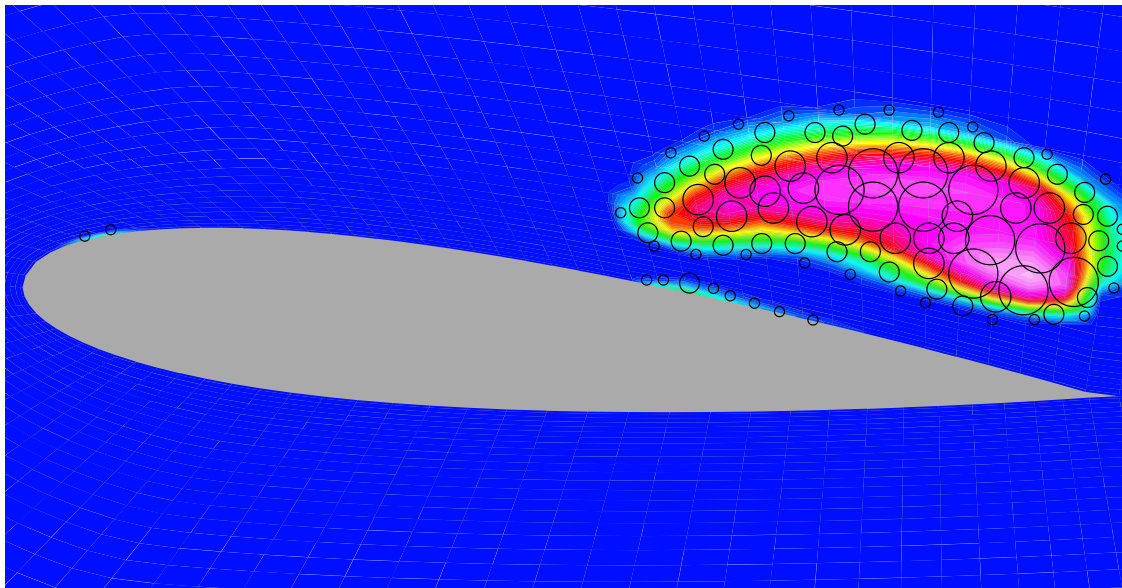


Instationär kavitierende Strömungen – Ein neues Modell, basierend auf Front Capturing (VoF) und Blasendynamik

von
Jürgen Sauer



Karlsruhe 2000

Titelbild: Instationär kavitierende Umströmung eines NACA 0015 Profils. Momentanbild der Verteilung des Dampfanteils und Rekonstruktion der internen Struktur der Blasenwolke. $\sigma_{ref} = 1.0$, $U = 12\text{m/s}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$, $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei $T = 293.15\text{ K}$.

Instationär kavitierende Strömungen – Ein neues Modell, basierend auf Front Capturing (VoF) und Blasendynamik

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften

von der Fakultät für Maschinenbau der
Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte Dissertation

von
Dipl.-Ing. Jürgen Sauer
aus Schielberg

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Juli 2000

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. G. H. Schnerr
Korreferenten: Prof. Dr.-Ing. M. Gabi
Prof. Dr. M. Perić

gewidmet meinen Eltern,
Erika und Willi Sauer

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1997 bis 2000 während meiner Tätigkeit als Doktorand am Fachgebiet Strömungsmaschinen der Universität Karlsruhe (TH). Die Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG), der ich an dieser Stelle danken möchte, im Rahmen des Graduiertenkollages „Energie- und Umwelttechnik“ finanziell gefördert.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. habil. G.H. Schnerr für die Anregung zu dieser Arbeit und für die Übernahme des Hauptreferats. Sein fortwährend großes Interesse an der Arbeit, zahlreiche Anregungen und intensive Diskussionen haben maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Dem Leiter des Fachgebiets Strömungsmaschinen, Herrn Professor Dr.-Ing. M. Gabi, danke ich für seine wohlwollende Unterstützung, für die Übernahme des Korreferats sowie für die Möglichkeit, die Arbeit in seinem Fachgebiet anfertigen zu können.

Herrn Professor Dr. M. Perić danke ich für das Interesse an der Arbeit und für die Übernahme des Korreferats.

Für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Wittenburg recht herzlich bedanken.

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Dipl.-Phys. M. Krömer für die Bereitstellung der einphasigen Programmversion. Durch die sehr übersichtlich und strukturierte Programmierung des Quellcodes war es möglich, in relativ kurzer Zeit ein Kavitationsmodell zu implementieren. Es ist mir durchaus bewußt, daß letztlich meine Arbeit auf dem numerischen Verfahren von Herrn Krömer basiert und er damit einen großen Beitrag zu dem in dieser Arbeit erzielten Fortschritt in der Kavitationsmodellierung geleistet hat.

Weiterhin möchte ich mich bei Herrn Dr. O. Ubbink bedanken, der mich in Fragen der Zweiphasennumerik tatkräftig beraten hat. In diesem Zusammenhang bedanke ich mich ebenfalls bei Herrn Dr. D.B. Kothe für dessen Unterstützung und seinen ermutigenden Ratschlag im Bezug auf die Numerik: „Cross you fingers and hope that everything works out“. Bedanken möchte ich mich ebenfalls bei Herrn Dr. C.W. Hirt für die hilfreichen Tips in Sachen Numerik.

Bei Herrn Dr. A. Keller und Prof. R.E. Arndt möchte ich mich für die Unterstützung meiner Arbeit von der experimentellen Seite sowie für die Bereitstellung von Bildmaterial und Messungen zu kavitierenden Strömungen bedanken.

Bei Kollegen und Mitarbeitern des Fachgebiets Strömungsmaschinen bedanke ich mich für ihre verlässliche Unterstützung. Insbesondere gilt mein Dank meinen Kollegen der „Forschungsgruppe Mehrphasenströmungen“ für den Zusammenhalt der Gruppe in guten wie auch schlechen Zeiten, sowie für viele Anregungen und Diskussionen, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Ein ganz besonderer Dank gilt an dieser Stelle meinem Kollegen und besten Freund Herrn Dipl.-Ing. G. Winkler, der mich auf sehr vielfältige Art und Weise während meiner Tätigkeit hier am Fachgebiet unterstützt hat. Als Kollege danke ich ihm für die hervorragende Administration des Netzwerks, die zahlreichen Tips und Tricks bzgl. UNIX, für die Bereitstellungen diverser Tools und für kompetenten Rat bzgl. der Numerik sowie für die vorbehaltlose Bereitschaft, mir in kritischen Situationen mit Rat und vorallem auch mit Tat zur Seite zu stehen. Als Freund danke ich ihm dafür, daß ich mich auch in privaten Dingen immer an ihn wenden konnte.

Mein Dank gilt nicht zuletzt meinem Familien- und Freundeskreis, insbesondere meinen Eltern und meiner Freundin Olja, für Geduld, Entgegenkommen und Förderung, die ich hier erfahren habe.

Karlsruhe, im September 2000

Jürgen Sauer

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	XI
1 Einleitung	1
1.1 Hintergrund	1
1.2 Bisherige Studien zur Kavitation	3
1.2.1 Theoretische Arbeiten	4
1.2.1.1 Kavitationskeime und Keimbildungsmechanismen	4
1.2.1.2 Theoretische Beschreibung des Wachstums bzw. Kollaps einer Einzelblase	4
1.2.1.3 Algebraische Beschreibung des Wachstums bzw. Kollaps einer Einzelblase	6
1.2.1.4 Numerische Beschreibung des Wachstums bzw. Kollaps von Blasen	7
1.2.2 Experimentelle Arbeiten	7
1.2.2.1 Messungen des Keimgehalts und der Zerreißfestigkeit	8
1.2.2.2 Maßstabeffekte	10
1.2.2.3 Visualisierung kavitierender Strömungen	12
1.2.3 Numerische Arbeiten	15
1.3 Zielsetzung und Vorgehensweise	18
2 Theorie	21
2.1 Modellierung von Zweiphasenströmungen	21
2.1.1 Front Tracking Methoden	22
2.1.2 Front Capturing Methoden	23
2.1.3 Vergleichende Betrachtung	23
2.2 Die Volume-of-Fluid Methode (VoF)	24
2.3 Kavitationsmodellierung	26
2.3.1 Physikalisches Modell	27
2.3.2 Modellierung der Keimverteilung	28
2.3.3 Modellierung des konvektiven Transports und der Entstehung bzw. Vernichtung von Dampfvolumen	30
2.4 Blasendynamik	32
2.4.1 Grundgleichungen	32

2.4.2	Kopplung der Blasendynamik mit dem Strömungsfeld	36
2.4.3	Diskussion der Blasenwachstumsrelationen	37
2.4.3.1	Simuliertes Blasenwachstum im Vergleich zum Experiment	38
2.4.3.2	Einfluß von Thermischen Effekten	39
2.4.3.3	Einfluß von Mechanischen Effekten	43
2.4.4	Zusammenfassung	46
2.5	Potential und Grenzen der Modellierung	49
2.5.1	Erweiterte Modellierung des Keimgehalts	49
2.5.2	Erweiterte Modellierung des Keimtyps	49
2.5.3	Berücksichtigung von thermischen Effekten	51
2.5.4	Berücksichtigung von Trägheitseffekten	51
2.5.5	Grenzen der Modellierung: Annahme einer homogenen Strömung . .	54
3	Numerisches Verfahren	57
3.1	Grundgleichungen	57
3.1.1	Zweiphasenströmungen ohne Phasenübergang - Standard-VoF An- wendungen	59
3.1.2	Zweiphasenströmungen mit Phasenübergang - Kavitation	59
3.2	Diskretisierung des Rechengebiets	60
3.3	Diskretisierung der Grundgleichungen	61
3.3.1	Impulsgleichungen	62
3.3.1.1	Konvektiver Term	63
3.3.1.2	Diffusiver Term	64
3.3.1.3	Zeitliche Diskretisierung	65
3.3.2	Enthalpiegleichung	66
3.3.3	Void Fraction Transportgleichung: Standard-VoF Anwendungen . .	67
3.3.3.1	Donor-Acceptor Differenzierungsschema	67
3.3.3.2	CICSAM Differenzierungsschema	70
3.3.4	Void Fraction Transportgleichung - Kavitierende Strömungen	72
3.3.5	Druck-Korrektur-Verfahren	73
3.3.5.1	Das SIMPLE Verfahren	73
3.3.5.2	Das SIMPLE Verfahren für VoF Anwendungen	76
3.3.5.3	Das SIMPLE Verfahren für Kavitation	79
3.4	Programmablauf für die Berechnung von Zweiphasenströmungen	81
4	Volume-of-Fluid Anwendungen	85
4.1	Anwendungen der Volume-of-Fluid Methode - numerische Testfälle	85
4.1.1	Konvektion eines quadratischen Fluidvolumens	85
4.1.2	Rotation eines rechteckigen Fluidvolumens	86
4.2	Anwendungen der Volume-of-Fluid Methode - reale Strömungsprobleme . .	87
4.2.1	Wasserwelle im Tank - Sloshing	87
4.2.2	Kollaps einer Wassersäule - Dambruch	90
4.2.3	Kollaps einer Wassersäule mit Hindernis - Obstacle	94

4.3	Zusammenfassung der VoF Ergebnisse	97
5	Kavitierende Düsenströmungen	99
5.1	Kavitierende Düsenströmung - Referenzfall	100
5.1.1	Einfluß des numerischen Zeitschritts	106
5.1.2	Einfluß des Rechengitters	108
5.2	Geschwindigkeitsmaßstabseffekt	111
5.3	Größenmaßstabseffekt	112
5.4	Variation des Kavitationsbeiwerts	115
5.5	Fluidqualitätseffekt	120
5.6	Thermische Effekte: Variation der Fluidtemperatur	122
6	Kavitation an einem NACA 0015 Profil	127
6.1	Kavitierende Profilmströmung - Referenzfall	127
6.1.1	Experiment	127
6.1.2	Simulation	130
6.2	Variation des Kavitationsbeiwerts	136
6.3	Variation der Fluidqualität	139
6.4	Variation der Randbedingung	141
7	Wechselwirkung Kavitation - Freie Oberfläche	145
8	Zusammenfassung	151
	Literaturverzeichnis	155

Symbolverzeichnis

a	Temperaturleitfähigkeit
A	Koeffizienten einer Matrix, Konstante
B	Konstante
CFL	CFL-Zahl
c_p	spezifische Wärme bei konstantem Druck
c	Schallgeschwindigkeit
d	totales Differential
D	Durchmesser
h	spezifische Enthalpie
F	Flußvektor
f	Frequenz
K	Interpolationsfaktor
L	charakteristische Länge, latente Wärme
M	Mach-Zahl
N	Anzahl
n	Polytrophenexponent
n_0	Anzahl Kavitationskeime pro Volumeneinheit Flüssigkeit
p	Druck
R	Radius
Re	Reynolds-Zahl
r	radiale Koordinate
S	Zellfläche
Str	Strouhal-Zahl
T	Temperatur
T_{period}	Schwingungsdauer
Tu	Turbulenzgrad
t	Zeit
t_K	Kollapszeit einer Blase
u, v	Geschwindigkeitskomponenten in x - und y -Richtung
U	charakteristische Geschwindigkeit
V	Volumen
x	Kartesische Koordinate
y	Kartesische Koordinate
\mathbf{w}	Geschwindigkeitsvektor

α	volumetrischer Gasanteil bzw. Dampfanteil
α_A	Anstellwinkel
Δ	Differenz
ϵ	Gassättigungsgrad
κ	Isentropenexponent
∂	partielle Ableitung
λ	Wärmeleitfähigkeit
μ	dynamische Zähigkeit
ρ	Dichte
σ	Kavitationsbeiwert
σ_o	Oberflächenspannung
τ	Schubspannung

Indizes

B	Blase
a	Luft
chord	Sehnenlänge
cav	Kavitationsgebiet
exp	experimentell
i	inception, Zähler
f	face, Wert im Mittelpunkt einer Zellfläche
j	Zähler
l	Flüssigkeit
max, min	Maximal-, Minimalwert
Ray	Blasenwachstum, berechnet nach Rayleigh
R-P	Blasenwachstum, berechnet nach Rayleigh & Plesset
P&Z	Blasenwachstum, berechnet nach Plesset & Zwick
sys	System
sat	Sättigungszustand
Ü	Überhitzung
v	Dampf
0	Ausgangszustand
∞	Fernfeld

Sonstige Zeichen

$() \cdot ()$	Skalarprodukt
$()^+$	dimensionslos
$()$	totale Ableitung nach der Zeit t

1 Einleitung

1.1 Hintergrund

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht die Entwicklung eines Kavitationsmodells zur numerischen Simulation kavitierender Strömungen.

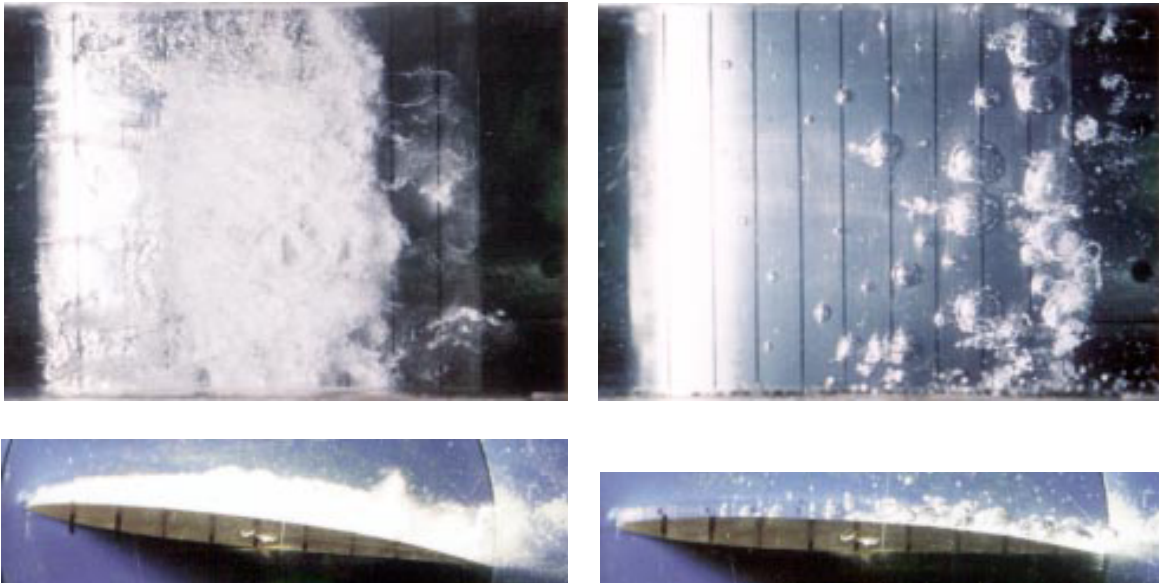
Unter dem Begriff Kavitation wird im allgemeinen die Bildung einer Dampfphase in einer Flüssigkeit bezeichnet. Der Begriff Kavitation (lateinisch: cavus = hohl) geht auf R.E. Froude zurück und beschreibt alle möglichen Erscheinungsformen dieses Phänomens, wie z.B. die Bildung von Einzelblasen, von Blasenwolken oder von zusammenhängenden anliegenden Kavitationsgebieten. Ausgehend von sog. Kavitationskeimen, wie z.B. Partikeln oder Luftblasen, bilden sich durch Absenkung des statischen Drucks unter einen kritischen Wert Dampfblasen, die in Abhängigkeit von Druck und Temperatur anwachsen und wieder zusammenfallen. Ein Anhaltswert für den statischen Druck, bei dem Kavitationseffekte auftreten, ist der zur Umgebungstemperatur gehörende Sättigungsdampfdruck. Die Differenz zwischen statischem und Sättigungsdampfdruck, entdimensioniert durch den dynamischen Druck der Anströmung, wird als Kavitationsbeiwert σ bezeichnet,

$$\sigma = \frac{p - p_{sat}}{\frac{1}{2}\rho_l U^2} \quad (1.1)$$

und ist ein Maß für die Kavitationsanfälligkeit einer Strömung. Unterschreitet der Kavitationsbeiwert den Wert Null, ist mit dem Auftreten von Kavitation zu rechnen. Der kritische Kavitationsbeiwert σ_i (i=inception), ab dem tatsächlich Kavitation auftritt, hängt jedoch von mechanisch-dynamischen Effekten wie z.B. der Trägheit des umgebenden Fluids, der Oberflächenspannung und Reibung, sowie von der Anzahl von Kavitationskeimen ab. Thermische Effekte (Wärmetransport zur Blasenwand) können in vielen Fällen vernachlässigt werden. Hieraus ergibt sich auch die Unterscheidung zum Sieden, bei dem der Verdampfungsvorgang durch den Wärmetransport dominiert wird. Nach Isay [1] wird Kavitation daher auch als kaltes Sieden bezeichnet. Eine eindeutige Trennung beider Vorgänge ist jedoch nicht immer möglich, insbesondere wenn es sich bei dem kavitierenden Fluid nicht um kaltes Wasser handelt, Arndt [2].

Kavitation tritt in einer Vielzahl von hydraulischen Maschinen und Systemen auf und wird aus unterschiedlichen Gründen erforscht. Im Anlagenbau und beim Betrieb von Strömungsmaschinen steht hauptsächlich die Kavitationserosion im Mittelpunkt, während bei der

Entwicklung von Strömungsmaschinen die Auswirkungen der Kavitation auf das Betriebsverhalten im Vordergrund stehen. Wirkungsgradverluste, Geräuschenstehung und mechanische Schwingungen können dort als Folge von Kavitation auftreten. Mit der Entwicklung von direkt einspritzenden Diesel- und Ottomotoren gewinnt Kavitation unter dem Aspekt der Schadstoffminimierung in der Automobilindustrie zunehmend an Bedeutung. Aufgrund der enorm hohen Abspritzdrücke (Dieselmotor ca. 1000bar, Ottomotor ca. 100bar) werden im Düsenhals sehr große Geschwindigkeiten erreicht und es kann zu einer vorzeitigen Kraftstoffverdampfung bereits in der Einspritzdüse kommen. Dies führt zu einer geänderten Spraybildung am Düsenaustritt (Chaves et. al [3]) und beeinflusst somit direkt den nachfolgenden Verbrennungsprozess und damit die Schadstoffbildung. In der Industrie hat die Erforschung bzw. die Vermeidung von Kavitation einen sehr hohen Stellenwert und es werden beachtliche Mittel eingesetzt, um dieses Phänomen sowohl experimentell als auch numerisch zu untersuchen. Da experimentelle Untersuchungen in der Regel sehr teuer und zeitaufwendig sind, werden verstärkt numerische Hilfsmittel zur Auslegung von ganzen Anlagen bzw. von Einzelkomponenten wie z.B. Pumpen, Pumpenlaufrädern, etc. eingesetzt. Der Fortschritt in der Numerik erlaubt, zumindest einphasig, die Strömung sehr genau und zuverlässig zu berechnen, jedoch besteht derzeit noch Bedarf an vergleichbar zuverlässigen Modellen, mit denen Kavitationserscheinungen quantitativ als auch qualitativ erfasst werden können.



(a) Schichtkavitation: SR230-NC-3 Profil, $\alpha = 5.0^\circ$, $U_\infty \sim 8\text{m/s}$, $\sigma_\infty = 0.89$, $L_c = 0.15\text{m}$, Wasser bei $T \sim 18.5^\circ\text{C}$.

(b) Blasen kavitation: SR230-NC-3 Profil, $\alpha = 0.5^\circ$, $U_\infty \sim 8\text{m/s}$, $\sigma_\infty = 0.19$, $L_c = 0.15\text{m}$, Wasser bei $T \sim 18.5^\circ\text{C}$.

Abbildung 1.1: Schicht - und Blasen kavitation an einem SR230-NC-3 Profil in der Draufsicht bzw. Seitenansicht. Experiment: H. Yamaguchi et al. [53], Dept. of Environmental and Ocean Eng., University of Tokyo.

Zur Beschreibung der Kavitation hat sich die Einteilung in Schicht- und Blasen kavitation etabliert. Der Begriff Schichtkavitation beschreibt die Entstehung einer zusammenhängenden mit Dampf gefüllten Kavität. Dieser Begriff wird aber auch dann verwendet, wenn das Kavitationsgebiet bei der Betrachtung mit dem bloßen Auge sich als Schicht darstellt, obwohl Hochgeschwindigkeitsaufnahmen die Blasenstruktur deutlich erkennen lassen. Schichtkavitation ist typisch für die Umströmung einer scharfkantigen angestellten Geometrie [4], oder eines Profils bei großem Anstellwinkel, wie in Abb. 1.1 (a) dargestellt. Im Gegensatz hierzu besteht bei Blasen kavitation das Kavitationsgebiet aus vielen, relativ großen Einzelblasen. Dies ist typisch für Geometrien mit geringen Druckgradienten [4], wie z.B. Profilmströmungen bei kleinem Anstellwinkel, Abb. 1.1 (b). Der Begriff Wolken kavitation wird verwendet, wenn das Kavitationsgebiet aus sehr vielen kleinen Blasen gebildet wird, die Abgrenzung zur Blasen kavitation und zur Schichtkavitation ist jedoch fließend.

1.2 Bisherige Studien zur Kavitation

Die Erforschung des Kavitationsphänomens ist schon seit langem Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen, dementsprechend hoch ist die Anzahl an Veröffentlichungen auf diesem Gebiet. Ein mögliches Kriterium zur Klassifizierung der Arbeiten ist die Vorgehensweise bei der Untersuchung der Kavitationsproblematik, daher gliedert sich die Literaturübersicht in drei Hauptbereiche, die in weitere Abschnitte unterteilt werden:

• Theoretische Arbeiten

- Kavitationskeime und Keimbildungsmechanismen: Keime, Zugspannung in Flüssigkeiten, Nukleation, Kavitationstypen
- Theoretische Beschreibung des Wachstums bzw. Kollaps einer Einzelblase: Einfluß der Viskosität, der Oberflächenspannung, Kompressibilität, nichtkondensierendes Gas (Sonoluminescens), etc.
- Algebraische Beschreibung des Wachstums bzw. Kollaps einer Einzelblase: empirische Wachstumsgesetze
- Numerische Beschreibung des Wachstums bzw. Kollaps von Blasen: Asymmetrischer Blasen kollaps, Entstehung eines Mikrojets, Blasenwechselwirkung

• Experimentelle Arbeiten

- Messung der Keimverteilung: Keimspektrum, Zerreißfestigkeit
- Maßstabeffekte, Auftrieb und Widerstand an Profilen, Visualisierung, Versuche zur Kavitationserosion, Einfluß des Gasgehalts, Partikelkonzentration

• Numerische Arbeiten - CFD

- Modellentwicklung: einphasige bzw. zweiphasige Modellierung
- Modelle mit bzw. ohne Auflösung der internen Blasenstruktur
- Modelle zur Simulation von stationärer bzw. instationärer Kavitation

1.2.1 Theoretische Arbeiten

1.2.1.1 Kavitationskeime und Keimbildungsmechanismen

Da alle Kavitationserscheinungen ihren Ursprung in der instabilen Aufweitung von Keimen finden, bilden Studien zum Keimgehalt bzw. zur Keimbildung die Basis zum Verständnis der Kavitation. Keime sind sogenannte Schwachstellen in der Flüssigkeit und sind die Ausgangspunkte für deren Aufreißen bzw. Verdampfen. Sie sind dafür verantwortlich, daß Flüssigkeiten in der Regel keine Zugspannungen ertragen können, obwohl theoretische Berechnungen von Frenkel [5], Fürth [6] und Döring [7] ertragbare Zugspannungen in der Größenordnung von 1000bar liefern. Auf einen ähnlich hohen Wert führen Betrachtungen zur Keimbildungswahrscheinlichkeit von Isay [1] auf der Basis der statistischen Thermodynamik. Diese Arbeiten stützen sich auf Theorien zur **homogenen Keimbildung** in der Flüssigkeit, d.h. die neue Phase wird im Innern der Ausgangsphase durch molekulare Austauschvorgänge gebildet. Die größten bisher gemessenen Zugspannungen in Wasser (entgast, gefiltert) wurden von Briggs [8] erzielt und betragen jedoch nur 250-280bar, während unbehandeltes Wasser quasi keine Zugspannungen ertragen kann (Knapp [9]). Dies wird dadurch erklärt, daß selbst in reinstem Wasser eine hohe Anzahl von Keimen vorhanden ist. Die Bildung der neuen Phase beginnt an diesen bereits vorhandenen Störstellen und wird als **heterogene** Keimbildung bezeichnet. Als Keime werden in der Literatur von Isay[1], Holl [10] und Hammit [12] Gasblasen, in der Flüssigkeit gelöstes Gas, hydrophobe Feststoff-Partikel, Porenkeime (Partikel mit Gaseinschluß in Vertiefung, Harvey [13] [14]) oder Oberflächenrauigkeiten angegeben. Der Keimtyp beeinflusst unmittelbar den kritischen Kavitationsbeiwert σ_i , bei dem Kavitationseffekte (Blasenbildung, Geräusche) auftreten. Die Aufweitung von Gasblasen infolge Druckabsenkung wird als **Pseudokavitation** bezeichnet und tritt auch bei Drücken oberhalb des Dampfdrucks auf. Dies gilt analog für **Gaskavitation**, die den Übergang von gelöstem Gas durch Diffusion in den ungelösten Zustand beschreibt. Im Unterschied zu diesen Kavitationsarten setzt **Dampfkavitation** erst mit der Unterschreitung des Dampfdrucks ein. In realen Strömungen tritt Kavitation in der Regel als Kombination der Kavitationsarten auf, d.h. zuerst wachsen Blasen-bzw. Porenkeime durch Pseudokavitation bis zu einem kritischen Radius an, mit dessen Erreichen dann Dampfkavitation einsetzt [15]. Im Vergleich zur Dampf- und Pseudokavitation ist die Gaskavitation ein vergleichsweise langsamer Prozeß und ist daher in der Technik von untergeordneter Bedeutung [10].

1.2.1.2 Theoretische Beschreibung des Wachstums bzw. Kollaps einer Einzelblase

Die ersten theoretischen Ansätze zur Beschreibung des Wachstums bzw. des Kollaps einer Einzelblase gehen auf Besant [16] zurück, der bereits 1859 ausgehend von der Impuls- und Massenerhaltung eine Gleichung zur Berechnung der Blasenwandgeschwindigkeit herleitet. Rayleigh [17] erhält 1917 die selbe Gleichung auf Basis einer Energiebilanz. Plesset & Zwick [32] berücksichtigen zusätzlich die Oberflächenspannung. Die erweiterte Gleichung geht unter dem Namen **Rayleigh-Plesset-Gleichung** in die Literatur ein und beschreibt

das Wachstum bzw. den Kollaps einer sphärischen Einzelblase in Abhängigkeit der Differenz von Blaseninnen- und Umgebungsdruck sowie der Trägheit des umgebenden Fluids. Diese Gleichung wurde von zahlreichen Autoren als Basis für deren Arbeit verwendet und um zusätzliche Terme zur Berücksichtigung weiterer physikalischer Effekte erweitert. Die wesentlichen Ergebnisse dieser Studien werden im folgenden kurz zusammengestellt.

- **Oberflächenspannung:** Studien von Plesset & Zwick [32] liefern die Aussage, daß die Oberflächenspannung das Blasenwachstum reduziert. Für den Wachstumsprozeß ist die Oberflächenspannung jedoch kaum von Bedeutung, da deren Einfluß umgekehrt proportional zum Radius abnimmt. Die Oberflächenspannung ist jedoch von entscheidend für den kritischen Kavitationsbeiwert σ_i . Durch die Oberflächenspannung wird der kritische Keimradius R_k festgelegt, ab dem Blasen wachstumsfähig sind und instabiles Blasenwachstum einsetzt [10]. Bei gegebener Druckdifferenz zwischen Blaseninnendruck p_B und Umgebungsdruck p_∞ , berechnet sich der kritische Keimradius gemäß: $R_k = 2\sigma_O / (p_B - p_\infty)$. Auf den Blasenknall wirkt sich die Oberflächenspannung verstärkend aus. Ihr Einfluß ist jedoch gering, da beim Blasenknall die Trägheitseffekte dominieren [19] [20].
- **Viskosität:** Die Viskosität des Fluids hat einen dämpfenden Einfluß auf das Blasenwachstum und den Kollaps, Portisky [21], Ivany [20]. Für Fluide wie kaltes Wasser ist die Dämpfung vernachlässigbar, mit steigender Zähigkeit wird die Kollaps- geschwindigkeit stark reduziert, für $\mu \sim 1470 \mu_{\text{Wasser}}$ bis auf einen Wert nahe Null abgebremst [20]. Zum Vergleich, Silikonöl (Bayer M 100) besitzt eine Zähigkeit von $\mu_{\text{Öl}} \sim 130 \mu_{\text{Wasser}}$.
- **Nichtkondensierendes Gas:** Untersuchungen zum Einfluß eines nichtkondensierenden Gases wurden von Hickling & Plesset [22] durchgeführt. Enthält die Blase einen Gasanteil, führt dies unvermeidlich zu einem sogenannten „**Blasen-Rebound**“, d.h. durch die Kompression des Gases steigt der Druck in der Blase an, die Kollaps- geschwindigkeit wird bis auf Null reduziert und die Blase weitet sich wieder auf. Der vollständige Kollaps der Blase wird verhindert. Dieser Effekt ist typisch für Kavita- tionsblasen, da diese letztlich durch instabile Aufweitung einer Gasblase oder eines Porenkeims entstanden sind. Studien von Mitchel & Hammit [24] sowie von Hick- ling [23] belegen die Aussage, daß sich auch reiner Dampf in den letzten Stadien des Kollaps wie ein nichtkondensierendes Gas verhält. Der Dampf wird quasi adia- bat komprimiert, da die frei werdende latente Wärme nicht schnell genug abgeführt werden kann. Der Druck und die Temperatur in der Blase steigen stark und füh- ren ebenfalls zu einem Rebound. Experimentell wird dies durch das Auftreten von „**Sonoluminescence**“ bestätigt, die in der Regel nur bei sehr hohen Temperaturen beobachtet wird [23].
- **Kompressibilität der Flüssigkeit:** Die Kompressibilität der flüssigen Phase ist nur dann von Bedeutung, wenn sehr hohe Blasenwandgeschwindigkeiten erreicht wer- den. Dies ist dann der Fall, wenn während des Blasenknalls die Kugelsymmetrie

über große Radienverhältnisse $R_0/R \sim 1000$ erhalten bleibt. Nach Berechnungen von Hickling [23], Hammit [20] und Ivany [19] werden unter dieser Voraussetzung beim Kollaps einer Blase Mach-Zahlen im Bereich von $M = \dot{R}/c_l = 10 - 100$ erreicht, c_l ist die Schallgeschwindigkeit in der reinen flüssigen Phase. In technischen Anwendung trifft die Annahme der Kugelsymmetrie in der Regel nicht zu, da diese aufgrund von festen Wänden, anderen kollabierenden Blasen, etc. gestört wird. Die Aufhebung der Symmetrie resultiert in erheblich geringeren Kollapsgeschwindigkeiten. Zusätzlich wird der Kollaps durch einen nichtkondensierenden Gasanteil gebremst, sodaß die Kompressibilität in den meisten technischen Anwendungen von untergeordneter Bedeutung ist, solange es sich nicht um hochkompressible Fluide wie organische Flüssigkeiten handelt. Für das Blasenwachstum ist die Kompressibilität der Flüssigkeit vernachlässigbar, da die Blasenwandgeschwindigkeiten sehr klein im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit c_l sind. Die bisher erwähnten Aussagen gelten nur für den Fall einer Einzelblase und nicht im Zusammenhang mit einem Gemisch bestehend aus Blasen und Flüssigkeit. Blasenhaltige Flüssigkeiten werden in Kapitel 1.2.1.4 angesprochen.

- **Thermische Effekte:** Der sog. thermische Effekt kann für die Schädigung einer Maschine durch Kavitation bzw. deren Betriebsverhalten von entscheidender Bedeutung sein. In Abhängigkeit der Fluidtemperatur nimmt die erosive Wirkung der Kavitation zunächst zu, erreicht ein Maximum und nimmt mit höheren Temperaturen wieder ab, wie aus Untersuchungen von Garcia [30, 31] hervorgeht. Der Anstieg der erosiven Wirkung mit der Temperatur ist bisher nicht eindeutig geklärt [12], hingegen wird die Reduktion der erosiven Wirkung nach dem Erreichen des Maximums dem thermischen Effekt zugeschrieben, d.h. bei hohen Temperaturen wird die Blasenkollaps geschwindigkeit durch Wärmetransportvorgänge begrenzt [25]. Aus industriellen Beobachtungen ist ebenfalls bekannt, daß die klassischen Ähnlichkeitskennzahlen (Kavitationsbeiwert σ , Re -Zahl, Str -Zahl) nicht ausreichend zur Beschreibung von Kavitationseffekten sind, wenn die Fluide sich in deren thermodynamischen Eigenschaften stark unterscheiden. Stepanoff [26, 27, 28] führt daraufhin den sog. „**B-Faktor**“ als weitere Ähnlichkeitskennzahl ein. Weitere Untersuchungen auf diesem Gebiet wurden von Bonnin [29] und Garcia [30, 31] durchgeführt.

1.2.1.3 Algebraische Beschreibung des Wachstums bzw. Kollaps einer Einzelblase

Die erste Beziehung zur Berechnung des Blasenwachstums bzw. Kollaps wurde von Rayleigh [17] hergeleitet, die unter dem Begriff „**inertia controlled growth**“ in die Literatur eingeht. Plesset & Zwick [32] berücksichtigen thermische Effekte auf das Blasenwachstum und leiten eine Beziehung her, die in guter Übereinstimmung mit Experimenten von Dergarabedian [33] ist und als „**heat diffusion controlled growth**“ in die Literatur eingeht. Mikic et al. [34] kombinieren die Relationen von Rayleigh und Plesset & Zwick und erhalten ein Wachstumsgesetz, das für das gesamte Wachstum einer Blase mit guter Näherung

gültig ist, wie die relativ gute Übereinstimmung mit Experimenten von Lien [35] belegt. Miyake & Tanaka [36] erweitern die Beziehung von Mikic und berücksichtigen zusätzlich die Oberflächenspannung.

1.2.1.4 Numerische Beschreibung des Wachstums bzw. Kollaps von Blasen

Die Arbeiten dieser Kategorie basieren in der Regel auf der nichtlinearen Rayleigh-Plesset-Differentialgleichung, die durch spezielle numerische Integrationsmethoden gelöst wird. Die Arbeiten werden hier nach dem Kriterium klassifiziert, ob es sich 1.) um Studien an einer ruhenden Einzelblase handelt, 2.) um 2-D Betrachtungen an ruhenden Blasen oder 3.) um die 1-D Strömung einer Blasenflüssigkeit handelt.

Zu der ersten Kategorie gehören die meisten der unter dem Punkt Theoretische Beschreibung des Blasenwachstums bzw. Kollaps zitierten Studien. Lee [37, 38] kombiniert die Rayleigh-Plesset-Gleichung mit dem Energiesatz und berechnet das Wachstum einer sphärischen Einzelblase in einer überhitzten ruhenden Flüssigkeit. Die berechneten Wachstumsverläufe sind in hervorragender Übereinstimmung mit Experimenten (verschiedene Stoffe, Überhitzung, Systembedingungen).

Es ist bekannt, daß die Kugelsymmetrie durch das Vorhandensein einer Wand gestört wird (z.B. Blake & Gibson [39]). Numerische Simulationen zum asymmetrischen Blasenkollaps (Kollaps in der Nähe einer festen Wand) wurden von Chapman & Plesset [40] durchgeführt. Die Studien belegen die Entstehung eines Mikrojets, der mit Geschwindigkeiten in der Größenordnung von 100-1000m/s auf die Wand trifft. Chahine et. al [41] berechnen den Kollaps einer Blasenwolke, bestehend aus mehreren Einzelblasen. Ein wesentliches Ergebnis dieser Studie ist, daß die Blasen im Zentrum der Wolke quasi kugelsymmetrisch kollabieren, mit Ausnahme des Endstadiums. Weiterhin konnte der prinzipielle Effekt der Blasenwechselwirkung aufgezeigt werden: die Blasenwechselwirkung behindert das Blasenwachstum und forciert den Blasenkollaps.

Eindimensionale Strömungen von Blasenflüssigkeiten wurden von Schulz [80], Brennen [82] und Delale et al. [81] berechnet. Ein wichtiges Charakteristikum von Blasenflüssigkeiten ist, daß die Schallgeschwindigkeit in einem Gemisch aus Blasen und Flüssigkeit weit unter den Werten der reinen Komponenten liegt, d.h. eine Flüssigkeit verhält sich durch die Zumischung von geringer Gasvolumina stark kompressibel [80]. Die Ausbreitung von Druckwellen in einer Blasenflüssigkeit weicht daher erheblich von der Ausbreitung in einer reinen Flüssigkeit ab.

1.2.2 Experimentelle Arbeiten

Zur Vorhersage des Betriebsverhaltens einer Pumpe (Turbine, Propeller, etc.) unter kavitierenden Bedingungen, werden in der Regel zunächst Experimente an einem Modell durchgeführt und die Ergebnisse mit Hilfe von Ähnlichkeitsgesetzen auf die Originalausführung

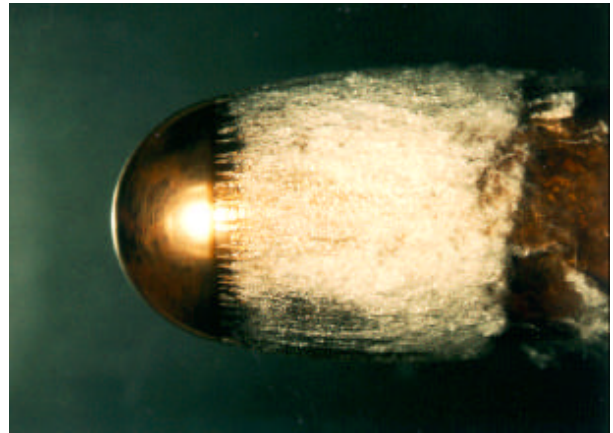
übertragen. Die Anzahl von experimentellen Arbeiten auf dem Gebiet der Kavitation ist enorm, die Studien umfassen sehr viele Bereiche wie z.B. die Messung der Keimverteilung in Flüssigkeiten, die Messung von Auftrieb und Widerstand an Profilen, Visualisierung, Versuche zur Kavitationserosion, Studien zum Einfluß des Gasgehalts, der Partikelkonzentration, der Wandrauigkeit und der Viskosität auf die Entstehung von Kavitation.

1.2.2.1 Messungen des Keimgehalts und der Zerreißfestigkeit

Pionierarbeit auf diesem Gebiet wurde von Keller [43] geleistet, der die **Fluidqualität** als weiteren Parameter in dessen Untersuchung miteinbezieht. Keller demonstriert anhand mehrerer Modellkörper den Einfluß des Keimgehalts auf den Beginn der Kavitation, d.h. ab welchem Kavitationsbeiwert σ_i Kavitation auftritt [43] [44]. Der Einfluß der Wasserqualität auf den Kavitationsbeginn bzw. die Ausdehnung des kavitierenden Bereichs wird anhand der Umströmung eines halbkugelförmigen Körpers ($D = 60\text{mm}$) aufgezeigt. In Abb. 1.2 (a) ist aufgrund der hohen **Zerreißfestigkeit** des Wassers keine Kavitation zu erkennen. Unter dem Begriff Zerreißfestigkeit wird hier die Fähigkeit eines Fluids verstanden, Zugspannungen ohne Aufreißen zu ertragen. Wird die Zerreißfestigkeit vermindert, z.B. durch Begasung, tritt bei ansonst gleichen Bedingungen in der Anströmung ausgebildete Kavitation am Körper auf, Abb. 1.2 (b).



(a) Keine Kavitation, hohe Zerreißfestigkeit des Wassers. $U_\infty = 11\text{m/s}$, $\sigma_\infty = 0.43$



(b) Ausgebildete Blasen kavitation, geringe Zerreißfestigkeit des Wassers. $U_\infty = 11\text{m/s}$, $\sigma_\infty = 0.43$

Abbildung 1.2: Einfluß der Wasserqualität auf die Kavitation. Experiment: A. Keller [44], Versuchsanstalt für Wasserbau, TU München, mit freundlicher Genehmigung.

Neben dem kritischen Kavitationsbeiwert beeinflt der Keimgehalt auch den Typ der Kavitation, wie Experimente von Billet [52], Lui & Brennen [48] und Cecco [49] belegen. Gindroz [45] kommt zu dem Schluß, daß der Keimgehalt der wichtigste Parameter für den

Beginn und die Entwicklung der Kavitation ist, d.h. ohne Berücksichtigung des Keimgehalts sind Ergebnisse aus Modellversuchen nur sehr begrenzt auf die Originalausführung übertragbar. Diese Schlussfolgerung wird von Keller [43] und weiteren Autoren bestätigt.

Auf Grundlage dieser Forschungen wird daher die **Fluidqualität** als weiterer Parameter neben den klassischen Ähnlichkeitskennzahlen eingeführt. Die Qualität eines Fluids kann anhand dessen Zerreißfestigkeit oder durch Messung des Keimgehalts quantitativ beschrieben werden. Keller [43] bestimmt mit einer neu entwickelten Methode die Zerreißfestigkeit von verschiedenen Flüssigkeiten in Abhängigkeit des Systemdrucks, des Gassttigungsgrads und der Temperatur. In gasgesttigtem Wasser sind nur geringe Zerreifestigkeiten zu erzielen ($\sim 10^4 \text{N/m}^2$), jedoch bei Untersättigung nimmt die Zerreißfestigkeit beträchtliche Werte an ($\sim 5 \cdot 10^5 \text{N/m}^2$). Mit zunehmender Temperatur nimmt die Zerreißfestigkeit ab, wobei Wasser ein Maximum bei ca. 10°C aufweist.

Die zweite jedoch wesentlich aufwendigere Methode zur Bestimmung der Fluidqualität ist die Messung des Keimgehalts. Solche Messungen wurden detailliert von Keller & Weitendorf [47], Holl [10], Liu & Brennen [48] und Pyun et al. [50] durchgeführt. Die Keimgehaltmessungen liefern ein Keimspektrum, d.h. die Keimanzahldichte $N(R)$ wird über dem Keimradius R aufgetragen.

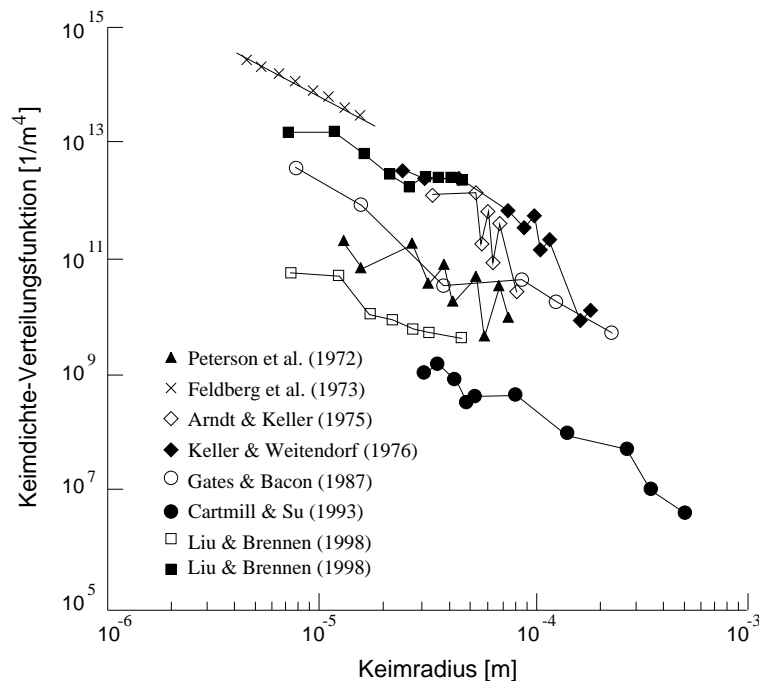


Abbildung 1.3: Messung des Keimspektrums in Wasser, Daten aus verschiedenen Quellen.

Aus Abb. 1.3 ist zu erkennen, daß der Radius der Keime und deren Anzahl stark variieren. Die Anzahl der Keime pro Einheitsvolumen N_i , deren Radien im Intervall $[R_i, R_{i+1}]$ liegen,

ergibt sich durch Integration der Kurve $N(R)$ im Intervall $[R_i, R_{i+1}]$. Die typische Größenordnung für die Keimanzahl in Wasser liegt bei 100-1000 Keimen/cm³, der Keimradius variiert zwischen 5 und 200 μm . Der Keimgehalt hängt entscheidend von der Vorbehandlung des Fluids ab, wie Experimente Keller von & Hartung [11] belegen: unbehandeltes Wasser: ca. 300 Keime/cm³, entgastes Wasser; ca. 180 Keime/cm³, gefiltertes und entgastes Wasser: ca. 14 Keime/cm³, nach [11].

Ein direkter Rückschluß von der Keimverteilung in einer Flüssigkeit auf deren Zerreißfestigkeit ist nicht möglich, da die ertragbaren Zugspannungen vom Keimtyp selbst abhängen, d.h., ob es sich bei den Keimen um Gasblasen oder Schwebstoffpartikel handelt. In der Arbeit von Gindroz [52] werden simultan Keimspektren in Wasser und dessen Zerreißfestigkeit bestimmt. Aus diesen Ergebnissen kann abgeleitet werden, daß die Zerreißfestigkeit maßgeblich durch die Anzahl und Radius der größten Keime bestimmt wird.

1.2.2.2 Maßstabeffekte

Unter dem Begriff Maßstabeffekte versteht man im allgemeinen die Abweichung im Betriebs- und Kavitationsverhalten des Prototyps von dem Verhalten des Modells bzw. von auf Überlegungen der klassischen Ähnlichkeitsmechanik beruhenden Vorhersagen. Die wichtigsten klassischen Ähnlichkeitskennzahlen zur Beschreibung kavitierender Strömungen sind die Reynolds-Zahl Re und der Kavitationsbeiwert σ . In zahlreichen Studien hat sich jedoch gezeigt, daß die Konstanz beider Kennzahlen die Übertragbarkeit der Ergebnisse vom Prototyp auf das Original nicht gewährleistet. In der Literatur werden als Ursachen gleich mehrere (im nachfolgenden aufgezählte) Effekte genannt. Als die wesentliche Ursache wurde von Keller [42, 43, 44], Gindroz [45], Arndt[2] und weiteren Autoren die Fluidqualität identifiziert.

- Fluidqualitätseffekte: Der Keimgehalt einer Flüssigkeit limitiert maßgeblich die ertragbaren Zugspannungen und beeinflusst damit direkt den kritischen Kavitationsbeiwert σ_i , mit dessen Unterschreitung Kavitation einsetzt. Studien von Ericson mit Venturi-Düsen [46] und Keller [43] belegen, daß besonders der Anteil an gelöstem bzw. ungelöstem Gas die Zerreißfestigkeit beeinflussen, d.h. Schwebstoffe (Partikel) sind nur von untergeordneter Bedeutung. Die ertragbaren Zugspannungen nehmen mit zunehmenden Gasgehalt stark ab, wie aus der folgenden Tabelle zu erkennen ist (Wasser, $p_{sys} = 2.3\text{bar}$, $T_{sys} = 20^\circ\text{C}$, nach Keller [43]). Der Gassättigungsgrad ϵ ist das Verhältnis der gelösten Gasmenge c_0 zur größtmöglichen Lösungsmenge c_s , die eine Funktion von Druck und Temperatur ist, $\epsilon = c_0/c_s$.

Gassättigungsgrad ϵ	0.5	1.0	1.5
Zugspannung [N/m^2]	310000	110000	80000

Obwohl die Fluidqualität für den kritischen Kavitationsbeiwert entscheidend ist, ist deren Einfluß auf den Wirkungsgrad einer Maschine gering [12]. Experimente an einer

Kaplanturbine von Fallström [51] zeigen, daß der Wirkungsgradabfall bei beginnender Kavitation quasi unabhängig vom Luftgehalt des Wassers ist (untersuchter Gasgehalt von 0.77% bis 1.84%).

- Geschwindigkeitsmaßstabeffekte: Bei konstantem Kavitationsbeiwert und gleicher Wasserqualität treten an einem Körper mit zunehmender Geschwindigkeit stärkere Kavitationseffekte auf. Ausgehend von einem Basiswert σ_0 , wächst der kritische Kavitationsbeiwert mit dem Quadrat der Geschwindigkeit an (Keller [44]), $\sigma_i \sim U^2$.
- Größenmaßstabeffekte: Bei konstantem Kavitationsbeiwert und gleicher Wasserqualität treten bei geometrisch ähnlicher Vergrößerung stärkere Kavitationseffekte auf. Keller [44] findet zwischen dem kritischen Beiwert σ_i und der charakteristischen Länge L den empirischen Zusammenhang, daß σ_i proportional zur Wurzel der Länge steigt, $\sigma_i \sim \sqrt{L}$.
- Turbulenzeffekte: Durch die Turbulenz in der Anströmung werden lokal Druckschwankungen verursacht, deren typische Amplitude im Bereich von $\Delta\sigma_{Tu} = \pm(0.01 - 0.05)$ liegen [12]. Der Einfluß der Turbulenz ist dann vernachlässigbar, wenn $|\Delta\sigma_{Tu}| \ll |\sigma_{min}|$ ist. Mit σ_{min} wird der niedrigste Kavitationsbeiwert im Strömungsfeld bezeichnet.
- Viskositätseffekte: Durch steigende Viskosität des Fluids wird der kritische Kavitationsbeiwert reduziert, da die Zähigkeit des Fluids das Blasenwachstum verlangsamt. Aus Experimenten ist weiterhin bekannt [12], daß der Einfluß der Viskosität auf den kritischen Kavitationsbeiwert insbesondere bei Strömungen mit Ablösungen von Bedeutung ist. Durch die höhere Viskosität des Fluids wird die Wirbelbewegung in einer abgelösten Strömung gebremst und daher das Druckminimum im Wirbelkern abgebaut. Bei anliegender Strömung beeinflusst die erhöhte Zähigkeit direkt die Grenzschichtdicke und damit die Möglichkeit einer Ablösung, die (eventuell) zur Entstehung eines Kavitationsgebiets führt (Wechselwirkung Kavitation - Ablösung, vgl. Schnerr et al. [54]).
- Reynolds-Zahl-Effekte: In zahlreichen Experimenten wird der kritische Kavitationsbeiwert mit der Re -Zahl korreliert. Es zeigt sich die Tendenz, daß mit der Reynolds-Zahl der kritische Kavitationsbeiwert ansteigt, wie aus Abb. 1.4 ersichtlich ist. Weiterhin ist zu erkennen, daß die Zuordnung $\sigma_i = f(Re)$ nicht eindeutig ist. Mit Zunahme bzw. Abnahme der Reynold-Zahl treten die zuvor beschriebenen Maßstabeffekte auf. Zur quantitativen Voraussage des kritischen Kavitationsbeiwerts ist es daher entscheidend, ob die Re -Zahl z.B. durch Erhöhung der Anströmgeschwindigkeit oder durch Vergrößerung der geometrischen Abmessungen des umströmten Körpers steigt. Im Hinblick auf die Übertragbarkeit von Meßergebnissen bei kavitierenden Strömungen ist daher eine konstante Re -Zahl weder notwendige noch hinreichende Bedingung, die die Übertragbarkeit garantiert - zumal die Re -Zahl den wichtigen Parameter Fluidqualität nicht berücksichtigt.

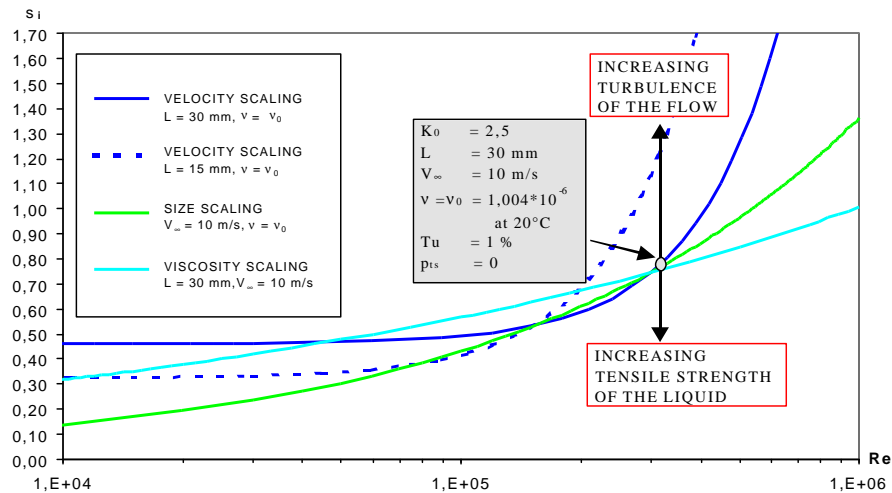
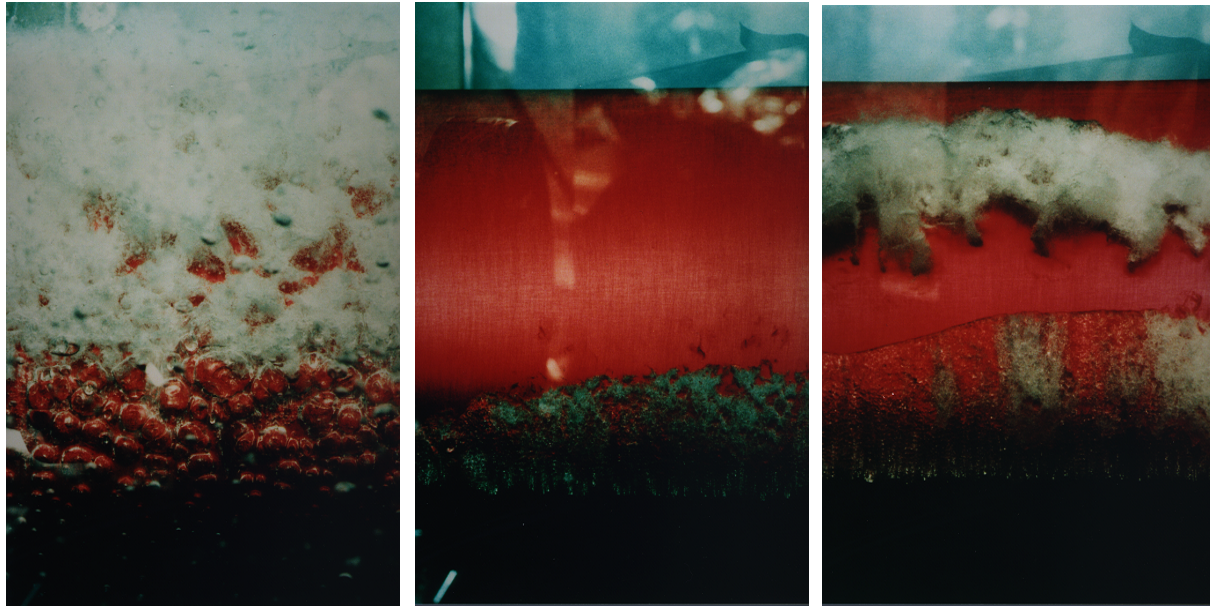


Abbildung 1.4: Abhängigkeit des kritischen Kavitationsbeiwerts s_i von der Reynolds-Zahl. Aus A. Keller: Cavitation scale effects - a presentation of its visual appearance and empirically found relations. Proc. of NCTC50 Int. Conf. on Propeller Cavitation [44], mit freundlicher Genehmigung.

- Thermische Effekte: Der thermische Effekte beruht auf einer Reduktion der Wachstums- bzw. Kollaps-geschwindigkeit der Blasen [12]. Bisher existieren noch keine systematischen Messungen, die den Einfluß der Fluidtemperatur auf die Entstehung der Kavitation dokumentieren. Auf Basis von blasendynamischen Überlegungen wird eine Reduktion der Kavitationseffekte mit zunehmender Temperatur erwartet. Der thermische Effekt unterscheidet sich von den bisher genannten in dem Sinn, daß nicht nur eine einzige gezielte Größe variiert werden kann. Der thermische Effekt hängt von den Stoffeigenschaften des Fluids ab (Dichte, Wärmekapazität, Latente Wärme, Wärmeleitung) und erschwert die systematische experimentelle Untersuchung dieses Einfluffaktors.

1.2.2.3 Visualisierung kavitierender Strömungen

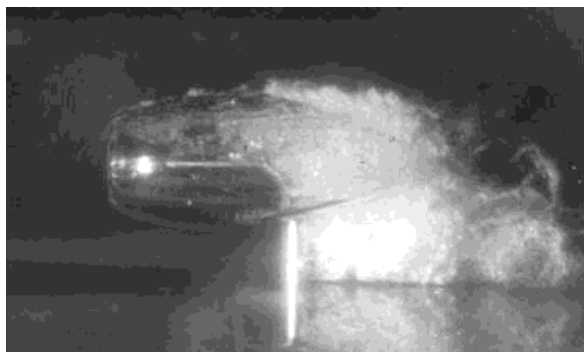
Die Visualisierung von kavitierenden Strömungen ist ein wichtiger Bestandteil für das Verständnis von Kavitation und dient u.a. als Basis für die Entwicklung von numerischen Verfahren. Die Visualisierung wird in der Regel durch Messungen von Auftrieb und Widerstand, Wanddruckverteilungen und Geschwindigkeiten ergänzt. Auf der Grundlage von Bildern bzw. High-Speed Videoaufnahmen konnten charakteristische Merkmale der Kavitation identifiziert werden, wie z.B. die disperse Blasenstruktur des Kavitationsgebiets oder das Auftreten eines Re-entrant Jets. Im folgenden werden einige Ergebnisse aus experimentellen Arbeiten zusammengestellt.



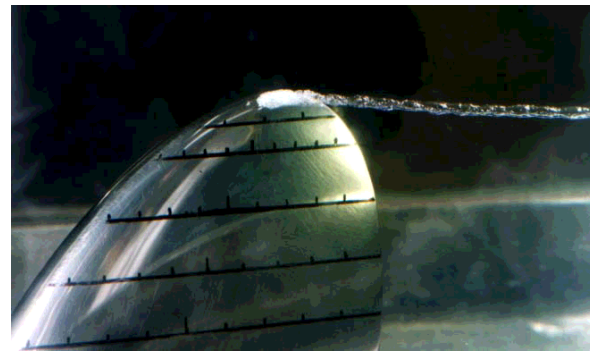
(a) Blasen kavitation: NACA 0015, $\sigma_\infty=0.6$, $Re = 1.3 \cdot 10^6$

(b) Schicht kavitation: NACA 0015, $\sigma_\infty=1.4$, $Re = 1.3 \cdot 10^6$

(c) Wolken kavitation: NACA 0015, $\sigma_\infty=1.2$, $Re = 1.3 \cdot 10^6$



(d) Superkavitation im Nachlauf einer Scheibe



(e) Spitzenwirbel kavitation an einem Propeller

Abbildung 1.5: Verschiedene Erscheinungsformen der Kavitation. Experiment: (a)-(c): A. Keller, R.E. Arndt, Versuchsanstalt für Wasserbau und Wasserwirtschaft, TU München. (d) Knapp, R.T., Daily, J. W., and Hammitt, F.G.: Cavitation, University of Iowa Press (e): H. Yamaguchi, Dept. of Environmental and Ocean Eng., University of Tokyo.

- Aus zahlreichen Experimenten ist zu erkennen, daß das Kavitationsgebiet in Abhängigkeit der Profilform, der Wasserqualität und der Kavitationszahl verschiedene innere Strukturen besitzt. In der Literatur werden die Typen Schicht-, Wolken-, Blasen-, Wirbel- und Superkavitation unterschieden, typische Beispiele sind in Abb. 1.5 gezeigt.

- Schichtkavitation: Das Kavitationsgebiet ist wesentlich mit (reinem) Dampf gefüllt. Dieser Typ tritt bevorzugt an Körpern auf, die ein ausgeprägtes Druckminimum (Saugspitze) besitzen, z.B.: angestellter Deltaflügel [55], angestelltes plano-konvexes Profil [56], Kanal mit scharfkantigem Hindernis [59, 60] oder im Bereich der Profilnase bei Profilen mit mittlerem Anstellwinkel ($2^\circ - 5^\circ$) [53]. In den Strömungsaufnahmen Abb. 1.5 (b) und (c) im Bereich der Profilnase, stellt sich Schichtkavitation als klares, durchsichtiges Gebiet dar.
- Superkavitation: Mit abnehmendem Kavitationsbeiwert dehnt sich die Schichtkavitation in Richtung Hinterkante des Körpers aus. Bei Profilen kann dieser Zustand bei sehr niedrigem σ -Wert in Verbindung mit großem Anstellwinkel ($> 5^\circ$) auftreten [53]. Der Begriff Superkavitation wird dann verwendet, wenn das Ende des Kavitationsgebiets hinter (stromab) dem Körper liegt [12], vgl. Abb. 1.5 (d).
- Wolkenkavitation: Das Kavitationsgebiet besteht aus vielen kleinen Einzelblasen ($R \sim 10^{-5} - 10^{-4} \text{ m}$). Wolkenkavitation tritt bevorzugt an Körpern mit mittleren Druckgradienten auf, z.B.: Profilmströmung [57, 4], im Anschluß an eine aufbrechende Schichtkavitation. In Strömungsaufnahmen stellt sich Wolkenkavitation als „schaumartige Struktur“ dar und ist in Abb. 1.1 (a) im Bereich 1/4 bis 3/4 des Profils und in Abb. 1.5 (c) zu sehen.
- Blasen kavitation: Das Kavitationsgebiet besteht aus wenigen, z.T. sehr großen Blasen ($R \sim 5 \text{ mm}$). Dieser Typ tritt bevorzugt an Körpern mit sehr geringen Druckgradienten (Profil mit kleinem Anstellwinkel) auf [58, 53]. Die Fluidqualität, insbesondere der Gasanteil, hat entscheidenden Einfluß auf die Anzahl und Größe der Kavitationsblasen, wie aus Experimenten von Keller [58] hervorgeht. Demnach hat ein hoher Gasgehalt die Bildung von großen Blasen zur Folge, die in Abb. 1.5 (a) zu erkennen sind. Dies wird ebenfalls durch Experimente von Liu & Brennen [48] bestätigt. Ein niedriger Gasgehalt begünstigt die Entstehung von vielen kleinen Blasen, d.h. von Schicht/Wolkenkavitation. Eine sehr niedrige Keimanzahl in der Anströmung kann u.U. die Entstehung von Blasen/Wolkenkavitation unterdrücken und direkt zur Bildung von Schichtkavitation führen [48, 49].
- Kavitation in Wirbeln: Kavitationsblasen sammeln sich in Wirbelzentren, z.B. in den Spitzenwirbeln bei Propellern, vgl. Abb. 1.5 (e).
- **Anmerkung:** In der Literatur existieren bisher keine einheitlichen Definitionen für die Kavitationstypen Schicht-, Blasen- und Wolkenkavitation. Insbesondere ist der Übergang zwischen Wolken und Blasen kavitation fließend. Die Abgrenzung Schichtkavitation/Blasen kavitation ist ebenfalls subjektiv und hängt von der Visualisierung ab. Für das menschliche Auge erscheint Blasen kavitation als quasi homogene Schicht, anhand von Hochgeschwindigkeitsaufnahmen ist jedoch die Blasenstruktur deutlich zu erkennen.

- **Auftrieb und Widerstand:** Kavitation beeinflusst den Auftrieb und Widerstand eines Profils und damit den Wirkungsgrad einer Strömungsmaschine. Tendenziell wird durch Kavitation der Auftrieb eines Profils reduziert und der Widerstand erhöht [4]. Messungen des Auftriebs und Widerstands in Abhängigkeit der Kavitationszahl und des Anstellwinkels von Yamaguchi et al. [53], Kjeldson et al. [62], Wade & Acosta [61] belegen diese generelle Tendenz, mit Ausnahme der „beginnenden Kavitation“. Beginnende Kavitation liegt dann vor, wenn das kavitierte Gebiet ca. 20-30% der Profillänge beträgt. Yamaguchi et al. [53] geben für beginnende Kavitation Auftriebsbeiwerte an, die den Auftriebsbeiwert bei kavitationsfreier Strömung um bis zu 20% übersteigen. Der Einfluß instationärer Kavitation auf den Auftrieb eines Profils wurde von Wade et al. [61], Arndt et al. [63] detailliert untersucht. Demnach können Auftriebsschwankungen bis zu 100% des stationären Auftriebs auftreten.
- **Stationäre/Instationäre Kavitation:** Aus experimentellen Untersuchungen ist zu erkennen, daß Kavitation streng genommen immer ein instationärer Vorgang ist, die Instationarität tritt jedoch in Abhängigkeit des Kavitationstyps mehr oder weniger deutlich in Erscheinung. Abbildungen 1.1 (a) und 1.5 (a) zeigen Blaskavitation an einem Profil. Einzelne Blasen entstehen stochastisch an der Profilmuse, werden mit der Strömung transportiert und kollabieren. Dieser Vorgang ist hochgradig instationär. Durch Absenkung des Kavitationsbeiwerts vollzieht sich der Übergang zur Schichtkavitation. Diese Kavitationsform kann als quasi-stationär bezeichnet werden. Durch weitere Absenkung des Kavitationsbeiwerts wächst die Schicht an und es bildet sich ein sog. **Re-entrant Jet**, der zyklisch zum Aufbrechen des Kavitationsgebiets und Abschwimmen von Kavitationswolken führt. Eine abschwimmende Blasenwolke ist in Abb. 1.5 (c) zu erkennen. Bei Strömungen mit Ablösungen (stumpfer Körper) kann sich eine relativ stationäre Schichtkavitation bzw. Superkavitation entwickeln. Hochgeschwindigkeitsaufnahmen zeigen jedoch auch hier deutliche Schwankungen der Berandung des kavitierten Gebiets.
- **Strouhal-Zahl:** Die experimentell ermittelten *Str*-Zahlen für instationär kavitierende Strömungen liegen in der Regel im Wertebereich von $0.1 < Str < 0.3$. Für Innenströmungen (Venturi-Düsen) wird von Lush [59] und Stutz [60] ein konstanter Wert von $Str \sim 0.27$ angegeben. Bei Profilmströmungen ist die Strouhal-Zahl abhängig von der Geometrie, dem Anstellwinkel und dem Kavitationsbeiwert. Strouhal-Zahlen für verschiedene Experimente sind in Tabelle 1.1 zusammengestellt.

1.2.3 Numerische Arbeiten

Mit der Entwicklung leistungsfähiger Rechnersysteme gewinnt die numerische Simulation kavitierender Strömungen zunehmend an Bedeutung. Da Kavitation in einer Vielzahl von technischen Anwendungen auftritt, stehen verschiedene Aspekte bei der Modellierung im Vordergrund. Die Bandbreite der eingesetzten Modelle erstreckt sich von der einfachen Identifikation der Dampfdruck-Isobaren im Strömungsfeld bis hin zu sehr komplexen Modellen, die den gesamten Prozeß der Blasendynamik vom Blasenwachstum bis hin zum

Autor	Geometrie	Referenzgrößen	$Str = \frac{f \cdot L_{ref}}{U_{ref}}$
B. Stutz, J.L. Reboud [60]	Venturidüse, $u_\infty = 7.9\text{m/s} - 12.0\text{m/s}$, $\sigma = 0.86 - 1.9$	L_{cav}, U_∞	0.27
P.A. Lush, P.I. Peters [59]	Venturidüse, $u_\infty = 23\text{m/s} - 27.4\text{m/s}$, $\sigma = 0.013 - 0.067$	L_{cav}, U_{throat}	0.28 ± 0.02
A. Kubota, H. Kato, H. Yamaguchi [57]	E.N. Profil, $\alpha = 6^\circ$, $U_\infty = 8\text{m/s}$, $\sigma = 1.2$	L_{cav}, U_∞	0.20
Q. Le, J.P. Franc, J. M. Michel [56]	plano-konvexes Profil, $\alpha = 3^\circ - 5^\circ$, $U_\infty = 5\text{m/s}, 10\text{m/s}$, $\sigma = 0.4 - 0.6$	L_{cav}, U_∞	0.27 - 0.32
R.B. Wade, A.J. Acosta [61]	plano-konvexes Profil, $\alpha = 4^\circ - 8^\circ$, $U_\infty = 8\text{m/s} - 14\text{m/s}$, $\sigma = 0.7 - 0.8$	L_{chord}, U_∞	0.10 - 0.15
M. Kjeldsen, M. Effertz, R.E. Arndt [62]	NACA 0015 Profil, $\alpha = 5^\circ, 7^\circ, 9^\circ$, $U_\infty = 8\text{m/s} - 11\text{m/s}$, $\sigma = 0.7 - 0.8$	L_{chord}, U_∞	0.12 - 0.25
R.E. Arndt, A. Keller, M. Kjeldsen [63]	NACA 0015 Profil, $\alpha = 5^\circ, 7^\circ, 9^\circ$, $U_\infty = 8\text{m/s} - 11\text{m/s}$, $\sigma = 0.7 - 0.8$	L_{chord}, U_∞	0.15 - 0.3

Tabelle 1.1: Experimentell ermittelte Strouhal-Zahlen für inst. kavitierende Innen- und Außenströmungen.

Kollaps modellieren. Die Klassifikation der Kavitationsmodelle kann nach dem Kavitationstyp (Schicht- oder Wolkenkavitation) erfolgen, zu dessen Simulation sie geeignet sind. Eine Übersicht der bisher eingesetzten Methoden zur Simulation kavitierender Strömungen gibt Tabelle 1.2. Die Merkmale der Kavitationsmodelle werden im folgenden kurz erläutert.

- Modelle zur Simulation von **Schichtkavitation**: Das kavitierte Gebiet wird im Rahmen der Modellierung als ein homogener, mit Dampf gefüllter Bereich betrachtet. Das Kavitationsgebiet besitzt keine disperse (Blasen-) Struktur. Es existiert eine scharfe Phasengrenze zwischen flüssiger und dampfförmiger Phase und ermöglicht damit die Verwendung von Front Tracking bzw. Front Capturing Methoden. (Typ 2-5 in Tabelle 1.2).
- Modelle zur Simulation von **Wolkenkavitation**: Kavitation wird als Strömung von Blasen modelliert, die in Abhängigkeit der Umgebungsbedingungen anwachsen oder kollabieren, die disperse Struktur des Kavitationsgebiets wird aufgelöst. Zur numerischen Beschreibung dieses Vorgangs werden in der Regel Wachstumsrelationen aus der Blasendynamik verwendet und weitere Annahmen über die Blasenverteilung (Anzahl, Größe) getroffen. (Typ 6 in Tab. 1.2)

Typ	Simulation	Methode	Autoren
1	einphasig	Identifikation des kavitierenden Gebiets anhand der Dampfdruck-Isobaren	
2	einphasig	Das Kavitationsgebiet wird als Dampfblase betrachtet, die einphasig umströmt wird. Die Kontur der Blase wird durch ein iteratives Verfahren, gekoppelt mit der Strömungsrechnung, ermittelt. Entlang der Kontur werden zusätzliche Randbedingungen vorgegeben, die Strömung im Innern der Dampfblase wird nicht berechnet.	Lanzenberger [64], Hirt [65], Szymczak et al. [66], Chen & Heister [67], Lemmonier & Rowe [68], Brewer & Kinnas [69]
3	zweiphasig	Kavitation wird als die Strömung eines Fluids mit variabler Dichte betrachtet. Zur Schließung des Gleichungssystems wird eine Beziehung vom Typ $\rho = f(\text{Druck}, \text{Enthalpie}, \text{Temperatur})$ oder empirische Relationen verwendet.	Avva et al. [70], Ventikos & Tzabiras [71], Dellannoy [72], Stutz & Reboud [60], Arnaud & Dieval [73]
4	zweiphasig	Kavitation wird als Strömung eines Fluids mit variabler Dichte betrachtet. Entstehung bzw. Kollaps von Dampfvolumen wird durch einen Quellterm modelliert. Kavitation wird als zeitlicher Relaxationsprozeß modelliert, d.h. die Dichte ist eine Funktion der Zeit, $\rho = f(\text{Zeit}, \text{Quellstärke}, \text{konvekt. Transport})$. Modellierung des Quellterms (der Quellstärke) basiert auf empirischen Relationen, bzw. thermodynamischen Betrachtungen.	Chen & Heister [74], Vortmann [75]
5	zweiphasig	Analog Kategorie 4, die Modellierung des Quellterms (der Quellstärke) basiert jedoch auf blasendynamischen Betrachtung und erfordert weitere Annahmen hinsichtlich der Keimverteilung in der Flüssigkeit. Die Herleitung des Quellterms erfolgt im Lagrangschen Bezugssystem, Quellterm = $f(\frac{d^2R}{dt^2}, \frac{dR}{dt}, R, \dots)$, die Lösung der Erhaltungsgleichungen im Eulerschen Bezugssystem.	Cokljat et al. [76], Chen & Heister [77, 78]
6	zweiphasig	Kopplung von Relationen aus der Blasen-dynamik direkt mit den Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls im Rahmen einer Euler-Euler Betrachtung.	Kubota et al.[79], Schulz [80], Delalle & Schnerr [81], Wang & Brennen [82]

Tabelle 1.2: Numerische Methoden zur Simulation kavitierender Strömungen.

1.3 Zielsetzung und Vorgehensweise

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Modells zur numerischen Simulation von hydraulischer Kavitation. Anhand der Literaturstudie wurde die Keimverteilung in der Anströmung als der wesentliche Einflußparameter für den Beginn als auch die Ausdehnung der Kavitation identifiziert. Daher wird Kavitation als der Wachstumsprozeß von Keimen modelliert, die mit der Strömung konvektiert werden und in Abhängigkeit der Umgebungsbedingungen zu Dampfblasen anwachsen oder kollabieren.

Die physikalische Modellierung dieses komplexen Vorgangs basiert auf vier Teilmodellen: Modellierung der Nukleation, des Blasenwachstums, des konvektiven Transports der Blasen sowie die Entstehung bzw. Vernichtung von Dampfvolumen. Die Basis für den konvektiven Transport der Blasen bildet die Volume-of-Fluid (VoF) Methode [88]. Das VoF-Originalverfahren eignet sich für die Simulationen von Zweiphasenströmungen mit starken Dichtegradienten ohne Phasenübergang, wie sie z.B. beim Übergang von der Flüssigkeit in das Kavitationsgebiet zu erwarten sind. Zur Simulation des Phasenübergangs wird das VoF-Verfahren um einen Quellterm erweitert, der die Entstehung von Dampfvolumen durch Blasenwachstum modelliert.

Als Trägerprogramm zur Implementierung des Kavitationsmodells wird ein von Krömer [89] zur Verfügung gestellter Code verwendet, der die einphasigen 2-D inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen nach der von Ferziger und Perić [83] beschriebenen Methode löst. Im Rahmen der Modellierung wird Kavitation als die Strömung eines homogenen Gemischs mit variablen Stoffeigenschaften betrachtet. Der Code von Krömer wird daher zur Simulation von kavitierenden Strömungen erweitert, d.h. es werden die Erhaltungsgleichungen für kompressible Fluide implementiert. Mit den Erweiterungen für die Volume-of-Fluid Methode (VoF) wird das SIMPLE Druck-Korrekturverfahren [83] im Hinblick auf die Simulation von Zweiphasenströmungen angepaßt. Die Berücksichtigung des Phasenübergangs erfordert weitere Modifikationen des SIMPLE Verfahrens, insbesondere wird hier eine neue Methode zur Stabilisierung und Beschleunigung des Verfahrens vorgestellt.

Das numerische Verfahren wird zunächst zur Simulation von Zweiphasenströmungen ohne Phasenübergang eingesetzt. Gegenstand der Untersuchung ist die numerisch bedingte Aufweitung der Phasengrenze und die Verifikation des Verfahrens anhand der Simulation von realen Zweiphasenströmungen mit starken Dichtegradienten.

Die Eigenschaften des neu entwickelten Kavitationsmodells werden anhand kavitierender Strömungen durch eine 2-D ebene konvergent-divergente ebene Düse untersucht. Das Ziel ist die Feststellung der Leistungsfähigkeit des Modells anhand eingehender Parameterstudien. Im Vordergrund stehen hier die Reproduktion von aus den Experimenten bekannten Maßstabseffekten.

Die Qualität der Modellierung wird durch den Vergleich mit Experimenten von Keller de-

monstriert [58], der Kavitation an einem NACA 0015 Profil untersucht.

Die Leistungsfähigkeit des numerischen Verfahrens wird durch die Simulation der Wechselwirkung zwischen Kavitation und einer Freien Oberfläche aufgezeigt.

2 Theorie

In diesem Kapitel wird zunächst ein Überblick über Methoden zur Simulation von Zweiphasenströmungen gegeben und diese im Hinblick auf die Kopplung mit einem Kavitationsmodell untersucht. Der Vergleich der verschiedenen Verfahren zeigt wesentliche Vorteile auf, die für den Einsatz der Volume-of-Fluid (VoF) Methode sprechen. Im Anschluß an diese Diskussion werden die Grundlagen der Volume-of-Fluid Technik (VoF) vorgestellt.

Kavitation wird physikalisch als heterogen dominierter Wachstumsprozeß von Keimen modelliert. Ausgehend von Keimen bilden sich Dampfblasen, die mit der Strömung konvektiert werden und wieder kollabieren. Die Beschreibung dieses Vorgangs wird durch vier Teilmodelle geleistet: Modellierung der Keimverteilung, des konvektiven Transports, der Volumenänderung infolge Wachstum/Kollaps und Modellierung der Wachstumsgeschwindigkeit.

Die Keimverteilung wird durch Vorgabe einer mittleren Keimanzahl und des Keimradius definiert. Zur Beschreibung des konvektiven Transports der Keime/Dampfblasen wird eine modifizierte VoF Methode verwendet, da die Originalversion nicht für die Strömung von zwei Fluiden mit Phasenübergang konzipiert wurde. Die VoF Methode wird durch einen Quellterm erweitert, der das Entstehen/Vernichten von Dampfvolumen modelliert. Zur Schließung des Kavitationsmodells ist eine Beziehung zur Beschreibung des Blasenwachstums erforderlich, die am Ende dieses Kapitels diskutiert wird.

2.1 Modellierung von Zweiphasenströmungen

Die Simulation von Zweiphasenströmungen mit Phasenübergang bereitet eine Vielzahl numerischer Schwierigkeiten, insbesondere wenn die Stoffeigenschaften der beiden Fluide sehr unterschiedlich sind. Abbildung 2.1 zeigt schematisch eine kavitierende Profilmströmung. Beim Übergang in bzw. aus dem Kavitationsgebiet kommt es zu einer sprunghaften Änderung der Dichte. Die Beherrschung des Dichtesprungs an der Phasengrenze zwischen reinem flüssigen Wasser ($\rho \sim 1000\text{kg/m}^3$) und dem Gemisch aus Wasser/Wasserdampf im Kavitationsgebiet ($\rho \sim 10\text{kg/m}^3$) erfordert die Verwendung spezieller numerischer Methoden.

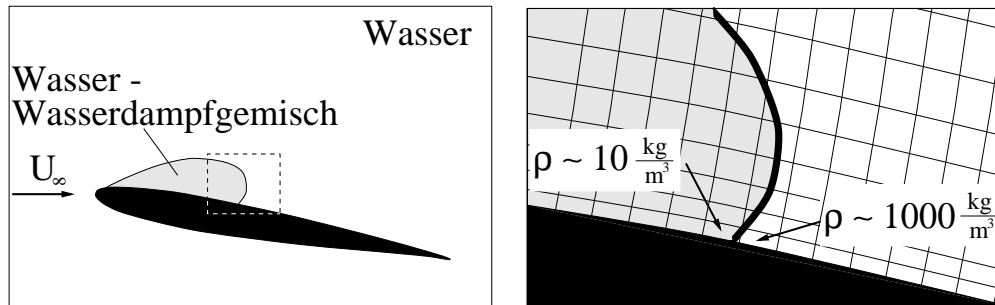


Abbildung 2.1: Links: Kavitierende Profilumströmung (schematisch). Rechts: sprunghafter Dichteanstieg an der Phasengrenze am Ende des Kavitationsgebiets.

Bisher wurden eine Vielzahl von numerischen Verfahren entwickelt, um die Bewegung einer freien Oberfläche oder allgemein die Bewegung einer Phasengrenze (Interface) zu berechnen. Diese können nach [83] prinzipiell in zwei Gruppen unterschieden werden:

- **Interface-Tracking** Methoden, die eine scharfe Phasengrenze (Interface) zwischen den Fluiden definieren und die Bewegung der Phasengrenze direkt verfolgen
- **Interface-Capturing** Methoden, die die Bewegung der beiden Fluide verfolgen. Die Lage der Phasengrenze (Interface) wird aus der Information über den Fluidgehalt der Rechenzellen rekonstruiert.

2.1.1 Front Tracking Methoden

Die Methoden dieser Kategorie markieren die Phasengrenze durch spezielle Markierungspunkte. Die Kontur der Phasengrenze als Verbindung zwischen den Punkten wird im allgemeinen durch Polynome angenähert.

- **Markerpartikel:** Zur Markierung der Phasengrenze wird eine Kette von masselosen Partikeln verwendet. Die lokalen Geschwindigkeiten werden im Rahmen einer Lagrange'schen Betrachtungsweise zu deren Konvektion verwendet [84].
- **Height Functions:** Nichols & Hirt [85] erweitern die Idee der Markerpartikel, indem sie die Lage der Phasengrenze durch den Abstand der Markerpartikel zu einem Referenzpunkt oder Referenzebene beschreiben.
- **Level Set:** Eine kontinuierliche Funktion (level set function C) wird im gesamten Rechengebiet eingeführt [86]. Der Wert der Funktion C wird als die kürzeste Distanz zwischen dem jeweiligen Gitterpunkt und der Phasengrenze definiert. Die Position der Phasengrenze wird daher durch den Wert $C = \text{Null}$ definiert. Zur Unterscheidung der Fluide auf beiden Seiten der Phasengrenze, wird für ein Fluid ein negatives Vorzeichen verwendet ($C > 0$: Flüssigkeit, $C < 0$: Dampf). Die Variable C ist eine skalare Größe, deren zeitliche Änderung durch eine Transportgleichung beschrieben wird.

- Surface-Fitting: Das Rechengitter wird der Kontur der Phasengrenze angepaßt und dabei kontinuierlich verformt. Dieser Kategorie kann auch die von Lanzemberger [64] entwickelte Methode zur Simulation kavitierender Strömungen zugeordnet werden.

2.1.2 Front Capturing Methoden

Im Gegensatz zu den bereits erläuterten Interface-Tracking Methoden, bei denen die Phasengrenze selbst markiert wird, erfolgt bei Interface-Capturing Methoden die Markierung der Fluide auf beiden Seiten der Phasengrenze.

- Partikel im Fluid: Bei der Marker und Cell Methode [87] werden Markerpartikel in allen Zellen verteilt, die beispielsweise Dampf enthalten. In einer Rechenzelle die keine Marker enthält, ist reine Flüssigkeit. Die Marker dienen zur Identifikation des Fluids und werden auf Lagrange'sche Art konvektiert.
- Volumenfraktionen: Eine skalare Größe (Volumenfraktion α) wird zur Identifikation der Verteilung der beiden Fluide verwendet. Die Änderung der Volumenfraktion wird durch eine Transportgleichung beschrieben. Die Schwierigkeit dieser Methode ist die Diskretisierung des konvektiven Terms in der Transportgleichung. Hirt & Nichols [88] entwickeln dafür ein spezielles Diskretisierungsschema (Donor-Acceptor), das sich bereits mehrfach bewährt hat und von anderen Autoren als Basis für deren Weiterentwicklungen verwendet wurde. Das Originalverfahren nach Hirt & Nichols ist als die **Volume-of-Fluid (VoF)** Methode in die Literatur eingegangen.

2.1.3 Vergleichende Betrachtung

Wie bereits diskutiert, setzt die Verwendung von Interface - Tracking Methoden die Existenz einer scharfen Phasengrenze voraus. Aus den Experimenten ist bekannt, daß das Kavitationsgebiet in der Regel eine disperse Blasenstruktur besitzt. Als scharfe Phasengrenze ist daher die Wand einer Dampfblase zu verstehen, durch die der Dampf vom flüssigen Wasser getrennt wird. Dies bedeutet, daß jede Blasenwand markiert und deren Bewegung verfolgt werden muß. Aufgrund der großen Anzahl von Blasen im Strömungsgebiet resultiert daraus ein erheblicher numerischer Aufwand, der die Verwendung von Interface - Tracking Methoden ausschließt.

Das Marker und Cell Verfahren, auf die Simulation von blasenhaltigen Strömungen angewandt, erfordert die Markierung der Blasenmittelpunkte durch Markerpartikel. Die Blasenwolke wird durch die Lage der Blasenzentren und deren Radius definiert. Im Unterschied zum Interface-Tracking wird hier nur der Mittelpunkt markiert und nicht noch zusätzlich die Blasenwand mit Markern belegt. Damit reduziert sich der numerische Aufwand. Aufgrund der dennoch hohen Anzahl an Blasen ist die Markierung und die Konvektion jeder Einzelblase mit so erheblichem numerischen Aufwand verbunden, daß diese Methode nur bedingt geeignet ist.

Im Gegensatz hierzu verfolgt die Volume-of-Fluid Methode ganz allgemein die Bewegung eines beliebigen Fluidvolumens durch das Strömungsgebiet. Im Fall der Kavitation zeichnet sich das Fluidvolumen dadurch aus, daß es eine bestimmte Anzahl von Keimen bzw. Blasen mit einem bestimmten Durchmesser enthält, d.h. das Fluidvolumen kann als eine Blasenwolke betrachtet werden. Aus der Anzahl und dem Blasendurchmesser kann die Volumensfraktion des Dampfs berechnet werden. Die numerische Simulation einer kavitierenden Strömung erfordert, die Bewegung dieses Fluidvolumens (markiert dadurch, daß es eine charakteristische Volumensfraktion besitzt) durch das Strömungsgebiet zu berechnen. Die VoF Methode ist in der Lage, die Konvektion eines beliebigen Fluidvolumens, unabhängig vom Wert der Volumensfraktion zu berechnen und entspricht aus diesem Grund am besten den Anforderungen.

2.2 Die Volume-of-Fluid Methode (VoF)

Im Rahmen der Volume-of-Fluid Methode wird die Zweiphasenströmung als die Strömung eines homogenen Fluidgemischs mit variablen Stoffeigenschaften betrachtet. Im Gegensatz zu den sog. Zwei-Fluid Methoden, die für jede Komponente die Massen- und Impulserhaltung formulieren (insgesamt 6 Gleichungen in 2-D), werden hier die Impulsgleichungen und die Massenerhaltung für das Fluidgemisch formuliert (3 Gleichungen in 2-D).

Der wesentliche Bestandteil der Volume-of-Fluid Methode ist die Einführung einer Variablen α , die den volumetrischen Anteil eines Fluids in einem Kontrollvolumen (Rechenzelle) beschreibt. Die Variable wird in der Literatur als „**void fraction**“ oder **Volumenanteil** bezeichnet. Um den direkten Bezug zwischen dem VoF Verfahren zu realen Strömungen herzustellen, wird anstelle der neutralen Bezeichnungen (Fluid 1, Fluid 2) konkret Wasser und Luft betrachtet, die Variable α wird daher im folgenden als volumetrischer Anteil der Luft am Zellvolumen oder kurz als **Luftanteil** bezeichnet.

Anmerkung: Bei kavitierenden Strömungen wird die Variable α als **Dampfanteil** bezeichnet um auszudrücken, daß es sich hier um ein kondensierendes Gas handelt. Diese Terminologie wird im folgenden beibehalten, um klar zwischen einer Standard-VoF Anwendungen ohne Phasenübergang und einer kavitierenden Strömung mit Phasenübergang zu unterscheiden.

$$\alpha = \begin{cases} 0 & : \text{Rechenzelle komplett mit Wasser gefüllt} \\ 1 & : \text{Rechenzelle komplett mit Luft gefüllt} \\ 0 < \alpha < 1 & : \text{Rechenzelle enthält einen Teil der Phasengrenze} \end{cases}$$

Beträgt der Luftanteil $\alpha = 0$, ist nur Wasser in der Rechenzelle vorhanden, beträgt $\alpha = 1$, enthält die Zelle nur Luft. Zwischenwerte markieren in einem Rechengitter die Zellen, die ein Teil der Phasengrenze enthalten und definieren somit die Position der Phasengrenze.

Der Wert des Luftanteils selbst gibt das Verhältnis der Volumen wider, das von der jeweiligen Phase eingenommen wird, siehe Abb. 2.2.

1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.65	0.32	0.40	1.0	1.0	0.92	0.71
0.0	0.0	0.02	0.75	0.85	0.20	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Abbildung 2.2: Repräsentation der Phasengrenze durch den Volumenanteil

Die Stoffwerte des Gemischs werden in Abhängigkeit des Luftanteils α berechnet:

$$\varrho = \alpha\varrho_a + (1 - \alpha)\varrho_l, \quad (2.1)$$

$$\mu = \alpha\mu_a + (1 - \alpha)\mu_l. \quad (2.2)$$

mit ϱ_a, μ_a = Dichte, dyn. Viskosität der Luft,
 ϱ_l, μ_l = Dichte, dyn. Viskosität des Wassers.

Die Geschwindigkeiten der Strömungen sind so niedrig, daß die Kompressibilität der gasförmigen Phase vernachlässigt werden kann. Beide Phasen werden daher als inkompressibel betrachtet. Die Änderung des Luftanteils wird durch die folgende Transportgleichung beschrieben [83] (2-D):

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha u)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha v)}{\partial y} = 0. \quad (2.3)$$

Die Schwierigkeit bei der Volume-of-Fluid Methode besteht in der Diskretisierung der konvektiven Terme in Gl. 2.3. Die Verwendung von Standard-Diskretisierungsmethoden führt zu einer Verschmierung der Phasengrenze und damit zu einer numerisch verursachten unphysikalischen Vermischung der beiden Fluide. Weiterhin muß sichergestellt werden, daß der Wertebereich für α im physikalisch zulässigen Bereich von $0 \leq \alpha \leq 1$ bleibt und das Diskretisierungsverfahren keine Überschwinger verursacht.

Zur Diskretisierung der Gl. 2.3 werden daher sogenannte hochauflösende Differenzierungstechniken (high resolution differencing schemes = HR schemes) verwendet, die eine Aufweitung der Phasengrenze vermeiden. Im Rahmen dieser Arbeit wird das von Ubbink [96] entwickelte CICSAM Schema (Compressive Interface Capturing on Arbitrary Meshes) verwendet, das in Kapitel 3.3.3 vorgestellt wird.

Mit diesem physikalischen / mathematischen Ansatz kann die Strömung zweier inkompressibler Fluide **ohne** Phasenübergang berechnet werden, die als **Standard-VoF Anwendungen** bezeichnet werden. Typische Beispiele hierfür sind die Schwingung einer Wasserwelle in einem Tank, das Aufsteigen von Blasen in einer Flüssigkeit oder der Kollaps einer Wassersäule unter dem Einfluß der Schwerkraft.

Die Erweiterungen der Volume-of-Fluid Methode zur Berechnung von kavitierenden Strömungen, d.h. Strömungen von Einzelblasen mit Phasenübergang werden im kommenden Abschnitt vorgestellt. Ein wesentlicher Unterschied bei der Interpretation des Volumenanteils wird bereits hier vorweggenommen: Ein Volumenanteil von $0 < \alpha < 1$ markiert bei Vof Anwendungen die Phasengrenze, die die Luft vom Wasser abtrennt. Die Dicke der Phasengrenze beträgt idealerweise genau eine Zellbreite. Bei Kavitation existiert in diesem Sinne keine Phasengrenze, Dampf und Wasser liegen als homogenes Gemisch vor. Der Dampfanteil ungleich Null sagt aus, daß in der betrachteten Rechenzelle eine Blasenwolke vorhanden ist, der genaue Wert von α gibt Aufschluß über die Struktur der Wolke. Der Bereich $0 < \alpha < 1$ erstreckt sich im Fall der Kavitation über mehrere Rechenzellen hinweg und markiert den Teil des Strömungsfeldes, in dem Keime zu Blasen angewachsen sind.

2.3 Kavitationsmodellierung

Die prinzipielle Vorgehensweise zur Modellbildung wird anhand der in Abb. 2.3 gezeigten kavitierenden Profilmströmung erklärt. Das Fluid ist Wasser, die Strömung erfolgt von links nach rechts. Infolge von Kavitation entwickelt sich eine Zweiphasenströmung, die aus Wasser und Dampfblasen besteht. Dampfblasen entstehen im Bereich der Profilmase und wachsen an, während sie entlang der Oberseite des Profils transportiert werden. Die Blasen werden in das Gebiet mit höherem Druck getragen, in dem sie wieder kollabieren. Im wesentlichen folgt die physikalische Modellierung und deren mathematische Umsetzung dieser experimentellen Beobachtung.

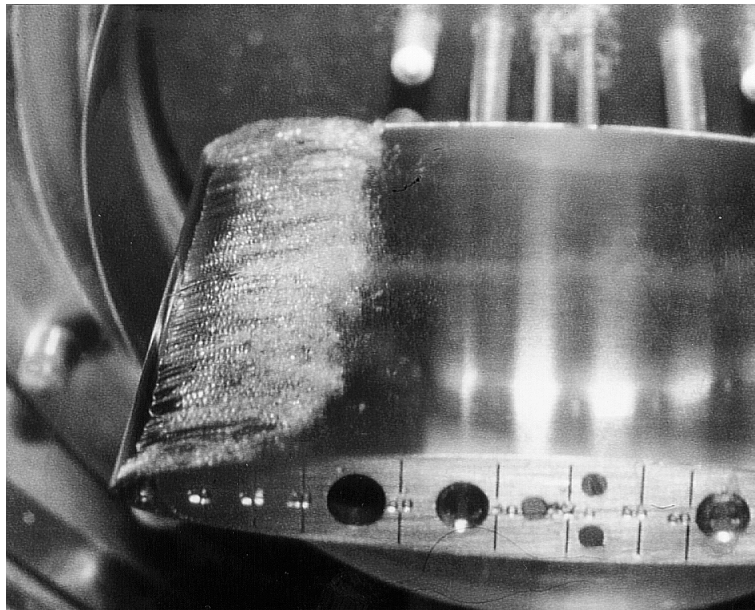


Abbildung 2.3: Kavitation an einem NACA 16012 Profil. $U_\infty = 6$ m/s, $\sigma_\infty = 0.97$, $Re = 600000$, $\alpha_A = 5^\circ$. Experiment: J.P. Franc und J.M. Michel, IMG - Universite de Grenoble.

2.3.1 Physikalisches Modell

Kavitation wird als der Wachstums- und Kollapsprozeß von Dampfblasen betrachtet. Ausgangspunkte für die Verdampfung sind in der Flüssigkeit vorhandene Kavitationskeime, die in Abhängigkeit von den Umgebungsbedingungen (Druck, Temperatur) anwachsen und wieder zusammenfallen, während sie durch das Strömungsgebiet konvektiert werden. Die Dampfblasen folgen der Strömung ohne Schlupf und Blasenwachstum setzt erst dann ein, wenn der Dampfdruck unterschritten wird. Wachstum durch Gaskavitation oder Pseudokavitation wird nicht berücksichtigt.

Dem eigentlichen Blasenwachstumsprozeß wird hier kein homogenes Nukleationsmodell vorgeschaltet, d.h. Kavitation wird als rein heterogener Wachstumsprozeß betrachtet. Für technische Anwendungen kann homogene Nukleation praktisch vernachlässigt werden, da in real vorkommenden Flüssigkeiten die Anzahl der Störstellen (Partikel, Gasblasen) so groß ist, daß die Nukleation durch die heterogene Keimbildung dominiert wird [80].

Auf Grundlage der vorgestellten physikalischen Modellierung wird ein Kavitationsmodell entwickelt, daß aus vier Komponenten (Teilmodellen) besteht:

Teilmodell 1	Keimverteilung	Die verschiedenen Keimtypen (Gasblase, Porenkeim) werden idealisiert zu einem Keimtyp „Mikroblase“ zusammengefaßt und die spektrale Keimverteilung in einer Flüssigkeit durch die Annahme einer mittleren Keimgröße und mittleren Keimanzahl approximiert.
Teilmodell 2	Konvektion der Dampfblasen	Der Dampfanteil in einem Kontrollvolumen wird durch Aufsummieren der Volumina der Einzelblasen berechnet. Es wird angenommen, daß die Blasen homogen im Kontrollvolumen verteilt sind und alle Blasen den selben Radius besitzen. Unter diesen Annahmen kann der konvektive Transport der Blasen durch die VoF-Methode beschrieben werden, d.h. es wird eine Transportgleichung für den Dampfanteil formuliert.
Teilmodell 3	Modellierung des Dampfvolumenterm	Die Entstehung/Vernichtung von Dampfvolumenterm wird durch einen Quellterm in der Transportgleichung für den Dampfanteil berücksichtigt. Die Herleitung des Quellterms basiert auf der Lagrange'schen Betrachtung an einer Blasenwolke.
Teilmodell 4	Beschreibung des Blasenwachstums	Zur Berechnung des Dampfvolumenterm muß das Blasenwachstum als Funktion von Druck und Temperatur berechnet werden. Die Herleitung der Wachstumsbeziehung basiert auf der konventionellen Blasendynamik (Betrachtung an einer Einzelblase im unendlich ausgedehnten ruhenden Medium).

2.3.2 Modellierung der Keimverteilung

Kavitation wird als heterogen dominierter Prozeß modelliert, d.h. die Keime sind bereits in der Strömung vorhanden. In Abschnitt 1.2.2.1 wurde bereits die komplexe Keimverteilung diskutiert, die in einem realen Fluid vorliegt. Eine genaue Modellierung dieser Keimverteilung erfordert die Unterteilung der spektralen Keimverteilung nach dem Radius in diskrete Blasenklassen und die Unterscheidung nach dem Keimtyp. Dies ist prinzipiell durch Verwendung von Populationsmethoden (Ramkrishna [92]) möglich, bedeutet aber einen enormen numerischen Aufwand, da für jede Blasenklasse eine Transportgleichung gelöst werden muß.

Im Rahmen einer reduzierten Modellbildung werden die verschiedenen Keimtypen (Gasblase, Porenkeim) idealisiert zu einem Keimtyp „Mikroblase“ zusammengefaßt und die spektrale Keimverteilung in einer Flüssigkeit durch die Annahme einer mittleren Keimgröße R_0 und mittleren Keimanzahl n_0 angenähert. Als Keim wird eine Mikroblase mit dem Radius $R = R_0$ bezeichnet. Der Parameter n_0 ist eine Stoffkonstante und wird definiert

als:

$$n_0 = \frac{\text{Anzahl Kavitationskeime}}{\text{Einheitsvolumen Flüssigkeit}} \quad (2.4)$$

Durch diese Definition wird die Keimanzahl explizit an das Volumen der Flüssigkeit und nicht an das Gemischvolumen gekoppelt. Dieser eher formale Sachverhalt hat aber den physikalischen Hintergrund, daß durch den Bezug auf das Flüssigkeitsvolumen die Keimerhaltung erfüllt wird, während durch den Bezug auf das Gemischvolumen Keime entstehen oder verschwinden. Dies wird anhand des folgenden Beispiels erläutert.

Betrachtet wird ein Behälter (eine Rechenzelle), in dem sich ein homogenes Gemisch aus Keimen und Wasser befindet. Im Ausgangszustand betrage das Volumen der Flüssigkeit $V_l = 1 \text{ cm}^3$, es sind 100 Keime im Behälter mit einem Radius von $R_0 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$. Infolge von Verdampfung wachsen die Blasen auf den 25-fachen Wert von R_0 an. In der nachfolgenden Tabelle sind die Keimanzahlen im Behälter und die Volumenverhältnisse für die Ausgangssituation und nach Blasenwachstum unter der Bedingung konstante Keimanzahl pro Volumeneinheit Flüssigkeit (hier Wasser) bzw. pro Volumeneinheit Gemisch angegeben.

		Ausgangs- situation	Endsituation, Wachstum unter Annahme	
			$\frac{\text{Anzahl Keime}}{\text{m}^3 \text{ Wasser}} = \text{konst.}$	$\frac{\text{Anzahl Keime}}{\text{m}^3 \text{ Gemisch}} = \text{konst.}$
Keimanzahl N	St.	100	100	121
Wasservolumen	$[\text{cm}^3]$	1.0	1.0	1.0
Dampfvolumen	$[\text{cm}^3]$	10^{-5}	0.176	0.2145
Gemischvolumen	$[\text{cm}^3]$	1.00001	1.176	1.2145
ΔN	St.	-	0	21

Durch das Blasenwachstum steigt das Gemischvolumen an, das Volumen der Flüssigkeit bleibt konstant, wenn die Massenabnahme des Wasser durch Verdampfung vernachlässigt wird. Dies ist bei einem Dichteverhältnis der Ordnung $\rho_v/\rho_l \sim 1 : 10000$ bei $T = 20^\circ\text{C}$ gut erfüllt. Damit ist im einen Fall die Blasenhaltung erfüllt $\Delta N = 0$, im anderen Fall entstehen $\Delta N = 21$ Blasen neu. Diese Blasen werden nur aufgrund der Definition gebildet und darf nicht mit Nukleation im physikalischen Sinne in Verbindung gebracht werden.

Da jede Dampfblase ihren Ursprung in einem Keim (einer Mikroblase) hat, geht aus diesem Rechenbeispiel hervor, daß die Definition von n_0 auch für angewachsene Blasen gilt. Ein Volumen V_l an Flüssigkeit enthält immer $N = n_0 \cdot V_l$ Blasen, dabei kann es sich um Keime ($R = R_0$) oder Dampfblasen mit beliebigem Radius R handeln.

2.3.3 Modellierung des konvektiven Transports und der Entstehung bzw. Vernichtung von Dampfvolumen

Kavitation wird mathematisch durch die Formulierung einer Transportgleichung für den Dampfvolumenteil in Verbindung mit einem Quellterm modelliert. Dieser Ansatz bietet die Möglichkeit, etablierte Diskretisierungsmethoden der Volume-of-Fluid Technik zu verwenden, um den konvektiven Transport des Dampfvolumens streng konservativ zu formulieren. Der Quellterm hat die Funktion einer Dampfquelle bzw. Senke, d.h. abhängig von Druck und Temperatur wachsen Blasen an (Dampfvolumen wird erzeugt) oder fallen zusammen (Dampfvolumen wird vernichtet).

Die Variable α wird als volumetrischer Anteil des Dampfs pro Einheitsvolumen Gemisch definiert und kurz als **Dampfanteil** bezeichnet. Das Einheitsvolumen Gemisch V enthält ein Volumen V_v an Dampf und ein Volumen V_l an Wasser, es gilt $V_v + V_l = V$. Das Dampfvolumen berechnet sich aus der Blasenanzahl und dem Volumen einer Einzelblase und damit gilt für den Dampfanteil α :

$$\alpha = \frac{V_v}{V} = \frac{N_{\text{Blase}} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{V_v + V_l} . \quad (2.5)$$

Unter Verwendung der Keimkonzentration n_0 kann die Keimanzahl aus dem in der Zelle vorhandenen Wasservolumen berechnet werden und es ergibt sich die Bestimmungsgleichung für den Dampfanteil α :

$$\alpha = \frac{n_0 V_l \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{n_0 V_l \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 + V_l} \quad (2.6)$$

$$= \frac{n_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{1 + n_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} . \quad (2.7)$$

Die Stoffwerte des Fluidgemischs werden in Abhängigkeit des Dampfanteils α berechnet:

$$\varrho = \alpha \varrho_v + (1 - \alpha) \varrho_l , \quad (2.8)$$

$$\mu = \alpha \mu_v + (1 - \alpha) \mu_l . \quad (2.9)$$

mit $\varrho_v(T), \mu_v(T)$ = Dichte, dyn. Viskosität des Dampfs,
 $\varrho_l(T), \mu_l(T)$ = Dichte, dyn. Viskosität der flüssigen Phase.

Der Dampfanteil in einer Rechenzelle kann sich infolge von Konvektion und durch Blasenwachstum bzw. Kollaps ändern. Daher bietet sich in Anlehnung an die Physik des Problems die Formulierung einer Transportgleichung für den Dampfanteil α an:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha u)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha v)}{\partial y} = \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \nabla \cdot \mathbf{w} . \quad (2.10)$$

Zur Herleitung der zeitlichen Änderung des Dampfanteils $d\alpha/dt$ wird eine Blasenwolke in einem mitbewegten Kontrollvolumen betrachtet. Das Dampfvolumen V_v ergibt sich aus der Blasenanzahl N_{Blase} und dem Blasenvolumen und die zeitliche Änderung des Dampfvolumens durch die totale Ableitung nach der Zeit t :

$$V_v = N_{\text{Blase}} \frac{4}{3} \pi R^3, \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt}(V_v) = \frac{d}{dt} \left(N_{\text{Blase}} \frac{4}{3} \pi R^3 \right) \quad (2.12)$$

$$= \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{d}{dt}(N_{\text{Blase}}) + N_{\text{Blase}} \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right). \quad (2.13)$$

Das Dampfvolumen ändert sich durch die Änderung der Blasenanzahl im Volumen und durch Anwachsen der Blasen. Die Anzahl der Blasen in einer Rechenzelle wird unter Verwendung des Parameters n_0 aus dem im Kontrollvolumen vorhandenen Wasservolumen berechnet:

$$N_{\text{Blase}} = n_0 V_l = n_0 V(1 - \alpha), \quad (2.14)$$

$$\frac{d}{dt}(N_{\text{Blase}}) = -n_0 V \frac{d\alpha}{dt}. \quad (2.15)$$

Durch Einsetzen der Beziehungen Gl. 2.14 und Gl. 2.15 in Gleichung 2.13 erhält man:

$$\frac{d}{dt}(V_v) = -n_0 \frac{4}{3} \pi R^3 V \frac{d\alpha}{dt} + n_0 V(1 - \alpha) \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right), \quad (2.16)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = (1 - \alpha) \frac{n_0}{1 + n_0 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right). \quad (2.17)$$

Zur Berechnung der Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{w}$ des Strömungsfeldes wird die Kontinuitätsgleichung in der nicht-konservativen Form verwendet:

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho_v - \rho_l}{\rho} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{\alpha}{\rho} \frac{d\rho_v}{dt} - \frac{1 - \alpha}{\rho} \frac{d\rho_l}{dt}. \quad (2.18)$$

Im Rahmen der Modellierung wird die Flüssigkeit als inkompressibel betrachtet. Die Dichte des Dampfes entspricht der Sättigungsdampfdichte. Unter der weiteren Voraussetzung, daß die Masse des Dampfes in der Zelle gegenüber der Masse der flüssigen Phase vernachlässigbar ist ($\alpha \rho_v \ll (1 - \alpha) \rho_l$), kann die Volumenerhaltung weiter vereinfacht werden. Diese Annahme ist für Wasser bei einer Temperatur von 20°C bis zu einem maximalen Dampfanteil von $\alpha = 0.999$ sehr gut erfüllt.

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = -\frac{\rho_v - \rho_l}{\alpha \rho_v + (1 - \alpha) \rho_l} \approx \frac{1}{1 - \alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{n_0}{1 + n_0 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right). \quad (2.19)$$

Gleichung 2.17 und Gl. 2.19 werden in die allgemeine Transportgleichung für den Dampf-
volumenanteil α (Gl. 2.10) eingesetzt:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha u)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha v)}{\partial y} = \frac{d\alpha}{dt} \left(1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \quad (2.20)$$

$$= \frac{n_0}{1 + n_0 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right). \quad (2.21)$$

Zur Berechnung des Quellterms in der Transportgleichung fehlt noch eine Beziehung zur
Beschreibung des Blasenwachstums, die im folgenden Abschnitt vorgestellt wird.

2.4 Blasendynamik

2.4.1 Grundgleichungen

Ausgangspunkt für die Modellierung des Blasenwachstums ist eine einzelne Kugelblase,
die sich in einem unendlich ausgedehnten Fluid befindet, die Situation ist in Abb. 2.4
dargestellt.

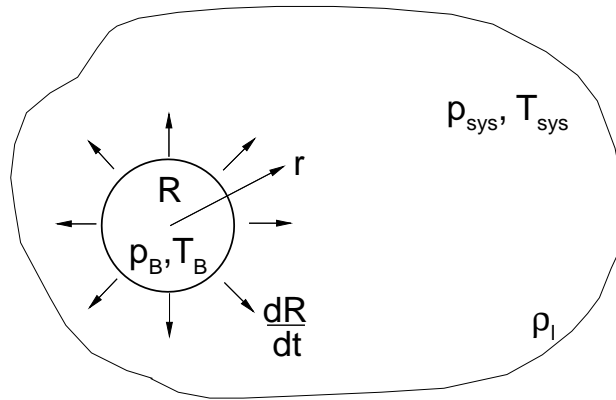


Abbildung 2.4: Kugelblase in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit

Die Flüssigkeit ist in einem überhitzten Zustand, d.h. der Druck in der Flüssigkeit p_{sys}
ist geringer als der zur Fluidtemperatur T_{sys} korrespondierende Sättigungsdampfdruck
 $p_{sat}(T_{sys})$. Die Überhitzung $\Delta T_{\ddot{U}}$ wird als die Temperaturdifferenz

$$\Delta T_{\ddot{U}} = T_{sys} - T_{sat}(p_{sys}) \quad (2.22)$$

definiert. Der überhitzte Zustand kann z.B. dadurch erreicht werden, daß der statische Druck bei konstanter Umgebungstemperatur T_{sys} reduziert wird (Kavitation) oder durch Wärmezufuhr die Umgebungstemperatur und damit der Dampfdruck bei konstantem Umgebungsdruck p_{sys} angehoben wird (Sieden). Kavitation und Sieden basieren auf den selben physikalischen Vorgängen [2, 12] und daher können die für das Sieden aufgestellten Wachstumsbeziehungen auch für die Kavitation verwendet werden. Die zu deren Herleitung getroffenen Annahmen müssen jedoch unter für Kavitation typischen Bedingungen überprüft werden.

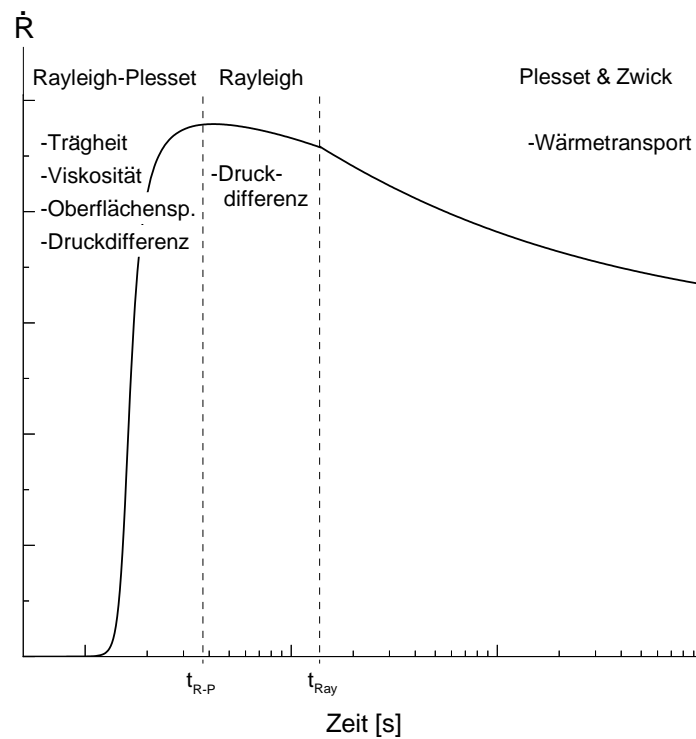


Abbildung 2.5: Wachstumsgeschwindigkeit einer Blase in einer überhitzten Flüssigkeit (schematisch), unter Angabe der jeweils dominierenden Einflußfaktoren.

Prinzipiell kann das Wachstum einer Blase in zwei Wachstumsphasen unterteilt werden. Während der ersten Wachstumsphase wird die Blasenwachstumsgeschwindigkeit maßgeblich durch mechanische Effekte wie Trägheit des umgebenden Fluids, Oberflächenspannung und von der Differenz zwischen Blaseninnen- und Umgebungsdruck bestimmt. Mit zunehmendem Radius sinkt die Blaseninnentemperatur und ein Wärmestrom vom umgebenden Fluid zur Blasenwand setzt ein. Die sich anschließende zweite Wachstumsphase zeichnet sich dadurch aus, daß das Blasenwachstum ausschließlich durch den Wärmetransport vom Fluid zur Blasenwand kontrolliert wird. In Abb. 2.5 ist das Wachstum einer Blase in einer überhitzten Flüssigkeit schematisch dargestellt, die Namensgebung der Bereiche erfolgt hier nach der jeweils verwendbaren Wachstumsrelation, siehe Tabelle 2.4.1. Die erste Wachstumsphase wird dabei in zwei Teilbereiche getrennt.

$0 < t < t_{R-P}$	Rayleigh-Plesset:	Das Wachstum wird durch die Wechselwirkung von Trägheit, Oberflächenspannung, Viskosität und Druck bestimmt.
$t_{R-P} < t < t_{Ray}$	Rayleigh:	Das Wachstum wird durch die Druckdifferenz zwischen Blaseninnen- und Umgebungsdruck dominiert.
$t_{Ray} < t$	Plesset & Zwick:	Das Wachstum wird durch den Wärmetransport dominiert, Trägheits-, Oberflächenspannung - und Viskositätseffekte können vernachlässigt werden.

Tabelle 2.1: Einteilung des Blasenwachstums in drei Teilbereiche unter Angabe der jeweils dominierten Einflußfaktoren.

Der gesamte Wachstums- bzw. Kollapsprozeß einer Blase in einem unendlich ausgedehnten Fluid kann mittels folgender Gleichungen in polaren Koordinaten beschrieben werden. Diesen Gleichungen liegen die Annahmen zugrunde, daß die Blase kugelsymmetrisch bleibt, die Dampftemperatur im Innern der Blase homogen ist und der Wassertemperatur an der Blasenwand entspricht. Weiterhin wird der Dampf und die Flüssigkeit inkompressibel betrachtet.

Kontinuität :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) = 0 \quad (2.23)$$

Impulsbilanz :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu_l}{\rho_l} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{2\mu_l}{r^2} \right) \quad (2.24)$$

Energieerhaltung :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l} \right) \frac{R^2}{r^2} \frac{dR}{dt} \frac{\partial T}{\partial r} = \underbrace{\frac{\lambda_l}{\rho_l c_{p,l}}}_{=a_l} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (2.25)$$

Unter Verwendung der Kontinuität und nach Integration der Gl. 2.24 von der Blasenoberfläche $r = R$ bis ∞ ergibt sich die erweiterte Rayleigh-Plesset-Gleichung:

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{p_B(t) - p_\infty}{\rho_l} - \frac{2\sigma_o(T)}{\rho_l R} - 4 \frac{\mu_l}{\rho_l R} \frac{dR}{dt} \quad (2.26)$$

Die Anfangs - bzw. Randbedingungen sind gegeben durch:

$$R(t = 0) = R_0 , \quad (2.27)$$

$$\dot{R}(t = 0) = \dot{R}_0 , \quad (2.28)$$

$$T(r, t = 0) = T_{\text{sys}} , \quad (2.29)$$

$$T(\infty, t) = T_{\text{sys}} , \quad (2.30)$$

$$4 \pi R^2 \lambda_l \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = L \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_v \right) , \quad (2.31)$$

$$p_B(t) = p_{\text{sat}}(T(R, t)) . \quad (2.32)$$

mit λ_l = Wärmeleitfähigkeit , a_l = Temperaturleitfähigkeit,
 L = latente Wärme , σ_o = Oberflächenspannung.

Der Druck und die Temperatur in der Blase sind homogen und der Druck entspricht dem zur Blasentemperatur T_B korrespondierendem Sättigungsdampfdruck $p_{\text{sat}}(T_B)$, Gl. 2.32. Diese Annahmen sind unter der Bedingung gültig, daß die Blasenwandgeschwindigkeit \dot{R} klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit im Dampf ist. Dies ist mit Ausnahme des Endstadiums beim Blasen kollaps für den Zyklus (Wachstum/Kollaps) einer Blase gut erfüllt.

Mit der Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (Gl. 2.26 - 2.32) erhält man die Wachstumsgeschwindigkeit und damit den Radius der betrachteten Blase $R(t)$. Das obige Gleichungssystem wird nach einem von Lee et al. [37] vorgestellten Verfahren gelöst. Die Rayleigh-Plesset-Gleichung wird durch ein 4-Schritt Runge-Kutta-Verfahren zeitlich integriert und liefert die Wachstumsgeschwindigkeit $\dot{R} = dR/dt$, die für die Berechnung der Randbedingung (Gl. 2.31) benötigt wird. Die diskretisierte Energieerhaltungsgleichung führt auf eine Matrix, die durch ein TDMA-Verfahren (TriDiagonal Matrix Algorithm) gelöst wird. Blasenwachstum bzw. Kollaps, das mit der Lösung dieses System berechnet wurde, wird im folgenden mit dem Index „**R-P**“ gekennzeichnet.

Die numerische Lösung dieses Systems ist jedoch sehr aufwendig und daher werden analytische Beziehungen gesucht, die das Blasenwachstum mit hinreichender Genauigkeit beschreiben. Erste analytische Abschätzungen für das Blasenwachstum wurden von Rayleigh [17] angegeben, mit denen die als sogenannte „**inertia controlled growth**“ bezeichnete erste Wachstumsphase beschrieben werden kann. Diese Gleichung resultiert durch Vernachlässigung der Trägheit, Viskosität und Oberflächenspannung aus Gl. 2.26. Zusätzlich wird angenommen, daß die Blasentemperatur der Umgebungstemperatur T_{sys} entspricht.

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)_{\text{Ray}}^2 = \frac{2 p_B - p_{\text{sys}}}{3 \rho_l} , \quad (2.33)$$

$$p_B = p_{\text{sat}}(T_B) , \quad (2.34)$$

$$T_B = T_{\text{sys}} . \quad (2.35)$$

Plesset und Zwick [32] betrachten in ihrer Arbeit die durch thermische Effekte kontrollierte zweite Wachstumsphase „heat diffusion controlled growth“. Mechanische Effekte können vernachlässigt werden und die Blasentemperatur entspricht der zum Umgebungsdruck p_{sys} zugehörigen Sättigungstemperatur.

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{P\&Z}} = \left(\frac{3a_l}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\rho_l c_{pl} (T_{sys} - T_{sat}(p_b))}{\rho_v L}, \quad (2.36)$$

$$p_B = p_{sys}, \quad (2.37)$$

$$T_B = T_{sat}(p_{sys}). \quad (2.38)$$

In der Arbeit von Mikic et al. [34] werden die Gleichungen 2.33 und 2.36 kombiniert, um eine Beziehung zu erhalten, die für das gesamte Blasenwachstum gültig ist:

$$R^+ = \frac{2}{3} \left[(t^+ + 1)^{3/2} - (t^+)^{3/2} - 1 \right], \quad (2.39)$$

mit

$$R^+ = \frac{AR}{B^2}, \quad t^+ = \frac{A^2 t}{B^2}, \quad \Delta T = T_{sys} - T_{sat}(p_{sys})$$

$$A = \left(\frac{2 \rho_v L \Delta T}{3 T_{sat} \rho_l} \right)^{1/2}, \quad B = \left(\frac{12}{\pi} a_l \right)^{1/2} J_a, \quad J_a = \frac{\Delta T c_l \rho_l}{\rho_v L}.$$

Für $t^+ \ll 1$ geht Gl. 2.39 in die Rayleigh'sche Lösung über :

$$R^+ = t^+ \quad \text{bzw.} \quad R = At \quad \left(\dot{R} = A \right) \quad (2.40)$$

und für $t^+ \gg 1$ geht Gl. 2.39 in die Lösung von Plesset & Zwick über :

$$R^+ = \sqrt{t^+} \quad \text{bzw.} \quad R = B\sqrt{t} \quad \left(\dot{R} = \frac{B}{2} \frac{1}{\sqrt{t}} \right). \quad (2.41)$$

2.4.2 Kopplung der Blasendynamik mit dem Strömungsfeld

Die Herleitung der im vorherigen Abschnitt vorgestellten Wachstumsrelationen basiert auf dem Modell „Einzelblase im unendlich ausgedehnten Gebiet“. Für die numerische Simulation wird diese Vorstellung durch das Modell „Blase in einer Rechenzelle“ ersetzt. Die Kopplung des Blasenwachstums mit dem Strömungsfeld wird durch den in der Rechenzelle vorhandenen Druck $p(i, j)$ und der Temperatur $T(i, j)$ geleistet. Dazu wird angenommen, daß für die Dauer eines physikalischen Zeitschritts Δt die Blase in der Zelle verbleibt und

unter den gegebenen Bedingungen $p(i, j)$ und $T(i, j)$ anwächst. Da es sich hier um ein homogenes Modell handelt muß sichergestellt werden, daß der Blasendurchmesser klein gegenüber den charakteristischen Abmessungen der Rechenzelle bleibt. In den Gleichungen für das Blasenwachstum werden der Systemdruck p_{sys} durch den in der Zelle herrschenden Druck $p(i, j)$ und die Systemtemperatur T_{sys} durch die in der Zelle herrschende Temperatur $T(i, j)$ ersetzt. Aus dem Dampfanteil $\alpha(i, j)$ wird dann die Struktur der Blasenwolke (Blasenanzahl, Radius) unter Verwendung des Parameters n_0 rekonstruiert. Der Blasenradius $R(i, j)$ und die in der Zelle vorhandene Blasenanzahl $N_{\text{Blase}}(i, j)$ berechnet sich gemäß:

$$R(i, j) = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{4}{3}\pi n_0} \frac{\alpha_{i,j}}{1 - \alpha_{i,j}}}, \quad (2.42)$$

$$N_{\text{Blase}}(i, j) = n_0 V_l = n_0 V(1 - \alpha_{i,j}). \quad (2.43)$$

Mit dem Blasenradius, der Blasenanzahl und der im kommenden Abschnitt diskutierten Wachstumsrelation kann dann der (Dampf-) Volumenquellterm berechnet werden, der zur Berechnung der Transportgleichung für den Dampfanteil (Gl. 2.21) und der Druck-Korrektur-Gleichung (Kapitel 3.3.5) benötigt wird.

2.4.3 Diskussion der Blasenwachstumsrelationen

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Kavitationsmodells zur Simulation von „hydraulischer Kavitation“. Die Diskussion wird unter dem Aspekt geführt, welche der im vorherigen Abschnitt vorgestellten Wachstumsgesetze zur Simulation dieses Kavitationstyps geeignet sind. Dazu wird zunächst der Kavitationstyp „hydraulische Kavitation“ anhand des in Abb. 2.6 dargestellten Beispiels definiert.

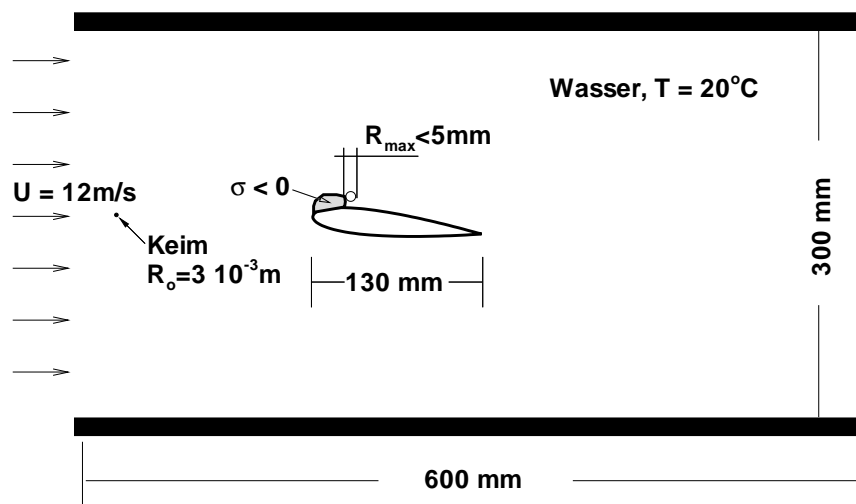


Abbildung 2.6: Beispiel für hydraulische Kavitation: Umströmung eines NACA 0015 Profils.

Betrachtet wird eine kavitierende Profilmströmung, wie sie experimentell von Keller [58] untersucht wird. Die Sehnenlänge beträgt $l_c = 0.13\text{m}$, die Anströmgeschwindigkeit $U = 12\text{m/s}$. Das Fluid ist Wasser, die Temperatur beträgt $T = 20^\circ\text{C}$. Die Fluidqualität entspricht der von unbehandeltem Wasser und wird durch einen Keimgehalt von 100Keime/cm^3 Wasser mit einem Keimradius von $R_0 = 3 \cdot 10^{-5}\text{m}$ definiert. Als maximaler Blasenradius wird ein Radius von $R_{\text{max}} = 5\text{mm}$ angesehen. Der Kavitationsbeiwert der Anströmung führt zu ausgebildeter Kavitation am Profil, d.h. $\sigma_{\text{min}} < -1.0$ im einphasigen Fall. Dies entspricht einer Unterschreitung des Dampfdrucks um ca. 70000Pa , das Gebiet $\sigma < 0$ erstreckt sich über 20% der Sehnenlänge. Die typische Verweilzeit der Blasen im Gebiet $\sigma < 0$ beträgt unter diesen Bedingungen ca. $2 \cdot 10^{-3}\text{s}$.

2.4.3.1 Simuliertes Blasenwachstum im Vergleich zum Experiment

In einem ersten Schritt zur Bewertung der Wachstumsbeziehungen werden diese mit Messungen zum Blasenwachstum in überhitzten Flüssigkeiten verglichen. Abbildung 2.7 zeigt das unter Verwendung der analytischen Beziehung von Rayleigh (Gl. 2.33), Plesset & Zwick (Gl. 2.36) und Mikic et al. (Gl. 2.39) berechnete Blasenwachstum im Vergleich zu experimentellen Daten. Der Blasenradius und die Zeit sind dimensionslos aufgetragen. Das Blasenwachstum für die Experimente (1-3) ist von thermischen Effekten dominiert, in den Experimenten (4-8) sind mechanische als auch thermische Effekte von Bedeutung und Experiment (9) ist ausschließlich von mechanischen Effekten dominiert.

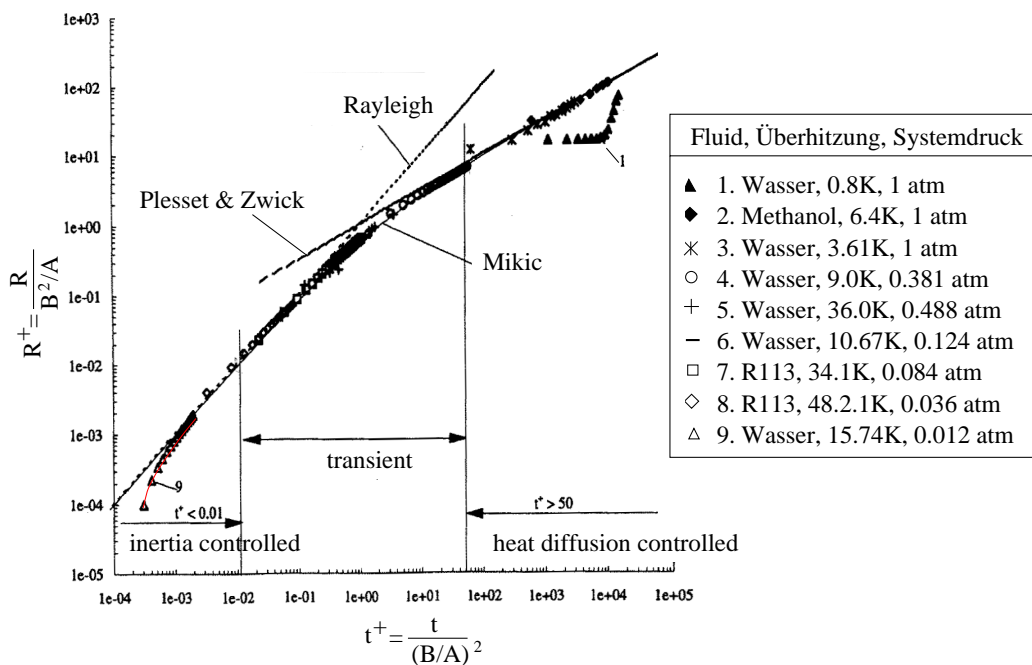


Abbildung 2.7: Experimentell ermitteltes Blasenwachstum im Vergleich zu analytischen Wachstumsrelationen. Aus: Mikic, W.M. Rohsenow, P. Griffith: On Bubble Growth Rates. Int. J. of Heat Mass Transfer [34].

Fazit:

Unter Berücksichtigung der jeweiligen Gültigkeitsbereiche ist die Übereinstimmung der analytischen Wachstumsbeziehungen mit den Experimenten sehr gut, mit Ausnahme bei geringen Systemdrücken (Messung 9) und geringen Überhitzungen (Messung 1). Die Abweichungen lassen sich durch Trägheits- und Oberflächenspannungseffekte erklären, die bei den analytischen Relationen vernachlässigt werden. Durch die Lösung der Rayleigh-Plesset-Gleichung kann auch für den Fall eines sehr niedrigen Systemsdrucks (Messung 9) eine sehr gute Übereinstimmung erzielt werden, siehe Abb. 2.8.

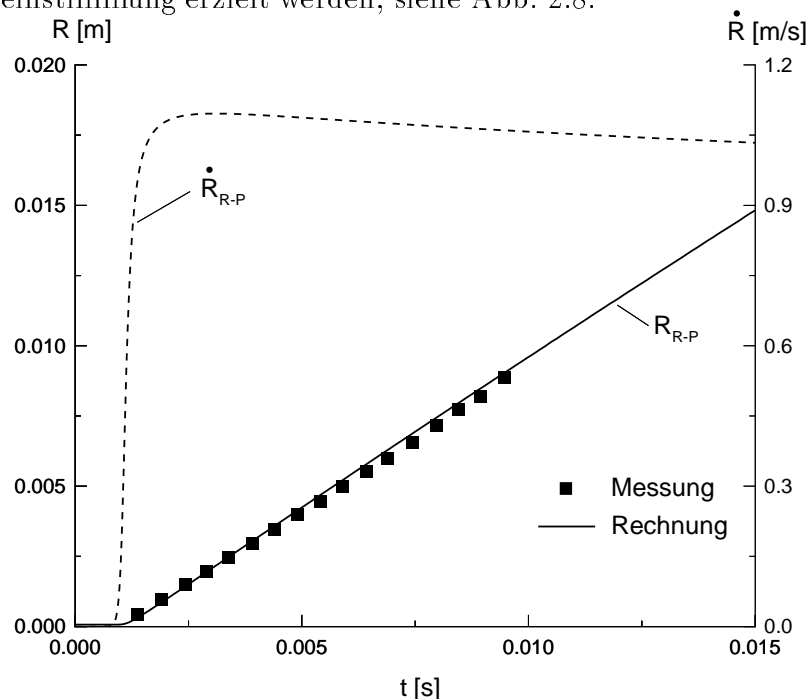
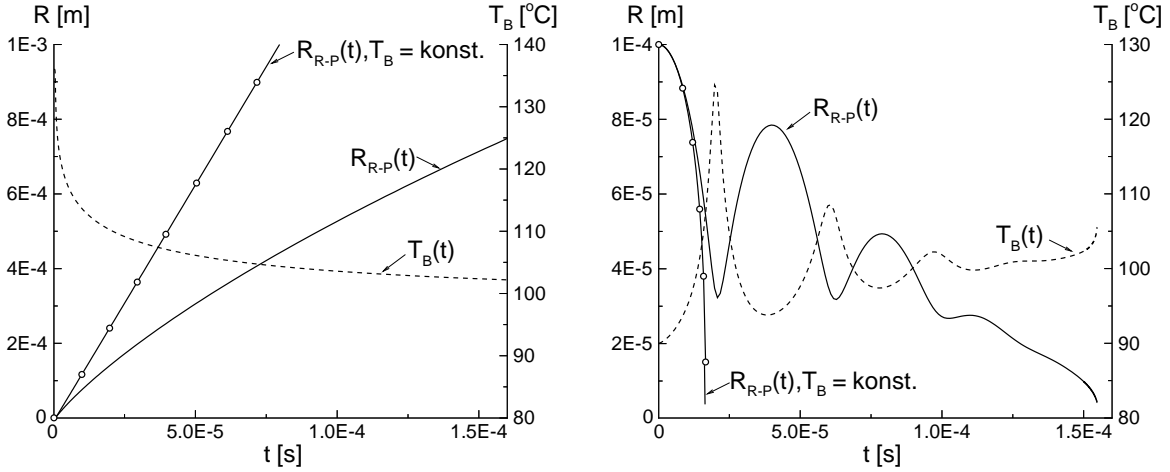


Abbildung 2.8: Numerische Berechnung des Blasenwachstums in überhitztem Wasser im Vergleich zum Experiment (Messung 9 aus Abb. 2.7). $T_{\text{sys}} = 10.72^\circ\text{C}$, $p_{\text{sys}} = 0.012\text{atm}$, $\Delta T_{\text{Ü}} = 15.74\text{K}$.

2.4.3.2 Einfluß von Thermischen Effekten

In Verbindung mit Blasendynamik wird hier unter dem Begriff „**Thermischer Effekt**“ die Änderung der Blasentemperatur infolge von Wärmetransport während des Wachstums bzw. Kollaps einer Blase verstanden. Die zur Verdampfung des Fluids benötigte Wärmemenge wird durch einen Wärmestrom vom Fluid zur Blasenwand bereitgestellt, d.h. die Blasentemperatur liegt unterhalb der Fluidtemperatur. Beim Blasen kollaps wird die frei werdende Latente Wärme an das umgebende Fluid abgeführt, die Blasentemperatur liegt daher oberhalb der Fluidtemperatur. Abbildung 2.9 zeigt Blasenwachstum und Kollaps unter Berücksichtigung bzw. Vernachlässigung des thermischen Effekts. Der thermische Effekt wird numerisch dadurch vernachlässigt, indem die Blasentemperatur T_B bei der Lösung des Gleichungssystems aus Rayleigh-Plesset-Gleichung und Energiesatz als Randbedingung vorgegeben wird, d.h. $T_B = T_{\text{sys}} = \text{konst.}$



(a) Blasenwachstum in überhitztem Wasser.
 $T_{\text{sys}} = 136^\circ\text{C}$, $p_{\text{sys}} = 1\text{bar}$, $\Delta T_{\text{ij}} = 36\text{K}$.

(b) Blasen kollaps in unterkühltem Wasser.
 $T_{\text{sys}} = 90^\circ\text{C}$, $p_{\text{sys}} = 0.981\text{bar}$, $\Delta T_{\text{ij}} = -10\text{K}$.

Abbildung 2.9: Verlauf der Blasentemperatur und des Blasenradius als Funktion der Zeit bei Berücksichtigung bzw. Vernachlässigung von thermischen Effekten.

Für das Wachstum ist zu erkennen, daß durch die Absenkung der Blasentemperatur T_B das Wachstum beträchtlich reduziert wird, d.h. die treibende Druckdifferenz ($p_{\text{sat}}(T_B) - p_\infty$) wird geringer mit abnehmender Blasentemperatur. Im Fall des Blasen kollaps führt der thermische Effekt zu einem Rebound. Durch den Kollaps steigt die Blasentemperatur und damit der Blasendruck stark an. Der hohe Innendruck bremst den Kollaps ab und es kommt zu einer Aufweitung der Blase. Der Dampf verhält sich durch den thermischen Effekt quasi wie ein nichtkondensierendes Gas, vgl. hierzu auch Kapitel 1.2.1.2. Der thermische Effekt ist erst bei erhöhter Fluidtemperatur von Bedeutung und führt dann zu einer deutlichen Reduktion der Wachstums bzw. Kollaps geschwindigkeiten. Die Ermittlung der Grenztemperatur, ab der thermische Effekte von Bedeutung sind, wird die folgende Abschätzung durchgeführt. Unter der Vernachlässigung von Trägheitseffekten, kann das Wachstum mittels der analytischen Beziehungen von Rayleigh und Plesset&Zwick berechnet werden:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{Ray}}^2 = \frac{2}{3} \frac{p_{\text{sat}}(T_B) - p_{\text{sys}}}{\rho_l} . \quad (2.44)$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{P\&Z}} = \left(\frac{3a_l}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\rho_l c_{pl} (T_{\text{sys}} - T_B)}{\rho_v L} . \quad (2.45)$$

Im Unterschied zu den Gleichungen 2.33 und 2.36 werden hier keine weiteren Annahmen über die Blasentemperatur T_B getroffen. Die Blasentemperatur ist als variabel anzusehen

und sie ergibt sich aus der Forderung, daß die Wachstumsgeschwindigkeiten nach Gl. 2.44 und Gl. 2.45 gleich sind. Die Kombinationslösung aus Rayleigh und Plesset&Zwick wird mit dem Index „**R,P&Z**“ versehen.

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{R,P\&Z}} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|p_{\text{sat}}(T_{\text{B}}) - p_{\infty}|}{\rho_l}} = \left(\frac{3a_l}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\rho_l c_{pl} (|T_{\text{sys}} - T_{\text{B}}|)}{\rho_v L}. \quad (2.46)$$

Diese Gleichung kann nicht explizit nach T_{B} aufgelöst werden, da alle Stoffwerte temperaturabhängig sind, insbesondere der Dampfdruck. Die Lösung erfolgt iterativ und mit der dann bekannten Temperatur T_{B} kann das Wachstum $R_{\text{R,P\&Z}}(t)$ berechnet werden. Die Gültigkeit dieser Vorgehensweise wird durch den Vergleich mit der Lösung des Systems aus Rayleigh-Plesset-Gleichung und Energiesatz überprüft, Abb. 2.10.

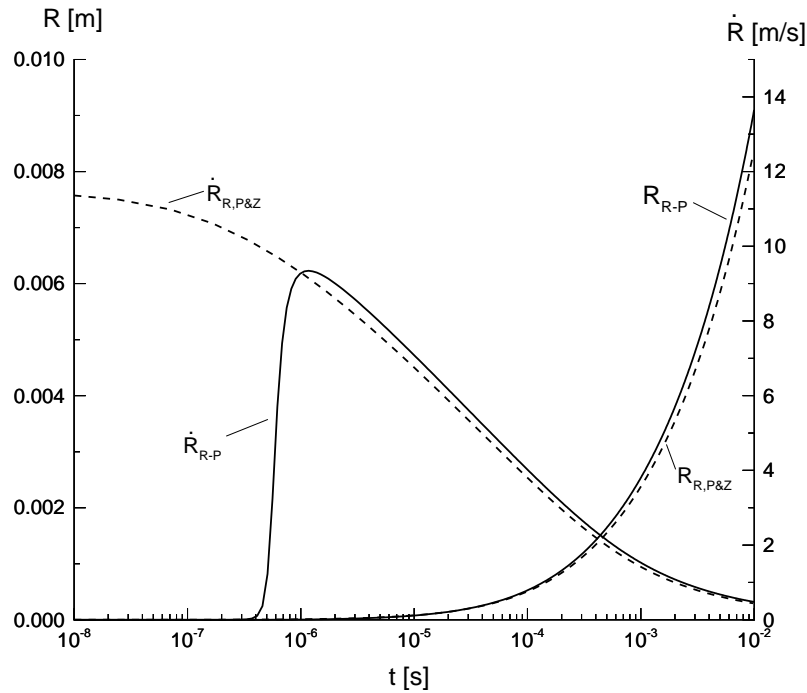


Abbildung 2.10: Berechnung des Blasenwachstums in überhitztem Wasser unter Verwendung verschiedener Wachstumsrelationen, $T_{\text{sys}} = 136^{\circ}\text{C}$, $p_{\text{sys}} = 1.0\text{bar}$, $\Delta T_{\ddot{u}} = 36.0\text{K}$.

$R_{\text{R-P}}, \dot{R}_{\text{R-P}}$: Kombination aus Rayleigh-Plesset-Dgl. mit Energiesatz

$R_{\text{R,P\&Z}}, \dot{R}_{\text{R,P\&Z}}$: Kombination aus Rayleigh mit Plesset&Zwick

Aus Abb. 2.10 ist zu erkennen, daß die analytische Methode (Kombination aus Rayleigh mit Plesset & Zwick) in der Lage ist, die zeitliche Entwicklung des Blasenradius $R(t)$ mit guter Näherung zu beschreiben. Der Verlauf der Wachstumsgeschwindigkeit $\dot{R}(t)$ unterscheidet sich nur für sehr kleine Zeiten $t < 10^{-6}\text{s}$, die Abweichung resultiert aus der

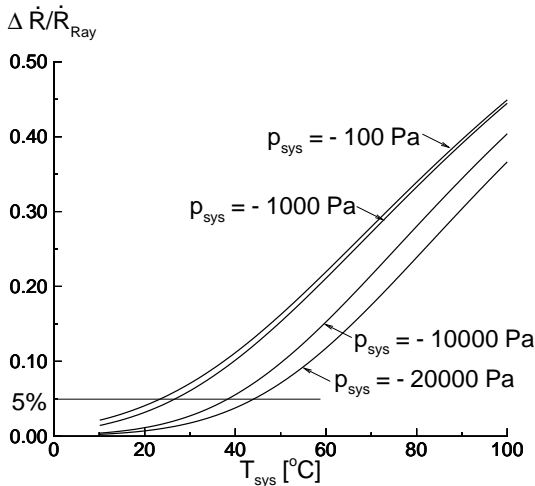
Vernachlässigung der Trägheit und Oberflächenspannung. Für die Diskussion des thermischen Einflusses auf das Wachstum wird die Wachstumsgeschwindigkeit nach Rayleigh als Bezugsgeschwindigkeit verwendet und $\Delta \dot{R}$ als Abweichung infolge des thermischen Einfluß definiert:

$$\frac{\Delta \dot{R}}{\dot{R}_{\text{Ray}}} = \frac{\dot{R}_{\text{Ray}} - \dot{R}_{\text{R,P\&Z}}}{\dot{R}_{\text{Ray}}} = 1 - \sqrt{\frac{p_{\text{sat}}(T_{\text{B}}) - p_{\text{sys}}}{p_{\text{sat}}(T_{\text{sys}}) - p_{\text{sys}}}} \quad (2.47)$$

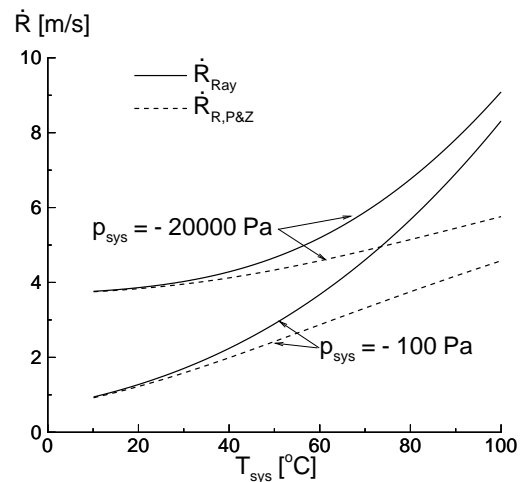
$$\sim 1 - \sqrt{1 - \frac{\frac{\partial p_{\text{sat}}}{\partial T}(T_{\text{sys}} - T_{\text{B}})}{p_{\text{sat}}(T_{\text{sys}}) - p_{\text{sys}}}} \quad (2.48)$$

$(T_{\text{sys}} - T_{\text{B}}) \sim \varrho_v R$ (aus Gl. 2.46)

Mit steigender Temperaturdifferenz ($T_{\text{sys}} - T_{\text{B}}$) gewinnt der thermische Effekt zunehmend an Bedeutung, d.h. für hohe Temperaturen (große Dichte) und große Blasenradien. Abbildung 2.11 zeigt die relative und absolute Abweichung der Wachstumsgeschwindigkeit als Funktion der Druckdifferenz ($p_{\text{sat}}(T_{\text{sys}}) - p_{\text{sys}}$) und der Temperatur T_{sys} . Das Fluid ist Wasser, für den Blasenradius wird ein Wert von $R = 5\text{mm}$ angenommen.



(a) Blasenwachstum in überhitztem Wasser.
 $T_{\text{sys}} = 136^\circ\text{C}$, $p_{\text{sys}} = 1\text{bar}$, $\Delta T_{\text{Ü}} = 36\text{K}$



(b) Blasenwachstum in überhitztem Wasser.
 $T_{\text{sys}} = 136^\circ\text{C}$, $p_{\text{sys}} = 1\text{bar}$, $\Delta T_{\text{Ü}} = 36\text{K}$

Abbildung 2.11: Relative und absolute Änderung der Blasenwachstumsgeschwindigkeit bei Berücksichtigung des thermischen Effekts.

Fazit:

Aus Abb. 2.11 ist zu erkennen, daß der thermische Effekt bei geringer Unterschreitung der Dampfdrucks und bei hohen Umgebungstemperaturen nicht vernachlässigt werden kann.

Wird eine Abweichung von 5% zugelassen, beträgt die Grenztemperatur ca. $T = 30^\circ\text{C}$, ab der thermische Effekte berücksichtigt werden müssen. Diese Abschätzung ist dabei zur sicheren Seite hin, d.h. basiert auf der Annahme eines relativ großen Blasenradius und geringer Unterschreitung des Dampfdrucks ($\Delta p = 3000\text{Pa}$).

Der Kollaps einer Blase ($R = 10\text{mm}$) bei verschiedenen Systemdrücken ($0.5\text{bar} < p_{\text{sys}} < 10\text{bar}$) wurde durch die Lösung des Systems aus Rayleigh - Plesset und Energiesatz simuliert. Bei einer Umgebungstemperatur von $T \leq 30^\circ\text{C}$ ist der thermische Einfluß vernachlässigbar, insbesondere konnte bei dieser niedrigen Systemtemperatur kein thermisch bedingter Rebound, wie in Abb. 2.9 gezeigt, festgestellt werden.

Für eine Wassertemperatur von $T < 30^\circ\text{C}$ kann daher der thermische Effekt sowohl für das Wachstum als auch für den Kollaps von Blasen vernachlässigt werden.

2.4.3.3 Einfluß von Mechanischen Effekten

Die Rayleighgleichung kann aus der Rayleigh-Plesset-Gleichung durch Vernachlässigung der mechanischen Effekte Trägheit, Oberflächenspannung und Viskosität hergeleitet werden. Im folgenden wird die Zulässigkeit dieser Vereinfachungen für hydraulische Kavitation diskutiert. Viskosität und Oberflächenspannung können vernachlässigt werden wenn gilt:

$$p_B(t) - p_\infty \gg \frac{2\sigma_o(T)}{R} - 4\frac{\mu_l}{R} \frac{dR}{dt}. \quad (2.49)$$

Zur Abschätzung wird ein Radius von $R_0 = 30 \cdot 10^{-6}\text{m}$ zugrunde gelegt, der einem typischen Keimradius für unbehandeltes Wasser entspricht. Abgesehen von Studien zur beginnenden Kavitation, wird der Dampfdruck (einphasig) um mehrere 10000Pa unterschritten, sodaß die Bedingung 2.49 sehr gut erfüllt ist.

$$p_B(t) - p_\infty \gg 4000\text{Pa} \frac{R_0}{R} - 130 \frac{\text{Pa} \cdot \text{s}}{\text{m}} \frac{dR}{dt}.$$

Weiterhin ist zu erkennen, daß durch die Oberflächenspannung der kritische Druck, ab dem Wachstum einsetzt, um $O(4000\text{Pa})$ reduziert wird, vgl. dazu auch Kapitel 1.2.1.2.

Der Einfluß der Trägheit wird formal durch den Term (Rd^2R/dt^2) in der Rayleigh-Plesset-Gleichung erfaßt und kann für das Wachstum bzw. den Kollaps einer Blase vernachlässigt werden, wenn gilt:

$$\left| R \frac{d^2 R}{dt^2} \right| \ll \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2. \quad (2.50)$$

Die Gültigkeit dieser Voraussetzung wird für Blasenwachstum bei verschiedenen Umgebungsdrücken p_{sys} durch Lösung der Rayleigh-Plesset-Dgl. untersucht. Abbildung 2.12

zeigt die Wachstumsgeschwindigkeit als Funktion der Zeit, beide Achsen sind logarithmisch aufgetragen. Für kleine Zeiten beschleunigt das Wachstum stark und nähert sich an die Wachstumsgeschwindigkeit nach Rayleigh an. Der Zeitpunkt, ab dem 95 % der Rayleighgeschwindigkeit erreicht werden, ist in Abb. 2.12 durch einen Kreis markiert. D.h., ab diesem Zeitpunkt kann das Wachstum mit guter Näherung durch die Rayleighgleichung beschrieben werden.

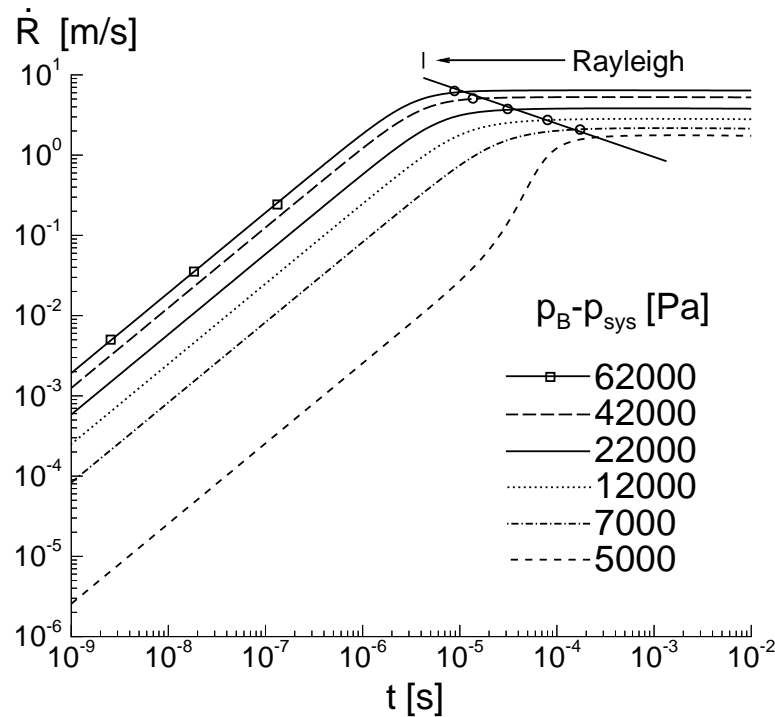


Abbildung 2.12: Einfluß der Trägheit auf das Blasenwachstum in Wasser. $T_{\text{sys}} = 20^\circ\text{C}$, $R_0 = 3 \cdot 10^{-5}\text{m}$, für verschiedene Systemdrücke.

Der Einfluß der Trägheit wird anhand des Kollaps einer Blase ($R_0 = 10\text{mm}$) ebenfalls durch Lösung der Rayleigh-Plesset-Gleichung untersucht. In Abb. 2.13 ist die Kollaps-geschwindigkeit als Funktion der Zeit dargestellt, und zum Vergleich die Geschwindigkeit nach Rayleigh eingezeichnet. Es ist zu erkennen, daß aufgrund der Trägheit der Kollaps zunächst verzögert ($R_{\text{text}R-P}(t) < \dot{R}_{\text{Ray}}$) und dann forciert wird. Der Verlauf des Kollaps $R_{R-P}(t)$ weicht erheblich von dem nach Rayleigh berechneten $R_{\text{Ray}}(t)$ ab.

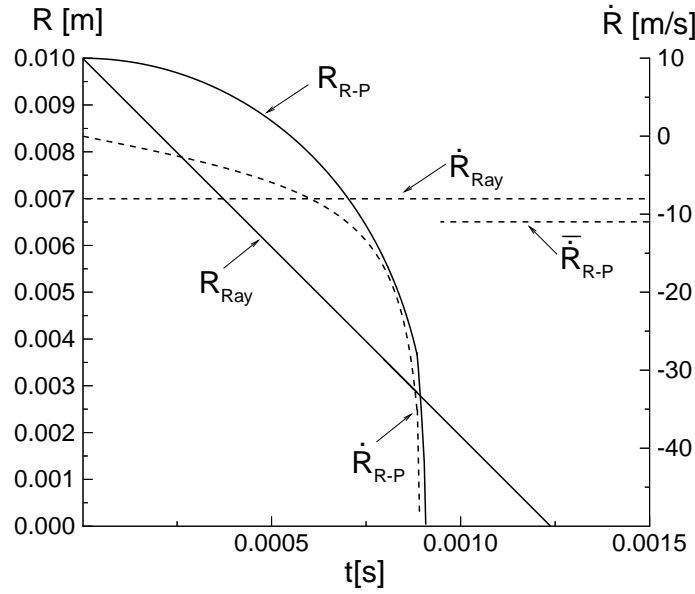


Abbildung 2.13: Einfluß der Trägheit auf den Blasenkollaps in Wasser, $p_{\text{sys}} = 100000 \text{ Pa}$, $T_{\text{sys}} = 20^\circ \text{ C}$, $R_0 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

Die Gleichung nach Rayleigh kann daher den Kollaps einer Blase nicht in allen Details genau beschreiben. Dennoch kann diese Beziehung dazu verwendet werden, den Kollaps im zeitlichen Mittel mit ausreichender Genauigkeit zu approximieren. Die mit der Kollapszeit t_K und dem Ausgangsradius R_0 berechnete mittlere Kollapsgeschwindigkeit liegt nur wenig oberhalb der Geschwindigkeit nach Rayleigh, vgl. Abb. 2.13. Für den Kollaps einer Blase wird folgende Beziehung zur Berechnung der Kollapszeit t_K angegeben [1]:

$$t_K = 0.915 R_0 \sqrt{\frac{\rho l}{p_{\text{sys}} - p_B}} \quad (2.51)$$

Die Gültigkeit dieser analytischen Beziehung wird durch den Vergleich mit numerisch berechneten Kollapszeiten überprüft (Lösung der Rayleigh-Plesset-Gleichung). Abbildung 2.14 vergleicht die Kollapszeiten für verschiedene Radien zu Beginn des Kollaps in Abhängigkeit des Systemdrucks. Die Übereinstimmung ist sehr gut und Gl. 2.51 kann zur Abschätzung der Abweichung der mittleren Kollapsgeschwindigkeit zu \dot{R}_{Ray} verwendet werden:

$$\frac{\bar{\dot{R}}_{\text{R-P}}}{\dot{R}_{\text{Ray}}} = \frac{R_0/t_K}{\dot{R}_{\text{Ray}}} = 1.3 \quad (2.52)$$

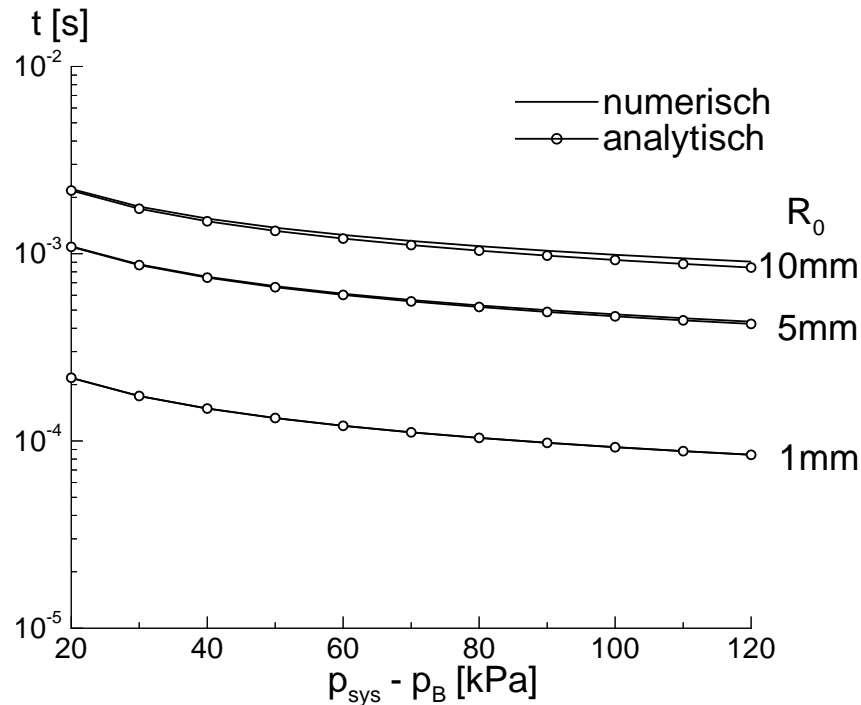


Abbildung 2.14: Berechnung der Kollapszeiten für eine Blase in Wasser bei $T_{\text{sys}} = 20^\circ\text{C}$ für verschiedene Ausgangsradien R_0 und Systemdrücke.

Fazit:

Aus den Untersuchungen zum Wachstum und Kollaps einer Einzelblase in einem ruhenden Medium kann zusammenfassend gefolgert werden, daß die Vernachlässigung der Trägheit für das Blasenwachstum zulässig ist, der Blasen kollaps aber nur unzureichend beschrieben wird. Im Falle des Wachstums ist der Einfluß der Trägheit nur für einen sehr kurzen Zeitraum von Bedeutung. Im Gegensatz hierzu wird der gesamte Kollaps von Trägheitseffekten dominiert. Die Rayleighgleichung kann daher nur als eine Approximation der mittleren Kollaps geschwindigkeit angesehen werden. Der Einfluß der Viskosität und der Oberflächenspannung kann sowohl für das Wachstum als auch den Kollaps einer Blase vernachlässigt werden.

2.4.4 Zusammenfassung

Durch die Studien zum Wachstum und Kollaps einer Einzelblase im ruhenden Medium wird belegt, daß thermische Effekte, der Einfluß der Viskosität und Oberflächenspannung unter den für hydraulische Kavitation typischen Bedingungen vernachlässigt werden können. Der Einfluß der Trägheit auf das Wachstum einer Blase ist nur von geringer Dauer und daher bedingt vernachlässigbar, während der Kollaps einer Blase durch Trägheitseffekte dominiert wird.

Im Gegensatz zu den Wachstumsstudien in einem ruhenden Fluid ist die Blase bei Kavitation einem zeitlich veränderlichen Umgebungsdruck ausgesetzt. Zur Abschätzung des Trägheitseffekts wird ein Keim betrachtet, der entlang der in Abb. 2.15 eingezeichneten Stromlinie den Bereich $\sigma < 0$ durchquert. Die Blase verhält sich passiv, d.h. das Wachstum oder der Kollaps hat keine Rückwirkung auf das Strömungsfeld. Der Druckverlauf entlang der Stromlinie wird aus einer einphasigen Simulation bestimmt. Zur Berechnung des Blasenradius wird die Rayleigh-Plesset-Gleichung (R_{R-P}) verwendet und dem Wachstum unter Verwendung der Rayleighgleichung (R_{Ray}) gegenübergestellt.

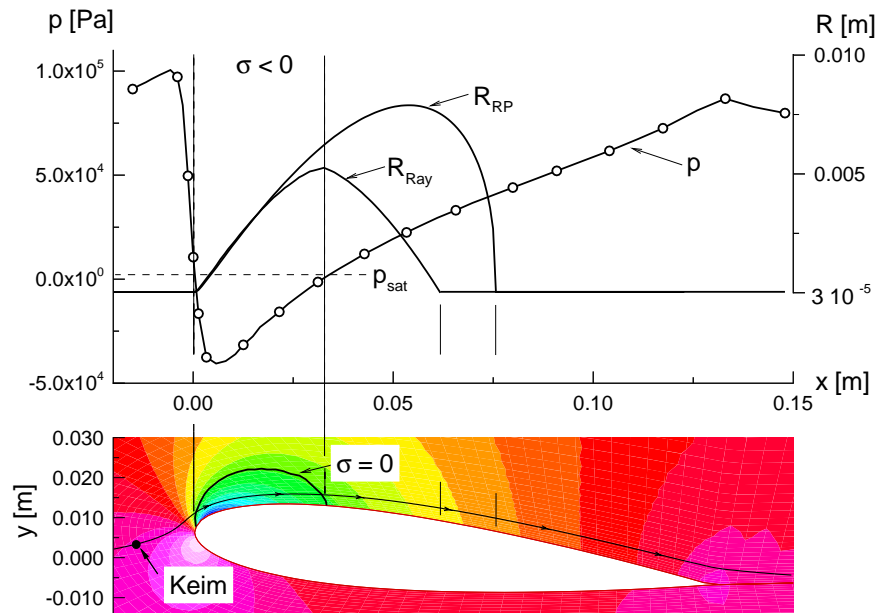


Abbildung 2.15: Einphasige Umströmung eines NACA 0015 Profils. Druckverteilung und Blasenwachstum entlang einer Stromlinie. $\sigma_{ref} = 1.0$, $U = 12\text{m/s}$, $\alpha_A = 6^\circ$.

Die Radienverläufe stimmen im ersten Bereich des Wachstums ($x < 0.025\text{m}$) zunächst gut überein. Gegen Ende des Bereichs $\sigma < 0$ wird infolge des Druckanstiegs die Wachstumsgeschwindigkeit stark verzögert, d.h. der Einfluß der Trägheit auf das Wachstum ist dort maximal. Unter Vernachlässigung der Trägheit setzt nach Überschreiten des Dampfdrucks sofort der Blasen kollaps ein, während die Blase bei Berücksichtigung der Trägheit weiter anwächst und einen größeren Maximalradius $R_{\max,R-P} \sim 1.5R_{\max,Ray}$ erreicht, bevor der Kollaps beginnt. Der Kollaps verläuft im Vergleich zum Kollaps nach Rayleigh heftiger ab, d.h. es werden höhere Kollapseschwindigkeiten erreicht.

Das Anwachsen und der Kollaps einer Blase wird daher durch Vernachlässigung der Trägheit, d.h. durch Verwendung der Rayleighgleichung, nur qualitativ richtig wiedergegeben. Die Vernachlässigung der Trägheit ist weder für das Blasenwachstum noch für den Kollaps zulässig, insbesondere dann, wenn die Blase einem zeitlich schnell variierenden Druckfeld ausgesetzt ist.

Dennoch wird im Rahmen dieser Arbeit das Wachstumsgesetz nach Rayleigh verwendet, d.h. Trägheitseffekte werden nicht berücksichtigt. Die Gründe hierfür sind rein numerisch bedingt. Zur Simulation von kavitierenden Strömungen mußte zunächst ein Verfahren entwickelt werden, mit dem sprunghafte Änderungen in der Dichte in Verbindung mit sehr schnellem Phasenübergang überhaupt berechnet werden können. Die Verwendung der Rayleighgleichung ist ein guter Kompromiß zwischen numerischen Aufwand und bestmöglicher Approximation der Physik. Mit der Rayleighgleichung können wichtige Untersuchungen durchgeführt werden, z.B.: wie eine Strömung auf die Entstehung von Dampfvolmen reagiert, insbesondere das Druckfeld. Aus der Analyse dieser Rechnungen wurde eine effiziente Methode zur Stabilisierung des numerischen Verfahrens entwickelt, die in Abschnitt 3.3.5.3 vorgestellt wird. Dieser Abschnitt soll nicht als physikalische Rechtfertigung der Rayleighgleichung mißverstanden werden, sondern als gerechtfertigte Vorgehensweise im Rahmen der Entwicklung eines neuen Verfahrens zur Berechnung kavitierender Strömungen.

Eine Abschätzung inwiefern sich die Vernachlässigung der Trägheit auf die Entstehung oder Vernichtung von Dampfvolmen bei einer kavitierenden Strömung auswirkt ist sehr problematisch bzw. wäre an dieser Stelle spekulativ. Diese Aussage begründet sich auf den Erfahrungen, die anhand der bisherigen Simulationen gemacht wurden:

- Entstehung bzw. Vernichtung von Dampfvolmen hat massive Rückwirkungen auf die Druckverteilung. → Aussagen über das Wachstum auf Basis von einphasig ermittelten Druckverläufen verlieren jegliche Gültigkeit.
- Dampfvolmenerzeugung in einer Rechenzelle hat massive Rückwirkungen auf die Volmenerzeugung in den Nachbarzellen.
- Dampfgebiete stehen global in Wechselwirkung, d.h. der Kollaps eines Kavitationsgebiets kann die Entstehung eines neuen Dampfgebiets an einer anderen Stelle im Strömungsgebiet zur Folge haben.
- Starke Wechselwirkung der Dampfgebiete mit der Strömung (Wirbelbildung, Re-entrant Jet)

Es wird daher empfohlen, die Trägheitseffekte in der nächsten Entwicklungsstufe dieses Modells zu erfassen. Erst die Gegenüberstellung von Simulationen unter Verwendung der beiden Wachstumsgesetze (Rayleigh-Plesset-Gleichung bzw. Rayleighgleichung) kann endgültig darüber Aufschluß geben, inwiefern Trägheitseffekte vernachlässigbar sind.

2.5 Potential und Grenzen der Modellierung

Die bisher vorgestellte physikalische Modellierung einer kavitierenden Strömung beinhaltet weiteres Potential hinsichtlich der Modellerweiterung, das im folgenden angesprochen wird.

2.5.1 Erweiterte Modellierung des Keimgehalts

Die spektrale Keimverteilung in einer Flüssigkeit wird durch Vorgabe eines mittleren Keimradius R_0 und einer mittleren Keimanzahl n_0 approximiert. Als Erweiterung wird vorgeschlagen, die Keimanzahl als Funktion der Druckdifferenz zwischen Dampfdruck und Umgebungsdruck zu formulieren, in Verbindung mit einer Transportgleichung für die Keimanzahl. Diesem Vorschlag liegt die folgende Überlegung zugrunde: Betrachtet wird ein Fluidvolumen $V = V_v + V_l$, in dem eine spektrale Keimverteilung vorliegt, wie z.B. in Abb. 1.3 gezeigt. Das Fluidvolumen wird in ein Gebiet konvektiert, in dem der Druck p herrscht, mit $\Delta p = p_{sat} - p > 0$. Bei gegebenem Δp sind jedoch nur Keime wachstumsfähig, deren Radien der folgenden Bedingung genügen:

$$R \geq R_k = \frac{2 \sigma_o}{\Delta p} . \quad (2.53)$$

Die Anzahl N_{Keime} der wachstumsfähigen Keime wird durch Integration der Keimanzahldichte $N(R)$ berechnet. Dabei ist zu beachten, daß nur das Flüssigkeitsvolumen, $V_l = (1 - \alpha)V$, Keime enthält.

$$N_{\text{Keime}}(\Delta p) = \underbrace{\int_{R_k}^{R_{max}} (N(R) dR)}_{n_0(\Delta p)} (1 - \alpha) V . \quad (2.54)$$

$$(2.55)$$

Diese Gleichung entspricht formal Gl. 2.14 mit dem Unterschied, daß der Stoffparameter n_0 nun eine Funktion des Drucks p ist. Die Änderung der Keimanzahl in einer Rechenzelle kann durch die Formulierung einer Transportgleichung modelliert werden.

2.5.2 Erweiterte Modellierung des Keimtyps

Die Keimtypen „Partikel“, „Porenkeim“ und „Luftblase“ werden vereinfachend zu einem einzigen Keimtyp „Mikroblase“ zusammengefaßt. Das Wachstum der Mikroblase beginnt erst mit der Unterschreitung des Dampfdrucks. Der Kollaps der Blase wird mit Erreichen des Keimradius R_0 gestoppt. Eine Mikroblase verhält sich daher wie ein Partikel, bei dem der Ummantlungsprozeß vernachlässigt wird. Unter dem Begriff „Ummantelung“ wird hier die Bildung von Dampfkapfen auf der Partikeloberfläche und deren Zusammenwachsen verstanden. In vielen technischen Anwendungen sind jedoch Luftblasen als Keimtyp

von Bedeutung, z.B. bei (Schiffs-) Propellern bzw. Turbinen, oder die Strömung eines blasenhaltigen Fluids selbst ist von Interesse.

Die Strömung einer blasenhaltigen Flüssigkeit kann mit dem vorgestellten Verfahren ebenfalls berechnet werden. Dazu ist es notwendig, den Keimtyp „Mikroblase“ durch den Typ „Luftblase“ zu ersetzen. Eine Luftblase unterscheidet sich von einer Mikroblase in deren physikalischen Eigenschaften, daß eine Volumenänderung bei beliebigen Drücken auftritt und beim Kollaps beliebig kleine Radien erreicht werden können. Zur Berechnung des Wachstums bzw. des Kollaps einer Luftblase können die in Kapitel 2.4.1 vorgestellten Wachstumsrelationen verwendet werden. Im allgemeinen Fall enthält eine Dampfblase auch einen Gasanteil, der Blaseninnendruck p_B entspricht daher der Summe der Partialdrücke von Luft und Dampf [12]:

$$p_{\text{Blase}} = p_{\text{sat}}(T) + \frac{NT^n}{R^3}, \quad (2.56)$$

mit N = Konstante, die die Luftmasse und Geometrie berücksichtigt,
 n = Polytropen-Exponent.

Für das Wachstum und den Kollaps einer Blase kann die Zustandsänderung des Gasanteils als isotherm [1] betrachtet werden ($n = 1$), mit Ausnahme des Endstadiums beim Blasen-kollaps. Hier erfolgt die Kompression mit guter Näherung adiabat [1], d.h. $n = \kappa$. Die Blasenanzahl in einer Blasenströmung kann ebenfalls durch Vorgabe einer konstanten Anzahl von Luftblasen pro Volumeneinheit Flüssigkeit n_0 und dem Blasenradius R_0 erfolgen, analog zur Kavitation. Alternativ kann anstelle des Radius R_0 auch die Masse der Luft pro Volumeneinheit Flüssigkeit $m_{a,0}$ vorgegeben werden. Diese Definition bietet den Vorteil, daß der Parameter $m_{a,0}$ unabhängig von Druck und Temperatur ist. Der Blasenradius kann dann aus $m_{a,0}$ und n_0 berechnet werden:

$$p \frac{4}{3} \pi R_0^3 = \frac{m_{a,0}}{n_0} \Re T \quad (2.57)$$

mit \Re = individuelle Gaskonstante.

Anmerkung:

Alternativ zur oben beschriebenen Vorgehensweise, kann die Strömung einer Blasenflüssigkeit auch mittels der VoF Methode berechnet werden. Als typisches Beispiel kann das Aufsteigen von mehreren Blasen in einer Wassersäule angeführt werden. Voraussetzung für die Anwendung der VoF-Methode ist, daß die Luft in der Blase inkompressibel betrachtet werden kann und die örtliche Auflösung des Gitters ausreichend hoch ist. Das Gitter sollte so fein sein, daß eine Blase durch mehrere Gitterzellen aufgelöst wird. Aus der Erfahrung wird hier als Anhaltswert eine Auflösung der Blase durch mindestens 6 x 6 Gitterzellen vorgeschlagen. Diese Auflösung ist auch ausreichend, um die Oberflächenspannung durch das CSF- (Continuum Surface Force) Modell zu berücksichtigen, das z.B. von Brackbill & Kothe [90] detailliert beschrieben wird.

2.5.3 Berücksichtigung von thermischen Effekten

In Kapitel 2.4.3.2 wurde gezeigt, daß die Kombination aus der Wachstumsgleichung nach Rayleigh (Gl. 2.33) mit der Relation von Plesset & Zwick (Gl. 2.36) gut zur Approximation von thermisch kontrolliertem Wachstum geeignet ist. Zur direkten Kopplung mit dem Quellterm ist die aus der Kombination resultierende Gl. 2.46 jedoch nur bedingt geeignet, da sie iterativ gelöst werden muß. Im Hinblick auf die Reduktion des numerischen Aufwands wird diese daher vereinfacht, indem nur die Temperaturabhängigkeit des Dampfdrucks berücksichtigt wird. Durch Umformung wird zunächst die Zeit aus Gl. 2.36 eliminiert und durch den Radius ersetzt.

$$\frac{dR}{dt} = K/\sqrt{t}, \implies R = 2K\sqrt{t}, \implies \frac{dR}{dt} = 2K^2/R. \quad (2.58)$$

Man erhält eine Gleichung analog zu Gl. 2.46, in der die Zeit nicht mehr enthalten ist:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{R,P\&Z} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|p_{sat}(T_B) - p_\infty|}{\rho_l}} = \frac{2}{R} \left(\left(\frac{3a_l}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\rho_l c_{pl} (|T_{sys} - T_B|)}{\rho_v L} \right)^2. \quad (2.59)$$

In einem weiteren Schritt wird die Dampfdruckkurve um T_{sys} linearisiert, d.h. man erhält einen Zusammenhang der Form:

$$p_{sat}(\Delta T) \approx p_{sat}(T_{sys}) + \frac{\partial p_{sat}}{\partial T} \Delta T, \quad (2.60)$$

$$\Delta T = T_{sys} - T_B. \quad (2.61)$$

Diese Beziehung wird in Gl. 2.59 eingesetzt, die dann als einzige Unbekannte nur noch die Temperaturdifferenz ΔT enthält. Diese Gleichung kann mittels einer geeigneten Software (z.B. Mathematica) nach ΔT aufgelöst werden, die Stoffwerte werden bei der Temperatur $T_{sys} = \text{konst.}$ ausgewertet. Die Berechnung der Wachstumsgeschwindigkeit erfolgt mit dann bekanntem ΔT gemäß:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{R,P\&Z} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|p_{sat}(T_{sys} - \Delta T) - p_\infty|}{\rho_l}}. \quad (2.62)$$

2.5.4 Berücksichtigung von Trägheitseffekten

Im Rahmen der Modellierung erfolgt die Berücksichtigung von Trägheitseffekten durch die Lösung der Rayleigh-Plesset-Gleichung. Es ist bekannt, daß die Verwendung dieser Gleichung erhebliche numerische Schwierigkeiten verursacht, jedoch bietet die Verwendung einer Transportgleichung mit Quellterm gegenüber dem z.B. von Schulz [80] vorgestellten Verfahren Vorteile hinsichtlich der numerischen Stabilität. Schulz transformiert die Rayleigh-Plesset-Gleichung in eine partielle Differentialgleichung und koppelt diese mit den

Erhaltungsgleichungen. Daraus resultiert eine direkte Kopplung zwischen dem Trägheitsterm der Rayleigh-Plesset-Gleichung \ddot{R} und dem Druckfeld. In Abb. 2.16 ist der Verlauf dieser Größe für das Wachstum einer Blase dargestellt.

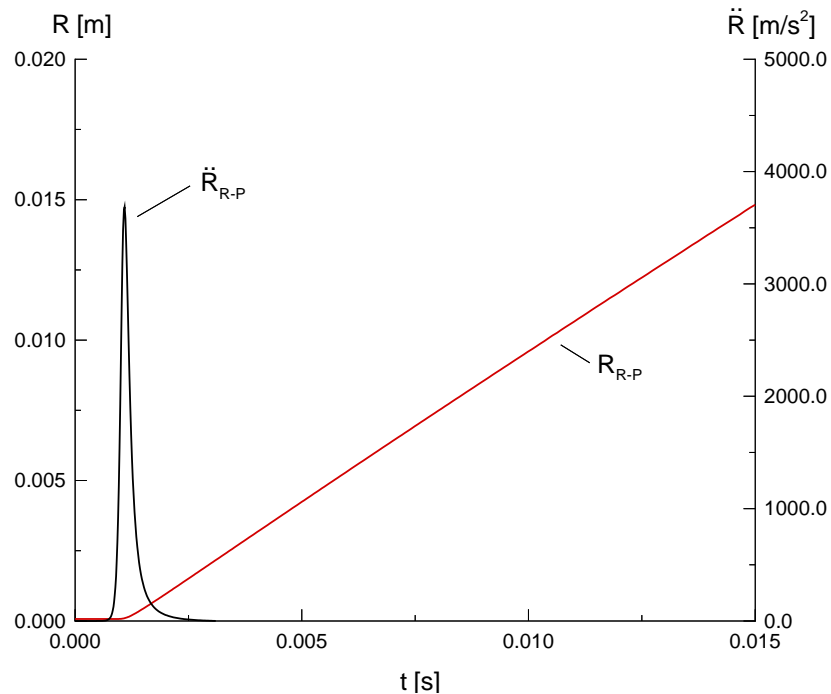


Abbildung 2.16: Numerische Berechnung des Blasenwachstums in überhitztem Wasser. $T_{\text{sys}} = 10.72^\circ\text{C}$, $p_{\text{sys}} = 0.012\text{atm}$, $\Delta T_{\ddot{U}} = 15.74\text{K}$.

Aus der Abbildung ist zu erkennen, daß $\ddot{R}(t)$ einen „Peak“-artigen Verlauf mit sehr großer Amplitude besitzt. Dieser Verlauf wurde auch in weiteren Rechnungen (bei anderen Systemdrücken, vgl. Abb. 2.12) festgestellt. Zur akkuraten Berechnung des Wachstums ist demnach eine sehr hohe zeitliche Auflösung erforderlich, ein typischer Wert für den numerischen Zeitschritt zur Lösung der Rayleigh-Plesset-Gleichung ist $\Delta t_{R-P} = 10^{-6}\text{s}$, zu Beginn der Rechnung $\Delta t_{R-P} = 10^{-9}\text{s}$. In einer Strömungssimulation beträgt der typische numerische Zeitschritt $\Delta t \sim 10^{-4}\text{s}$ (NACA 0015, bei instationär kavitierender Strömung) und liegt damit mehrere Größenordnungen über dem Zeitschritt, der zur Berechnung des Blasenwachstums erforderlich ist. Dies ist eine Ursache für die Steifigkeit des Gleichungssystems, wenn die Erhaltungsgleichungen mit der Rayleigh-Plesset-Gleichung gekoppelt werden.

Bei der hier neu vorgestellten Methode kann diese Steifigkeit umgangen werden. Durch die Quelltermformulierung kann die Rayleigh-Plesset-Gleichung zunächst als gewöhnliche Differentialgleichung behandelt und gelöst werden (z.B. durch Runge-Kutta Iteration). Folgender Ablaufplan ist denkbar (Methode 1), die Daten zum Zeitpunkt $t = t_0$ werden als bekannt vorausgesetzt:

- 1) Zeitpunkt $t = t_0$: Folgende Daten werden von der Strömungssimulation als Rand- bzw. Anfangsbedingungen übergeben, mit Δt wird der numerischer Zeitschritt der Strömungssimulation bezeichnet.

$$\begin{aligned} R(t = 0) &= R_{i,j}^{t_0} & , & & \dot{R}(t = 0) &= \dot{R}_{i,j}^{t_0} , \\ p_{\text{sys}} &= p_{i,j}^{t_0} & , & & T_{\text{sys}} &= T_{i,j}^{t_0} . \end{aligned}$$

- 2) Das Wachstum der Blase wird unter diesen Bedingungen für das Zeitintervall Δt durch Lösung der Rayleigh-Plesset-Gleichung berechnet.

$$\implies R(t = \Delta t) \quad , \quad \dot{R}(t = \Delta t)$$

- 3) Berechnung des Dampfvolumen-Quellterms (Gl. 2.21) unter Verwendung der folgenden Beziehung:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{4}{3} \pi \frac{R^3(t = \Delta t) - R_0^3}{\Delta t}$$

- 4) Nach Konvergenz des numerischen Verfahrens (Kapitel 3.3.5.3), erfolgt das Umspeichern der Daten:

$$R_{i,j}^{t_0+\Delta t} = R(\Delta t) \quad , \quad \dot{R}_{i,j}^{t_0+\Delta t} = \dot{R}(\Delta t) .$$

Schritt 2) dieser Methode basiert auf der Lösung der Rayleigh-Plesset-Gleichung durch Runge-Kutta Iteration, wie in Kapitel 2.4.1 angesprochen. Dies bedeutet in jedem Fall einen hohen numerischen Aufwand, da diese Gleichung für jede Rechenzelle mehrfach bis zur Konvergenz des Numerischen Verfahrens (sog. Innere SIMPLE Iterationen) gelöst werden muß. Für die Profilrechnungen in Kapitel 6 wurden bei Verwendung der Rayleigh-Gleichung ca. 100 Innere SIMPLE-Iterationen bis zur Konvergenz benötigt und das Fluid kavitiert in ca. 40 Rechenzellen. Dies bedeutet, daß für einen numerischen Zeitschritt die Rayleigh-Plesset-Gleichung 4000 mal gelöst werden muß. Daraus ergibt sich eine CPU Zeit von ca. 20 min pro Zeitschritt!

Alternativ wird daher folgender Ansatz vorgeschlagen (Methode 2). Die Rayleigh-Plesset Gleichung wird implizit diskretisiert. Unter implizit wird in diesem Zusammenhang ver-

standen, daß \dot{R} zum Zeitpunkt $t = t + \Delta t$ ausgewertet wird:

$$R^t \frac{\dot{R}^{t+\Delta t} - \dot{R}^t}{\Delta t} + \frac{3}{2} (\dot{R}^{t+\Delta t})^2 = \frac{p_{sat} - p^{t+\Delta t}}{\rho_l} - \frac{2\sigma_o}{\rho_l R^t} + 4 \frac{\mu_l}{\rho_l R^t} \dot{R}^t .$$

Dies ist eine quadratische Gleichung zur Bestimmung der Wachstumsgeschwindigkeit $\dot{R}^{t+\Delta t}$, die analytisch gelöst werden kann. Durch die implizite Formulierung wird gewährleistet, daß das Druckfeld p und die Wachstumsgeschwindigkeit \dot{R} in Wechselwirkung treten können. Dies resultiert in einer Stabilisierung des numerischen Verfahrens. Die Verwendung der obigen Relation bietet den weiteren Vorteil, daß diese partiell nach dem Druck abgeleitet werden kann. Dieser Term $\partial \dot{R} / \partial p$ wird zur Stabilisierung des numerischen Verfahrens benötigt, vgl. Kapitel 3.3.5.3. Der Nachteil dieser 2. Methode liegt darin, daß der numerische Zeitschritt der Ordnung ($n \cdot 10^{-6} s$) sehr klein gewählt werden sollte, um eine gute Approximation des Trägheitsterms \ddot{R} durch die Diskretisierung zu gewährleisten.

Es wird hier explizit darauf hingewiesen, daß die Berechnung der Wachstumsgeschwindigkeit mit den „neuen“ Druckwerten $p^{t+\Delta t}$ erfolgt. Es wurden ebenfalls Rechnungen unter Verwendung des Druckfelds des vorherigen Zeitschritts p^t durchgeführt. Dies führte jedoch nach wenigen numerischen Zeitschritten zur Divergenz des numerischen Verfahrens.

2.5.5 Grenzen der Modellierung: Annahme einer homogenen Strömung

Bei der Herleitung des Kavitationsmodells wird die Annahme getroffen, daß die Blasen homogen in der Rechenzelle verteilt sind. Dies bedeutet, daß zum einen sehr viele Blasen in der Rechenzelle vorhanden sind und zum anderen die Blasenradien klein gegenüber den Abmaßen der Rechenzelle sind. Diese Annahme kann verletzt werden, wenn die Zelle ein sehr kleines Volumen besitzt und folglich nur sehr weniger Keime enthält. Durch Kavitation wachsen die Keime an und erreichen Radien bis O(5mm), die Blase ist daher wesentlich größer als die Rechenzelle. Beide Situationen widersprechen der Annahme einer homogenen Verteilung.

In Abb. 2.17 ist der momentane Dampfanteil einer kavitierenden Profilmströmung dargestellt. Aus dem Dampfanteil wurde die Struktur der Blasenwolke rekonstruiert, die Blasen sind maßstäblich eingezeichnet. Abbildung 2.18 zeigt das der Simulation zugrunde liegende Rechengitter. Es ist zu erkennen, daß z.T. die Blasen größer als die Rechenzellen sind. Dennoch beträgt der Dampfanteil in diesen Zellen nicht 100%, (dies wäre physikalisch sinnvoll). Die Ursache dafür liegt in der Modellierung der Keimverteilung. Die Keimanzahl ist direkt mit dem Wasservolumen in der Zelle gekoppelt. Aus dem Dampfanteil der Zelle und der Keimanzahl wird der Radius als sekundäre Größe berechnet. Für die in Abb. 2.18 schwarz markierte Zelle sind die momentanen Werte für Blasenradius, Anzahl, etc. tabelliert, die Zelltiefe wird mit $T = 5mm$ angenommen:

Zellvolumen[mm ³]	Dampfanteil	Blasenradius [mm]	Blasenanzahl
40	0.86	2.443	0.56

Es ist daher möglich, daß der berechnete Blasenradius und damit das Blasenvolumen größer ist als das Volumen der Rechenzelle selbst, wenn diese nur einen Bruchteil eines Keims enthält.

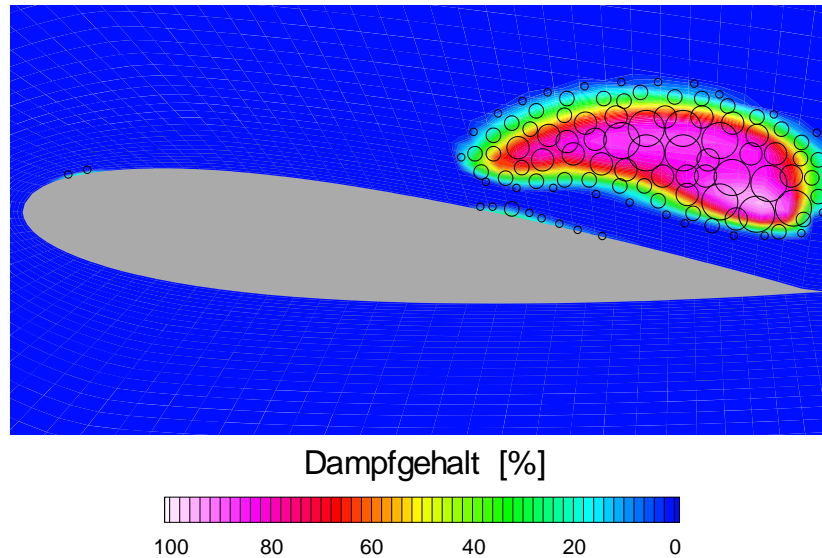


Abbildung 2.17: Dampfanteil und Rekonstruktion der internen Struktur der Blasenwolke. NACA 0015, $\sigma_{ref} = 1.0$, $U = 12\text{m/s}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$, $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei $T = 293.15\text{ K}$.

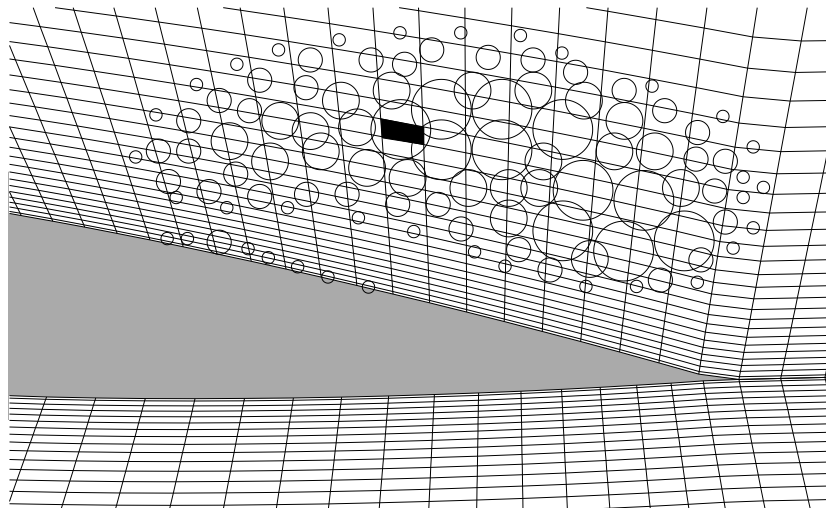


Abbildung 2.18: Detaildarstellung: Rekonstruktion der internen Struktur der Blasenwolke. Blasenradien im Vergleich mit den Rechenzellen. NACA 0015, $\sigma_{ref} = 1.0$, $U = 12\text{m/s}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$, $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei $T = 293.15\text{ K}$.

In der vorgestellten Modellierung wird bei der Quelltermberechnung nicht überprüft, ob die Annahme einer homogene Blasenströmung zulässig ist. Diese bedeutet konkret, daß der Blasendurchmesser im Prinzip beliebig groß werden kann. Im Grenzfall für $\alpha \rightarrow 1$ geht die Keimanzahl in der Zelle $N = n_0(1 - \alpha)V \rightarrow 0$ und folglich strebt der Blasenradius $R \rightarrow \infty$. Dieser Grenzfall verursacht keine Probleme bzgl. der Numerik, da der Dampfvolumen- Quellterm (Gl. 2.19) für $\alpha \rightarrow 1$ den Wert Null annimmt, d.h. die Rechenzelle ist divergenzfrei. Dies ist physikalisch korrekt, denn die Rechenzelle enthält keine Flüssigkeit mehr, die noch verdampfen könnte und der reine Dampf wird im Rahmen der Modellierung inkompressibel betrachtet. Dennoch wird das Modell bei Verletzung der homogenen Annahme im „off-design“ betrieben.

3 Numerisches Verfahren

In diesem Kapitel wird das numerische Verfahren zur Simulation einer Zweiphasenströmung mit Phasenübergang (Kavitation) und ohne Phasenübergang (VoF) beschrieben.

Als Basis wird ein Standardverfahren zur Simulation einer einphasigen, inkompressiblen, reibungsbehafteten 2-D Strömung verwendet, wie es z.B. in Ferziger & Perić [83] detailliert beschrieben wird. Zur Diskretisierung des Rechengebiets wird die Finite Volumen Methode verwendet, die Kopplung des Druck- und Geschwindigkeitsfelds erfolgt nach dem SIMPLE Verfahren. Die Diskretisierung der Grundgleichungen und Herleitung der Druck-Korrekturgleichung für das SIMPLE Verfahren entspricht der in [83] vorgestellten Vorgehensweise und wird aus diesem Grund nicht in aller Ausführlichkeit dargestellt. Der Schwerpunkt liegt auf den Änderungen gegenüber dem Standardverfahren, die zur Simulation einer Zweiphasenströmung notwendig sind.

3.1 Grundgleichungen

Die Erhaltungsgleichungen der einphasigen Strömung können unter Vernachlässigung des Schlupfs zwischen den Phasen auch zur Beschreibung einer Zweiphasenströmung verwendet werden [93]. Die Zweiphasenströmung wird als die Strömung eines Fluidgemischs mit gemittelten Stoffeigenschaften modelliert. Die Variable α wird als der volumetrische Anteil der gasförmigen Phase pro Einheitsvolumen Gemisch definiert.

- Volumenanteil α

$$\alpha = \frac{\text{Volumen der gasförmigen Phase}}{\text{Zellvolumen}} \quad (3.1)$$

- Stoffeigenschaften des Fluidgemischs

$$\varrho = \alpha\varrho_v + (1 - \alpha)\varrho_l, \quad (3.2)$$

$$\mu = \alpha\mu_v + (1 - \alpha)\mu_l. \quad (3.3)$$

mit $\varrho_v(T), \mu_v(T)$ = Dichte, dyn. Viskosität der gasförmigen Phase,
 $\varrho_l(T), \mu_l(T)$ = Dichte, dyn. Viskosität der flüssigen Phase.

Die Strömung des Fluidgemischs wird mathematisch durch die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie beschrieben. Die Erhaltungsgleichungen lauten im kartesischen Koordinatensystem, mit den Geschwindigkeitskomponenten u und v , dem Druck p , und der Enthalpie h :

- Kontinuität

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = -\frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} = -\frac{\varrho_v - \varrho_l}{\varrho} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{\alpha}{\varrho} \frac{d\varrho_v}{dt} - \frac{1 - \alpha}{\varrho} \frac{d\varrho_l}{dt}. \quad (3.4)$$

Anmerkung: Die Divergenz des Strömungsfeldes geht in den Quellterm der Transportgleichung für den Volumenanteil α ein.

- Impulserhaltung

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \varrho f_x, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial(\varrho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \varrho f_y. \quad (3.6)$$

Die Beschleunigungen durch Volumenkräfte, wie z.B. der Schwerkraft, sind in den Impulsgleichungen in den Quelltermen f_x, f_y zusammengefaßt. Die Schub- und Normalspannungen τ_{ij} mit $i, j, k = \{x, y\}$ ergeben sich für Newton'sche Medien gemäß dem Stokes'schen Schubspannungsansatz:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right). \quad (3.7)$$

- Enthalpieerhaltung

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varrho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho uh)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho vh)}{\partial y} &= \frac{dp}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ &+ \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + q_h, \end{aligned} \quad (3.8)$$

mit $\lambda =$ Wärmeleitfähigkeit und $c_p =$ spezifische Wärmekapazität.

- Void Fraction Transportgleichung

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha u)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha v)}{\partial y} = \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \nabla \cdot \mathbf{w}. \quad (3.9)$$

Die numerische Lösung der Erhaltungsgleichungen erfordert die Darstellung des Rechengebiets als ein Gitter von Rechenpunkten (Gitterpunkten), an denen die Gleichungen ausgewertet werden. Dieser Prozeß wird als Diskretisierung bezeichnet und beinhaltet im wesentlichen zwei Aufgaben:

- Diskretisierung des Rechengebiets,
- Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen.

Als Resultat der Diskretisierung wird ein algebraisches Gleichungssystem erhalten, das durch einen geeigneten Algorithmus gelöst werden muß. Zur Reduktion des numerischen Aufwands werden die allgemein formulierten Erhaltungsgleichungen zunächst weiter vereinfacht.

3.1.1 Zweiphasenströmungen ohne Phasenübergang - Standard-VoF Anwendungen

Mit dem Begriff Standard-VoF Anwendung werden Strömungen wie der Kollaps einer Wassersäule, das Aufsteigen von Blasen, oder die Schwingung einer Freien Oberfläche bezeichnet. Es findet kein Phasenübergang statt und beide Phasen können als inkompressibel betrachtet werden. Das Strömungsfeld ist daher divergenzfrei und die Volumenerhaltung reduziert sich auf:

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0 . \quad (3.10)$$

Aus Gl. 3.9 folgt unter Verwendung der Divergenzfreiheit Gl. 3.10 die Transportgleichung für den Luftanteil α :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha u)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha v)}{\partial y} = 0 . \quad (3.11)$$

Die Lösung der Enthalpiegleichung zur Bestimmung der Fluidtemperatur ist nicht notwendig, da die Stoffwerte Dichte und Viskosität der Einzelphasen als konstant betrachtet werden können.

3.1.2 Zweiphasenströmungen mit Phasenübergang - Kavitation

In einer kavitierenden Strömung entsteht Dampfvolumen infolge von Blasenwachstum bzw. wird durch Blasen kollaps vernichtet. Das Strömungsfeld ist daher nicht divergenzfrei. Unter Vernachlässigung der Kompressibilität und der Masse des Dampfs in einer Rechenzelle, lautet die Volumenerhaltung:

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{n_0}{1 + n_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right) . \quad (3.12)$$

Diese Gleichung wurde bereits in Kapitel 2.3.3 (Gl. 2.19) hergeleitet und wird in die allgemeine Transportgleichung für den Dampfvolumenanteil α (Gl.3.9) eingesetzt:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha u)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha v)}{\partial y} = \frac{n_0}{1 + n_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right). \quad (3.13)$$

Die Erweiterung des Kavitationsmodells zur Simulation kavitierender Strömungen bei hohen Temperaturen erfordert die Lösung der Enthalpiegleichung zur Berechnung der temperaturabhängigen Stoffwerte $\varrho_l(T)$ und $\varrho_v(T)$. Nach Avva [70] können die Konduktion und Reibung bei kavitierenden Strömungen vernachlässigt werden und Gl.3.8 vereinfacht sich zu:

$$\frac{\partial(\varrho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u h)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v h)}{\partial y} = \frac{dp}{dt}, \quad (3.14)$$

$$h = \frac{\alpha \varrho_v h_v + (1 - \alpha) \varrho_l h_l}{\varrho}, \quad h_v = c_{p,v} T + L, \quad h_l = c_{p,l} T. \quad (3.15)$$

3.2 Diskretisierung des Rechengebiets

Zur Diskretisierung wird die Finite Volumen Methode verwendet [83] [94]. Das Rechengebiet wird in eine endliche Anzahl von sich nicht überschneidenden Kontrollvolumen aufgeteilt. Für jedes dieser Volumen werden die Erhaltungsgleichungen in Integralform formuliert. Eine wichtige Eigenschaft der Finite-Volumen Methode ist, daß die Erhaltungsprinzipien, die den mathematischen Modellen kontinuumsmechanischer Problemstellungen zugrunde liegen, per Definition auch für die diskretisierten Gleichungen erfüllt sind.

Zur Strömungsberechnung wird ein 2-D konturangepaßtes, krummliniges, strukturiertes Rechengitter verwendet. Die Werte der Variablen u, v, p, h und α werden dem Mittelpunkt des Kontrollvolumens zugeordnet, diese Anordnung der Variablen wird als „nicht-versetzt“ bzw. „**co-located**“ bezeichnet [83]. Zur Bezeichnung der Nachbarvolumen wird die allgemein übliche Kompaßnotation verwendet [83]. Ausgangspunkt für die Bestimmung der geometrischen Daten eines Kontrollvolumens sind die Koordinaten der Zellecken, die im Rahmen des Pre-Processing durch ein Gittergenerierungsprogramm erzeugt werden. Das Kontrollvolumen wird durch vier Seitenflächen begrenzt, der Punkt P beschreibt den Mittelpunkt des betrachteten Kontrollvolumens. Die Beziehung für die Seitenfläche sind im folgenden für die Ostfläche aufgestellt, die Beziehung für die anderen Seitenflächen ergeben sich völlig analog durch Vertauschen der Indizes.

Koordinaten des Zellmittelpunkts:

$$\vec{X}_P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(x_{ne} + x_{nw} + x_{se} + x_{sw}) \\ \frac{1}{4}(y_{ne} + y_{nw} + y_{se} + y_{sw}) \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Verbindungsvektor der Zellmittelpunkte:

$$\vec{d}_e = \vec{X}_E - \vec{X}_P . \quad (3.17)$$

Zellflächennormale:

$$\vec{S}_e = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} y_{ne} - y_{se} \\ -x_{ne} + x_{se} \end{pmatrix} . \quad (3.18)$$

Zellfläche:

$$S_e = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} . \quad (3.19)$$

Zellvolumen:

$$V = \frac{1}{2} \left(\vec{S}_w \otimes \vec{S}_s + \vec{S}_e \otimes \vec{S}_n \right) . \quad (3.20)$$

3.3 Diskretisierung der Grundgleichungen

Die Finite Volumen Diskretisierung basiert auf der integralen Form der in Abschnitt 3.1 vorgestellten Erhaltungsgleichungen. Durch Anwendung der nachfolgenden Integralsätze können die Volumenintegrale in Flächenintegrale überführt werden. Im 2-D Fall wird das Kontrollvolumen durch die Seitenflächen S_w, S_e, S_n, S_s begrenzt und das Integral über die Oberfläche S kann in eine Summe von Integralen über die einzelnen Seitenflächen approximiert werden. Diese Approximationen stützen sich auf den Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$\int_V \nabla \varphi dV \approx \sum_f \left(\vec{S}_f \varphi_f \right) , \quad (3.21)$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\varphi} dV \approx \sum_f \left(\vec{S}_f \cdot \vec{\varphi}_f \right) . \quad (3.22)$$

Mit φ wird ein beliebiger Skalar bezeichnet, mit $\vec{\varphi}$ eine beliebige vektorielle Größe. Der Index „ f “ = $\{w, e, n, s\}$ (face) bedeutet, daß die entsprechende Größe im Zentrum der Zellfläche S_f verwendet wird. Die Variablen sind jedoch nur in den Mittelpunkten der Kontrollvolumen bekannt. Sofern nicht anders angegeben, werden die Zellflächenwerte $\varphi_f, \vec{\varphi}_f$ durch lineare Interpolation berechnet:

$$\varphi_f = K \varphi_P + (1 - K) \varphi_N , \quad (3.23)$$

$$\vec{\varphi}_f = K \vec{\varphi}_P + (1 - K) \vec{\varphi}_N . \quad (3.24)$$

Die Interpolation eines Vektors geschieht durch Interpolation der Komponenten, der Wichtungsfaktor K wird als Verhältnis der Abstände $|f\vec{N}|$ und $|P\vec{N}|$ definiert:

$$K = \frac{|f\vec{N}|}{|P\vec{N}|} = \frac{|f\vec{N}|}{|d|}. \quad (3.25)$$

Zur Approximation eines Volumenintegrals wird die folgende Beziehung verwendet. Unter der Annahme, daß der Wert von φ im Mittelpunkt des Volumens einen Mittelwert über das Kontrollvolumen V_P darstellt, führt der Mittelwertsatz auf:

$$\int_{V_P} \varphi dV \approx \varphi_P V_P. \quad (3.26)$$

Zur Berechnung der diffusiven Flüsse muß der Gradient einer Größe an einer Zellfläche berechnet werden. Der Gradient kann entweder im Bezug auf das globale (x, y) Koordinatensystem oder im Bezug auf lokale rechtwinklige (\vec{n}, \vec{t}) Koordinaten formuliert werden:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y, \quad (3.27)$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\vec{t}. \quad (3.28)$$

$$(3.29)$$

Die Verwendung des lokalen Koordinatensystem vereinfacht die Berechnung.

Die obigen Gleichungen werden im folgenden zur Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen verwendet.

3.3.1 Impulsgleichungen

Die Diskretisierung der Impulsgleichung basiert auf der Integration der Gl. 3.5 über ein Zellvolumen. Durch Anwendung des Gauss'schen Theorems werden die Volumenintegrale in Flächenintegrale überführt. Die integrale Form der i -ten Impulsgleichung lautet in Indexschreibweise:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} dV + \int_S \rho u_i \mathbf{w} \cdot d\vec{S} - \int_S \mu \nabla u_i \cdot d\vec{S} - \int_S \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \vec{e}_j \right) \cdot d\vec{S} \\ = - \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV + \int_V \rho f_i dV. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Die weitere Diskretisierung besteht im wesentlichen darin, die Flächenintegrale und das Volumenintegral mit Hilfe von geeigneten Mittelwerten der jeweiligen Integranden zu approximieren. In einem strukturierten Gitter werden die Flächenintegrale unter Verwendung der Mittelpunktsregel durch die Flüsse über die Zellflächen approximiert:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(\varrho u_i)}{\partial t}\right)_P V_P + \sum_f \varrho u_i \mathbf{w} \cdot \vec{S}_f &= \sum_f \mu \nabla u_i \cdot \vec{S}_f - \sum_f \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \vec{e}_j\right) \cdot d\vec{S}_f \\ &= -\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)_P V_P + (\varrho f_i)_P V_P . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Der erste Summenterm wird als konvektiver Fluß F^K bezeichnet, den diffusiven Fluß F^D bilden der 2. und 3. Summenterm. Zur Berechnung der Flüsse ist die Interpolation der Zellflächenwerte aus den (Zell-) Mittelpunktswerten erforderlich, die Vorgehensweise wird im folgenden behandelt.

3.3.1.1 Konvektiver Term

Der konvektive Fluß F^K , der über die Zellfläche S_f tritt, berechnet sich gemäß:

$$F_f^K = \int_{S_f} \varrho u_i \mathbf{w} \cdot d\vec{S} \approx \varrho_f F_f u_{i,f} . \quad (3.32)$$

Mit F_f wird der Volumenstrom über die Zellfläche f bezeichnet,

$$F_f = \vec{S}_f \cdot \mathbf{w}_f , \quad (3.33)$$

$$\mathbf{w}_f = K \mathbf{w}_P + (1 - K) \mathbf{w}_N . \quad (3.34)$$

Das Produkt $\varrho_f F_f$ ist der Massenstrom, der über die Zellfläche tritt. Die Approximation der Dichte muß hier so erfolgen, daß die Massenerhaltung gewährleistet wird. Die Kontinuitätsgleichung für ein Fluid variabler Dichte wurde durch die Beziehungen für den Volumenstrom und die α -Transportgleichung ersetzt, daher wird die Dichte ϱ_f in Abhängigkeit des Volumenanteils α_f berechnet:

$$\varrho_f = \alpha_f \varrho_v + (1 - \alpha_f) \varrho_l . \quad (3.35)$$

Die Verwendung dieser Gleichung garantiert die Massenerhaltung an den Zellflächen, die Ermittlung des Zellflächenwerts α_f wird in Abschnitt 3.3.3 erläutert.

Die Approximation der Geschwindigkeit $u_{i,f}$ basiert auf dem „Deferred Correction“ Ansatz nach Khosla & Rubin [108]. D.h., der Flächenwert wird durch die Kombination

eines Interpolationsschemas von niedriger Ordnung (hier Upwind, UDS) mit einem Schema höherer Ordnung (hier Zentrale Differenzen, CDS) berechnet:

$$u_{i,f} = u_{i,f}^{UDS} + \lambda(u_{i,f}^{CDS} - u_{i,f}^{UDS}), \quad (3.36)$$

mit

$$u_{i,f}^{UDS} = \begin{cases} u_{i,P} & : F_f > 0 \\ u_{i,N} & : F_f < 0 \end{cases}, \quad (3.37)$$

$$u_{i,f}^{CDS} = K u_{i,P} + (1 - K) u_{i,N}. \quad (3.38)$$

Zur Vereinfachung der Koeffizientenmatrix wird nur der Term niedriger Ordnung implizit behandelt. Der Term $\lambda(u_{i,f}^{CDS} - u_{i,f}^{UDS})$ wird explizit behandelt und dem Quellterm zugeschlagen. In diesem Zusammenhang bedeutet explizit, daß der Term mit den Werten des vorherigen Iterationsschritts $m - 1$ berechnet wird. Der Volumenstrom F_f wird ebenfalls explizit behandelt und der konvektive Fluß lautet:

$$F_f^K = \underbrace{\varrho_f F_f^{m-1} (u_{i,f}^{UDS})^m}_{\rightarrow A_P^{u_i}, A_N^{u_i}} + \lambda \underbrace{\varrho_f F_f^{m-1} (u_{i,f}^{CDS} - u_{i,f}^{UDS})^{m-1}}_{:= F_Q^K \rightarrow Q_{i_t}^{t+\Delta t}}. \quad (3.39)$$

Mit dem Parameter $0 \leq \lambda \leq 1$ kann eine gemischte Approximation berechnet werden. Damit wird einerseits eine ausreichende Stabilität und andererseits die notwendige Genauigkeit des numerischen Verfahrens gewährleistet.

3.3.1.2 Diffusiver Term

Die Finite Volumen Diskretisierung für den diffusiven Term lautet

$$F_f^D = \int_{S_f} \left(\mu \nabla u_i + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \vec{e}_j \right) \right) \cdot d\vec{S} \approx \underbrace{\mu_f (\nabla u_i)_f \cdot \vec{S}_f}_{F_1^D} + \underbrace{\mu_f \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \vec{e}_j \right)_f \cdot \vec{S}_f}_{F_2^D}. \quad (3.40)$$

Die dynamische Viskosität μ_f wird gemäß Gl. 3.24 durch Interpolation aus den Zellwerten μ_P und μ_N ermittelt:

$$\mu_f = K \mu_P + (1 - K) \mu_N. \quad (3.41)$$

Die Berechnung des diffusiven Terms erfolgt nach einem von Muzaferija [109] vorgeschlagenen modifizierten „Deferred Correction“ Ansatz. Dieses Verfahren berücksichtigt die Nicht-Orthogonalität des Rechengitters. Dazu wird der Term F_1^D unter Verwendung der Gleichung Gl. 3.29 im lokalen (\vec{n}, \vec{t}) Koordinatensystem ausgewertet. In einem orthogonalen

Gitter erfolgt die Berechnung von F_1^D gemäß:

$$F_1^D = \mu_f \left(\frac{\partial u_i}{\partial n} \right) S_f \approx \mu_f S_f \frac{(u_{i,N} - u_{i,P})}{|\vec{d}_f|}. \quad (3.42)$$

Ist das Gitter nicht orthogonal, wird dieser Term korrigiert. Zur Vereinfachung der Matrixbelegung erfolgt die Zerlegung in einen impliziten (Haupt-) Teil und einen expliziten Korrekturteil:

$$F_1^D = \underbrace{\mu_f S_f \frac{(u_{i,N} - u_{i,P})^m}{|\vec{d}_f|}}_{\rightarrow A_P^{u_i}, A_N^{u_i}} + \underbrace{\mu_f S_f (\nabla u_i)_f^{m-1} \cdot \left(\frac{\vec{S}_f}{|\vec{S}_f|} - \frac{\vec{d}_f}{|\vec{d}_f|} \right)}_{:= F_{Q_1}^D \rightarrow Q_{u_i}^{t+\Delta t}}. \quad (3.43)$$

Der Korrekturteil (zweiter Summand) wird mit den Werten des vorherigen Iterationsschritts ($m - 1$) berechnet und geht in den Quellterm ein. Der Term $(\nabla u_i)_f$ wird durch Interpolation aus den Zellmittelpunktswerten gemäß Gl.3.24 erhalten:

$$(\nabla u_i)_f^{m-1} = K(\nabla u_i)_P^{m-1} + (1 - k)(\nabla u_i)_N^{m-1}. \quad (3.44)$$

Der zweite Anteil des diffusiven Flusses, F_2^D , wird ebenfalls explizit behandelt und dem Quellterm zugeschlagen. Die Berechnung des Terms wird am Beispiel der u-Komponente erläutert. Die Gradienten an der Zellfläche werden analog zu Gl. 3.44 berechnet,

$$F_2^D = \underbrace{\left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \vec{e}_j \right)_f^{m-1}}_{:= F_{Q_2}^D \rightarrow Q_{u_i}^{t+\Delta t}} \cdot \vec{S}_f = \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_f \vec{e}_x + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_f \vec{e}_y \right]^{m-1} \cdot \vec{S}_f. \quad (3.45)$$

Damit ist die Berechnung der diffusiven und konvektiven Flüsse abgeschlossen. Zur vollständigen Diskretisierung der Impulsgleichung ist noch die Ableitung nach der Zeit in geeigneter Weise zu approximieren.

3.3.1.3 Zeitliche Diskretisierung

Zur zeitlichen Diskretisierung wird die implizite Euler Methode eingesetzt, die sich durch deren numerische Stabilität auszeichnet. Diesem Punkt kommt im Hinblick auf die Simulation kavitierende Strömungen zentrale Bedeutung zu. Weil die Genauigkeit des Verfahrens nur 1. Ordnung beträgt, ist die Verwendung von kleinen numerischen Zeitschritten Δt erforderlich, um eine ausreichende Genauigkeit der Ergebnisse zu erzielen. Die Wahl eines kleinen Zeitschritts entspricht genau den Anforderungen für kavitierender Strömungen, um die Entstehung bzw. den konvektiven Transport von Dampfvolumen aufzulösen. Die i-te Impulsgleichung lautet vollständig diskretisiert:

$$\begin{aligned}
\frac{(\varrho u_i)^{t+\Delta t}}{\Delta t} V_P + \sum_f (\varrho u_i F)_f^{t+\Delta t} &= \sum_f \mu_f \left[\nabla u_i + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \vec{e}_j \right) \right]_f^{t+\Delta t} \cdot \vec{S}_f \\
&= \underbrace{\left(\frac{(\varrho u_i)^t}{\Delta t} + (\varrho f_i)^t \right)}_{:=S^{u_i}} V_P - \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^{t+\Delta t} V_P . \quad (3.46)
\end{aligned}$$

Die Zellflächenwerte auf der linken Seite von Gl.3.46 werden in Abhängigkeit des Wertes im Zellmittelpunkt und Mittelpunktwerten der Nachbarzellen berechnet. Daher kann die obige Gleichung unter Verwendung der Mittelpunktwerten umformuliert werden:

$$A_P^{u_i} u_{i,P}^{t+\Delta t} + \sum_N A_N^{u_i} u_{i,N}^{t+\Delta t} = Q_{u_i}^{t+\Delta t} - \left(\frac{\partial p^{t+\Delta t}}{\partial x_i} \right)_P V_P. \quad (3.47)$$

Mit dem Index "P" wird ein beliebiges Kontrollvolumen (Rechenzelle) bezeichnet, der Index „N“ = {E,W,N,S} bezeichnet die Nachbarzellen. Der erweiterte Quellterm $Q_{u_i}^{t+\Delta t}$ beinhaltet neben dem Quellterm S_{u_i} weitere Terme, die aus der Verwendung des „Deferred Correction“ Ansatzes zur Berechnung der konvektiven und diffusiven Terme resultieren. Die Koeffizienten der Matrix werden aus den Gleichungen 3.39, 3.43, 3.45 ermittelt:

$$A_N^{u_i} = \min(\varrho_f F_f, 0) - \frac{\mu_f S_f}{|\vec{d}_f|}, \quad (3.48)$$

$$A_P^{u_i} = - \sum_N A_N^{u_i} + \frac{\varrho V_P}{\Delta t}, \quad (3.49)$$

$$Q_{u_i}^{t+\Delta t} = S^{u_i} V_P - \sum_N F_Q^K + \sum_N F_{Q_1}^D + \sum_N F_{Q_2}^D. \quad (3.50)$$

3.3.2 Enthalpiegleichung

Die Diskretisierung der Enthalpiegleichung basiert auf der integralen Form von Gl. 3.8. Zur zeitlichen Diskretisierung wird die implizite Euler Methode verwendet, zur Vereinfachung der Koeffizientenmatrix erfolgt die Berechnung der konvektiven und diffusiven Flüsse nach dem „Deferred Correction“ Ansatz, die Vorgehensweise ist analog zur Impulsgleichung. Im folgenden wird nur die Diskretisierung der für kavitierende Strömungen vereinfachten Enthalpiegleichung Gl. 3.14 durchgeführt:

$$\frac{(\varrho h)^{t+\Delta t}}{\Delta t} V_P + \sum_f F_f^{h,K} = S^h V_P, \quad (3.51)$$

mit

$$F_f^{h,K} = \varrho_f F_f^{m-1} (h_f^{UDS})^m + \lambda \varrho_f F_f^{m-1} (h_f^{CDS} - h_f^{UDS})^{m-1}, \quad (3.52)$$

$$S^{u_i} = \frac{(\varrho h)^t}{\Delta t} + \frac{p^{t+\Delta t} - p^t}{\Delta t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla p)_P^{t+\Delta t}. \quad (3.53)$$

Die Werte h_f^{UDS}, h_f^{CDS} werden analog zu Gleichung 3.37 bestimmt.

3.3.3 Void Fraction Transportgleichung: Standard-VoF Anwendungen

Zur Diskretisierung der Transportgleichung wird diese über ein Kontrollvolumen integriert.

$$\int_t^{t+\Delta t} \left\{ \int_V \frac{\partial \alpha}{\partial t} dV \right\} dt + \int_t^{t+\Delta t} \left\{ \int_V \nabla \cdot (\alpha \mathbf{w}) dV \right\} dt = 0. \quad (3.54)$$

Nach Anwendung des Gauss'schen Theorems auf das Integral des Konvektionsterms ergibt sich die Transportgleichung in diskretisierter Form:

$$\frac{\alpha^{t+\Delta t} - \alpha^t}{\Delta t} + \frac{1}{V} \sum_f \alpha_f F_f^t = 0. \quad (3.55)$$

Die Berechnung der konvektiven Terme erfolgt nach dem von Ubbink [96] entwickelten CICSAM-Schema (Compressive Interface Capturing on Arbitrary Meshes). Das CICSAM-Verfahren baut auf das Donor-Acceptor Differenzierungsschema von Ramshaw & Trapp [97] auf, das gewissermaßen die Grundlage für die Entwicklung von hoch auflösenden Verfahren (High Resolution Schemes) darstellt. Aus diesem Grund wird daher zunächst das Donor-Acceptor Schema vorgestellt.

3.3.3.1 Donor-Acceptor Differenzierungsschema

Die Berechnung der Zellflächenwerte α_f erfolgt für alle Flächen einer Rechenzelle analog, es ist daher ausreichend, das Donor-Acceptor Differenzierungsschema für eine einzige Zellfläche zu erläutern. Zur Vereinfachung wird eine Rechenzelle betrachtet, die zunächst eindimensional durchströmt wird, siehe Abb. 3.1. Die Volumenströme über den Nord- und Südrand der Zelle sind Null, die Strömung tritt über den Westrand in die Zelle ein und über den Ostrand wieder aus.

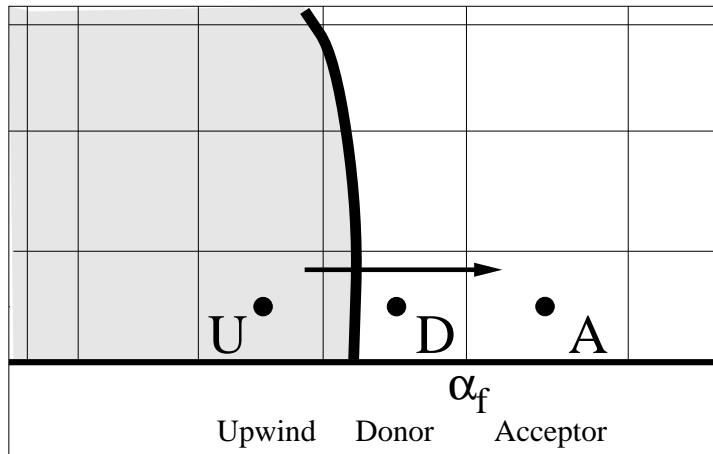


Abbildung 3.1: Kontrollvolumen mit Donor-Acceptor Notation.

Die mittlere Rechenzelle wird als Donor (Index „ D “) bezeichnet, die linke als Upstreamzelle (Index „ U “) und die rechte Zelle als Acceptor (Index „ A “) bezeichnet. Die Lage der Donor- und Acceptorzelle ergibt sich aus der Berücksichtigung der Strömungsrichtung, die in Abb. 3.1 durch einen Pfeil angedeutet ist. Für die Zellfläche zwischen der Donorzelle und der Acceptorzelle soll der Wert α_f berechnet werden.

Die grundlegende Idee der Donor-Acceptor Differenzierungsmethode ist, daß der Wert der Volumensfraktion in der Acceptorzelle α_A bei der Berechnung des Zellflächenwerts α_f verwendet wird. Die Berücksichtigung des Acceptorwerts wird als „**Downwinding**“ bezeichnet.

Das Prinzip des Downwindings wird anhand der in Abb. 3.1 dargestellten Konfiguration erläutert. Die Acceptorzelle enthält reine Luft ($\alpha_A = 0$), die Upwindzelle reines Wasser ($\alpha_U = 0$) und die Donorzelle ein Gemisch ($\alpha_D = 0.3$). Downwinding verlangt, daß während eines Zeitschritts Δt aus der Donorzelle das gleiche Fluid ausströmt, das momentan in der Acceptorzelle vorhanden ist, d.h. ($\alpha_f = \alpha_A$). Damit ändert sich während eines Zeitschritts der Luftanteil in der Acceptorzelle nicht, denn die Zelle enthält reine Luft und reine Luft strömt aus der Donorzelle zu, d.h. α_A bleibt konstant.

Die Donorzelle enthält jedoch beide Fluide und während eines Zeitschritts kann nicht mehr Luft ausströmen, als in der Donorzelle vorhanden und damit verfügbar ist. Die Verwendung des Acceptorwerts ohne Berücksichtigung der Fluidverfügbarkeit kann in unphysikalischen Werten für den Luftanteil resultieren, folgendes Zahlenbeispiel verdeutlicht dies.

Der Luftanteil in der Donorzelle betrage $\alpha_D^t = 0.3$ und das Zellvolumen $V_D = 1\text{cm}^3$. Der Volumenstrom, der in die Donorzelle ein- bzw. austritt, beträgt $\dot{V} = 1\text{cm}^3/\text{s}$ und der Zeitschritt $\Delta t = 1\text{s}$. Aus der Upwindzelle strömt reine Luft, d.h. $\alpha_{f_u} = 1$. Der Luftanteil zum Zeitpunkt $t = t + \Delta t$ berechnet sich gemäß Gl. 3.55 zu:

$$\alpha_D^{t+\Delta t} = \alpha_D^t - (\dot{V}\alpha_f - \dot{V}\alpha_{f_u})\Delta t = 1.3.$$

$$\rightarrow \rho_D^{t+\Delta t} = 1.3 \cdot 10 \text{kg/m}^3 + (-0.3) \cdot 800 \text{kg/m}^3 = -227 \text{kg/m}^3$$

Die Verwendung dieses Luftanteils führt auf einen negativen und damit unphysikalischen Wert für die Gemischdichte, bei der Berechnung des Zellflächenwerts α_f sind daher die folgenden Bedingungen zu berücksichtigen:

- **Begrenztheit:** Durch die Definition der Volumenfraktion α als volumetrischer Anteil eines Fluids im Gesamtvolumen einer Rechenzelle, wird der physikalische Wertebereich für α auf $0 \leq \alpha \leq 1$ begrenzt.
- **Verfügbarkeit:** Aus der Donorzelle kann innerhalb eines Zeitschritts nur soviel Volumen an Fluid ausströmen, wie in der Donorzelle vorhanden ist. Aus diesen Bedingungen kann der mögliche Wertebereich für den Zellflächenwert festgelegt werden.

Das Volumen an Luft, das innerhalb des Zeitschritts Δt aus der Donorzelle strömt, berechnet sich gemäß:

$$\begin{aligned} V_a &= u_f \Delta y \Delta t \alpha_f \\ V_a &= \frac{u_f \Delta t}{\Delta x} \Delta x \Delta y \alpha_f \\ V_a &= c_f V_D \alpha_f. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Mit c_f wird die Courant-Zahl $c_f = u_f \Delta t / \Delta x$ bezeichnet, $V_D = \Delta x \Delta y$ ist das Zellvolumen der Donorzelle. Analog ergibt sich für das Wasser:

$$V_l = c_f V_D (1 - \alpha_f). \quad (3.57)$$

Das Kriterium der Verfügbarkeit verlangt, daß nicht mehr Fluid ausströmt, wie in der Zelle vorhanden ist, d.h. $V_a \leq \alpha V_a$ und $V_l \leq (1 - \alpha) V_D$. Daraus wird die folgende Beziehung zur Begrenzung des Zellflächenwerts α_f abgeleitet:

$$\frac{\alpha_D}{c_f} - \frac{1 - c_f}{c_f} \leq \alpha_f \leq \frac{\alpha_D}{c_f} \quad (3.58)$$

- **Kontrolliertes Downwinding:** Die Verwendung des Acceptorwerts als Zellflächenwert $\alpha_f = \alpha_A$ verhindert das Aufweiten der Phasengrenze, kann jedoch zu unphysikalischen Werten für den Luftanteil führen. Die Kombination aus Downwinding mit dem Kriterium der Fluidverfügbarkeit wird als "kontrolliertes Downwinding" bezeichnet.

$$\alpha_f = \min \left\{ \max \left\{ \frac{\alpha_D}{c_f} - \frac{1 - c_f}{c_f}, \alpha_A \right\}, \frac{\alpha_D}{c_f} \right\}. \quad (3.59)$$

Gleichung 3.59 ist die Donor-Acceptor Formulierung zur Berechnung des Zellflächenwerts.

Die Donor-Acceptor Formulierung zur Berechnung des Zellflächenwerts garantiert die Begrenztheit nur für den eindimensionalen Strömungsfall, d.h. das Fluid strömt durch genau eine Zellfläche ein und durch genau eine Zellfläche wieder aus. Für den allgemeineren 2-D Strömungsfall kann die Begrenztheit nicht mehr garantiert werden, da die vier Zellflächenwerte α_{f_k} , ($k = e, w, n, s$) unabhängig und isoliert voneinander berechnet werden.

Ein Problem bei der Verwendung der Donor-Acceptor Approximation besteht darin, daß diese die Tendenz besitzt, jeden Gradienten zu einem Sprung aufzusteilen. Dies verursacht eine unphysikalische Aufsteilung des Interface, wenn dieses parallel zur Strömungsrichtung ausgerichtet ist.

Die Mehrdimensionalität der Strömung und die unphysikalische Aufsteilung des Interface werden bei der Entwicklung des im folgenden Abschnitt vorgestellten CICSAM (Compressive Interface Capturing) Verfahrens explizit berücksichtigt.

3.3.3.2 CICSAM Differenzierungsschema

Die Donor-Acceptor Approximation garantiert die Begrenztheit für den 1-D Strömungsfall. Um diese Eigenschaft auch im 2-D Fall zu gewährleisten, wird ein Zwei-Schritt Verfahren (explizit split operator) zur Berechnung des Volumenanteils zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ eingesetzt. Die Grundidee besteht darin, die für eindimensionale Strömungen hergeleitete Donor-Acceptor Approximation nacheinander für jede Koordinatenrichtung zu verwenden. In einem ersten Schritt wird das Fluid nur über den West- und Ostrand der Zelle konvektiert (in x -Richtung) und der Zwischenwert $\alpha^{t+0.5\Delta t}$ berechnet:

$$\alpha^{t+0.5\Delta t} = \alpha^t + \frac{1}{V} (\alpha_{f_e} F_{f_e} - \alpha_{f_w} F_{f_w}). \quad (3.60)$$

Mit diesen Zwischenwerten werden die Zellflächenwerte für Nord- und Südrand der Zelle berechnet und der zweite Schritt (in y -Richtung) ausgeführt:

$$\alpha^{t+\Delta t} = \alpha^{t+0.5\Delta t} + \frac{1}{V} (\alpha_{f_n}^{t+0.5\Delta t} F_{f_n} - \alpha_{f_s}^{t+0.5\Delta t} F_{f_s}). \quad (3.61)$$

Bei der Verwendung der Donor-Acceptor Approximation ist zu beachten, daß eine Courant-Zahl $c_f > 1$ in Verbindung mit dem expliziten Schema zu unphysikalischen Volumenanteilen

führt. Der numerische Zeitschritt Δt muß daher an die Forderung $c_f \leq 1$ angepaßt werden.

Zur Herleitung des CICSAM - Schemas wird im folgenden die von Leonard [98] eingeführte normierte Schreibweise für den Volumenanteil verwendet:

$$\tilde{\alpha}_D = \frac{\alpha_D - \alpha_U}{\alpha_A - \alpha_U} \quad (3.62)$$

$$\tilde{\alpha}_f = \frac{\alpha_f - \alpha_U}{\alpha_A - \alpha_U}. \quad (3.63)$$

Die Donor-Acceptor Approximation zur Berechnung des Zellflächenwerts lautet damit in der normierten Form:

$$\tilde{\alpha}_f = \min \left\{ 1, \frac{\tilde{\alpha}_D}{c_f} \right\}. \quad (3.64)$$

Die Kombination dieser Gleichung mit der Bedingung, daß $\tilde{\alpha}_f = \tilde{\alpha}_D$ für ($\tilde{\alpha}_D < 0$ oder $\tilde{\alpha}_D > 1$) ist als das Hyper-C Schema zur Berechnung des normierten Zellflächenwerts bekannt:

$$\alpha_{f_{CBC}} = \begin{cases} \min \left\{ 1, \frac{\tilde{\alpha}_D}{c_f} \right\} & , 0 \leq \tilde{\alpha}_D \leq 1 \\ \tilde{\alpha}_D & , \tilde{\alpha}_D \geq 1, \tilde{\alpha}_D \leq 0. \end{cases} \quad (3.65)$$

Zahlreiche numerische Studien beschäftigen sich mit dem Hyper-C Verfahren und zeigen, daß dieses Verfahren die Begrenztheit garantiert und die Aufweitung des Interface verhindert, d.h. das Interface wird maximal komprimiert. Hyper-C hat jedoch die Tendenz, alle Gradienten aufzusteilen, auch bei tangentialer Orientierung des Interface zur Strömungsrichtung. Dies führt zu einem stark welligen Verlauf des Interface [88] [99].

Leonard [98] untersucht das Aufsteilen bzw. Aufweiten eines Interface in Abhängigkeit des verwendeten Verfahrens zur Approximation des Zellflächenwerts α_f . Das Verfahren, das die besten Ergebnisse bei den Testfällen (Konvektion einer Sinus-Kurve, Halbellipse) erzielt hat, ist das ULTIMATE-QUICKEST (UQ) Verfahren. Die Beziehung zur Berechnung des Zellflächenwerts nach dem UQ-Verfahren lautet:

$$\alpha_{f_{UQ}} = \begin{cases} \min \left\{ \frac{8c_f + (1-c_f)(6+3\tilde{\alpha}_D)}{8}, \tilde{\alpha}_{f_{CBC}} \right\} & , 0 \leq \tilde{\alpha}_D \leq 1 \\ \tilde{\alpha}_D & , \tilde{\alpha}_D \geq 1, \tilde{\alpha}_D \leq 0. \end{cases} \quad (3.66)$$

Das CICSAM-Verfahren nach Ubbink [96] kombiniert das Hyper-C und das UQ-Verfahren:

$$\tilde{\alpha}_{f_{CICSAM}} = \gamma \alpha_{f_{CBC}} + (1 - \gamma) \alpha_{f_{UQ}}. \quad (3.67)$$

Der Gewichtungsfaktor γ basiert auf dem Winkel zwischen der Interfacenormalen und dem Vektor \vec{d}_f , der die Zellzentren der Donor und Acceptorzelle verbindet. Dieser Faktor wird zur linearen Umschaltung zwischen dem stark komprimierenden Hyper-C und dem weniger komprimierenden UQ-Schema verwendet.

$$\theta_f = \arccos \left| \frac{(\nabla\alpha)_D \cdot \vec{d}_f}{|(\nabla\alpha)_D| |\vec{d}_f|} \right|, \quad (3.68)$$

$$\gamma = \min \left\{ k_\gamma \frac{\cos(2\theta_f) + 1}{2}, 1 \right\}. \quad (3.69)$$

Zur Überprüfung der korrekten Programmierung des CICSAM-Schemas wird dieses zunächst anhand rein numerischer Testfälle verifiziert und dann zur Berechnung von realen Zweiphasenströmungen eingesetzt.

3.3.4 Void Fraction Transportgleichung - Kavitierende Strömungen

Die Diskretisierung der Void Fraction Transportgleichung erfolgt zunächst durch Integration der Gl. 3.13 und Anwendung des Gauss'schen Theorems:

$$\frac{\alpha^{t+\Delta t} - \alpha^t}{\Delta t} + \frac{1}{V} \sum_f \alpha_f F_f^t = \frac{n_0}{1 + n_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right). \quad (3.70)$$

Man beachte, daß die konvektiven Flüsse (analog zum Standard-Vof) mit dem zum Zeitpunkt t berechneten Volumenströmen gebildet werden. Im Unterschied zu Standard-VoF Anwendungen wird bei kavitierenden Strömungen die Konvektion einer Blasenwolke durch das Strömungsgebiet berechnet. Es existiert hier keine scharfe Phasengrenze, deren numerisch bedingte Aufweitung durch den Einsatz spezieller Diskretisierungsmethoden zu verhindern ist.

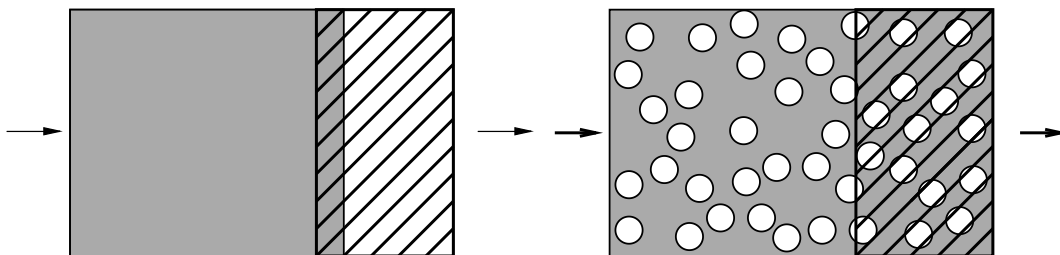


Abbildung 3.2: Verteilung der Gasphase in einer Rechenzelle. Links: VoF Anwendung, inhomogene Verteilung. Rechts: Kavitation: homogene Verteilung der Gasphase in der Flüssigkeit. Das jeweils schraffierte Volumen verläßt durch Konvektion die Zelle.

Abbildung 3.2 verdeutlicht den Unterschied zwischen einer VoF Anwendung (links) und Kavitation (rechts). Der Gasanteil (bei VoF als Luftanteil bezeichnet, bei Kavitation als Dampfanteil) in der Rechenzelle beträgt in beiden Fällen 30%, d.h. $\alpha = 0.3$. Im Falle der VoF-Anwendung liegt eine inhomogene Verteilung der Gasphase vor. Durch das Diskretisierungsschema wird aus dem Luftanteil die inhomogene Verteilung der Luft innerhalb der Zelle rekonstruiert. Im vorliegenden Fall verläßt daher zunächst reine Luft die Rechenzelle, bis die Zelle kein Luft mehr enthält und dann reines Wasser. Dieses leistet das im vorherigen Kapitel beschriebene CICSAM Schema.

Im Falle der Kavitation ist die Gasphase homogen in der Rechenzelle verteilt, es strömt ein Gemisch aus Blasen und Flüssigkeit aus der Zelle. Die Zusammensetzung des Fluids, das über die Zellgrenze konvektiert wird, entspricht der Zusammensetzung des Fluids, das sich momentan in der Zelle befindet. Dieser physikalische Sachverhalt wird numerisch durch Upwind Diskretisierung geleistet:

$$\alpha_{f,KAV} = \begin{cases} \alpha_P & : F_f > 0 \\ \alpha_N & : F_f < 0 \end{cases} . \quad (3.71)$$

3.3.5 Druck-Korrektur-Verfahren

Die Schwierigkeit bei der Simulation inkompressibler Fluide besteht darin, daß zwischen Druck und Dichte keine physikalische Kopplung in Form eines Zustandsgesetzes existiert. Gesucht ist daher ein Verfahren, mit dem ein Geschwindigkeitsfeld ermittelt werden kann, das die Bilanzgleichungen für Impuls und Kontinuität gleichzeitig erfüllt. Zur Berechnung von einphasigen inkompressiblen Strömungen wird hat sich das SIMPLE Druck-Korrektur-Verfahren etabliert, dessen Grundlagen im folgenden erläutert werden.

Zur Simulation von Zweiphasenströmungen mit starken Dichtegradienten (Standard VoF Anwendung) wird das SIMPLE Verfahren modifiziert, d.h. es wird von der Bilanzierung der Massenströme auf die Bilanzierung der Volumenströme umgestellt. In einer weiteren Ausbaustufe wird das SIMPLE-Verfahren an Zweiphasenströmungen mit Phasenübergang (Kavitation) angepaßt.

3.3.5.1 Das SIMPLE Verfahren

Die Abkürzung SIMPLE steht für Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations. Das Verfahren wurde von Patankar und Spalding [101] vorgeschlagen und arbeitet im wesentlichen nach dem Schätzen und Korrigieren Prinzip. Die Grundlagen des SIMPLE Verfahrens werden aus Ferziger & Perić [83] übernommen. Ausgangspunkt für das SIMPLE Druck-Korrektur-Verfahren sind die diskretisierten Impulsgleichungen, Gl. 3.47:

$$A_P^{u_i} u_{i,P}^{t+\Delta t} + \sum_N A_N^{u_i} u_{i,N}^{t+\Delta t} = Q_{u_i}^{t+\Delta t} - \left(\frac{\partial p^{t+\Delta t}}{\partial x_i} \right)_P V_P . \quad (3.72)$$

Ausgehend von den zum Zeitpunkt $t = t_0$ vorhandenen oder geschätzten Werten für u, v, p, ρ , werden die Koeffizienten A belegt,

$$A_P^{u_i} u_{i,P}^{m*} + \sum_N A_N^{u_i} u_{i,N}^{m*} = Q_{u_i}^{m-1} - \left(\frac{\partial p^{m-1}}{\partial x_i} \right)_P V_P . \quad (3.73)$$

Anstelle des Index $t + \Delta t$ (vgl. Gl. 3.72) wird hier der Iterationszähler m eingeführt, $u_{i,k}^{m*}$ entspricht einer momentanen Approximation der Geschwindigkeit $u_{i,k}^{t+\Delta t}$. Die nach der Lösung erhaltenen Geschwindigkeiten u_i^{m*} erfüllen in der Regel nicht die Kontinuität, es sind

Zwischenlösungen. Zur Herleitung der Korrekturen wird ein Geschwindigkeitsfeld (u^m, v^m) vorausgesetzt, das die Kontinuität erfüllt. Das Geschwindigkeitsfeld (u^m, v^m) wird durch eine Korrektur (u', v') aus der momentanen Approximation (u^{m*}, v^{m*}) erhalten:

$$u^m = u^{m*} + u' , \quad (3.74)$$

$$v^m = v^{m*} + v' , \quad (3.75)$$

$$p^m = p^{m-1} + p' . \quad (3.76)$$

Diese Beziehungen werden in Gl.3.73 eingesetzt und man erhält die Beziehung zwischen der Korrektur des Drucks p' und der Geschwindigkeitskorrektur u'_i :

$$u'_{i,P} = -\frac{V_P}{A_P^{u_i}} \sum_k A_k^{u_i} u'_{i,k} - \frac{V_P}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_P . \quad (3.77)$$

Diese Beziehung wird zur Herleitung der Druck-Korrekturgleichung (DKG) in die Kontinuität eingesetzt, der Summenterm in Gl.3.77 wird im Rahmen des SIMPLE Verfahrens nicht berücksichtigt.

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0} + \frac{\partial(\rho u_i^m)}{\partial x_i} = 0 \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i^{m*} + \rho u'_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\rho V_P}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right) \right]_P = \left[\frac{\partial(\rho u_i^{m*})}{\partial x_i} \right]_P . \quad (3.80)$$

Diese Gleichung wird nach der Finite Volumen Methode diskretisiert, d.h. zunächst über ein Volumen integriert und die Volumenintegrale durch Anwendung der Integralsätze in Flächenintegrale überführt. Diese werden dann durch die Flüsse über die Zellflächen approximiert. Da der Zentralkoeffizient $A_P^{u_i}$ für ein Kontrollvolumen im Innern des Rechengebiets für alle Komponenten u_i gleich ist, wird dieser im folgenden durch A_P^u ersetzt.

$$\sum_f \left(\frac{\rho V}{A_P^u} \right)_f \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_f \cdot \vec{S}_f = \sum_f (\rho u_i^{m*})_f \cdot \vec{S}_f = \sum_f \rho_f F_f^{m*} . \quad (3.81)$$

Die Zellflächenwerte werden mit Ausnahme des Druckkorrekturterms durch lineare Interpolation gemäß Gl. 3.24 berechnet. Insbesondere ist hier die Dichte konstant, d.h. $\rho_f = \rho$. Bei Zweiphasenströmungen ist dies nicht der Fall und diesem Punkt kommt zentrale Bedeutung zu. Dieser Aspekt wird im folgenden Kapitel nochmals aufgegriffen.

Zur weiteren Diskretisierung wird der Gradiententerm in Gl. 3.81 durch Anwendung von Gl. 3.29 im lokalen Koordinatensystem ausgewertet. Der tangentielle Gradient wird nicht berücksichtigt, da nur der Druckgradient normal zur Zellfläche einen Beitrag zum Massenstrom liefert.

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_f \cdot \vec{S}_f = \left(\frac{\partial p'}{\partial n} \right)_f \vec{n} \cdot S_f \approx \frac{p'_N - p'_P}{\vec{d}_f \cdot \vec{S}_f} S_f^2 . \quad (3.82)$$

Die Volumenströme F_f werden durch Interpolation der Geschwindigkeiten in den Zellmittelpunkten berechnet. Dadurch können Oszillationen im Druck und Geschwindigkeitsfeld auftreten, die in der Regel zur Divergenz des Verfahrens führen. Hier wurde die Erfahrung gemacht, daß Oszillationen a) immer auftreten und b) mit Sicherheit zur Divergenz führen, wenn diese nicht durch numerische Verfahren vermieden werden. Als sehr effektiv hat sich das folgende Verfahren nach Ferziger & Perić [83] herausgestellt, das im Rahmen dieser Arbeit eingesetzt wird.

$$F_{f,K}^{m*} = F_f^{m*} - \left(\frac{V}{A_P^u} \right)_f \frac{S_f}{\vec{d}_f \cdot \vec{n}} ((p_N - p_P) - (\nabla P)_f \cdot \vec{d}_f) . \quad (3.83)$$

Unter Verwendung der Gl. 3.82 und der korrigierten Volumenströme Gl. 3.83 wird die Druck-Korrekturgleichung in Abhängigkeit des Wertes p'_P im Zellmittelpunkt und den Mittelpunktwerten p'_N der Nachbarzellen formuliert:

$$\sum_N \underbrace{\left(\frac{\rho V}{A_P^u} \right)_f \frac{(p'_N - p'_P)^m}{\vec{d}_f \cdot \vec{S}_f} S_f^2}_{\rightarrow A_P, A_N} = S_{DKG} , \quad (3.84)$$

mit

$$S_{DKG} = \sum_f (\rho_f F_f^{m*})^{m-1} - \left(\frac{\rho V}{A_P^u} \right)_f \frac{S_f^2}{\vec{d}_f \cdot \vec{S}_f} \left((p_N - p_P) - (\nabla P)_f \cdot \vec{d}_f \right)^{m-1} .$$

Zur Vereinfachung der Matrixbelegung wird der Quellterm explizit behandelt und aus Werten der vorherigen Iteration ($m - 1$) berechnet. Gleichung 3.84 lautet in Matrizen-schreibweise:

$$A_P p'_P + \sum_N A_N p'_N = S_{DKG} . \quad (3.85)$$

Die Lösung der Druck-Korrektur-Gleichung erfolgt hier mit dem SIP Verfahren nach Stone [102]. Danach wird das Druck- und Geschwindigkeitsfeld aktualisiert, zwischen der Druck-korrektur p' und der Geschwindigkeitskorrektur u'_i , bzw. der Korrektur der Volumenströme F'_f besteht der Zusammenhang:

$$u'_i = -\frac{V_P}{A_P^u} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_P , \quad (3.86)$$

$$F'_f = -\left(\frac{V}{A_P} \right)_f S_f^2 \left(\frac{(p'_N - p'_P)}{\vec{d}_f \cdot \vec{S}_f} \right) . \quad (3.87)$$

Die nach der Korrektur erhaltenen Geschwindigkeiten erfüllen zwar die Kontinuität, nicht aber die Impulsbilanz. Das Verfahren muß daher mehrfach (iterativ) angewandt werden, in einem Ablaufplan stellt sich das SIMPLE Verfahren wie folgt dar:

1. Abschätzen des Druck-und Geschwindigkeitsfelds $\Rightarrow p, u, v$
2. Lösung der Impulsgleichung (Gl. 3.73) $\Rightarrow u^{m*}, v^{m*}$
3. Lösung der Druck-Korrektur-Gleichung (Gl. 3.80) $\Rightarrow p'$
4. Aktualisieren des Druckfelds (Gl. 3.76) $\Rightarrow p^m$
5. Aktualisieren der Geschwindigkeiten (Gl. 3.86) $\Rightarrow u^m, v^m$
6. Falls Konvergenz nicht erreicht wurde,
Abschätzen des neuen Druckfelds mit $p = p^m$
gehe zu 2.

3.3.5.2 Das SIMPLE Verfahren für VoF Anwendungen

Die Zweiphasenströmung wird hier als die Strömung eines Fluids mit variabler Dichte behandelt, die Kontinuität lautet:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} = 0 . \quad (3.88)$$

Diese Gleichung ist formal identisch mit der Kontinuität für ein kompressibles Medium (Gas), mit dem Unterschied, daß für ein Fluid mit variabler Dichte kein Zustandsgesetz $\varrho = f(p, T)$ existiert. Auf genau dieser Druck-Dichte Kopplung basiert die Standard SIMPLE Erweiterung für kompressible Strömungen und kann daher zur Berechnung eines Fluids variabler Dichte nicht verwendet werden.

Im folgenden wird zunächst der erste Versuch beschrieben, eine Zweiphasenströmung zu berechnen. Die Herleitung der Druck-Korrektur erfolgt analog zum SIMPLE Verfahren, es wird jedoch die Kontinuität Gl. 3.88 verwendet.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\rho V_P}{A_P^u} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right) \right]_P = \left[\frac{\partial(\rho u_i^{m*})}{\partial x_i} \right]_P + \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.89)$$

Nach erfolgter Diskretisierung erhält man eine Druck-Korrekturgleichung analog zu Gl. 3.84:

$$\sum_N \left(\frac{\rho V}{A_P^u} \right)_f \frac{(p'_N - p'_P)^m}{\vec{d}_f \cdot \vec{S}_f} S_f^2 = S_{DKG} - \frac{(\rho^{t+\Delta t} + \rho^t)}{\Delta t} V_P. \quad (3.90)$$

Der Zellflächenwert ρ_f wird aus α_f , die zeitliche Ableitung der Dichte wird unter Verwendung von Gl. 3.2 aus den Werten $\alpha^{t+\Delta t}, \alpha^t$ berechnet. Als Testfall wurde die reibungsfreie Bewegung eines Würfels durch einen 2-D ebenen Kanal berechnet. Die analytische Lösung dieses Problems ist $p = \text{konst}$, $u = \text{konst}$, $v = 0$ (d.h. divergenzfrei) und der Würfel wird nicht deformiert. Dieser Testfall ist in Abb. 3.3 dargestellt.

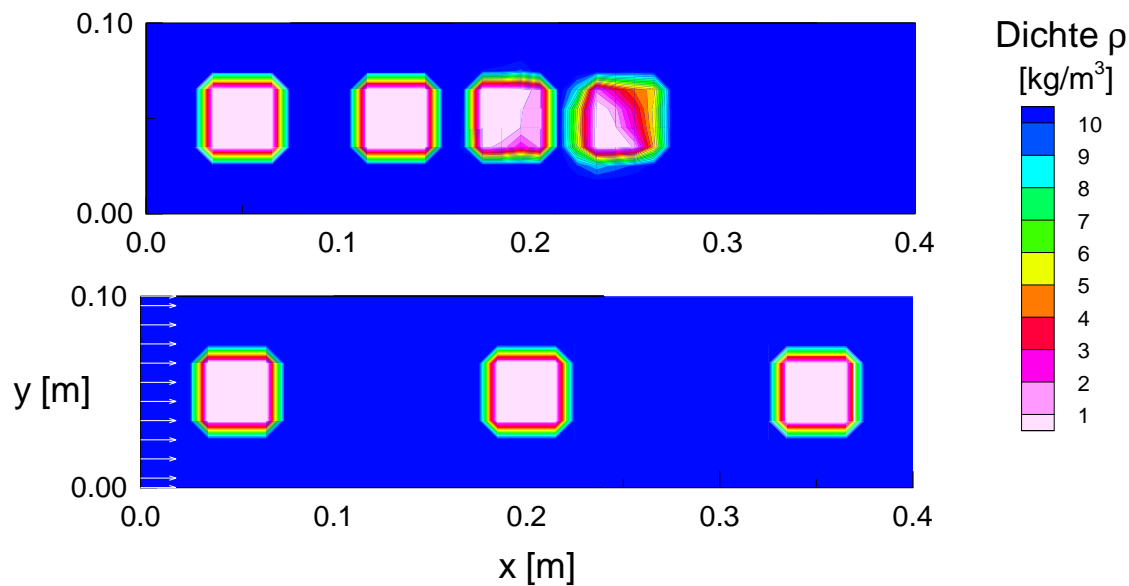


Abbildung 3.3: Berechnung der Bewegung eines Würfels durch einen Kanal unter Verwendung verschiedener Druck-Korrekturgleichungen. Oben: Standard SIMPLE, Aufschaukeln eines numerischen Fehlers. Unten: SIMPLE-VoF, kein Aufschaukeln und keine Deformation der Phasengrenze.

Die Geschwindigkeit am Eintritt beträgt $U = 0.1 \text{ m/s}$, der Kanal ist 0.1 m hoch und 0.4 m lang und wird durch 10×40 Zellen diskretisiert. Der Zeitschritt wird mit $\Delta t = 0.05 \text{ s}$ vorgegeben. Anhand des Residuenverlaufs konnte festgestellt werden, daß sich ein numerischer

Fehler aufschaukelt, der nach ca. 20 Zeitschritten zu einem relativen Fehler im Volumenstrom von 10^{-6} führt. Nach ca. 40 Iterationen ist der Würfel deutlich deformiert, Abb. 3.3 oben, und die Rechnung wird abgebrochen. Bei einem Dichteverhältnis von 1: 1000 wird der Würfel bereits nach wenigen Zeitschritten deformiert.

Anzumerken ist, daß die Kontinuität zu jedem Zeitpunkt der Rechnung erfüllt ist. Dies garantiert jedoch nicht, daß das Strömungsfeld divergenzfrei ist.

Eine effiziente Methode das Aufschaukeln dieses numerischen Fehlers zu vermeiden wird im folgenden vorgestellt und hier als SIMPLE-VoF bezeichnet. Bei Standard VoF Anwendungen findet kein Phasenübergang statt, daher ist das Strömungsfeld divergenzfrei [96, 85]. Dies ist eine mathematisch exakte Beschreibung des Problems, die Kontinuität reduziert sich gegenüber Gl.3.88 auf:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.91)$$

Analog zum SIMPLE Verfahren werden die Beziehungen für die Druck- und Geschwindigkeitskorrekturen hergeleitet:

$$u'_i = -\frac{V_P}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_P. \quad (3.92)$$

Die Kombination der Kontinuität Gl.3.91 mit den dem Ansatz für die Korrekturen Gl.3.92 führt auf die zu lösende Druck-Korrektur-Gleichung (SIMPLE-VoF), in der die Dichte als primitive Variable nicht mehr enthalten ist:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{V_P}{A_P^u} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right) \right]_P = \left[\frac{\partial u_i^{m*}}{\partial x_i} \right]_P. \quad (3.93)$$

Die Verwendung dieser Gleichung bietet den Vorteil, daß nun direkt die Divergenzfreiheit des Strömungsfelds gefordert wird. Das Wechselspiel zwischen zeitlicher Ableitung der Dichte und dem konvektiven Term, das letztlich die Deformationen in Abb.3.3 verursacht hat, ist damit ausgeschlossen. Unter Verwendung der SIMPLE-VoF Gleichung tritt keine Deformation der Phasengrenze auf, das Druck- und Geschwindigkeitsfeld stimmt exakt mit der analytischen Lösung überein, der Würfel wird nicht deformiert, vgl. Abb.3.3 unten. Das Dichteverhältnis ist bei dem SIMPLE-VoF Verfahren nicht mehr von Bedeutung, dieser Testfall konnte auch mit einem Verhältnis von $\rho_a/\rho_l = 1 : 10000$ problemlos berechnet werden.

Nach Lösung der Druck-Korrektur-Gleichung wird das Druckfeld und Geschwindigkeitsfeld bzw. die Volumenströme aktualisiert. Das Verfahren muß ebenfalls mehrfach angewandt werden, der Ablaufplan entspricht dem des SIMPLE Verfahrens.

3.3.5.3 Das SIMPLE Verfahren für Kavitation

Zur Herleitung der Druck-Korrektur-Gleichung wird die Kontinuität in der für kavitierende Strömungen angepaßten Form verwendet:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{1 - \alpha} \frac{d\alpha}{dt}. \quad (3.94)$$

Analog zum SIMPLE Verfahren wird die Beziehung zwischen Druck und Geschwindigkeitskorrektur hergeleitet,

$$u'_i = -\frac{V_P}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_P, \quad (3.95)$$

und in Kontinuität Gl.3.94 eingesetzt:

$$\frac{\partial (u_i^{m*} + u'_i)}{\partial x_i} = \frac{1}{1 - \alpha} \frac{d\alpha}{dt}, \quad (3.96)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{V_P}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right) \right]_P = -\frac{1}{1 - \alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \left[\frac{\partial u_i^{m*}}{\partial x_i} \right]_P. \quad (3.97)$$

Nach erfolgter Diskretisierung erhält man die Druck-Korrekturgleichung für kavitierende Strömungen:

$$\sum_N \left(\frac{V}{A_P^u} \right)_f \frac{(p'_N - p'_P)^m}{\vec{d}_f \cdot \vec{S}_f} S_f^2 = S_{DKG} - \frac{1}{1 - \alpha} \frac{d\alpha}{dt} V_P. \quad (3.98)$$

Die totale Ableitung des Dampfanteils nach der Zeit wurde bereits in Kapitel 2.3.3 (Gl.2.17) behandelt und man erhält:

$$\sum_N \left(\frac{V}{A_P^u} \right)_f \frac{(p'_N - p'_P)^m}{\vec{d}_f \cdot \vec{S}_f} S_f^2 = S_{DKG} - \underbrace{\frac{n_0}{1 + n_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right)}_{S_{KAV}} V_P. \quad (3.99)$$

In einem nächsten Schritt wird der Quellterm S_{KAV} durch Anwendung der Kettenregel umformuliert. Zur Berechnung des Wachstums bzw. Kollaps wird die Beziehung nach Rayleigh (Gl.2.33) verwendet. Um beim Kollaps einen negativen Wurzelausdruck zu vermeiden, wird das Vorzeichen (VZ) abgespalten.

$$S_{KAV} = \frac{n_0}{1 + n_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} \cdot 4\pi R^2 \frac{dR}{dt} V_P \quad (3.100)$$

$$= VZ \cdot \frac{n_0}{1 + n_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} \cdot 4\pi R^2 \sqrt{\frac{2|p_{sat}(T_B) - p_P|}{3\rho_l}} V_P, \quad (3.101)$$

mit

$$VZ = \frac{p_{sat}(T_B) - p_P}{|p_{sat}(T_P) - p_P| + small} . \quad (3.102)$$

Der Quellterm S_{KAV} ist damit explizit eine Funktion des Drucks p_P . Dies erschwert die Lösung der SIMPLE-KAV Druck-Korrekturgleichung erheblich, d.h. ohne weitere Maßnahmen konnte das Verfahren nicht zur Konvergenz gebracht werden.

Dieser Sachverhalt wurde ausgiebig an einer kavitierenden Düsenströmung untersucht. Die Ursache für die Divergenz des Verfahrens wird anhand folgenden Beispiels erläutert. Betrachtet wird ein Rechenzelle, deren Druck p_P^m unterhalb des Dampfdrucks liegt. Es setzt daher Blasenwachstum ein, der Quellterm S_{KAV}^m ist positiv. Dieser hat einen massiven Druckanstieg p'_P in der betrachteten Rechenzelle zur Folge. Es wird ein Druck p^{m+1} berechnet, der weit oberhalb des Dampfdrucks liegt. Im nächsten Iterationsschritt setzt daher Kollaps ein. Der Quellterm S_{KAV}^{m+1} ist negativ und hat zur Folge, daß beim nächsten Iterationsschritt eine negative Druckkorrektur berechnet wird und der Druck p^{m+2} in der Zelle weit unter den Dampfdruck absinkt, weit tiefer als der Druck p_P^m zu Beginn der Iteration.

Als effiziente Lösung dieses Problems hat sich ein neu entwickeltes Verfahren bewährt, das die Änderung des Quellterms bei der Lösung der Druck - Korrekturgleichung mitberücksichtigt. Ist der Quellterm positiv, wird ein positives p'_P berechnet, d.h. der Druck p_P wird angehoben und die treibende Druckdifferenz $p_{sat}(T_P)$ damit reduziert. Die Reduktion des Quellterms durch ein positives p'_P kann durch die partielle Ableitung des Quellterms nach dem Druck approximiert werden:

$$\frac{\partial S_{KAV}}{\partial p} = \frac{n_0}{1 + n_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} \cdot 4\pi R^2 \frac{\partial \dot{R}}{\partial p} V_P \quad (3.103)$$

$$= \frac{n_0}{1 + n_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} \cdot 4\pi R^2 \frac{\partial \dot{R}}{\partial p} V_P . \quad (3.104)$$

Die Berechnung der partiellen Ableitung der Wachstumsgeschwindigkeit nach dem Druck wird zunächst für Wachstum und Kollaps getrennt durchgeführt:

$$\frac{\partial \dot{R}}{\partial p} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial p} \left(\sqrt{\frac{2}{3\varrho_l}(p_{sat} - p)} \right) & = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3\varrho_l}(p_{sat} - p)}} \frac{2}{3\varrho_l} (-1) \quad \text{Wachstum} \\ \frac{\partial}{\partial p} \left(-\sqrt{\frac{2}{3\varrho_l}(p - p_{sat})} \right) & = \frac{-1}{\sqrt{\frac{2}{3\varrho_l}(p - p_{sat})}} \frac{2}{3\varrho_l} (+1) \quad \text{Kollaps} \end{cases} . \quad (3.105)$$

Sowohl für Wachstum als auch Kollaps hat eine Druckerhöhung $p' > 0$ eine Reduktion der Geschwindigkeit \dot{R} zur Folge. Dies ist unmittelbar einsichtig für das Blasenwachstum, denn die treibende Druckdifferenz wird reduziert, $(p_{sat} - (p + p')) < (p_{sat} - p)$. Beim Kollaps bewirkt eine Druckerhöhung eine betragsmäßig größere Kollaps geschwindigkeit. Aufgrund

des negativen Vorzeichens von \dot{R} wird die Geschwindigkeit reduziert und die obige Aussage wird bestätigt.

Mit Hilfe der Gl. 3.105 kann die Änderung des Quellterms in Abhängigkeit der Druck-Korrektur p'_P berechnet werden:

$$S_{KAV}^K = S_{KAV} + \frac{\partial S_{KAV}}{\partial p} p'_P . \quad (3.106)$$

Damit lautet die Druck-Korrekturgleichung, die zur Berechnung kavitierender Strömungen eingesetzt wird:

$$\sum_N \left(\frac{V}{A_P^u} \right)_f \frac{(p'_N - p'_P)^m}{\vec{d}_f \cdot \vec{S}_f} S_f^2 = S_{DKG} - (S_{KAV} + \frac{\partial S_{KAV}}{\partial p} p'_P) . \quad (3.107)$$

Die Korrektur des Quellterms S_{KAV} wird implizit behandelt und Gl. 3.107 lautet in Matrixschreibweise:

$$\left(A_P + \frac{\partial S_{KAV}}{\partial p} \right) p'_P + \sum_N A_N p'_N = S_{DKG} - S_{KAV} . \quad (3.108)$$

Nach Lösung der Druck-Korrektur-Gleichung wird das Druckfeld und Geschwindigkeitsfeld bzw. die Volumenströme aktualisiert. Das Verfahren muß ebenfalls mehrfach angewandt werden, der Ablaufplan entspricht dem des SIMPLE Verfahrens.

Anmerkungen:

- Zur Berechnung des Quellterms wird der neue Druck $p^{t+\Delta t}$ bzw. dessen momentane Approximation p^m verwendet. Dies ist von großer Bedeutung für die Konvergenz des Verfahrens. Die Verwendung des Drucks p^t zur Berechnung des Quellterms führt nach wenigen Zeitschritten zur Divergenz.
- Bei der Berechnung der partiellen Ableitung des Quellterms nach dem Druck ist zu beachten, daß $(\partial S_{KAV}/\partial p) \rightarrow \infty$, für $p \rightarrow p_{sat}$. Diese Singularität wird dadurch vermieden, indem im Quellcode $|p_{sat} - p| > \epsilon$, mit $\epsilon = 10^{-10}$ Pa durch eine Abfrage sichergestellt wird.

3.4 Programmablauf für die Berechnung von Zweiphasenströmungen

In den vorherigen Kapiteln wurde die Diskretisierung der Transportgleichungen vorgestellt und die Kopplung zwischen Druck- und Geschwindigkeitsfeld erläutert. Es ist jetzt möglich,

den gesamten Programmablauf zur Berechnung einer Zweiphasenströmung ohne Phasenübergang, Abb.3.4 und einer kavitierenden Strömung, Abb.3.5, als Ablaufplan darzustellen. Für die Berechnung der Impulsgleichung Gl. 3.46 wird die Dichte, sowie deren Zellflächenwerte benötigt, Gl. 3.35. Diese werden erhalten, in dem die Transportgleichung für den Luftanteil bzw. Dampfanteil mit den Volumenströmen vom vorherigen Zeitschritt gelöst wird.

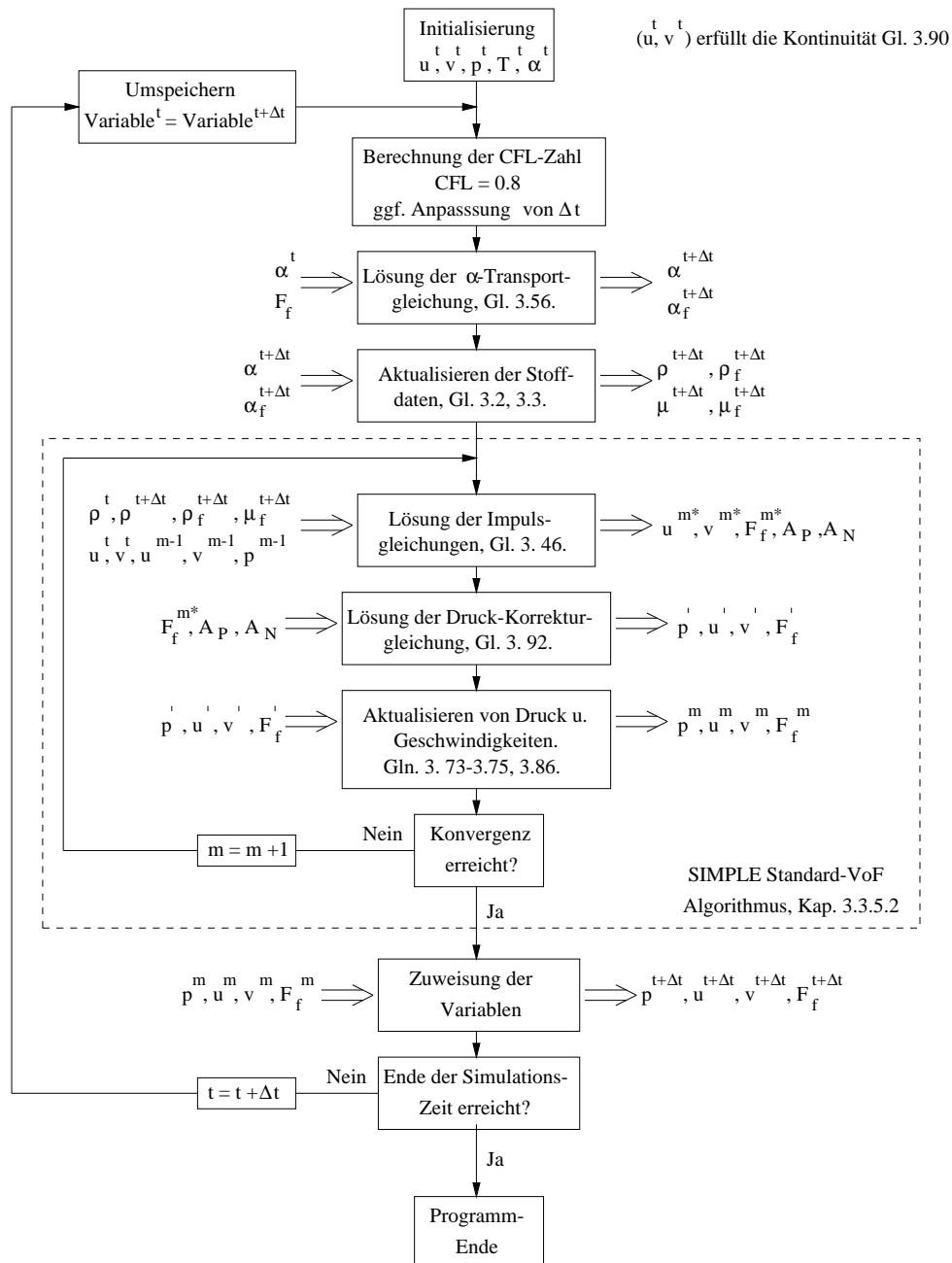


Abbildung 3.4: Programmablauf zur Berechnung instationärer Zweiphasenströmungen ohne Phasenübergang (Standard-VoF Anwendungen).

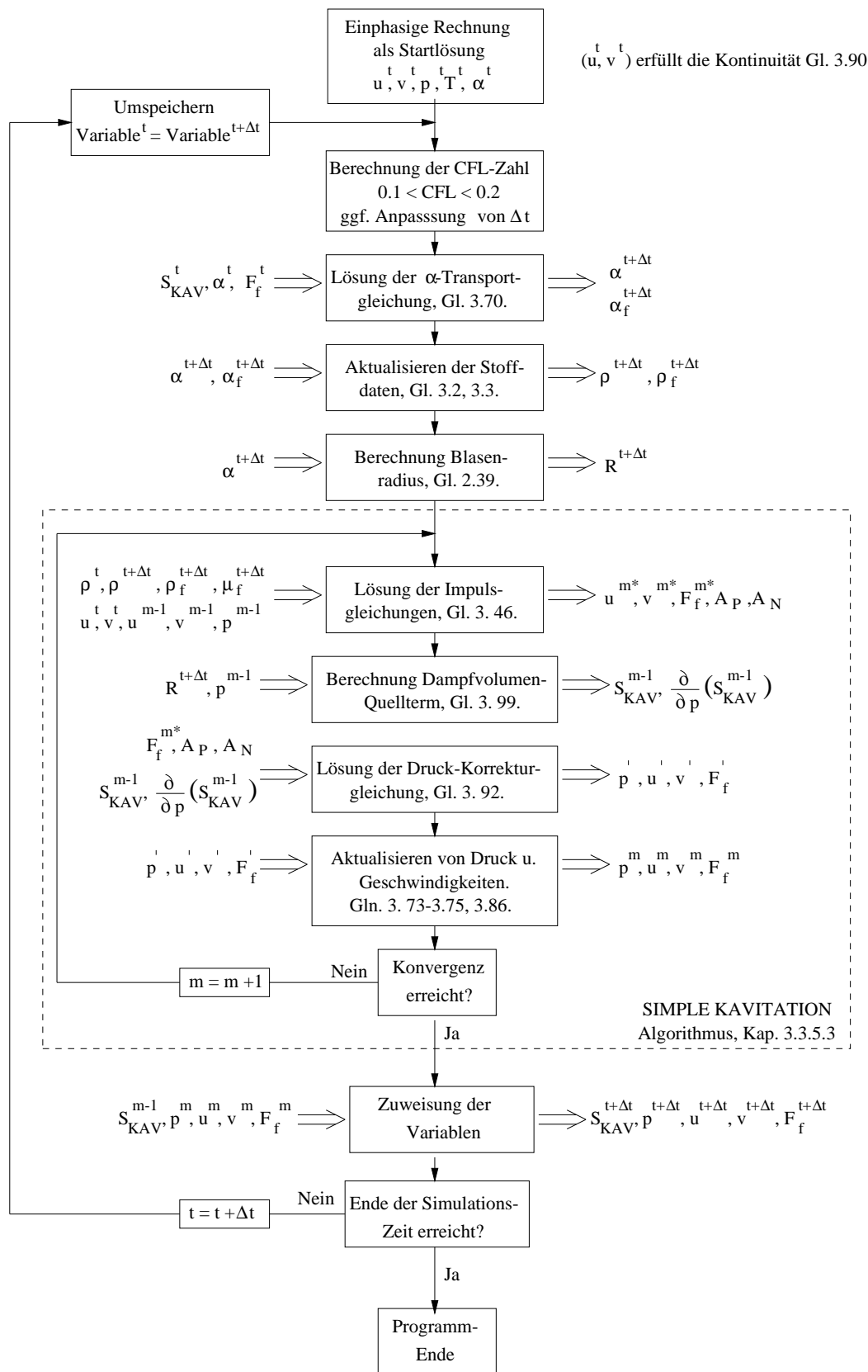


Abbildung 3.5: Programmablauf zur Berechnung instationär kavitierender Strömungen.

4 Volume-of-Fluid Anwendungen

Zur Überprüfung der korrekten Programmierung des in Abschnitt 3.3.3.2 vorgestellten CICSAM-Schemas wird dieses zunächst anhand rein numerischer Testfälle verifiziert und dann zur Berechnung von realen Zweiphasenströmungen eingesetzt. Grundsätzlich wird das CICSAM-Schema immer dann eingesetzt, wenn die Strömung zweier nicht-mischbarer Fluide berechnet werden soll und zwischen den Fluiden ein scharfes Interface existiert. Es liegt daher eine inhomogene Verteilung der beiden Fluide in der Rechenzelle vor, vgl. hierzu auch Abb. 3.2.

4.1 Anwendungen der Volume-of-Fluid Methode - numerische Testfälle

Im folgenden werden die Testfälle Konvektion und Rotation eines Fluidvolumens beschrieben. Gegenstand der Untersuchung ist hier die Aufweitung bzw. Deformation der Phasengrenze durch numerische Diffusion.

4.1.1 Konvektion eines quadratischen Fluidvolumens

Dieser Testfall befaßt sich mit der Konvektion eines quadratischen Fluidvolumens in einem schrägen Geschwindigkeitsfeld. Das Rechengitter besteht aus 100x100 äquidistanten Zellen, die Geschwindigkeitsvektoren bilden ein Winkel von 45° mit den Gitterlinien. Das Geschwindigkeitsfeld ist „gefroren“, d.h. die Impulsgleichungen und die Druck-Korrektur-Gleichung werden nicht gelöst.

Abbildung 4.1.1 zeigt das Rechengebiet mit den Geschwindigkeitsvektoren, die Ausgangskontur des Fluidvolumens und dessen Endkontur nach dem konvektiven Transport. Das Fluidvolumen wird innerhalb von 80 Zeitschritten von links unten nach rechts oben konvektiert. Aus der Abbildung ist zu erkennen, daß das Fluidvolumen nur unwesentlich deformiert wird. Abgesehen von der Rundung der Ecken, ist die Phasengrenze genau eine Rechenzelle breit und stellt damit die geringe numerische Diffusion, das ist die Aufweitung bzw. Verschmierung der Phasengrenze über mehrere Zellen, unter Beweis.

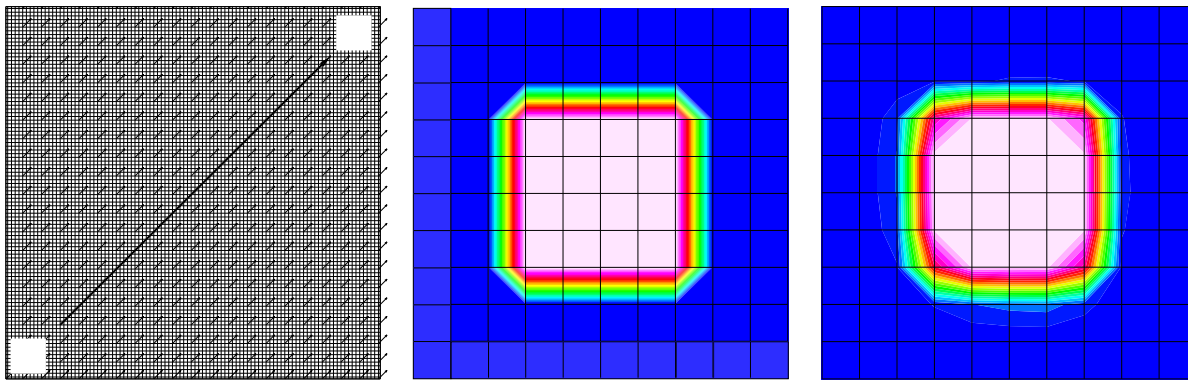


Abbildung 4.1: Konvektion eines quadratischen Fluidvolumens in einem schrägen Geschwindigkeitsfeld. Links: Rechengebiet. Mitte: Anfangskontur des Fluidvolumens. Rechts: Endkontur.

4.1.2 Rotation eines rechteckigen Fluidvolumens

Betrachtet wird ein rechteckiges Fluidvolumen, das um dessen Zentrum rotiert. Dieser Testfall stellt hohe Ansprüche an das Differenzierungsverfahren, da durch die Rotation des Fluidvolumens die Phasengrenze mit den Gitterlinien jeden beliebigen Winkel einschließt. In Abhängigkeit des Winkels muß dann von einem stark komprimierenden Schema (Hyper-C) auf ein weniger komprimierendes Schema (UQ) umgeschaltet werden, um die Entstehung einer welligen Phasengrenze zu vermeiden. Andererseits führt die Verwendung des UQ Schemas zu numerischer Diffusion, d.h. die Phasengrenze wird aufgeweitet. In Abb. 4.1.2 ist die Kontur der Phasengrenze im Initialisierungszustand, nach einer halben Umdrehung und nach einer vollen Umdrehung dargestellt. Das Rechengebiet wird durch jeweils 100 Zellen in horizontaler und vertikaler Richtung äquidistant diskretisiert. Es ist eine geringe Welligkeit der Phasengrenze zu erkennen, die auf die Verwendung des stark komprimierenden Hyper-C Schemas zurückzuführen ist. Die Deformation des rechteckigen Fluidvolumens ist dennoch sehr gering und die Aufweitung der Phasengrenze wird vermieden.

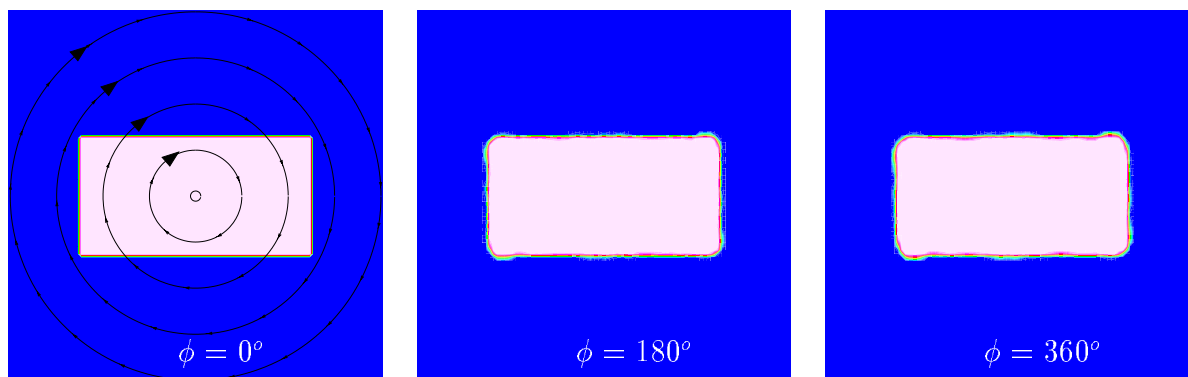


Abbildung 4.2: Rotation eines rechteckigen Fluidvolumens. Links: Ausgangskontur. Mitte: Kontur nach einer halben Umdrehung. Rechts: Kontur nach einer vollen Umdrehung.

Diese numerischen Testfälle zeigen, daß das CICSAM-Differenzierungsschema in der Lage ist, die Bewegung eines Fluidvolumens durch Konvektion bzw. Rotation in einem Strömungsfeld zu verfolgen und dabei die Schärfe der Phasengrenzfläche zu erhalten. Diese Eigenschaften bilden die Grundlage zur Simulation realer Zweiphasenströmungen ohne Phasenübergang.

4.2 Anwendungen der Volume-of-Fluid Methode - reale Strömungsprobleme

4.2.1 Wasserwelle im Tank - Sloshing

Die Bewegung einer Welle mit kleiner Amplitude unter dem Einfluß der Schwerkraft wird betrachtet. Die Berechnung dieses Problems stellt für die Zweiphasen-Strömungsnumerik einen wichtigen Testfall dar, da zum einen

- die geringe numerische Dissipation des Verfahrens und zum anderen
- die Fähigkeit des Verfahrens, konservativ Lageenergie in Bewegungsenergie und umgekehrt umzuwandeln,

unter Beweis gestellt wird. Die betrachtete Konfiguration ist in Abb. 4.3 dargestellt. Ursprünglich befindet sich das System in Ruhe, die mittlere Tiefe des Fluids beträgt $h=50\text{mm}$, die Oberfläche wird durch eine halbe Cosinus-Welle der Amplitude $A=5\text{mm}$ beschrieben. Der Tank ist 100mm breit und 65mm hoch und nach oben offen, d.h. es herrscht ein konstanter Druck. Die Oberflächenspannung kann aufgrund der sehr geringen Krümmung vernachlässigt werden und beide Fluide werden als reibungsfrei angesehen. Die Dichte des Fluids 1 (Wasser) beträgt $\rho_1 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, die des Fluids 2 (Luft) $\rho_2 = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Das Rechengebiet wird durch 160 Zellen in horizontaler Richtung, vertikal durch 104 Zellen diskretisiert. Der verwendete Zeitschritt beträgt $\Delta t = 1\text{ms}$. Das Fluid bewegt sich allein unter Einfluß der Schwerkraft ($g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Die theoretische Periodendauer der Grundschiwingung beträgt nach Raad et al. [103]:

$$T = 2\pi \sqrt{gk \tanh(kh)} = 0.3739\text{s} , \quad (4.1)$$

mit k =Wellenzahl und h = mittlere Tiefe des Fluids.

Oberschwingungen sind ebenfalls in diesem System präsent, die wichtigste ist die erste Oberschwingung mit halber Periodendauer. Höhere Oberschwingungen werden zunehmend unwichtiger und beeinflussen die Grundschiwingung kaum. Daher muß die Auslenkung der Welle zu ungeraden Perioden ($t = T, 3T, \dots$) übereinstimmen, analog gilt dies für die Auslenkung zu geraden Perioden ($t=2T, 4T, \dots$), nach Tadjbakhsh & Keller [104].

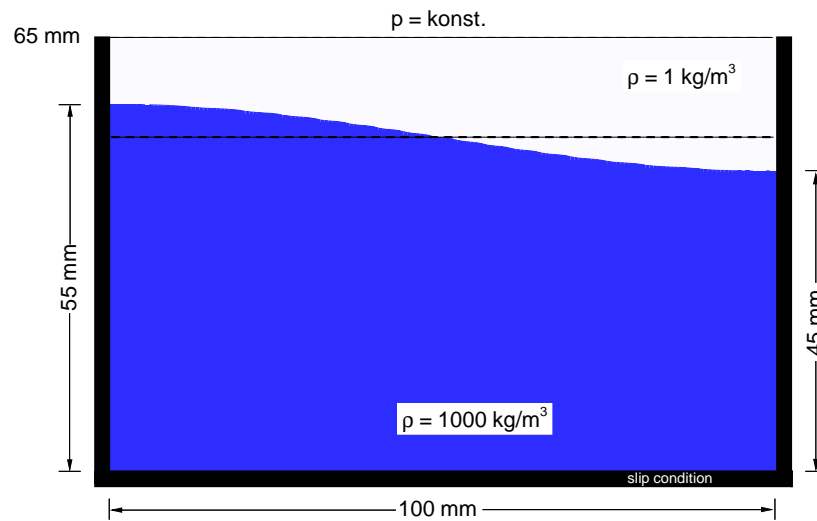


Abbildung 4.3: Ausgangskontur der Welle und Geometriedaten des Wassertanks.

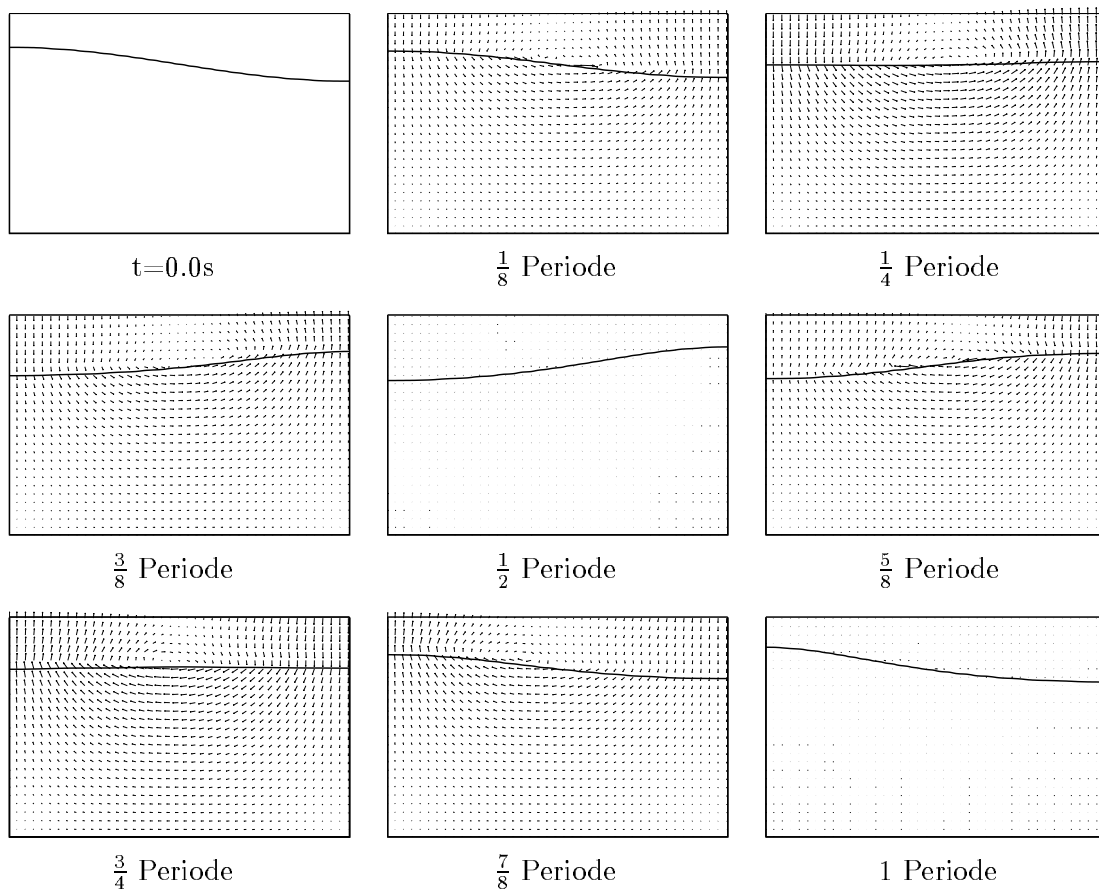


Abbildung 4.4: Kontur der Welle und Geschwindigkeitsvektoren zu verschiedenen Zeitpunkten. Zeitinkrement $\Delta t = 1/8$ der Periodendauer.

Abbildung 4.4 zeigt die Position der Welle sowie Geschwindigkeitsvektoren zu verschiedenen Zeiten t . Zum Zeitpunkt $t=0$ s befindet sich das System in Ruhe. Nach einem Viertel der Periodendauer T wurde die Lageenergie des Systems in kinetische Energie umgewandelt, die Geschwindigkeiten sind daher maximal. Nach der Hälfte der Schwingungsdauer wurde die kinetische Energie wieder in Lageenergie überführt, die Geschwindigkeiten sind annähernd Null. Die weiteren Abbildungen zeigen die Welle auf ihrem Weg von bzw. zurück zur Ausgangslage.

Abbildung 4.5 zeigt die Position der Welle als Funktion der Zeit an der linken Behälterwand. Die aus der Berechnung sich ergebende Frequenz stimmt sehr gut mit der Theorie [103] überein, ebenso die Amplitude der Welle für gerade Perioden. Der Überschwinger der ungeraden Perioden ist auf die Präsenz von Oberschwingungen zurückzuführen. Die Gleichförmigkeit der Amplituden, d.h. keine Abnahme mit der Zeit, zeigt die geringe numerische Dissipation des Verfahrens. Das Vorhandensein von Oberschwingungen ist ebenfalls anhand Abb. 4.6 erkennbar: die erste Oberschwingung bei geraden Perioden ist deutlich zu erkennen.

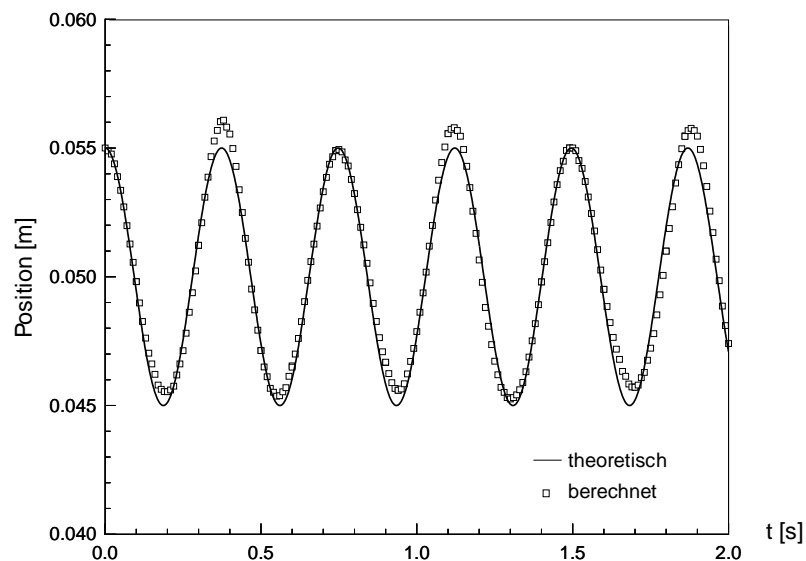


Abbildung 4.5: Position der Welle an der linken Wand des Tanks als Funktion der Zeit.

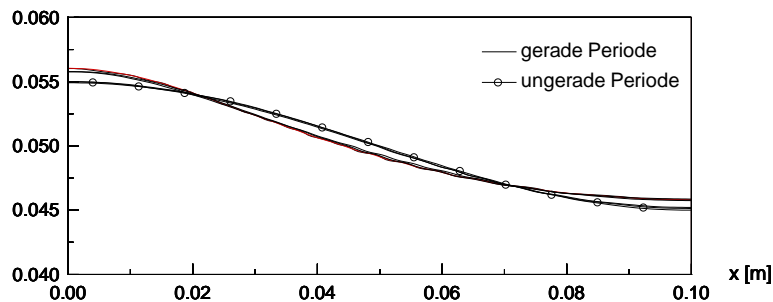


Abbildung 4.6: Kontur der Welle zu den Zeiten $t = T, 2T, 3T, 4T, 5T$, $T =$ Periodendauer.

4.2.2 Kollaps einer Wassersäule - Dambruch

Ein klassisches Experiment (Martin & Moyce, 1952 [105]) zur Validierung der mathematischen Modellierung von freien Oberflächen bzw. Zweiphasenströmungen ist der Dambruch. Abbildung 4.7 zeigt das untersuchte Problem. Die zeitliche Entwicklung des Wasser-Luft-Interface ist aus dem Experiment nicht genau bekannt, jedoch können sekundäre Daten wie die Abnahme der Höhe der Wassersäule mit der Zeit und die Position der Nase der Wasserwelle zur Verifikation verwendet werden. Der Behälter ist 0.584m breit und 0.365m hoch und nach oben hin offen, d.h. es herrscht ein konstanter Umgebungsdruck. Die betrachteten Fluide sind Wasser ($\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \mu = 10^{-3} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$) und Luft ($\rho = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \mu = 15 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$). Zu Beginn des Experiments hat die Wassersäule eine Höhe von $2a=0.292\text{m}$ und eine Breite von $a=0.146\text{m}$ und wird durch eine Platte gestützt, die zum Zeitpunkt $t=0\text{s}$ plötzlich entfernt wird. Die Oberflächenspannung kann bei diesem large-scale Experiment mit guter Näherung vernachlässigt werden.

Die Schwerkraft ($g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$) bewirkt, daß die Wassersäule das geringste Potential an Lageenergie zu erreichen versucht. Daher fällt die Wassersäule zusammen und das Wasser kommt nach langen Zeiten zur Ruhe und bedeckt den gesamten Boden des Behälters. Die ersten Momente des Zusammenfalls sind durch Trägheitseffekte kontrolliert, gegen Ende des Experiments dominieren viskose Effekte. Beide Fluide können den Behälter nach oben hin verlassen, aber nur Luft kann wieder einströmen. Dadurch wird modelliert, daß Wasser aus dem Behälter spritzt und analog zum Experiment nicht wieder in den Behälter zurückfließt. Das Rechengebiet wird durch 120 Zellen in horizontaler Richtung, vertikal durch 70 Zellen diskretisiert. Der verwendete Zeitschritt beträgt $\Delta t = 0.1\text{ms}$.

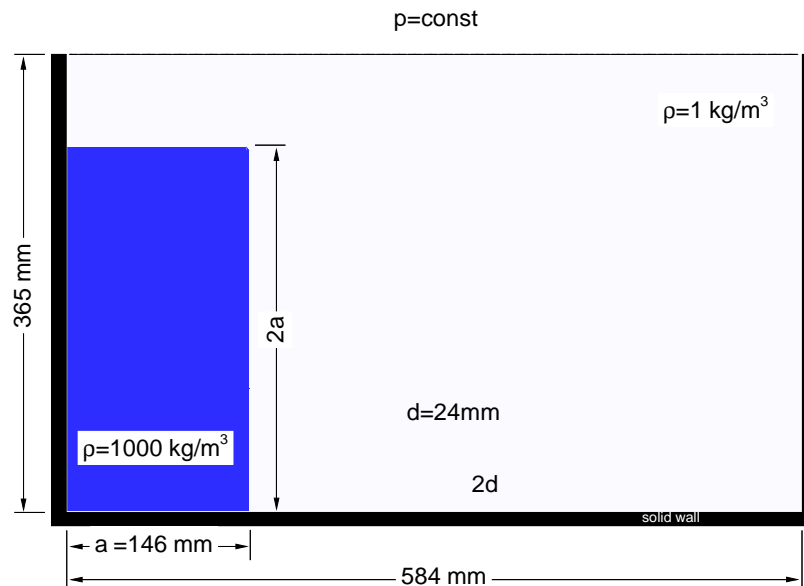


Abbildung 4.7: Kollaps einer Wassersäule: Kontur der Wassersäule zu Beginn des Dambruchs und Geometrie des Wassertanks.

Die Serie von Abbildungen 4.8 zeigt die zeitliche Entwicklung der Wasser-Luft-Phasengrenze. Die Lage der Phasengrenzfläche wird im Rahmen der Auswertung durch einen Wasseranteil in der Zelle von 50% definiert, d.h. liegt der Anteil darüber, wird die Zelle blau eingefärbt.

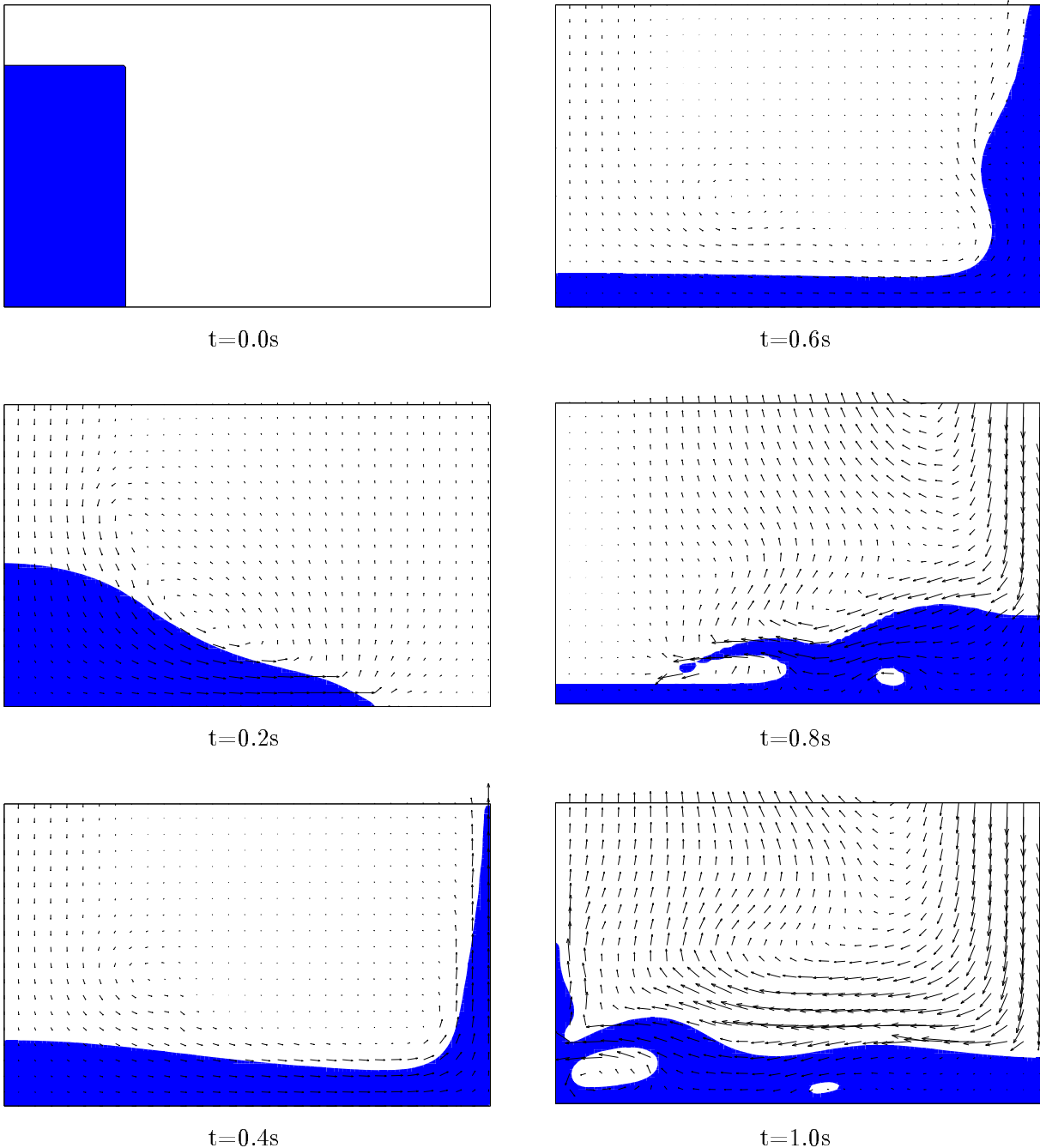


Abbildung 4.8: Kollaps einer Wassersäule: Berechnete Kontur der Phasengrenze zwischen Luft und Wasser zu verschiedenen Zeiten t .

- $t = 0.2\text{s}$: etwa 75% des Behälterbodens ist mit Wasser bedeckt.
- $t = 0.4\text{s}$: das Interface bildet einen kleinen Winkel mit dem Boden und Wasser spritzt an der rechten oberen Ecke aus dem Behälter.
- $t = 0.6\text{s}$: das Interface ist nahezu parallel zum Boden und das Wasser an der rechten Wand beginnt unter dem Einfluß der Schwerkraft in den Behälter zurückzufallen.
- $t = 0.8\text{s}$: das zurückfallende Wasser formt eine Welle, die in Richtung der linken Behälterwand läuft und dabei eine Zunge ausbildet. Da hier kein Modell für das Aufbrechen dieser dünnen Zunge implementiert ist, bleibt diese Struktur erhalten und es bilden sich keine Tropfen. Die zusätzliche Modellierung der Oberflächenspannung ist bei dem hier verwendeten Rechengitter nicht sinnvoll, da der Blasendurchmesser zu klein im Verhältnis zur Gitterweite ist. Die Rechnung gibt daher die Grobstruktur des Wasser-Luft-Interface wieder.
- $t = 1.0\text{s}$: die Zunge hat die linke Behälterwand erreicht, das Wasser steigt auf und schließt eine große Luftblase ein.

Das Dambruch-Problem zeigt, daß das Verfahren in der Lage ist komplexe Geometrien des Wasser-Luft-Interface zu berechnen. Ein quantitativer Vergleich mit experimentellen Daten kann für kleine Zeiten anhand der zeitlichen Abnahme der Höhe der Wassersäule durchgeführt werden, vgl. Abb. 4.9. Die berechnete zeitliche Entwicklung der Höhe der Wassersäule stimmt sehr gut mit den Messungen überein, aufgetragen ist die mit der Ursprungshöhe entdimensionierte Momentanhöhe der Wassersäule über der ebenfalls entdimensionierten Zeit.

Die Entdimensionierung der Position der Spitze der Wasserwelle erfolgt analog zur Momentanhöhe, den Vergleich zwischen Numerik und Experiment zeigt Abb. 4.10. Es ist zu erkennen, daß sich die Spitze der numerisch berechneten Welle etwas schneller wie im Experiment bewegt. Auf dieses Ergebnis wurden auch andere Autoren geführt, wie z.B. Koshizuka et al [106] und Ubbink [96]. Der Grund liegt in der Schwierigkeit, die exakte Position der Wellenspitze zu ermitteln. Eine sehr dünne Wasserschicht schießt über den Boden des Behälters, gefolgt von der Hauptwelle. Diese Schwierigkeit wird ebenfalls anhand der Experimente bestätigt (Martin & Moyce, 1952), die zwei verschiedene Datensätze angeben.

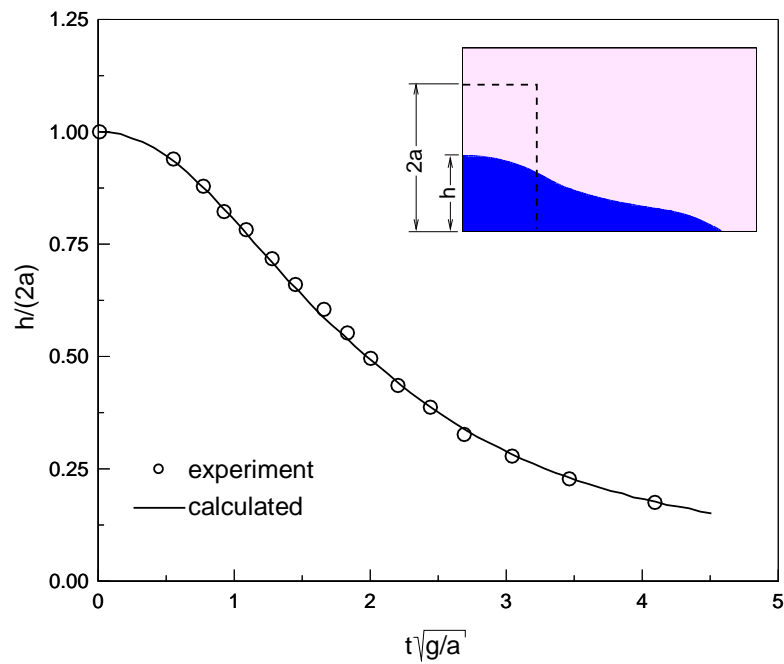


Abbildung 4.9: Höhe der kollabierenden Wassersäule als Funktion der Zeit.

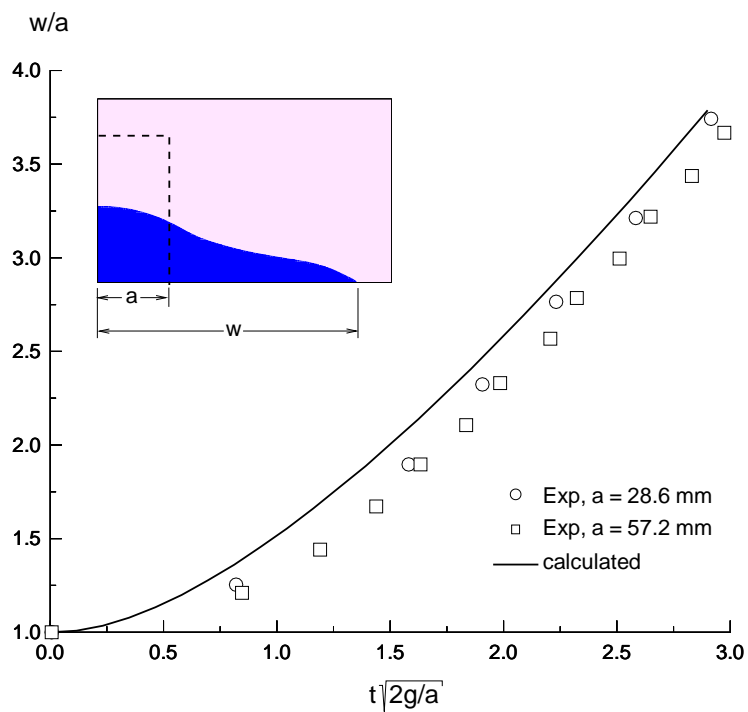


Abbildung 4.10: Position der Wellenzunge als Funktion der Zeit.

4.2.3 Kollaps einer Wassersäule mit Hindernis - Obstacle

Ein weiteres oft untersuchtes Experiment zu freien Oberflächen stellt der Kollaps einer Wassersäule dar, deren Bewegung durch ein Hindernis blockiert wird (Koshizuka [106] sowie Harlow & Amsden [107]). Abbildung 4.11 zeigt die Geometrie des untersuchten Problems. Der Behälter ist 0.584m breit und 0.365m hoch und nach oben hin offen, d.h. es herrscht ein konstanter Umgebungsdruck. Das Hindernis ist 0.024m breit und 0.048m hoch und wird mit der linken unteren Ecke in der Mitte des Tanks plaziert. Die betrachteten Fluide sind Wasser ($\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$, $\mu = 10^{-3} \frac{Ns}{m^2}$) und Luft ($\rho = 1 \frac{kg}{m^3}$, $\mu = 15 \cdot 10^{-6} \frac{Ns}{m^2}$). Zu Beginn des Experiments hat die Wassersäule eine Höhe von $2a=0.292m$ und eine Breite von $a=0.146m$ und wird durch eine Platte gestützt, die zum Zeitpunkt $t=0s$ plötzlich entfernt wird. Die Oberflächenspannung kann bei diesem large-scale Experiment ebenfalls mit guter Näherung vernachlässigt werden.

Das Rechengebiet wird durch 150 Zellen in horizontaler Richtung, vertikal durch 100 Zellen diskretisiert. Der verwendete Zeitschritt beträgt $\Delta t = 0.1ms$.

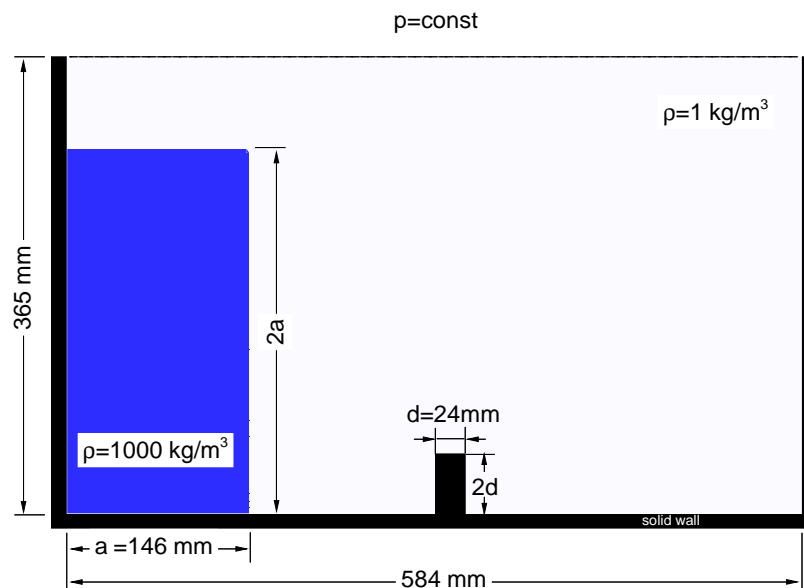


Abbildung 4.11: Kollaps einer Wassersäule mit Hindernis: Kontur der Wassersäule zu Beginn und Geometrie des Wassertanks.

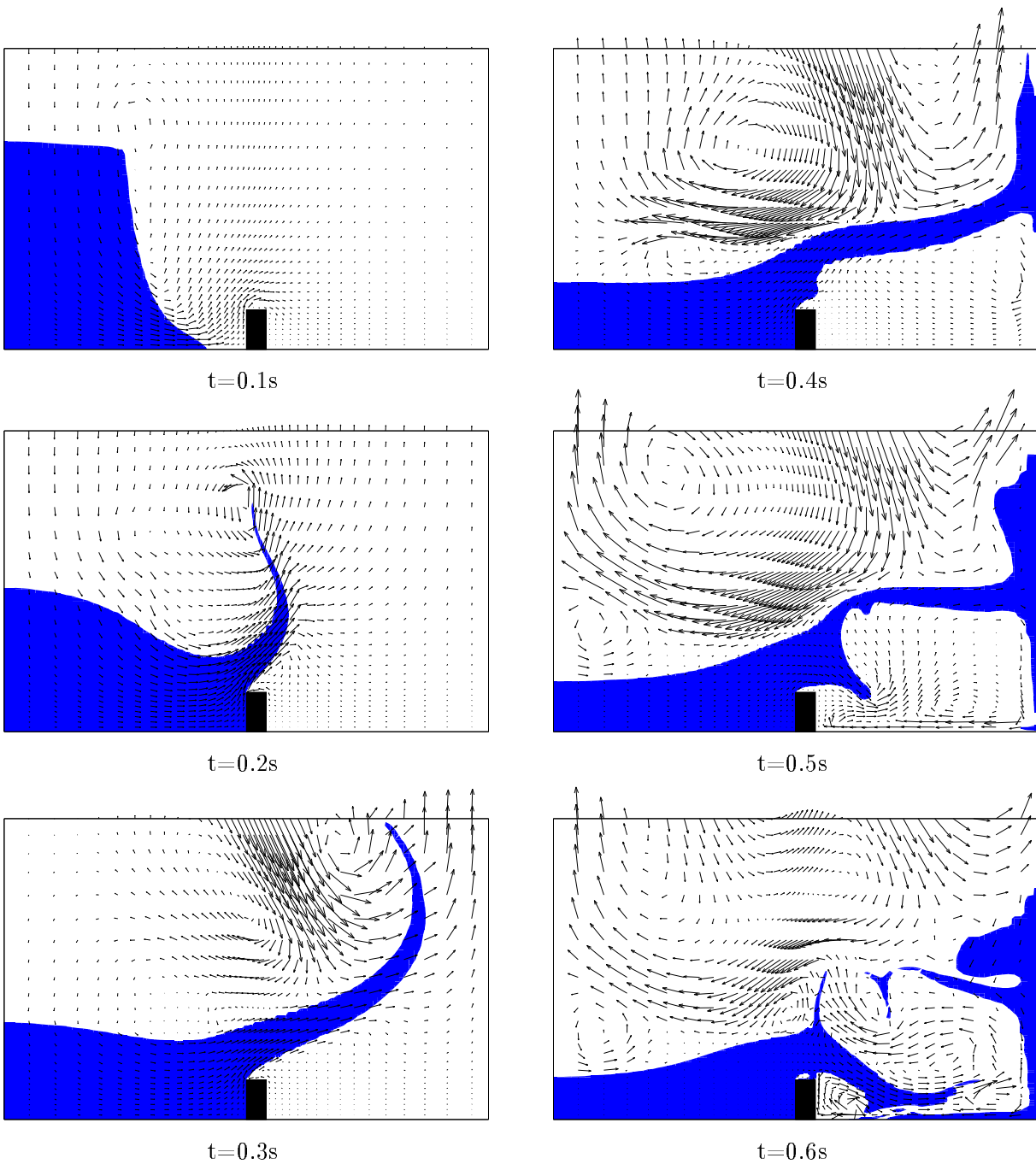
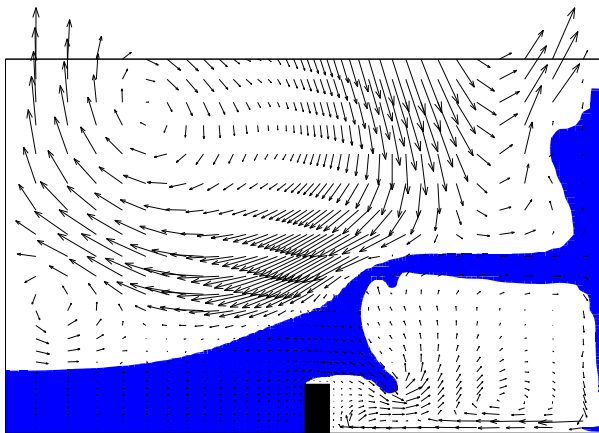


Abbildung 4.12: Kollaps einer Wassersäule mit Hindernis: Berechnete Kontur der Phasengrenze zwischen Luft und Wasser zu verschiedenen Zeiten t .

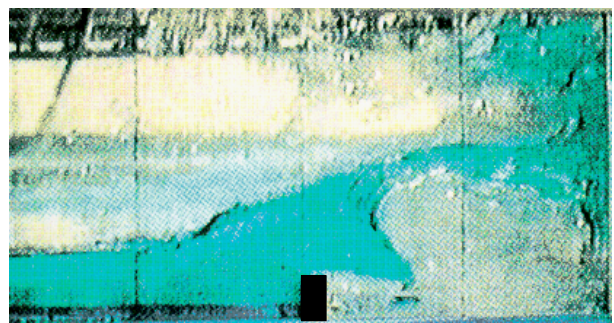
Die berechnete Position der Phasengrenze und die korrespondierenden Geschwindigkeitsvektoren zu verschiedenen Zeiten sind in Abb. 4.12 dargestellt. Die Lage der Phasengrenze wird durch einen Wasseranteil in der Zelle von 50% definiert, d.h. liegt der Wasseranteil darüber, wird die Zelle blau eingefärbt.

- $t = 0.1\text{s}$: Die Spitze der Wasserwelle hat das Hindernis noch nicht erreicht.
- $t = 0.2\text{s}$: Die Bewegung der Welle wird durch das Hindernis blockiert und eine Wasserzunge bildet sich.
- $t = 0.3\text{s}$: Die Zunge setzt die Bewegung in Richtung gegenüberliegende Wand fort. Die Luft im Gebiet unterhalb der Zunge wird verdrängt und entweicht mit relativ hoher Geschwindigkeit im noch verbleibenden Spalt zwischen Zungenspitze und Behälterwand. Hinter der Zunge wird Umgebungsluft in den Behälter eingesaugt.
- $t = 0.4\text{s}$: Die Zunge trifft auf die Behälterwand und bildet eine brückenartige Struktur aus. Aufgrund der Dynamik bewegt sich das Wasser an der Behälterwand weiterhin aufwärts.
- $t = 0.5\text{s}$: Unter dem Einfluß der Schwerkraft kollabiert die Brückenstruktur und es bildet sich ein zweite Wasserzunge aus. Die Aufwärtsbewegung des Wassers an der Behälterwand wird gebremst und das Wasser fällt in den Behälter zurück.
- $t = 0.6\text{s}$: Die Luft hat die Wasserbrücke durchbrochen, die Sekundärzunge erreicht den Behälterboden und schließt eine Luftblase ein.

Zur Beurteilung der Qualität der Simulation wird das numerische Ergebnis dem Experiment gegenübergestellt. Abbildung 4.13 zeigt links die simulierte Form der freien Oberfläche zum Zeitpunkt $t=0.5\text{s}$, rechts die dazu korrespondierende experimentelle Momentaufnahme [106]. Es ist global eine sehr gute Übereinstimmung zu erkennen, insbesondere die Position und Form der Sekundärzunge betreffend.



(a) $t=0.5\text{s}$: numerische Simulation



(b) $t=0.5\text{s}$: Experiment

Abbildung 4.13: Kollaps einer Wassersäule mit Hindernis: Vergleich von numerisch berechneter Kontur der Phasengrenze mit dem Experiment.

4.3 Zusammenfassung der VoF Ergebnisse

Zur Verifikation der Volume-of-Fluid Methode (VoF) wurden drei typische Anwendungen aus dem Bereich der Simulation von freien Oberflächen berechnet und mit Experimenten bzw. analytischen Lösungen verglichen. Im Fall des Slosings beweist das Verfahren die geringe numerische Dissipation und dessen Fähigkeit, Lageenergie konservativ in Bewegungsenergie und vice versa zu überführen. Die Berechnung des Dammbbruchs, bzw. dessen kompliziertere Version (Obstacle) zeigt, daß das Verfahren sehr steile Dichtegradienten auflösen kann und damit die Simulation der Dynamik einer freien Oberfläche keine Schwierigkeiten bereitet.

5 Kavitierende Düsenströmungen

In diesem Kapitel werden erste Ergebnisse der numerischen Simulation von kavitierenden Düsenströmungen vorgestellt. Im Vordergrund steht die Untersuchung der Eigenschaften des neu entwickelten Kavitationsmodells anhand systematischer Parametervariationen. Die Geometrie der Düse wurde unter Berücksichtigung numerischer Aspekte entworfen, insbesondere darf die einphasige Simulation keine numerischen Schwierigkeiten bereiten. Experimentell wurden meist Kanäle untersucht, in die ein scharfkantiges Hindernis eingebaut wurde [59] oder die Umströmung von Profilen. Eine scharfkantige Düsenkontur führt zu einer Geschwindigkeitssingularität, die zu einer massiven Unterschreitung des Dampfdrucks führen kann. Die Blasen wachsen dort explosionsartig an und Stabilitätsprobleme des Verfahrens sind zu erwarten. Profile (NACA 0015, etc.) sind daher prinzipiell besser geeignet, jedoch erfordert dies die Verwendung von Rechengittern mit sehr vielen Gitterpunkten, um eine ausreichende Diskretisierung zu gewährleisten. Daraus resultiert ein hoher Bedarf an Rechenzeit, der systematische Parameterstudien nur bedingt zulässt. Daher wird hier eine eigens auf die Bedürfnisse der Simulation kavitierender Strömungen angepasste Düsengeometrie verwendet.

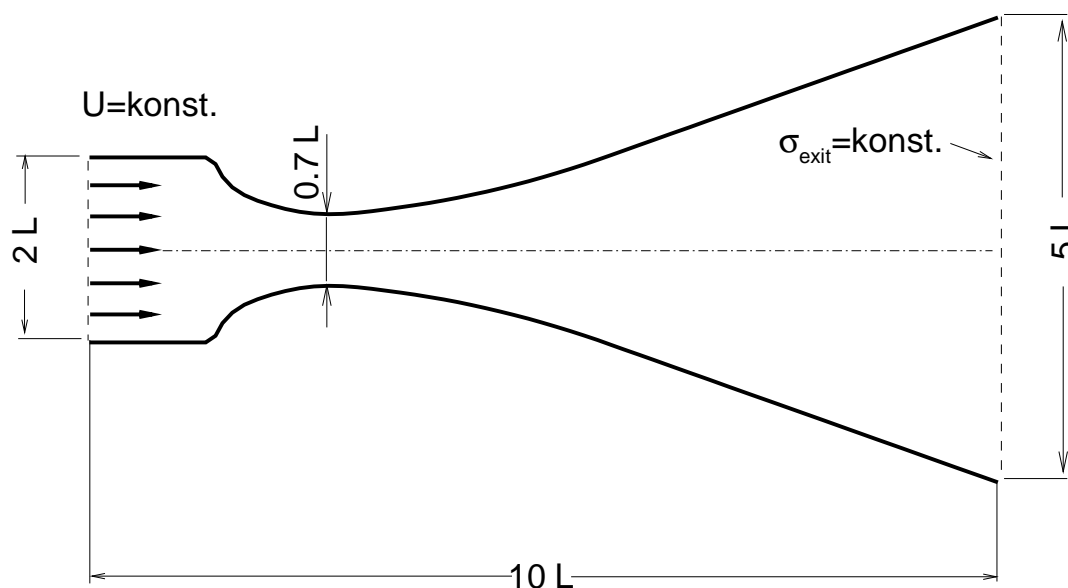


Abbildung 5.1: Geometrie der untersuchten Düse.

Die in Abb. 5.1 dargestellte konvergent-divergente Düse zeichnet sich durch einen kontinuierlichen, glatten Querschnittsverlauf im Düsenhals aus und besitzt einen ausgeprägten Diffusorteil. Dem konvergenten Düsenteil ist ein Parallelteil vorgeschaltet. Der Diffusor verursacht einen starken Druckanstieg, der den Blasenkollaps einleitet. Dadurch wird erreicht, daß die Blasenwolke vollständig innerhalb des Rechengebiets kollabiert und nicht über dessen Berandung konvektiert wird. Die Strömung wird reibungsfrei betrachtet, um zwischen Rückströmung bedingt durch Kavitation (Re-entrant Jet) und viskos bedingter Rückströmung (Ablösung der Grenzschicht) unterscheiden zu können.

Bei den Düsenströmungen handelt es sich um rein numerische Testfälle, zu denen keine experimentellen Daten existieren.

Ein zentraler Punkt bei der Simulation kavitierender Strömungen stellt die Bestimmung von Übertragbarkeitsregeln, bzw. die Untersuchung von Maßstabeffekten dar. Anhand von Parameterstudien wird untersucht, inwiefern das Kavitationsmodell bekannte Maßstabeffekte reproduziert. Aus der physikalischen Modellierung und dem Strömungsproblem ergeben sich folgende Parameter, die unabhängig variiert werden können:

- Variation der zeitlichen und örtlichen Diskretisierung
- Variation der Strömungsgeschwindigkeit (Geschwindigkeitsmaßstabeffekt)
- Variation der Geometrie (Größenmaßstabeffekt)
- Variation des Kavitationsbeiwerts
- Variation der Keimanzahl (Fluidqualitätseffekt)
- Variation des Keimdurchmessers (Fluidqualitätseffekt)
- Variation der Fluidtemperatur (Thermischer Effekt)

Im folgenden wird zunächst eine Parameterkombination gewählt und die sich einstellende kavitierende Strömung detailliert untersucht. Dieser Fall wird als Referenzfall bezeichnet. Unterschiede, die sich durch Variation der obigen Parameter ergeben, werden im Bezug auf diesen Referenzfall diskutiert.

5.1 Kavitierende Düsenströmung - Referenzfall

Das Kavitationsmodell wird zur Berechnung einer kavitierenden Düsenströmung verwendet, die Geometrie, Randbedingungen und das Rechengitter sind aus Abb. 5.2 ersichtlich, die Referenzlänge beträgt $L_{ref} = 0.1m$. Im Vergleich zu typischen Rechengittern für einphasige CFD Rechnungen ist das hier verwendete Gitter sehr grob (58x16 Gitterpunkte). Die Gitterauflösung orientiert sich an anderen numerischen Arbeiten zu kavitierenden Düsenströmungen, die ähnlich geringe Auflösungen mit $O(1000)$ Gitterpunkten verwenden

[65, 70, 66, 72]. Bei der Gittergenerierung steht im Vordergrund, daß das Rechengitter orthogonal und äquidistant in dem Bereich ist, in dem mit Kavitation zu rechnen ist. Zur Reduktion des numerischen Aufwands wird eine Symmetrierandbedingung auf der Düsenachse vorgegeben, d.h. nur die untere Hälfte der in Abb. 5.1 gezeigten Düse wird berechnet. Das Fluid ist Wasser, die Temperatur beträgt $T = 293.15K$ am Eintritt, thermische Effekte auf das Blasenwachstum können daher vernachlässigt werden. Die Parameter R_0 und n_0 werden so vorgegeben, daß die Fluidqualität der von gewöhnlichem, unbehandeltem Wasser entspricht. Die Strömung wird reibungsfrei betrachtet.

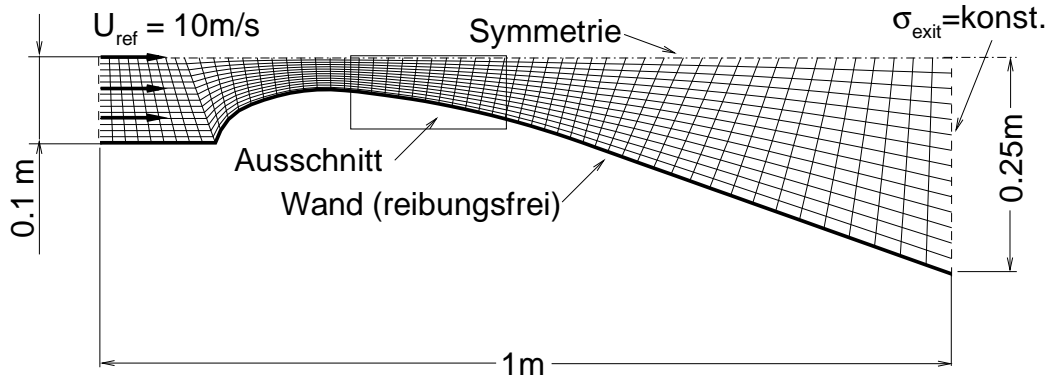


Abbildung 5.2: Geometrie und Randbedingungen des Referenzfalls: $\sigma_{exit} = 5.45$, $U_{ref} = 10\text{m/s}$, $L_{ref} = 0.1\text{m}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$ Wasser, $R_{0,ref} = 3 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei $T = 293.15K$.

Der numerische Zeitschritt beträgt hier $\Delta t = 10^{-4}\text{s}$ und entspricht einer maximalen CFL -Zahl von $CFL = 0.1$, basierend auf der einphasigen Rechnung. Ein Keim bzw. eine Blase benötigt daher mindestens 10 Zeitschritte, um eine Rechenzelle zu durchqueren. Der Einfluß des numerischen Zeitschritts wird in Kapitel 5.1.1 diskutiert.

Abbildung 5.3 zeigt den zeitlichen Verlauf des über den kompletten Kanal aufintegrierten Dampfanteils. Der totale Dampfanteil wird durch die Summation der Dampfanteile aller Zellen berechnet, bezogen auf das Gesamtvolumen der Düse. Mit V_{ij} wird das Volumen einer Rechenzelle bezeichnet:

$$\alpha_{total} = \frac{\sum \alpha_{ij} V_{ij}}{\sum V_{ij}} . \quad (5.1)$$

Als Startlösung für die kavitierende Rechnung wird eine einphasige Rechnung verwendet, daher wird das Dampfvolmen zunächst überschätzt. Nach einem Einschwingvorgang von vier Zyklen wird periodisches Verhalten beobachtet, die Periodendauer beträgt $T_{period} = 0.105\text{s}$. Die mit L_{ref} und U_{ref} gebildete Strouhalzahl beträgt $Str = (f \cdot L_{ref})/U_{ref} = 0.095$. In den Experimenten wird die Strouhalzahl in der Regel mit der Geschwindigkeit U_{throat} im engsten Querschnitt und der maximalen Länge des Kavitationsgebiets L_{cav} gebildet, bevor sich dieses einschnürt. Dieser Zustand ist in Abb. 5.4 etwa zum Zeitpunkt $t = t_o + 3/8T$ erreicht und wird zur Auswertung herangezogen. Die mit L_{cav} und U_{throat} gebildete Str-

Zahl beträgt hier $Str_{cav} \sim 0.07$ und ist damit geringer als die Str - Zahlen, die von Experimentatoren für andere Düsenströmungen angegeben werden, vgl. dazu auch Tab. 1.1.

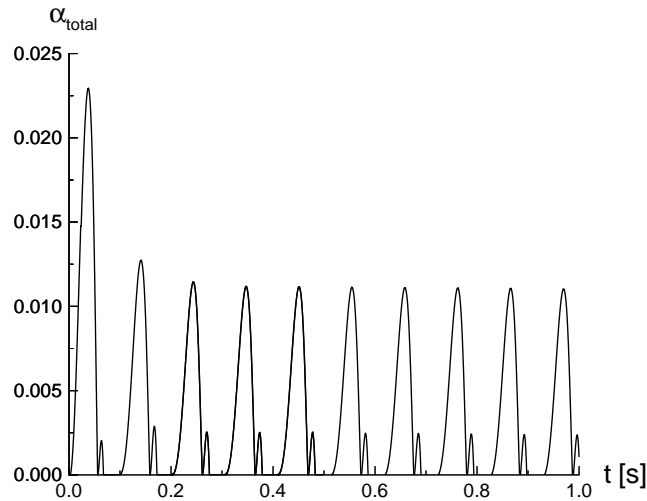


Abbildung 5.3: Zeitlicher Verlauf des Gesamt-Dampfvolumenanteils in der Düse. Periodendauer $T_{period} = 0.105s$.

Die räumliche Verteilung des Wasserdampfs in der Düsenströmung zeigt Abb. 5.4. Der Beginn der dargestellten Periode bei T_o fällt mit dem Beginn des großen Peaks in Abb. 5.3 zusammen und endet mit dem längeren Zeitraum, in dem kein Dampf in der Düse vorliegt. Aus diesem Grund werden für die Zeitpunkte $t = T_o + \frac{3}{4}T_{period}$ bis $t = T_o + T_{period}$ keine Bilder des momentanen Dampfanteils gezeigt. Zwischen dem großen Peak und dem kleinen Peak des integrierten Dampfvolumens (Abb. 5.3) gibt es einen Zeitpunkt, zu dem kurzzeitig kein Wasserdampf in der Düse vorliegt. Dies findet zwischen den Zeitpunkten $t = T_o + \frac{9}{16}T_{period}$ und $t = T_o + \frac{5}{8}T_{period}$ statt. Das bedeutet, daß das in Abb. 5.4 zum Zeitpunkt $t = T_o + \frac{5}{8}T_{period}$ zu sehende Dampfvolumen nicht aus dem konvektiven Transport des Dampfvolumens einen Zeitschritt früher stammt, sondern durch eine „Nachkavitation“ im Wirbelkern zustande kommt.

Anmerkung:

Für den Referenzfall und alle anderen im folgenden vorgestellten Rechnungen wird als Startlösung eine einphasige Rechnung verwendet, d.h. der Kavitationsbeiwert σ_{exit} wird so hoch gewählt, daß der Dampfdruck nicht unterschritten wird. Der Kavitationsbeiwert wird dann **schlagartig** auf den gewünschten Wert abgesenkt. Alternativ wurde eine **langsame Absenkung des Kavitationbeiwerts** untersucht, d.h. der Kavitationbeiwert σ_{exit} wird innerhalb von $O(100)$ Zeitschritten linear auf den gewünschten Wert abgesenkt. Auch unter dieser Startbedingung stellt sich eine periodisch kavitierende Strömung ein, die Frequenz und zeitl. Verteilung des Dampfanteils im Strömungsgebiet während einer Periode ist quasi identisch zum Referenzfall mit schlagartiger σ_{exit} -Absenkung. Der Unterschied liegt darin, daß der eingeschwingene Zustand schon nach nur einem Zyklus erreicht wird, eine langsame Absenkung des Kavitationsbeiwerts ist daher zu empfehlen.

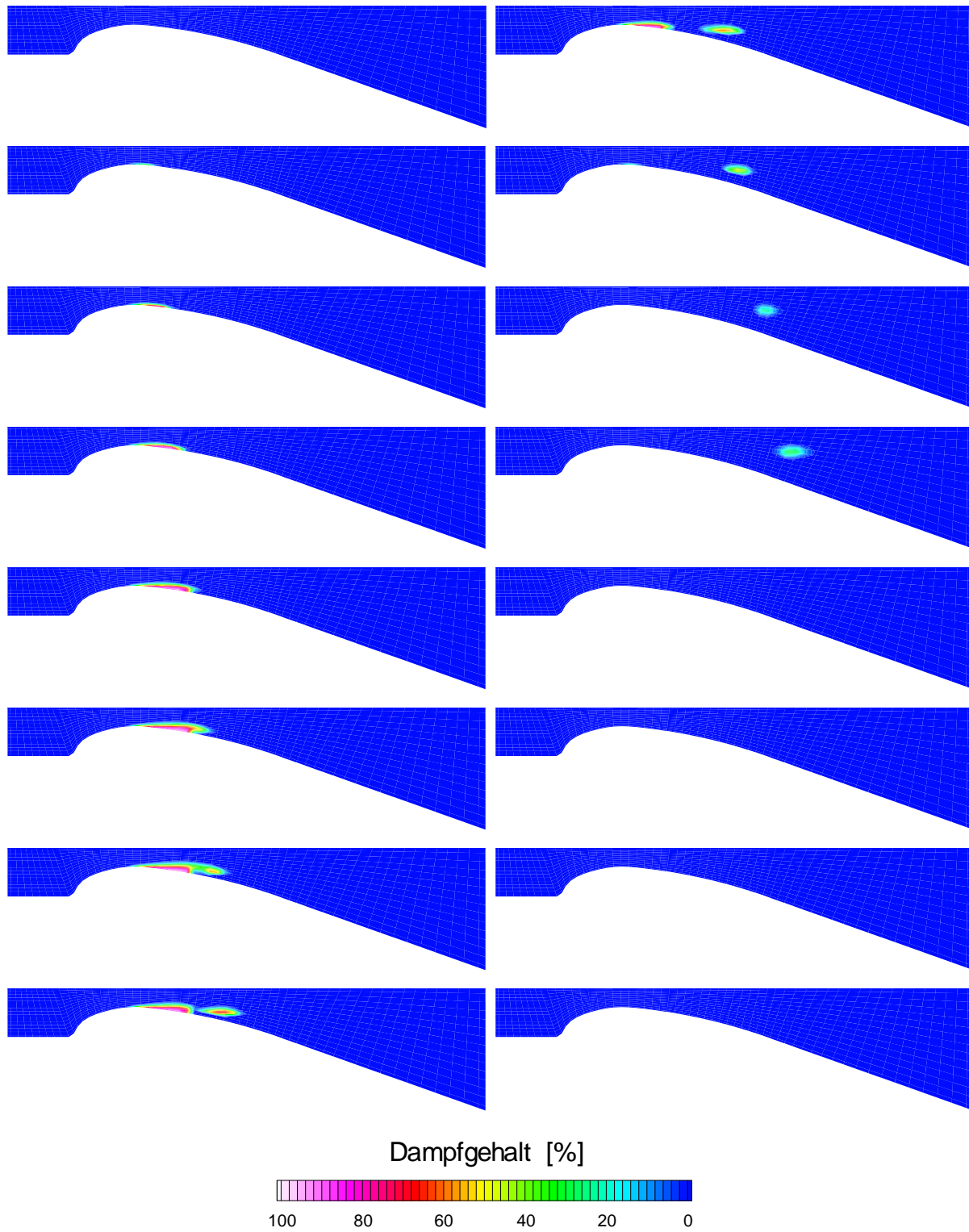


Abbildung 5.4: Momentane Verteilung des Dampfanteils in der Düse. Zeitinkrement $\Delta t = T_{period}/16$. $T_{period} = 0.105s$, $\sigma_{exit} = 5.45$, $U_{ref} = 10m/s$. Zu den übrigen Zeitpunkten der Periode ist kein Dampf im Rechengebiet vorhanden.

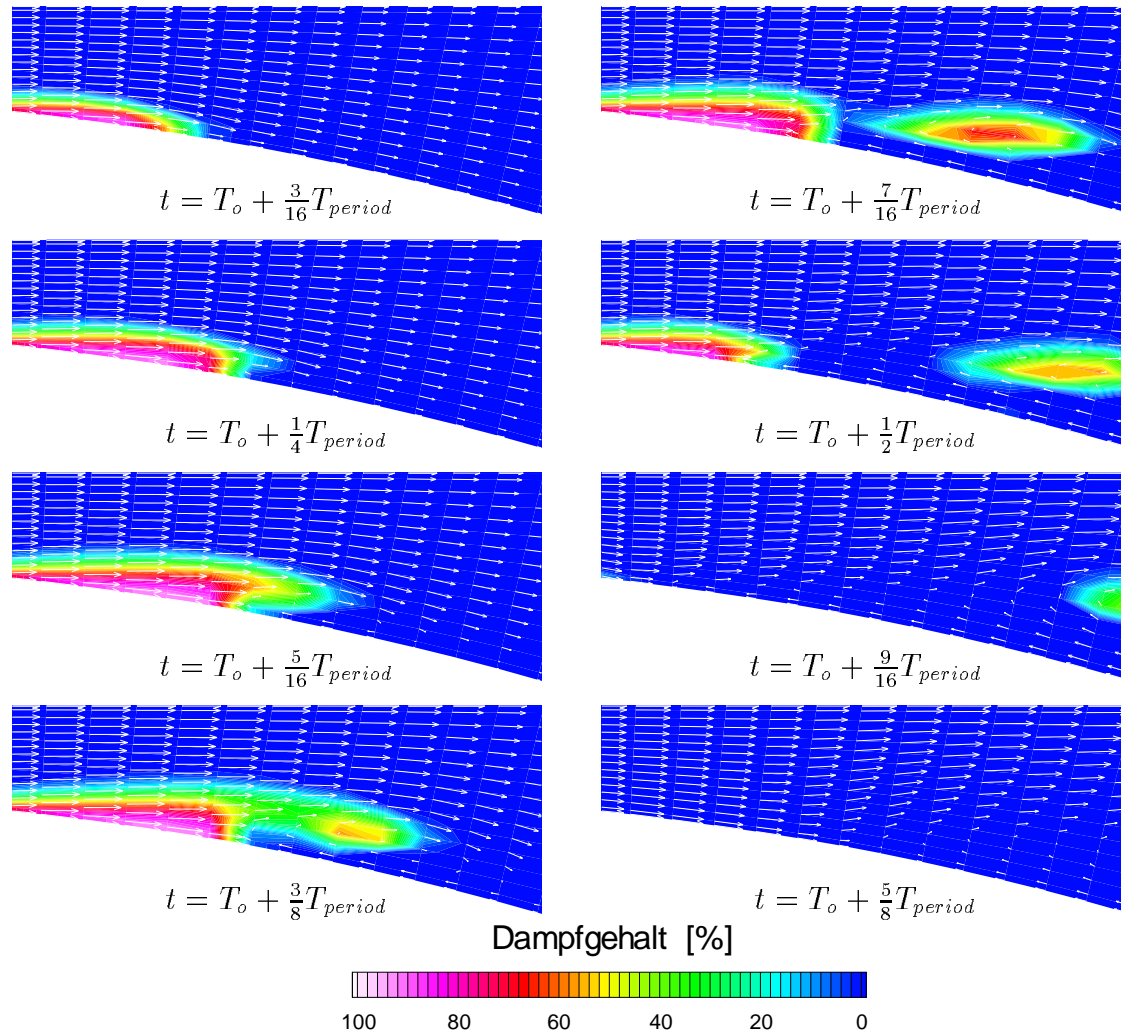


Abbildung 5.5: Verteilung des Dampfanteils und Geschwindigkeitsvektoren in einem Ausschnitt hinter dem engsten Querschnitt (vgl. Abb. 5.2). Bildung des Re-entrant Jets $t = T_o + \frac{3}{16}T_{period}$ bis $t = T_o + \frac{3}{8}T_{period}$ und Aufbrechen des Kavitationsgebiets $t = T_o + \frac{7}{16}T_{period}$ bis $t = T_o + \frac{9}{16}T_{period}$.

Zur Untersuchung der instationären Dynamik des Re-entrant Jets zeigt Abb. 5.5 einen vergrößerten Ausschnitt der Düsenströmung hinter dem engsten Querschnitt (vgl. Abb. 5.2). In den linken vier Bildern zu den Zeitpunkten $t = T_o + \frac{3}{16}T_{period}$ bis $t = T_o + \frac{3}{8}T_{period}$ erkennt man die Entstehung des Re-entrant Jets. Durch die Vernichtung von Dampfvolmen infolge Blasen kollaps am Ende des Kavitationsgebiets, kommt es aufgrund des dabei entstehenden Sogs zu einer lokalen Rückströmung in Wandnähe ($t = T_o + \frac{1}{4}T_{period}$ und $t = T_o + \frac{5}{16}T_{period}$). Diese Rückströmung, Re-entrant Jet genannt, sorgt für eine weitere Anfachung des Blasen kollaps in Wandnähe, da der Jet beim Auftreffen auf die Hauptströmung eine Druckerhöhung erzeugt ($t = T_o + \frac{3}{8}T_{period}$ und $t = T_o + \frac{7}{16}T_{period}$). Das Ausmaß dieser Druckerhöhung zeigt Abb. 5.6 anhand der Wanddruckverläufe. Aufgrund dieser Kondensation wird ein Teil des Dampfgebiets abgeschnitten und in Richtung Düsenausgang konvektiert. Gleichzeitig

wird der Re-entrant Jet durch die vermehrte Kondensation des Dampfs noch verstärkt und vernichtet das Kavitationsgebiet vollständig ($t = T_o + \frac{9}{16}T_{period}$ und $t = T_o + \frac{5}{8}T_{period}$).

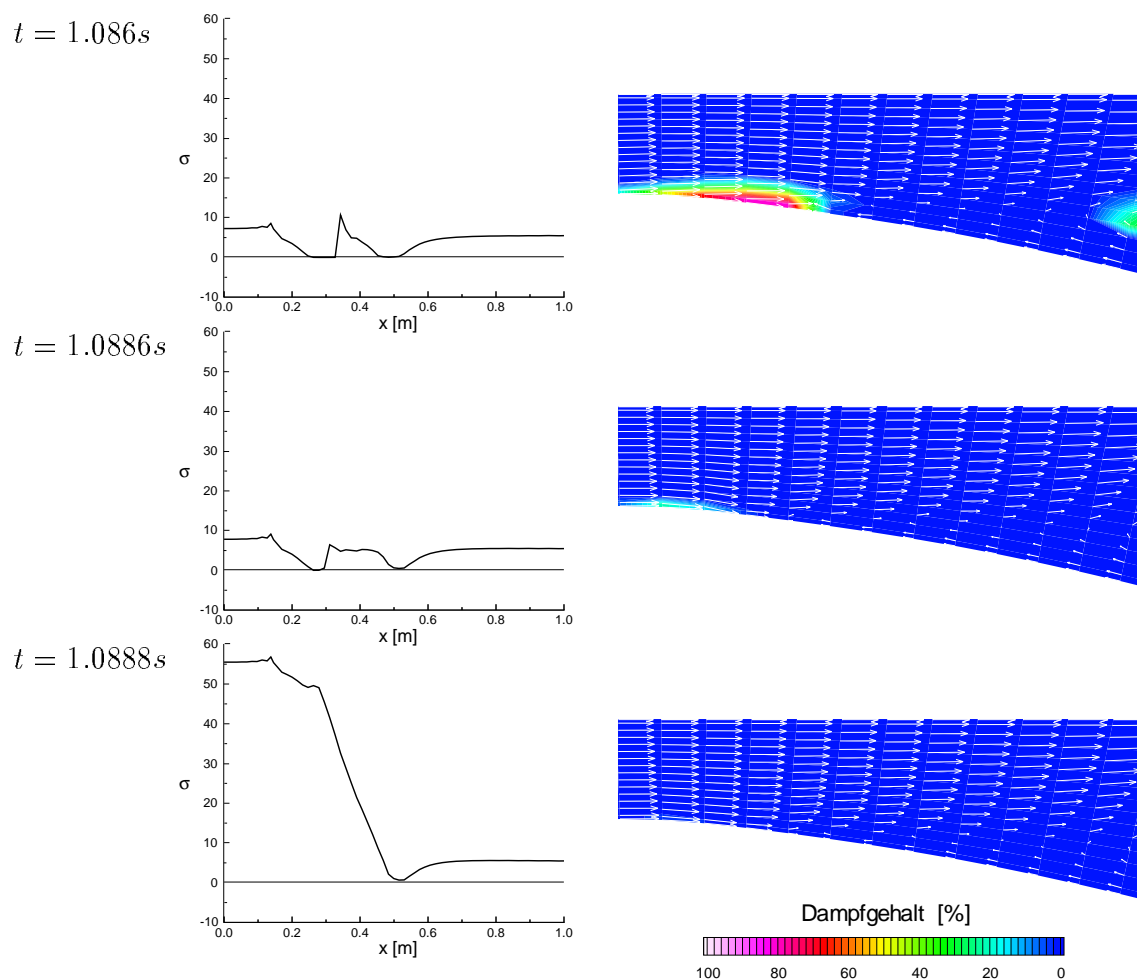


Abbildung 5.6: Links: Momentaner Druckverlauf an der unteren Düsenwand. Rechts: Momentane Verteilung des Dampfanteils in einem Ausschnitt hinter dem engsten Querschnitt der Düse (vgl. Abb. 5.2).

Die dynamische Druckverteilung an der Düsenwand durch diesen Vorgang zeigt Abb. 5.6. Durch den Blasenkollaps entstehen lokale Peaks in der Wanddruckverteilung ($t = 1.086\text{ s}$). Der massive Druckanstieg zwischen den beiden Zeiten $t = 1.0886\text{ s}$ und $t = 1.0888\text{ s}$ resultiert aus dem Zusammenprall der inkompressiblen Hauptströmung mit dem Re-entrant Jet. In Übereinstimmung zu den Experimenten [4, 59] liefert die Simulation, daß sich der Druck im Kavitationsgebiet leicht unterhalb des Dampfdrucks einstellt. Der Kavitationsbeiwert im Kavitationsgebiet beträgt hier $\sigma_{cav} \sim -0.1$. Dies ist ein typischer Wert, der auch in den nachfolgenden Simulationen erreicht wird.

Abbildung 5.7 zeigt den Vergleich des zeitlich gemittelten Druckverlaufs der instationär kavitierenden Düsenströmung mit dem Druckverlauf der stationären einphasigen Strömung an der Düsenwand. Gestrichelt sind noch beispielhaft momentane Druckverläufe der zweiphasigen Berechnung zu sehen. Im zweiphasigen Fall tritt im zeitlichen Mittel auch bei reibungsfreier Modellierung eine Druckdifferenz zwischen Düsen Eintritt und Düsenaustritt auf, die einen zusätzlichen Energiebedarf der Pumpe bzw. Anlage repräsentiert. Dieser Sachverhalt ist ebenfalls auch dem Experiment bekannt [58]. Die Antriebsleistung der Pumpe muß erhöht werden, um bei starker Kavitation im Versuchskanal den gleichen Massenstrom durchzusetzen wie bei kavitationsfreier Strömung.

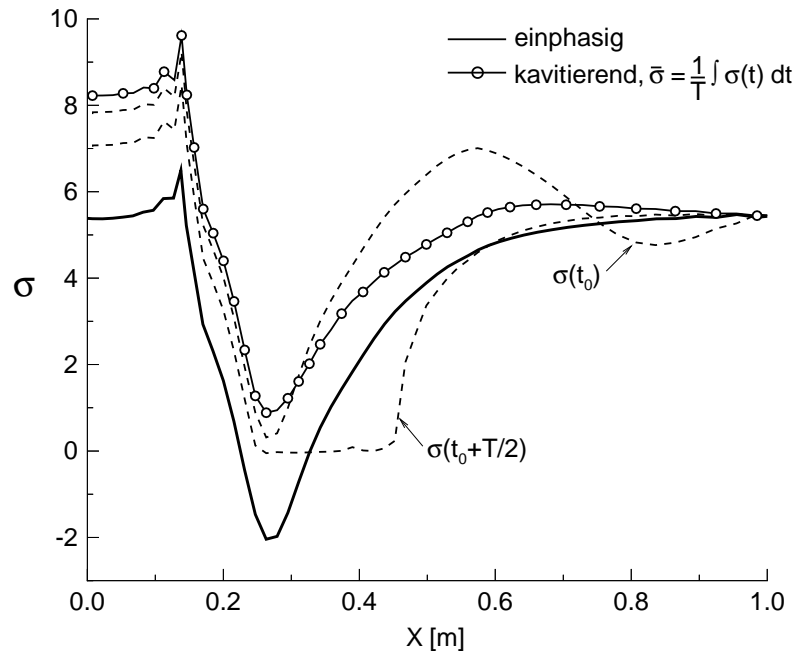


Abbildung 5.7: Vergleich der einphasigen Druckverteilung an der unteren Wand mit der zeitlich gemittelten Druckverteilung der zweiphasigen Rechnung. Gestrichelt: Momentane Wanddruckverläufe für verschiedene Zeitpunkte.

5.1.1 Einfluß des numerischen Zeitschritts

Aus Effizienzgründen ist ein großer numerischer Zeitschritt zu wählen, dem gegenüber steht eine ausreichend genaue zeitliche Auflösung des physikalischen Prozesses. Im Rahmen der physikalischen Modellbildung wird angenommen, daß für die Dauer eines numerischen Zeitschritts Δt , die Blase in der Rechenzelle verbleibt. Diese Voraussetzung ist dann erfüllt, wenn gilt:

$$CFL = \max \left(\frac{u \Delta t}{\Delta x}, \frac{v \Delta t}{\Delta y} \right) < 1, \quad (5.2)$$

mit Δx , Δy werden die Erstreckung der Rechenzelle in x bzw. y Richtung bezeichnet. Diese Beziehung eignet sich jedoch nur zur Ermittlung des maximal zulässigen Zeitschritts. Die notwendige zeitliche Auflösung wird gemäs der physikalischen Problemstellung vorgegeben und wird hier nach dem Kriterium bestimmt, daß die Lösung unabhängig von der Wahl des numerischen Zeitschritts ist.

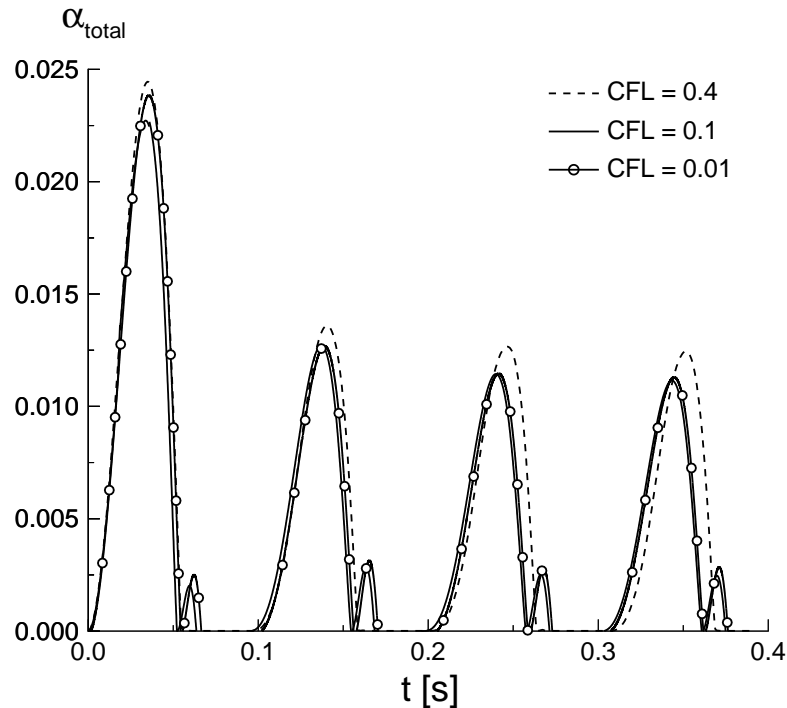


Abbildung 5.8: Zeitliche Entwicklung des Gesamt-Dampfvolumenanteils in der Düse. $\sigma_{exit} = 5.45$, $U_{ref} = 10\text{m/s}$, $L_{ref} = 0.1\text{m}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$ Wasser, $R_{0,ref} = 3 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei $T = 293.15\text{K}$.

Abbildung 5.8 zeigt den zeitlichen Verlauf des totalen Dampfanteils in der Düse in Abhängigkeit des numerischen Zeitschritts, die angegebenen CFL -Zahlen basieren auf der einphasigen Rechnung. Es ist zu erkennen, daß bei einer Rechnung mit $CFL < 0.1$ keine nennenswerten Unterschiede zu einer Rechnung mit $CFL = 0.1$ auftreten. Die Rechnung mit $CFL = 0.4$ überschätzt den Dampfanteil leicht, insbesondere wird der sekundäre Dampfanteil-Peak nicht mehr aufgelöst. Dieser Sekundärpeak entspricht der Entstehung einer Kavitationswolke und ist damit ein relevantes Detail der kavitierenden Strömung. Es wird daher empfohlen, zu der Berechnung des numerischen Zeitschritts den Wert

$$CFL_{empfohlen} = 0.1 . \quad (5.3)$$

zu verwenden. Diese CFL -Zahl basiert auf der einphasigen Rechnung und ist im Vergleich zu üblichen CFL -Zahlen relativ klein. Es ist jedoch zu beachten, daß durch das Entstehen

bzw. Vernichten von Dampfvolumen lokal die Geschwindigkeiten im Vergleich zur einphasigen Rechnung überschritten werden. Die CFL -Zahl der kavitierenden Strömung ist daher größer als die CFL -Zahl im einphasigen Fall, als Richtwert ergab sich aus den Simulationen (Düse, Profil):

$$CFL_{kavitierend} \leq 2.0 \cdot CFL_{einphasig} . \quad (5.4)$$

Für den Fall der kavitierenden Düsenströmungen wird daher mit einer maximalen CFL -Zahl von $CFL \sim 0.2$ gerechnet. Die dazu korrespondierende zeitliche Auflösung ist dennoch ausreichend, um relevante Details der Strömung zeitlich auflösen zu können. Die vorliegende Programmversion ist mit einer automatischen CFL -Kontrolle ausgestattet, d.h. während der Laufzeit wird ggf. der Zeitschritt an das Kriterium $0.05 \leq CFL_{kav.} \leq 0.2$ angepaßt.

5.1.2 Einfluß des Rechengitters

Die Simulation der kavitierenden Düsenströmung wird auf einem Rechengitter durchgeführt, das im Vergleich zum Referenzfall (58x16 Gitterpunkte) eine doppelte Auflösung besitzt (115x31). Die Randbedingungen entsprechen denen des Referenzfalls, vgl. Abb. 5.9. Die Simulation liefert eine periodisch kavitierende Strömung mit einer Frequenz von $f_{(115 \times 31)} = 9.8 Hz$. Abbildung 5.10 zeigt den σ -Verlauf an der Düsenwand in Abhängigkeit der Gitterauflösung für die einphasige und kavitierende Strömung. Für die einphasige Rechnung ist im Bereich des engsten Querschnitts und im Diffusorteil eine gute Übereinstimmung zu erkennen. Im Bereich des Übergangs vom Parallelteil zum konvergenten Teil der Düse ($x = 0.15$) ergibt sich eine gitterbedingte Abweichung im σ -Verlauf. Diese Abweichung ist lokal begrenzt und hat keine wesentlichen Auswirkungen auf die Strömung im Düsenhals und Diffusor, d.h. in den Bereichen, die für das Entstehen und Kollabieren von Dampfblasen relevant sind. Auf Basis des einphasigen Vergleichs kann die Auflösung des groben Gitters als ausreichend bezeichnet werden.

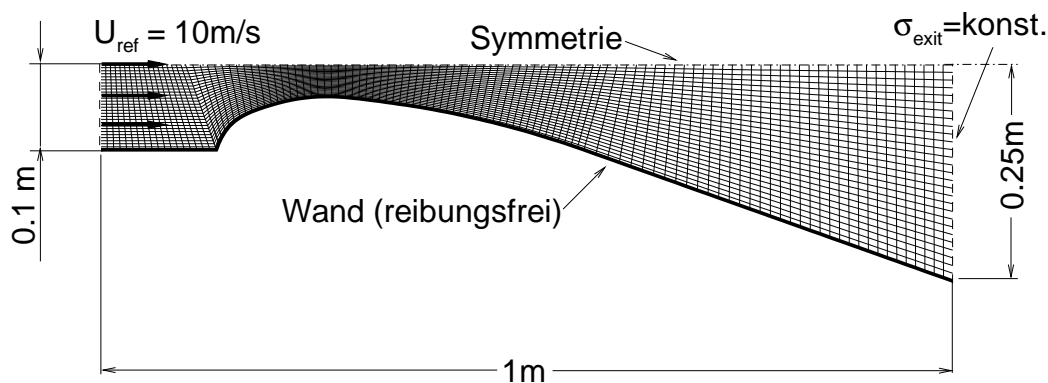


Abbildung 5.9: Rechengitter mit doppelter Auflösung im Vergleich zum Referenzfall: $\sigma_{exit} = 5.45$, $U_{ref} = 10 m/s$, $L_{ref} = 0.1 m$, $n_{0,ref} = 10^8 \text{Keime}/m^3$ Wasser, $R_{0,ref} = 3 \cdot 10^{-5} m$, Wasser bei $T = 293.15 K$.

Im Gegensatz zur einphasigen Simulation, weist der zeitlich gemittelte σ -Verlauf der kavitierenden Strömung gitterbedingte Unterschiede auf. Im hinteren Diffusorteil ($x = 0.6$) ist eine deutliche Abweichung zu erkennen, während im Bereich des engsten Querschnitts der σ -Verlauf nur unwesentlich von der Gitterauflösung beeinflusst wird. Dieser Sachverhalt kann mittels der zeitlichen Entwicklung des Dampfanteils in der Düse erklärt werden, die für eine Periode in Abb. 5.11 dargestellt ist.

Kavitation beginnt im Bereich des engsten Querschnitts und das Dampfgebiet wächst in Strömungsrichtung an, bis sich ein Re-entrant Jet bildet und ein Teil des Kavitationsgebiets abschnürt. Der vordere Teil des Gebiets kollabiert, während das abgeschnürte Dampfgebiet in Strömungsrichtung konvektiert wird. Es ist zu erkennen, daß die zeitliche Verteilung des Dampfes im Bereich des engsten Querschnitts kaum von der Gitterauflösung abhängig ist. In beiden Fällen erreicht das Kavitationsgebiet die gleiche maximale Ausdehnung, bevor der Re-entrant Jet dieses aufbricht. Auch der Kollaps des vorderen Teils des Kavitationsgebiets verläuft analog und ist bei $t \sim t_0 + 5/8T_{Period}$ beendet. Solange Dampf an der Düsenwand vorhanden ist, entspricht der Druck etwa dem Dampfdruck ($\sigma_{cav} \sim -0.1$). Dies erklärt die geringe Abweichung der σ -Verläufe im Bereich des engsten Querschnitts. Der abschwimmende Teil des Kavitationsgebiets ist bei Verwendung des feineren Gitters deutlicher ausgeprägt und ist bis zum Zeitpunkt $t \sim t_0 + 7/8T_{Period}$ im Diffusor vorhanden. Die Wechselwirkung des Kavitationsgebiets mit dem Druckfeld führt dazu, daß die σ -Werte in Wandnähe im Vergleich zur kavitierenden Rechnung mit dem groben Gitter geringer sind, vgl. hierzu Abb. 5.10.

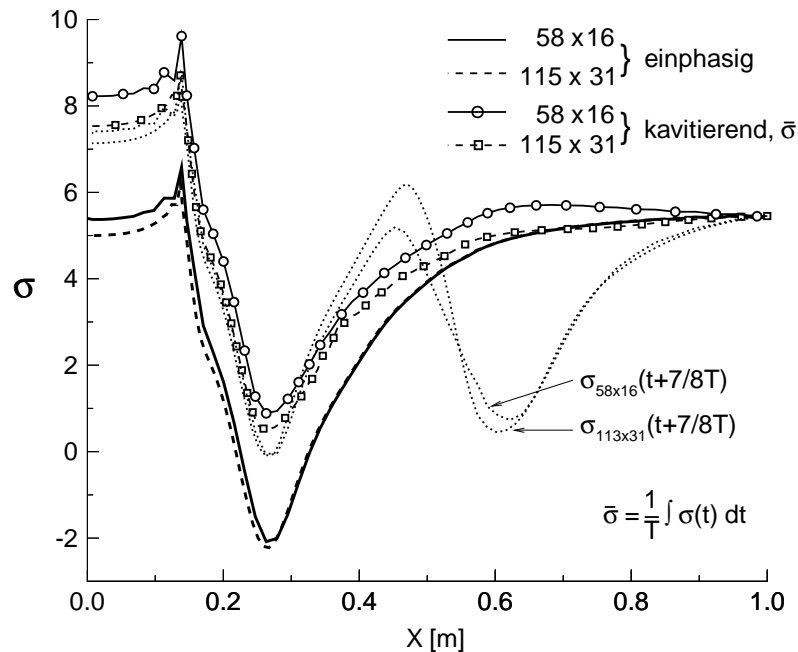


Abbildung 5.10: Vergleich der σ -Verteilung an der unteren Wand für verschiedene Gitterauflösungen. Punktiert: Momentane σ -Verteilung. $\sigma_{exit} = 5.45$, $U_{ref} = 10\text{m/s}$, $L_{ref} = 0.1\text{m}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$ Wasser, $R_{0,ref} = 3 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei $T = 293.15\text{K}$.

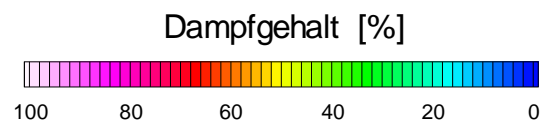
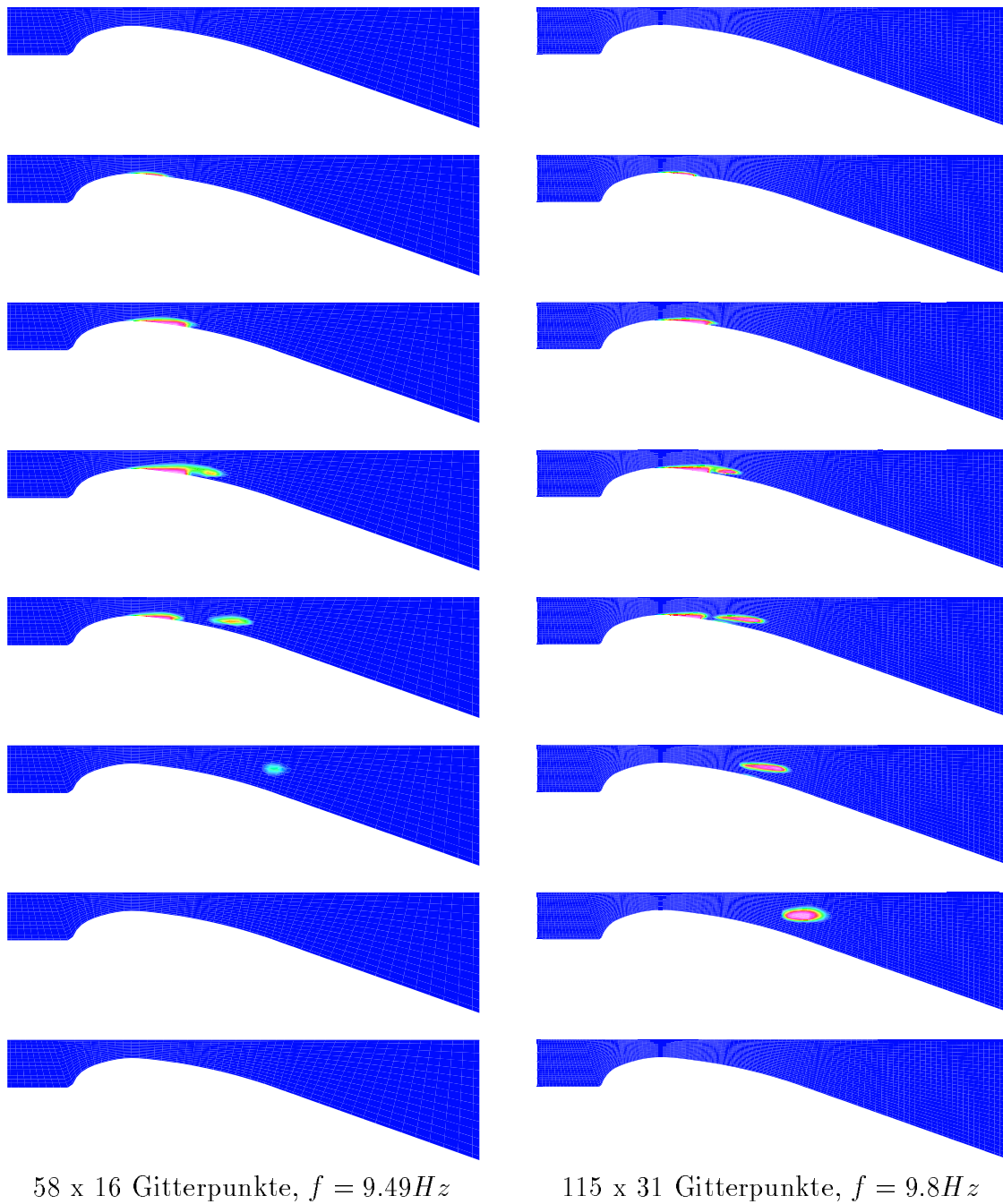


Abbildung 5.11: Verteilung des Dampfanteils in der Düse für verschiedene Gitterauflösungen. Zeitinkrement $\Delta t = T_{period}/8$. $\sigma_{exit} = 5.45$, $U_{ref} = 10\text{m/s}$, $L_{ref} = 0.1\text{m}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$ Wasser, $R_{0,ref} = 3 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei $T = 293.15\text{K}$.

Die Simulation mit dem feinen Rechengitter liefert jedoch keine neuen physikalischen Effekte im Vergleich zur Rechnung mit dem groben Gitter. Der Zyklus der Entstehung bzw. Vernichtung von Dampfvolumen einschließlich der Bildung eines Re-Entrant Jets verläuft weitgehend analog. Das unterschiedliche Verhalten beim Abschwimmen der Kavitationsgebiete wird hier primär als ein numerisch bedingter Effekt angesehen, verursacht durch numerische Dissipation.

5.2 Geschwindigkeitsmaßstabseffekt

Zur Untersuchung des Geschwindigkeitsmaßstabseffekts wird die Einströmgeschwindigkeit gegenüber dem Referenzfall um den Faktor 10 auf $U = 1\text{m/s}$ reduziert. Alle anderen Parameter werden konstant gehalten. Der numerische Zeitschritt wird um den Faktor 10 auf $\Delta t = 10^{-3}\text{s}$ erhöht, um eine gleiche zeitliche Auflösung des Wachstums bzw. Kollapsprozeß der Blasen zu garantieren. Die Simulation liefert eine periodisch kavitierende Strömung mit einer um den Faktor 10 reduzierten Frequenz. Der zeitliche Verlauf des totalen Dampfanteils ist in Abb. 5.12 dem Referenzfall mit $U_{ref} = 10\text{m/s}$ gegenübergestellt.

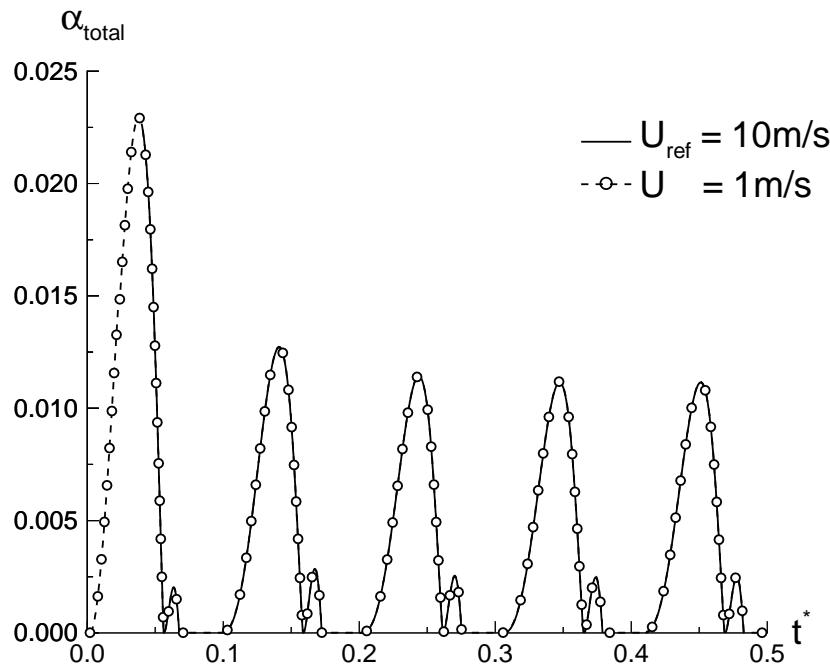


Abbildung 5.12: Zeitliche Entwicklung des Gesamt-Dampfvolumentanteils in der Düse. $t^* = U/U_{ref} \cdot t$, $\sigma_{exit} = 5.45$, $L_{ref} = 0.1\text{m}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$ Wasser, $R_{0,ref} = 3 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei $T = 293.15\text{K}$.

Aus Abb. 5.12 ist zu erkennen, daß die zeitliche Entwicklung der Dampfvolumentanteile deckungsgleich für beide Geschwindigkeiten sind. Zu korrespondierenden Zeiten liegt der gleiche integrale Dampfanteil in der Düse vor. Die weitere Analyse der Ergebnisse zeigt, daß die räumliche Verteilung des Dampfanteils zu korrespondierenden Zeiten übereinstimmt, d.h. die Dampfverteilung während einer Periode für $U = 1\text{m/s}$ ist quasi identisch zu Abb. 5.4. Die Simulation liefert eine Ähnlichkeit bzgl. der Strouhalzahl:

U_{ref}	=	10	m/s	$f = 9.49\text{Hz}$	$Str = 0.095$
U	=	1	m/s	$f = 0.95\text{Hz}$	$Str = 0.095$

Das Kavitationsmodell verhält sich daher so, wie aus Überlegungen der klassischen Ähnlichkeitsmechanik zu erwarten ist. Bei gleichem σ -Wert ergibt sich eine identische Dampfverteilung in der Düse, aufgrund der Str-Ähnlichkeit mit einer um den Faktor 10 reduzierten Frequenz. Das Modell simuliert daher keinen Maßstabseffekt. Das Experiment [44] liefert bei einer Reduktion der Geschwindigkeit ebenfalls eine Reduktion der Kavitation. In der Literatur existieren zahlreiche experimentelle Studien, die das Auftreten dieses Maßstabseffekts belegen, die Ursachen dafür sind bislang noch nicht eindeutig geklärt [12]. Es wird daher der Versuch unternommen, diesen Effekt auf Basis der hier vorgestellten Kavitationsmodellierung und Simulationsergebnisse zu erläutern. Die zweiphasige Simulation zeigt, daß der Kavitationsbeiwert im Kavitationsgebiet $\sigma_{cav} \sim -0.1$ beträgt, unabhängig von der Geschwindigkeit am Düsen Eintritt. Dieser σ_{cav} -Wert entspricht für den Fall $U = 1\text{m/s}$ einer Unterschreitung des Dampfdrucks um $\Delta p = 50\text{Pa}$, für $U_{ref} = 10\text{m/s}$ um $\Delta p = 5000\text{Pa}$. Die Blasenynamik liefert die Aussage, daß ein Keim vom Radius R erst wachstumsfähig ist, wenn gilt:

$$\Delta p = (p_B - p_\infty) > \frac{2\sigma_o}{R}, \text{ bzw.} \quad (5.5)$$

$$R > \frac{2\sigma_o}{\Delta p}, \quad (5.6)$$

wobei σ_o die Oberflächenspannung bezeichnet und p_B den Blaseninnendruck, der mit guter Näherung dem Dampfdruck p_{sat} entspricht (vgl. Kapitel 2.4.1). Mit den Zahlenwerten für Δp sind daher im Fall $U = 1\text{m/s}$ Keime ab $R_k > 3 \cdot 10^{-3}\text{m}$ wachstumsfähig, für $U_{ref} = 10\text{m/s}$ beträgt der kritische Radius $R_k = 3 \cdot 10^{-5}\text{m}$. Aufgrund der spektralen Keimverteilung in einer Flüssigkeit, vgl. dazu Abb. 1.3, sind bei $U_{ref} = 10\text{m/s}$ mehr Keime wachstumsfähig. Dies kann z.B. modelliert werden, indem der Parameter n_0 als Funktion der Druckdifferenz formuliert wird, wie in Kapitel 2.5 vorgeschlagen wurde. Ein höherer n_0 -Wert resultiert in mehr Dampfproduktion (dies wird im folgenden Kapitel 5.5 gezeigt) und der Geschwindigkeitsmaßstabseffekt kann nach der Erweiterung der Modellierung zumindest qualitativ simuliert werden.

5.3 Größenmaßstabseffekt

Zur Untersuchung des Größenmaßstabseffekts wird die Düse geometrisch ähnlich verkleinert. Die Düse wird um den Faktor 10 auf eine Gesamtlänge von 0.1 reduziert, die anderen

Parameter werden konstant gehalten. Die Simulation liefert eine periodisch kavitierende Strömung, mit einer um den Faktor 8 erhöhten Frequenz:

L_{ref}	=	0.1	m/s	$f = 9.49Hz$	$Str = 0.095$
L	=	0.01	m/s	$f = 83.52Hz$	$Str = 0.084$

Abbildung 5.13 zeigt den zeitlichen Verlauf des Gesamt-Dampfanteils α_{total} . Es ist zu erkennen, daß in der verkleinerten Düse der Dampfanteil geringer ist und kein „Nachschwinger“ auftritt. Weiterhin ist eine Frequenzverschiebung festzustellen. Die räumliche Verteilung des Wasserdampfs in der Düse ist in Abb. 5.14 dargestellt und weist erhebliche Unterschiede zum Referenzfall auf. In der kleinen Düse ($L = 0.01m$) werden geringere Spitzenwerte des Dampfanteils erreicht und das Kavitationsgebiet erstreckt sich weiter in Richtung der Düsenachse. Wesentlich ist, daß in der verkleinerten Düse kein Re-Entrant Jet entsteht, der zum Aufbrechen und Abschwimmen des Kavitationsgebiets führt.

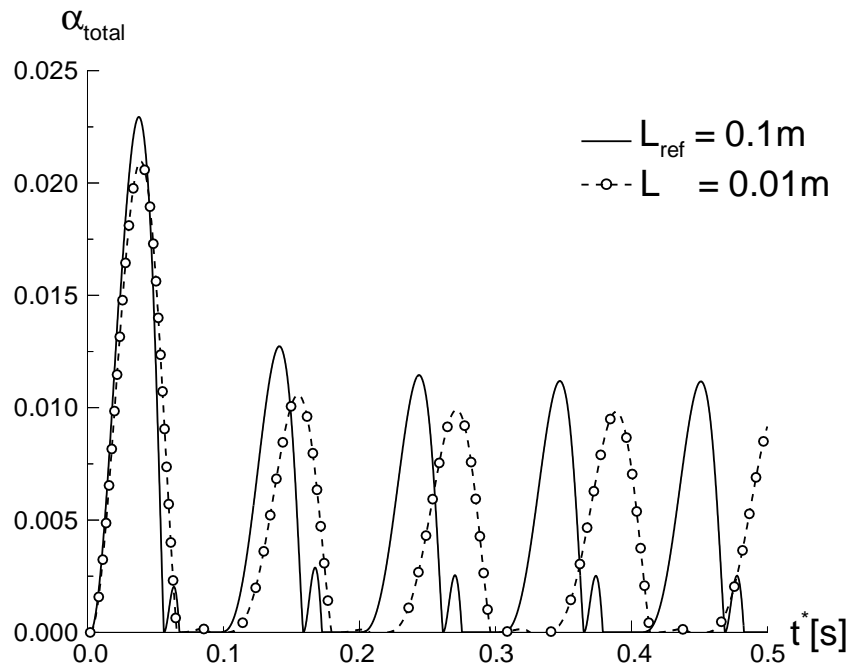
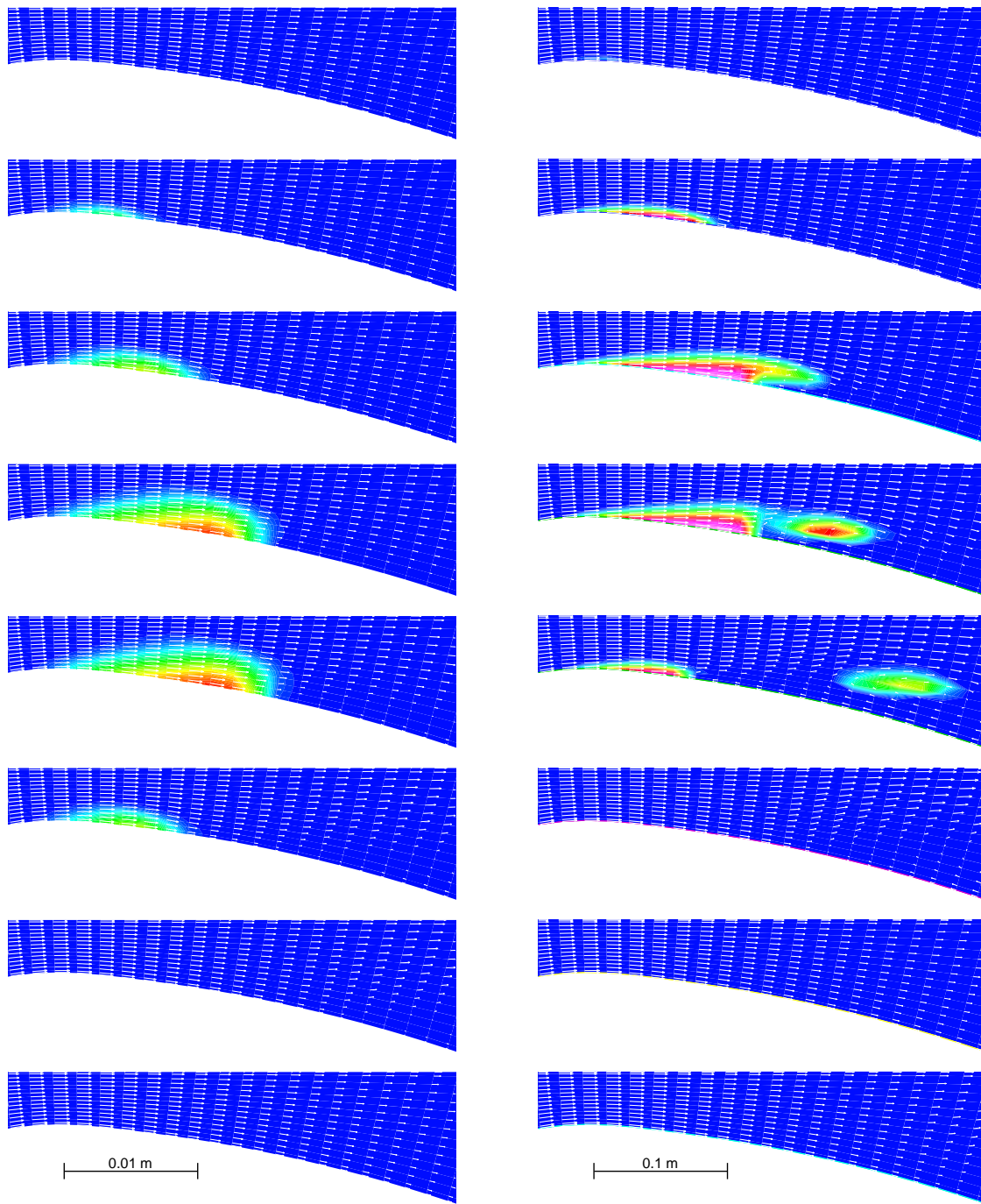


Abbildung 5.13: Zeitliche Entwicklung des Gesamt-Dampfanteils in der Düse. $t^* = L_{ref}/L \cdot t$, $\sigma_{exit} = 5.45$, $U_{ref} = 10m/s$, $n_{0,ref} = 10^8$ Keime/ m^3 Wasser, $R_{0,ref} = 3 \cdot 10^{-5}m$, Wasser bei $T = 293.15K$.

Wird die klassische Ähnlichkeitsmechanik zur Vorhersage der Strömung verwendet, ist bei gleichem σ -Wert und Ähnlichkeit bzgl. der Str -Zahl die gleiche Dampfverteilung in der verkleinerten Düse zu erwarten. Das Kavitationsmodell simuliert einen echten Maßstabseffekt, d.h. eine Abweichung von dieser Vorhersage. Aus dem Experiment [44] ist bekannt, daß die Verkleinerung der Geometrie zu einer Reduktion der Kavitationseffekte führt. Das Kavitationsmodell stimmt rein qualitativ mit dieser experimentellen Aussage überein.



$L = 0.01\text{m}, f = 83.5\text{Hz}, \text{Str} = 0.084$

$L_{ref} = 0.1\text{m}, f = 9.5\text{Hz}, \text{Str} = 0.095$

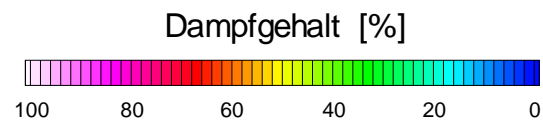


Abbildung 5.14: Größenmaßstabseffekt. Verteilung des Dampfanteils und Geschwindigkeiten in einem Ausschnitt (vgl. Abb. 5.2), Zeitinkrement $\Delta t = T_{period}/8$. $\sigma_{exit} = 5.45$, $U_{ref} = 10\text{m/s}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$ Wasser, $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei 293.15K .

5.4 Variation des Kavitationsbeiwerts

In diesem Kapitel wird der Einfluß des Kavitationsbeiwerts auf die Entstehung von Dampf- volumen untersucht. Der Kavitationsbeiwert wird ausgehend von einem hohen Wert am Düsenaustritt schrittweise reduziert. Die Berechnungen werden für die gegenüber dem Referenzfall verkleinerten Düse durchgeführt, d.h. $L=0.01\text{m}$. Alle anderen Parameter entsprechen denen des Referenzfalls. Für diese Untersuchungen wurde die verkleinerte Düse gewählt, da deren geometrischen Abmaße eher der typischen Größenordnung für Kavitations- onsexperimente entspricht.

In Abb. 5.15 ist der maximal in der Düse auftretende Dampfanteil α_{max} und die Frequenz der kavitierenden Strömung in Abhängigkeit des Kavitationsbeiwerts am Düsenaustritt aufgetragen. Bei hohem Kavitationsbeiwert stellt sich zunächst eine stationär kavitierende Strömung ein, es wird nur ein geringer maximaler Dampfanteil von 5-10% erreicht. Die Verteilung des Dampfanteils in der Düse und des σ -Verlaufs an der Düsenwand sind in Abb. 5.16 dargestellt. Man beachte, daß hier eine angepaßte die Skala für den Dampfanteil verwendet wird, die nur den Wertebereich von 0 bis maximal 10 % abdeckt.

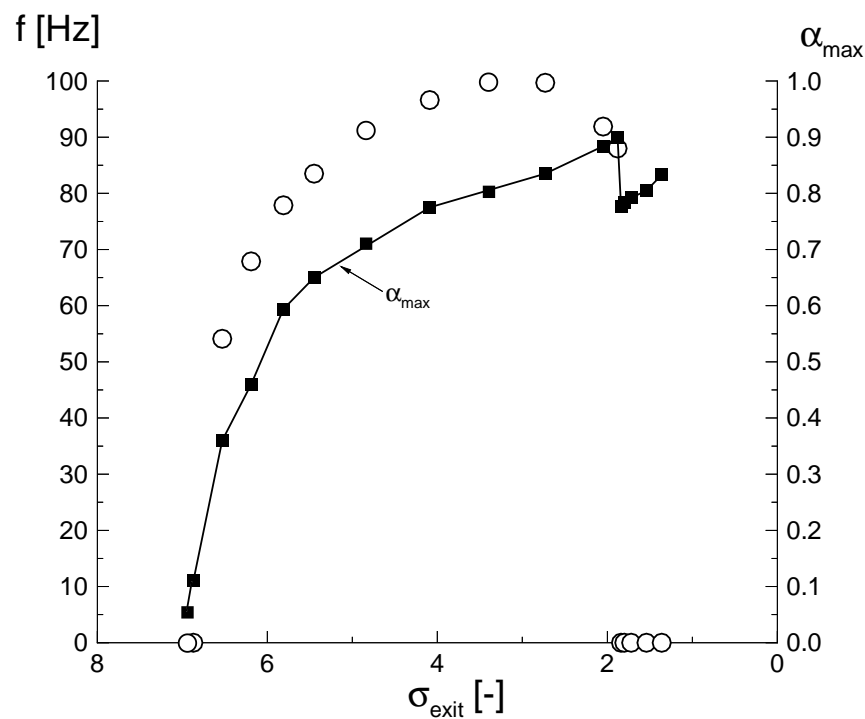


Abbildung 5.15: Einfluß des Kavitationsbeiwerts am Düsenaustritt σ_{exit} auf die Frequenz und den maximalen Dampfanteil. $U_{ref} = 10\text{m/s}$, $L = 0.01\text{m}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$, $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei $T = 293.15\text{K}$.

Ein kleines Kavitationsgebiet entwickelt sich im Bereich des engsten Querschnitts, der Druckverlauf der kavitierenden Strömung liegt oberhalb der einphasigen Rechnung, der Druck im Kavitationsgebiet stellt sich leicht unterhalb des Dampfdrucks ein, bei $-0.2 < \sigma_{CAV} - 0.1$. Dieser Wertebereich ist charakteristisch und wird auch in den Düsenrechnungen für verschiedene σ_{exit} erhalten. Dieser Typ einer kavitierenden Strömung kann mit dem Begriff der beginnenden Kavitation bezeichnet werden.

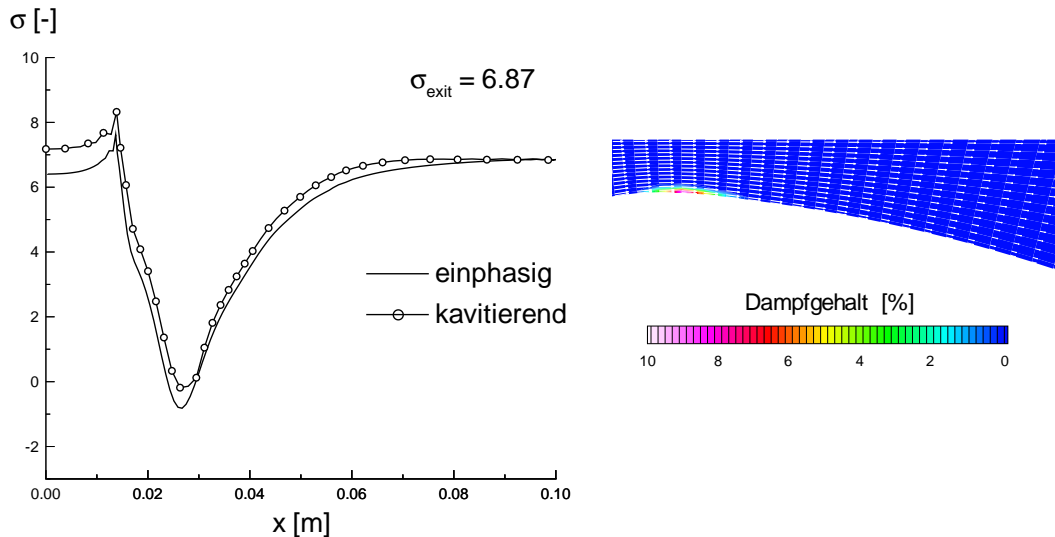
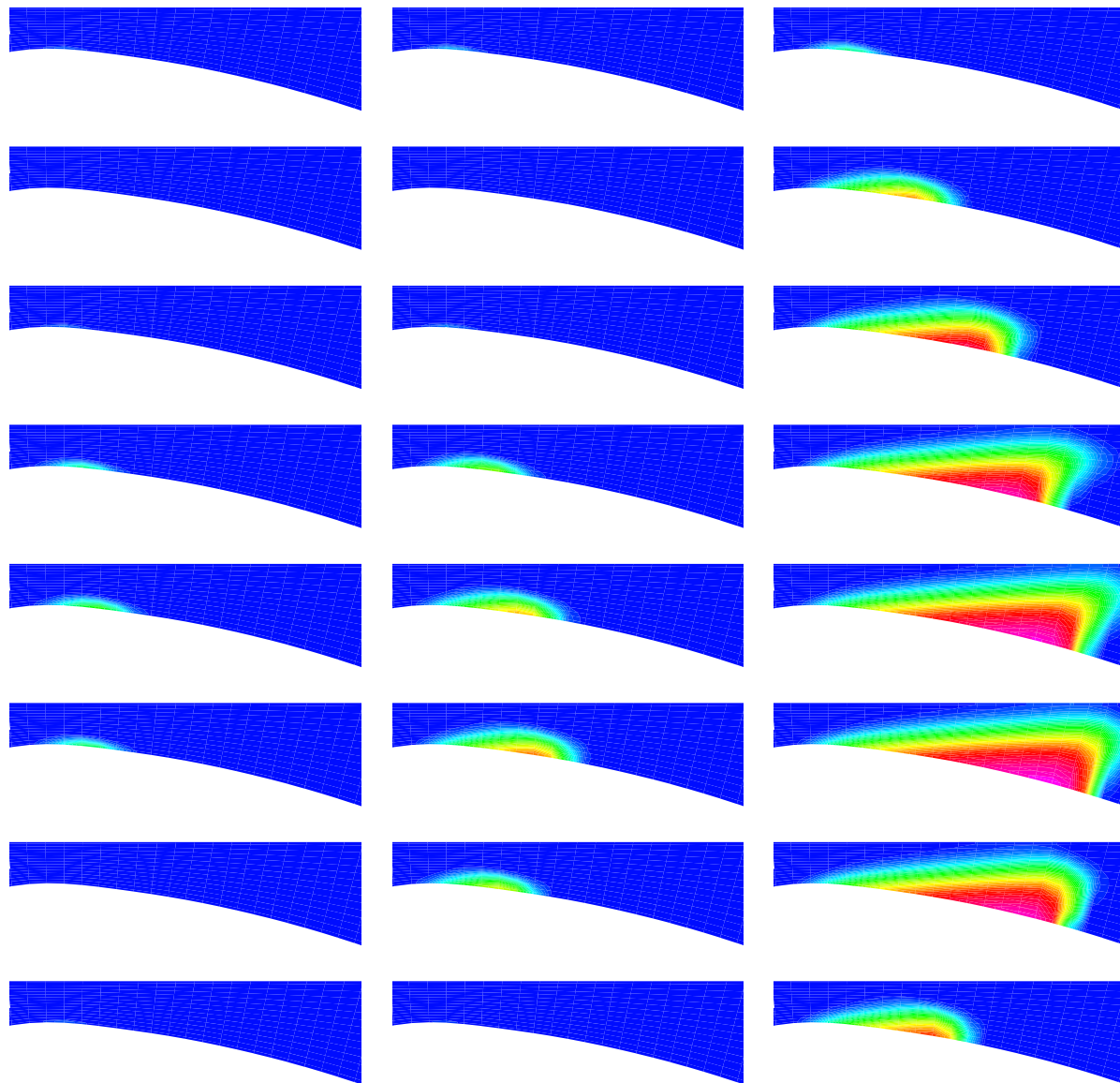


Abbildung 5.16: Links: σ -Verlauf an der Düsenwand. Rechts: Verteilung des Dampfanteils in einem Ausschnitt hinter dem engsten Querschnitt. Stationär, $\sigma_{exit} = 6.87$, $U_{ref} = 10\text{m/s}$, $L = 0.01\text{m}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$, $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei $T = 293.15\text{K}$.

Eine Absenkung des Kavitationsbeiwerts führt zu einer periodisch kavitierenden Strömung, deren Frequenz mit abnehmendem Kavitationsbeiwert bis zu einem Maximalwert von ca. 100 Hz bei $\sigma_{exit} = 2.73$ ansteigt, wie anhand Abb. 5.15 zu erkennen ist. Die zeitliche Verteilung des Dampfanteils ist in Abb. 5.17 für verschiedene Kavitationsbeiwerte am Düsenaustritt dargestellt. Das Kavitationsgebiet entsteht jeweils nahe des engsten Querschnitts und wächst zunächst in Strömungsrichtung an. Das Kavitationsgebiet kollabiert, die Entstehung eines Re-entrant Jets, der in das Gebiet eindringt bzw. ein Teil davon abschnürt, sowie das Abschwimmen einer Kavitationswolke werden nicht beobachtet. Diese Form der zyklischen Entstehung bzw. Vernichtung des Kavitationsgebiets kann als „pulsierend“ beschrieben werden.



$$\sigma_{exit} = 6.53$$

$$f = 54.1Hz, \text{ Str} = 0.054$$

$$\sigma_{exit} = 5.81$$

$$f = 77.9Hz, \text{ Str} = 0.078$$

$$\sigma_{exit} = 2.73$$

$$f = 99.7Hz, \text{ Str} = 0.100$$

Dampfgehalt [%]

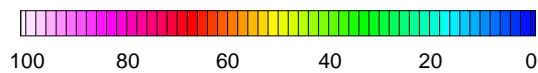


Abbildung 5.17: Variation des Kavitationsbeiwerts am Düsenaustritt σ_{exit} . Verteilung des Dampfanteils in einem Ausschnitt (vgl. Abb. 5.2), Zeitinkrement $\Delta t = T_{period}/8$. $U_{ref} = 10\text{m/s}$, $L = 0.01\text{m}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$, $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei 293.15K .

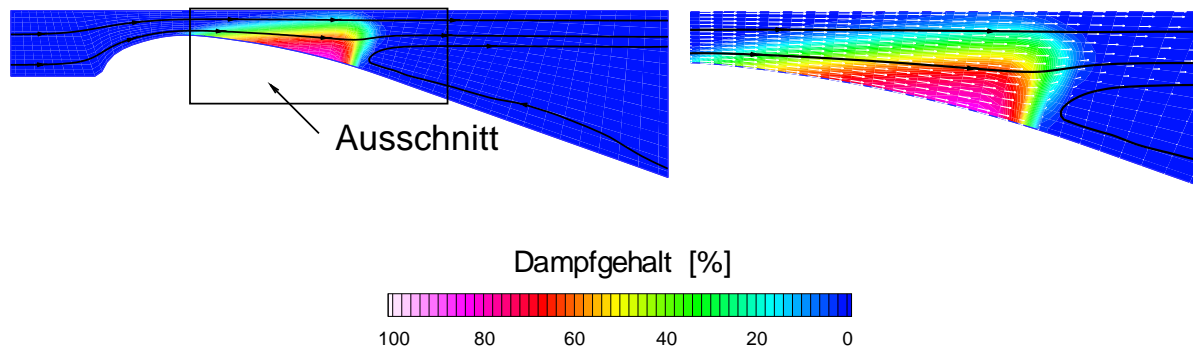


Abbildung 5.18: Links: Verteilung des Dampfanteils in der Düse. Rechts: Dampfanteil, Vektoren und Stromlinien im Ausschnitt (siehe rechts). Stationär, $\sigma_{exit} = 1.36$, $U_{ref} = 10\text{m/s}$, $L = 0.01\text{m}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$, $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei $T = 293.15\text{K}$.

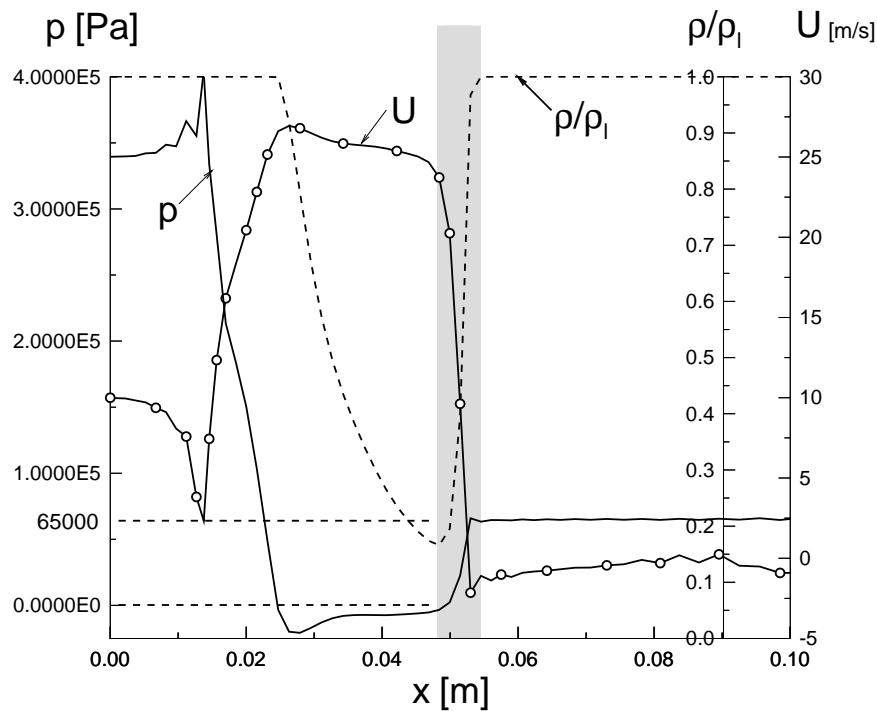


Abbildung 5.19: Verlauf der Geschwindigkeitskomponente u , des Drucks p und der Dichte ρ an der Düsenwand. $\sigma_{exit} = 1.36$, $U_{ref} = 10\text{m/s}$, $L = 0.01\text{m}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$, $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei $T = 293.15\text{K}$.

Eine weitere Absenkung des Kavitationsbeiwerts führt zu einer Reduktion der Frequenz und letztlich zu einer stationären Kavitationswolke, die in Abb. 5.18 für $\sigma_{exit} = 1.36$ dargestellt wird. Man erkennt eine ausgeprägte Rezirkulationszone im Anschluß an das Kavita-

tionsgebiet. Abbildung 5.19 zeigt den Verlauf von Dichte, Druck und der Geschwindigkeit u an der Düsenwand. Interessant ist der steile Drucksanstieg am Ende der Kavitations-schicht, der Drucksprung kann mittels einer 1-D Betrachtung mit dem Impulssatz und der Kontinuität über das Interface (in Abb. 5.18 grau unterlegt) abgeschätzt werden:

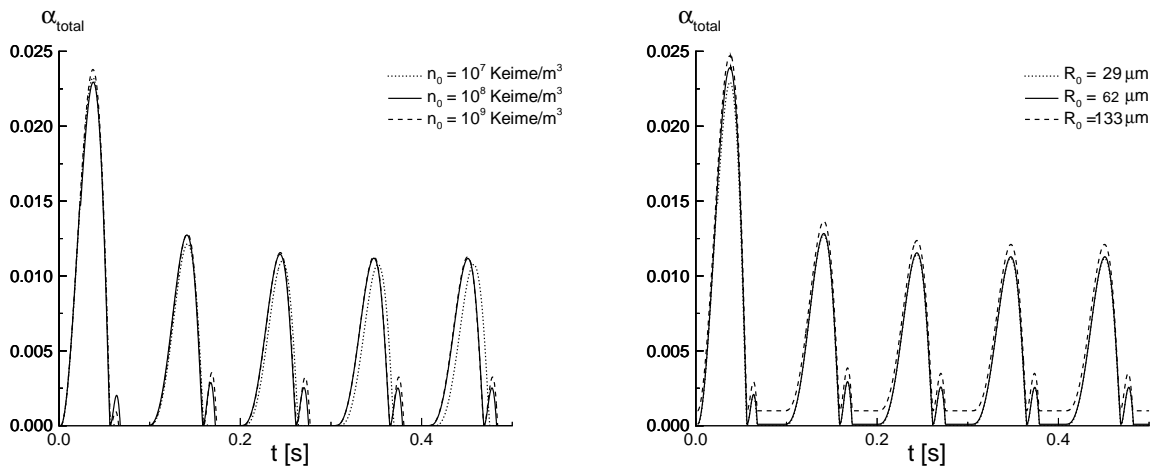
$$p_2 - p_1 = \varrho_1 u_1^2 \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) = 160 \cdot 23.7^2 (1 - 0.16) \text{Pa} = 71000 \text{Pa}.$$

Zum Vergleich liefert die Simulation einen Drucksanstieg von $\Delta p = 69000 \text{Pa}$, die Abschätzung ist daher mit guter Näherung gültig.

Im Zusammenhang mit diesen Untersuchungen kann festgestellt werden, daß sich bei einem hohem Kavitationsbeiwert zunächst eine stationär kavitierende Strömung einstellt, die dann instationär wird und sich bei niedrigem Kavitationsbeiwert wiederum eine stationär kavitierende Strömung einstellt. Qualitativ ist dieses Verhalten auch von Experimenten an Profilen bekannt. Bei relativ hohem Kavitationsbeiwert bildet sich eine quasi-stationäre Schichtkavitation, vgl. Abb 1.5 (b), die bei Absenkung des σ -Werts instationär aufbricht, vgl. Abb 1.5 (c) und bei sehr niedrigem Kavitationsbeiwert in eine quasi-stationäre Superkavitation übergeht.

5.5 Fluidqualitätseffekt

Die Fluidqualität wird im Rahmen der Modellierung durch die Parameter Keimradius und Keimanzahl definiert, deren Einfluß auf die Entwicklung der Kavitation im folgenden untersucht werden. Die Geometrie der Düse und Randbedingungen entsprechen dem Referenzfall. Abbildung 5.20 zeigt die zeitliche Entwicklung des totalen Dampfanteils in der Düse bei Variation der Keimanzahl (a) und des Keimradius (b). Die Kurvenverläufe weichen bei der Variation des Keimgehalts nur unwesentlich voneinander ab. Die Variation des Keimradius hat zunächst eine Anhebung des α_{total} Grundniveaus zur Folge. Das erzeugte Dampfvolumen ist die Differenz zwischen dem momentanen α_{total} Wert und diesem Grundwert. Aus der Abbildung ist zu erkennen, daß die Kurven jeweils um einen konstanten Wert $\Delta\alpha$ verschoben sind, d.h. die Erzeugung und Vernichtung von Dampfvolumen ist für die untersuchten Keimradien quasi identisch.



(a) Variation der Keimanzahl n_0 , $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

(b) Variation des Keimradius R_0 , $n_{0,ref} = 10^8 \text{ Keime/m}^3 \text{ Wasser}$

Abbildung 5.20: Zeitliche Entwicklung des Gesamt-Dampfvolumenanteils in der Düse. $\sigma_{exit} = 5.45$, $U_{ref} = 10 \text{ m/s}$, $L_{ref} = 0.1 \text{ m}$, Wasser bei $T = 293.15 \text{ K}$.

Die Fluidqualität beeinflusst damit nur unwesentlich die Ergebnisse der Simulationen. Dies ist ebenfalls in Abb. 5.21 zu erkennen. Die räumliche Verteilung des Dampfvolumens während einer Periode, sowie die Entstehung des Re-Entrant Jets, wird vom Keimgehalt unwesentlich beeinflusst. Im Fall von $n_0 = 10^7 \text{ 1/m}^3$ ist die Kavitation im Wirbelzentrum etwas schwächer ausgeprägt, d.h. der maximale Dampfanteil beträgt im Zentrum nur 20%, während bei den höheren Keimgehalten ca. 50% erreicht werden.

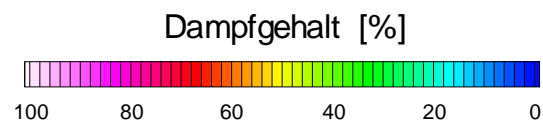
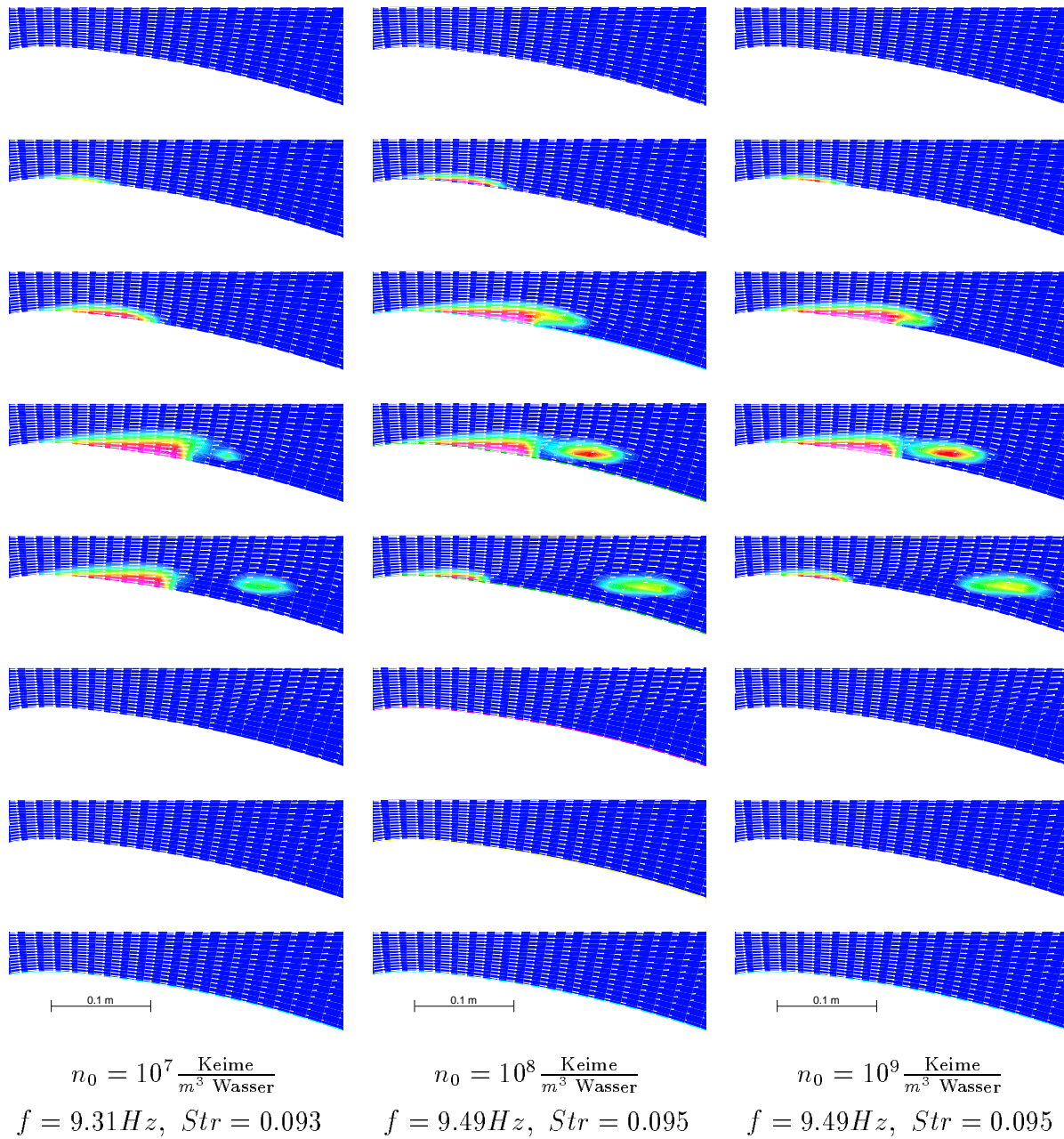


Abbildung 5.21: Fluidqualitätseffekt infolge Variation des Keimgehalts. Verteilung des Dampfanteils und Geschwindigkeiten in einem Ausschnitt (vgl. Abb. 5.2), Zeitinkrement $\Delta t = T_{\text{period}}/8$. $\sigma_{\text{exit}} = 5.45$, $U_{\text{ref}} = 10 \text{ m/s}$, $L_{\text{ref}} = 0.1 \text{ m}$, $R_{0,\text{ref}} = 3.0 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, Wasser bei 293.15 K .

5.6 Thermische Effekte: Variation der Fluidtemperatur

Der thermische Effekt wird durch die Hinzunahme der Enthalpie-Gleichung modelliert. Die Simulation der kavitierenden Düsenströmung mit Berücksichtigung thermischer Effekte wird unter Verwendung der Wachstumsbeziehung nach Rayleigh durchgeführt. Wie in Kapitel 2.4.3 erläutert, ist diese Gleichung nur bedingt zur Modellierung thermisch kontrollierten Wachstums geeignet, da die Wachstumsgeschwindigkeit überschätzt wird. Die im nachfolgenden gezeigten Ergebnisse sind daher vorsichtig zu bewerten und können nur zur Ermittlung von rein qualitativen Aussagen herangezogen werden.

Die Bedeutung der Enthalpie-Gleichung wird zunächst anhand der folgenden Abschätzung erläutert, bevor Ergebnisse der numerischen Simulation präsentiert werden. Betrachtet wird eine Dampfblase in einem mit Wasser gefüllten Behälter mit dem Volumen V . Das Modell „Behälter“ wird hier im Gegensatz zum Modell „eines unendlich ausgedehnten Fluids“ verwendet, um eine direkte Übertragbarkeit der Aussagen auf die Numerik herzustellen. Der Behälter entspricht in der Numerik daher einer Rechenzelle. Die Ausgangstemperatur beträgt $T = 136^\circ\text{C}$, der Druck im Behälter $p = 3.5\text{bar}$, die Blase befindet sich im thermischen und mechanischen Gleichgewicht. Der Druck wird nun schlagartig auf $p_1 = 1\text{bar}$ abgesenkt. Auf Strömungen übertragen bedeutet dies, daß die Blase in ein Gebiet konvektiert wird, in dem sie wachstumsfähig ist. Abbildung 5.22 zeigt den zeitlichen Verlauf der Temperatur in der Blase.

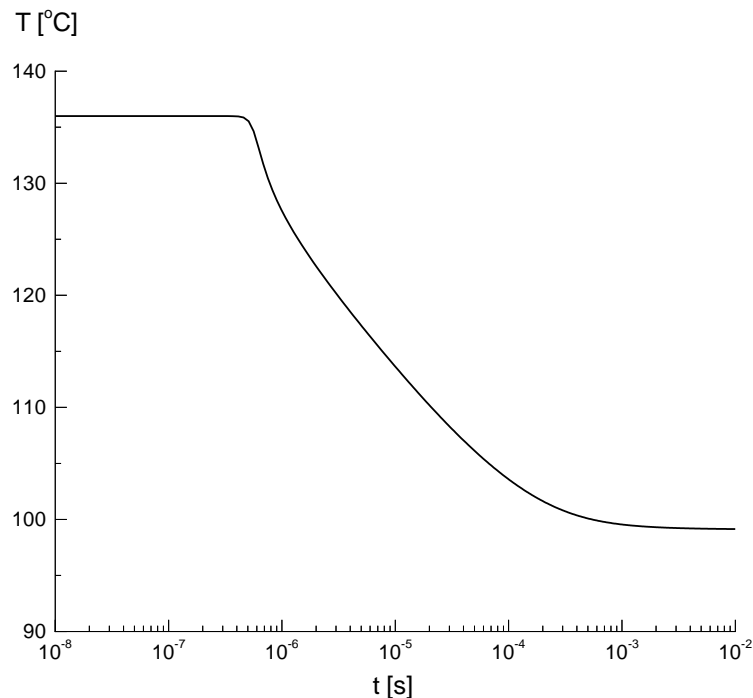


Abbildung 5.22: Blaseninnentemperatur als Funktion der Zeit. Blasenwachstum in überhitztem Wasser, Systemtemperatur: 136°C , Systemdruck: 1 bar, Überhitzung 36°C .

Die Blaseninnentemperatur sinkt bis auf die zum Behälterdruck p_1 korrespondierende Sättigungstemperatur. Die Blase wächst von Radius R_0 auf R_1 an (entsprechendes Wasservolumen verläßt den Behälter) und der Dampfanteil im Behälter steigt von α_0 auf α_1 an. Durch die Verdampfung wird der Flüssigkeit Wärme entzogen, die mittlere Temperatur im Behälter nimmt daher ab. Die Abschätzung der Abkühlung kann mittels einer vereinfachten Wärmebilanz erfolgen

$$V (1 - \alpha) \cdot \varrho_l c_{p,l} \Delta T = V \alpha \varrho_v (L + c_{p,v} \Delta T) \quad (5.7)$$

$$\Delta T = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{L(T) \varrho_v(T)}{c_{p,l}(T) \varrho_l(T)}. \quad (5.8)$$

Die in Gl. 5.8 vorkommenden Stoffeigenschaften sind temperaturabhängig, insbesondere die Dichte des Dampfes und der Sättigungsdampfdruck. Aus den bisherigen Rechnungen ergab sich, daß der Dampfanteil in einer Rechenzelle bis auf einen maximalen Wert von 95% ansteigt. Unter der Annahme, daß der Dampfanteil von $\alpha_0 = 0$ auf $\alpha_1 = 0.95$ ansteigt, zeigt Abb. 5.23 die gemäß Gl. 5.8 berechnete Abkühlung als Funktion der Behälterausgangstemperatur T .

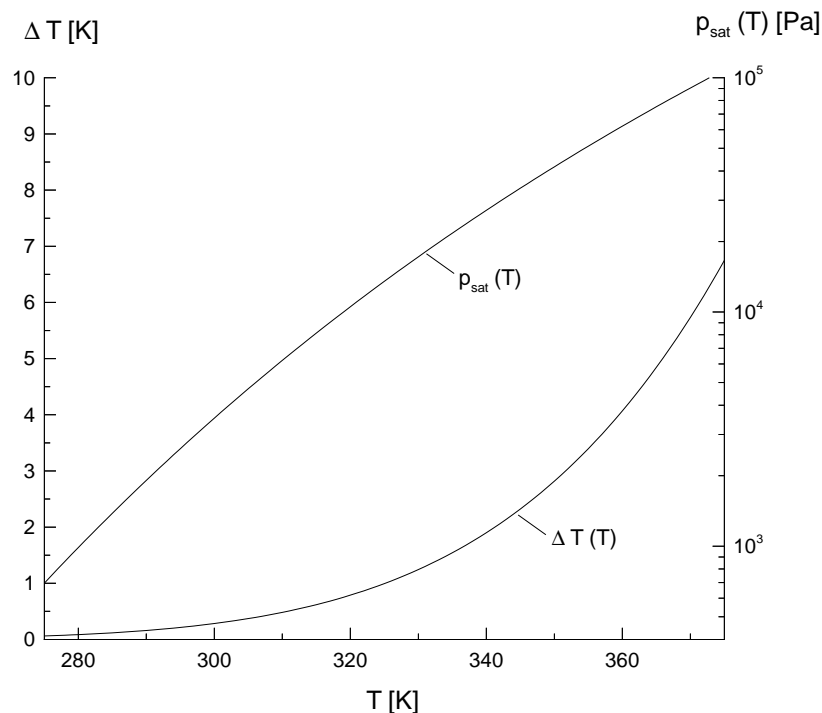


Abbildung 5.23: Abkühlung des Wasser/Wasserdampfgemischs infolge Verdampfung (nach Gl. 5.8) und Sättigungsdampfdruck als Funktion der Ausgangstemperatur.

Aus dieser Darstellung ist zu erkennen, daß die Abkühlung ΔT mit der Ausgangstemperatur im Behälter steigt. Weiterhin ist der Dampfdruck als Funktion der Temperatur für Wasser dargestellt, der Druck ist logarithmisch aufgetragen. Bei hohen Temperaturen

resultiert eine kleine Änderung ΔT in einer massiven Änderung des Dampfdrucks. Bei einer Temperatur von $T = 20^\circ C$ wird eine Abkühlung von $\Delta T = 0.2 K$ berechnet. Damit sinkt der Dampfdruck von $p_{sat}(293.15 K) = 2335 Pa$ auf $p_{sat}(292.95 K) = 2330 Pa$. Für den Fall von $T = 100^\circ C$ beträgt $\Delta T = 6 K$ und der Dampfdruck reduziert sich um ca. $20000 Pa$.

Die Reduktion des Dampfdrucks p_{sat} hat für das Wachstum einer Blase zur Folge, daß die Wachstumsgeschwindigkeit durch den thermischen Effekt betragsmäßig reduziert wird:

Wachstum: $\dot{R}_{Ray} = \sqrt{\frac{2(p_{sat}-p)}{3\rho_l}}$ mit $p_{sat}(T) - p > 0$. Durch die Verdampfung wird die Temperatur reduziert, $p_{sat}(T)$ nimmt ab und die treibende Druckdifferenz wird kleiner.

Kollaps: $\dot{R}_{Ray} = \sqrt{\frac{2(p-p_{sat})}{3\rho_l}}$ mit $p - p_{sat}(T) > 0$. Durch die Kondensation wird die Temperatur erhöht, $p_{sat}(T)$ steigt und die treibende Druckdifferenz wird ebenfalls reduziert.

Die Stärke der Dämpfung hängt von der absoluten Änderung des Dampfdrucks ab. Bei niederen Temperaturen ($20^\circ C$) ändert sich p_{sat} nur gering (5 Pa), der thermische Effekt auf die Wachstumsgeschwindigkeit kann daher vernachlässigt werden ($p_{sat}(T) - p > O(1000 Pa)$). Bei hohen Temperaturen beträgt die Änderung des Dampfdrucks mehrere 1000 Pa und ein starker dämpfender Effekt ist zu erwarten.

Die diskutierten Effekte der Temperaturänderung auf das Blasenwachstum sind auch für kavitierende Strömungen gültig. Der Unterschied „ruhende Blase“ im Behälter und „Strömung“ liegt darin, daß bei der Berechnung der Abkühlung des Gemischs (Gl. 5.8) noch der konvektive Transport berücksichtigt werden muß. Dies leistet die vorgestellte Transportgleichung für die Gemischenthalpie.

Ein erster Vergleich einer kavitierenden Düsenströmung mit und ohne Berücksichtigung thermischer Effekte zeigt Abb. 5.24. Die verwendete Geometrie und die Randbedingungen sind aus Abb. 5.2 ersichtlich. Das Fluid ist Wasser, die Fluidtemperatur am Düsen Eintritt beträgt $T = 120^\circ C$ und liegt damit in einer Größenordnung, bei der mit thermischer Dämpfung gerechnet werden muß. Als Wachstumsrelation wurde die Gleichung nach Rayleigh eingesetzt, mit temperaturabhängigem Sättigungsdampfdruck.

Die Simulation liefert unter den gewählten Bedingungen bei Berücksichtigung / Nichtberücksichtigung thermischer Effekte eine periodisch kavitierende Strömung. Die Frequenz bei Berücksichtigung thermischer Effekte beträgt $f_{therm}=8.8 Hz$ und ist damit geringer als die Frequenz von $f=10.2 Hz$ ohne Berücksichtigung thermischer Effekte. Hier wird die dämpfende Wirkung des thermischen Effekts bereits erkennbar. Weitere Testrechnungen bestätigen den Rückgang der Frequenz mit steigender Fluidtemperatur, so beträgt die Frequenz bei $150^\circ C$ nur noch 8.0 Hz.

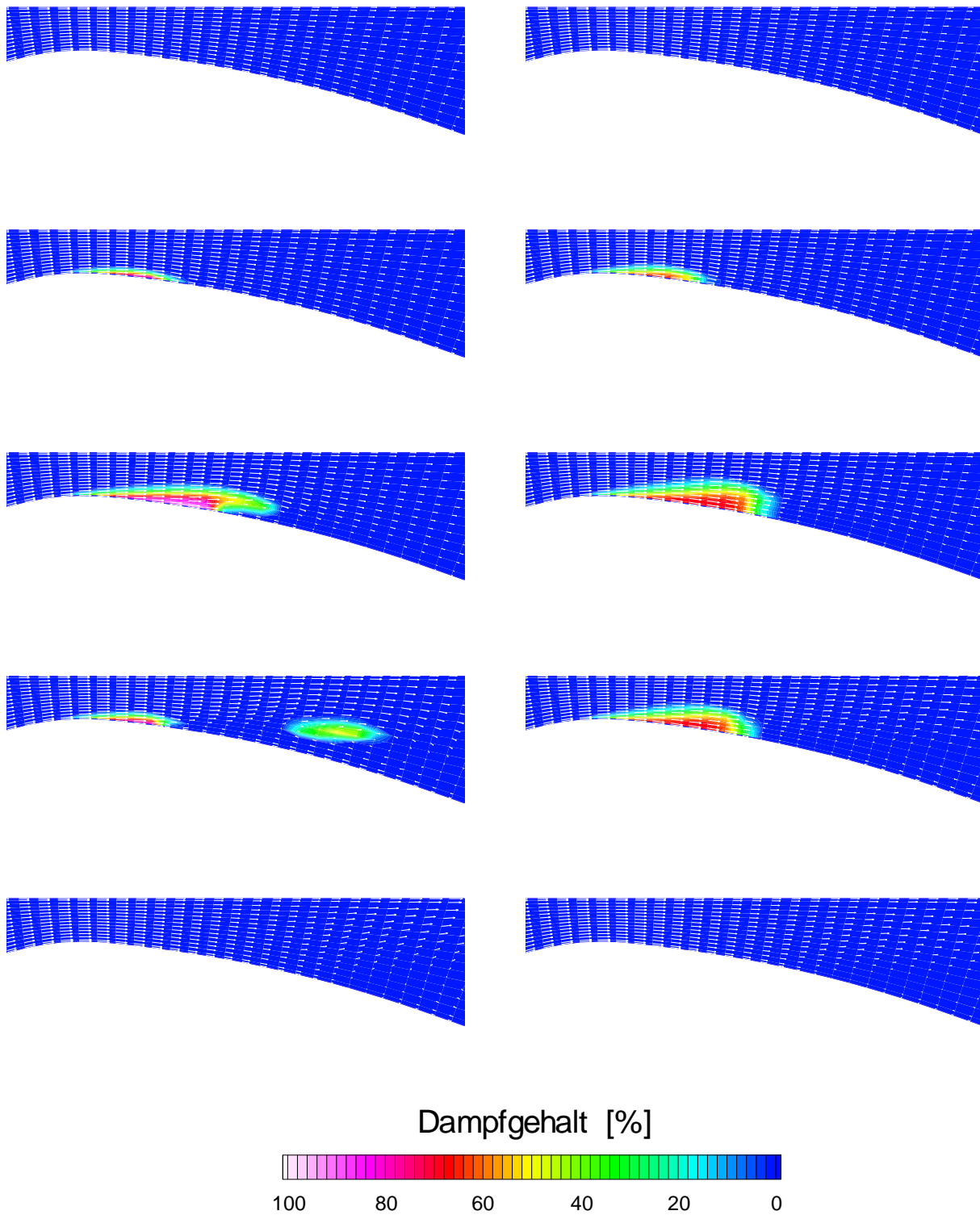


Abbildung 5.24: Verteilung des Dampfanteils und Geschwindigkeitsvektoren bei Nicht-Berücksichtigung (links, $f = 10.2 \text{ Hz}$) bzw. Berücksichtigung (rechts, $f = 8.8 \text{ Hz}$) von thermischen Effekten. Zeitinkrement: $\Delta t = T_{\text{period}}/5$. $\sigma_{\text{exit}} = 5.45$, $U_{\text{ref}} = 10 \text{ m/s}$, $L_{\text{ref}} = 0.1 \text{ m}$, $n_{0,\text{ref}} = 10^8 \text{ Keime/m}^3$ Wasser, $R_{0,\text{ref}} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$. Wasser bei $T = 120^\circ \text{ C}$.

Für den hier gezeigten Fall ist neben der Frequenzreduktion der dämpfende thermische Einfluß anhand des Dampfanteils erkennbar. Der maximale Dampfanteil beträgt 76%, für den Fall ohne thermische Effekte werden 95% erreicht. Daraus folgt, daß die Blasen im thermisch gedämpften Fall kleinere Maximalradien erreichen. Die thermische Dämpfung verhindert weiterhin die Bildung eines Re-entrant Jets und das Abschwimmen einer Blasenwolke. Im Fall ohne die Berücksichtigung von thermischen Effekten verursacht die Jet-dynamik die Entstehung von lokalen Druckspitzen an der Düsenwand, die im thermisch gedämpften Fall nicht beobachtet werden.

Eine weitere Erhöhung der Fluidtemperatur läßt eine nochmalige Reduktion der Frequenz erwarten, die von der Simulation bestätigt wird. Abbildung 5.25 zeigt die Frequenz der kavitierenden Strömung in Abhängigkeit der Wassertemperatur am Eintritt der Düse. Mit steigender Temperatur verursacht die thermische Dämpfung einen Abfall der Frequenz, ab ca. $T = 200^\circ\text{C}$ stellt sich eine durch thermische Dämpfung erzwungene stationäre Kavitation ein.

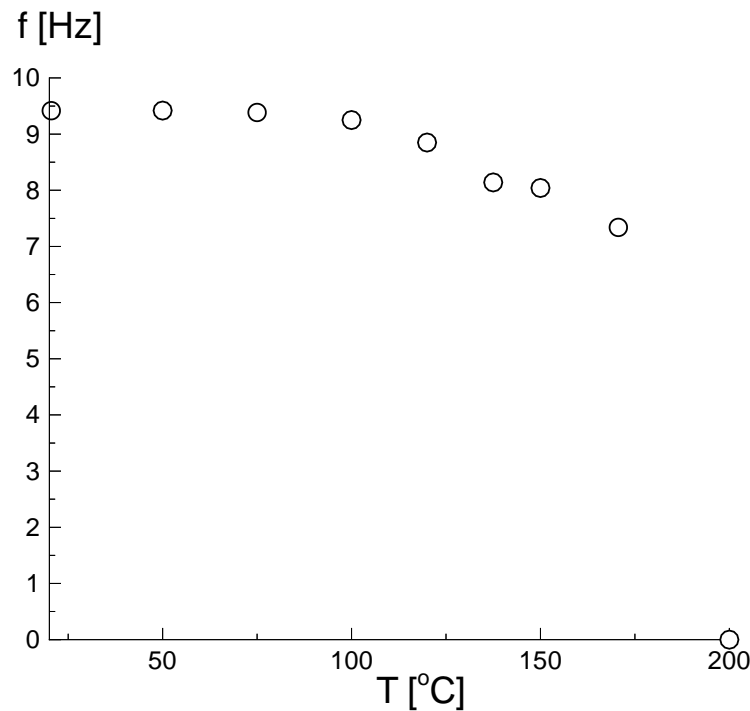


Abbildung 5.25: Einfluß der Wassertemperatur am Eintritt der Düse auf die Frequenz. $\sigma_{exit} = 5.45$, $U_{ref} = 10\text{m/s}$, $L_{ref} = 0.1\text{m}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$, $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5}\text{m}$.

6 Kavitation an einem NACA 0015 Profil

6.1 Kavitierende Profillumströmung - Referenzfall

6.1.1 Experiment

Im Rahmen einer Versuchsreihe wurden von Keller und Arndt [58] an einem NACA 0015 Profil Messungen bei verschiedenen Kavitationsbeiwerten und Anstellwinkeln durchgeführt. Zum Vergleich mit Numerik wurde der Fall mit $\sigma_{ref} = 1.0$ und $U = 12\text{m/s}$ bei einem Anstellwinkel von $\alpha_A = 6^\circ$ ausgewählt, da dieser mit recht guter Näherung als zweidimensional bezeichnet werden kann und sich eine periodisch kavitierende Strömung einstellt. Abbildung 6.1 zeigt eine Periode der instationär kavitierenden Strömung, die Frequenz beträgt $f_{exp} \sim 16$ Hz. Die Zeit läuft von links oben nach rechts unten, das Profil ist in der Draufsicht gezeigt. Die Position der Profilnase sowie der Hinterkante sind am oberen Bildrand durch Markierungen angedeutet. Im folgenden werden die Einzelbilder kurz erläutert und die zu sehenden Effekte unter Verwendung der Numerischen Ergebnisse zu erklären versucht.

Bild 1: Die Entwicklung eines primären Kavitationsgebiets beginnt an der Profilnase und es wächst in Strömungsrichtung an. Das Kavitationsgebiet ist klar, fast durchsichtig und kann daher als klassische Schichtkavitation betrachtet werden. Im Bereich der Profilmitte ist noch ein zweites, größeres Kavitationsgebiet zu erkennen, das aufgrund der schaumartig, milchigen Struktur als Wolkenkavitation identifiziert werden kann. Dieses Gebiet stammt noch vom vorherigen Zyklus und schwimmt ab.

Bild 2: Das Primärgebiet wächst weiter an, das Ende des Gebiets ist nicht mehr durchsichtig. Dies kann durch die Entstehung eines Re-entrant Jets erklärt werden, der von hinten in das Gebiet eindringt und das weitere Anwachsen der Schicht in unmittelbarer Profilnähe behindert. Das sekundäre Kavitationsgebiet schwimmt ab, wobei eine Abrollbewegung zu erkennen ist. D.h. das Wasser strömt im Bereich der Profilmitte nach oben, überströmt das Kavitationsgebiet und wird an der Hinterkante wieder nach unten bzw. von hinten in das Kavitationsgebiet gesaugt. Die Simulation liefert einen Wirbel auf der Profiloberseite, in dessen Zentrum Kavitationsblasen vorliegen. Der Wirbel dreht im Urzeigesinn, das Momentanbild impliziert ebenfalls diese Drehrichtung.

Bild 3 + 4: Das Primärkavitationsgebiet wächst weiter an. Die vordere Hälfte ist durchsichtig, während die zweite Hälfte milchig erscheint. Der Übergangsbereich durchsichtig-milchig wird hier als die momentane Position der Spitze des Re-entrant Jets interpretiert. Interessant ist, daß die Position des Übergangs sich kaum verändert (bei $1/4 \leq x/L_c \leq 1/3$), obwohl das Kavitationsgebiet sich weiter in Richtung Hinterkante ausdehnt. Das sekundäre Gebiet schwimmt ab und kollabiert.

Bild 5 + 6: Das primäre Kavitationsgebiet wächst weiter in Strömungsrichtung an. Die Berandung des Kavitationsgebiets ist als sehr scharfer heller Bereich zuerkennen. Auffällig ist, daß keine Blasenwolken zu erkennen sind, die sich aus dem primären Kavitationsgebiet herauslösen und mit der Strömung konvektiert werden. Dies kann als Indiz dafür angesehen werden, daß der durch die numerische Simulation berechnete Wirbel auch real existiert. Lösen sich einzelne Blasen aus der Kavitationsschicht heraus, werden diese von der Wirbelströmung erfasst. Sie umströmen das Kavitationsgebiet und werden durch den Re-entrant Jet wieder von hinten in Richtung Kavitationsgebiet getragen. Der das Kavitationsgebiet umschließende Wirbel hat daher eine Art „einsammelnde“ Funktion.

Bild 7 + 8: Die Berandung des Kavitationsgebiets ist wiederum als sehr scharfe helle Trennlinie zu erkennen, das Kavitationsgebiet erreicht die maximale Ausdehnung in Strömungsrichtung. Weiterhin ist zu erkennen, daß die kavitierende Strömung mit guter Näherung als zwei-dimensional bezeichnet werden kann. Es macht daher Sinn, diese Profilmströmung mit dem für zunächst 2-D Strömungen entwickelten Kavitationmodell zu untersuchen. Von Bild 7 nach Bild 8 ist zu sehen, daß sich die Spitze des Re-entrant Jets in Richtung Profilnase bewegt. Im Bereich von $1/3$ der Profiltiefe, vor der Spitze des Re-entrant Jets, ist ein Bereich mit einer „rautenförmigen“ Struktur zu erkennen, die auf die Entstehung von Stoßwellen eventuell zurückzuführen ist. Dieser Sachverhalt ist jedoch noch nicht eindeutig geklärt. Dieser „Stoßwellen-Bereich“ trennt das Kavitationsgebiet in einen Nasenbereich, der kollabiert und eine zweite große Kavitationswolke, die abschwimmt, vgl. Bild 1. Der Kollaps im Bereich der Profilnase erfolgt sehr schnell, zu erwähnen ist, das kurzzeitig die Profilnase frei von Dampf ist, bevor ein neues (Primär-) Kavitationsgebiet anwächst.

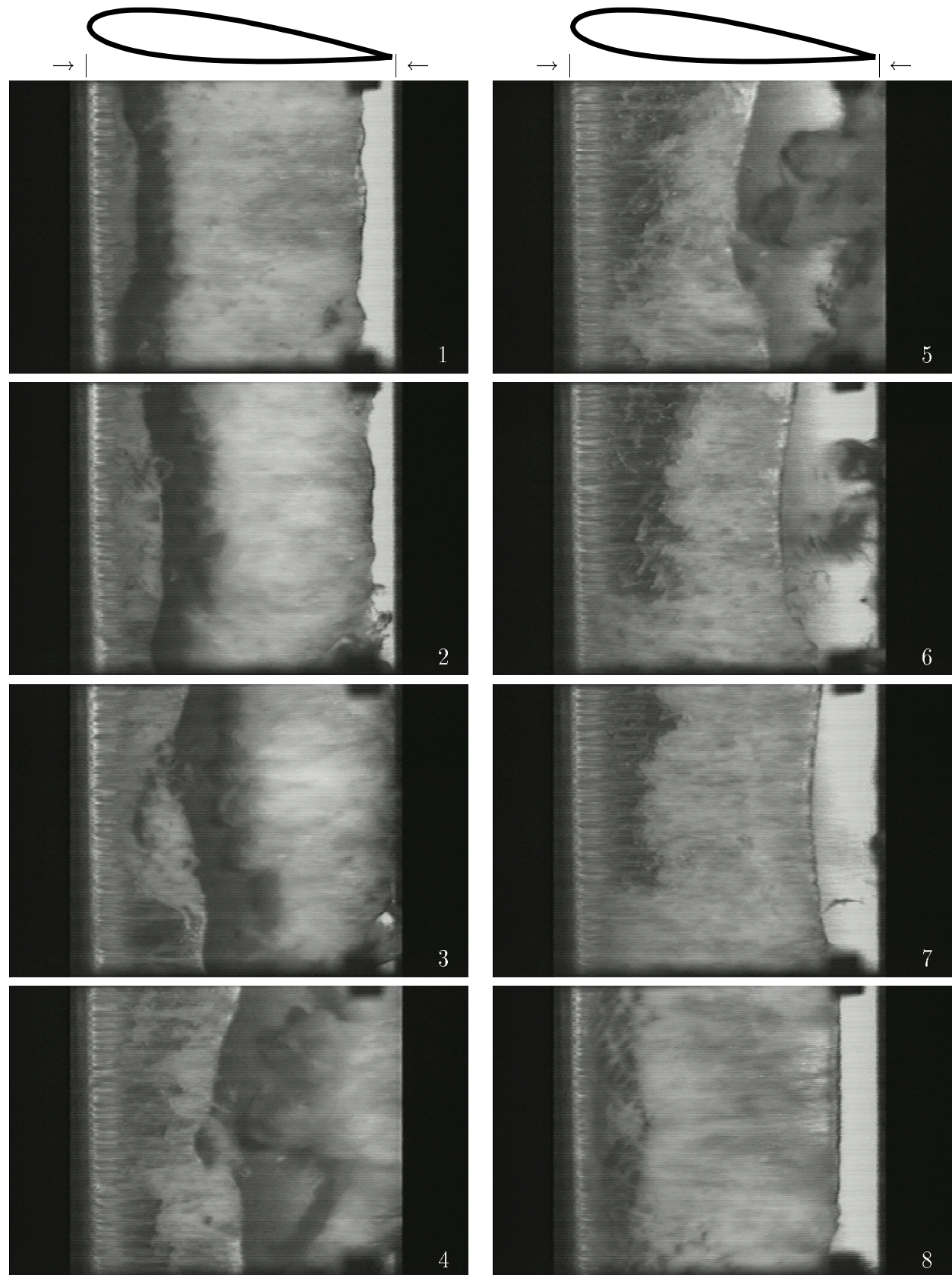


Abbildung 6.1: Kavitation an einem NACA 0015 Profil, Anströmung von links, Draufsicht. Zeitinkrement der Momentanaufnahmen: $\Delta T/8$. $f_{\text{exp}} \sim 16\text{Hz}$, $\sigma_{ref} = 1.0$, $U = 12\text{m/s}$, $L_c = 0.13\text{m}$, Wasser.

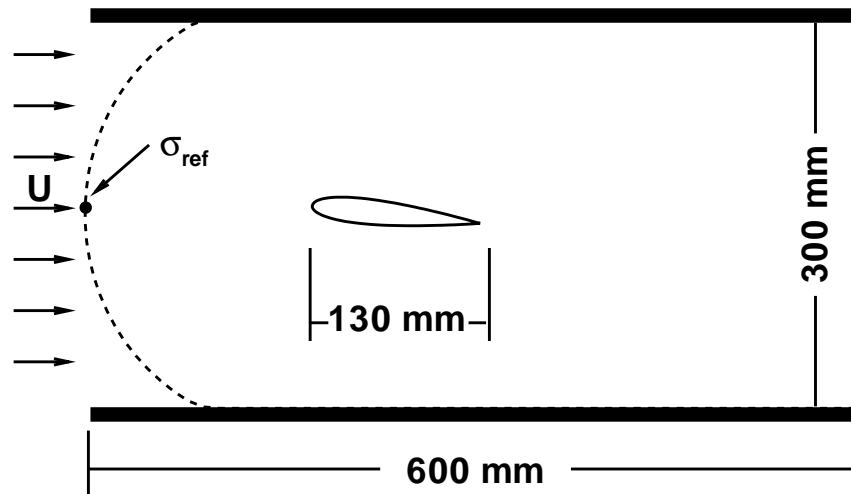


Abbildung 6.2: Geometrie und Randbedingungen für die reibungsfreie Berechnung der kavitierenden Strömung um ein angestelltes NACA 0015 Profil. $\alpha_A = 6^\circ$, $\sigma_{ref} = 1.0$, $U = 12\text{m/s}$, $L_c = 0.13\text{m}$.

6.1.2 Simulation

Abbildung 6.2 zeigt die Geometrie und Randbedingungen für die Simulation. Die Fluidqualität wird an das Experiment angepasst, das Strömungsmedium ist Wasser, bei einer Temperatur von $T = 293.15\text{K}$. Der Kavitationsbeiwert wird im Referenzpunkt konstant gehalten, dieser liegt 1.5 Sehnenlängen vor dem Profil.

Die Simulation liefert eine periodisch kavitierende Strömung mit einer Frequenz von $f = 10.94\text{Hz}$. Die momentane Dampfverteilung sowie die Geschwindigkeitsvektoren sind in Abb. 6.3 für einen Zyklus der periodisch kavitierenden Strömung dargestellt. Die Zeit läuft von links oben nach rechts unten, das Zeitinkrement zwischen den Einzelbildern beträgt $\Delta t = T/8 = 0.011\text{s}$. Kavitation beginnt im Bereich der Profilmase und das Dampfgebiet wächst in Strömungsrichtung an, bis sich ein Re-Entrant Jet bildet und ein Teil des Kavitationsgebiets abschnürt. Der vordere Teil des Gebiets kollabiert, während das abgeschnürte Dampfgebiet in Strömungsrichtung konvektiert wird und weiter anwächst. Das Kavitationsgebiet an der Profilmase verschwindet kurzzeitig vollständig, dies wurde ebenfalls im Experiment beobachtet. Eine sekundäres Dampfgebiet entsteht im Bereich $x/L_c = 0.3$ und vereinigt sich mit dem bereits existierenden Dampfgebiet. Dieses kollabiert schließlich vollständig im Bereich der Hinterkante und der Zyklus beginnt von Neuem. Anhand

der Geschwindigkeitsvektoren ist zu erkennen, daß die Kavitationsgebiete im Zentrum eines Wirbels liegen, der als Folge des Re-Entrant Jets entstanden ist.

Das zyklische Entstehen von Dampf hat Rückwirkungen auf die Druckverteilung auf dem Profil und beeinflußt daher dessen Auftrieb und Widerstand. Die momentane Druckverteilung auf dem Profil ist in den Abbn. 6.4 und 6.5 gezeigt, hier als Kavitationsbeiwert σ . Zum Vergleich ist die einphasige Druckverteilung eingezeichnet (Linie mit Kreisen) und die Momentanwerte für Auftrieb und Widerstand angegeben. Diesen Werten liegt eine Profiltiefe von 1m zugrunde. Zu Beginn des Zyklus, Abb. 6.4 a), ist das Geschwindigkeitsfeld im Nachlauf des Profils noch massiv durch den Kollaps des Dampfgebiets an der Hinterkante gestört, daher weicht die Druckverteilung von der einphasigen ab, obwohl das Strömungsfeld frei von Dampf ist. Der Druckgradient am Ende des Kavitationsgebiets steilt sich mit zunehmender Ausdehnung des Kavitationsgebiets auf, Abb. 6.4 b), und führt zur Entstehung eines Re-Entrant Jets. Der Druck im Dampfgebiet stellt sich nahe dem Sättigungsdruck ein, unterschreitet diesen um $O(10-100)$ Pa. Abbildung 6.5 f) zeigt die Druckverteilung kurz vor der Entstehung des sekundären Kavitationsgebiets. Im Bereich $x/L_c = 0.25$ wird gerade der Dampfdruck erreicht und nachfolgend unterschritten. Zu diesem Zeitpunkt wird der Maximalauftrieb von 7500 N erreicht. Der momentane Auftriebsgewinn resultiert aus dem quasi konstant niedrigen Druckniveau auf der Profiloberseite, der Auftriebsverlust durch die Abplattung der Saugspitze wird überkompensiert. Beim Kollaps des Dampfgebiets kommt es zu einer komplizierten Umströmung der Hinterkante des Profils, die momentan zu einem negativen Auftrieb führt, Abb. 6.5 h).

Der zeitliche Verlauf des Auftriebs und Widerstands bei instationärer Kavitation ist in Abb. 6.7 oben dargestellt. Die Momentanbilder der Dampfverteilung entsprechen den markierten Zeitpunkten und korrespondieren mit den Abbn. 6.4 und 6.5. Es ist zu erkennen, daß der zeitliche Mittelwert (gestrichelte Linie in Abb. 6.7) des Auftriebs (4400N) deutlich unter dem der kavitationsfreien Umströmung liegt (7200N). Der Verlauf der Auftriebskurve bis zum Maximalwert ist sehr charakteristisch und kann auch in den nachfolgend gezeigten Darstellungen des Auftriebs als Funktion der Zeit wiedergefunden werden. Mit wachsender Länge des Kavitationsgebiets steigt der Auftrieb an. Ab dem Maximalwert setzt der Kollaps des Kavitationsgebiets an der Profilnase ein, am Ende des Gebiets entsteht ein Drucksprung, der in Abb. 6.5 f) zu erkennen ist. Die Amplitude dieses Drucksprungs nimmt zu während dieser in Richtung Profilnase läuft. Der hohe Druck auf der Oberseite erklärt den Auftriebsverlust. Der drastische Auftriebsverlust ab $t \sim 3/4T$ wird durch den einsetzenden Kollaps des Dampfgebiets verursacht. Dieser wird nunehmend heftiger, der Druck auf der Oberseite steigt stark an und führt zu zeitweise negativen Werten für den Auftrieb.

Die Entstehung der hochfrequenten Oberschwingungen ab dem Zeitpunkt, ab dem der Kollaps von Kavitationsgebieten einsetzt, ist sehr kompliziert nachzuvollziehen und kann nur schwer einer eindeutigen Ursache zugeschrieben werden. Im Strömungsfeld treten lokal an den Rändern der Kavitationsgebiete durch Kollaps bedingte Druckspitzen auf, die die Druckverteilung auf dem Profil momentan beeinflussen. Eine Druckspitze auf der Profil-

oberseite reduziert den Auftrieb kurzzeitig, wie aus Abb. 6.7 oben zu erkennen ist. Während des Kollaps werden wesentliche höhere Blasenwandgeschwindigkeiten und damit größere Volumenquellterme berechnet als beim Blasenwachstum. Die Oberschwingungen treten jedoch nur beim Kollaps auf, d.h. die Quellstärke muß einem kritischen Wert erreichen, um den Auftrieb merklich zu beeinflussen. Diese Hypothese wird durch die in Kapitel 6.3 durchgeführten Simulation bestätigt. Wird die Keimanzahl n_0 erhöht, treten deutlich ausgeprägte Oberschwingungen auf, die Reduktion der Keimanzahl vermindert das Auftreten von Oberschwingungen. Dies ist konsistent mit der obigen Aussage, denn die Quellstärke ist ungefähr proportional zur Keimanzahl.

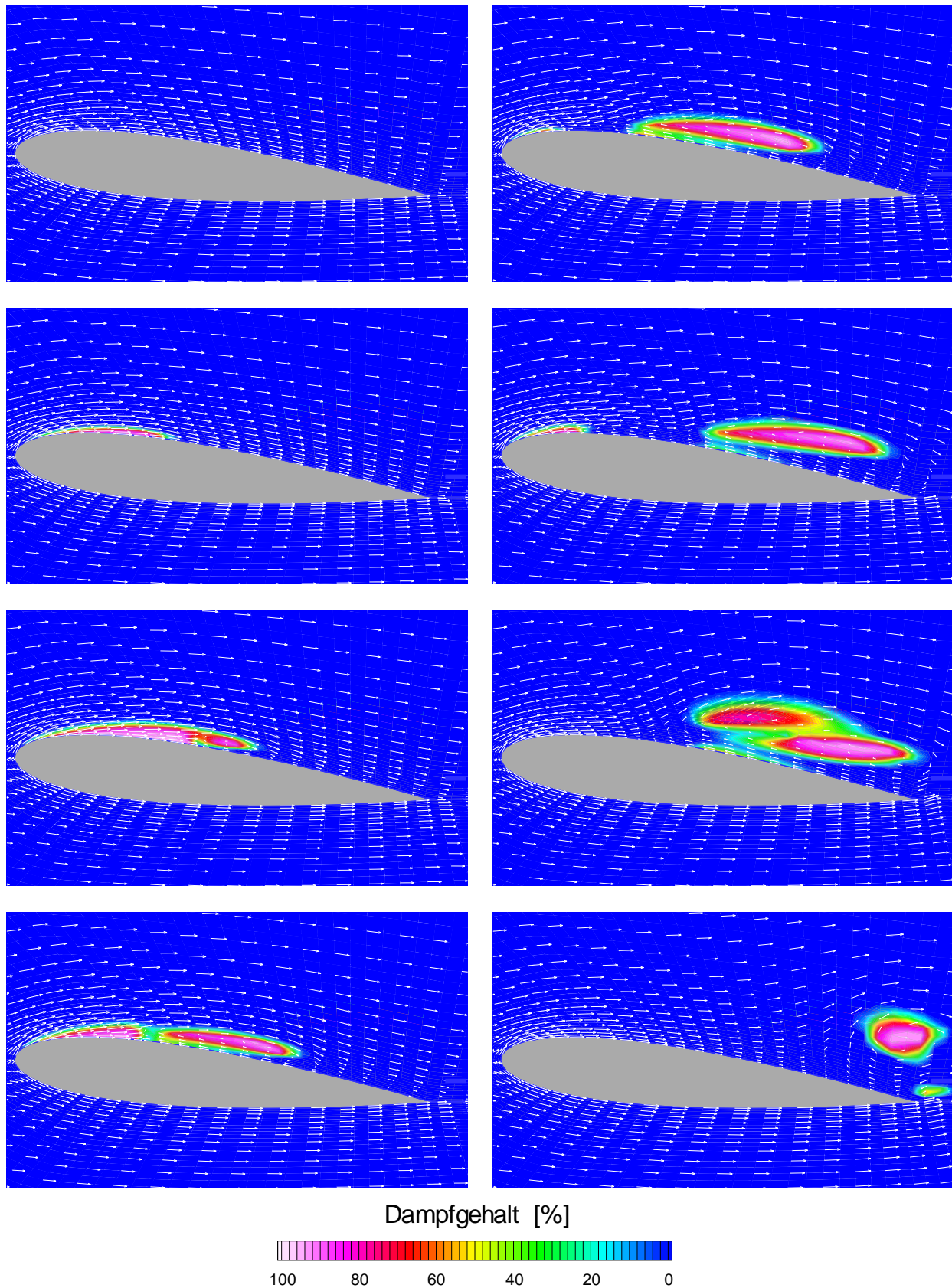


Abbildung 6.3: Eine Periode der instationär kavitierenden Strömung um ein NACA 0015 - Profil. Dampfanteil und Geschwindigkeitsvektoren. Zeitinkrement $\Delta t = T/8$, $f = 10.94\text{Hz}$, $L_c = 0.13\text{m}$, $\sigma_{ref} = 1.0$, $U = 12\text{m/s}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$, $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei $T = 293.15\text{K}$.

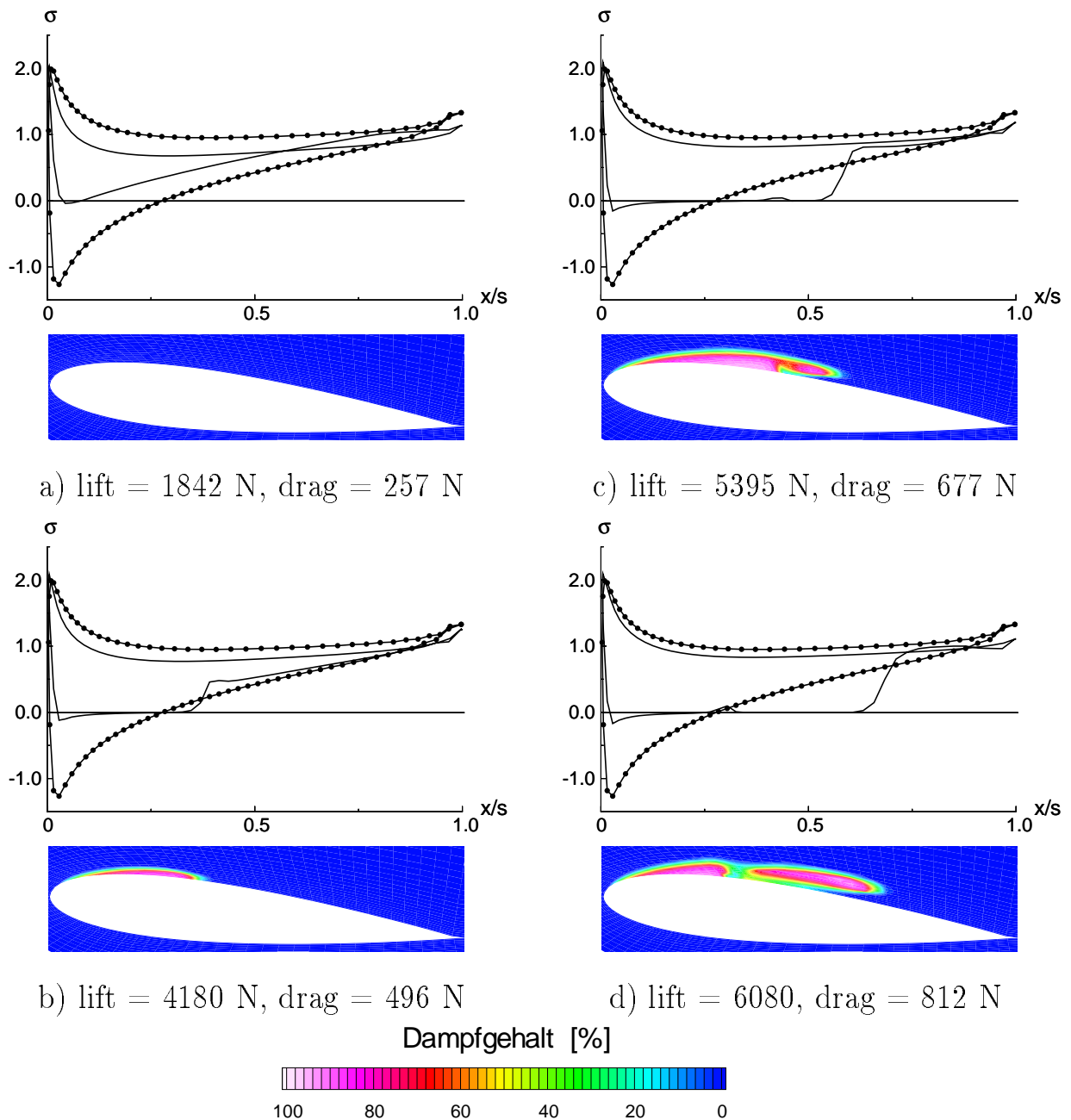


Abbildung 6.4: Momentane Druckverteilung auf dem NACA 0015 -Profil und Dampfverteilung, Teil 1: $t_0 \leq t \leq t_0 + T/2$. Zeitinkrement $\Delta t = T/8$, $f = 10.94\text{Hz}$, $L_c = 0.13\text{m}$, $\sigma_{ref} = 1.0$, $U = 12\text{m/s}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$, $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei $T = 293.15\text{K}$.

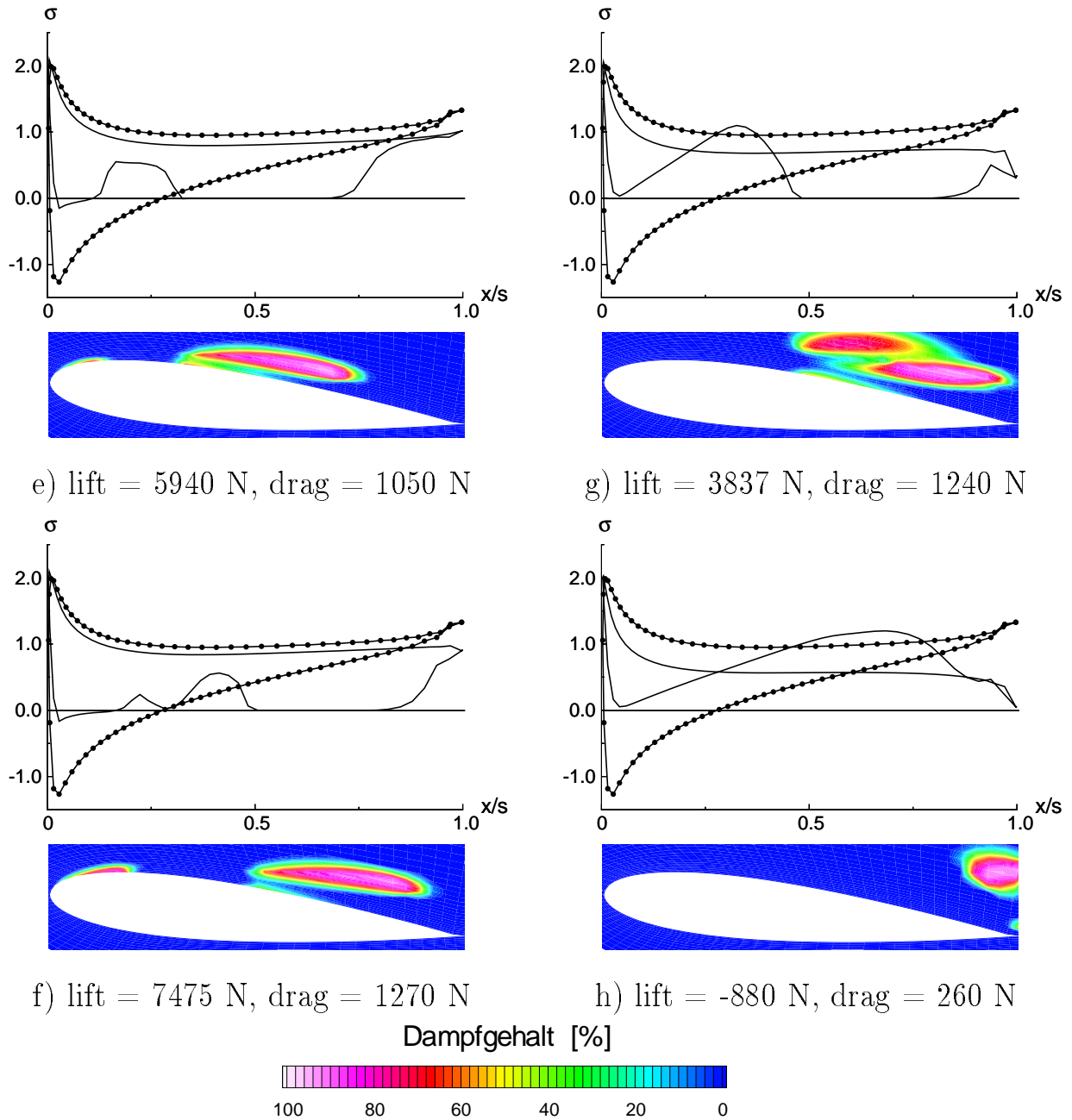


Abbildung 6.5: Momentane Druckverteilung auf dem NACA 0015 -Profil und Dampfverteilung, Teil 2: $t_0 + T/2 \leq t \leq t_0 + T$. Zeitinkrement $\Delta t = T/8$, $f = 10.94\text{Hz}$, $L_c = 0.13\text{m}$, $\sigma_{ref} = 1.0$, $U = 12\text{m/s}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$, $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei $T = 293.15\text{K}$.

6.2 Variation des Kavitationsbeiwerts

In einer ersten Variation zum Referenzfall wird der Kavitationsbeiwert in der Anströmung auf den Wert $\sigma_{ref} = 1.2$ erhöht. Im Experiment stellt sich unter diesen Bedingungen eine ebenfalls periodisch kavitierende Strömung ein. Die Ausdehnung des Kavitationsgebiets ist gegenüber dem Fall $\sigma_{ref} = 1.0$ deutlich reduziert.

Die Simulation liefert ebenfalls eine periodisch kavitierende Strömung, die Frequenz beträgt $f = 9.14$ Hz. Abbildung 6.6 zeigt die Dampfverteilung sowie die Geschwindigkeitsvektoren für einen Zyklus. Die Zeit läuft von links oben nach rechts unten, das Zeitinkrement zwischen den Einzelbildern beträgt $\Delta t = T/8 = 0.014s$. Das Kavitationsgebiet entsteht an der Profilnase, wächst zunächst an und wird durch einen Re-entrant Jet aufgebrochen. Eine kleine Kavitationswolke wird im Zentrum eines Wirbels stromab konvektiert und wächst dabei ein. Die Ausdehnung des Kavitationsgebiets vor dem Aufbrechen ist im Vergleich zum Referenzfall deutlich verkürzt. Ein sekundäres Kavitationsgebiet entsteht kurzzeitig, kollabiert aber vollständig ohne sich mit dem bereits existierenden Kavitationsgebiet zu vereinigen. Das Kavitationsgebiet kollabiert im Bereich der Profilhinterkante und der Zyklus beginnt von Neuem.

Obwohl im Vergleich zum Referenzfall weit weniger Dampfvolumen vorhanden ist, reduziert sich der zeitlich gemittelte Auftrieb auf einen ähnlich niedrigen Wert von 4700 N. Daraus kann gefolgert werden, daß der Auftrieb maßgeblich durch die Entstehung des Wirbels beeinflusst wird und weniger vom Dampfanteil in der Strömung selbst. Abbildung 6.7 unten zeigt den Verlauf von Auftrieb und Widerstand für einen Zyklus. Charakteristisch ist der Anstieg des Auftriebs mit dem Anwachsen des Kavitationsgebiets. Mit beginnendem Kollaps wird der Auftrieb reduziert. Im Vergleich zum Referenzfall sind hier weniger Oberschwingungen zu beobachten. Die im Bereich $t = 3/4T$ zu erkennenden Auftriebseinbrüche können mit dem Kollaps von Kavitationsgebieten korreliert werden: das erste Minimum korreliert mit dem Kollaps des Sekundärgebiets, das im Profilmitteln entstanden ist. Minimum 2 resultiert aus dem Kollaps eines Kavitationsgebiets, das direkt an der Hinterkante entstanden ist und nur kurzzeitig existiert. In Abb. 6.5 h) ist (zufällig) ein solches Gebiet nahe der Hinterkante zu erkennen. Der Kollaps des primären Kavitationsgebiets führt zur Entstehung des 3. Minimalwerts. Es ist wahrscheinlich, daß Einzelereignisse dieser Art auch bei dem Referenzfall mit $\sigma_{ref} = 1.0$ auftreten, nur werden diese durch die Oberschwingungen überlagert und sind daher nicht zu erkennen.

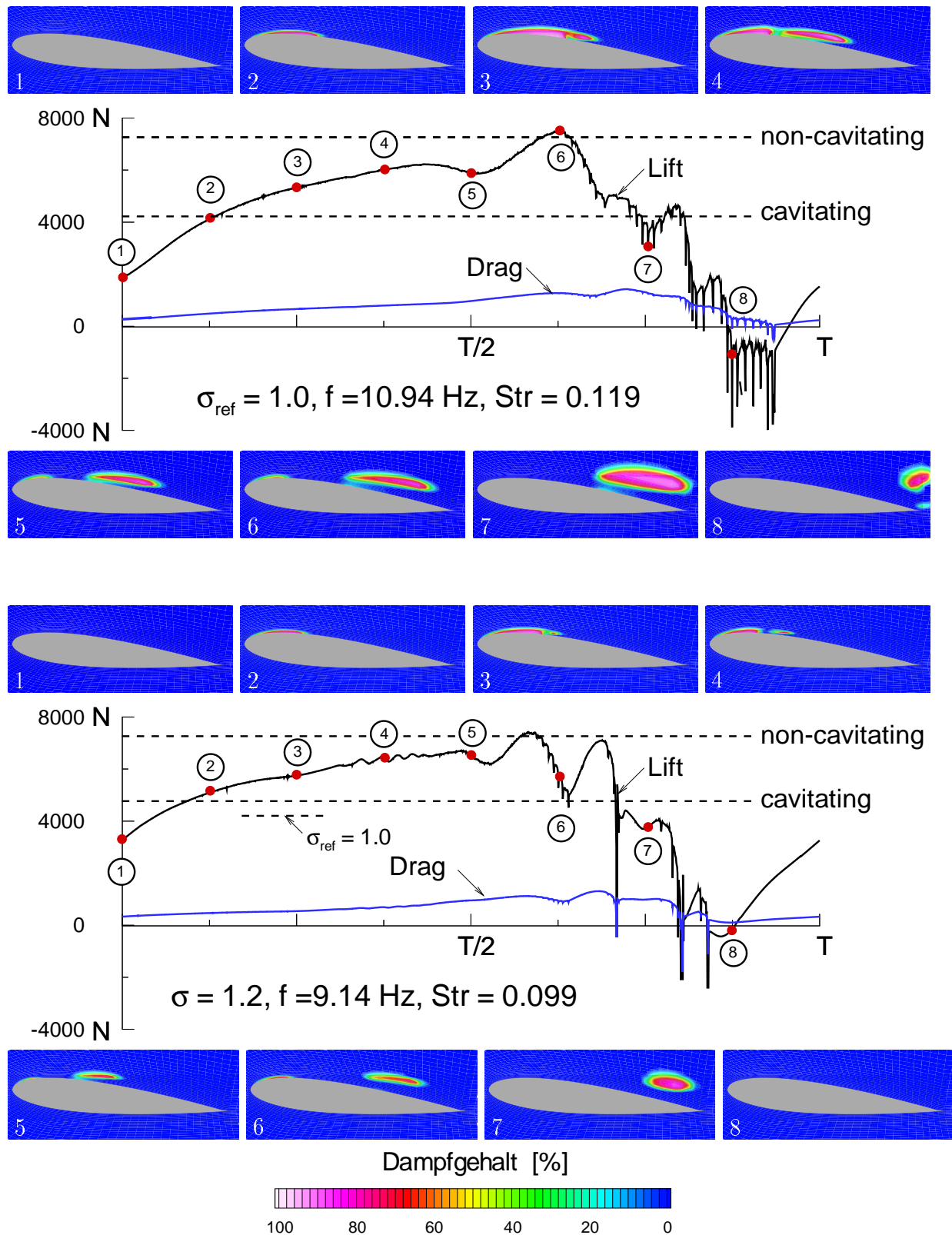


Abbildung 6.7: Einfluß des Kavitationsbeiwerts auf den zeitl. Verlauf von Auftrieb und Widerstand während einer Periode. Zeitinkrement der Bilder: $\Delta t = T/8$, $L_c = 0.13m$, $U = 12m/s$, $n_{0,ref} = 10^8$ Keime/ m^3 , $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5}m$, Wasser bei $T = 293.15$ K.

6.3 Variation der Fluidqualität

Der Einfluß der Fluidqualität wird durch Variation der Keimanzahl n_0 untersucht. Eine Variation des Keimradius wird nicht durchgeführt, da anhand der Düsenrechnungen gezeigt wurde, daß die Modellierung insensitiv bzgl. der Variation dieses Parameters ist. Die Geometrie und Randbedingungen entsprechen denen des Referenzfalls. Es werden zwei Fluidqualitäten simuliert, zum einen eine hohe Keimanzahl von $n_0 = 10^9$ Keime/m³, zum anderen eine niedrige Keimanzahl $n_0 = 10^7$ Keime/m³. Die Simulation liefert für beide Fluidqualitäten eine periodisch kavitierende Strömung.

Abbildung 6.8 zeigt den Einfluß des Keimgehalts des Wassers auf den Verlauf von Auftrieb und Widerstand für eine Periode. Zusätzlich ist jeweils die momentane Dampfverteilung zu 8 Zeitpunkten dargestellt, die mit den markierten Zeitpunkten korrespondieren. Im folgenden wird zunächst der Fall mit $n_0 = 10^7$ Keime/m³ diskutiert, Abbildungen 6.8 oben. Der zeitlich gemittelte Auftrieb beträgt 4400 N und liegt damit um 200 N über dem Auftrieb des Referenzfalls mit $n_{0,ref} = 10^8$ Keime/m³. Es ist der charakteristische Anstieg des Auftriebs mit dem Anwachsen des Kavitationsgebiets zu erkennen. Nach Erreichen des Maximalwerts wird infolge des Kollaps des Kavitationsgebiets an der Profilnase der Auftrieb reduziert. Im Vergleich zum Referenzfall treten hier noch keine Oberschwingungen im Auftrieb auf. Während des Kollaps des Kavitationsgebiets im Bereich der Hinterkante treten Oberschwingungen auf.

Abbildung 6.8 unten zeigt die Dampfverteilung sowie Auftrieb und Widerstand für einen Keimgehalt von $n_0 = 10^9$ Keime/m³. Der zeitlich gemittelte Auftrieb beträgt 4000N und liegt damit 200N unterhalb des Referenzfalls. Der Auftriebsverlauf ist stark von Oberschwingungen überlagert, zeigt jedoch bis zum Erreichen des Maximalwerts den bekannten charakteristischen Verlauf.

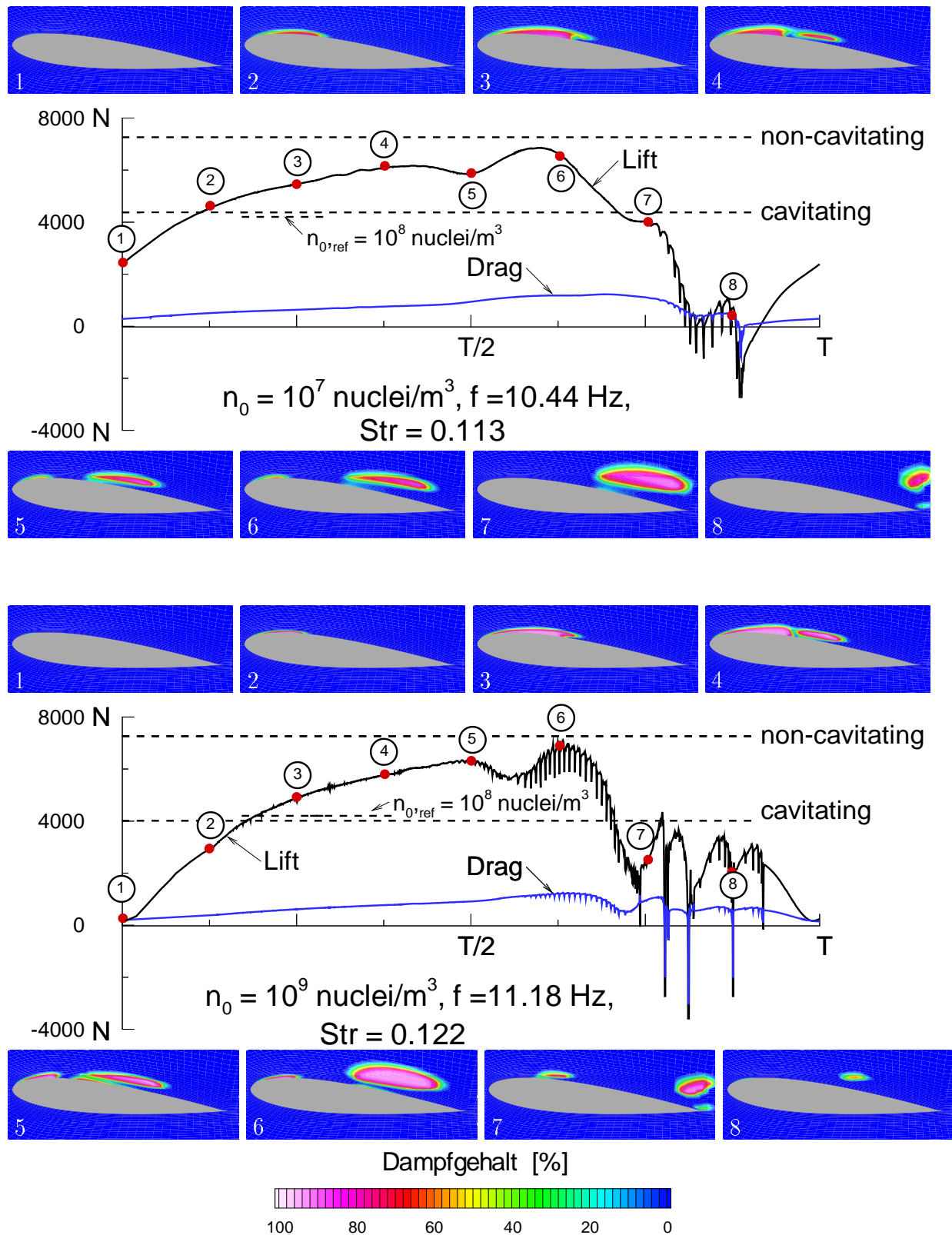


Abbildung 6.8: Einfluß des Keimgehalts auf den zeitl. Verlauf von Auftrieb und Widerstand während einer Periode. Zeitinkrement der Bilder: $\Delta t = T/8$, $L_c = 0.13m$, $\sigma_{ref} = 1.0$, $U = 12m/s$, $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5}m$, Wasser bei $T = 293.15 \text{ K}$.

6.4 Variation der Randbedingung

In den bisher vorgestellten Rechnungen zu kavitierenden Profilmströmungen wurde der Druck bzw. der Kavitationsbeiwert im Referenzpunkt konstant gehalten. Die Position des Referenzpunkts liegt 1.5 Sehnenlängen vor der Profilnase, wie in Abb. 6.2 eingezeichnet. Der Referenzfall hat gezeigt, daß die numerische Modellierung charakteristische Phänomene des Experiments reproduzieren kann, jedoch sind Abweichungen in der Struktur des Kavitationsgebiets und bei der Frequenz im Vergleich zum Experiment zu erkennen. Eine mögliche Ursache sind prinzipiell die Randbedingungen, die insbesondere für kavitierende Strömungen sehr schwierig zu formulieren sind. Die Konstanz der Eintrittsgeschwindigkeit kann berührungslos durch LDV-Messungen bestätigt werden, die störungsfreie Druckmessung im Innern des Strömungsfelds ist jedoch sehr problematisch. Daher wird der Einfluß der Druckrandbedingung numerisch untersucht. Anhand von Voruntersuchungen wurde die Erfahrung gemacht, daß die einphasige inkompressible Profilmströmung quasi unabhängig von der Lage des Druck-Referenzpunkts im Strömungsfeld ist. Auftrieb und Widerstand sind quasi identisch, die absoluten Druckwerte sind nur um einen konstanten Offset-Wert verschoben. Für inkompressible Strömungen sind daher nur Druckdifferenzen von Bedeutung, der Absolutwert des Drucks ist nicht von Interesse. Daraus resultiert unmittelbar der Unterschied zur kavitierenden Strömung, für die der Absolutwert des Drucks bestimmt, ob Blasen anwachsen oder kollabieren.

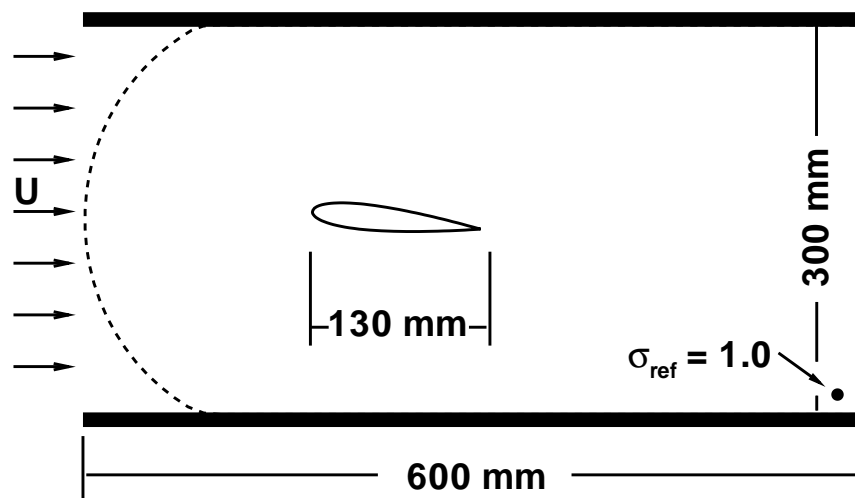


Abbildung 6.9: Variation des σ -Referenzpunkts. Geometrie und Randbedingungen. $\sigma_{ref} = 1.0$, $U = 12\text{m/s}$, $L_c = 0.13\text{m}$.

Der Einfluß der Position des σ -Referenzpunkts im Strömungsfeld auf die kavitierende Strömung wird im folgenden diskutiert. Der Referenzpunkt liegt stromab des Profils, in der unteren Ecke des Strömungsfelds und ist in Abb. 6.9 eingezeichnet. Alle anderen Randbedingungen und Parameter entsprechen denen des Referenzfalls. Alternativ ist es denkbar,

den Referenzpunkt direkt hinter bzw. oberhalb des Profils in der Austrittsebene zu platzieren. Dies wäre jedoch nicht sinnvoll, da auf der Oberseite eventuell Wirbel entstehen (vgl. Referenzfall), die mit der Strömung konvektiert werden. Um eine Wechselwirkung der Wirbel mit der Druckrandbedingung weitgehend zu unterbinden, ist die Lage des Referenzpunkts in maximaler Entfernung zu den ggf. abschwimmenden Wirbeln zu wählen. Für die einphasige Simulation ergibt sich eine quasi identische Druckverteilung im Vergleich zum Referenzfall, dies ist aufgrund der Voraussetzung reibungsfreie Strömung und der geringen numerischen Dissipation des numerischen Verfahrens auch zu erwarten. Die Simulation der kavitierenden Strömung weicht jedoch erheblich vom Referenzfall ab. Es entwickelt sich ein kleines stationäres Kavitationsgebiet, der σ -Verlauf auf dem Profil und die Verteilung des Dampfanteils sind in Abb. 6.10 zu sehen. Der maximale Dampfanteil erreicht nur 40%, der Auftrieb des Profils reduziert sich von 7260N (einphasig) auf 6100N (kavitierend).

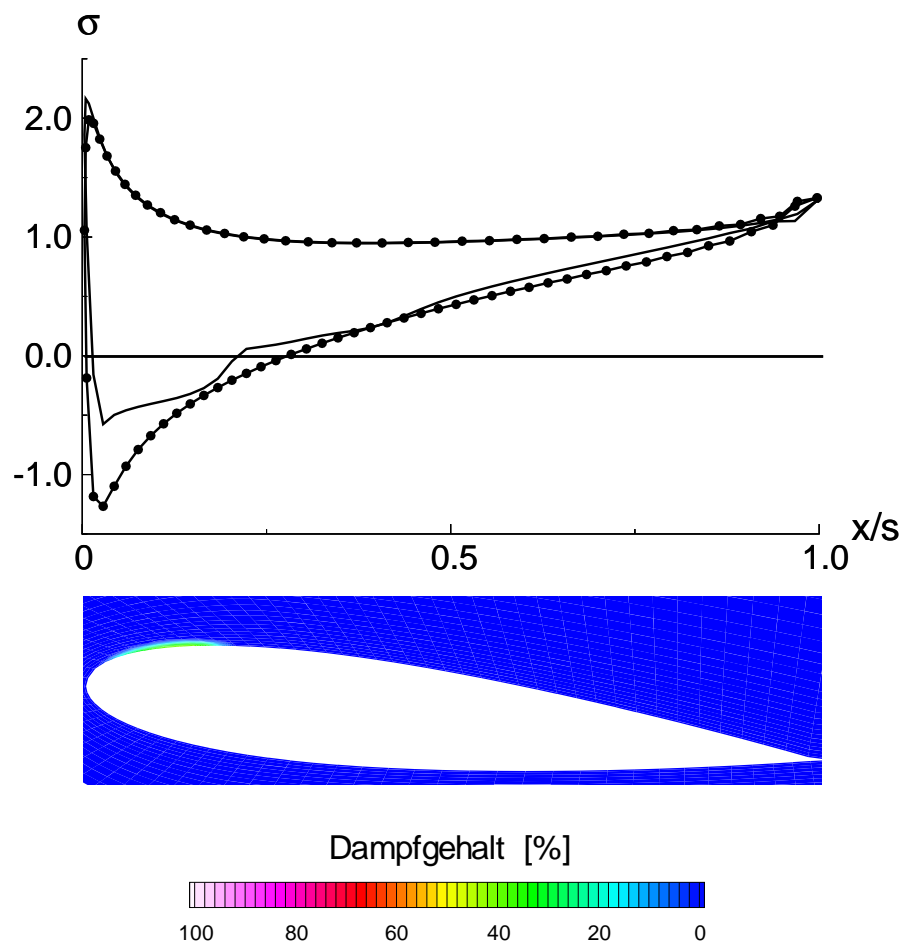


Abbildung 6.10: Druckverteilung auf dem Profil und Dampfverteilung. Referenzpunkt liegt stromab vom Profil. $\sigma_{ref,H} = 1.0$, $U = 12\text{m/s}$, $L_c = 0.13\text{m}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$, $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei $T = 293.15\text{K}$.

Anhand dieser Rechnung wird ein massiver Einfluß der Position des Referenzpunkts auf die kavitierende Strömung festgestellt. Es kann weiterhin angenommen werden, daß ein Übergang von instationärer Kavitation mit sehr großen abschwimmenden Kavitationsgebieten bis hin zur stationären Kavitation allein durch die Variation der Position des σ -Referenzpunkts erreicht werden kann. Die kavitierende Strömung ist daher sehr sensibel bzgl. der Position, wesentlich sensibler im Vergleich zu einer Variation der Fluidqualität oder des Kavitationsbeiwerts. Im Hinblick auf den Vergleich Experiment-Numerik kommt daher der Position des Referenzpunkts entscheidende Bedeutung zu. Zur Untersuchung dieses Positionseffekts wird folgendes vereinfachtes Modell einer kavitierenden Strömung betrachtet, Abb. 6.11, und der Effekt einer Volumenerzeugung im Strömungsfeld auf die Druckverteilung diskutiert.

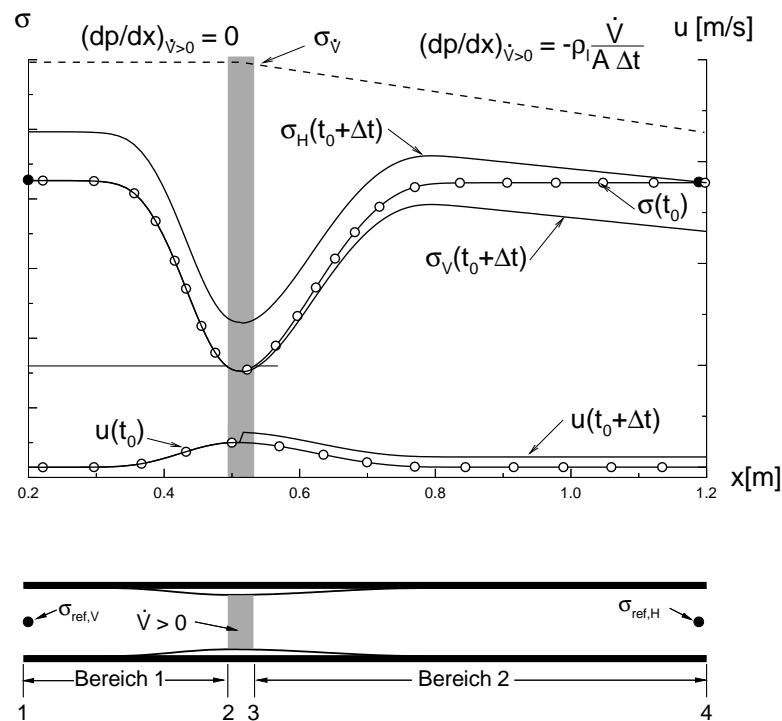


Abbildung 6.11: Reibungsfreie ebene Kanalströmung mit Volumenquelle. Verteilung von Druck und Geschwindigkeit auf der Achse vor der Volumentstehung ($t = t_0$) und danach in Abhängigkeit der Position des Druckreferenzpunkts. gestrichelt: zusätzlicher Druckgradient infolge Volumentstehung.

Betrachtet wird ein ebener Kanal mit dem Querschnitt $A(x)$, der zum Zeitpunkt $t = t_0$ reibungsfrei einphasig von einem Fluid der Dichte ρ_l durchströmt wird. Der Kanal sei schlank, d.h. **2-D Effekte werden im folgenden nicht berücksichtigt**. Die σ - und Geschwindigkeitsverteilung auf der Kanalachse zum Zeitpunkt $t = t_0$ sind in Abb. 6.11 eingezeichnet. Zum Zeitpunkt $t = t_0 + \Delta t$ entsteht im „Kavitationsgebiet“ in der Mitte

des Kanals (grau unterlegt, $x = 0.5\text{m}$) Dampf mit einer Verdampfungsrate \dot{V} in $[\text{m}^3/\text{s}]$. Die Geschwindigkeit am Eintritt wird (analog zu den Profilverrechnungen) konstant mit U vorgegeben. Die Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich aus der Kontinuität zu:

$$u(t_0 + \Delta t, x) = u(t_0, x) + \Delta u(x), \text{ mit } \Delta u(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0.5 \\ \frac{\dot{V}}{A} & : x > 0.5 \end{cases} . \quad (6.1)$$

Infolge der Volumenerzeugung wird das Fluid im Bereich $x > 0.5$ innerhalb Δt von $u(t_0, x)$ auf $u(t_0 + \Delta t, x)$ beschleunigt. Dazu ist ein Druckgradient notwendig, der mittels Newton's Grundgesetz berechnet werden kann:

$$\begin{aligned} F &= ma \\ \Delta p A &= -\rho_l A \Delta x \frac{\Delta u(x)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Im Bereich 1 ist der durch die Volumenentstehung resultierende **zusätzliche** Druckgradient $(dp/dx)_{\dot{V}>0} = 0$, im Bereich 2 ist $(dp/dx)_{\dot{V}>0} < 0$. Aus diesen zusätzlichen Gradienten ergibt sich eine Verteilung von $\sigma_{\dot{V}}(x)$, die in Abb. 6.11 gestrichelt eingezeichnet ist. Der Ordinatenwert ist dabei willkürlich angenommen, der Verlauf von $\sigma_{\dot{V}}(x)$ ist unabhängig von der Position des σ -Referenzpunkts im Strömungsfeld. Die Verteilung $\sigma(t_0 + \Delta t, x)$ selbst wird durch Superposition erhalten und hängt von der Position des Referenzpunkts ab. Die resultierende σ -Verteilung ist für zwei Position (am Eintritt bzw. Austritt) in Abb. 6.11 eingezeichnet.

Befindet sich die Position des Referenzpunkts **Hinter** dem Kavitationsgebiet, steigt der Kavitationsbeiwert vor dem Referenzpunkt an, insbesondere steigt der Druck im Kavitationsgebiet. Dieser Druckanstieg führt zu einer geringeren Verdampfungsrate. Für den vorliegenden Fall ist die Verdampfungsrate zu groß angeommen, der Druck im Kavitationsgebiet liegt oberhalb des Dampfdrucks. In der Simulation würde sich (iterativ) eine Verdampfungsrate $\dot{V}(p_{CAV})$ einstellen, daß der Druck im Kavitationsgebiet p_{CAV} zwischen dem Dampfdruck und dem einphasigen Druck liegt.

Liegt der Referenzpunkt **Vor** dem Kavitationsgebiet, reduziert sich der Kavitationbeiwert in Bereich 2 im Vergleich zu $\sigma(t_0, x)$. Dadurch kavitiert das Fluid in einem größerem Gebiet, die Entstehung von mehr Dampfvolmen ist die Folge. Weiterhin ist es möglich, daß das Fluid am Kanalausritt kavitiert, wenn die Volumenerzeugung im Kavitationsgebiet stark genug ist.

Anmerkung: Im Rahmen der σ -Variationen (Kapitel 6.2) wurde ebenfalls versucht, eine Simulation bei einem Kavitationsbeiwert von $\sigma_{ref} = 0.8$ durchzuführen. Aufgrund der massiven Unterschreitung des Dampfdrucks ergibt sich eine sehr große Verdampfungsrate. Dies führt dazu, daß am Austritt des Rechengebiets der Dampfdruck zeitweise unterschritten wird und das Fluid kavitiert. Ist dies der Fall, divergiert das Lösungsverfahren und daher konnten für $\sigma_{ref} = 0.8$ keine Ergebnisse erhalten werden.

7 Wechselwirkung Kavitation - Freie Oberfläche

Abbildung 7.1 zeigt die Geometrie und Randbedingungen für die Simulation. Das Strömungsmedium ist Wasser bei einer Temperatur von $T = 293.15K$. Die Fluidqualität wird durch $n_0 = 10^8$ Keime/ m^3 Wasser und einen Keimradius von $R = 3 \cdot 10^{-5}m$ definiert. Das Fluid oberhalb der freien Oberfläche ist Luft mit einer Dichte von $\rho_a = 1.2 \text{ kg}/m^3$. Beide Fluide werden reibungsfrei betrachtet. Der Kavitationsbeiwert wird im Referenzpunkt konstant gehalten, sowie die Höhe des Wasserspiegels am Eintritt. Man beachte, daß der Referenzpunkt oberhalb der freien Oberfläche liegt. Die Einströmgeschwindigkeit für die Luft und das Wasser beträgt $U = 12m/s$, der Anstellwinkel des Profils beträgt $\alpha_A = 6^\circ$. Diese Simulation stellt hohe Anforderungen an die Numerik, da hier gleichzeitig die Bewegung einer scharfen Phasengrenze mit einem Dichtesprung von 1:1000 sowie die Entstehung und Vernichtung von Dampfvolumen berechnet werden muß. Zur Vermeidung der Aufweitung der Luft-Wasser Phasengrenze wird das CICSAM Schema (vgl. Kapitel 3.3.3) verwendet.

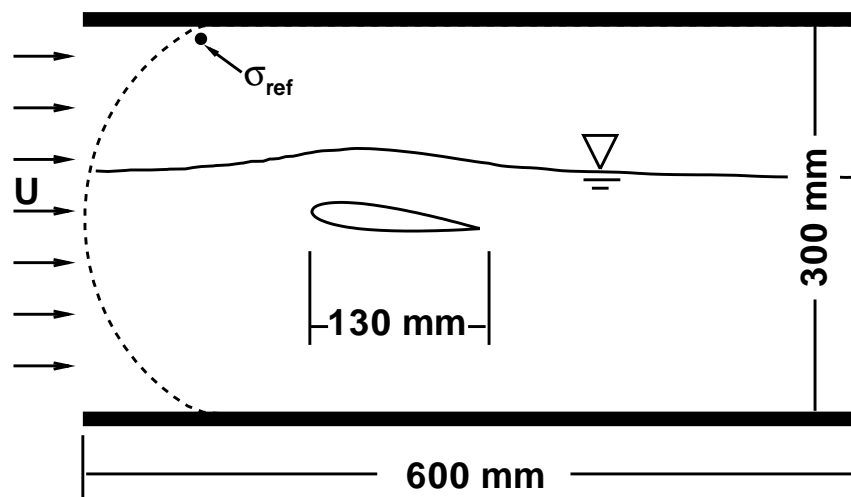


Abbildung 7.1: Geometrie und Randbedingungen. Berechnung der Wechselwirkung Kavitation und Freier Oberfläche. NACA 0015 Profil $U = 12m/s$, $L_c = 0.13m$, $\alpha_A = 6^\circ$.

In Abhängigkeit des Kavitationsbeiwerts liefert die Simulation den Übergang von einer stationären Kavitation hin zu einer periodisch kavitierenden Strömung. Mit Absenkung des Kavitationsbeiwerts nimmt die Frequenz zu. Der Auftrieb und Widerstand des Profils weichen stark von Werten der kavitationsfreien Umströmung ab und sind nachfolgend tabelliert:

$\sigma[-]$	lift [N]	drag [N]	Frequenz [Hz]	$Str = \frac{f \cdot L_c}{U} [-]$
2.5 (*)	7200	40	steady	steady
2.5 (**)	3600	50	steady	steady
0.97	3665	150	steady	steady
0.87	3160	480	5.4	0.0585
0.77	3080	550	5.75	0.062
0.67	2660	580	6.0	0.065
0.57	2750	680	~ 9.0	0.0975

(*) Kavitationsfreie Rechnung ohne Freie Oberfläche

(**) Kavitationsfreie Rechnung mit Freier Oberfläche

Aus der Tabelle ist zu entnehmen, daß im kavitationsfreien Fall der Auftrieb im Vergleich zur rein einphasigen Profilmströmung deutlich geringere Werte erreicht. Die Ursache hierfür ist die Reduktion der Saugspitze des Profils. Abbildung 7.2 zeigt die Druckverteilung auf dem Profil für einen Kavitationsbeiwert von $\sigma_{ref} = 0.97$. Dieser Wert ist so gewählt, daß bei kavitationsfreier Umströmung der Kavitationsbeiwert im Referenzpunkt vor dem Profil (vgl. Abb. 6.2) den Wert $\sigma_{ref} = 1.0$ erreicht. Der Fall $\sigma_{ref} = 0.97$ mit Freier Oberfläche wird daher mit dem Referenzfall aus Kapitel 6 gegenübergestellt. Aus Abb. 7.2 ist zu erkennen, daß die Saugspitze im kavitationsfreien Fall mit Freier Oberfläche im Vergleich zur rein einphasigen Umströmung des Profils weniger deutlich ausgeprägt, vgl. Abb. 6.4 und daher ist mit geringeren Kavitationserscheinungen zu rechnen. Es bildet sich ein kleines stationäres Kavitationsgebiet aus, das in Abb. 7.2 dargestellt ist. Der Auftrieb des Profils mit Kavitation liegt hier über dem der kavitationsfreien Umströmung.

Die Reduktion des Kavitationsbeiwerts auf $\sigma_{ref} = 0.87$ liefert eine periodisch kavitierende Strömung, die Frequenz beträgt $f = 5.4 Hz$. Abbildung 7.3 oben zeigt den Verlauf von Auftrieb und Widerstand sowie die Verteilung des Dampfanteils. Das Dampfgebiet entsteht im Bereich der Profilmase, wächst an und kollabiert wieder. Die Entstehung eines Re-entrant Jets wird nicht beobachtet. Ein sekundäres Kavitationsgebiet bildet sich im Bereich der Profilmitte und wird im Zentrum eines Wirbels stromab transportiert. Erreicht der Wirbel die Hinterkante des Profils, wird der Auftrieb deutlich reduziert.

Abbildung 7.3 unten zeigt Verteilung des Dampfgehalts für $\sigma_{ref} = 0.77$. Das Kavitationsgebiet wächst an und wird durch die Entstehung eines Re-entrant Jets aufgebrochen. Der vordere Teil des Gebiets kollabiert, während das abgeschnürte Dampfgebiet im Zentrum

eines Wirbels in Strömungsrichtung konvektiert wird.

Mit weiterer Absenkung des Kavitationsbeiwerts nimmt das Dampfvolumen im Strömungsgebiet zu, vgl. Abbn. 7.4 oben und 7.4 unten. Für $\sigma_{ref} = 0.67$ ergibt sich die interessante Strömungssituation zum Zeitpunkt $t = 3/4T$, daß durch den Kollaps des mittleren Kavitationsgebiets die Entstehung von zwei weiteren Kavitationsgebieten eingeleitet wird. Der mittlere Auftrieb liegt deutlich unter dem der kavitationsfreien Rechnung. Für den Fall $\sigma_{ref} = 0.57$ ist das Strömungsfeld durch die Entstehung und das Abschwimmen eines einzigen, sehr großen Kavitationsgebiets geprägt.

Das wesentliche Ergebnis und gleichzeitig die Motivation für diese Rechnungen ist, daß die sich einstellende kavitierenden Strömungen quasi unabhängig von der Lage des Referenzpunkts sind, solange sich dieser oberhalb der freien Oberfläche, d.h. in der Luft, befindet. Der Druck oberhalb der freien Oberfläche ist mit guter Näherung konstant, die Abweichung vom Mittelwert beträgt nur ca. ± 100 Pa. Diesem Punkt kommt im Hinblick auf den Vergleich zwischen Numerik und Experiment zentrale Bedeutung zu, denn in Kapitel 6.4 wurde demonstriert, wie sensibel die kavitierende Strömung auf die Position des Druck-Referenzpunkts reagiert. Das Simulation eines Experiments mit freier Oberfläche (z.B. [56, 61]) bietet sich daher an, da die Randbedingung bzgl. des Drucks gut formuliert werden kann.

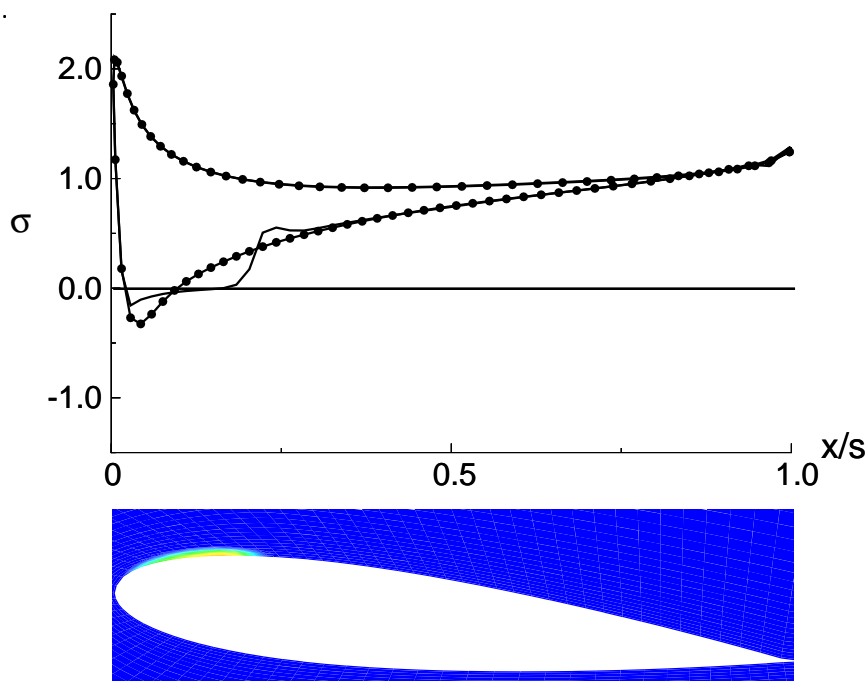


Abbildung 7.2: σ -Verteilung auf dem NACA 0015-Profil und Verteilung des Dampfgehalts. $\sigma_{ref} = 0.97$, $U = 12\text{m/s}$, $n_{0,ref} = 10^8\text{Keime/m}^3$, $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5}\text{m}$, Wasser bei $T = 293.15\text{K}$.

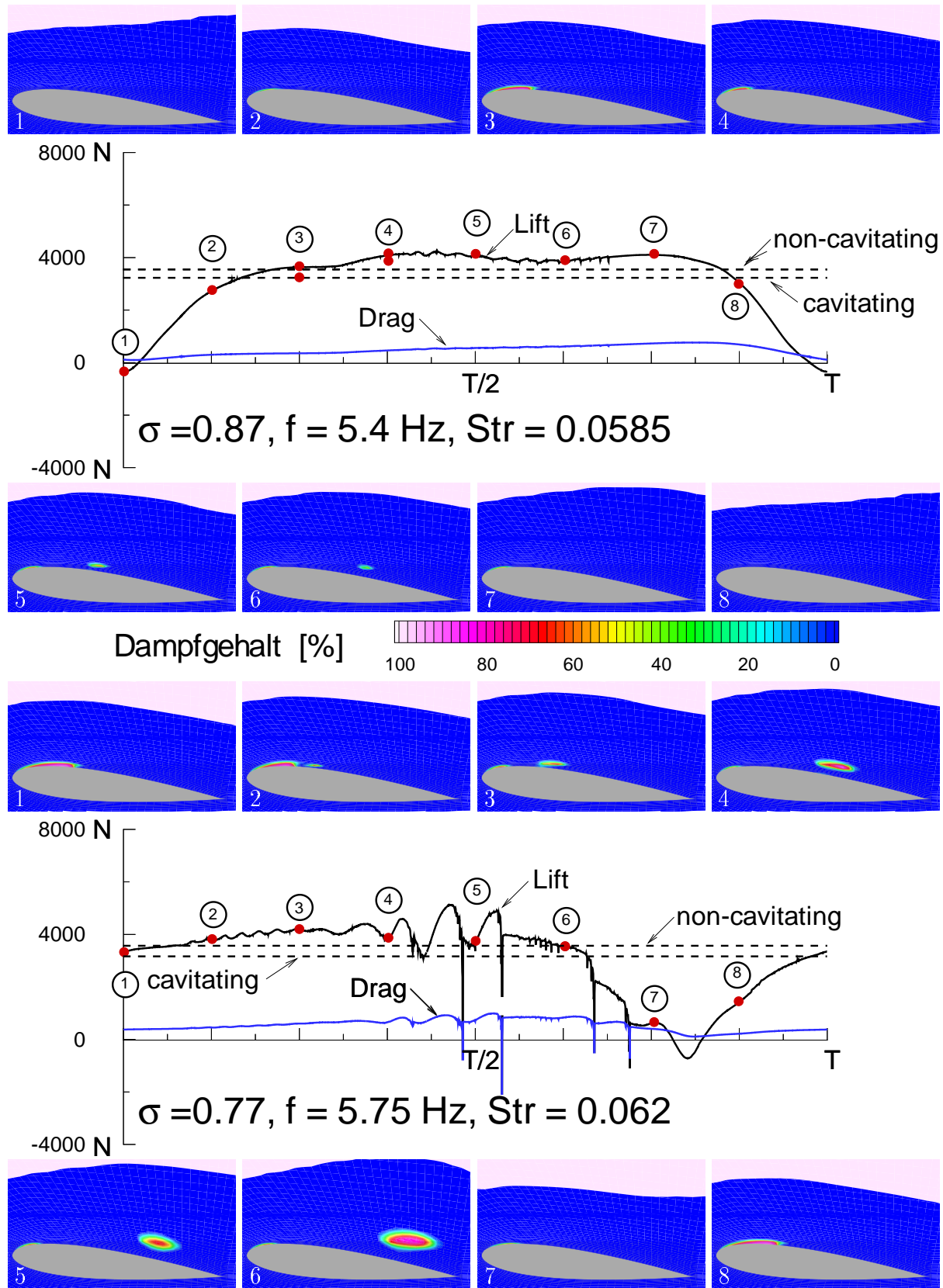


Abbildung 7.3: Einfluß des Kavitationsbeiwerts auf den zeitl. Verlauf von Auftrieb bzw. Widerstand während einer Periode und Verteilung des Dampfanteils. Zeitinkrement der Bilder : $\Delta t = T/8$, $L_c = 0.13 \text{ m}$, $U = 12 \text{ m/s}$, $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, Wasser bei $T = 293.15 \text{ K}$.

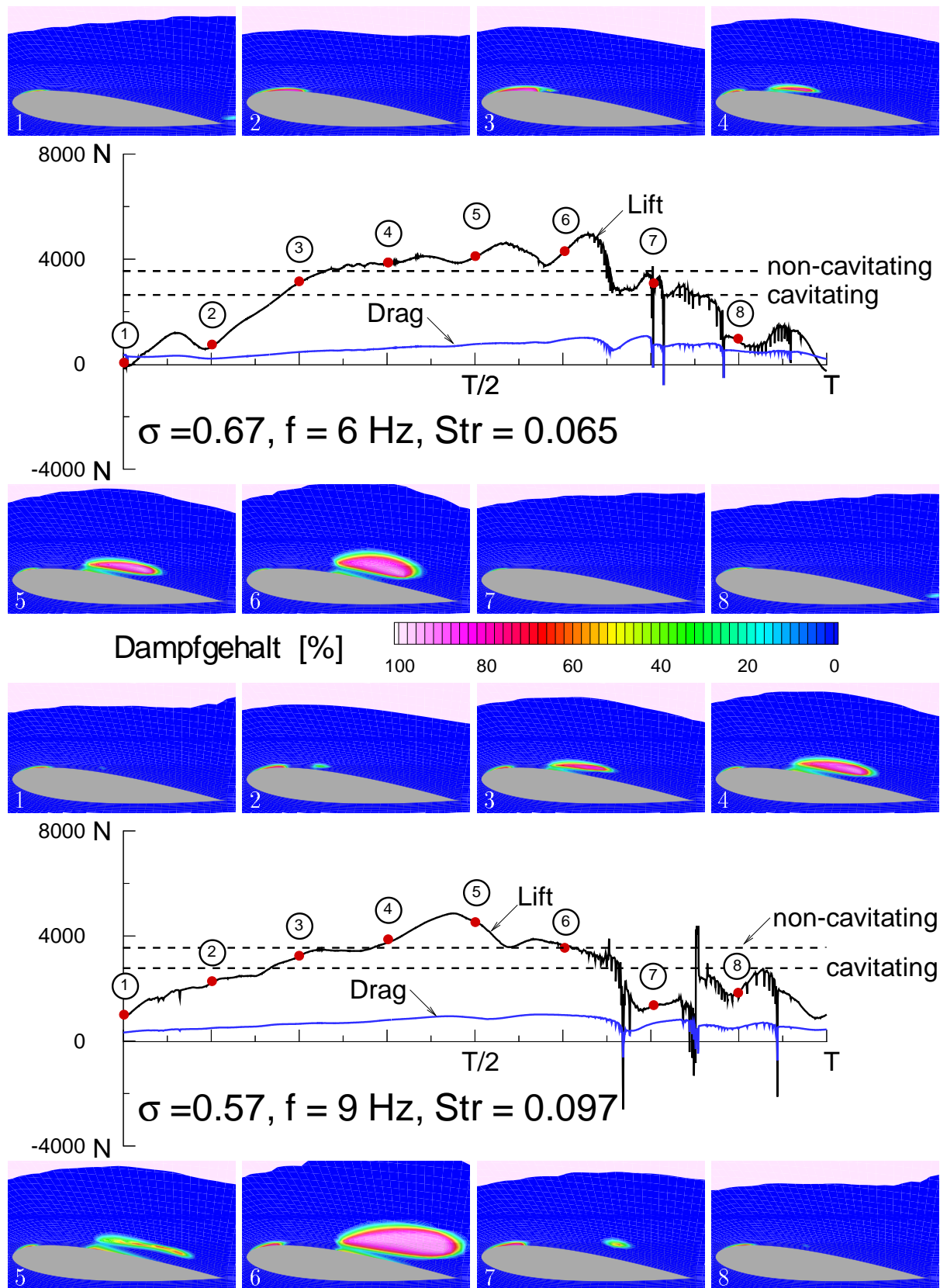


Abbildung 7.4: Einfluß des Kavitationsbeiwerts auf den zeitl. Verlauf von Auftrieb bzw. Widerstand während einer Periode und Verteilung des Dampfanteils. Zeitinkrement der Bilder : $\Delta t = T/8$, $L_c = 0.13 \text{ m}$, $U = 12 \text{ m/s}$, $R_{0,ref} = 3.0 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, Wasser bei $T = 293.15 \text{ K}$.

8 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein numerisches Verfahren zur Simulation von stationärer und instationärer hydraulischer Kavitation entwickelt. Das neue Verfahren besteht im wesentlichen aus zwei Bausteinen, der für die Strömung mit freier Oberfläche entwickelten Volume of Fluid Methode (VoF) und einer geeigneten Modellierung der Blasendynamik. Die disperse Struktur der Blasenwolke wird durch die Modellierung explizit berücksichtigt.

Die Verfahrensentwicklung stützt sich auf eine umfangreiche Literaturstudie, die eindeutig die Fluidqualität, d.h. Anzahl und Radius der Kavitationskeime, als den dominierenden Einflußparameter identifiziert. Die Kavitationskeime liegen bereits in der Anströmung in großer Anzahl vor, d.h. homogene Keimbildung kann vernachlässigt werden. Die spektrale Keimverteilung in einer Flüssigkeit wird durch Vorgabe eines mittleren Keimradius und einer mittleren Keimanzahl pro Volumeneinheit Flüssigkeit approximiert.

Als Basis zur Berechnung des konvektiven Transports der Keime wird die Volume of Fluid Methode verwendet. Die Erweiterung gegenüber dem VoF-Originalverfahren, das nicht für Strömungen mit Phasenübergang geeignet ist, besteht in der Formulierung eines Dampfvolumenquellterms, der das Anwachsen bzw. den Kollaps von Blasen modelliert. Die Position der Blasenwolke im Rechengebiet wird durch eine Dampfanteil größer Null markiert, deren innere Struktur (Blasenanzahl und Radius) aus dem Wert des Dampfanteils rekonstruiert.

Die kavitierende Strömung wird numerisch als die Strömung eines homogenen Fluids mit variablen Gemischeigenschaften behandelt, dessen Bewegung nur durch einen Satz Erhaltungsgleichungen beschrieben werden kann. Die Stoffwerte des Gemischs werden in Abhängigkeit des Dampfanteils aus den Stoffwerten der reinen Phasen berechnet. Die Kopplung des Druck- und Geschwindigkeitsfelds erfolgt nach einem modifizierten SIMPLE Verfahren. Zur Herleitung der Druck-Korrekturgleichung wird die Kontinuität in der nicht-konservativen Form verwendet. Das Verfahren basiert daher auf der Bilanzierung der Volumenströme anstatt der Massenströme. In Verbindung mit der neu entwickelten Methode zur Stabilisierung des Verfahrens bei der Simulation kavitierender Strömungen, ist die Bilanzierung der Volumenströme der Schlüssel zur effizienten numerischen Simulation. Das numerische Modell wird durch eine Beziehung zur Modellierung des Blasenwachstums geschlossen. Als Wachstumsbeziehung wird die Gleichung nach Rayleigh verwendet, die leicht erweitert werden kann, um thermische Effekte an der Blasenwand sowie die Trägheit des umgebenden Fluids zu berücksichtigen.

Zur Verifikation des Verfahrens werden zunächst Zweiphasenströmungen mit hohem Dichteverhältnis (1:1000) ohne Phasenübergang berechnet. Die Simulation der Dynamik einer freien Oberfläche bereitet keine Schwierigkeiten und die Übereinstimmung mit analytischen bzw. experimentellen Ergebnissen ist sehr gut.

Die Eigenschaften des neu entwickelten Kavitationsmodells werden anhand einer Düsenströmung untersucht. Das Modell zeichnet sich durch die Auflösung von typischen Kavitationseffekten aus, wie z.B. die Entstehung eines Re-entrant Jets oder durch Kollaps von Blasenwolken verursachte hydraulische Druckspitzen. Anhand einer Parametervariation konnte der aus dem Experiment bekannte Fluidqualitätseffekt sowie der Größenmaßstabeffekt qualitativ reproduziert werden. Der Geschwindigkeitsmaßstabeffekt wurde teilweise reproduziert: das Modell liefert zwar keine Zunahme der Kavitationserscheinungen mit der Geschwindigkeit, aber die Ähnlichkeit bzgl. der Strouhalzahl wird reproduziert.

Die Berücksichtigung von thermischen Effekten führt zu einer Dämpfung der instationären kavitierenden Strömung. Die Auswirkungen der thermischen Dämpfung reichen von der Reduktion der Frequenz bis hin zur durch thermische Dämpfung erzwungenen stationären Kavitation. Diese Ergebnisse wurden jedoch mit einer Wachstumsbeziehung berechnet, die nur bedingt zur Simulation thermisch kontrollierten Wachstums einsetzbar ist.

Die Simulation der kavitierenden Umströmung eines NACA 0015 Profils zeigt gute Übereinstimmungen mit den Experimenten von Keller [58] im Hinblick auf die Struktur der instationären Kavitation. Analog zum Experiment wächst das Kavitationsgebiet zunächst an und es bildet sich ein Re-entrant Jet. Dieser verursacht die Entstehung eines Wirbels, der zum Aufbrechen des Kavitationsgebiets führt. Nach dem Aufbrechen schwimmt eine Blasenwolke im Wirbelzentrum ab. Die interne Dynamik des Zyklus ist sehr kompliziert, der beginnende Kollaps der Blasenwolke führt zur Entstehung einer sekundären Kavitationswolke im Bereich der Profilmitte, die ebenfalls im Zentrum eines Wirbels abschwimmt. Dieses vereinigt sich im Heckbereich des Profils mit der bereits vorhandenen Kavitationswolke zu einer großen Wolke, deren Kollaps massive Druckimpulse auf das Profil verursacht. Die Druckverteilung weicht zu allen Zeiten erheblich von der einphasigen Umströmung an, der zeitlich gemittelte Auftrieb erreicht nur ca. 60 % des Auftriebs der einphasigen Umströmung.

Der Einfluß der Fluidqualität wird durch Variation des Keimgehalts in der Anströmung untersucht. Die zeitliche Entwicklung von Dampfvolumen im Strömungsfeld und der Verlauf von Auftrieb und Widerstand wird durch die Fluidqualität stark beeinflusst, die über eine Periode gemittelten Werte für Auftrieb und Widerstand und die Frequenz der periodisch kavitierenden Strömung bleiben jedoch nahezu konstant.

Der Einfluß einer freien Oberfläche auf die Entstehung und Ausdehnung von Kavitation wurde anhand einer Variation des Kavitationsbeiwerts untersucht. Zunächst wird eine

Reduktion des Auftriebs bei kavitationsfreier Umströmung des Profils gegenüber der rein einphasigen Umströmung festgestellt. Der Auftriebsverlust resultiert aus der Reduktion der Saugspitze des Profils und daher sind die Kavitationserscheinungen bei vergleichbarem Kavitationsbeiwert in der Anströmung geringer. Durch Reduktion des Kavitationsbeiwerts kann der Transitionsprozeß von stationärer zu instationärer Kavitation simuliert werden. Die Frequenz der periodisch kavitierenden Strömung steigt mit der Absenkung des Kavitationsbeiwerts an. Der zeitlich gemittelte Auftrieb erreicht hier in Abhängigkeit des Kavitationsbeiwerts ca. 75 - 85 % des einphasigen Werts.

Literaturverzeichnis

- [1] W.H. ISAY, *Kavitation*. Schiffahrts-Verlag „Hansa“ C. Schroedter GmbH & Co. KG, Hamburg (1984)
- [2] R.E. ARNDT, *Cavitation in fluid machinery and hydraulic structures*. Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 13, pp. 273-328 (1981)
- [3] H. CHAVES, M. KNAPP, A. KUBITZEDK, F. OBERMEIER, *Experimental Study of cavitation in the nozzle hole of diesel injectors using transparent nozzles*. SAE Paper 962002 (1996)
- [4] EISENBERG, P., *Film notes for cavitation*. Education Development Center (1969)
- [5] J. FRENKEL, *Kinetic theory of liquids*. Dover (1955)
- [6] R. FÜRTH, *On the theory of the liquid state*. Proc. of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 37, Part I pp. 253, Part II pp. 276, Part III pp. 281 (1941)
- [7] W. DÖRING, *Die Überhitzungsgrenze und Zerreifestigkeit von Flüssigkeiten*. Z. Phys. Chem., Vol. B36, pp. 271 (1937)
- [8] L.J. BRIGGS, *Limiting negative pressure of water*. J. of Appl. Physics, Vol. 21, pp. 721-722 (1950)
- [9] R.T. KNAPP 1958, *Cavitation and nuclei*. Trans. ASME, Vol. 80, pp. 1315-1324 (1958)
- [10] L.J. HOLL, *Nuclei and cavitation*. J. of Basic Engineering, Vol. 93, pp. 681-688 (1970)
- [11] A. KELLER, F. HARTUNG, *Untersuchungen zum Problem der modellmäßigen Behandlung von Strömungskavitation*. in: *Kavitation*. Ein Abschlußbericht über Ergebnisse des Schwerpunktprogramms von 1966-1972. Harald Boldt Verlag, Boppard (1974)
- [12] F.G. HAMMIT, *Cavitation and multiphase flow phenomena*. McGraw-Hill Verlag, New York (1980)

- [13] E. N. HARVEY, D.K. BARNES, W.D. MCELROY, A.H. WHIETLY, D.C. PEASE, AND K.W. COOPER, *Bubble formation in animals - I. Physical factors*. J. of Cellular and Comp. Physiol., Vol. 24, No. 1, pp. 1-22 (1944)
- [14] E. N. HARVEY, A.H. WHIETLY, W.D. MCELROY, D.C. PEASE, AND D.K. BARNES, *Bubble formation in animals - II. Gas nuclei and their distribution in blood and tissues*. J. of Cellular and Comp. Physiol., Vol. 24, No. 1, pp. 23-24 (1944)
- [15] M. STRASBERG, *The influence of air-filled nuclei on cavitation inception*. Naval Ship Research and Development Center, Report 1078 (1956)
- [16] W.H. BESANT, *Hydrostatics and Hydrodynamics*. art. 158, Cambridge University Press, London (1856)
- [17] LORD RAYLEIGH, *On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity*. Philosophical Magazine, Vol. 34, No. 200, pp. 94-98 (1917)
- [18] M.S. PLESSET, *The dynamics of cavitation bubbles*. J. of Applied Mechanics, Vol. 16, No. 3, pp. 277-282 (1949)
- [19] R.D. IVANY 1965, F.G. HAMMIT, *Cavitation bubble collapse in viscous, compressible liquids - Numerical analysis*. J. of Basic Engineering, Vol. 87, pp. 977-985 (1965)
- [20] R.D. IVANY 1965, F.G. HAMMIT, AND T.M. MITCHELL, *Cavitation bubble collapse observations in a venturi*. J. of Basic Engineering, Vol. 88, pp. 649-657 (1966)
- [21] L.J. BRIGGS, *The collapse or growth of a spherical bubble in a viscous fluid*. Proc. of the 1st US Congress in Applied Mathematics. ASME, pp. 813-821 (1952)
- [22] R. HICKLING, M.S. PLESSET, *Collapse and rebound of a spherical bubble in water*. Physics of Fluids, Vol. 7, No. 3, pp. 7-14 (1964)
- [23] R. HICKLING, *Effects of thermal conduction in sonoluminescence*. J. of Acoustic Soc. of America, Vol. 35, pp. 967-974 (1963)
- [24] R. HICKLING, F.G. HAMMIT, *On the effects of heat transfer upon collapsing bubbles*. Nuclear Science and Engineering, Vol. 53, No. 3, pp. 263-276 (1956)
- [25] W. LI, *Thermal effect on the growth and collapse of cavities*. In: Proc. of IAHR Symposium Cavitation and Hydraulic Machinery, Sendai, Japan, 1962 (ed. F. Numachi), pp. 1- 16 (1962)
- [26] H. A. STAHL, A.J. STEPANOFF, *Thermodynamic aspects of cavitation in centrifugal pumps*. J. of Basic Engineering, Vol. 78, pp. 1691-1693 (1956)
- [27] A.J. STEPANOFF, *Cavitation in centrifugal pumps with liquids other than water*. J. of Engineering for Power, Vol. 83, pp. 79-90 (1961)

-
- [28] A.J. STEPANOFF, *Cavitation properties of liquids*. J. of Basic Engineering, Vol. 86, pp. 195-200 (1964)
- [29] J.R. BONNIN, *Incipient cavitation in liquids other than cold water*. ASME Cavitation Forum, pp. 14-16 (1971)
- [30] R. GARCIA, *Comprehensive cavitation damage data for water and various liquid metals including correlations with materials and fluid properties*. Ph.D. thesis, University of Michigan (1966)
- [31] R. GARCIA, F.G. HAMMIT, *Cavitation damage and correlations with materials and fluid properties*. J. of Basic Engineering, Vol. 89, pp. 755-763 (1967)
- [32] M.S. PLESSET, S.A. ZWICK, *The Growth of a vapour bubble in superheated liquids*. J. of Applied Physics, Vol. 25, pp. 493-498 (1954)
- [33] P. DERGARABEDIAN, *The rate of growth of vapor bubbles in superheated water*. J. of Applied Mechanics, Vol. 20, pp. 537-545 (1953)
- [34] B.B. MIKIC, W.M. ROHSENOW, P. GRIFFITH, *On bubble growth rates*. Int. J. of Heat Mass Transfer, Vol. 12, pp. 657-666 (1970)
- [35] Y.C. LIEN, *Bubble growth rates at reduced pressures*. D. Sci. thesis MIT (1969)
- [36] O. MIYTAKE, I. TANAKA, N. LIOR, *A simple universal equation for bubble growth in pure liquids and binary solutions with a non-volatile solute*. Int. J. of Heat Mass Transfer, Vol. 40, No. 7, pp. 1577-1584 (1997)
- [37] H.S. LEE, *Vapor Bubble Dynamics in Microgravity*. Ph.D thesis, University of Michigan (1993)
- [38] H.S. LEE, H. MERTE, *Spherical vapor bubble growth in uniformly superheated liquids*. Int. J. of Heat Mass Transfer, Vol. 39, No. 12, pp. 2427-2447 (1996)
- [39] J.R. BLAKE, D.C. GIBSON, *Cavitation bubbles near boundaries*. Ann. Rev. Fluid Mechanics, Vol. 19, No. 12, pp. 99-123 (1987)
- [40] M.S. PLESSET, R.B. CHAPMAN, *Collapse of an initially spherical vapor cavity in the neighborhood of a solid boundary*. J. of Fluid Mechanics, Vol. 47, No. 2, pp. 283-290 (1971)
- [41] G.L. CHAHINE, R. DURAISWAMI, *Dynamical interactions in a multi-bubble cloud*. J. of Fluids Engineering, Vol. 114, pp. 2680-680 (1992)
- [42] A. KELLER, *Kavitationserscheinungen und deren zuverlässige Vorhersage durch Modellversuche*. Pumpentagung Karlsruhe '92, Sektion B4, Kavitation (1992)

- [43] A. KELLER, *Maßstabeffekte bei der Anfangskavitation unter Berücksichtigung der Zugspannungsfestigkeit der Flüssigkeit*. Pumpentagung Karlsruhe '84, Sektion B6, Kavitation I (1984)
- [44] A. KELLER, *Cavitation scale effects - a presentation of its visual appearance and empirically found relations*. Proc. of NCTC50 International Conference on Propeller Cavitation, April 2000, Newcastle upon Tyne (2000)
- [45] B. GINDROZ, *Cavitation nuclei and cavitation inception of marine propellers: State of the art at the dawn of the 21st century*. JSME Series B, Vol. 41, No.2 , pp. 464-471 (1998)
- [46] D.M. ERICSON, *Observations and analysis of cavitating flow in ventury systems*. University of Michigan ORA Report (1969)
- [47] A. KELLER, E.A. WEITENDORF, *Influence of undissolved air content on cavitation phenomena at the propeller blades and on induced hull pressure amplitudes*. Proc. of IAHR Symposium on Two Phase Flow and Cavitation, Grenoble, France (1976)
- [48] Z. LIU, C.E. BRENNEN, *Cavitation nuclei population and event rates*. J. of Fluids Engineering, Vol. 120, pp. 728-737 (1998)
- [49] C.Y LI, S.L. CECCIO, *Observations of the interactions of cavitation bubbles with attached cavities*. ASME-FED Vol. 190, pp. 283-290 (1994)
- [50] J.J. PYUN, F.G. HAMMIT, A. KELLER, *Microbubble spectra and superheat in water and sodium, including effect of fast neutron irradiation*. J. of Fluids Engineering, Vol. 120, pp. 728-737 (1998)
- [51] P.G. FALLSTRÖM, *Personal communication to F.G. Hammit*. Swedish State Power Admin. (1969)
- [52] B. GINDROZ, M.L. BILLET, *Influence of the Nuclei on the cavitation inception for different types of cavitation on ship propellers*. J. of Fluids Engineering, pp. 87-97 (1976)
- [53] H. YAMAGUCHI, H. KATO, M. MAEDA, T.M. TOYODA, *High performance foil sections with delayed cavitation inception*. FEDSM99-7294, Proc.: of FEDSM99 ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference, July 18-22, 1999, San Francisco, California (1999)
- [54] G.H. SCHNERR, C. VORTMANN, J. SAUER, *Numerical studies of flow in fuel injector nozzles - interaction of separation and cavitation*. Buchbeitrag zum DFG-Schwerpunktprogramm "Transiente Vorgänge in mehrphasigen Systemen mit einer oder mehreren Komponenten", Wiley-VCH Weinheim (1999)

-
- [55] DEUTSCHE FORSCHUNGSGEMEINSCHAFT, *Kavitation. Ein Abschlußbericht über Ergebnisse des Schwerpunktprogramms von 1966-1972*. Harald Boldt Verlag, Boppard (1974)
- [56] Q. LE, J.P. FRANC, J.M. MICHEL, *Partial cavities: global behavior and mean pressure distribution*. J. of Fluids Engineering, Vol. 115, pp. 243-248 (1993)
- [57] A. KUBOTA, H. KATO, H. YAMAGUCHI, M. MAEDA, *Unsteady structure measurement of cloud cavitation on a foil section using conditional sampling technique*. J. of Fluids Engineering, Vol. 111, pp. 205-210 (1989)
- [58] A. KELLER, R.A. ARNDT, *Hochgeschwindigkeits - Videoaufzeichnungen von Kavitation an einem NACA 15 Profil*. Versuchsanstalt für Wasserbau und Wasserwirtschaft, TU München, private Mitteilungen (1999)
- [59] P.A. LUSH, P.I. PETERS, *Visualisation of the cavitating flow in a venturi-type duct using high speed cine photography*. Proc. of IAHR Conf. on Operating Problems of Pump Stations and Power Plants, Vol.1, No.5, pp. 5-13 (1982)
- [60] B. STUTZ, J.L REBOUD, *Experiments on unsteady cavitation*. Experiments in Fluids, Vol. 22, pp. 191-198 (1997)
- [61] R.B. WADE, A.J. ACOTA, *Experimental Observations on the flow past a plano-konvex hydrofoil*. J. of Basic Engineering, pp. 243-248 (1966)
- [62] M. KJELDSSEN, M. EFFERTZ, R.E. ARNDT, *Investigation of unsteady cavitation phenomena*. Proc. of Seminar on Abnormal Effects in Turbomachinery, Osaka, Japan (1998)
- [63] M. KJELDSSEN, M. EFFERTZ, R.E. ARNDT, *Unsteady operation due to cavitation*. to appear in: Proc. of IAHR Congress 2000 (2000)
- [64] K. LANZENBERGER, *Numerische und analytische Ansätze zur Simulation kavitierender Strömungen.*, Dissertation, Universität Karlsruhe (TH) (1995)
- [65] C.W. (TONY) HIRT, *Computational modeling of cavitation*. Proc. of 2nd. Int. Symp. on Performance Enhancement for Marine Propellers, Oct. 14-16, Newport, Maryland (1990)
- [66] W.G. SZYMCAK, J.M. SOLOMON, A.E. BERGER, J.C.W. ROGERS, *Numerical simulation of cavitation inception*. Proc. of Int. Symp. on Cavitation CAV'95, May 2-5, Deauville, France, pp. 399-406 (1995)
- [67] Y. CHEN, S.D. HEISTER, *Two-phase modeling of cavitated flows*. Computers & Fluids, Vol. 24, No. 7, pp. 799-809 (1995)

- [68] H. LEMONNIER, A. ROWE, Another approach in modeling cavitating flows. *J. of Fluid Mech.*, Vol. 195, pp. 557-580 (1988)
- [69] W.H. BREWER, S.A. KINNAS, *Experiment and viscous flow analysis on a partially cavitating hydrofoil*. *J. of Ship Research*, Vol. 41, No. 3, pp. 161-171 (1997)
- [70] R.K. AVVA, A.K. SINGHAL, An enthalpy based model of cavitation. ASME FED-Vol. 226, *Cavitation and Gas-Liquid Flow in Fluid Machinery Devices*, ASME (1995)
- [71] Y. VENTIKOS, G. TZABIRAS, A numerical study of steady and unsteady cavitation phenomena around hydrofoils. *Proc. of Int. Symp. on Cavitation CAV'95*, May 2-5, Deauville, France, pp. 441-449 (1995)
- [72] Y. DELLANOY, J.L. KUENY, Two-phase flow approach in unsteady cavitation modelling. ASME FED-Vol. 98, *Cavitation and Multiphase Flow Forum*, ASME (1995)
- [73] L. DIEVAL, M. ARNAUD, Improvement of a VOF method for multiphase flows. *Proc. of 3rd Int. Conf. on Multiphase Flow, ICMF'98*, June 8-12, Lyon, France (1998)
- [74] Y. CHEN, S.D. HEISTER, *A numerical treatment for attached cavitation*. *J. of Fluids Engineering*, Vol. 116, pp. 613-618 (1994)
- [75] C. VORTMANN, G.H. SCHNERR, A new law-of-state model for cavitation at non-equilibrium. to appear in: *ZAMM 81* (2000)
- [76] D. COKLJAT, V.A. IVANOV, S.A. VASQUEZ, Two-phase model for cavitating flows. *Proc. of 3rd Int. Conf. on Multiphase Flow, ICMF'98*, June 8-12, Lyon, France (1998)
- [77] Y. CHEN, S.D. HEISTER, *Modeling hydrodynamic nonequilibrium in cavitating flows*. *J. of Fluids Engineering*, Vol. 118, pp. 172-178 (1996)
- [78] Y. CHEN, S.D. HEISTER, *Modeling cavitating flows in diesel injectors*. *Atomization and Sprays*, Vol. 6, pp. 709-726 (1996)
- [79] A. KUBOTA, H. KATO, Y. YAMAGUCHI, *A new modelling of cavitating flow: a numerical study of unsteady cavitation on a hydrofoil section*. *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 240, pp. 59-96 (1992)
- [80] R. SCHULZ, *Entwicklung eines numerischen Verfahrens zur Simulation von Wolkencavitation*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH) (1995)
- [81] C.F. DELALE, G.H. SCHNERR, J. SAUER, *Quasi-one-dimensional cavitating nozzle flows*. submitted to *J. Fluid Mechanics* (1998)
- [82] Y.C. WANG, C.E. BRENNEN, *One-dimensional bubbly cavitating flows through a converging-diverging nozzle*. *J. of Fluids Engineering*, Vol. 120, pp. 166-170 (1998)

-
- [83] J.H. FERZIGER, M. PERIĆ, *Computational methods for fluid dynamics*. Springer-Verlag (1996)
- [84] B.J. DALY, *A technique for including surface tension effects in hydrodynamic calculations*. J. of Computational Physics, Vol. 4, pp. 97-117 (1969)
- [85] B.D. NICHOLS, C.W. HIRT, *Calculating three-dimensional free surface flows in the vicinity of submerged and exposed structures*. J. of Computational Physics, Vol. 12, pp. 343-448 (1973)
- [86] S. OSHER, J.A. SETHIAN, *Fronts propagating with curvature-dependant speed: algorithms based on Hamilton-Jakobi formulations*. J. of Computational Physics, Vol. 79, pp. 12-49 (1988)
- [87] F.H. HARLOW, J.E. WELCH, *Numerical calculation of time-dependant viscous incompressible flow of fluid with free surface*. Physics of Fluids, Vol. 8, pp. 2182-2189 (1965)
- [88] C.W. HIRT, B.D. NICHOLS, *Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries*. J. of Computational Physics, Vol. 39, pp. 201-225 (1981)
- [89] M. KROEMER Arbeitsbereich 3-13 Fluidodynamik und Schiffstheorie, TU Hamburg-Harburg, private Mitteilungen (1999)
- [90] J.U. BRACKBILL, D.B. KOTHE, C. ZEMACH, *A Continuum Method for Modeling surface tension*. J. of Computational Physics, Vol. 100, pp. 335-354 (1992)
- [91] P. ROOSEN, S. KLUITMANN, K.-F. KNOCH, *Untersuchung und Modellierung des transienten Verhaltens von Kavitationserscheinungen bei ein- und mehrkomponentigen Kraftstoffen in schnell durchströmten Düsen*. Abschlußbericht zur ersten Antragsperiode des DFG-Schwerpunktprogramms "Transiente Vorgänge in mehrphasigen Systemen mit einer oder mehreren Komponenten ", Aachen (1994)
- [92] D. RAMKRISHNA, *The status of population balances*. Review in Chemical Engineering, Vol. 3, No. 1, pp. 49-95 (1985)
- [93] M. BOTTONI, W. SENGPHEL, *Review of mathematical and physical basis of two-phase flow modelling* KfK 4759, Kernforschungszentrum Karlsruhe 1992.
- [94] H.K. VERSTEG, W. MALALASEKERA, *An introduction to computational fluid dynamics, the finite volume method*. Longman Scientific & Technical (1995)
- [95] M. PERIĆ, *A finite volume method for the prediction of three-dimensional flow in complex ducts*. Ph.D. thesis, University of London (1985)
- [96] O. UBBINK, *Numerical prediction of two fluid systems with sharp interfaces*. Ph.D. thesis, University of London (1997)

- [97] J.D. RAMSHAW, J.A. TRAPP, *A numerical technique for low-speed homogeneous two-phase flow with sharp interfaces*. J. of Computational Physics, Vol. 21, pp. 438-453 (1976)
- [98] B.P. LEONARD, *The ULTIMATE conservative differencing scheme applied to unsteady one-dimensional advection*. Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., Vol. 88, pp. 17-74 (1991)
- [99] B. LAFAURIE, C. NARDONE, R. SCARDOVELLI, S. ZALESKI, G. ZANETTI, *Modeling merging and fragmentations in multiphase flow with SURFER*. J. of Computational Physics, Vol. 113, pp. 438-453 (1994)
- [100] B. NOLL, *Numerische Strömungsmechanik*. Springer Verlag Berlin Heidelberg (1993)
- [101] S.V. PATANKAR, D.B. SPALDING, *A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows*. Int. J. of Heat Mass Transfer, Vol. 15, pp. 1787-1798 (1972)
- [102] H.L. STONE, *Iterative Solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations*. SIAM J. of Numerical Analysis, Vol. 5, pp. 530-558 (1968)
- [103] P.E. RAAD, S. CHEN, D.B. JOHNSON, *The introduction of micro cells to treat pressure in free surface fluid flow problems*. J. of Fluids Eng., Vol. 117, pp. 683-690 (1995)
- [104] I. TADJBAKHSI, J.B. KELLER, *Standing surface waves of finite amplitude*. J. of Fluid Mech., Vol. 8, pp. 442-451 (1960)
- [105] J.C. MARTIN, W.J. MOYCE, *An experimental study of the collapse of a liquid column on a rigid horizontal plane*. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Vol. A244, pp.312-324 (1952)
- [106] S. KOSHIZUKA, Personal communication (1995)
- [107] F.H. HARLOW, A.A. AMSDEN, J.R. NIX, *Relativistic fluid dynamics calculations with the particle-in-cell technique*. J. of Computational Physics, Vol. 20, pp. 119-129 (1976)
- [108] P.K. KHOSLA, S.G. RUBIN, *A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme*. Computers & Fluids, Vol. 2, pp. 207-209 (1974)
- [109] S. MUZAFERIJA, *Adaptive finite volume method for flow predictions using unstructured meshes and multigrid approach*. Ph.D. thesis, University of London (1994)