

RUMPEL, T.; SCHWEIZERHOF, K.

Volumenabhängige Druckbelastung bei großen Deformationen

Quasistatische Fluid-Festkörperwechselwirkungen sind besonders bei großen Deformationen von Membranstrukturen von Interesse. Im Beitrag wird speziell auf die Wechselwirkung von Gasdruckkräften in elastischen Mehrkammerstrukturen eingegangen. Die virtuelle Arbeit der Druckbelastung wird zuerst allgemein dargestellt und für die im Rahmen einer nichtlinearen Lösung z.B. mit dem Newton Verfahren erforderliche Aufbereitung linearisiert. Die Finite Element Diskretisierung führt zu den entsprechenden Steifigkeitsmatrizen und zum Residuum der volumenabhängigen Druckkraft. An einem numerischen Beispiel wird die Fluid-Festkörperwechselwirkung vorgeführt.

1. Volumenabhängige Druckbelastung

Die virtuelle Arbeit der Druckbelastung läßt sich darstellen als:

$$\delta W_{ext} = \int_a p \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} da, \quad (1)$$

$$\text{mit } \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}}{|\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}|}, \quad da = |\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}| d\xi d\eta, \quad p = p(v(\mathbf{x})).$$

\mathbf{x} bezeichnet die Lage eines Oberflächenpunktes, $v(\mathbf{x})$ das Volumen einer Kammer mit Innendruck p und ξ, η körperfeste Koordinaten der Oberfläche. Mit $\mathbf{n}^* = \mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}$ als nicht normiertem Normalenvektor ergibt sich für eine Kammer j das Volumen und die virtuelle Arbeit zu:

$$v^j = \frac{1}{3} \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^* d\xi d\eta, \quad (2)$$

$$\delta W_{ext}^j = \int_{\eta} \int_{\xi} p^j \mathbf{n}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\xi d\eta. \quad (3)$$

2. Linearisierung

Bei geometrisch nichtlinearem Strukturverhalten wird die Lösung der entstehenden nichtlinearen Gleichungen üblicherweise mit Hilfe eines Newtonverfahrens gelöst. Hierzu wird an einem bekannten Zustand $\mathbf{x}_t = \mathbf{X} + \mathbf{u}_t$ linearisiert und der gesuchte Zustand $\mathbf{x} = \mathbf{x}_t + \Delta \mathbf{u}$ über den Verschiebungszuwachs $\Delta \mathbf{u}$ iterativ angenähert. \mathbf{X} bezeichnet den Ausgangszustand und \mathbf{u}_t den bekannten Verschiebungszustand. Der linearisierte virtuelle Arbeitsausdruck lautet:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext}^{lin,j} &= p_t^j \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{n}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\xi d\eta \\ &+ \frac{1}{3} p_{,v}^j|_t \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{n}^* \cdot \Delta \mathbf{u} d\xi d\eta \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{n}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\xi d\eta \\ &+ \frac{1}{3} p_{,v}^j|_t \int_{\eta} \int_{\xi} (\Delta \mathbf{u}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{t,\eta} - \Delta \mathbf{u}_{,\eta} \times \mathbf{x}_{t,\xi}) \cdot \mathbf{x}_t d\xi d\eta \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{n}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\xi d\eta \\ &+ p_t^j \int_{\eta} \int_{\xi} (\Delta \mathbf{u}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{t,\eta} - \Delta \mathbf{u}_{,\eta} \times \mathbf{x}_{t,\xi}) \cdot \delta \mathbf{u} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (4)$$

Mit Hilfe partieller Integration kann die Konservativität der Druckbelastung analog zu [1], [2], [3], [4], [5] auch bei Berücksichtigung der Volumendeformation nachgewiesen werden [6], [7]. Der Druck-Volumengradient $p_{,v}^j|_t$ einer Kammer j berechnet sich aus der thermodynamischen Zustandsgleichung. Für eine isentrope Zustandsänderung (κ isentropen Konstante) ergibt sich im Speziellen:

$$p_{,v}^j|_t = -\kappa \frac{p_t^j}{v_t^j} \quad \text{aus} \quad p v^\kappa = p_t v_t^\kappa. \quad (5)$$

3. Diskretisierung

Wird eine isoparametrische Finite Element Diskretisierung $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d}^{se}$, $\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{d}^{se}$ vorgenommen, ergibt sich ein algebraisches Gleichungssystem. Steifigkeitsmatrizen und Residuum einer Kammer j bestehend aus n_{se} Schalensegmenten (z.B. Solid Shell Elementen) [1] sind:

$$\mathbf{K}_{Druck.,1}^j = -p^j \sum_{n_{se}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T (\mathbf{x}_{,\xi}^{se} \times \mathbf{N}_{,\eta} + \mathbf{N}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}^{se}) d\xi d\eta \quad (6)$$

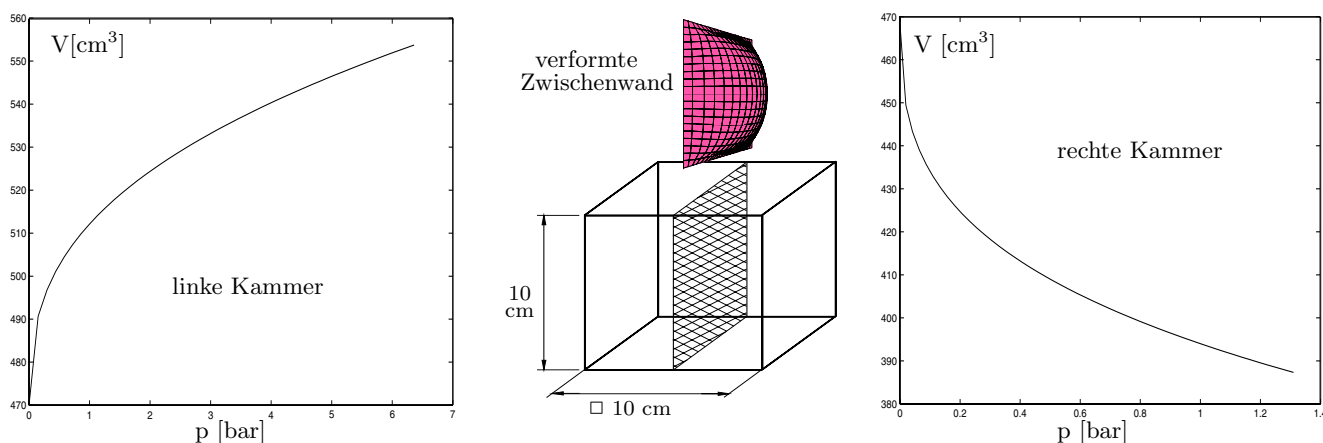
$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{Druck.,2}^j &= -p_{,v}^j \sum_{n_{se}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T (\mathbf{x}_{,\xi}^{se} \times \mathbf{x}_{,\eta}^{se}) d\xi d\eta \sum_{n_{se}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{x}_{,\xi}^{se} \times \mathbf{x}_{,\eta}^{se})^T \mathbf{N} d\xi d\eta \\ &= -p_{,v}^j \mathbf{a} \mathbf{a}^T \quad \text{mit } \mathbf{a} = \sum_{n_{se}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T (\mathbf{x}_{,\xi}^{se} \times \mathbf{x}_{,\eta}^{se}) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mathbf{R}_{ext.Druck}^j = p^j \sum_{n_{se}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T (\mathbf{x}_{,\xi}^{se} \times \mathbf{x}_{,\eta}^{se}) d\xi d\eta. \quad (8)$$

Gl.(8) zeigt die Volumenabhängigkeit der Druckbelastung, die zu der Kopplung der Freiheitsgrade einer Kammer über eine Rang-eins-Aufdatierung der üblichen Steifigkeitsmatrizen führt. Die Lösung des globalen Gleichungssystems erfordert demnach zusätzlich zur Lösung mit Steifigkeits- und Druck₁- Matrix pro Iteration j vorwärts-rückwärts Substitutionen für j Kammern, wenn der bekannte einfache Zusammenhang nach Sherman-Morrison genutzt wird [7].

$$[\mathbf{K}_{Struktur}^j + \mathbf{K}_{Druck.,1}^j + \mathbf{K}_{Druck.,2}^j] \mathbf{d}^j = \mathbf{R}_{int.Kraft}^j + \mathbf{R}_{ext.Druck}^j \quad (9)$$

4. Numerisches Beispiel



Eine starre Kammer wird durch eine elastische Zwischenwand symmetrisch unterteilt. Die linke Kammer wird mit 8 bar, die rechte Kammer mit 1 bar beaufschlagt. Infolge der Verformung der Zwischenwand kommt es zu einem Druckabfall in der linken Kammer (6,2 bar) und zu einer Druckerhöhung in der rechten Kammer (1,3 bar). Der Volumen-Druck-Verlauf bei linear geführter Drucksteigerung zeigt die Wechselwirkung zwischen Struktur und Druckkraft.

5. References

- 1 PERASON, C.E.: General Theory of Elastic Stability Quart. Appl. Math., **14** (1956), 133–144.
- 2 SEWELL, M.J.: On Configuration-Dependent Loading. Arch. Rational Mech., **23** (1966), 327–351.
- 3 SCHWEIZERHOF, K.; RAMM, E.: Displacement Dependent Pressure Loads in Nonlinear Finite Element Analyses. Computer & Structures, **18** (1984), 1099–1114.
- 4 BUFLER, H.: Pressure Loaded Structures under Large Deformations. ZAMM, **64-7** (1984), 287–295.
- 5 BUFLER, H.: Configuration Dependent Loading and Nonlinear Elastomechanics. ZAMM, **73** (1993), 4–5.
- 6 KNEBEL, K.: Stabilität von Stahlzylindern mit unilateralen Randbedingungen bei statischen und dynamischen Beanspruchungen. Dissertation, Universität Karlsruhe (1997).
- 7 SCHWEIZERHOF, K.; RUMPEL, T.: Volume Dependent Pressure Loading and Large Deformation Finite Element Analysis. Trends in Computational Structural Mechanics, CIMNE (2001), 386–396.

DIPL.-ING. T. RUMPEL Universität Karlsruhe (TH), Institut für Technische Mechanik, D-76128 Karlsruhe

PROF. DR.-ING. K. SCHWEIZERHOF Universität Karlsruhe (TH), Institut für Mechanik, D-76128 Karlsruhe