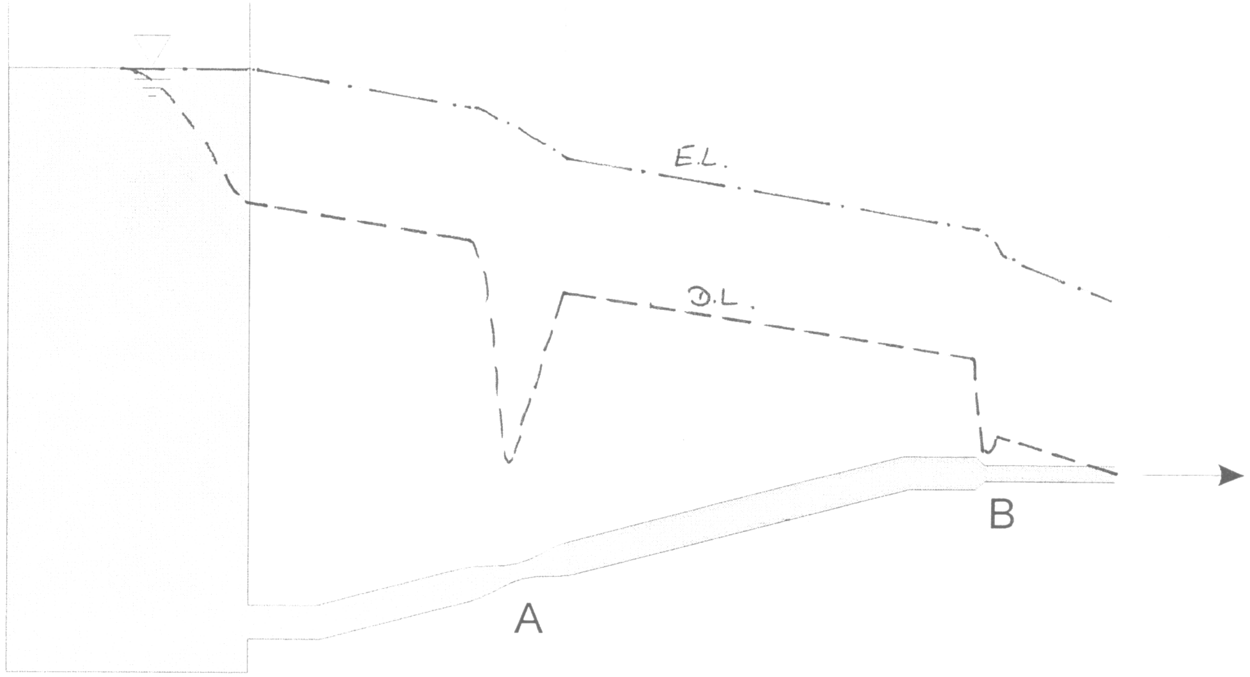
Für $\mathrm{Re} = 1{,}2\cdot 10^5$ und $\lambda = 0{,}06$ ergibt sich aus dem Moody-Diagramm die relative Rauheit $k/d > 2{,}5\cdot 10^{-2}$ im hydraulisch rauhen Bereich. Der Widerstandsbeiwert bleibt also bei verdoppelter Geschwindigkeit auf $\lambda = 0{,}06$ stehen.

$$\Delta p = \lambda\,\frac{L}{D}\,\rho\,\frac{V^2}{2}$$

Bei verdoppelter Geschwindigkeit ist also der vierfache Druckverlust pro m Rohrleitungslänge zu erwarten (c).

Aufgabe 8.7:

8.7.1:



8.7.2:

Kavitation kann im Punkt A und/oder B auftreten.

8 Lösungen zu Kapitel 9: Strömungswiderstand

Aufgabe 9.1:

Der quadratische Querschnitt (a) bedingt dem größten Widerstandskoeffizient.

Aufgabe 9.2:

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{30\,\frac{m}{s} \cdot 3\,m}{1{,}5 \cdot 10^{-5}\,\frac{m^2}{s}} = 6 \cdot 10^6$$

Hydromechanik I und II Vorlesungen, Abb. 9.8:

$c_W = 0{,}6$

Widerstandskraft:

$$F_D = c_W\,A\,\rho\,\frac{V^2}{2} = 0{,}6 \cdot 3\,m \cdot 80\,m \cdot 1{,}2\,\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{\left(30\,\frac{m}{s}\right)^2}{2} = 77{,}8\,kN \qquad A = D \cdot H$$

Kippmoment:

$$M = F_D\,\frac{H}{2} = 77{,}8\,kN \cdot \frac{80\,m}{2} = 3{,}11\,MN \cdot m$$

Aufgabe 9.3:

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{3\,\frac{m}{s} \cdot 1\,m}{10^{-6}\,\frac{m^2}{s}} = 3 \cdot 10^6$$

Hydromechanik I und II Vorlesungen II, Abb. 9.9

$c_W = 1{,}17$

$$F_D = c_W\,A\,\rho\,\frac{V^2}{2} = 1{,}17 \cdot \pi\,\frac{(1\,m)^2}{4} \cdot 1000\,\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{\left(3\,\frac{m}{s}\right)^2}{2} = 4{,}14\,kN$$

Aufgabe 9.4:

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot b}{\nu} = \frac{(80+20)\,km}{3600\,s} \cdot \frac{0{,}2 \cdot m}{1{,}5 \cdot 10^{-5}\,\frac{m^2}{s}} = 3{,}7 \cdot 10^5 > 10^4$$

$$\frac{\ell}{b} = \frac{1{,}5\,m}{0{,}2\,m} = 7{,}5$$

Hydromechanik I und II Vorlesungen II, Kapitel 9: Rechteckplatte

c_W = 1,25 (Mittelwert aus 1,20 und 1,30)
(Kubus c_W = 1,10)

$$\Delta F_D = c_W\, A\, \rho\, \frac{V^2}{2} = 1{,}25 \cdot 0{,}2\ \text{m} \cdot 1{,}5\ \text{m} \cdot 1{,}2\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\ \frac{\left(\frac{100\ \text{m}}{3{,}6\ \text{s}}\right)^2}{2} = 173{,}6\,\text{N} \qquad A = b \cdot \ell$$

$$\Delta P = \Delta F_D \cdot V = 173{,}6\,\text{N} \cdot \left(\frac{80\ \text{m}}{3{,}6\ \text{s}}\right) = 3{,}86\ \text{kW}$$

Aufgabe 9.5:

$$F_D = c_W\, A\, \rho\, \frac{V^2}{2} = G - F_A \qquad A = \sqrt{2}\, L^2$$

c_W = 0,81 Hydromechanik I und II Vorlesungen, Tabelle 9.2

G = 20,8 N

$$F_A = \rho \cdot g \cdot L^3$$

$$c_W\ A\ \rho\ \frac{V^2}{2} = G - F_A$$

$$c_W \sqrt{2}\, L^2 \cdot \rho\ \frac{V^2}{2} = G - \rho\ g\ L^3$$

$$V = \sqrt{\frac{2\left(G - \rho\ g\ L^3\right)}{c_W \sqrt{2}\, L^2 \cdot \rho}} = \sqrt{\frac{2\left(20{,}8\ \text{N} - 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (0{,}1\,\text{m})^3\right)}{0{,}81 \cdot \sqrt{2}\,(0{,}1\,\text{m})^2 \cdot 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} = 1{,}39\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 9.6:

$$F_D = c_W\, A\, \rho\ \frac{V^2}{2} = G - F_A$$

$$A = \pi \frac{D^2}{4}$$

$$G = \rho_K \cdot g \cdot \pi\ \frac{D^3}{6}$$

$$F_A = \rho \cdot g \cdot \pi\ \frac{D^3}{6} \qquad \rho = \rho_W$$

$$c_W\, A\ \rho\ \frac{V^2}{2} = G - F_A$$

$$c_W \cdot \pi \frac{D^2}{4} \rho \frac{V^2}{2} = (\rho_K - \rho)\, g\, \pi \frac{D^3}{6}$$

$$c_W\, \rho \frac{V^2}{4} = (\rho_K - \rho)\, g\ \frac{D}{3}$$

$$\rho_K = \rho\left(1+\frac{3}{4}\frac{c_W}{D}\frac{V^2}{g}\right) = 1000\frac{kg}{m^3}\left(1+\frac{3}{4}\frac{c_W}{D}\frac{\left(0{,}5\frac{m}{s}\right)^2}{9{,}81\frac{m}{s^2}}\right) = 1000\left(1+0{,}01911\cdot c_W\frac{m}{D}\right)$$

D	$Re = \frac{V\cdot D}{\nu}$	c_W	ρ_K
m	1	1	kg/m³
0,10	$0{,}50\cdot 10^5$	0,5	1095,6
0,15	$0{,}75\cdot 10^5$	≈0,5	1063,7
0,20	$1{,}00\cdot 10^5$	≈0,5	1047,8

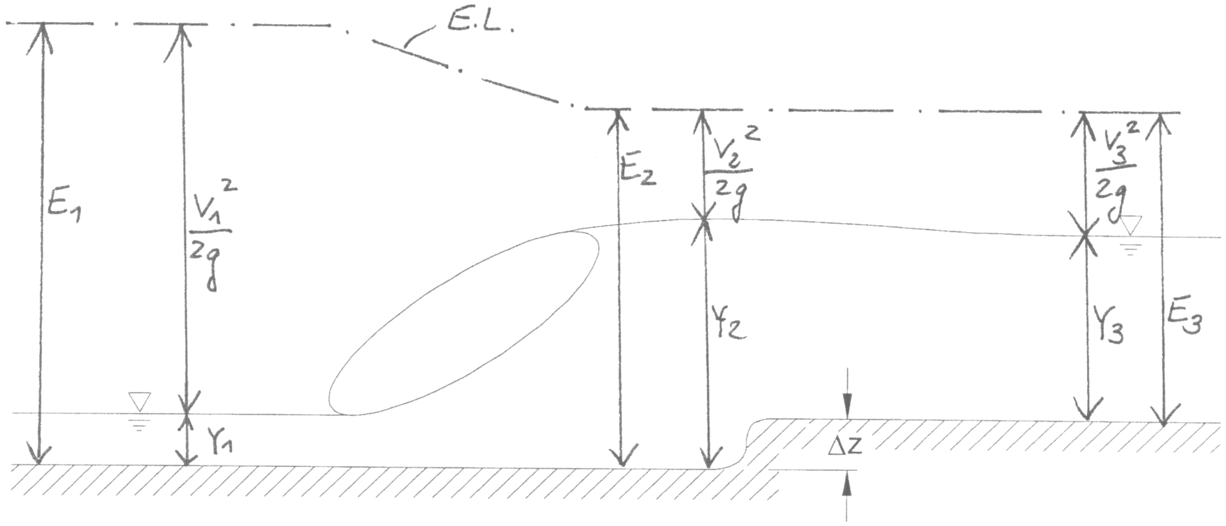
$\nu = 10^{-6}\,\frac{m^2}{s}$

c_W aus Hydromechanik I und II Vorlesungen, Abb. 9.9

Die Dichte der Kugel liegt zwischen ρ_K = 1095,6 kg/m³ für den Durchmesser D = 0,10 m und ρ_K = 1047,8 kg/m³ für den Durchmesser D = 0,20 m.

9 Lösungen zu Kapitel 10: Gerinneströmungen

Aufgabe 10.1:



Wechselsprunggleichung:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8\,Fr_1^2} - 1\right)$$

$$Fr_1^2 = \frac{V_1^2}{g\,y_1} = \frac{\left(10\,\frac{m}{s}\right)^2}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}2\,m} = 7{,}14^2$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8\,Fr_1^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8\cdot 7{,}14^2} - 1\right) = 9{,}61$$

$$y_2 = 9{,}61\cdot y_1 = 9{,}61\cdot 0{,}2\ m = 1{,}92\ m$$

Kontinuitätsgleichung:

$$V_1\,y_1 = V_2\,y_2$$

$$V_2 = \frac{y_1}{y_2}V_1 = \frac{10\,\frac{m}{s}}{9{,}61} = 1{,}04\,\frac{m}{s}$$

Energiesatz:

$$E_2 = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} = y_3 + \frac{V_3^2}{2g} + \Delta z = E_3 + \Delta z$$

$$\Delta z = y_2 - y_3 + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_3^2}{2g} = y_2 - y_3 + \left(1-\left(\frac{y_2}{y_3}\right)^2\right)\frac{V_2^2}{2g} = \qquad V_3 = \frac{y_2}{y_3}V_2$$

$$= 1{,}92\,m - 1{,}6\,m + \left(1-\left(\frac{1{,}92}{1{,}60}\right)^2\right)\frac{\left(1{,}04\,\frac{m}{s}\right)^2}{2\cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = 0{,}3\,m$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{\left(10\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = 5{,}1\ \text{m}$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = 0{,}055\ \text{m}$$

$$\frac{V_3^2}{2g} = 0{,}080\ \text{m}$$

Aufgabe 10.2:

10.2 (a):

$Q = 10\ \frac{m^3}{s}$

$B = 3$ m

$$q = \frac{Q}{B} = \frac{10\,\frac{m^3}{s}}{3\,m} = 3{,}33\ \frac{m^2}{s}$$

$$y_C = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{\left(3{,}33\,\frac{m^2}{s}\right)^2}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}} = 1{,}04\ \text{m}$$

$$E_{min} = \frac{3}{2}\,y_C = 1{,}56\ \text{m}$$

① $H_{1\,min} = \quad 0 + E_{min} = (0{,}0 + 1{,}56)\,m = 1{,}56$ m

② $H_{2\,min} = \Delta z + E_{min} = (0{,}5 + 1{,}56)\,m = 2{,}06$ m

③ $H_{3\,min} = \quad 0 + E_{min} = (0{,}0 + 1{,}56)\,m = 1{,}56$ m

Abflußkontrolle bei ②

$y_2 = y_C = 1{,}04$ m

$E_2 = 1{,}56$ m

① $E = \Delta z + E_2 = (0{,}5 + 1{,}56)$ m $= 2{,}06$ m

$$\frac{E}{y_C} = \frac{2{,}06\ m}{1{,}04\ m} = 1{,}98$$

Energiediagramm, Hydromechanik I und II Vorlesungen, Abb.10.10 und hier S. 121

$\frac{y}{y_C} = 1{,}84$ (strömend, da vom UW kontrolliert)

$y_1 = 1{,}84 \cdot y_C = 1{,}91$ m

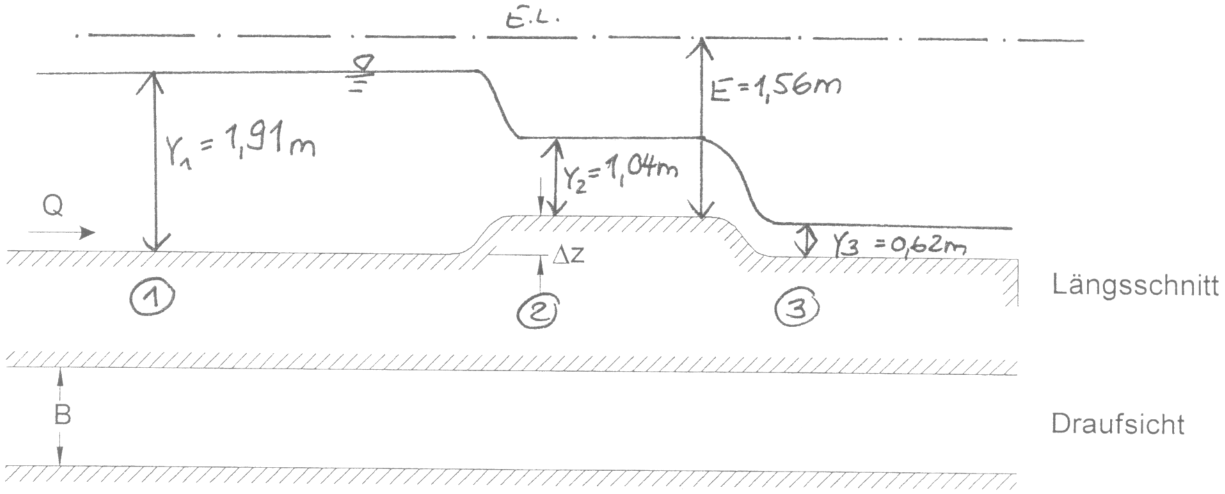
③ $E = 2{,}06$ m

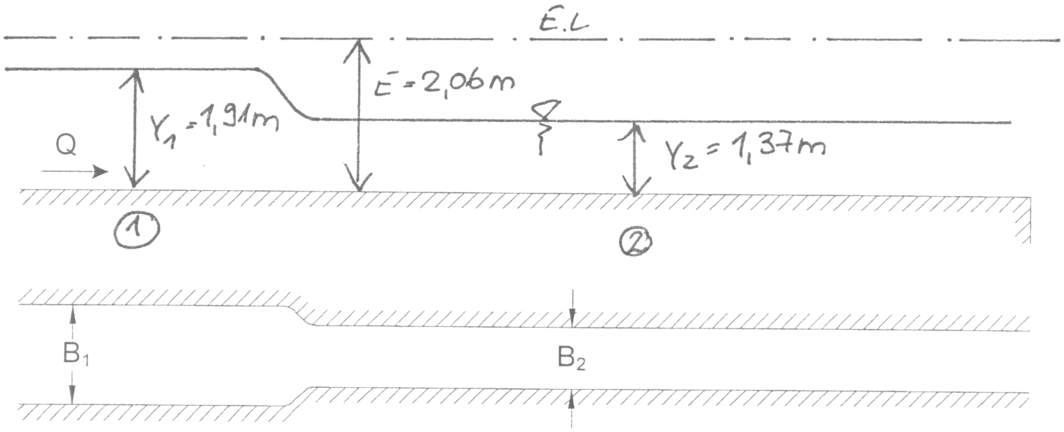
$$\frac{E}{y_C} = \frac{2{,}06\ \text{m}}{1{,}04\ \text{m}} = 1{,}98$$

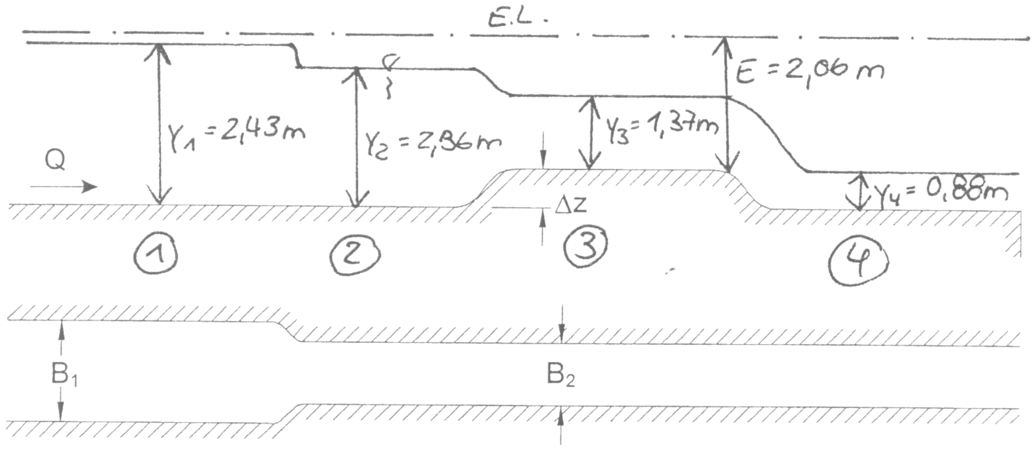
Energiediagramm:

$$\frac{y}{y_C} = 0{,}60$$ (schießend, da vom OW kontrolliert)

$$y_3 = 0{,}6 \cdot y_C = 0{,}62\ \text{m}$$







10.2 (b):

① $Q = 10\ \frac{m^3}{s}$

$B_1 = 3\ m$

$$q_1 = \frac{10\ \frac{m^3}{s}}{3\,m} = 3{,}33\ \frac{m^2}{s}$$

$y_{C\,1} = 1{,}04\ m$

$E_{min\,1} = 1{,}56\ m$

② $Q = 10\ \frac{m^3}{s}$

$B_2 = 2\ m$

$$q_2 = \frac{10\ \frac{m^3}{s}}{2\,m} = 5\ \frac{m^2}{s}$$

$y_{C\,2} = 1{,}37\ m$

$E_{min\,2} = 2{,}06\ m$

Abflußkontrolle bei ②

$y_2 = y_{C\,2} = 1{,}37$ m

$E_2 = E_{min\ 2} = 2{,}06$ m

① $E = 2{,}06$ m

$$\frac{E}{y_C} = \frac{2{,}06}{1{,}04} = 1{,}98$$

Energiediagramm

$$\frac{y}{y_C} = 1{,}84$$ (strömend, da vom UW kontrolliert)

10.2 (c):

Q = 10 m³/h

	B	q	y_C	$E_{min} = \frac{3}{2}\ y_C$	$\Delta z + E_{min}$	E	$\frac{E}{y_C}$	$\frac{y}{y_C}$	y
	m	$\frac{m^2}{s}$	m	m	m	m	1	1	m
①	3	3,33	1,04	1,56	1,56	2,56	2,46	2,34	2,43
②	2	5,00	1,37	2,06	2,06	2,56	1,87	1,72	2,36
③	2	5,00	1,37	2,06	**2,56**	2,06	1,50	1,00	1,37
④	2	5,00	1,37	2,06	2,00	2,56	1,87	0,64	0,88

Abflußkontrolle bei ③.

① , ② strömend, da vom UW kontrolliert

④ schießend, da Vom OW kontrolliert

Aufgabe 10.3:

$y_1 = C_C \cdot s = 0{,}61 \cdot 1\ \text{m} = 0{,}61\ \text{m}$

$$E = y_1 + \frac{V_1^2}{2\,g}$$

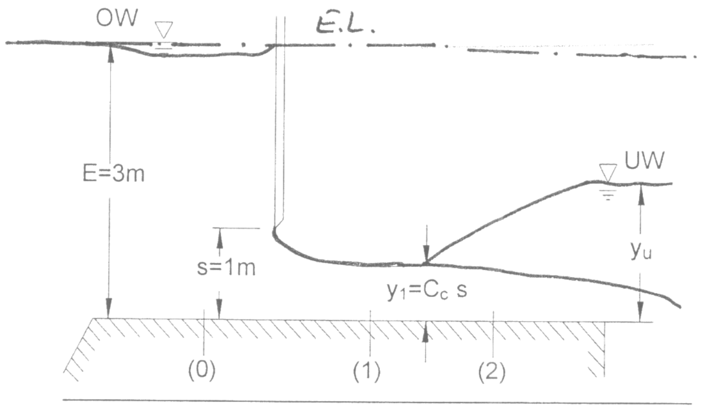
$$V_1 = \sqrt{2\,g\,(E - y_1)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}(3 - 0{,}61)\,\text{m}} = 6{,}85\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g \cdot y_1}} = \frac{6{,}85\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\sqrt{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}61\ \text{m}}} = 2{,}8$$

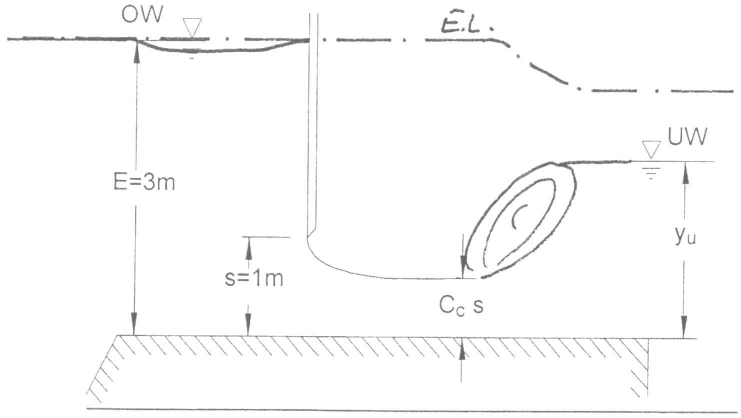
$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\ Fr_1^2} - 1\right) = 3{,}49$$

$$y_2 = 3{,}49 \cdot y_1 = 3{,}49 \cdot 0{,}61\,\text{m} = 2{,}13\,\text{m}$$

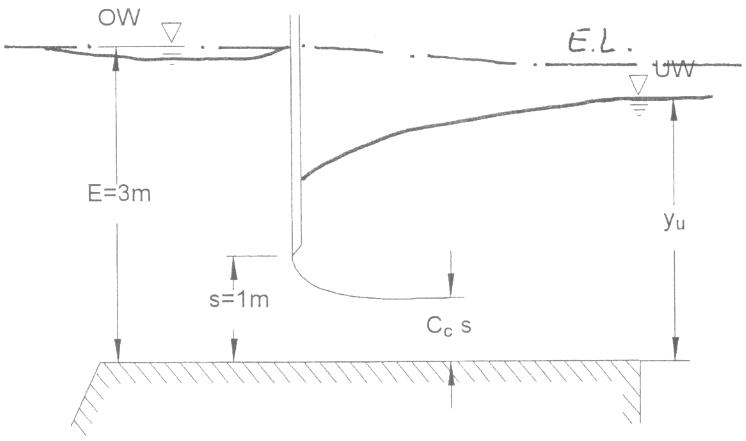
10.3 a: $y_U < y_2$ Wechselsprung im Abstrom, Kontrolle am Schütz



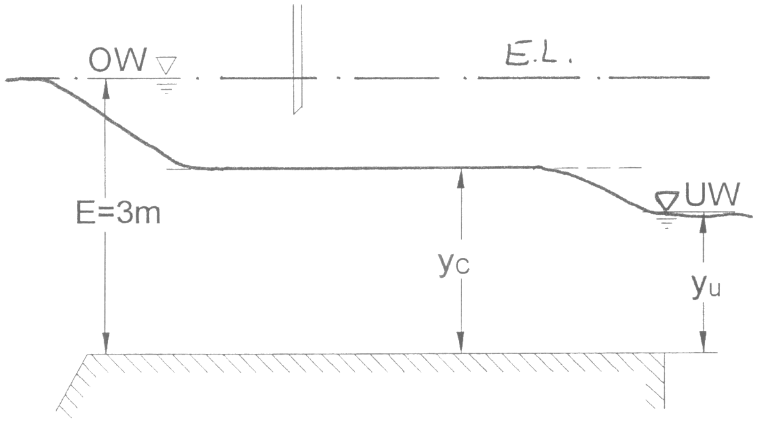
10.3 b: $y_U = y_2$ Wechselsprung, Kontrolle am Schütz **und** im Unterwasser



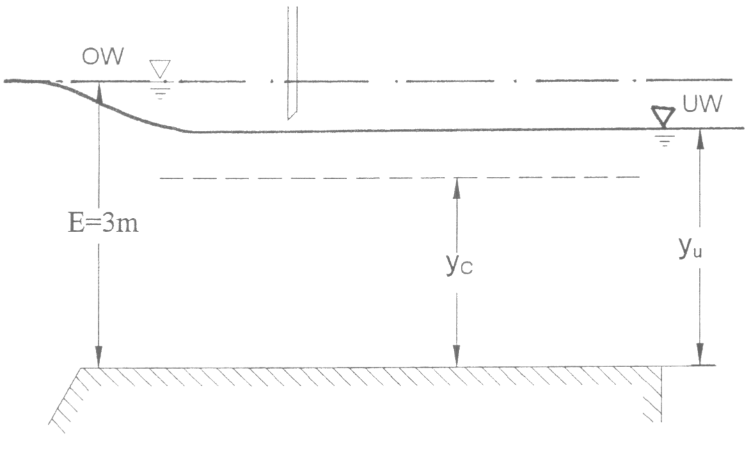
10.3 c: $y_U > y_2$ rückgestauter Wechselsprung, Kontrolle im Unterwasser



10.3 d: $y_U < y_C$ Grenzabfluß, Kontrolle auf der Schwelle



10.3 e: $y_U > y_C$ unterkritischer (strömender) Abfluß, Kontrolle im Unterwasser



Aufgabe 10.4:

10.4.1.
Wechselsprunggleichung:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8\,Fr_2^{\,2}} - 1\right)$$

$$Fr_2 = \frac{V_2}{\sqrt{g\,y_2}}$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{B \cdot y_2} = \frac{43\,\frac{m^3}{s}}{10\text{ m} \cdot 3\text{m}} = 1{,}43\,\frac{m}{s}$$

$$Fr_2 = \frac{V_2}{\sqrt{g\,y_2}} = \frac{1{,}43\,\frac{m}{s}}{\sqrt{9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 3\text{ m}}} = 0{,}264$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8\,Fr_2^{\,2}} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8 \cdot 0{,}264^2} - 1\right) = 0{,}124$$

$$y_1 = 0{,}124 \cdot y_2 = 0{,}124 \cdot 3\text{ m} = 0{,}372\text{ m}$$

10.4.2:
Für $y_1 > 0{,}372$ m wandert der Wechselsprung nach rechts weg und für $y_1 < 0{,}372$ m wandert er nach links (rückgestauter Wechselsprung).

10.4.3:

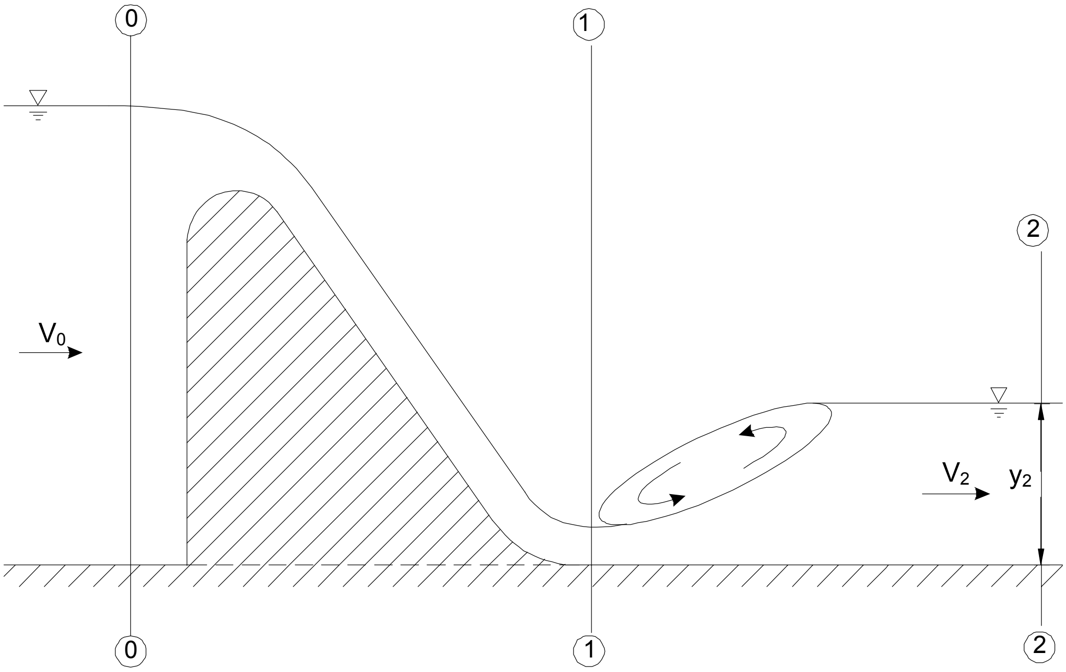
$$\Delta H = E_1 - E_2 = y_1 + \frac{V_1^2}{2\,g} - \left(y_2 + \frac{V_2^2}{2\,g}\right)$$

$$V_1 = \frac{Q}{B \cdot y_1} = \frac{43\,\frac{m^3}{s}}{10\text{ m} \cdot 0{,}372\text{ m}} = 11{,}56\,\frac{m}{s}$$

$$\Delta H = 0{,}373\text{m} + \frac{\left(11{,}54\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}} - \left(3\text{ m} + \frac{\left(1{,}43\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}\right) = 0{,}373\text{ m} + 6{,}79\text{ m} - \left(3\text{ m} + 0{,}105\text{ m}\right) =$$

$$= 7{,}163\text{ m} - 3{,}105\text{ m} = 4{,}06\text{ m}$$

10.4.4:



10.4.5:
Fließwechsel vom unterkritischen (strömenden) zum überkritischen (schießenden) Abfluß zwischen den Stellen 0 und 1.

$$E_0 = E_1 = y_1 + \frac{V_1^2}{2\,g} = 7{,}183 \text{ m}$$

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\left(\frac{43\,\frac{m^3}{s}}{10\text{ m}}\right)^2 \frac{1}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}} = 1{,}235 \text{ m}$$

$$\frac{E_0}{y_c} = \frac{7{,}183}{1{,}235} = 5{,}82$$

Energiediagramm, Hydromechanik I und II Vorlesungen , Abb. 10.10 und hier S. 121

$$\frac{y_0}{y_C} = 5{,}8$$

$$y_0 = 5{,}8 \cdot 1{,}235 \text{ m} = 7{,}16 \text{ m}$$

10.4.6:
Die Abflußkontrolle liegt auf dem Scheitelpunkt des Wehrrückens.

Aufgabe 10.5:

$$V = \frac{Q}{A}$$

$$A = \frac{Q}{V} = \frac{10\ \frac{m^3}{s}}{1\ \frac{m}{s}} = 10\ m^2$$

$$A = B \cdot y$$

$$y = \frac{A}{B} = \frac{10\ m^2}{5\ m} = 2\ m$$

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{g \cdot y}} = \frac{1\frac{m}{s}}{\sqrt{9{,}81\ \frac{m}{s^2} \cdot 2\ m}} = 0{,}226 < 1$$

unterkritischer (strömender) Abfluß

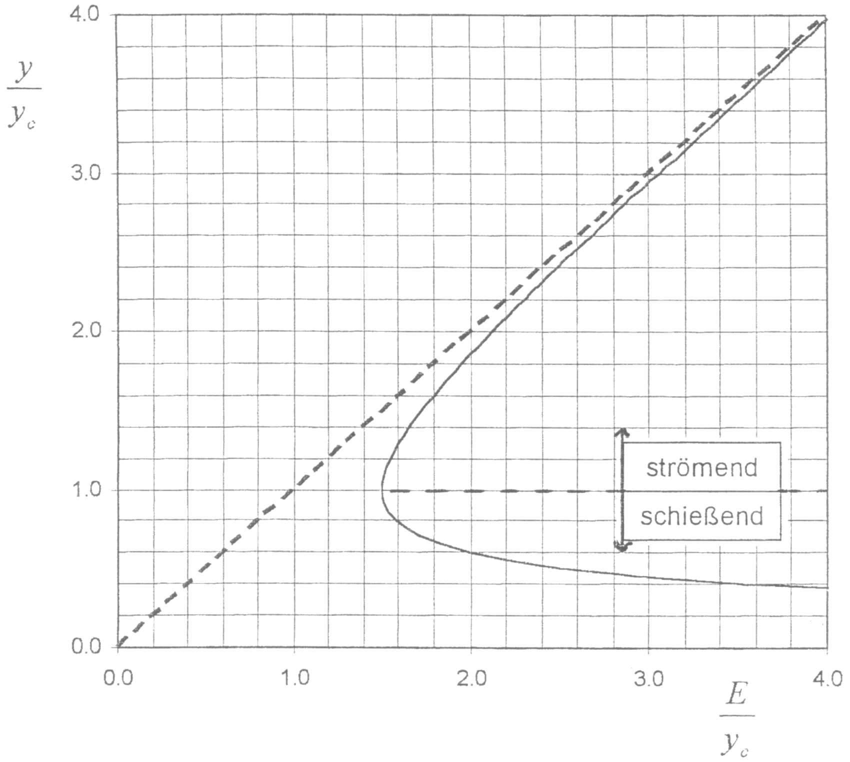
Aufgabe 10.6:

$$V = \sqrt{g \cdot y} = \sqrt{9{,}81\ \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}3\ m} = 1{,}72\ \frac{m}{s}$$

Aufgabe 10.7:

$$V = \sqrt{g \cdot y}$$

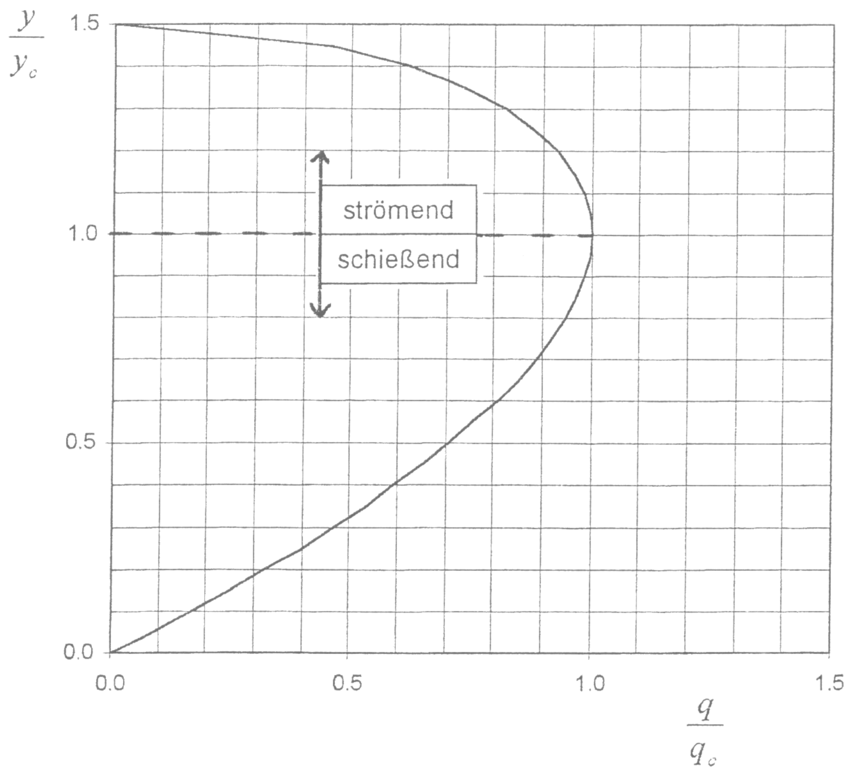
$$y = \frac{V^2}{g} = \frac{\left(2\ \frac{m}{s}\right)^2}{9{,}81\ \frac{m}{s^2}} = 0{,}41\ m$$



Dimensionsloses Energiehöhen-Diagramm

$$\frac{E}{y_c} = \frac{y}{y_c} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_c}{y}\right)^2$$

mit E [m]: spez. Energiehöhe
y [m]: Wassertiefe
y_c [m]: Grenztiefe



Dimensionsloses Abfluß-Diagramm

explizit:

$$\frac{q}{q_c} = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{y}{y_c}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{y}{y_c}\right)^3}$$

implizit:

$$\frac{3}{2} = \frac{y}{y_c} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{q}{q_c}\right)^2 \cdot \left(\frac{y_c}{y}\right)^2$$

mit q [m²/s]: Abflußmenge je Breite
$q_c = q(y_c)$