

# Herleitung verbesserter hierarchischer Plattenmodelle und deren Integralgleichungsformulierung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
**Doktors der Ingenieurwissenschaften**  
von der Fakultät für Maschinenbau der  
Universität Karlsruhe

genehmigte

**Dissertation**

von

Dipl.-Ing. Tancredo Westphal Junior  
aus Braço do Norte, SC, Brasilien

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Juni 2001

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. E. Schnack  
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. E. Ramm



Meinem Vater,  
Tancredo Westphal,  
Orleans (SC), 28. Nov. 1909  
Braço do Norte (SC), 16. Jun. 1988

Meiner Mutter,  
Eloá Cunha Westphal,  
Pedras Grandes (SC), 17. Aug. 1920  
Braço do Norte (SC), 25. Sep. 1999

gewidmet.

Meinen Geschwistern,  
Jeanete Westphal Aguiar  
04.01.1942 – 01.09.1980

Roberto Westphal  
07.06.1945 – 16.06.1988

Rosinete Westphal Martins  
28.03.1947 – 25.05.1989

in Erinnerung.



## Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Arbeit als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Technische Mechanik der Universität Karlsruhe.

Herrn Professor Dr.-Ing. Eckart Schnack danke ich für die Unterstützung und das Interesse an meiner Arbeit.

Mein besonderer Dank gilt meinem ehemaligen Kollegen, Herrn Dr.-Ing. Karsten Türke. Das sorgfältige Durchlesen des Manuskripts haben Herr Dr.-Ing. Karsten Türke, Priv.-Doz. Dr. Heiko Andrä und Dipl.-Phys. Tom-Alexander Langhoff übernommen.

Meinen Institutskollegen, Priv.-Doz. Dr. Heiko Andrä, Dipl.-Ing. Atanas Dimitrov, Dr.-Ing. Slav Dimitrov, Dr. Jan Hauschildt, Dr.-Ing. Olaf Hesebeck, Dipl.-Math. techn. Levente Juhász, Dipl.-Phys. Tom-Alexander Langhoff, Dr. Romana Piat, Dr.-Ing. Karsten Türke und Dipl.-Phys. Wolfgang Weigl, sei herzlich gedankt.

Für den Abschluss des Promotionsverfahrens danke ich den Referenten, Herrn Prof. Dr.-Ing. Eckart Schnack und Herrn Professor Dr.-Ing. Ekkehard Ramm, sowie Herrn Professor Dr. rer. nat. Volker Saile für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Nun darf ich mich bei meinen brasilianischen Freunden aus der „Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil“, die von 1980 bis 1995 mein zweites Zuhause war, bedanken. An erster Stelle bin ich Barcellos und Selke besonderen Dank schuldig. Professor Ph.D. Clovis Sperb de Barcellos sei für die pausenlose Unterstützung und Zusammenarbeit seit Anfang meiner M.Eng.Mec.-Ausbildung 1986 herzlich gedankt. Für den Anstoß zu meiner DAAD-Bewerbung sei Professor Ph.D. Carlos Alberto de Campos Selke gedankt. Ich möchte mich auch bei den Professoren Ph.D. Arno Blass und Ph.D. Domingos Boechat Alves bedanken. Professor Ph.D. Paul William Partridge sei für eine kritische Diskussion kurz vor meiner Abreise aus Brasilien herzlich gedankt. Natürlich sind mir alle Kollegen des unvergesslichen „Mar de Lama“ im Herz geblieben, insbesondere André Ogliari, Lauro César Nicolazzi, Rogério José Marczak und Jun Sergio Ono Fonseca.

Ein persönlicher Dank ist an meine Schwestern Claudete, Margarét und Elizabete gerichtet: Vielen Dank dafür, dass wir inmitten so vieler Schwierigkeiten gemeinsam immer noch stärker sein konnten.

Karlsruhe, im Juni 2001

Tancredo Westphal Junior

„Der Mensch ist ein Seil,  
geknüpft zwischen Tier und Übermensch  
- ein Seil über einem Abgrunde.“

Friedrich Nietzsche (1844 - 1900) in „Also sprach Zarathustra“.



## Abstract

The objective of this dissertation is the derivation of a hierarchical formulation for the differential and integral equations of a twelfth-order plate bending model for homogeneous transversely isotropic materials, named after Poniatovskii and Reissner. The hierarchical characteristic means that the direct reduction from the twelfth-order equation system automatically leads to corresponding systems of lower-order. By the first simplification we obtain the sixth-order equation system of Reissner (and Mindlin) and, by taking the limit of the thickness to zero or the shear stiffness to infinity, the fourth-order Kirchhoff bending equation. The simplification from the twelfth-order to the sixth-order system is performed by the selection of particular values for the two coupling variables.

The differential equations of the twelfth-order model are obtained by application of the Hellinger-Reissner mixed variational principle. For the dimensional reduction we propose as starting point an expansion of the displacements along the plate thickness in the form of Legendre polynomials. In the sequel we determine the corresponding stress field in order to evaluate the expression for the complementary energy density to be used in the variational principle.

The weighted residual method leads to the corresponding system of hierarchical integral equations allowing for the simultaneous BEM formulation of both, the sixth-order and the twelfth-order plate models.

It is shown that the system of differential equations gives a better approximation of the three-dimensional elasticity equations than displacement-based models. The hierarchical reduction of the twelfth-order integral equations yields the known sixth-order equations of van der Weeën, now for transversely isotropic materials.





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung, Stand der Forschung und Ziele der Arbeit</b>	<b>1</b>
1.1	Einführung . . . . .	1
1.2	Stand der Forschung . . . . .	2
1.3	Ziele der Arbeit . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Die Grundgleichungen des Plattenbiegungsproblems für transversal-isotrope Materialien</b>	<b>11</b>
2.1	Einleitung . . . . .	11
2.2	Problemstellung und Anfangsdefinitionen . . . . .	11
2.3	Stoffgesetz: Transversal-isotrope Materialien . . . . .	14
2.4	Das Spannungsfeld . . . . .	15
2.4.1	Komponenten $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ . . . . .	16
2.4.2	Komponenten $\sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x})$ . . . . .	17
2.4.3	Komponente $\sigma_{33}(\mathbf{x})$ . . . . .	18
2.5	Definition der Platteneinheitseinzelbelastungen . . . . .	19
2.6	Zusammenfassung der Grundgleichungen . . . . .	20
2.7	Beispiel für die Einheitseinzelbelastungen . . . . .	23
2.8	Klassifikation der Plattenmodelle . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Hierarchische Herleitung der Differentialgleichungen</b>	<b>27</b>
3.1	Einleitung . . . . .	27
3.2	Das HELLINGER-REISSNERSche Variationsprinzip . . . . .	27
3.3	Herleitung der Differentialgleichungen aus dem Prinzip von Hellinger-Reissner	32
3.4	Grundgleichungen des Hilfsproblems . . . . .	35
3.5	Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen . . . . .	36
3.6	Spannungs-Verzerrungsbeziehungen . . . . .	37
3.7	Die LAMÉ-NAVIERschen Gleichungen . . . . .	42

<b>4</b>	<b>Hierarchische Herleitung der Integralgleichungen</b>	<b>47</b>
4.1	Einleitung . . . . .	47
4.2	Hierarchische Integralgleichungen für die Verschiebungen . . . . .	47
4.3	Integralgleichungen für die Spannungen . . . . .	54
4.4	Der Fundamentaltensor $T_{IJ}$ . . . . .	57
4.5	Integralgleichungen für das Modell $s$ -(1,0) . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Entkopplung der Differentialgleichungen</b>	<b>61</b>
5.1	Einleitung . . . . .	61
5.2	Der HELMHOLTZsche Zerlegungssatz . . . . .	61
5.2.1	Lösung für $\Psi^{(\xi)}$ . . . . .	62
5.2.2	Lösungen für $\Phi^{(\xi)}$ und $\varphi_3^{(\xi)}$ . . . . .	65
5.3	Schlussuntersuchung des hergeleiteten Differentialgleichungssystems . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Die allgemeine Fundamentallösung</b>	<b>73</b>
6.1	Einleitung . . . . .	73
6.2	Ansatz für die Bestimmung der Tensoren $U_{IJ}$ und $U_{ij}$ . . . . .	73
6.3	Berechnung der Determinante . . . . .	74
6.4	Die skalare Fundamentallösung $G$ . . . . .	76
6.5	Die Bestimmung der Koeffizienten . . . . .	77
6.6	Berechnung der Kofaktoren . . . . .	81
6.7	Die allgemeine Fundamentallösung des Problems $s$ -(1,0) . . . . .	83
6.8	Beispiel für das Modell $s$ -(1,0) (Probleme K, Sh und RM) . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>93</b>
<b>A</b>	<b>Das Spannungsfeld</b>	<b>95</b>
<b>B</b>	<b>Die Tensoren für die Probleme K, Sh und RM</b>	<b>101</b>
<b>C</b>	<b>Der Differentialoperator <math>L_{A_{11}}^{co}</math></b>	<b>105</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>107</b>

# Kapitel 1

## Einführung, Stand der Forschung und Ziele der Arbeit

### 1.1 Einführung

Die Plattentheorie spielt eine große Rolle in der Ingenieurwissenschaft. Die verbesserten Modelle von Reissner [78–80] und Hencky-Bolle-Mindlin [9,34,62] eignen sich für dicke Platten besonders gut, was für das klassische Modell von Kirchhoff [48] (siehe Timoshenko und Woinowsky-Krieger [101]) nicht zutrifft. (Die Modelle von Reissner und Mindlin bzw. Kirchhoff sind Modelle sechster bzw. vierter Ordnung, da die entsprechenden Differentialgleichungssysteme sechster bzw. vierter Ordnung sind.) Jedoch bedeuten die Vorzüge der REISSNERSchen und MINDLINSchen Modelle in keiner Weise, dass durch Verwendung dieser Modelle zuverlässige Verschiebungs-, Verzerrungs- und Spannungswerte erzielt werden. Die Ursache ist, dass nur in seltenen Fällen die entsprechende Grundhypothese dieser Modelle allgemeingültig ist, nämlich lineare Variation der *in-plane* Verschiebungen (konstante Rotationen) oder der *in-plane* Spannungen entlang der Plattendicke. Besonders in Bereichen, in denen komplexe 3D-Spannungszustände auftreten (Prinzip von Saint-Venant), ist diese Grundhypothese nicht erfüllt. Um derartige lokale Phänomene erfassen zu können, ist es notwendig und erwünscht, verbesserte Plattenmodelle vorzuschlagen und diese zu überprüfen.

Die Plattentheorie ist ein Zweig der Elastizitätstheorie und Platten sind Grundelemente der Strukturmechanik. Die mathematischen Probleme, die mit Plattenuntersuchungen verknüpft sind, haben neue grundlegende mathematische Ideen hervorgerufen oder angeregt, wie z.B. die Verwendung des Variationskalküls, um richtige und angemessene Randbedingungen für Differentialgleichungen festzusetzen (Stoker 1942 [94]). Wir wollen an dieser Stelle einige Veröffentlichungen über das klassische Plattenmodell, das biharmonische und sogenannte KIRCHHOFFsche Plattenmodell (Kirchhoff 1850 [48]) erwähnen, die u.a. mit den Namen von Poisson, Sophie Germain, Navier, Kirchhoff, Thomson (Lord Kelvin) und Tait verknüpft sind (siehe Todhunter und Pearson 1960 [102], Love 1927 [56], Timoshenko 1953 [99], Szabó 1972, 1976 [95,96], Jemielita 1991, 1993 [44,45]). Wir werden uns von jetzt an mit der Entwicklung von Plattenmodellen beschäftigen, die höherer als vierter Ordnung sind. Trotzdem werden wir in einigen Fällen, in denen es uns notwendig

oder angemessen scheint, das KIRCHHOFFSche Modell näher erforschen, um das hier betrachtete Problem genauer zu erfassen. Wie schon erwähnt, die Ordnung eines Modells bezieht sich auf die Ordnung des entsprechenden Differentialgleichungssystems.

## 1.2 Stand der Forschung

In Abbildung 1.1(a) ist eine unbelastete Platte mit einigen senkrecht zur Mittelfläche verlaufenden Fasern dargestellt. Abbildung 1.1(b) stellt schematisch die Gestalt dieser Fasern nach der Belastung dar. Die Verschiebungs- bzw. Spannungsverteilung strebt mit zunehmender Entfernung von Störungsgebieten (Ränder, Punkte mit rasch variierenden Belastungen, usw.) der bei den KIRCHHOFFSchen, REISSNERSchen und MINDLINSchen Plattenmodelle angenommenen Lösung zu (Schumann [90]). Die gestörten Gebiete, die sich entlang des Randes eines Körpers ausbreiten, und die damit entstehenden Wirkungen, nämlich die Erhöhung der Spannungswerte, nennt man Randschichteffekte, die mit dem SAINT-VENANTSchen Prinzip verbunden sind (Schumann [90]). Die Ausdehnungen dieser Gebiete sind stark von den Randbedingungen (Arnold und Falk [5]) und den Materialparametern abhängig. Für einen Graphit-Epoxid-Verbundwerkstoff sind diese Gebiete beispielsweise viermal größer als diejenige für einen isotropen Stoff (Choi und Horgan [16]). Höhere anisotrope Verbundwerkstoffe weisen fünfzehn Mal breitere Randschichtgebiete im Vergleich zu isotropen Materialien auf.

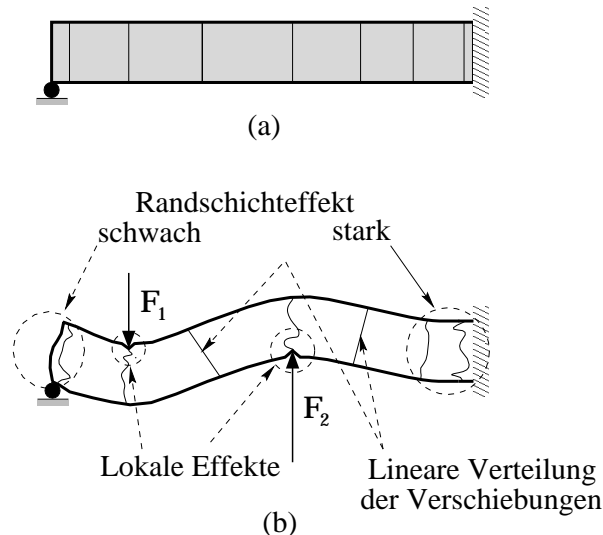


Abbildung 1.1: (a) Unbelastete Platte. (b) Platte unter zwei Einzelbelastungen mit der schematischen Darstellung von Randschichtgebieten und lokalen Effekten.

Li und Babuška [53] analysierten eine eingespannte isotrope quadratische Platte der Fläche  $1 \times 1$  und der Dicke  $h = 1/100$  (dünne Platte) unter Wirkung einer gleichverteilten Belastung. Die Elastizitätslösung für das Biegemoment weist einen Randschichteffekt auf. Ein Modell sechster Ordnung ist im Gegensatz zu einem Modell achter Ordnung nicht in der Lage, diesen Effekt zu beschreiben. In Abbildung 1.2 sind die prozentualen Fehler im Biegemoment  $M_{11}$  beider Modelle im Vergleich mit der exakten Lösung der

3D-Elastizitätstheorie dargestellt (für Punkte entlang der Achse  $x_2 = 0$  in der Nähe des Randes  $x_1 = 0,5$ ). Die numerischen Werte wurden mit einer FE-Methode berechnet. Die Fehler beider Modelle sind ungefähr Null für  $|x_1| < 0,4930$ . Die Breite der Randschicht ist  $O(h)$ . Dieses einfache Beispiel zeigt, dass die meist verwendeten Plattenmodelle sechster Ordnung manchmal versagen bei der Beschreibung lokaler Effekte. Es ist daher sinnvoll, Plattenmodelle höherer Ordnung zu untersuchen.

Dass die verbesserten Modelle sechster Ordnung von Reissner [80,81] und Mindlin [62] nicht ausreichen, um wichtige Eigenschaften des Problems hinreichend genau darzustellen, beruht meistens auf Randschichteffekten. (Delamination von Platten aus Verbundwerkstoffe wäre auch zu nennen) Randschichteffekte hängen mit dem Abklingverhalten von Lösungen elliptischer Randwertprobleme zusammen (Mieth [61]). Die Bedeutung dieser Erscheinungen auf verschiedenen Gebieten der Technik ist in den Arbeiten von Horgan und Knowles [37–39] zusammengefaßt.

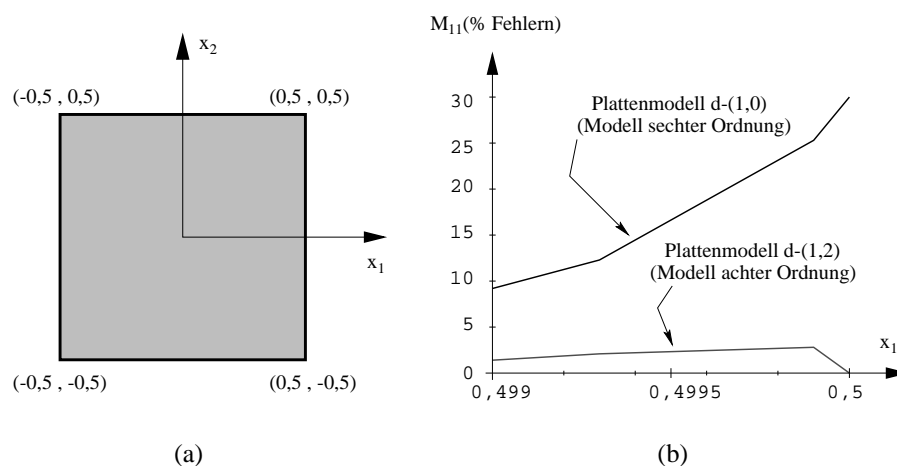


Abbildung 1.2: (a) Eingespannte Platte der Dicke  $h = 1/100$ . (b) Prozentuale Fehler des Biegemomentes  $M_{11}$  für zwei Plattenmodelle in Randnähe,  $x_2 = 0$ .

Dank der Arbeiten von Lurje [58,59], Reissner [81,83,84], Poniatovskii [68], Vlasov und Leontjev [112], Aksentian [3], Iyengar, Chandrashekhara und Sebastian [41], Cheng [14], Barrett und Ellis [7], Preußer [72,73], Chen und Archer [13], Lewiński [51], Prusakov [74] u.a., ist heute bekannt, welche Bedingungen ein Modell erfüllen muß, um die auftretenden physikalischen Effekte adäquat zu erfassen. Diese Bedingungen wurden beispielweise von Gregory [30], Schwab und Wright [92] und Li, Babuška und Chen [54,55] streng mathematisch gefaßt und bewiesen. Es gibt z.Zt. vollständige Lösungen nur für isotrope Materialien, siehe Gregory [30], Schwab und Wright [92] und Li, Babuška und Chen [54,55]. Die Differentialgleichungen der 3D-Elastizitätstheorie für das Biegeproblem bei transversal-isotropem Material wurden teilweise von Zhong und Luo [118] abgeleitet. Kürzlich ist eine Arbeit von Rössle, Bischoff, Wendland und Ramm [88] erschienen, in der das Modell  $d$ -(1,2) achter Ordnung mathematisch analysiert wurde.

Lurje [57] und Vlasov [110]<sup>1</sup> haben 1936 bzw. 1955 eine symbolische Methode entwickelt, um analytische Lösungen einer Schicht (Scheibe + Platte) zu konstruieren

<sup>1</sup>Die Methode von Vlasov heißt Methode der Anfangsfunktionen (MIF - Method of Initial Functions).

(siehe auch Lurje [58], Vlasov [111] und Džanelidze [21], und besonders die Bücher von Lurje [59] und Vlasov und Leontjev [112]). In diesen Arbeiten wurde gezeigt, dass die Elastizitätslösungen dieser Probleme als unendliches Produkt modifizierter HELMHOLTZscher Gleichungen dargestellt werden können (siehe Tabelle 1.1), die transzendente symbolische Gleichungen sind (siehe Vlasov [111]). Es lassen sich mit dieser Methode dicke Verbundschichtplatten analysieren. Für einige Fälle ergibt sich, dass Modelle höherer Ordnung notwendig sind [41–43]. Celep [12] hat die MIF zur Ermittlung der Eigenfrequenzen von dicken Kreisplatten angewandt. Die erfolgreiche Anwendung dieser Methode auf schwierige Plattenaufgaben wird beispielweise in der Arbeit von Galileev, Matrozov und Verizhenko [27] realisiert, wobei eine Platte mit vierzig verschiedenen isotropen, transversal-isotropen und orthotropen Schichten analysiert wurde. Cheng [14] hat die transzendenten Gleichungen von Lurje/Vlasov erneut abgeleitet. Diese Gleichungen ergeben sich direkt aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie.

Tabelle 1.1 zeigt ein Differentialgleichungssystem, dessen Lösungsvektor exakt den dreidimensionalen Spannungs-Verzerrungszustand für den Fall einer homogenen isotropen Platte beschreibt,<sup>2</sup> wobei  $\Delta$  der LAPLACESche Operator,  $h$  die Plattendicke und  $\Psi$ ,  $\Phi$ ,  $\Theta$  drei Potentialfunktionen sind.<sup>3</sup> Dieses Gleichungssystem ist deshalb besonders wichtig, da damit die Eigenschaften, d.h. genauer die Modellierungsfehler, von Plattenmodellen abgeschätzt werden können.

Tabelle 1.1: „Exaktes Modell“ des isotropen Plattenbiegungsproblems.

Name	Differentialgleichung	Koeffizienten
Kirchhoff [48]	$\Delta^2 \Psi = 0$	-
Levy [50] (Schubzustand [14])	$\prod_{n=1}^{\infty} (h^2 \Delta - S_n^2) \Phi = 0$	$S_n := (2n - 1)\pi$
Papkovich-Fadle [24, 66]	$\prod_{n=1}^{\infty} (h^2 \Delta - P_n^2) \Theta = 0$	$P_n := \{\lambda \mid \sin \lambda = \lambda, \operatorname{Re}(\lambda) > 0\}$

Die drei Gleichungen in Tabelle 1.1 haben bestimmte Eigenschaften, die innere und lokale (Randschicht-) Effekte beschreiben. Die Wurzeln der Gleichung  $\sin \lambda = \lambda$ ,  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , weisen außer der trivialen Lösung Null, die mit der Differentialgleichung  $\Delta^2 \Psi \equiv (\Delta^2 - 0) \Psi = 0$  assoziiert ist, nur komplexe (nicht reelle) Werte auf, die symmetrisch in den vier Quadranten verteilt sind. Die Koeffizienten  $P_n$  sind durch die Wurzeln  $\lambda_n$  so definiert, dass  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < \operatorname{Re}(\lambda_j)$  für  $0 < i < j$ , und  $\lambda_{2i} = \overline{\lambda_{2i-1}}$  für  $\operatorname{Im}(\lambda_{2i-1}) > 0$ . Die ersten Koeffizienten der Differentialgleichungen (letzte Spalte der Tabelle 1.1) sind in Tabelle 1.2 angegeben. Die Funktionen  $\Psi$ ,  $\Phi$  und  $\Theta$  bestimmen exakt die Lösung des 3D-Elastizitätsproblems für die Biegung einer Platte. Plattenbiegungsmodelle können demzufolge überprüft werden, indem man die jeweiligen Gleichungen mit den Gleichungen in Tabelle 1.1 und den entsprechenden Koeffizienten in Tabelle 1.2 vergleicht.

Wir präsentieren in Tabelle 1.3 zwei Plattenmodellgruppen, die sich bezüglich der gewählten Ansätze (siehe Noor und Burton [64]) unterscheiden:

<sup>2</sup> $S_n$  und  $P_n$  sind analytische Werte der 3D-Elastizitätstheorie.

<sup>3</sup>Für die Verknüpfung dieser Potentiale mit den Spannungen  $\sigma_{ij}$  siehe z.B. Gregory [30].

Tabelle 1.2: Die ersten Koeffizienten der Differentialgleichungen in Tabelle 1.1.

$S_1 = \pi \approx 3,141593$	$P_1 = 7,497676 + 2,768678i$
$S_2 = 3\pi \approx 9,424778$	$P_2 = 7,497676 - 2,768678i$
$S_3 = 5\pi \approx 15,707963$	$P_3 = 13,899960 + 3,352210i$

***d*-Gruppe:** Es wird von einer *a-priori*-Annahme über den Verlauf des Verschiebungsfeldes in Richtung der Plattendicke ausgegangen;

***s*-Gruppe:** Es wird von einer entsprechenden Annahme bezüglich des Verlaufes des Spannungsfeldes ausgegangen.

Die Klassen in den *d*- und *s*-Gruppen sind mit einem Paar  $(n_r, n_s)$  gekennzeichnet, das ursprünglich mit dem Grad des Polynoms des Verschiebungsfeldes verknüpft ist, siehe Gl. (2.1);  $n_r$  bzw.  $n_s$  stellen die Polynomgrade der *in-plane* Verschiebungen bzw. der transversalen Verschiebung dar.

Die wohlbekannten Plattenmodelle von Mindlin [62] (siehe auch Hencky [34] und Bolle [9]) bzw. Reissner [78–80] stellen die Ursprünge der Modelle der *d*- bzw. *s*-Gruppe dar. Da die *in-plane* Verschiebungen bzw. die transversale Verschiebung dieser Modelle durch lineare ( $n_r = 1$ ) bzw. konstante ( $n_s = 0$ ) Polynome dargestellt ist, werden diese Modelle *d*-(1,0) bzw. *s*-(1,0) genannt.

Im russischsprachigen Raum sind einige beachtenswerte Arbeiten über Plattenmodelle der *s*-Gruppe erschienen [3, 74, 75], die sich meist auf Arbeiten von Poniatovskii [68] und Vekua [108] stützen. Eine Besonderheit dieser Arbeiten ist, dass die Grundvariablen (Verschiebungen und Spannungen) durch LEGENDRESche Polynome entlang der transversalen Richtung approximiert werden. Außer diesen Verfassern waren Mindlin und Medick [63] die ersten, die eine Entwicklung der Verschiebungen durch LEGENDRESche Polynome eingeführt haben (nach einem Hinweis von W. Prager, siehe Mindlin und Medick [63]).

Die Fehler in den Koeffizienten  $S_1, S_2, P_1$  und  $P_2$  der Plattenmodelle aus Tabelle 1.3 sind in Tabelle 1.4 zusammengefaßt.<sup>4</sup> Der Koeffizient  ${}^{d-(1,0)}S_1$  weist keinen Fehler auf, da die MINDLINSche Nachkorrektur verwendet wird. Ein korrekturfrees Modell ergibt  ${}^{d-(1,0)}S_1 = 3,4641$  bzw. einen Fehler von 10,2658% (siehe Schwab [91]). Die verschiedenen Koeffizienten  ${}^{d-(n_r, n_s)}P_n$  (und auch  ${}^{s-(n_r, n_s)}P_n$ ) sind komplexwertig und hängen von der Querkontraktionszahl  $\nu$  (für isotrope Materialien) ab im Gegensatz zu denjenigen der Elastizitätstheorie, den PAPKOVICH-FADLESchen Eigenwerten, die für isotrope Materialien konstant sind, siehe Schwab und Wright [92]. In Abbildung 1.3 sind die Real- und Imaginärteile einiger diesen Koeffizienten für  $0 \leq \nu \leq 0,5$  dargestellt.

<sup>4</sup>  ${}^{d-(n_r, n_s)}S_n$  und  ${}^{d-(n_r, n_s)}P_n$  bzw.  ${}^{s-(n_r, n_s)}S_n$  und  ${}^{s-(n_r, n_s)}P_n$  sind Näherungswerte der Plattenmodelle der *d*- bzw. *s*-Gruppe.

Tabelle 1.3: Einige Plattenbiegungsmodelle für isotrope Materialien.

Gruppe	Klasse	Ordnung des Dgl.-Systems	Dgl.
$d$	(1,0)	4	$\Delta^2 \Psi = 0$
	(1,0)	6	$\Delta^2 \Psi = 0$ $(h^2 \Delta - d^{-(1,0)} S_1^2) \Phi = 0$
	(3,2)	12	$\Delta^2 \Psi = 0$ $\prod_{n=1}^2 (h^2 \Delta - d^{-(3,2)} S_n^2) \Phi = 0$ $\prod_{n=1}^2 (h^2 \Delta - d^{-(3,2)} P_n^2) \Theta = 0$
$s$	(1,0)	6	$\Delta^2 \Psi = 0$ $(h^2 \Delta - s^{-(1,0)} S_1^2) \Phi = 0$
	(3,2)	12	$\Delta^2 \Psi = 0$ $\prod_{n=1}^2 (h^2 \Delta - s^{-(3,2)} S_n^2) \Phi = 0$ $\prod_{n=1}^2 (h^2 \Delta - s^{-(3,2)} P_n^2) \Theta = 0 \quad (\star)$

( $\star$ ) Wird in dieser Arbeit hergeleitet, siehe Gl. (6.19b).

Prusakov [74] gibt den Wert  $s^{-(3,2)} P_1 = 7,331 + 3,076i$  an,<sup>5</sup> der für  $\nu = 0,3$  gilt.<sup>6</sup> Dieser Punkt ist in Abbildung 1.3 zusätzlich gezeigt. Wenn wir die Approximationsordnung erhöhen, werden die oben gezeigten Koeffizienten natürlich besser approximiert. Schwab und Wright [92] geben z.B. die Koeffizienten für Plattenmodelle der  $d$ -Gruppe bis zur Ordnung 26 an. Alle Koeffizienten  $d^{-(n_r, n_s)} P_n$  von Schwab und Wright [92] weisen reelle und komplexe Werte auf. Nur wenn die Zahl dieser Koeffizienten ungerade ist,<sup>7</sup> werden die ersten komplexwertigen Koeffizienten relativ gut approximiert. Man kann erkennen, dass bei  $\nu = 0,3$  die Werte von Prusakov [74] komplexwertig sind ( $s^{-(3,2)} P_{1(2)} = 7,331 \pm 3,076i$ ), während Schwab und Wright [92] reelle Werte ( $d^{-(3,2)} P_1 = 7,973892$  und  $d^{-(3,2)} P_2 = 10,384875$ ) angeben. Erst mit einem Modell 14. Ordnung werden für die ersten PAPKOVICH-FADLESchen Koeffizienten befriedigende Werte erreicht, nämlich  $d^{-(3,4)} P_{1(2)} = 7,503 \pm 4,139i$ . Die prozentualen Fehler (Real- und Imaginärteile) dieser zwei Modelle sind 3,527% bzw. 11,087% für das Modell  $s$ -(3,2) und 1,263% bzw. 49,476% für das Modell  $d$ -(3,4). Das Modell  $s$ -(3,2) zwölfter Ordnung weist noch bessere Koeffizienten als das Modell  $d$ -(3,4) 14. Ordnung auf. Schwab und Wright zeigen, dass ein Modell

<sup>5</sup>In der vorliegenden Arbeit wird der entsprechende Wert  $s^{-(3,2)} P_1 = 7,302 + 3,080i$  abgeleitet.

<sup>6</sup>Ich konnte die originelle Referenz nicht finden: Shlenev MA, Asymptotic method for solving the boundary-value problems of Vekua plate theory. In: Proceedings of the First All-Union School on Numerical Methods for Calculating Shells and Plates (in russisch), Tbilisi University, Tbilisi, 1975, S. 269–289.

<sup>7</sup>Das entspricht den Modellen  $d$ -(3,4),  $d$ -(5,6) und  $d$ -(7,8), die Modelle 14., 20. und 26. Ordnung sind.



Tabelle 1.4: Koeffizienten und entsprechende Fehler der Dgl. in Tabelle 1.3.

$d^{-(1,0)} S_1$	$\pi \approx 3,141593$	0%
$d^{-(3,2)} S_1$	$\sqrt{2} [45 - \sqrt{1605}] \approx 3,142467$	$2,8 \times 10^{-2}\%$
$d^{-(3,2)} S_2$	$\sqrt{2} [45 + \sqrt{1605}] \approx 13,043194$	38,3926%
$d^{-(3,2)} P_1$	$\sqrt{\frac{20}{1-\nu} [3 - \sqrt{6(7\nu - 2)}]}$	$f(\nu)$
$d^{-(3,2)} P_2$	$\sqrt{\frac{20}{1-\nu} [3 + \sqrt{6(7\nu - 2)}]}$	$f(\nu)$
$s^{-(1,0)} S_1$	$\sqrt{10} \approx 3,162278$	0,6584%
$s^{-(3,2)} S_1$	$2\sqrt{[14 - \sqrt{133}]} \approx 3,141616$	$7,4 \times 10^{-4}\%$
$s^{-(3,2)} S_2$	$2\sqrt{[14 + \sqrt{133}]} \approx 10,105951$	7,2275%
$s^{-(3,2)} P_1$	$\sqrt{\frac{36(1-\nu^2)}{126-121\nu^2} [154 + i\sqrt{77\frac{322-297\nu^2}{1-\nu^2}}]}$ (*)	$f(\nu)$
$s^{-(3,2)} P_2$	$\sqrt{\frac{36(1-\nu^2)}{126-121\nu^2} [154 - i\sqrt{77\frac{322-297\nu^2}{1-\nu^2}}]}$ (*)	$f(\nu)$

(\*) Werden in dieser Arbeit hergeleitet, siehe Gl. (6.21).

20. Ordnung benötigt wird, um den ersten PAPKOVICH-FADLESchen Koeffizienten mit einer Genauigkeit von einer Ziffer darstellen zu können (Real- und Imaginärteil). Als Folgerung schließen Schwab und Wright: Um das Randschichtproblem befriedigend lösen zu können, muß man mindestens mit einem Modell 20. Ordnung arbeiten. Diese Folgerung gilt jedoch nur für Plattenmodelle der  $d$ -Gruppe.

Die ersten Randelementmethoden zur Lösung der REISSNERSchen bzw. MINDLINSchen Plattenmodelle wurden 1981 bzw. 1987 von van der Weeën [105–107] bzw. de Barcellos und Silva [19] entwickelt (siehe auch Beskos [8]). Antes [4] hat statische und dynamische Probleme mit dem  $s$ -(1,0) Modell gelöst. Hartmann [33] hat Platten mit dem  $d$ -(1,0) KIRCHHOFFSchen Modell analysiert (statische Analyse). Numerische Instabilitätsprobleme, wie z.B. das „Locking“-Phänomen, die bei der FEM-Lösung von Plattenaufgaben unter Einschluß der Schubdeformationen gewöhnlich auftreten, erscheinen bei BEM-Verfahren nicht [114]. Trotzdem ist die Anzahl der Arbeiten, in denen die BEM für Plattenaufgaben angewandt wird, im Vergleich zu Arbeiten mit der FEM, sehr gering.

Der Stand der Forschung wird folgendermaßen zusammengefaßt:

1. Plattenmodelle höherer Ordnung sind eine relativ neue Entwicklung der Elastizitätstheorie und angewandten Mathematik. Die ersten Modelle der  $s$ -Gruppe der Ordnung größer als  $s$ -(1,0) wurden in der ersten Hälfte der sechziger Jahre von Poniatovskii [67–70] entwickelt und blieben bis heute erstaunlicherweise fast unbekannt.<sup>8</sup>

<sup>8</sup>Poniatovskii erkannte zuerst (anscheinend ohne Kenntnis der Arbeiten von Lurje und Vlasov), dass

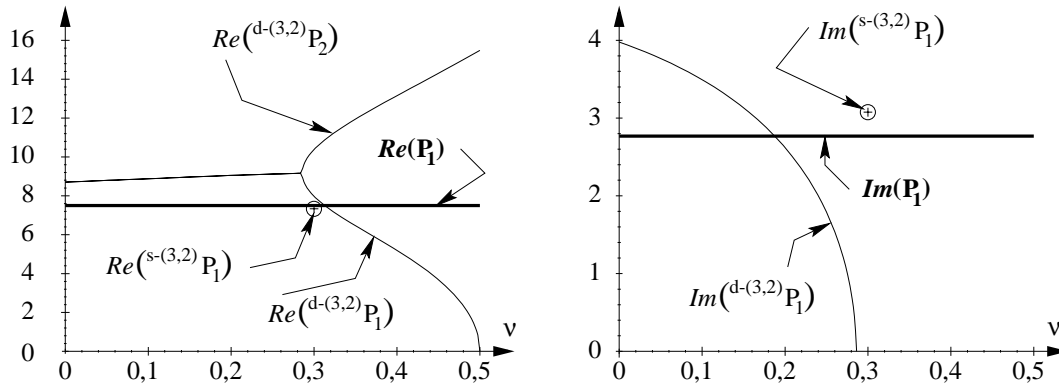


Abbildung 1.3: Real- und Imaginärteile des ersten PAPKOVICH-FADLESchen Eigenwertes,  $0 \leq \nu \leq 0,5$ .

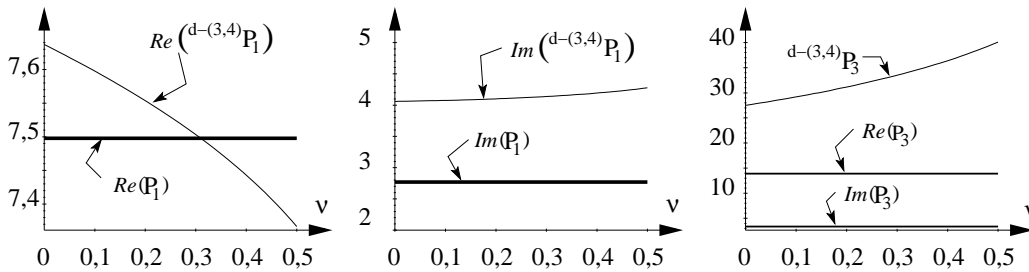


Abbildung 1.4: Die PAPKOVICH-FADLESche Koeffizienten eines Modells vierzehnter Ordnung.

1983 hat Reissner [83] das  $s$ -(3,2) Modell nochmals hergeleitet, obwohl das Modell schon von Poniatovskii entwickelt wurde (siehe Jemielita [45]).

2. Es wurden bis jetzt keine Integralgleichungen für Plattenbiegungsmodelle höherer Ordnung entwickelt. Es sind heute nur die Integralgleichungen und die entsprechenden Fundamentallösungen für die Modelle  $d$ -(1,0) und  $s$ -(1,0) ausgearbeitet. Nur die Modelle vierter und sechster Ordnung wurden bisher in Integralgleichungsdarstellung abgeleitet.
3. Die numerische Lösung dieser Plattenmodelle zur Behandlung konkreter Ingenieuraufgaben wurde meistens mit der FEM durchgeführt, wobei sich fast nur auf Modelle der  $d$ -Gruppe beschränkt wird. Für Modelle der  $s$ -Gruppe ist die Zahl der Anwendungen sehr gering.
4. Am Institut für Technische Mechanik der Universität Karlsruhe wurde in den letzten Jahren intensiv das Plattenmodell  $s$ -(1,0) untersucht. Es wurde eine allgemeine Integralgleichungsdarstellung für transversal-isotropes Materialverhalten hergeleitet und die darin notwendige allgemeine Fundamentallösung analytisch berechnet und numerisch mit der BEM gelöst. Diese Fundamentallösung unterscheidet sich von den anderen entsprechenden Fundamentallösungen, weil es die einzige widerspruchsfreie

---

das durch ein Variationsprinzip abgeleitete Plattenbiegungsmodell mit drei verschiedenen Differentialgleichungstypen darstellbar ist, die in Tabelle 1.1 gezeigt wurden. Das dreidimensionale Spannungsfeld wurde durch LEGENDRESche Polynome dargestellt.

Fundamentallösung ist, da im Grenzfall Plattendicke  $h \rightarrow 0$  und/oder Schubverzerrungen in  $x_3$ -Richtung  $\gamma_{\alpha 3} \rightarrow \infty$  sich sinnvollerweise die KIRCHHOFFSche Fundamentallösung, siehe Westphal Jr., Schnack und de Barcellos [117], ergibt. Die Zerlegung dieser allgemeinen Fundamentallösung ermöglichte eine einheitliche Integralgleichungsdarstellung für die KIRCHHOFFSche, REISSNERSche und MINDLINSche Plattenbiegungsmodelle, siehe Westphal Jr., Andrá und Schnack [115].

### 1.3 Ziele der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung der Analysis und Numerik für zwei hierarchische Klassen von Plattenbiegungsmodellen der  $s$ -Gruppe. Es handelt sich dabei um die Plattenmodelle der  $s$ -(1,0)-Klasse (das REISSNERSche Plattenmodell sechster Ordnung) und  $s$ -(3,2)-Klasse (das REISSNER-PONIATOVSKIISche Plattenmodell zwölfter Ordnung). Obgleich die Formulierung der Modelle  $s$ -(1,0) und  $s$ -(3,2) angestrebt wird, werden die Ausgangsgleichungen so allgemein formuliert, dass die Betrachtung von Modellen beliebiger Ordnung ( $s$ -(1,2) achter Ordnung,  $s$ -(3,2) zehnter Ordnung (unendlich steif in transversaler Richtung),  $s$ -(3,4) 14. Ordnung, usw.) mit wenig Aufwand ermöglicht wird.

Ausgangspunkt der Modelle der  $s$ -Gruppe ist ein Ansatz für das Spannungsfeld (*assumed stress approach*). Über eine Extremwertbildung für das HELLINGER-REISSNERSche Prinzip werden die Differentialgleichungen mit den entsprechenden Randbedingungen hergeleitet. Äquivalente Integralgleichungen werden nach der Methode des gewichteten Restes gewonnen. Alle Gleichungen werden zum ersten Mal in Differential- und Integralgleichungsdarstellung ausführlich in hierarchischer Gestalt formuliert.

Die Eigenschaften dieses allgemeinen Vorgehens werden es ermöglichen, die fest mit Randschichtproblemen verbundenen Plattenaufgaben effektiv zu lösen, da die lokalen Randeffekte direkt von den Fundamentallösungen beschrieben werden. Im Gegensatz dazu ist bei den z.Zt. überwiegend verwendeten FE-Methoden eine aufwendige lokale Netzverfeinerung in Randnähe notwendig, die stark von den Randbedingungen abhängt. Derartige Netzverfeinerungen sind bei den Integralgleichungsverfahren in keinem Fall notwendig.<sup>9</sup>

Das Verfahren zur Berechnung der Fundamentallösungen, die in den Randintegralgleichungen als Referenzlösung verwendet werden, basiert auf der Methode von HÖRMANDER und kann direkt für andere Probleme benutzt werden. Insbesondere zur Berechnung der allgemeinen Fundamentallösung des Problems zwölfter Ordnung kann dieses Verfahren eingesetzt werden. Die zunächst unbestimmten Konstanten dieser Lösung werden durch Anwendung der Distributionstheorie, d.h. ohne Notwendigkeit von FOURIERSchen Transformationen, berechnet.

---

<sup>9</sup>Gemeint sind hier Netzverfeinerungen im Gebiet. Bei anderen Störungsursachen, wie z.B. bei Ecken und Kerben, sind Verfeinerungen des Randgebietes doch notwendig, um die entsprechenden Verzerrungs- und Spannungserhöhungen erfassen zu können.



# Kapitel 2

## Die Grundgleichungen des Plattenbiegungsproblems für transversal-isotrope Materialien

### 2.1 Einleitung

Die Definitionen des Plattenvariablenfeldes, d.h. die Ansätze für Verschiebungen und Spannungen, werden hier präsentiert, wobei beide Felder explizit in Abhängigkeit der Querkoordinate  $x_3$  ausgedrückt werden. Aus einem allgemeinen Ansatz für die Verschiebungen wird ein entsprechender Ansatz für die Spannungen gewonnen. Dieses Spannungsfeld ist die einzige Annahme, die wir für die Ableitung des 2D-Gleichungssystems benötigen, und folglich ist die Qualität des Plattenmodells direkt von dem Spannungsansatz abhängig. Es werden zusätzlich die Plattengleichgewichtsgleichungen für zwei Probleme abgeleitet, ein System für das reale Problem und das andere für die Herleitung der Integralgleichungen und die Berechnung der Fundamentallösung.

Zur Variation der Indizes:

- kleine griechische Buchstaben variieren von 1 bis 2 ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2$ );
- kleine lateinische Buchstaben variieren von 1 bis 3 ( $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$ );
- große lateinische Buchstaben variieren von 1 bis 6 ( $I, J, K, \dots = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ).

### 2.2 Problemstellung und Anfangsdefinitionen

Sei  $V \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes mehrfach zusammenhängendes Gebiet mit der konstanten Plattendicke  $h \equiv 2c > 0$  in der  $x_3$ -Richtung und der Mittelebenenfläche  $\Omega$ ,  $V := \Omega \subset$

$\mathbb{R}^2 \times [-h/2, h/2]$ , wie es Abb. 2.1 zeigt. Das Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ist beschränkt, mehrfach zusammenhängend mit dem LIPSCHITZSTETIGEN Rand  $\Gamma := \partial\Omega$ ;  $\bar{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$ ; [2, 6, 52]

$$\begin{aligned} V &:= \{\mathbf{x} \mid \bar{\mathbf{x}} \in \Omega, -c < x_3 < c\}; \\ S &:= \{\mathbf{x} \mid \bar{\mathbf{x}} \in \Gamma, -c < x_3 < c\}; \\ R_{\pm} &:= \{\mathbf{x} \mid \bar{\mathbf{x}} \in \bar{\Omega}, x_3 = \pm c\}; \end{aligned}$$

$\bar{\mathbf{x}} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ;  $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Die Ränder  $S$  bzw.  $\Gamma$  lassen sich aus den

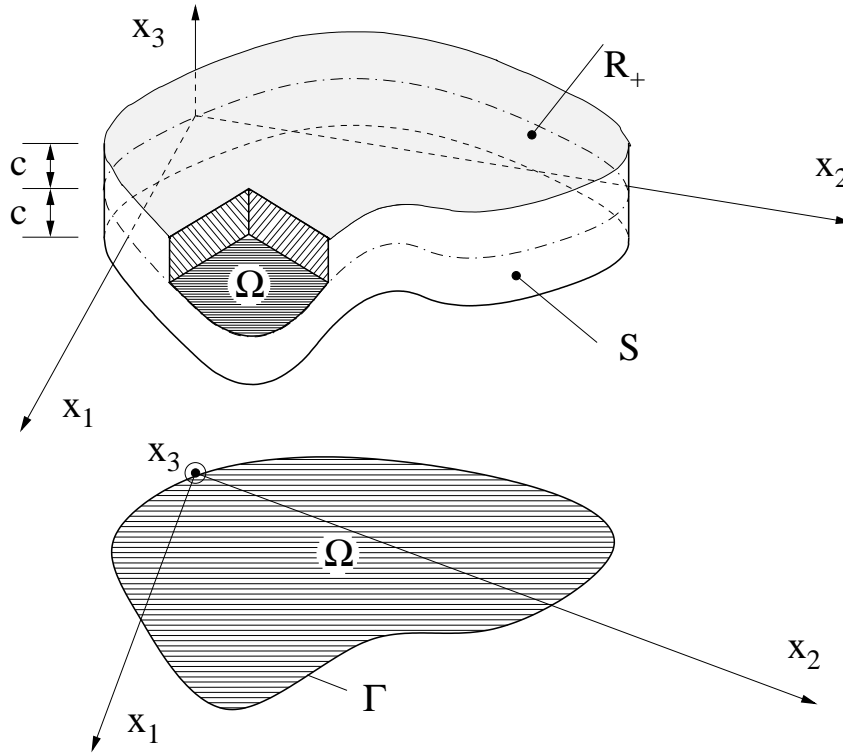


Abbildung 2.1: Platte der Dicke  $h \equiv 2c > 0$ .

Teilrändern  $S_u$  und  $S_t$  bzw.  $\Gamma_u$  und  $\Gamma_t$  (DIRICHLETSche bzw. NEUMANNsche Teile) in der Form  $S = S_u \cup S_t$  bzw.  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$  zusammensetzen. Es wirkt auf  $R_{\pm}$  eine Belastung  $q_3(\bar{\mathbf{x}})$  (Kraft pro Flächeneinheit), so dass

$$\sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x})|_{x_3=\pm c} := 0 \quad \text{und} \quad \sigma_{33}(\mathbf{x})|_{x_3=\pm c} := \pm \frac{1}{2} q_3(\bar{\mathbf{x}}) .$$

Dies ist ein reiner Plattenbiegungszustand, siehe Friedrichs und Dressler [26], Lurje [59]. Die Randbedingungen sind:

$$u_i(\mathbf{x}) = \bar{u}_i(\mathbf{x}) \quad \text{auf} \quad S_u \quad \text{und} \quad t_i(\mathbf{x}) = \bar{t}_i(\mathbf{x}) \quad \text{auf} \quad S_t ,$$

wobei  $u_i(\mathbf{x})$  die Verschiebungen und  $t_i(\mathbf{x})$  die Komponenten des Randspannungsvektors sind.

Der Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist folgender Ansatz für die Verschiebungen. Gegeben sei das Paar  $\{r, s\}$ ,  $r, s \in \mathbb{N}$ . Als Produktansatz für das Biegeproblem

wird

$$u_\alpha(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^M a_{2k-1} \phi_\alpha^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) c P_{2k-1}(\xi) \quad , \quad (2.1a)$$

$$u_3(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^M a_{2(k-1)} \phi_3^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \frac{d}{d\xi} P_{2k-1}(\xi) \quad (2.1b)$$

definiert, wobei  $\phi_i^{(k)}(\bar{\mathbf{x}})$  die Plattenverschiebungen,  $\xi := x_3/c$ ,  $M := \max\{r, s\}$ ,  $P_n(\xi)$  die LEGENDRESchen Polynome und  $a_n \in \mathbb{R}$ ,  $n = 0, \dots, 2M - 1$  sind. Weiterhin sind

$$a_{2k-1} := 0 \quad \text{für} \quad k > r \quad , \quad (2.2a)$$

$$a_{2(k-1)} := 0 \quad \text{für} \quad k > s \quad . \quad (2.2b)$$

Zur Wahl der Koeffizienten  $a_n$  siehe e.g. (2.37).

Die über den Querschnitt integrierten Plattenspannungen (auch Spannungsergebende genannt) ergeben sich gemäß dem Ansatz (2.1) durch

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c a_{(2k-1)} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) c P_{(2k-1)}(\xi) dx_3 \quad , \quad k = 1, \dots, r \quad , \quad (2.3a)$$

$$\sigma_{\alpha 3}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c a_{2(k-1)} \sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x}) \frac{d}{d\xi} P_{(2k-1)}(\xi) dx_3 \quad , \quad k = 1, \dots, s \quad , \quad (2.3b)$$

$$\sigma_{33}^{(k-r)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c a_{(2k-1)} \sigma_{33}(\mathbf{x}) c P_{(2k-1)}(\xi) dx_3 \quad , \quad k - r = 1, \dots, s - 1 \quad . \quad (2.3c)$$

Es erweist sich als vorteilhaft, die transversalen Plattenspannungen wie folgt zu schreiben:

$$\sigma_\alpha^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \equiv \sigma_{\alpha 3}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \quad , \quad (2.4a)$$

$$\sigma^{(k-r+1)}(\bar{\mathbf{x}}) \equiv \sigma_{33}^{(k-r)}(\bar{\mathbf{x}}) \quad . \quad (2.4b)$$

Das dreidimensionale Problem für die Bestimmung von  $u_i(\mathbf{x})$  und  $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$  wurde auf eine zweidimensionale entsprechende Darstellung für die Bestimmung der zweidimensionalen Plattenvariablen  $\phi_i^{(k)}(\bar{\mathbf{x}})$  und  $\sigma_{ij}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}})$  (genau gesagt,  $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}})$ ,  $\sigma_\alpha^{(k)}(\bar{\mathbf{x}})$  und  $\sigma^{(k-r+1)}(\bar{\mathbf{x}})$ ) vereinfacht. Um die verschiedenen Variationsgrenzen der Indizes  $k$  in den Plattenvariablen zu verdeutlichen, fassen wir die betreffenden Variablen in den folgenden Vektoren und Matrizen zusammen.

$$\left\{ \boldsymbol{\phi}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \right\}_3 := \begin{cases} \left\{ \phi_1^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}), \phi_2^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}), \phi_3^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \right\}^T, & 1 \leq k \leq \min\{r, s\} \\ \left\{ \phi_1^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}), \phi_2^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}), 0 \right\}^T, & s < k \leq r, \\ \left\{ 0, 0, \phi_3^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \right\}^T, & r < k \leq s \end{cases} \quad (2.5a)$$

$$\left[ \boldsymbol{\tau}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \right]_{3 \times 3} := \begin{cases} \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_{12}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_1^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \\ & \sigma_{22}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_2^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \\ & & \sigma^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}_{Sym}, & 1 \leq k \leq \min\{r, s\} \\ \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_{12}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) & 0 \\ & \sigma_{22}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}_{Sym}, & s < k \leq r, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_1^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \\ & 0 & \sigma_2^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \\ & & \sigma^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}_{Sym}, & r < k \leq s \end{cases} \quad (2.5b)$$

$$\left\{ \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}) \right\}_{3M} := \left\{ \left\{ \boldsymbol{\phi}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \right\}_3^T, \dots, \left\{ \boldsymbol{\phi}^{(M)}(\bar{\mathbf{x}}) \right\}_3^T \right\}^T, \quad (2.5c)$$

$$\left[ \boldsymbol{\tau}(\bar{\mathbf{x}}) \right]_{3 \times 3M} := \left[ \left[ \boldsymbol{\tau}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \right]_{3 \times 3}, \dots, \left[ \boldsymbol{\tau}^{(M)}(\bar{\mathbf{x}}) \right]_{3 \times 3} \right]. \quad (2.5d)$$

Wir haben 1 zum Index der Variablen in der linken Gl. (2.4b) addiert und dementsprechend

$$\sigma^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) := q_3(\bar{\mathbf{x}}) \quad (2.6)$$

definiert, um diese Variable (die Belastung) in  $\tau_{33}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}})$ , Gl. (2.5b), einzufügen.

Im nächsten Kapitel werden wir die beschreibenden Differential- und Integralgleichungssysteme für die Bestimmung der Plattenvariablen  $\phi_i^{(k)}(\bar{\mathbf{x}})$  und  $\sigma_{ij}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}})$  ableiten.

## 2.3 Stoffgesetz: Transversal-isotrope Materialien

Der lineare Zusammenhang zwischen Spannungen  $\sigma_J(\mathbf{x})$  und Verzerrungen  $\varepsilon_I(\mathbf{x})$  ist nach der VOIGTschen Schreibweise  $\varepsilon_I(\mathbf{x}) = s_{IJ}\sigma_J(\mathbf{x})$ ,  $I, J = 1, \dots, 6$  (siehe Jones [46]). Ein transversal-isotropes Material hat die Materialkonstanten  $E \equiv E_1$ ,  $\nu \equiv \nu_{12}$  (der Elastizitätsmodul und die POISSONSche Zahl der isotropen Fläche),  $E_3$ ,  $G_3$ ,  $\nu_{13}$  und  $\nu_{31}$  (der



transversale Elastizitätsmodul, der transversale Schubmodul und die zwei transversalen POISSONSchen Zahlen) mit der Beziehung  $E_1\nu_{31} = E_3\nu_{13}$ . Der (isotrope) Schubmodul ist durch  $G = E/(2(1 + \nu))$  gegeben. Das Material läßt sich also durch fünf Materialkonstanten beschreiben. Mit den drei Stoffkonstanten

$$k_E := \sqrt{\frac{E_3}{E}} \quad , \quad k_G := \frac{G_3}{G} \quad , \quad k_\nu := \frac{\nu_3}{\nu} \quad , \quad (2.7)$$

wobei  $\nu_3 := \sqrt{\nu_{13}\nu_{31}}$ , bekommen wir für  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{E} \left[ (1 + \nu)\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - \nu \left( \sigma_{\gamma\gamma}(\mathbf{x}) + \frac{k_\nu}{k_E}\sigma_{33}(\mathbf{x}) \right) \delta_{\alpha\beta} \right] \quad , \quad (2.8a)$$

$$\varepsilon_{\alpha 3}(\mathbf{x}) = \frac{1 + \nu}{k_G E} \sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x}) \quad , \quad (2.8b)$$

$$\varepsilon_{33}(\mathbf{x}) = \frac{1}{k_E^2 E} \left[ \sigma_{33}(\mathbf{x}) - \nu k_\nu k_E \sigma_{\gamma\gamma}(\mathbf{x}) \right] \quad (2.8c)$$

und für  $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ :

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = G \left[ \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\beta\alpha}(\mathbf{x}) + \frac{2\nu}{\beta} \left( (1 + k_\nu^2 \nu) \varepsilon_{\gamma\gamma}(\mathbf{x}) + (1 + \nu) k_\nu k_E \varepsilon_{33}(\mathbf{x}) \right) \delta_{\alpha\beta} \right] \quad , \quad (2.9a)$$

$$\sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x}) = \frac{k_G E}{1 + \nu} \varepsilon_{\alpha 3}(\mathbf{x}) \quad , \quad (2.9b)$$

$$\sigma_{33}(\mathbf{x}) = \frac{k_E E}{\beta} \left[ k_\nu \nu \varepsilon_{\gamma\gamma}(\mathbf{x}) + (1 - \nu) k_E \varepsilon_{33}(\mathbf{x}) \right] \quad (2.9c)$$

mit

$$\beta \equiv \beta(\nu, \nu_3) := 1 - \nu - 2\nu_3^2 \quad . \quad (2.9d)$$

Die Gleichungen für einen isotropen Stoff sind einfach zu gewinnen, indem man die drei Stoffkonstanten in Gl. (2.7) gleich Eins setzt.

## 2.4 Das Spannungsfeld

Um die Plattengleichungen nach Reissner abzuleiten, ist es zunächst erforderlich, den Verlauf der Spannungen in der Plattendickenrichtung explizit als eine Funktion der transversalen Koordinate  $x_3$  auszudrücken (siehe Reissner [84]). Anstatt eines direkten Ansatzes für die Spannungen zu benutzen, wie ihn Reissner [83,84] und Poniatovskii [67,68] angenommen haben, werden wir nun den Verschiebungsansatz (2.1) verwenden, um die gewünschten Beziehungen zu gewinnen. Die Beziehungen zwischen Plattenspannungen und Plattenverschiebungen werden später hilfreich sein, um die nach dem HELLINGER-REISSNERSchen Variationsprinzip abzuleitenden „neuen“ Plattenverschiebungen physikalisch interpretieren zu können.

Zunächst sind die folgenden Gleichungen zu erfüllen:

- Kinematikbeziehungen ( $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$  ist der linearisierte Verzerrungstensor):

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(\mathbf{x}) + u_{j,i}(\mathbf{x})] \quad ; \quad (2.10)$$

- Gleichgewichtsbedingungen ( $b_i(\mathbf{x})$  sind wirkende Volumenkräfte) (z.B. Malvern [60]):

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}) + b_i(\mathbf{x}) = 0 \quad ; \quad (2.11)$$

- Belastungszustand auf  $R_{\pm}$ :

$$\sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x}) \Big|_{x_3=\pm c} := 0 \quad , \quad \sigma_{33}(\mathbf{x}) \Big|_{x_3=\pm c} := \pm \frac{1}{2} \sigma^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \quad . \quad (2.12)$$

Das Spannungsfeld wird nun für das Modell zwölfter Ordnung abgeleitet. Das allgemeine Spannungsfeld für Modelle beliebiger Ordnungen ist im Anhang A präsentiert. Wir setzen  $r = s := 2$  im Ansatz (2.1) und bekommen

$$u_{\alpha}(\mathbf{x}) = a_1 \phi_{\alpha}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) x_3 + a_3 \phi_{\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \frac{1}{2} \left( 5 \frac{x_3^2}{c^2} - 3 \right) x_3 \quad , \quad (2.13a)$$

$$u_3(\mathbf{x}) = a_0 \phi_3^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + a_2 \phi_3^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \frac{1}{2} \left( 15 \frac{x_3^2}{c^2} - 3 \right) \quad , \quad (2.13b)$$

mit den Plattenspannungen aus (2.3) und (2.4)

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c a_1 \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) x_3 \, dx_3 \quad , \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c a_3 \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \frac{1}{2} \left( 5 \frac{x_3^2}{c^2} - 3 \right) x_3 \, dx_3 \quad , \quad (2.14a)$$

$$\sigma_{\alpha}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c a_0 \sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x}) \, dx_3 \quad , \quad \sigma_{\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c a_2 \sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x}) \frac{1}{2} \left( 15 \frac{x_3^2}{c^2} - 3 \right) \, dx_3 \quad , \quad (2.14b)$$

$$\sigma^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c a_5 \sigma_{33}(\mathbf{x}) \frac{1}{8} \left( 63 \frac{x_3^4}{c^4} - 70 \frac{x_3^2}{c^2} + 15 \right) x_3 \, dx_3 \quad , \quad (2.14c)$$

wobei die notwendigen LEGENDRESchen Polynome

$$P_1(\xi) = \xi \quad , \quad P_3(\xi) = \frac{1}{2} (5\xi^2 - 3) \xi \quad , \quad P_5(\xi) = \frac{1}{8} (63\xi^4 - 70\xi^2 + 15) \xi$$

verwendet werden.

### 2.4.1 Komponenten $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$

Einsetzen von (2.13) und (2.10) in (2.9a) ergibt

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \left[ a_1 A_{\alpha\beta}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + 15 a_2 B_{\alpha\beta}^{(2)} \right] x_3 + a_3 A_{\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \frac{1}{2} \left( 5 \frac{x_3^2}{c^2} - 3 \right) x_3 \quad , \quad (2.15)$$

wobei

$$A_{\alpha\beta}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) = G \left[ \phi_{\alpha,\beta}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) + \phi_{\beta,\alpha}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{2\nu(1+k_\nu^2\nu)}{\beta} \phi_{\gamma,\gamma}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \delta_{\alpha\beta} \right] , \quad k = 1, 2,$$

und

$$B_{\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) = G \frac{2\nu(1+\nu)k_\nu k_E}{c^2\beta} \phi_3^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \delta_{\alpha\beta} .$$

Die entsprechenden Plattenspannungen ergeben sich aus (2.14a):

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{2c^3}{3} a_1 \left[ a_1 A_{\alpha\beta}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + 15a_2 B_{\alpha\beta}^{(2)} \right] , \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{2c^3}{7} a_3^2 A_{\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) . \quad (2.16)$$

Aus (2.15) und (2.16) resultieren folgende Beziehungen zwischen Spannungen und Plattenspannungen:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \frac{3}{2c^2} \left[ \frac{1}{a_1} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) - \frac{7}{2a_3} \sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \left( 1 - \frac{5x_3^2}{3c^2} \right) \right] \frac{x_3}{c} . \quad (2.17)$$

Die anderen Plattenspannungskomponenten ergeben sich aus den Gleichgewichtsgleichungen (2.11)

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}(\mathbf{x}) + \sigma_{\alpha 3,3}(\mathbf{x}) + b_\alpha(\mathbf{x}) = 0 , \quad (2.18a)$$

$$\sigma_{3\alpha,\alpha}(\mathbf{x}) + \sigma_{33,3}(\mathbf{x}) + b_3(\mathbf{x}) = 0 . \quad (2.18b)$$

## 2.4.2 Komponenten $\sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x})$

Für den Verlauf der Volumenkräfte  $b_\alpha(\mathbf{x})$  über der Dickenrichtung wird eine ähnliche Gleichung wie die oben abgeleitete Beziehung (2.17) angenommen (siehe Krenk [49])

$$b_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{3}{2c^2} \left[ \frac{1}{a_1} m_\alpha^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) - \frac{7}{2a_3} m_\alpha^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \left( 1 - \frac{5x_3^2}{3c^2} \right) \right] \frac{x_3}{c} , \quad (2.19)$$

wobei die resultierenden Plattenvolumenkräfte  $m_\alpha^{(k)}(\bar{\mathbf{x}})$  ( $k = 1, 2$ ) sich analog zu den Gl. (2.14a) ergeben

$$m_\alpha^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c a_1 b_\alpha(\mathbf{x}) x_3 \, dx_3 , \quad m_\alpha^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c a_3 b_\alpha(\mathbf{x}) \frac{1}{2} \left( 5 \frac{x_3^2}{c^2} - 3 \right) x_3 \, dx_3 . \quad (2.20)$$

Nach Einsetzen von (2.17) und (2.19) in (2.18a) ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x}) = \frac{-3}{4c} \left\{ \frac{1}{a_1} \left[ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_\alpha^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] \frac{x_3^2}{c^2} + \right. \\ \left. - \frac{7}{2a_3} \left[ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_\alpha^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] \left( \frac{x_3^2}{c^2} - \frac{5x_3^4}{6c^4} \right) \right\} + f_\alpha(\bar{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

und nach Berücksichtigung der Randbedingungen (2.12)<sub>a</sub>

$$f_\alpha(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{3}{4c} \left\{ \frac{1}{a_1} \left[ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_\alpha^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] - \frac{7}{12a_3} \left[ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_\alpha^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] \right\}$$

und dementsprechend

$$\sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8c} \left\{ \frac{6}{a_1} \left[ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_\alpha^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] \left( 1 - \frac{x_3^2}{c^2} \right) + \right. \\ \left. - \frac{7}{2a_2} \left[ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_\alpha^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] \left( 1 - 6\frac{x_3^2}{c^2} + 5\frac{x_3^4}{c^4} \right) \right\} . \quad (2.21)$$

Die entsprechenden Plattenspannungen ergeben sich aus (2.14b) zu

$$\sigma_\alpha^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{a_0}{a_1} \left[ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_\alpha^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] , \quad \sigma_\alpha^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{a_2}{a_3} \left[ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_\alpha^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] . \quad (2.22)$$

In diesem Fall ergeben sich die Beziehungen zwischen Spannungen und Plattenspannungen aus (2.21) und (2.22)

$$\sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8c} \left[ \frac{6}{a_0} \sigma_\alpha^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \left( 1 - \frac{x_3^2}{c^2} \right) - \frac{7}{2a_2} \sigma_\alpha^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \left( 1 - 6\frac{x_3^2}{c^2} + 5\frac{x_3^4}{c^4} \right) \right] . \quad (2.23)$$

### 2.4.3 Komponente $\sigma_{33}(\mathbf{x})$

Der Verlauf der Volumenkraft  $b_3(\mathbf{x})$  entlang der Plattendicke wird in diesem Fall angenommen

$$b_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{8c} \left[ \frac{6}{a_0} m_3^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \left( 1 - \frac{x_3^2}{c^2} \right) - \frac{7}{2a_2} m_3^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \left( 1 - 6\frac{x_3^2}{c^2} + 5\frac{x_3^4}{c^4} \right) \right] \quad (2.24)$$

mit den resultierenden Plattenvolumenkräften  $m_3^{(k)}(\bar{\mathbf{x}})$  ( $k = 1, 2$ ) analog zu den Gl. (2.14b)

$$m_3^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c a_0 b_3(\mathbf{x}) dx_3 , \quad m_3^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c a_2 b_3(\mathbf{x}) \frac{1}{2} \left( 15\frac{x_3^2}{c^2} - 3 \right) dx_3 . \quad (2.25)$$

Nach Einsetzen von (2.23) und (2.24) in (2.18b) wird

$$\sigma_{33}(\mathbf{x}) = \frac{-1}{8} \left\{ \frac{6}{a_0} \left[ \sigma_{\alpha,\alpha}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_3^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] \left( \frac{x_3}{c} - \frac{x_3^3}{3c^3} \right) + \right. \\ \left. - \frac{7}{2a_2} \left[ \sigma_{\alpha,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_3^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] \left( \frac{x_3}{c} - 2\frac{x_3^3}{c^3} + \frac{x_3^5}{c^5} \right) \right\} + f_3(\bar{\mathbf{x}})$$

erhalten und mit Berücksichtigung der Randbedingung (2.12)<sub>b</sub>:

$$f_3(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \left[ \sigma^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{a_0} \left( \sigma_{\alpha,\alpha}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_3^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \right) \right] .$$

Für Biegeprobleme gilt zusätzlich die Bedingung

$$\sigma_{33}(\mathbf{x})|_{x_3=0} := 0 \implies f_3(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad ,$$

woraus folgende Plattengleichgewichtsgleichung resultiert

$$\sigma^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{-1}{a_0} \left[ \sigma_{\alpha,\alpha}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_3^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] \quad . \quad (2.26)$$

Die Plattenspannung  $\sigma^{(2)}(\bar{\mathbf{x}})$  ergibt sich aus (2.14c)

$$\sigma^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{c^2 a_5}{99 a_2} \left[ \sigma_{\alpha,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_3^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] \quad . \quad (2.27)$$

Damit ergibt sich die letzte Komponente des Spannungstensors

$$\sigma_{33}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8} \left\{ 2\sigma^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \left( 3\frac{x_3}{c} - \frac{x_3^3}{c^3} \right) + \frac{693}{2c^2 a_5} \sigma^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \left( \frac{x_3}{c} - 2\frac{x_3^3}{c^3} + \frac{x_3^5}{c^5} \right) \right\} \quad . \quad (2.28)$$

Im Anhang A wird das Spannungsfeld für beliebige Werte  $r$  und  $s$  im Ansatz (2.1) abgeleitet und nicht wie hier für den speziellen Fall  $r = s := 2$ . Mit den Sätzen A.0.1 bis A.0.3 wird gezeigt, dass die von Reissner [83] abgeleiteten Gleichungen des Modells zwölfter Ordnung ein Spezialfall der von Poniatovskii [67, 68] abgeleiteten Gleichungen sind. Deshalb nennen wir das entsprechende Modell zwölfter Ordnung das REISSNER-PONIATOVSKIISCHE Plattenmodell, siehe Jemielita [45].

Poniatovskii hat einen *a priori* Ansatz für die Spannungen mittels LEGENDRESCHER Polynome benutzt, während Reissner einige Überlegungen herangezogen hat, um ein *vernünftiges* (siehe Ramm [76]) Spannungsfeld vorzuschlagen (ohne eine einzige Referenz zu LEGENDRESCHEN Polynomen). Weder Poniatovskii noch Reissner haben gezeigt, wie das entsprechende Verschiebungsfeld aussieht.

## 2.5 Definition der Platteneinheitseinzelbelastungen

Um die Fundamentallösung für das Plattenproblem abzuleiten, ist ein System von Platteneinheitseinzelbelastungen (Momente und Kräfte) notwendig, die in der Plattenebene  $x_3 = 0$  wirken. Die Variablen für dieses Problem werden mit einem zusätzlichen oberen Index  $\star$  gekennzeichnet. Die eigentlichen 3D-Einheitseinzelkräfte  $b_i^\star(\mathbf{x})$  werden durch (2.19) und (2.24) gegeben

$$b_\alpha^\star(\mathbf{x}) = \frac{3}{2c^2} \left[ \frac{1}{a_1} m_\alpha^{\star(1)}(\bar{\mathbf{x}}) - \frac{7}{2a_3} m_\alpha^{\star(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{x_3^2}{c^2} \right) \right] \frac{x_3}{c} \quad , \quad (2.29a)$$

$$b_3^\star(\mathbf{x}) = \frac{1}{8c} \left[ \frac{6}{a_0} m_3^{\star(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \left( 1 - \frac{x_3^2}{c^2} \right) - \frac{7}{2a_2} m_3^{\star(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \left( 1 - 6\frac{x_3^2}{c^2} + 5\frac{x_3^4}{c^4} \right) \right] \quad . \quad (2.29b)$$

Die Platteneinheitseinzelbelastungen  $m_i^{*(\alpha)}(\bar{\mathbf{x}})$  entnehmen wir aus den Gleichungen (2.20) und (2.25)

$$m_\alpha^{*(1)}(\bar{\mathbf{x}}) := a_1 \int_{-c}^c b_\alpha^*(\mathbf{x}) x_3 \, dx_3 \quad , \quad m_\alpha^{*(2)}(\bar{\mathbf{x}}) := a_3 \int_{-c}^c b_\alpha^*(\mathbf{x}) \frac{1}{2} \left( 5 \frac{x_3^2}{c^2} - 3 \right) x_3 \, dx_3 \quad , \quad (2.30a)$$

$$m_3^{*(1)}(\bar{\mathbf{x}}) := a_0 \int_{-c}^c b_3^*(\mathbf{x}) \, dx_3 \quad , \quad m_3^{*(2)}(\bar{\mathbf{x}}) := a_2 \int_{-c}^c b_3^*(\mathbf{x}) \frac{1}{2} \left( 15 \frac{x_3^2}{c^2} - 3 \right) \, dx_3 \quad . \quad (2.30b)$$

Die Darstellung der Einheitseinzelbelastungen für beliebige Punkte  $Q \equiv \bar{\mathbf{x}}$  sind dann durch

$$m_i^{*(\alpha)}(Q) := \delta(P, Q) m_i^{*(\alpha)}(P) \quad (2.31)$$

definiert, wobei  $P, Q \in \Omega$ . Weiterhin sind  $\delta(P, Q)$  eine DIRACsche Distribution auf den Punkt  $P$  und  $m_i^{*(\alpha)}(P)$  die eigentlichen Einheitseinzelbelastungen, die im Punkt  $P$  wirken. Dabei sind  $m_\alpha^{*(1)}(P)$  Einheitseinzelbiegemomente und  $m_3^{*(1)}(P)$  ist eine Einheitseinzelquerkraft. Diese Belastungen sind mit dem Modell sechster Ordnung assoziiert und haben eine lineare bzw. quadratische Verteilung entlang der Plattendicke. Schließlich sind  $m_\alpha^{*(2)}(P)$  und  $m_3^{*(2)}(P)$  die entsprechenden Einheitseinzelbelastungen höherer Ordnung, die kubisch bzw. biquadratisch verteilt sind.

## 2.6 Zusammenfassung der Grundgleichungen

Die Grundgleichungen des Modells zwölfter Ordnung sind hier zusammengefaßt und in einigen Fällen leicht modifiziert.

- Verschiebungsfeld (aus den Gleichungen (2.13)):

$$u_\alpha(\mathbf{x}) = a_1 \phi_\alpha^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) x_3 - \frac{2a_3}{7} \phi_\alpha^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \frac{21}{4} \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{x_3^2}{c^2} \right) x_3 \quad , \quad (2.32a)$$

$$u_3(\mathbf{x}) = a_0 \phi_3^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) - \frac{2a_2}{7} \phi_3^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \frac{21}{4} \left( 1 - 5 \frac{x_3^2}{c^2} \right) \quad ; \quad (2.32b)$$

- Spannungsfeld (aus den Gleichungen (2.17), (2.23) und (2.28)):

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \frac{3}{2c^2} \left[ \frac{1}{a_1} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) - \frac{7}{2a_3} \sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{x_3^2}{c^2} \right) \right] \frac{x_3}{c} \quad , \quad (2.33a)$$

$$\sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8c} \left[ \frac{6}{a_0} \sigma_\alpha^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \left( 1 - \frac{x_3^2}{c^2} \right) - \frac{7}{2a_2} \sigma_\alpha^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \left( 1 - 6 \frac{x_3^2}{c^2} + 5 \frac{x_3^4}{c^4} \right) \right] \quad , \quad (2.33b)$$

$$\sigma_{33}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8} \left[ 2\sigma^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \left( 3 - \frac{x_3^2}{c^2} \right) + \frac{693}{2c^2 a_5} \sigma^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \left( 1 - 2 \frac{x_3^2}{c^2} + \frac{x_3^4}{c^4} \right) \right] \frac{x_3}{c} \quad ; \quad (2.33c)$$

- Definition der Plattenspannungen (aus den Gleichungen (2.14)):

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c a_1 \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) x_3 \, dx_3 \quad , \quad (2.34a)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c \frac{-2a_3}{7} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \frac{21}{4} \left(1 - \frac{5}{3} \frac{x_3^2}{c^2}\right) x_3 \, dx_3 \quad , \quad (2.34b)$$

$$\sigma_{\alpha}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c a_0 \sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x}) \, dx_3 \quad , \quad (2.34c)$$

$$\sigma_{\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c \frac{-2a_2}{7} \sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x}) \frac{21}{4} \left(1 - 5 \frac{x_3^2}{c^2}\right) \, dx_3 \quad , \quad (2.34d)$$

$$\sigma^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c \frac{2c^2 a_5}{693} \sigma_{33}(\mathbf{x}) \frac{693}{16c^2} \left(15 - 70 \frac{x_3^2}{c^2} + 63 \frac{x_3^4}{c^4}\right) x_3 \, dx_3 \quad ; \quad (2.34e)$$

- Plattengleichgewichtsgleichungen (aus den Gleichungen (2.22), (2.26) und (2.27)):<sup>1</sup>

$$\frac{a_0}{a_1} \left[ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_{\alpha}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] - \sigma_{\alpha}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad , \quad (2.35a)$$

$$\frac{a_2}{a_3} \left[ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_{\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] - \sigma_{\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad , \quad (2.35b)$$

$$\frac{1}{a_0} \sigma_{\alpha,\alpha}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + \sigma^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad , \quad (2.35c)$$

$$\frac{-c^2 a_5}{99a_2} \sigma_{\alpha,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) + \sigma^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad ; \quad (2.35d)$$

- Plattengleichgewichtsgleichungen für die Fundamentallösung (aus den Gleichungen (2.22), (2.26) und (2.27)):<sup>2</sup>

$$\frac{a_0}{a_1} \left[ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{*(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_{\alpha}^{*(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] - \sigma_{\alpha}^{*(1)}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad , \quad (2.36a)$$

$$\frac{a_2}{a_3} \left[ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{*(2)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_{\alpha}^{*(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] - \sigma_{\alpha}^{*(2)}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad , \quad (2.36b)$$

$$\sigma_{\alpha,\alpha}^{*(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_3^{*(1)}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad , \quad (2.36c)$$

$$\frac{-c^2 a_5}{99a_2} \left[ \sigma_{\alpha,\alpha}^{*(2)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_3^{*(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] + \sigma^{*(2)}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad . \quad (2.36d)$$

Durch feste Werte der Konstanten  $a_i$  lassen sich obige Gleichungen vereinfachen. Wir wählen speziell, um die obigen Gleichungen zu vereinfachen,

$$a_0 := 1 \quad , \quad a_1 := 1 \quad , \quad a_2 := -\frac{7}{2} \quad , \quad a_3 := -\frac{7}{2} \quad , \quad a_5 := \frac{7}{2} \frac{99}{c^2} \quad . \quad (2.37)$$

<sup>1</sup>In diesem Fall sind die Belastungen  $m_3^{(\alpha)}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ , da nur die Querbelastung  $\sigma^{(1)}(\bar{\mathbf{x}})$  wirkt, siehe die Grundannahmen am Anfang des Kapitels. Die Momente  $m_{\alpha}^{(\beta)}(\bar{\mathbf{x}})$  werden wir später brauchen, um die Plattenverzerrungen interpretieren zu können.

<sup>2</sup>In diesem Fall ist die Belastung  $\sigma^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ , da nur die Einheitseinzelbelastungen  $m_i^{*(\alpha)}(\bar{\mathbf{x}})$  wirken (siehe Gl. (2.31)).

In diesen Fall erhalten wir die schon bekannten Verschiebungen, Spannungen und Plattengleichgewichtsgleichungen, siehe Lewiński [51]. Lewiński hat das richtige Verschiebungsfeld des Modells zwölfter Ordnung vorgeschlagen, das zusätzlich mit dem REISSNERSchen Spannungsfeld die Differentialgleichung des Problems liefert, indem beide Felder im HELLINGER-REISSNERSchen Prinzip substituiert wurden. Aber es wurden keine direkten Verbindungen zwischen Verschiebungen und Spannungen angegeben. Dies ist neu in dieser Arbeit.

Es ist sinnvoll, die Grundgleichungen mit den speziellen Konstanten (2.37) zu wiederholen, da diese Gleichungen oft benutzt werden.

- Verschiebungsfeld (Lewiński [51]):

$$u_\alpha(\mathbf{x}) = \phi_\alpha^{(1)}(\bar{\mathbf{x}})x_3 + \phi_\alpha^{(2)}(\bar{\mathbf{x}})\frac{21}{4}\left(1 - \frac{5}{3}\frac{x_3^2}{c^2}\right)x_3 \quad , \quad (2.38a)$$

$$u_3(\mathbf{x}) = \phi_3^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + \phi_3^{(2)}(\bar{\mathbf{x}})\frac{21}{4}\left(1 - 5\frac{x_3^2}{c^2}\right) \quad ; \quad (2.38b)$$

- Spannungsfeld (Reissner [83]):

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \frac{3}{2c^2}\left[\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + \sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}})\left(1 - \frac{5}{3}\frac{x_3^2}{c^2}\right)\right]\frac{x_3}{c} \quad , \quad (2.39a)$$

$$\sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8c}\left[6\sigma_\alpha^{(1)}(\bar{\mathbf{x}})\left(1 - \frac{x_3^2}{c^2}\right) + \sigma_\alpha^{(2)}(\bar{\mathbf{x}})\left(1 - 6\frac{x_3^2}{c^2} + 5\frac{x_3^4}{c^4}\right)\right] \quad , \quad (2.39b)$$

$$\sigma_{33}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8}\left[2\sigma^{(1)}(\bar{\mathbf{x}})\left(3 - \frac{x_3^2}{c^2}\right) + \sigma^{(2)}(\bar{\mathbf{x}})\left(1 - 2\frac{x_3^2}{c^2} + \frac{x_3^4}{c^4}\right)\right]\frac{x_3}{c} \quad ; \quad (2.39c)$$

- Definition der Plattenspannungen:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x})x_3 \, dx_3 \quad , \quad (2.40a)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\frac{21}{4}\left(1 - \frac{5}{3}\frac{x_3^2}{c^2}\right)x_3 \, dx_3 \quad , \quad (2.40b)$$

$$\sigma_\alpha^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c \sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x}) \, dx_3 \quad , \quad (2.40c)$$

$$\sigma_\alpha^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c \sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x})\frac{21}{4}\left(1 - 5\frac{x_3^2}{c^2}\right) \, dx_3 \quad , \quad (2.40d)$$

$$\sigma^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c \sigma_{33}(\mathbf{x})\frac{693}{16c^2}\left(15 - 70\frac{x_3^2}{c^2} + 63\frac{x_3^4}{c^4}\right)x_3 \, dx_3 \quad ; \quad (2.40e)$$

- Plattengleichgewichtsgleichungen:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(\xi)}(\bar{\mathbf{x}}) - \sigma_\alpha^{(\xi)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_\alpha^{(\xi)}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad , \quad (2.41a)$$

$$\sigma_{\alpha,\alpha}^{(\xi)}(\bar{\mathbf{x}}) + \sigma^{(\xi)}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad ; \quad (2.41b)$$



- Plattengleichgewichtsgleichungen für die Fundamentallösung:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}^{*(\xi)}(\bar{\mathbf{x}}) - \sigma_{\alpha}^{*(\xi)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_{\alpha}^{*(\xi)}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad , \quad (2.42a)$$

$$\sigma_{\alpha,\alpha}^{*(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_3^{*(1)}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad , \quad (2.42b)$$

$$\sigma_{\alpha,\alpha}^{*(2)}(\bar{\mathbf{x}}) + \sigma^{*(2)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_3^{*(2)}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad . \quad (2.42c)$$

Vernachlässigt man jetzt in diesen Gleichungen alle Variablen mit dem oberen Index 2, erhält man genau die entsprechenden Gleichungen des REISSNER-MINDLINSchen Modells sechster Ordnung. Wenn man diese Eigenschaft der Gleichungen auf die abzuleitenden Differential- und Integralgleichungen übertragen kann, hat man die vollständig hierarchische Darstellung des Problems. Das wird im nächsten Kapitel gezeigt.

## 2.7 Beispiel für die Einheitseinzelbelastungen

Wir geben ein Beispiel für die Einheitseinzelmomente  $m_{\alpha}^{*(\xi)}(P)$  und Einheitseinzelkräfte  $m_3^{*(\xi)}(P)$  und die entlang der Plattendicke verteilten Kräfte  $b_i^*(P)$  an. Aus (2.29) und (2.30) und den Konstanten (2.37) ergibt sich

$$b_{\alpha}^*(P) = \frac{3}{2c^2} \left[ m_{\alpha}^{*(1)}(P) + m_{\alpha}^{*(2)}(P) \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{x_3^2}{c^2} \right) \right] \frac{x_3}{c} \quad , \quad (2.43a)$$

$$b_3^*(P) = \frac{1}{8c} \left[ 6m_3^{*(1)}(P) \left( 1 - \frac{x_3^2}{c^2} \right) + m_3^{*(2)}(P) \left( 1 - 6\frac{x_3^2}{c^2} + 5\frac{x_3^4}{c^4} \right) \right] \quad , \quad (2.43b)$$

und

$$m_{\alpha}^{*(1)}(P) := \int_{-c}^c b_{\alpha}^*(P) x_3 \, dx_3 \quad , \quad m_{\alpha}^{*(2)}(P) := \int_{-c}^c b_{\alpha}^*(P) \frac{21}{4} \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{x_3^2}{c^2} \right) x_3 \, dx_3 \quad , \quad (2.44a)$$

$$m_3^{*(1)}(P) := \int_{-c}^c b_3^*(P) \, dx_3 \quad , \quad m_3^{*(2)}(P) := \int_{-c}^c b_3^*(P) \frac{21}{4} \left( 1 - 5\frac{x_3^2}{c^2} \right) \, dx_3 \quad . \quad (2.44b)$$

Zuerst setzen wir  $m_{\alpha}^{*(1)}(P) = 1$  und  $m_{\alpha}^{*(2)}(P) = 0$ . Aus (2.43a) ergibt sich

$$b_{\alpha}^*(P) = \frac{3}{2c^2} \frac{x_3}{c} \quad , \quad (2.45)$$

und beide Gleichungen (2.44a) sind erfüllt. Setzen wir nun  $m_{\alpha}^{*(1)}(P) = 0$  und  $m_{\alpha}^{*(2)}(P) = 1$ . Aus (2.43a) ergibt sich

$$b_{\alpha}^*(P) = \frac{3}{2c^2} \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{x_3^2}{c^2} \right) \frac{x_3}{c} \quad , \quad (2.46)$$

und beide Gleichungen (2.44a) sind wieder erfüllt. Die Einheitseinzelmomente und die entsprechenden Kräfte (2.45) und (2.46) sind in Abb. 2.2 gezeigt.

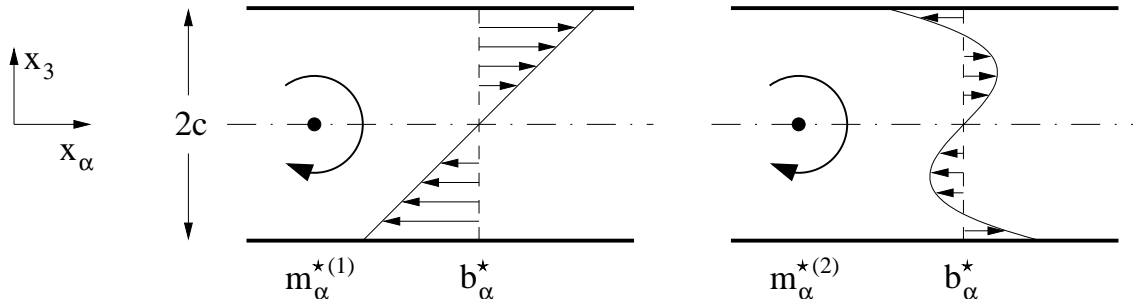


Abbildung 2.2: Einheitsmomente  $m_\alpha^{*(\xi)}$  und die entsprechenden Kräfte  $b_\alpha^*$ .

Nun werden die Einheitskräfte untersucht. Setzen wir  $m_3^{*(1)}(P) = 1$  und  $m_3^{*(2)}(P) = 0$ . Aus (2.43b) ergibt sich

$$b_3^*(P) = \frac{3}{4c} \left( 1 - \frac{x_3^2}{c^2} \right) , \quad (2.47)$$

und beide Gleichungen (2.44b) sind erfüllt. Setzen wir nun  $m_3^{*(1)}(P) = 0$  und  $m_3^{*(2)}(P) = 1$ . Aus (2.43b) ergibt sich

$$b_3^*(P) = \frac{1}{8c} \left( 1 - 6\frac{x_3^2}{c^2} + 5\frac{x_3^4}{c^4} \right) \frac{x_3}{c} , \quad (2.48)$$

und beide Gleichungen (2.44b) sind wieder erfüllt. Die Einheitskräfte und die entsprechenden Kräfte (2.47) und (2.48) sind in Abb. 2.3 gezeigt.

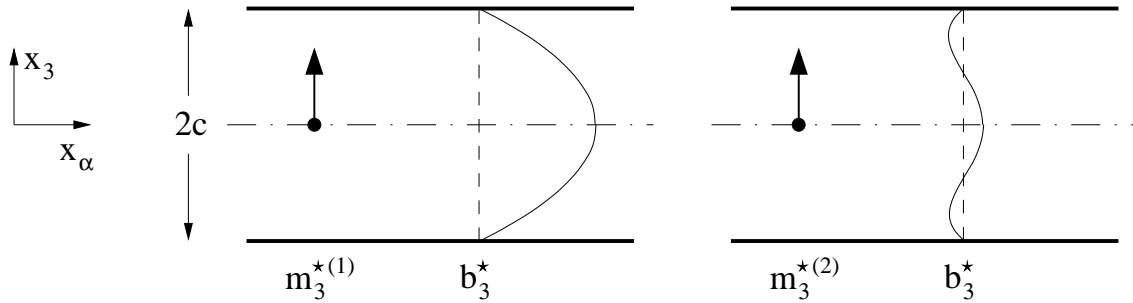


Abbildung 2.3: Einheitskräfte  $m_3^{*(\xi)}$  und die entsprechenden Kräfte  $b_3^*$ .

## 2.8 Klassifikation der Plattenmodelle

Bezüglich des gegebenen Paares  $\{r, s\}$  der Gl. (2.1) entspricht der Grad der Approximation dem Grad des Ansatzes und wird durch das Paar  $(n_r, n_s)$  beschrieben:

$$(n_r, n_s) := (2r - 1, 2(s - 1)) ,$$

wobei  $n_r$  die Ordnung der Approximation für  $u_\alpha(\mathbf{x})$  ist, während  $n_s$  die entsprechende Ordnung für  $u_3(\mathbf{x})$  ist.

Nach dem Verfahren von Reissner [78–80, 83] und Poniatovskii [67, 68] hat man die Möglichkeit, zweidimensionale Modelle durch den Produktansatz für die Spannungen  $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$  zu gewinnen. Um die Plattenmodelle, die nach dem Verschiebungsansatz (2.1) bzw. nach dem REISSNERSchen Spannungsansatz gewonnen werden, zu unterscheiden, definieren wir zwei Modellgruppen, die wir die  $d$ - bzw.  $s$ -Gruppe nennen.

Wir definieren jetzt die zwei Plattenmodelle, die wir untersuchen wollen.

1. Das einfachste Modell der Hierarchie entspricht dem einfachsten Fall  $\min\{r, s\} := 1$  und  $r = s$ , ein Modell sechster Ordnung, das berühmte  $s$ -(1,0) REISSNERSche Modell (bzw.  $d$ -(1,0) MINDLINSche Modell). Die transversale Belastung ist wie eine vorgeschriebene natürliche (nicht integrierte) Plattenvariable (gemäß Gl. (2.6)) zu betrachten mit (siehe (2.5))

$$\{\phi(\bar{\mathbf{x}})\}_3 := \left\{ \phi_1^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}), \phi_2^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}), \phi_3^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \right\}^T, \quad (2.49a)$$

$$[\boldsymbol{\tau}(\bar{\mathbf{x}})]_{3 \times 3} := \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_{12}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_1^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \sigma_{12}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_{22}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_2^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \sigma_1^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_2^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \quad (2.49b)$$

oder mit der Schreibweise von Reissner [83]

$$[\boldsymbol{\tau}(\bar{\mathbf{x}})]_{3 \times 3} := \begin{bmatrix} M_{11}(\bar{\mathbf{x}}) & M_{12}(\bar{\mathbf{x}}) & Q_1(\bar{\mathbf{x}}) \\ M_{12}(\bar{\mathbf{x}}) & M_{22}(\bar{\mathbf{x}}) & Q_2(\bar{\mathbf{x}}) \\ Q_1(\bar{\mathbf{x}}) & Q_2(\bar{\mathbf{x}}) & q_3(\bar{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}. \quad (2.49c)$$

Reissner hat im Gegensatz zu Mindlin die Spannung  $\sigma_{33}$  berücksichtigt.

2. Wenn  $r = s := 2$  ist, bekommen wir ein Modell zwölfter Ordnung der Klasse  $d$ -(3,2) (Preußner [72]) oder  $s$ -(3,2) (Reissner [83]) mit

$$\{\phi(\bar{\mathbf{x}})\}_6 := \left\{ \phi_1^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}), \phi_2^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}), \phi_3^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}), \phi_1^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}), \phi_2^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}), \phi_3^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \right\}^T, \quad (2.50a)$$

$$[\boldsymbol{\tau}(\bar{\mathbf{x}})]_{3 \times 6} := \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_{12}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_1^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_{11}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_{12}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_1^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \sigma_{12}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_{22}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_2^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_{12}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_{22}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_2^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \sigma_1^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_2^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_1^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma_2^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) & \sigma^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \quad (2.50b)$$

oder in der Schreibweise von Reissner [83]

$$[\boldsymbol{\tau}(\bar{\mathbf{x}})]_{3 \times 6} := \begin{bmatrix} M_{11}(\bar{\mathbf{x}}) & M_{12}(\bar{\mathbf{x}}) & Q_1(\bar{\mathbf{x}}) & P_{11}(\bar{\mathbf{x}}) & P_{12}(\bar{\mathbf{x}}) & S_1(\bar{\mathbf{x}}) \\ M_{12}(\bar{\mathbf{x}}) & M_{22}(\bar{\mathbf{x}}) & Q_2(\bar{\mathbf{x}}) & P_{12}(\bar{\mathbf{x}}) & P_{22}(\bar{\mathbf{x}}) & S_2(\bar{\mathbf{x}}) \\ Q_1(\bar{\mathbf{x}}) & Q_2(\bar{\mathbf{x}}) & q_3(\bar{\mathbf{x}}) & S_1(\bar{\mathbf{x}}) & S_2(\bar{\mathbf{x}}) & T(\bar{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}. \quad (2.50c)$$

Die dazwischenliegenden Modelle  $r := 1, s := 2$  und  $r := 2, s := 1$ , d.h. die Modelle  $s$ -(1,2) achter Ordnung (siehe Reissner [86], Rössle et al. [88]) und  $s$ -(3,0) zehnter Ordnung (siehe Reissner [83]), werden nicht berücksichtigt.

# Kapitel 3

## Hierarchische Herleitung der Differentialgleichungen

### 3.1 Einleitung

E. Reissner [81] hat ein gemischtes Variationsprinzip formuliert, das als EULERSche Gleichungen die Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie, d.h. die Gleichgewichts- und die Konstitutivgleichungen, generiert, wobei die entsprechenden Randbedingungen auch erfüllt sind.<sup>1</sup> Das Prinzip, heutzutage als das HELLINGER-REISSNERSche Variationsprinzip bekannt, wurde von Reissner selbst für die Bestimmung der Differentialgleichungen des Plattenmodells sechster Ordnung (Reissner [78–80]) in der Weise angewandt, dass die Differentialgleichungen direkt und einfach abgeleitet wurden (Washizu [113], Fraeijs de Veubeke [25]) ohne Verwendung von LAGRANGESchen Multiplikatoren. 1983 hat E. Reissner [83] das Prinzip für die Gewinnung eines Systems zwölfter Ordnung angewandt. Das gleiche Prinzip wird im vorliegenden Kapitel verwendet, um gleichzeitig, d.h. auf hierarchische Weise, die Differentialgleichungen der Modelle sechster und zwölfter Ordnung zu gewinnen.

### 3.2 Das HELLINGER-REISSNERSche Variationsprinzip

Es wird zunächst nur der Fall  $r = s := 2$  betrachtet, d.h. es wird das Modell  $s$ -(3,2) berücksichtigt. Da die Gleichungen hierarchisch abgeleitet werden, betrachten wir automatisch auch das Problem sechster Ordnung.

---

<sup>1</sup>Laut C.A. Truesdell [104] wurde das Variationsprinzip zuerst von M. Born für zweidimensionale Probleme entwickelt, ohne Berücksichtigung der Randbedingungen. E. Hellinger hat gleichfalls das Prinzip für dreidimensionale Probleme, auch ohne Berücksichtigung der Randbedingungen formuliert. Das Problem wurde vollständig von E. Reissner betrachtet, indem ein Randintegral einbezogen wurde (siehe Bufler [11]). Das Funktional wurde aber tatsächlich schon 1916 in der Habilitationsschrift von G. Prange [71] hergeleitet, siehe Bufler [11].

Das HELLINGER-REISSNERSche Variationsprinzip lautet (siehe Reissner [84], Washizu [113])

$$-\Pi_R(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) := \iiint_V [B(\boldsymbol{\sigma}) + \sigma_{ij,j}(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x})] dx_1 dx_2 dx_3 - \iint_{S_u} \sigma_{ij}(\mathbf{x})n_j \bar{u}_i(\mathbf{x}) dx_3 d\Gamma, \quad (3.1)$$

wobei  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\mathbf{u}$  das Spannungs- bzw. Verschiebungsfeld,  $n_j$  die Komponenten des äußeren Normalenvektors auf  $\Gamma$  bezeichnen und  $B(\boldsymbol{\sigma})$  die Ergänzungsenergie<sup>2</sup> sind. Für ein transversal-isotropes Material ist die Ergänzungsenergie (bei Berücksichtigung von (2.8))<sup>3</sup>:

$$B(\boldsymbol{\sigma}) := \frac{1}{2E} \left[ (1 + \nu)\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - \nu\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta} + \frac{2(1 + \nu)}{k_G}\sigma_{\alpha 3}\sigma_{\alpha 3} + \frac{2\nu k_\nu}{k_E}\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{33} + \frac{\sigma_{33}^2}{k_E^2} \right]. \quad (3.2)$$

Nun kann die Integration entlang der Plattendicke durchgeführt werden. Bei Berücksichtigung des Spannungsfeldes (2.39) und Integration bezüglich  $x_3$  ergibt sich

$$\int_{-c}^c B(\boldsymbol{\sigma}) dx_3 = \frac{1}{2(1 - \nu^2)D^{(\xi\eta)}} [(1 + \nu)\sigma_{\gamma\theta}^{(\xi)}\sigma_{\gamma\theta}^{(\eta)} - \nu\sigma_{\gamma\gamma}^{(\xi)}\sigma_{\theta\theta}^{(\eta)}] + \frac{1}{2}G^{(\xi\eta)}\sigma_{\gamma}^{(\xi)}\sigma_{\gamma}^{(\eta)} + \frac{1}{2}C^{(\xi\eta)}\sigma^{(\xi)}\sigma^{(\eta)} - E^{(\xi\eta)}\sigma_{\gamma\gamma}^{(\xi)}\sigma^{(\eta)} \quad (3.3)$$

mit

$$D^{(11)} := \frac{2Ec^3}{3(1 - \nu^2)}, \quad D^{(12)} = D^{(21)} := 0, \quad D^{(22)} := \frac{21}{4}D^{(11)}, \quad (3.4a)$$

$$G^{(11)} := \frac{3}{5G_3c}, \quad G^{(12)} = G^{(21)} := \frac{1}{21}G^{(11)}, \quad G^{(22)} := \frac{4}{189}G^{(11)}, \quad (3.4b)$$

$$E^{(11)} := \frac{3\nu_3}{5c\sqrt{E_3E}}, \quad E^{(12)} = E^{(21)} := \frac{1}{21}E^{(11)}, \quad E^{(22)} := \frac{4}{189}E^{(11)}, \quad (3.4c)$$

$$C^{(11)} := \frac{17c}{70E_3}, \quad C^{(12)} = C^{(21)} := \frac{8}{153}C^{(11)}, \quad C^{(22)} := \frac{8}{1683}C^{(11)}. \quad (3.4d)$$

Setzt man jetzt das Spannungsfeld (2.39) in das zweite Glied der Gl. (3.1) ein und integriert erneut bezüglich  $x_3$ , so folgt

$$\begin{aligned} \int_{-c}^c \sigma_{ij,j}u_i dx_3 &= \int_{-c}^c [(\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \sigma_{\alpha 3,3})u_\alpha + (\sigma_{3\alpha,\alpha} + \sigma_{33,3})u_3] dx_3 = \\ &= [\sigma_{\gamma\theta,\theta}^{(\xi)} - \sigma_{\gamma}^{(\xi)}]\varphi_\gamma^{(\xi)} + [\sigma_{\gamma\gamma}^{(\xi)} + \sigma^{(\xi)}]\varphi_3^{(\xi)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

<sup>2</sup> $B(\boldsymbol{\sigma}) := \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ .

<sup>3</sup>Das Argument  $\bar{\mathbf{x}}$  wird nun der Übersichtlichkeit halber weggelassen.

wobei die „neuen“ Plattenverschiebungskomponenten definiert wurden:

$$\varphi_\alpha^{(1)} := \frac{3}{2c^2} \int_{-c}^c u_\alpha \frac{x_3}{c} dx_3 \quad , \quad (3.6a)$$

$$\varphi_3^{(1)} := \frac{3}{4c} \int_{-c}^c u_3 \left(1 - \frac{x_3^2}{c^2}\right) dx_3 \quad , \quad (3.6b)$$

$$\varphi_\alpha^{(2)} := \frac{3}{2c^2} \int_{-c}^c u_\alpha \left(1 - \frac{5x_3^2}{3c^2}\right) \frac{x_3}{c} dx_3 \quad , \quad (3.6c)$$

$$\varphi_3^{(2)} := \frac{1}{8c} \int_{-c}^c u_3 \left(1 - 6\frac{x_3^2}{c^2} + 5\frac{x_3^4}{c^4}\right) dx_3 \quad . \quad (3.6d)$$

Setzen wir nun in diese Gleichungen den Verschiebungsansatz (2.38) ein, bekommen wir  $\varphi_i^{(\alpha)} = \phi_i^{(\alpha)}$ . Das bedeutet, dass die Verschiebungsfelder der Modelle der  $d$ - und  $s$ -Gruppen identisch sind, wenn das wirkliche Verschiebungsfeld den Gleichungen (2.38) genau entspricht. Ist das nicht der Fall, so entspricht das Feld  $\varphi_i^{(\alpha)}$  einem gewichteten Wert des tatsächlichen Feldes, während  $\phi_i^{(\alpha)}$  entfällt (siehe Goodier [29], Reissner [80], Fraeijs de Veubeke [25]).<sup>4</sup>

Wir betrachten momentan drei Verschiebungsfelder:

- $\varphi_i^{(\alpha)}(\bar{\mathbf{x}})$ : die verallgemeinerten Verschiebungen des REISSNERSchen Plattenmodells, Gleichungen (3.6) (Modell der  $s$ -Gruppe);
- $\phi_i^{(\alpha)}(\bar{\mathbf{x}})$ : die verallgemeinerten Verschiebungen eines kinematischen Modells, Gleichungen (2.38) (Modell der  $d$ -Gruppe); und
- $u_i(\mathbf{x})$ : die Verschiebungen der 3D-Elastizitätstheorie.

Die Verschiebungen (3.6) können wir folgendermaßen schreiben (siehe die Dis-

---

<sup>4</sup>Hätten wir mit den Gleichungen (2.32) statt (2.38) gearbeitet, würden wir die Werte von  $a_0$  bis  $a_3$  berechnen, die in Gl. (2.37) gesetzt wurden, um  $\varphi_i^{(\alpha)} = \phi_i^{(\alpha)}$  zu bekommen. Nur die Konstante  $a_5$  würde noch unbestimmt bleiben.

kussion zwischen Reissner und Goodier bzgl. des  $s$ -(1,0) Modells in [29]):<sup>5</sup>

$$\varphi_{\alpha}^{(1)} = \frac{\frac{3}{2c^2} \int_{-c}^c [u_{\alpha}] \frac{x_3}{c} dx_3}{\frac{3}{2c^2} \int_{-c}^c \left[ x_3 + \frac{21}{4} \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{x_3^2}{c^2} \right) x_3 \right] \frac{x_3}{c} dx_3} , \quad (3.7a)$$

$$\varphi_3^{(1)} = \frac{\frac{3}{4c} \int_{-c}^c [u_3] \left( 1 - \frac{x_3^2}{c^2} \right) dx_3}{\frac{3}{4c} \int_{-c}^c \left[ 1 + \frac{21}{4} \left( 1 - 5 \frac{x_3^2}{c^2} \right) \right] \left( 1 - \frac{x_3^2}{c^2} \right) dx_3} , \quad (3.7b)$$

$$\varphi_{\alpha}^{(2)} = \frac{\frac{3}{2c^2} \int_{-c}^c [u_{\alpha}] \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{x_3^2}{c^2} \right) \frac{x_3}{c} dx_3}{\frac{3}{2c^2} \int_{-c}^c \left[ x_3 + \frac{21}{4} \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{x_3^2}{c^2} \right) x_3 \right] \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{x_3^2}{c^2} \right) \frac{x_3}{c} dx_3} , \quad (3.7c)$$

$$\varphi_3^{(2)} = \frac{\frac{1}{8c} \int_{-c}^c [u_3] \left( 1 - 6 \frac{x_3^2}{c^2} + 5 \frac{x_3^4}{c^4} \right) dx_3}{\frac{1}{8c} \int_{-c}^c \left[ 1 + \frac{21}{4} \left( 1 - 5 \frac{x_3^2}{c^2} \right) \right] \left( 1 - 6 \frac{x_3^2}{c^2} + 5 \frac{x_3^4}{c^4} \right) dx_3} . \quad (3.7d)$$

Man beachte, dass in den obigen Gleichungen die Integrale

$$\begin{aligned} \frac{3}{2c^2} \int_{-c}^c \frac{21}{4} \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{x_3^2}{c^2} \right) x_3 \frac{x_3}{c} dx_3 , & \quad \frac{3}{4c} \int_{-c}^c \frac{21}{4} \left( 1 - 5 \frac{x_3^2}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{x_3^2}{c^2} \right) dx_3 , \\ \frac{3}{2c^2} \int_{-c}^c x_3 \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{x_3^2}{c^2} \right) \frac{x_3}{c} dx_3 , & \quad \frac{1}{8c} \int_{-c}^c \left( 1 - 6 \frac{x_3^2}{c^2} + 5 \frac{x_3^4}{c^4} \right) dx_3 \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>Man merke, dass die Nenner gleich Eins sind.



gleich Null sind. Es ergibt sich demzufolge

$$\varphi_\alpha^{(1)} = \frac{\frac{3}{2c^2} \int_{-c}^c [u_\alpha] \frac{x_3}{c} dx_3}{\frac{3}{2c^2} \int_{-c}^c [x_3] \frac{x_3}{c} dx_3} , \quad (3.8a)$$

$$\varphi_3^{(1)} = \frac{\frac{3}{4c} \int_{-c}^c [u_3] \left(1 - \frac{x_3^2}{c^2}\right) dx_3}{\frac{3}{4c} \int_{-c}^c [1] \left(1 - \frac{x_3^2}{c^2}\right) dx_3} , \quad (3.8b)$$

$$\varphi_\alpha^{(2)} = \frac{\frac{3}{2c^2} \int_{-c}^c [u_\alpha] \left(1 - \frac{5x_3^2}{3c^2}\right) \frac{x_3}{c} dx_3}{\frac{3}{2c^2} \int_{-c}^c \left[\frac{21}{4} \left(1 - \frac{5x_3^2}{3c^2}\right) x_3\right] \left(1 - \frac{5x_3^2}{3c^2}\right) \frac{x_3}{c} dx_3} , \quad (3.8c)$$

$$\varphi_3^{(2)} = \frac{\frac{1}{8c} \int_{-c}^c [u_3] \left(1 - 6\frac{x_3^2}{c^2} + 5\frac{x_3^4}{c^4}\right) dx_3}{\frac{1}{8c} \int_{-c}^c \left[\frac{21}{4} \left(1 - 5\frac{x_3^2}{c^2}\right)\right] \left(1 - 6\frac{x_3^2}{c^2} + 5\frac{x_3^4}{c^4}\right) dx_3} . \quad (3.8d)$$

Es wird deutlich, dass die Verschiebungen  $\varphi_i^{(\alpha)}$  einen Mittelwert bzgl. der Polynome des Ansatzes für  $\sigma_{\alpha\beta}$  und  $\sigma_{\alpha 3}$  (Gleichungen (2.39a) und (2.39b)) des Verschiebungsfeldes  $u_i$  entlang der Plattendicke darstellen. Wenn die Verschiebungen  $u_i$  genau den Gleichungen (2.38) entsprechen, gibt es keine Unterschiede zwischen  $\varphi_i^{(\alpha)}$  und  $\phi_i^{(\alpha)}$ . Stimmen die Verschiebungen  $u_i$  nicht mit (2.38) überein, werden aber noch die Mittelwerte durch die Gleichungen (3.6) berücksichtigt.

Die Integration des letzten Gliedes von (3.1) liefert:

$$\int_{\Gamma_u} \int_{-c}^c \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dx_3 d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \int_{-c}^c [\sigma_{\alpha\beta} n_\beta \bar{u}_\alpha + \sigma_{3\alpha} n_\alpha \bar{u}_3] dx_3 d\Gamma = \int_{\Gamma_u} t_i^{(\xi)} \bar{\varphi}_i^{(\xi)} d\Gamma , \quad (3.9)$$

da  $n_3 = 0$  auf  $S$ . Hierbei ist der Spannungsvektor

$$t_\alpha^{(\xi)} := \sigma_{\alpha\beta}^{(\xi)} n_\beta , \quad t_3^{(\xi)} := \sigma_\beta^{(\xi)} n_\beta . \quad (3.10)$$

Das HELLINGER-REISSNERSche Prinzip lautet nun für die 2D-Variablen:

$$\begin{aligned}
 -\Pi_R(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varphi}) := & \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2(1-\nu^2)D(\psi\eta)} [(1+\nu)\sigma_{\gamma\theta}^{(\psi)}\sigma_{\gamma\theta}^{(\eta)} - \nu\sigma_{\gamma\gamma}^{(\psi)}\sigma_{\theta\theta}^{(\eta)}] + \right. \\
 & - E^{(\psi\eta)}\sigma_{\gamma\gamma}^{(\psi)}\sigma^{(\eta)} + \frac{1}{2}G^{(\psi\eta)}\sigma_{\gamma}^{(\psi)}\sigma_{\gamma}^{(\eta)} + \frac{1}{2}C^{(\psi\eta)}\sigma^{(\psi)}\sigma^{(\eta)} + \\
 & \left. + [\sigma_{\gamma\theta,\theta}^{(\psi)} - \sigma_{\gamma}^{(\psi)}]\varphi_{\gamma}^{(\psi)} + [\sigma_{\gamma,\gamma}^{(\psi)} + \sigma^{(\psi)}]\varphi_3^{(\psi)} \right\} dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma_u} t_i^{(\psi)}\bar{\varphi}_i^{(\psi)} d\Gamma \quad , \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

wobei  $\boldsymbol{\tau}$  das Plattenspannungsfeld (siehe Gl. (2.5d)) und  $\boldsymbol{\varphi}$  das „neue“ Plattenverschiebungsfeld sind mit (vergleiche (2.5a) und (2.5c))

$$\{\boldsymbol{\varphi}^{(k)}(\bar{\boldsymbol{x}})\}_3 := \begin{cases} \{ \varphi_1^{(k)}(\bar{\boldsymbol{x}}), \varphi_2^{(k)}(\bar{\boldsymbol{x}}), \varphi_3^{(k)}(\bar{\boldsymbol{x}}) \}^T & , 1 \leq k \leq \min\{r, s\} \\ \{ \varphi_1^{(k)}(\bar{\boldsymbol{x}}), \varphi_2^{(k)}(\bar{\boldsymbol{x}}), 0 \}^T & , s < k \leq r \\ \{ 0, 0, \varphi_3^{(k)}(\bar{\boldsymbol{x}}) \}^T & , r < k \leq s \end{cases} \quad , \quad (3.12a)$$

$$\{\boldsymbol{\varphi}(\bar{\boldsymbol{x}})\}_{3M} := \left\{ \{\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\bar{\boldsymbol{x}})\}_3^T, \dots, \{\boldsymbol{\varphi}^{(M)}(\bar{\boldsymbol{x}})\}_3^T \right\}^T \quad . \quad (3.12b)$$

### 3.3 Herleitung der Differentialgleichungen aus dem Prinzip von Hellinger-Reissner

Die Extremwertbildung des Funktionals (3.11) liefert die konstitutiven Gleichungen, die Gleichgewichtsgleichungen und die Randbedingungen des betrachteten Plattenproblems mit

$$\begin{aligned}
 \delta\Pi_R &= \frac{\partial\Pi_R}{\partial\boldsymbol{\tau}}\delta\boldsymbol{\tau} + \frac{\partial\Pi_R}{\partial\boldsymbol{\varphi}}\delta\boldsymbol{\varphi} = \\
 &= \frac{\partial\Pi_R}{\partial\sigma_{\alpha\beta}^{(\xi)}}\delta\sigma_{\alpha\beta}^{(\xi)} + \frac{\partial\Pi_R}{\partial\sigma_{\alpha}^{(\xi)}}\delta\sigma_{\alpha}^{(\xi)} + \frac{\partial\Pi_R}{\partial\sigma^{(2)}}\delta\sigma^{(2)} + \frac{\partial\Pi_R}{\partial\varphi_{\alpha}^{(\xi)}}\delta\varphi_{\alpha}^{(\xi)} + \frac{\partial\Pi_R}{\partial\varphi_3^{(\xi)}}\delta\varphi_3^{(\xi)} = 0 \quad . \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Als Ergebnis der obigen Variationen erhalten wir nach partieller Integration

- aus der Variation bzgl.  $\sigma_{\alpha\beta}^{(\xi)}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(1-\nu^2)D(\xi\eta)} [(1+\nu)\sigma_{\alpha\beta}^{(\eta)} - \nu\sigma_{\gamma\gamma}^{(\eta)}\delta_{\alpha\beta}] + \\
 - E^{(\xi\eta)}\sigma^{(\eta)}\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\varphi_{\alpha,\beta}^{(\xi)} + \varphi_{\beta,\alpha}^{(\xi)}) = 0 \quad (3.14a)
 \end{aligned}$$

und die Randbedingungen

$$\varphi_{\alpha}^{(\xi)} = \bar{\varphi}_{\alpha}^{(\xi)} \text{ auf } \Gamma_u \quad , \quad (3.14b)$$

$$t_{\alpha}^{(\xi)} = \bar{t}_{\alpha}^{(\xi)} \equiv \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(\xi)}n_{\beta} \text{ auf } \Gamma_t \quad ; \quad (3.14c)$$

- aus der Variation bzgl.  $\sigma_\alpha^{(\xi)}$ :

$$G^{(\xi\eta)}\sigma_\alpha^{(\eta)} - \varphi_\alpha^{(\xi)} - \varphi_{3,\alpha}^{(\xi)} = 0 \quad (3.15a)$$

und die Randbedingungen

$$\varphi_3^{(\xi)} = \overline{\varphi}_3^{(\xi)} \text{ auf } \Gamma_u \quad , \quad (3.15b)$$

$$t_3^{(\xi)} = \overline{t}_3^{(\xi)} \equiv \overline{\sigma}_\alpha^{(\xi)} n_\alpha \text{ auf } \Gamma_t \quad ; \quad (3.15c)$$

- aus der Variation bzgl.  $\sigma^{(2)}$

$$- E^{(2\alpha)}\sigma_{\beta\beta}^{(\alpha)} + C^{(2\alpha)}\sigma^{(\alpha)} + \varphi_3^{(2)} = 0 \quad ; \quad (3.16)$$

- aus der Variation bzgl.  $\varphi_\alpha^{(\xi)}$

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(\xi)} - \sigma_\alpha^{(\xi)} = 0 \quad ; \quad (3.17)$$

- aus der Variation bzgl.  $\varphi_3^{(\xi)}$

$$\sigma_{\alpha,\alpha}^{(\xi)} + \sigma^{(\xi)} = 0 \quad . \quad (3.18)$$

Aus den Variationen der Plattenspannungen haben wir die Elastizitätsgleichungen für das Plattenproblem abgeleitet, Gl. (3.14a), (3.15a) und (3.16). Aus den Variationen der Verschiebungen haben wir die Plattengleichgewichtsgleichungen erhalten, Gleichungen (3.17) und (3.18), die vorher schon direkt abgeleitet wurden, siehe Gleichungen (2.41) (mit  $m_\alpha^{(\xi)} = 0$ , siehe (2.35)). Außerdem haben wir die Randbedingungen aus den Variationen der Plattenspannungen (ausgenommen  $\sigma^{(2)}$ ) erhalten, Gleichungen (3.14b), (3.14c), (3.15b) und (3.15c).

Die Gl. (3.14a) können wir folgendermaßen umschreiben:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(\xi)} = D^{(\xi\eta)} \frac{1-\nu}{2} \left[ \varphi_{\alpha,\beta}^{(\xi)} + \varphi_{\beta,\alpha}^{(\xi)} + \frac{2\nu}{1-\nu} \varphi_{\gamma,\gamma}^{(\xi)} \delta_{\alpha\beta} \right] + (1+\nu) D^{(\xi\eta)} E^{(\eta\gamma)} \sigma^{(\gamma)} \delta_{\alpha\beta} \quad . \quad (3.19)$$

Aus den Gleichungen (3.15a) bekommen wir

$$\sigma_\alpha^{(1)} = \frac{1}{1 - \frac{G^{(12)}G^{(21)}}{G^{(11)}G^{(22)}}} \frac{1}{G^{(11)}} \left[ \varphi_\alpha^{(1)} + \varphi_{3,\alpha}^{(1)} - \frac{G^{(12)}}{G^{(22)}} \left( \varphi_\alpha^{(2)} + \varphi_{3,\alpha}^{(2)} \right) \right] \quad , \quad (3.20a)$$

$$\sigma_\alpha^{(2)} = \frac{1}{1 - \frac{G^{(12)}G^{(21)}}{G^{(11)}G^{(22)}}} \frac{1}{G^{(22)}} \left[ \varphi_\alpha^{(2)} + \varphi_{3,\alpha}^{(2)} - \frac{G^{(21)}}{G^{(11)}} \left( \varphi_\alpha^{(1)} + \varphi_{3,\alpha}^{(1)} \right) \right] \quad . \quad (3.20b)$$

Hier begegnet uns die erste Kopplung zwischen den Modellen  $s$ -(1,0) und  $s$ -(3,2). Wir definieren nun die **erste Kopplungsvariable** (aus den Gleichungen (3.4)):

$$k_R := \frac{1}{1 - \frac{G^{(12)}G^{(21)}}{G^{(11)}G^{(22)}}} = \begin{cases} 1 & \text{für das Modell } s\text{-(1,0)} \\ \frac{28}{25} & \text{für das Modell } s\text{-(3,2)} \end{cases} . \quad (3.21)$$

Außerdem können wir für die anderen Konstanten in den Gleichungen (3.20)

$$\frac{1}{G^{(11)}} = D^{(11)} \frac{1-\nu}{2} \frac{5}{2c^2} k_G \quad , \quad \frac{1}{G^{(22)}} = 9D^{(22)} \frac{1-\nu}{2} \frac{5}{2c^2} k_G \quad , \quad (3.22a)$$

$$\frac{G^{(12)}}{G^{(22)}} = \frac{9}{4} \quad , \quad \frac{G^{(21)}}{G^{(11)}} = \frac{1}{21} \quad (3.22b)$$

schreiben.

Wir definieren weiter

$$\lambda^2 \equiv \lambda^2(k_R, G_3, c) := k_R k_G \frac{5}{2c^2} . \quad (3.23)$$

Damit haben wir aus den Gleichungen (3.20)

$$\sigma_\alpha^{(1)} = D^{(11)} \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ \varphi_\alpha^{(1)} + \varphi_{3,\alpha}^{(1)} - \frac{9}{4} \left( \varphi_\alpha^{(2)} + \varphi_{3,\alpha}^{(2)} \right) \right] \quad , \quad (3.24a)$$

$$\sigma_\alpha^{(2)} = 9D^{(22)} \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ \varphi_\alpha^{(2)} + \varphi_{3,\alpha}^{(2)} - \frac{1}{21} \left( \varphi_\alpha^{(1)} + \varphi_{3,\alpha}^{(1)} \right) \right] \quad , \quad (3.24b)$$

erhalten.

Als Schlussfolgerung dieses Abschnitts werden die abgeleiteten Gleichungen gruppiert:

- Konstitutivgleichungen (Gleichungen (3.19), (3.24) und (3.16))

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(\xi)} = D^{(\xi\eta)} \frac{1-\nu}{2} \left[ \varphi_{\alpha,\beta}^{(\eta)} + \varphi_{\beta,\alpha}^{(\eta)} + \frac{2\nu}{1-\nu} \varphi_{\gamma,\gamma}^{(\eta)} \delta_{\alpha\beta} \right] + (1+\nu) D^{(\xi\eta)} E^{(\eta\gamma)} \sigma^{(\gamma)} \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.25a)$$

$$\sigma_\alpha^{(1)} = D^{(11)} \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ \varphi_\alpha^{(1)} + \varphi_{3,\alpha}^{(1)} - \frac{9}{4} \left( \varphi_\alpha^{(2)} + \varphi_{3,\alpha}^{(2)} \right) \right] \quad , \quad (3.25b)$$

$$\sigma_\alpha^{(2)} = 9D^{(22)} \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ \varphi_\alpha^{(2)} + \varphi_{3,\alpha}^{(2)} - \frac{1}{21} \left( \varphi_\alpha^{(1)} + \varphi_{3,\alpha}^{(1)} \right) \right] \quad , \quad (3.25c)$$

$$\sigma^{(2)} = \frac{1}{C^{(22)}} \left[ E^{(2\alpha)} \sigma_{\beta\beta}^{(\alpha)} - C^{(21)} \sigma^{(1)} - \varphi_3^{(2)} \right] \quad . \quad (3.25d)$$

- Gleichgewichtsbedingungen (Gleichungen (3.17) und (3.18))

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(\xi)} - \sigma_{\alpha}^{(\xi)} = 0 \quad , \quad (3.26a)$$

$$\sigma_{\alpha,\alpha}^{(\xi)} + \sigma^{(\xi)} = 0 \quad . \quad (3.26b)$$

- Randbedingungen (Gleichungen (3.14b), (3.14c), (3.15b) und (3.15c)) auf  $\Gamma_u$

$$\varphi_i^{(\xi)} = \overline{\varphi}_i^{(\xi)} \quad \text{auf } \Gamma_u \quad , \quad (3.27)$$

$$t_i^{(\xi)} = \overline{t}_i^{(\xi)} \quad \text{auf } \Gamma_t \quad , \quad (3.28)$$

mit den gegebenen Randspannungen (Gleichungen (3.14c) und (3.15c))

$$\overline{t}_{\alpha}^{(\xi)} = \overline{\sigma}_{\alpha\beta}^{(\xi)} n_{\beta} \quad , \quad (3.29a)$$

$$\overline{t}_3^{(\xi)} = \overline{\sigma}_{\alpha}^{(\xi)} n_{\alpha} \quad . \quad (3.29b)$$

### 3.4 Grundgleichungen des Hilfsproblems

Um das betrachtete Problem weiter vereinfachen zu können, definieren wir die Vektoren

$$u_i := \varphi_i^{(1)} \quad , \quad u_{(3+i)} := \varphi_i^{(2)} \quad , \quad (3.30a)$$

$$t_i := t_i^{(1)} \quad , \quad t_{(3+i)} := t_i^{(2)} \quad . \quad (3.30b)$$

Die Verschiebungen sind jetzt durch  $u_K$  und die Randspannungen durch  $t_K$  gegeben, wobei die lateinischen Großbuchstaben von 1 bis 6 laufen. Die Lösung in einem unendlichen Gebiet unter dem Einfluss von Einheitseinzelbelastungen ist als Fundamentallösung bekannt. Die Gewichtsfunktionen, die im nächsten Kapitel benötigt werden, um die entsprechenden Integralgleichungen des Problems abzuleiten, wenn wir die Methode des gewichteten Restes anwenden werden, sind genau diese Fundamentallösungen. Daher haben wir das folgende Problem

$$L_{IJ}(\partial_Q) u_J(Q) = -F_{IJ}(\partial_Q) q_J(Q) \quad (3.31)$$

zu lösen, wobei  $L_{IJ}(\partial_Q) \equiv L_{IJ}(\partial/\partial x_{\alpha}(Q))$  ein linear elliptisches Differentialgleichungssystem ist (siehe Vladimirov [109]),  $F_{IJ}(\partial_Q)$  beliebige Differentialoperatoren sind und  $\partial_Q$  die partielle Ableitung nach  $Q$  bezeichnet.  $q_J(Q)$  stellt einen bekannten Vektor dar. Für die Fundamentallösung gilt (siehe (2.31))

$$L_{IJ}(\partial_Q) u_J^*(Q) = -m_I^*(Q) = -\delta(P, Q) m_I^*(P) \quad , \quad (3.32)$$

wobei

$$\{\mathbf{m}^*\}_6 := \left\{ m_1^{*(1)}, m_2^{*(1)}, m_3^{*(1)}, m_1^{*(2)}, m_2^{*(2)}, m_3^{*(2)} \right\}^T \quad (3.33)$$

Einheitseinzelbelastungen (siehe Gleichungen (2.42)) und  $u_j^*(Q)$  die entsprechenden Verschiebungen sind.

Die Gleichgewichtsgleichungen

$$\sigma_{ij,j}^* + b_i^* = 0 \quad , \quad (3.34)$$

mit den Einheitseinzelkräften  $b_i^*$  aus (2.43), liefern die Plattengleichgewichtsgleichungen

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}^{*(\xi)} - \sigma_\alpha^{*(\xi)} + m_\alpha^{*(\xi)} = 0 \quad , \quad (3.35a)$$

$$\sigma_{\alpha,\alpha}^{*(\xi)} + \delta_{\xi 2} \sigma^{*(2)} + m_3^{*(\xi)} = 0 \quad . \quad (3.35b)$$

Diese sind identisch mit den Gleichungen (2.42), die direkt aus den Gleichungen der Elastizitätstheorie hergeleitet wurden.

### 3.5 Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen

Da die 3D-Spannungen durch 2D-Plattenspannungen ersetzt wurden, werden wir in diesem Abschnitt die Plattenverzerrungen definieren (siehe Reissner [82], Lewiński [51]). Um das zu ermöglichen, werden wir das Prinzip der virtuellen Arbeit anwenden, indem wir die Plattengleichgewichtsgleichungen berücksichtigen.

In Verbindung mit den Plattenspannungen  $\sigma_{\alpha\beta}^{(\xi)}$ ,  $\sigma_\alpha^{(\xi)}$  und  $\sigma^{(\xi)}$ , den primären Variablen, werden wir als duale Variablen die Plattenverzerrungen  $\kappa_{\alpha\beta}^{(\xi)}$  und  $\kappa_\alpha^{(\xi)}$  definieren. Mit den Plattengleichgewichtsgleichungen (2.41) und den Randbedingungen (3.28) lautet das Prinzip der virtuellen Arbeit (Washizu [113], Lewiński [51])

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \left\{ \left[ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(\xi)} - \sigma_\alpha^{(\xi)} + m_\alpha^{(\xi)} \right] \delta\varphi_\alpha^{(\xi)} + \left[ \sigma_{\alpha,\alpha}^{(\xi)} + \sigma^{(\xi)} \right] \delta\varphi_3^{(\xi)} \right\} d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_t} \left[ t_i^{(\xi)} - \bar{t}_i^{(\xi)} \right] \delta\varphi_i^{(\xi)} d\Gamma = 0 \quad , \quad (3.36) \end{aligned}$$

wobei  $\delta\varphi_i^{(\xi)}$  virtuelle Verschiebungen sind, mit  $\delta\varphi_i^{(\xi)} = 0$  auf  $\Gamma_u$ .

Partielle Integration liefert (Reissner [82])

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \sigma_{\alpha\beta}^{(\xi)} \delta\varphi_{\alpha,\beta}^{(\xi)} + \sigma_\alpha^{(\xi)} \left( \delta\varphi_\alpha^{(\xi)} + \delta\varphi_{3,\alpha}^{(\xi)} \right) \right] d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \left[ m_\alpha^{(\xi)} \delta\varphi_\alpha^{(\xi)} + \sigma^{(\xi)} \delta\varphi_3^{(\xi)} \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \left[ t_i^{(\xi)} \delta\varphi_i^{(\xi)} \right] d\Gamma \quad . \quad (3.37) \end{aligned}$$

Daher ergeben sich die Plattenverzerrungen:

$$\kappa_{\alpha\beta}^{(\xi)} := \varphi_{\alpha,\beta}^{(\xi)} \quad , \quad (3.38a)$$

$$\kappa_\alpha^{(\xi)} := \varphi_\alpha^{(\xi)} + \varphi_{3,\alpha}^{(\xi)} \quad . \quad (3.38b)$$

Durch Anwendung der Gl. (3.37) hat Lewiński gezeigt, dass das Randwertproblem richtig formuliert ist (LAX-MILGRAMScher Satz, Existenz und Eindeutigkeit der Lösung).

### 3.6 Spannungs-Verzerrungsbeziehungen

Wir werden nun die Spannungen  $\sigma_{\alpha\beta}^{(\xi)}$ ,  $\sigma_{\alpha}^{(\xi)}$  und  $\sigma^{(2)}$  als Funktionen der Verzerrungen (3.38) schreiben. Zuerst betrachten wir  $\sigma^{(2)}$ , Gl. (3.25d). Aus den Gleichungen (3.25a) folgt

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(\xi)} = (1 + \nu)D^{(\xi\eta)} [\varphi_{\gamma,\gamma}^{(\eta)} + 2E^{(\eta\gamma)}\sigma^{(\gamma)}] \quad . \quad (3.39)$$

Aus Gl. (3.25d) erhalten wir

$$\begin{aligned} [C^{(22)} - 2(1 + \nu)(D^{(11)}E^{(12)^2} + D^{(22)}E^{(22)^2})]\sigma^{(2)} &= (1 + \nu)D^{(\xi\eta)}E^{(\xi 2)}\varphi_{\gamma,\gamma}^{(\eta)} - \varphi_3^{(2)} + \\ &+ [2(1 + \nu)(D^{(11)}E^{(11)}E^{(12)} + D^{(22)}E^{(22)}E^{(21)}) - C^{(12)}]\sigma^{(1)} \quad . \quad (3.40) \end{aligned}$$

Mit den Koeffizienten aus (3.4) können wir schreiben<sup>6</sup>

$$C^{(22)} - 2(1 + \nu)(D^{(11)}E^{(12)^2} + D^{(22)}E^{(22)^2}) = \frac{\alpha(\nu, \nu_3)}{63(1 - \nu)}C^{(22)} \quad , \quad (3.41a)$$

$$2(1 + \nu)(D^{(11)}E^{(11)}E^{(12)} + D^{(22)}E^{(22)}E^{(21)}) - C^{(12)} = -11\frac{\beta(\nu, \nu_3)}{1 - \nu}C^{(22)} \quad , \quad (3.41b)$$

wobei

$$\alpha(\nu, \nu_3) = 63(1 - \nu) - 121\nu_3^2 \quad (3.42)$$

und  $\beta(\nu, \nu_3)$  über (2.9d) gegeben ist.

Für die Gl. (3.40) haben wir

$$\frac{\alpha(\nu, \nu_3)}{63(1 - \nu)}C^{(22)}\sigma^{(2)} = (1 + \nu)D^{(\xi\eta)}E^{(\xi 2)}\varphi_{\gamma,\gamma}^{(\eta)} - \varphi_3^{(2)} - 11\frac{\beta(\nu, \nu_3)}{1 - \nu}C^{(22)}\sigma^{(1)} \quad (3.43)$$

oder

$$\begin{aligned} \sigma^{(2)} &= \frac{2079}{2}\frac{\nu_3}{\alpha(\nu, \nu_3)}c\sqrt{E_3E}\varphi_{\gamma,\gamma}^{(1)} + \frac{4851}{2}\frac{\nu_3}{\alpha(\nu, \nu_3)}c\sqrt{E_3E}\varphi_{\gamma,\gamma}^{(2)} + \\ &\quad - \frac{218295}{4}\frac{(1 - \nu)}{\alpha(\nu, \nu_3)}\frac{E_3}{c}\varphi_3^{(2)} - 693\frac{\beta(\nu, \nu_3)}{\alpha(\nu, \nu_3)}\sigma^{(1)} \quad . \quad (3.44) \end{aligned}$$

Wir haben nun eine Gleichung für  $\sigma^{(2)}$  in Abhängigkeit der Verschiebungen und der Belastung. Für das Modell  $s$ -(1,0) müssen natürlich alle Variablen mit oberem Index 2 vernachlässigt werden. Außerdem müssen alle Glieder, die mit  $\alpha(\nu, \nu_3)$  und/oder  $\beta(\nu, \nu_3)$  multipliziert sind, gleichfalls weggelassen werden, siehe Fußnote 6. In diesem Sinn sind  $\alpha(\nu, \nu_3)$  und  $\beta(\nu, \nu_3)$  die **zweiten Kopplungsvariablen**. Für die erste Kopplungsvariable  $k_R$  siehe Gl. (3.21).

<sup>6</sup>Die Koeffizienten beziehen sich hier nur auf das Modell  $s$ -(3,2) und werden weiter als Koeffizienten mit oberem Index 2 gekennzeichnet.

Nun können wir die Gleichungen für  $\sigma_{\alpha\beta}^{(\xi)}$  weiter bearbeiten. Mit den folgenden Beziehungen (siehe Gl. (3.4))

$$E^{(11)} = 21E^{(12)} \quad , \quad E^{(22)} = \frac{4}{9}E^{(12)} \quad , \quad D^{(22)} = \frac{21}{4}D^{(11)} \quad (3.45)$$

können wir Gl. (3.44) schreiben als

$$E^{(12)}\sigma^{(2)} = \frac{297}{10} \frac{\nu_3^2}{\alpha(\nu, \nu_3)} \varphi_{\gamma,\gamma}^{(1)} + \frac{693}{10} \frac{\nu_3^2}{\alpha(\nu, \nu_3)} \varphi_{\gamma,\gamma}^{(2)} + \\ - \frac{6237}{4} \frac{(1-\nu)\nu_3}{\alpha(\nu, \nu_3)} \frac{k_E}{c^2} \varphi_3^{(2)} - 33 \frac{\beta(\nu, \nu_3)}{\alpha(\nu, \nu_3)} E^{(11)}\sigma^{(1)} \quad . \quad (3.46)$$

Substituiert man die obige Gleichung in (3.25a) und verwendet (3.45), so resultiert

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} = D^{(11)} \frac{1-\nu}{2} \left[ \varphi_{\alpha,\beta}^{(1)} + \varphi_{\beta,\alpha}^{(1)} + \frac{2\nu}{1-\nu} \left( 1 + \frac{297}{10} \frac{(1+\nu)k_\nu\nu_3}{\alpha(\nu, \nu_3)} \right) \varphi_{\gamma,\gamma}^{(1)} \delta_{\alpha\beta} \right] + \\ + \frac{693}{20} D^{(11)} \frac{(1+\nu)\nu_3}{\alpha(\nu, \nu_3)} \left[ 2\nu_3 \varphi_{\gamma,\gamma}^{(2)} - 45(1-\nu) \frac{k_E}{c^2} \varphi_3^{(2)} \right] \delta_{\alpha\beta} + \\ + D^{(11)} (1+\nu) E^{(11)} \left[ 1 - 33 \frac{\beta(\nu, \nu_3)}{\alpha(\nu, \nu_3)} \right] \sigma^{(1)} \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.47a)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(2)} = D^{(22)} \frac{1-\nu}{2} \left[ \varphi_{\alpha,\beta}^{(2)} + \varphi_{\beta,\alpha}^{(2)} + \frac{2\nu}{1-\nu} \left( 1 + \frac{154}{5} \frac{(1+\nu)k_\nu\nu_3}{\alpha(\nu, \nu_3)} \right) \varphi_{\gamma,\gamma}^{(2)} \delta_{\alpha\beta} \right] + \\ + \frac{33}{5} D^{(22)} \frac{(1+\nu)\nu_3}{\alpha(\nu, \nu_3)} \left[ 2\nu_3 \varphi_{\gamma,\gamma}^{(1)} - 105(1-\nu) \frac{k_E}{c^2} \varphi_3^{(2)} \right] \delta_{\alpha\beta} + \\ + D^{(22)} (1+\nu) E^{(21)} \left[ 1 - 308 \frac{\beta(\nu, \nu_3)}{\alpha(\nu, \nu_3)} \right] \sigma^{(1)} \delta_{\alpha\beta} \quad . \quad (3.47b)$$

Die Konstitutivgleichungen (3.47), (3.24) und (3.44) können wir dann schreiben

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} = D_M^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{(1)} + D_{MP}^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{(2)} + D_{MT}^{\alpha\beta} \varphi_3^{(2)} + D_{Mq}^{\alpha\beta} \sigma^{(1)} \quad , \quad (3.48a)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(2)} = D_{PM}^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{(1)} + D_P^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{(2)} + D_{PT}^{\alpha\beta} \varphi_3^{(2)} + D_{Pq}^{\alpha\beta} \sigma^{(1)} \quad , \quad (3.48b)$$

$$\sigma_\alpha^{(1)} = D_Q^{\alpha\beta} \kappa_\beta^{(1)} + D_{QS}^{\alpha\beta} \kappa_\beta^{(2)} \quad , \quad (3.48c)$$

$$\sigma_\alpha^{(2)} = D_{SQ}^{\alpha\beta} \kappa_\beta^{(1)} + D_S^{\alpha\beta} \kappa_\beta^{(2)} \quad , \quad (3.48d)$$

$$\sigma^{(2)} = D_{TM}^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}^{(1)} + D_{TP}^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}^{(1)} + D_T \varphi_3^{(2)} + D_{Tq} \sigma^{(1)} \quad , \quad (3.48e)$$



wobei

$$D_M^{\alpha\beta\gamma\theta} = D^{(11)} \frac{1-\nu}{2} \left[ \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\theta} + \delta_{\alpha\theta} \delta_{\beta\gamma} + \frac{2\nu}{1-\nu} \left( 1 + \frac{297(1+\nu)k_\nu\nu_3}{10\alpha(\nu,\nu_3)} \right) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} \right] , \quad (3.49a)$$

$$D_{MP}^{\alpha\beta\gamma\theta} = D^{(11)}(1+\nu) \frac{693}{10} \frac{\nu_3^2}{\alpha(\nu,\nu_3)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} , \quad (3.49b)$$

$$D_{MT}^{\alpha\beta} = -D^{(11)}(1+\nu) \frac{6237(1-\nu)\nu_3}{4\alpha(\nu,\nu_3)} \frac{k_E}{c^2} \delta_{\alpha\beta} , \quad (3.49c)$$

$$D_{Mq}^{\alpha\beta} = B^{(1)} \delta_{\alpha\beta} , \quad (3.49d)$$

$$D_{PM}^{\alpha\beta\gamma\theta} = D^{(22)}(1+\nu) \frac{66}{5} \frac{\nu_3^2}{\alpha(\nu,\nu_3)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} , \quad (3.49e)$$

$$D_P^{\alpha\beta\gamma\theta} = D^{(22)} \frac{1-\nu}{2} \left[ \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\theta} + \delta_{\alpha\theta} \delta_{\beta\gamma} + \frac{2\nu}{1-\nu} \left( 1 + \frac{154(1+\nu)k_\nu\nu_3}{5\alpha(\nu,\nu_3)} \right) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} \right] , \quad (3.49f)$$

$$D_{PT}^{\alpha\beta} = -D^{(22)}(1+\nu) 693 \frac{(1-\nu)\nu_3}{\alpha(\nu,\nu_3)} \frac{k_E}{c^2} \delta_{\alpha\beta} , \quad (3.49g)$$

$$D_{Pq}^{\alpha\beta} = B^{(2)} \delta_{\alpha\beta} , \quad (3.49h)$$

$$D_{TM}^{\alpha\beta} = -D_{MT}^{\alpha\beta} , \quad (3.49i)$$

$$D_{TP}^{\alpha\beta} = -D_{PT}^{\alpha\beta} , \quad (3.49j)$$

$$D_T = -\frac{218295(1-\nu)}{4\alpha(\nu,\nu_3)} \frac{E_3}{c} , \quad (3.49k)$$

$$D_{Tq} = -693 \frac{\beta(\nu,\nu_3)}{\alpha(\nu,\nu_3)} , \quad (3.49l)$$

$$D_Q^{\alpha\beta} = D^{(11)} \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \delta_{\alpha\beta} , \quad (3.49m)$$

$$D_{QS}^{\alpha\beta} = -\frac{9}{4} D^{(11)} \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \delta_{\alpha\beta} , \quad (3.49n)$$

$$D_{SQ}^{\alpha\beta} = -\frac{3}{7} D^{(22)} \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \delta_{\alpha\beta} , \quad (3.49o)$$

$$D_S^{\alpha\beta} = 9D^{(22)} \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \delta_{\alpha\beta} \quad (3.49p)$$

mit

$$B^{(1)} := D^{(11)}(1+\nu)E^{(11)} \left[ 1 - 33 \frac{\beta(\nu,\nu_3)}{\alpha(\nu,\nu_3)} \right] , \quad (3.50a)$$

$$B^{(2)} := D^{(22)}(1+\nu)E^{(21)} \left[ 1 - 308 \frac{\beta(\nu,\nu_3)}{\alpha(\nu,\nu_3)} \right] . \quad (3.50b)$$

Mit (3.45)<sub>3</sub> haben wir

$$D_{PM}^{\alpha\beta\gamma\theta} = D_{MP}^{\alpha\beta\gamma\theta} , \quad D_{SQ}^{\alpha\beta} = D_{QS}^{\alpha\beta} . \quad (3.51)$$

Die Gleichungen (3.48) können so vereinfacht werden, dass daraus direkt die Gleichungen des Modells  $s$ -(1,0) gewonnen werden. Aus den Gleichungen (3.48) ergeben

sich die Gleichungen des Modells  $s$ -(1,0)

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} = D_M^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{(1)} + D_{Mq}^{\alpha\beta} \sigma^{(1)} \quad , \quad (3.52a)$$

$$\sigma_{\alpha}^{(1)} = D_Q^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^{(1)} \quad (3.52b)$$

und nach Vernachlässigung der Glieder, in denen die Kopplungsvariable  $\alpha(\nu, \nu_3)$  auftaucht mit der entsprechenden Kopplungsvariable  $k_R := 1$  aus (3.21):

$$D_M^{\alpha\beta\gamma\theta} = D^{(11)} \frac{1-\nu}{2} \left[ \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\theta} + \delta_{\alpha\theta} \delta_{\beta\gamma} + \frac{2\nu}{1-\nu} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} \right] \quad , \quad (3.53a)$$

$$D_{Mq}^{\alpha\beta} = B^{(1)} \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.53b)$$

$$D_Q^{\alpha\beta} = \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 D^{(11)} \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.53c)$$

$$B^{(1)} := (1+\nu) D^{(11)} E^{(11)} \quad , \quad (3.53d)$$

$$\lambda^2 := \frac{5}{2c^2} k_G \quad . \quad (3.53e)$$

Mit den Gleichungen (3.4) und den Verzerrungen aus (3.38) erhalten wir die Konstitutivgleichungen des  $s$ -(1,0) Modells, siehe Westphal Jr., Andrä und Schnack [115]

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} = D \frac{1-\nu}{2} \left[ \varphi_{\alpha,\beta}^{(1)} + \varphi_{\beta,\alpha}^{(1)} + \frac{2\nu}{1-\nu} \varphi_{\gamma,\gamma}^{(1)} \delta_{\alpha\beta} \right] + \frac{k_G \nu_3}{(1-\nu) \lambda^2 k_E} \sigma^{(1)} \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.54a)$$

$$\sigma_{\alpha}^{(1)} = D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ \varphi_{\alpha}^{(1)} + \varphi_{3,\alpha}^{(1)} \right] \quad , \quad (3.54b)$$

wobei  $D \equiv D^{(11)}$ .

Für das Problem  $s$ -(3,2) haben wir unter Verwendung von (3.49i), (3.49j) und

(3.51)

$$D_M^{\alpha\beta\gamma\theta} = \frac{Ec^3}{3} \left[ \frac{1}{1+\nu} (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\theta} + \delta_{\alpha\theta}\delta_{\beta\gamma}) + 2\alpha_M(\nu, \nu_3)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\theta} \right] , \quad (3.55a)$$

$$D_{MP}^{\alpha\beta\gamma\theta} = \alpha_{MP}(\nu, \nu_3)Ec^3\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\theta} , \quad (3.55b)$$

$$D_{MT}^{\alpha\beta} = \alpha_{MT}(\nu, \nu_3)c\sqrt{E_3\bar{E}}\delta_{\alpha\beta} , \quad (3.55c)$$

$$D_{Mq}^{\alpha\beta} = \beta_{Mq}(\nu, \nu_3)\frac{c^2}{k_E}\delta_{\alpha\beta} , \quad (3.55d)$$

$$D_P^{\alpha\beta\gamma\theta} = \frac{7Ec^3}{4} \left[ \frac{1}{1+\nu} (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\theta} + \delta_{\alpha\theta}\delta_{\beta\gamma}) + 2\alpha_P(\nu, \nu_3)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\theta} \right] , \quad (3.55e)$$

$$D_{PT}^{\alpha\beta} = \alpha_{PT}(\nu, \nu_3)c\sqrt{E_3\bar{E}}\delta_{\alpha\beta} , \quad (3.55f)$$

$$D_{Pq}^{\alpha\beta} = \beta_{Pq}(\nu, \nu_3)\frac{c^2}{k_E}\delta_{\alpha\beta} , \quad (3.55g)$$

$$D_T = \alpha_T(\nu, \nu_3)\frac{E_3}{c} , \quad (3.55h)$$

$$D_{Tq} = \beta_{Tq}(\nu, \nu_3) , \quad (3.55i)$$

$$D_Q^{\alpha\beta} = \frac{28}{15}cG_3\delta_{\alpha\beta} , \quad (3.55j)$$

$$D_{QS}^{\alpha\beta} = \frac{-21}{5}cG_3\delta_{\alpha\beta} \quad (3.55k)$$

$$D_S^{\alpha\beta} = \frac{441}{5}cG_3\delta_{\alpha\beta} \quad (3.55l)$$

mit

$$\alpha_M(\nu, \nu_3) = \frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{630(1-\nu) + 297k_\nu\nu_3 - 913\nu_3^2}{10\alpha(\nu, \nu_3)} , \quad (3.56a)$$

$$\alpha_{MP}(\nu, \nu_3) = \frac{231}{5} \frac{\nu_3^2}{(1-\nu)\alpha(\nu, \nu_3)} , \quad (3.56b)$$

$$\alpha_{MT}(\nu, \nu_3) = \frac{-2079}{2} \frac{\nu_3}{\alpha(\nu, \nu_3)} , \quad (3.56c)$$

$$\beta_{Mq}(\nu, \nu_3) = \frac{2\nu_3}{1-\nu} \frac{6(1-\nu) - 11\nu_3^2}{\alpha(\nu, \nu_3)} , \quad (3.56d)$$

$$\alpha_P(\nu, \nu_3) = \frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{315(1-\nu) + 154k_\nu\nu_3 - 451\nu_3^2}{5\alpha(\nu, \nu_3)} , \quad (3.56e)$$

$$\alpha_{PT}(\nu, \nu_3) = \frac{-4851}{2} \frac{\nu_3}{\alpha(\nu, \nu_3)} , \quad (3.56f)$$

$$\beta_{Pq}(\nu, \nu_3) = -\frac{\nu_3}{2(1-\nu)} \frac{49(1-\nu) - 99\nu_3^2}{\alpha(\nu, \nu_3)} , \quad (3.56g)$$

$$\alpha_T(\nu, \nu_3) = -\frac{218295}{4} \frac{1-\nu}{\alpha(\nu, \nu_3)} , \quad (3.56h)$$

$$\beta_{Tq}(\nu, \nu_3) = -693 \frac{\beta(\nu, \nu_3)}{\alpha(\nu, \nu_3)} . \quad (3.56i)$$

Mit den Gleichungen (3.49i), (3.49j) und (3.51) erhalten wir schließlich

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} = D_M^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{(1)} + D_{MP}^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{(2)} + D_{MT}^{\alpha\beta} \varphi_3^{(2)} + D_{Mq}^{\alpha\beta} \sigma^{(1)} , \quad (3.57a)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(2)} = D_{MP}^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{(1)} + D_P^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{(2)} + D_{PT}^{\alpha\beta} \varphi_3^{(2)} + D_{Pq}^{\alpha\beta} \sigma^{(1)} , \quad (3.57b)$$

$$\sigma_\alpha^{(1)} = D_Q^{\alpha\beta} \kappa_\beta^{(1)} + D_{QS}^{\alpha\beta} \kappa_\beta^{(2)} , \quad (3.57c)$$

$$\sigma_\alpha^{(2)} = D_{QS}^{\alpha\beta} \kappa_\beta^{(1)} + D_S^{\alpha\beta} \kappa_\beta^{(2)} , \quad (3.57d)$$

$$\sigma^{(2)} = -D_{MT}^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}^{(1)} - D_{PT}^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}^{(2)} + D_T \varphi_3^{(2)} + D_{Tq} \sigma^{(1)} . \quad (3.57e)$$

Hier können wir schon einige Symmetrien sehen, die im nächsten Abschnitt näher untersucht werden.

### 3.7 Die LAMÉ-NAVIERschen Gleichungen

Wir setzen die Gleichungen (3.57) in die Gleichgewichtsgleichungen (3.26) ein. Es ergibt sich ein Gleichungssystem für die Plattenverschiebungen  $\varphi_i^{(\alpha)}$ , was den LAMÉ-NAVIERschen Gleichungen des Plattenmodells  $s$ -(3,2) entspricht. Die notwendigen Ableitungen der Gleichungen (3.57) sind einfach zu berechnen und ergeben sich zu

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(1)} = D_M^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta,\beta} + D_{MP}^{\alpha\beta\gamma\theta} \rho_{\gamma\theta,\beta} + D_{MT}^{\alpha\beta} \psi_{3,\beta} + D_{Mq}^{\alpha\beta} q_{3,\beta} , \quad (3.58a)$$

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(2)} = D_{MP}^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta,\beta} + D_P^{\alpha\beta\gamma\theta} \rho_{\gamma\theta,\beta} + D_{PT}^{\alpha\beta} \psi_{3,\beta} + D_{Pq}^{\alpha\beta} q_{3,\beta} , \quad (3.58b)$$

$$\sigma_{\alpha,\alpha}^{(1)} = D_Q^{\alpha\beta} \kappa_{\beta 3,\alpha} + D_{QS}^{\alpha\beta} \rho_{\beta 3,\alpha} , \quad (3.58c)$$

$$\sigma_{\alpha,\alpha}^{(2)} = D_{QS}^{\alpha\beta} \kappa_{\beta 3,\alpha} + D_S^{\alpha\beta} \rho_{\beta 3,\alpha} . \quad (3.58d)$$

Setzen wir nun (3.58) in die Gleichungen (3.26) ein, so ergibt sich

$$D \frac{1-\nu}{2} \left\{ \varphi_{\alpha,\beta\beta}^{(1)} - \lambda^2 \varphi_\alpha^{(1)} + \frac{1+\nu}{1-\nu} [1+\gamma] \varphi_{\beta,\alpha\beta}^{(1)} - \lambda^2 \varphi_{3,\alpha}^{(1)} + \frac{9}{4} \lambda^2 \varphi_\alpha^{(2)} + \right. \\ \left. + \frac{7(1+\nu)}{3(1-\nu)} \gamma \varphi_{\beta,\alpha\beta}^{(2)} + \frac{9}{4} [\lambda^2 - 9\eta] \varphi_{3,\alpha}^{(2)} \right\} = -B^{(1)} \sigma_{,\alpha}^{(1)} , \quad (3.59a)$$

$$D \frac{1-\nu}{2} \left\{ \lambda^2 \varphi_{\alpha,\alpha}^{(1)} + \lambda^2 \varphi_{3,\alpha\alpha}^{(1)} - \frac{9}{4} \lambda^2 \varphi_{\alpha,\alpha}^{(2)} - \frac{9}{4} \lambda^2 \varphi_{3,\alpha\alpha}^{(2)} \right\} = -F^{(1)} \sigma^{(1)} , \quad (3.59b)$$

$$D \frac{1-\nu}{2} \left\{ \frac{9}{4} \lambda^2 \varphi_\alpha^{(1)} + \frac{7(1+\nu)}{3(1-\nu)} \gamma \varphi_{\beta,\alpha\beta}^{(1)} + \frac{9}{4} \lambda^2 \varphi_{3,\alpha}^{(1)} + \frac{21}{4} \varphi_{\alpha,\beta\beta}^{(2)} - 9 \frac{21}{4} \lambda^2 \varphi_\alpha^{(2)} + \right. \\ \left. + \frac{21(1+\nu)}{4(1-\nu)} \left[ 1 + \frac{28}{27} \gamma \right] \varphi_{\beta,\alpha\beta}^{(2)} - 9 \frac{21}{4} [\lambda^2 + \eta] \varphi_{3,\alpha}^{(2)} \right\} = -B^{(2)} \sigma_{,\alpha}^{(1)} , \quad (3.59c)$$

$$D \frac{1-\nu}{2} \left\{ -\frac{9}{4} [\lambda^2 - 9\eta] \varphi_{\alpha,\alpha}^{(1)} - \frac{9}{4} \lambda^2 \varphi_{3,\alpha\alpha}^{(1)} + 9 \frac{21}{4} [\lambda^2 + \eta] \varphi_{\alpha,\alpha}^{(2)} + 9 \frac{21}{4} \lambda^2 \varphi_{3,\alpha\alpha}^{(2)} - 9 \frac{21}{4} \zeta \varphi_3^{(2)} \right\} = -F^{(2)} \sigma^{(1)} \quad , \quad (3.59d)$$

wobei<sup>7</sup>

$$\gamma \equiv \gamma(\nu, \nu_3) := \frac{297}{5} \frac{\nu_3^2}{\alpha(\nu, \nu_3)} \quad , \quad (3.60a)$$

$$\eta \equiv \eta(\nu, \nu_3, k_E, c) := \frac{55(1+\nu)\nu_3 k_E}{\alpha(\nu, \nu_3) k_G} \lambda^2 \quad , \quad (3.60b)$$

$$\zeta \equiv \zeta(\nu, \nu_3, k_E, c) := \frac{12375(1-\nu^2) k_E}{28 \alpha(\nu, \nu_3) k_G^2} \lambda^4 \quad , \quad (3.60c)$$

$$F^{(1)} := 1 \quad , \quad (3.60d)$$

$$F^{(2)} := -693 \frac{\beta(\nu, \nu_3)}{\alpha(\nu, \nu_3)} \quad , \quad (3.60e)$$

$$D := D^{(11)} \quad . \quad (3.60f)$$

Die LAMÉ-NAVIERschen Gleichungen wurden hierarchisch abgeleitet; sie gelten folglich für beide Modelle  $s$ -(1,0) und  $s$ -(3,2). Um die Gleichungen des Modells  $s$ -(1,0) zu gewinnen, müssen alle hierarchischen Koeffizienten der Gleichungen (3.4) mit mindestens einem oberen Index 2 gleich Null gesetzt werden. (Es bleiben nur die Koeffizienten  $D^{(11)}$ ,  $G^{(11)}$ ,  $E^{(11)}$  und  $C^{(11)}$  übrig.) Zusätzlich müssen alle Glieder, die mit  $\alpha(\nu, \nu_3)$  multipliziert sind, die zweite Kopplungsvariable, vernachlässigt werden. (Das bedeutet, dass auch  $\gamma(\nu, \nu_3)$ ,  $\eta(\nu, \nu_3, k_E, c)$  und  $\zeta(\nu, \nu_3, k_E, c)$  verschwinden müssen.) Schließlich ist die erste Kopplungsvariable  $k_R$  aus (3.21) zu berücksichtigen.

Das Gleichungssystem (3.59) wird folgendermaßen notiert

$$L_{IJ} u_J = -F_I \sigma^{(1)} \quad (3.61)$$

mit

$$\{\mathbf{u}\}_6 := \left\{ \varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, -\varphi_3^{(1)}, \varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, -\varphi_3^{(2)} \right\}^T \quad , \quad (3.62a)$$

$$\{\mathbf{F}\}_6 := \left\{ B^{(1)} \partial_1, B^{(1)} \partial_2, F^{(1)}, B^{(2)} \partial_1, B^{(2)} \partial_2, F^{(2)} \right\}^T \quad , \quad (3.62b)$$

$$[\mathbf{L}]_{6 \times 6} := \begin{bmatrix} [\mathbf{L}_A]_{3 \times 3} & [\mathbf{L}_{AB}]_{3 \times 3} \\ & [\mathbf{L}_B]_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{Sym} \quad . \quad (3.62c)$$

<sup>7</sup>Es ist anzumerken, dass die folgenden griechischen Konstanten die Kopplungsvariable  $\alpha$  enthalten, und sind demzufolge für das Problem  $s$ -(1,0) zu vernachlässigen.

Hier wurden die Bezeichnungen  $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$  und  $\partial_{\alpha\beta}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$  verwendet. Die Komponenten von  $\{\mathbf{u}\}_6$  sind die Verschiebungen bezüglich des REISSNER-PONIATOVSKII-schen Modells, die wir durch die Einführung des Spannungsfeldes im HELLINGER-REISSNER-schen Prinzip mit den Gleichungen (3.6) definiert haben. Mit dem Vektor (3.62a) ist  $L_{IJ}$  nun symmetrisch.

Die  $3 \times 3$  Untermatrizen in (3.62c) sind:

$$[\mathbf{L}_A]_{3 \times 3} := D \frac{1-\nu}{2} \begin{bmatrix} \Delta - \lambda^2 + \nu_A \partial_{11}^2 & \nu_A \partial_{12}^2 & \lambda^2 \partial_1 \\ & \Delta - \lambda^2 + \nu_A \partial_{22}^2 & \lambda^2 \partial_2 \\ & & -\lambda^2 \Delta \end{bmatrix}_{Sym}, \quad (3.63a)$$

$$[\mathbf{L}_{AB}]_{3 \times 3} := \frac{9D}{4} \frac{1-\nu}{2} \begin{bmatrix} \lambda^2 + \nu_{AB} \partial_{11}^2 & \nu_{AB} \partial_{12}^2 & (9\eta - \lambda^2) \partial_1 \\ \nu_{AB} \partial_{12}^2 & \lambda^2 + \nu_{AB} \partial_{22}^2 & (9\eta - \lambda^2) \partial_2 \\ -\lambda^2 \partial_1 & -\lambda^2 \partial_2 & \lambda^2 \Delta \end{bmatrix}, \quad (3.63b)$$

$$[\mathbf{L}_B]_{3 \times 3} := \frac{21D}{4} \frac{1-\nu}{2} \begin{bmatrix} \Delta - 9\lambda^2 + \nu_B \partial_{11}^2 & \nu_B \partial_{12}^2 & 9(\lambda^2 + \eta) \partial_1 \\ & \Delta - 9\lambda^2 + \nu_B \partial_{22}^2 & 9(\lambda^2 + \eta) \partial_2 \\ & & 9(\zeta - \lambda^2 \Delta) \end{bmatrix}_{Sym}, \quad (3.63c)$$

wobei  $\Delta \equiv \partial_{\alpha\alpha}^2$  der zweidimensionale LAPLACEsche Operator ist. Die übrigen Variablen sind

$$\nu_A := [1 + \gamma] \nu_\nu, \quad \nu_{AB} := \frac{28}{27} \gamma \nu_\nu, \quad \nu_B := \left[1 + \frac{28}{27} \gamma\right] \nu_\nu, \quad \nu_\nu := \frac{1 + \nu}{1 - \nu}. \quad (3.64)$$

Die Gleichungen des  $s$ -(1,0) Modells lassen sich wieder direkt aus den oben gezeigten Gleichungen einfach gewinnen. Durch Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung - wie schon vorher erklärt - erhalten wir das LAMÉ-NAVIERsche System entsprechend dem Modell  $s$ -(1,0) (siehe Westphal Jr., Schnack und de Barcellos [117]):

$$L_{ij} u_j = -F_i \sigma^{(1)} \quad (3.65)$$

mit

$$\{\mathbf{u}\}_3 := \left\{ \varphi_1^{(1)} \quad \varphi_2^{(1)} \quad -\varphi_3^{(1)} \right\}^T, \quad (3.66a)$$

$$\{\mathbf{F}\}_3 := \left\{ B^{(1)}\partial_1 \quad B^{(1)}\partial_2 \quad F^{(1)} \right\}^T, \quad (3.66b)$$

$$[\mathbf{L}]_{3 \times 3} := D \frac{1-\nu}{2} \begin{bmatrix} \Delta - \lambda^2 + \nu_\nu \partial_{11}^2 & \nu_\nu \partial_{12}^2 & \lambda^2 \partial_1 \\ & \Delta - \lambda^2 + \nu_\nu \partial_{22}^2 & \lambda^2 \partial_2 \\ & & -\lambda^2 \Delta \end{bmatrix}_{Sym}. \quad (3.66c)$$





# Kapitel 4

## Hierarchische Herleitung der Integralgleichungen

### 4.1 Einleitung

Die Integralgleichungen der Elastizitätstheorie, und hier besonders für Plattenbiegungsprobleme, können z.B. durch den BETTischen Reziprozitätssatz oder mittels der Methode des gewichteten Residuen abgeleitet werden (Brebbia, Telles und Wrobel [10], Gaul und Fiedler [28], Hong und Chen [35]). Während im vorigen Kapitel die hierarchischen Differentialgleichungen hergeleitet wurden, werden wir nun die hierarchischen Integralgleichungen herleiten, um so das vorgelegte Problem mit der Randelementmethode lösen zu können.

### 4.2 Hierarchische Integralgleichungen für die Verschiebungen

Nach der Methode des gewichteten Residuen müssen die Fehler der (*approximierten*) Lösung des Differentialgleichungssystems minimiert werden. Betrachtet werden die Gleichgewichtsgleichungen (3.26) und die Randbedingungen (3.27) und (3.28),

$$\varepsilon^\alpha = \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(1)} - \sigma_\alpha^{(1)} \neq 0 \quad \text{in } \Omega \quad , \quad (4.1a)$$

$$\varepsilon^3 = \sigma_{\alpha,\alpha}^{(1)} + \sigma^{(1)} \neq 0 \quad \text{in } \Omega \quad , \quad (4.1b)$$

$$\varepsilon^{3+\alpha} = \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(2)} - \sigma_\alpha^{(2)} \neq 0 \quad \text{in } \Omega \quad , \quad (4.1c)$$

$$\varepsilon^6 = \sigma_{\alpha,\alpha}^{(2)} + \sigma^{(2)} \neq 0 \quad \text{in } \Omega \quad , \quad (4.1d)$$

$$\varepsilon_u^I = u_I - \bar{u}_I \neq 0 \quad \text{auf } \Gamma_u \quad , \quad (4.1e)$$

$$\varepsilon_t^I = t_I - \bar{t}_I \neq 0 \quad \text{auf } \Gamma_t \quad , \quad (4.1f)$$

mit  $u_I$  und  $t_I$  aus den Gleichungen (3.30).

Die Methode des gewichteten Residuen sagt aus, dass

$$\int_{\Omega} \varepsilon^I y^I \, d\Omega = \int_{\Gamma_t} \varepsilon_t^I y^I \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \varepsilon_u^I z^I \, d\Gamma \quad . \quad (4.2)$$

Zur Bestimmung der Integralgleichungen werden die Gewichtsfunktionen

$$y^I = u_I^* \quad , \quad (4.3a)$$

$$z^I = t_I^* \quad (4.3b)$$

definiert, wobei  $u_I^*$  bzw.  $t_I^*$  bekannte Verschiebungen bzw. Spannungsvektoren des Hilfsproblems sind. Das einfachste Hilfsproblem ist das mit nur einer konzentrierten Einheitsbelastung in jeder Koordinatenrichtung. Die entsprechende Lösung heißt Fundamentallösung.

Damit ergibt sich aus Gl. (4.2)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ (\sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(1)} - \sigma_{\alpha}^{(1)}) u_{\alpha}^* + (\sigma_{\alpha,\alpha}^{(1)} + \sigma^{(1)}) u_3^* + (\sigma_{\alpha,\alpha}^{(2)} - \sigma_{\alpha}^{(2)}) u_{3+\alpha}^* + (\sigma_{\alpha,\alpha}^{(2)} + \sigma^{(2)}) u_6^* \right] d\Omega = \\ = \int_{\Gamma_t} (t_I - \bar{t}_I) u_I^* \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_I - \bar{u}_I) t_I^* \, d\Gamma \quad . \quad (4.4) \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert, mit Berücksichtigung der Gleichungen (3.10),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ (\sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(1)} - \sigma_{\alpha}^{(1)}) u_{\alpha}^* + (\sigma_{\alpha,\alpha}^{(1)} + \sigma^{(1)}) u_3^* + (\sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(2)} - \sigma_{\alpha}^{(2)}) u_{3+\alpha}^* + (\sigma_{\alpha,\alpha}^{(2)} + \sigma^{(2)}) u_6^* \right] d\Omega = \\ = - \int_{\Omega} \left[ \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} u_{\alpha,\beta}^* + \sigma_{\alpha}^{(1)} (u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*) + \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} u_{3+\alpha,\beta}^* + \sigma_{\alpha}^{(2)} (u_{3+\alpha}^* + u_{6,\alpha}^*) - \sigma^{(2)} u_6^* \right] d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \sigma^{(1)} u_3^* \, d\Omega + \int_{\Gamma} t_I u_I^* \, d\Gamma \quad . \quad (4.5) \end{aligned}$$

Damit wird aus Gl. (4.4)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} u_{\alpha,\beta}^* + \sigma_{\alpha}^{(1)} (u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*) + \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} u_{3+\alpha,\beta}^* + \sigma_{\alpha}^{(2)} (u_{3+\alpha}^* + u_{6,\alpha}^*) - \sigma^{(2)} u_6^* \right] d\Omega = \\ = \int_{\Gamma_u} t_I u_I^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \bar{t}_I u_I^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (u_I - \bar{u}_I) t_I^* \, d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma^{(1)} u_3^* \, d\Omega \quad (4.6) \end{aligned}$$

gewonnen.

Die Konstitutivgleichungen für das eigentliche Problem entnehmen wir den Gleichungen (3.57), von denen die entsprechenden Gleichungen für die Fundamentallösung

$$\sigma_{\alpha\beta}^{*(1)} = D_M^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{*(1)} + D_{MP}^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{*(2)} + D_{MT}^{\alpha\beta} \varphi_3^{*(2)} , \quad (4.7a)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{*(2)} = D_{MP}^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{*(1)} + D_P^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{*(2)} + D_{PT}^{\alpha\beta} \varphi_3^{*(2)} , \quad (4.7b)$$

$$\sigma_{\alpha}^{*(1)} = D_Q^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^{*(1)} + D_{QS}^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^{*(2)} , \quad (4.7c)$$

$$\sigma_{\alpha}^{*(2)} = D_{QS}^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^{*(1)} + D_S^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^{*(2)} , \quad (4.7d)$$

$$\sigma^{*(2)} = -D_{MT}^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}^{*(1)} - D_{PT}^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}^{*(2)} + D_T \varphi_3^{*(2)} \quad (4.7e)$$

sind, da die Belastung  $\sigma^{(1)}$  für die Fundamentallösung verschwindet (siehe Gleichungen (2.42)).

Den Integrand auf der linken Seite der Gleichung (4.6) können wir dadurch umformen, dass wir unter Berücksichtigung der in den Gleichungen (3.38) gegebenen Verzerrungen die Gleichungen (3.57) einsetzen:

$$\begin{aligned} & \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \kappa_{\alpha\beta}^{*(1)} + \sigma_{\alpha}^{(1)} \kappa_{\alpha}^{*(1)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} \kappa_{\alpha\beta}^{*(2)} + \sigma_{\alpha}^{(2)} \kappa_{\alpha}^{*(2)} - \sigma^{(2)} u_6^* = \\ & = [D_M^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{(1)} + D_{MP}^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{(2)} + D_{MT}^{\alpha\beta} u_6 + D_{Mq}^{\alpha\beta} \sigma^{(1)}] \kappa_{\alpha\beta}^{*(1)} + [D_Q^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^{(1)} + D_{QS}^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^{(2)}] \kappa_{\alpha}^{*(1)} + \\ & + [D_{MP}^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{(1)} + D_P^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{(2)} + D_{PT}^{\alpha\beta} u_6 + D_{Pq}^{\alpha\beta} \sigma^{(1)}] \kappa_{\alpha\beta}^{*(2)} + [D_{QS}^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^{(1)} + D_S^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^{(2)}] \kappa_{\alpha}^{*(2)} + \\ & - [-D_{MT}^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}^{(1)} - D_{PT}^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}^{(2)} + D_T u_6 + D_{Tq} \sigma^{(1)}] u_6^* . \quad (4.8) \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (3.49) ergeben sich folgende Symmetrien

$$D_M^{\alpha\beta\gamma\theta} = D_M^{\gamma\theta\alpha\beta} , \quad D_{MP}^{\alpha\beta\gamma\theta} = D_{MP}^{\gamma\theta\alpha\beta} , \quad D_P^{\alpha\beta\gamma\theta} = D_P^{\gamma\theta\alpha\beta} , \quad (4.9a)$$

$$D_Q^{\alpha\beta} = D_Q^{\beta\alpha} , \quad D_{QS}^{\alpha\beta} = D_{QS}^{\beta\alpha} , \quad D_S^{\alpha\beta} = D_S^{\beta\alpha} . \quad (4.9b)$$

Durch Vertauschung einiger Indizes erhalten wir anstelle der Gl. (4.8) die Beziehung

$$\begin{aligned} & \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \kappa_{\alpha\beta}^{*(1)} + \sigma_{\alpha}^{(1)} \kappa_{\alpha}^{*(1)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} \kappa_{\alpha\beta}^{*(2)} + \sigma_{\alpha}^{(2)} \kappa_{\alpha}^{*(2)} - \sigma^{(2)} u_6^* = \\ & = [D_M^{\gamma\theta\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}^{(1)} + D_{MP}^{\gamma\theta\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}^{(2)} + D_{MT}^{\gamma\theta} u_6 + D_{Mq}^{\gamma\theta} \sigma^{(1)}] \kappa_{\gamma\theta}^{*(1)} + [D_Q^{\beta\alpha} \kappa_{\alpha}^{(1)} + D_{QS}^{\beta\alpha} \kappa_{\alpha}^{(2)}] \kappa_{\beta}^{*(1)} + \\ & + [D_{MP}^{\gamma\theta\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}^{(1)} + D_P^{\gamma\theta\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}^{(2)} + D_{PT}^{\gamma\theta} u_6 + D_{Pq}^{\gamma\theta} \sigma^{(1)}] \kappa_{\gamma\theta}^{*(2)} + [D_{QS}^{\beta\alpha} \kappa_{\alpha}^{(1)} + D_S^{\beta\alpha} \kappa_{\alpha}^{(2)}] \kappa_{\beta}^{*(2)} + \\ & - [-D_{MT}^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}^{(1)} - D_{PT}^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}^{(2)} + D_T u_6 + D_{Tq} \sigma^{(1)}] u_6^* . \quad (4.10) \end{aligned}$$

Mit den Symmetrien (4.9) resultiert

$$\begin{aligned} & \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \kappa_{\alpha\beta}^{*(1)} + \sigma_{\alpha}^{(1)} \kappa_{\alpha}^{*(1)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} \kappa_{\alpha\beta}^{*(2)} + \sigma_{\alpha}^{(2)} \kappa_{\alpha}^{*(2)} - \sigma^{(2)} u_6^* = \\ & = [D_M^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\alpha\beta}^{(1)} + D_{MP}^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\alpha\beta}^{(2)} + D_{MT}^{\gamma\theta} u_6 + D_{Mq}^{\gamma\theta} \sigma^{(1)}] \kappa_{\gamma\theta}^{*(1)} + [D_Q^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha}^{(1)} + D_{QS}^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha}^{(2)}] \kappa_{\beta}^{*(1)} + \\ & + [D_{MP}^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\alpha\beta}^{(1)} + D_P^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\alpha\beta}^{(2)} + D_{PT}^{\gamma\theta} u_6 + D_{Pq}^{\gamma\theta} \sigma^{(1)}] \kappa_{\gamma\theta}^{*(2)} + [D_{QS}^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha}^{(1)} + D_S^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha}^{(2)}] \kappa_{\beta}^{*(2)} + \\ & - [-D_{MT}^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}^{(1)} - D_{PT}^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}^{(2)} + D_T u_6 + D_{Tq} \sigma^{(1)}] u_6^* , \quad (4.11) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
& \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \kappa_{\alpha\beta}^{*(1)} + \sigma_{\alpha}^{(1)} \kappa_{\alpha}^{*(1)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} \kappa_{\alpha\beta}^{*(2)} + \sigma_{\alpha}^{(2)} \kappa_{\alpha}^{*(2)} - \sigma^{(2)} u_6^* = \\
& = [D_M^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{*(1)} + D_{MP}^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{*(2)} + D_{MT}^{\alpha\beta} u_6^*] \kappa_{\alpha\beta}^{(1)} + [D_Q^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^{*(1)} + D_{QS}^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^{*(2)}] \kappa_{\alpha}^{(1)} + \\
& + [D_{MP}^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{*(1)} + D_P^{\alpha\beta\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{*(2)} + D_{PT}^{\alpha\beta} u_6^*] \kappa_{\alpha\beta}^{(2)} + [D_{QS}^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^{*(1)} + D_S^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^{*(2)}] \kappa_{\alpha}^{(2)} + \\
& - [-D_{MT}^{\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{*(1)} - D_{PT}^{\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{*(2)} + D_T u_6^*] u_6 + [D_{Mq}^{\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{*(1)} + D_{Pq}^{\gamma\theta} \kappa_{\gamma\theta}^{*(2)} - D_{Tq} u_6^*] \sigma^{(1)} . \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (4.7) folgt

$$\begin{aligned}
& \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \kappa_{\alpha\beta}^{*(1)} + \sigma_{\alpha}^{(1)} \kappa_{\alpha}^{*(1)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} \kappa_{\alpha\beta}^{*(2)} + \sigma_{\alpha}^{(2)} \kappa_{\alpha}^{*(2)} - \sigma^{(2)} u_6^* = \\
& = \sigma_{\alpha\beta}^{*(1)} \kappa_{\alpha\beta}^{(1)} + \sigma_{\alpha}^{*(1)} \kappa_{\alpha}^{(1)} + \sigma_{\alpha\beta}^{*(2)} \kappa_{\alpha\beta}^{(2)} + \sigma_{\alpha}^{*(2)} \kappa_{\alpha}^{(2)} - \sigma^{*(2)} u_6 + \\
& + [D_{Mq}^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}^{*(1)} + D_{Pq}^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}^{*(2)} - D_{Tq} u_6^*] \sigma^{(1)} . \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Den obigen Ausdruck können wir über  $\Omega$  integrieren. Unter Verwendung der Gleichungen (3.38) resultiert

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} u_{\alpha,\beta}^{*(1)} + \sigma_{\alpha}^{(1)} (u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*) + \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} u_{3+\alpha,\beta}^* + \sigma_{\alpha}^{(2)} (u_{3+\alpha}^* + u_{6,\alpha}^*) - \sigma^{(2)} u_6^*] d\Omega = \\
& = \int_{\Omega} [\sigma_{\alpha\beta}^{*(1)} u_{\alpha,\beta} + \sigma_{\alpha}^{*(1)} (u_{\alpha} + u_{3,\alpha}) + \sigma_{\alpha\beta}^{*(2)} u_{3+\alpha,\beta} + \sigma_{\alpha}^{*(2)} (u_{3+\alpha} + u_{6,\alpha}) - \sigma^{*(2)} u_6] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} [D_{Mq}^{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* + D_{Pq}^{\alpha\beta} u_{3+\alpha,\beta}^* - D_{Tq} u_6^*] \sigma^{(1)} d\Omega . \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Nun setzen wir diese Gleichung in Gl. (4.6) ein

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [\sigma_{\alpha\beta}^{*(1)} u_{\alpha,\beta} + \sigma_{\alpha}^{*(1)} (u_{\alpha} + u_{3,\alpha}) + \sigma_{\alpha\beta}^{*(2)} u_{3+\alpha,\beta} + \sigma_{\alpha}^{*(2)} (u_{3+\alpha} + u_{6,\alpha}) - \sigma^{*(2)} u_6] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} [D_{Mq}^{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* + D_{Pq}^{\alpha\beta} u_{3+\alpha,\beta}^* - D_{Tq} u_6^*] \sigma^{(1)} d\Omega = \\
& = \int_{\Gamma} t_I u_I^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (u_I - \bar{u}_I) t_I^* d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma^{(1)} u_3^* d\Omega , \quad (4.15)
\end{aligned}$$

wobei die Integrale über die Teilränder  $\Gamma_u$  und  $\Gamma_t$  zu Integralen über den gesamten Rand  $\Gamma$  zusammengefasst wurden (Gründemann [32]):

$$\int_{\Gamma} t_I u_I^* d\Gamma = \int_{\Gamma_u} t_I u_I^* d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \bar{t}_I u_I^* d\Gamma . \quad (4.16)$$

Mittels einer weiteren partiellen Integration des ersten Integrals auf der linken Seite der Gl. (4.15) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} [\sigma_{\alpha\beta}^{*(1)} u_{\alpha,\beta} + \sigma_{\alpha}^{*(1)} (u_{\alpha} + u_{3,\alpha}) + \sigma_{\alpha\beta}^{*(2)} u_{3+\alpha,\beta} + \sigma_{\alpha}^{*(2)} (u_{3+\alpha} + u_{6,\alpha}) - \sigma^{*(2)} u_6] d\Omega = \\
 & = - \int_{\Omega} \left[ \left( \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{*(1)} - \sigma_{\alpha}^{*(1)} \right) u_{\alpha} + \sigma_{\alpha,\alpha}^{*(1)} u_3 + \left( \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{*(2)} - \sigma_{\alpha}^{*(2)} \right) u_{3+\alpha} + \left( \sigma_{\alpha,\alpha}^{*(2)} + \sigma^{*(2)} \right) u_6 \right] d\Omega + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \int_{\Gamma} u_I t_I^* d\Gamma \quad . \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (4.15) und (4.17) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} \left[ \left( \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{*(1)} - \sigma_{\alpha}^{*(1)} \right) u_{\alpha} + \sigma_{\alpha,\alpha}^{*(1)} u_3 + \left( \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{*(2)} - \sigma_{\alpha}^{*(2)} \right) u_{3+\alpha} + \left( \sigma_{\alpha,\alpha}^{*(2)} + \sigma^{*(2)} \right) u_6 \right] d\Omega + \\
 & \qquad + \int_{\Gamma} u_I t_I^* d\Gamma + \int_{\Omega} [D_{Mq}^{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* + D_{Pq}^{\alpha\beta} u_{3+\alpha,\beta}^* - D_{Tq} u_6^*] \sigma^{(1)} d\Omega = \\
 & \qquad \qquad \qquad = \int_{\Gamma} t_I u_I^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (u_I - \bar{u}_I) t_I^* d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma^{(1)} u_3^* d\Omega \quad . \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

Aus den Gleichgewichtsgleichungen (2.42) oder (3.35) folgt

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} m_I^* u_I d\Omega + \int_{\Gamma} u_I t_I^* d\Gamma = \int_{\Gamma} t_I u_I^* d\Gamma + \\
 & \qquad + \int_{\Omega} \left[ -D_{Mq}^{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* + u_3^* - D_{Pq}^{\alpha\beta} u_{3+\alpha,\beta}^* + D_{Tq} u_6^* \right] \sigma^{(1)} d\Omega \quad , \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

wobei

$$\int_{\Gamma} u_I t_I^* d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \bar{u}_I t_I^* d\Gamma + \int_{\Gamma_t} u_I t_I^* d\Gamma \quad . \quad (4.20)$$

Dabei sind  $m_I^*$  die Einzelbelastungen, die auf den Kollokationspunkt  $P \in \Omega^*$  wirken und die wir mit den Bezeichnungen (3.33) und (2.31) folgendermaßen schreiben können:

$$m_I^* \equiv m_I^*(Q) := \delta(P, Q) m_I^*(P) \quad , \quad (4.21)$$

mit

$$\int_{\Omega} \delta(P, Q) f(Q) d\Omega = f(P) \quad , \quad (4.22)$$

wobei  $f$  eine stetige Funktion ist.

Nun können wir schreiben (Eshelby [23], Brebbia, Telles und Wrobel [10])

$$u_J^* = u_J^*(Q) := U_{IJ}(P, Q)m_I^*(P) \quad , \quad (4.23a)$$

$$t_J^* = t_J^*(Q) := T_{IJ}(P, Q)m_I^*(P) \quad , \quad (4.23b)$$

wobei  $U_{IJ}(P, Q)$  und  $T_{IJ}(P, Q)$  Verschiebungen und Spannungen im Punkt  $Q$  in der Richtung  $J$  darstellen, wenn eine Einzelbelastung im Punkt  $P$  in Richtung  $I$  wirkt (siehe Gl. (3.32)).

Wir setzen die Gleichungen (4.21) und (4.23) in Gl. (4.19) ein und erhalten durch Betrachtung der Eigenschaft (4.22) ein System von sechs Integralgleichungen für einen Punkt  $P \in \Omega$ :

$$\begin{aligned} u_I(P) + \int_{\Gamma} T_{IJ}(P, q)u_J(q) \, d\Gamma &= \int_{\Gamma} U_{IJ}(P, q)t_J(q) \, d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} \left[ -D_{Mq}^{\alpha\beta}U_{I\alpha,\beta}(P, Q) + U_{I3}(P, Q) \right] \sigma^{(1)}(Q) \, d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \left[ -D_{Pq}^{\alpha\beta}U_{I3+\alpha,\beta}(P, Q) + D_{Tq}U_{I6}(P, Q) \right] \sigma^{(1)}(Q) \, d\Omega \quad , \quad (4.24) \end{aligned}$$

wobei  $P$  und  $Q$  Kollokations- bzw. Feldpunkte in  $\Omega$  sind, während  $p$  und  $q$  entsprechende Punkte auf  $\Gamma$  darstellen.

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.49d), (3.49h), (3.49l), (3.60d) und (3.60e), resultiert<sup>1</sup>

$$u_I(P) + \int_{\Gamma} T_{IJ}(P, q)u_J(q) \, d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{IJ}(P, q)t_J(q) \, d\Gamma + \int_{\Omega} U_I(P, Q)\sigma^{(1)}(Q) \, d\Omega \quad , \quad (4.25a)$$

mit

$$\begin{aligned} U_I(P, Q) &= -B^{(1)}U_{I\alpha,\alpha}(P, Q) + F^{(1)}U_{I3}(P, Q) + \\ &- B^{(2)}U_{I3+\alpha,\alpha}(P, Q) + F^{(2)}U_{I6}(P, Q) \quad . \quad (4.25b) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (4.25a) sind die SOMIGLIANAschen Identitäten für die Verschiebungen  $u_I$  in einem Punkt  $P \in \Omega$ . Dies sind die Integralgleichungen für das Problem  $s$ -(3,2). Bevor wir das obige Gleichungssystem weiter behandeln, zeigen wir nun, dass die entsprechenden Gleichungen des Modells  $s$ -(1,0) direkt aus diesem Gleichungssystem hergeleitet werden können.

---

<sup>1</sup>Die Koeffizienten des Gebietsintegrals sind dieselben Koeffizienten, die auf der rechten Seite der LAMÉ-NAVIERschen Gleichungen (3.61) erscheinen.

Für das Modell  $s$ -(1,0) bekommen wir aus den SOMIGLIANASchen Identitäten

$$u_i(P) + \int_{\Gamma} T_{ij}(P, q) u_j(q) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(P, q) t_j(q) d\Gamma + \int_{\Omega} [-B^{(1)} U_{i\alpha, \alpha}(P, Q) + F^{(1)} U_{i3}(P, Q)] \sigma^{(1)}(Q) d\Omega \quad , \quad (4.26)$$

da in diesem Fall die Indizes von 1 bis 3 variieren und die Koeffizienten  $B^{(2)}$  und  $F^{(2)}$  Null zu setzen sind. Aus den Gleichungen (3.50a), (3.60d), (3.4) und (3.23) bekommen wir durch Vernachlässigung des Gliedes, das  $\alpha$  enthält, für das Modell  $s$ -(1,0) (siehe Westphal Jr., Schnack und de Barcellos [117])

$$u_i(P) + \int_{\Gamma} T_{ij}(P, q) u_j(q) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(P, q) t_j(q) d\Gamma + \int_{\Omega} \left[ U_{i3}(P, Q) - \frac{\nu_3 k_G}{(1 - \nu) \lambda^2 k_E} U_{i\alpha, \alpha}(P, Q) \right] \sigma^{(1)}(Q) d\Omega \quad . \quad (4.27)$$

In den Gleichungen (4.25a) tauchen die Variablen  $u_I(Q)$  und  $t_I(Q)$  auf  $\Gamma$  und  $u_I(P)$  in  $\Omega$  auf. Deshalb müssen zuerst die noch unbekannt Randwerte berechnet werden. Dazu wird in (4.25a) der Grenzprozeß  $P \in \Omega$  gegen den Rand  $p \in \Gamma$  vollzogen (siehe Gründemann [32], Brebbia, Telles und Wrobel [10])

$$u_I(p) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{IJ}(p, q) u_J(q) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} U_{IJ}(p, q) t_J(q) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega + \Omega_\varepsilon} U_I(p, Q) \sigma^{(1)}(Q) d\Omega \quad , \quad (4.28)$$

wobei  $S(p, \varepsilon)$  eine Kugel der Fläche  $\Omega_S(p)$  ist,  $\Omega_\varepsilon(p) := \Omega_S(p) \setminus \Omega$  mit dem Rand  $\Gamma_S(p)$ ,  $\Gamma_\varepsilon(p) := \Gamma_S(p) \cap \Gamma$  und  $\bar{\Gamma}_\varepsilon(p) = \Gamma_S(p) \setminus \Gamma_\varepsilon(p)$ . Daraus ergibt sich der Übergang  $\Omega \rightarrow \Omega + \Omega_\varepsilon(p)$  und  $\Gamma \rightarrow \Gamma - \Gamma_\varepsilon(p) + \bar{\Gamma}_\varepsilon(p)$ .

Das linke Integral können wir folgendermaßen ausdrücken:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{IJ}(p, q) u_J(q) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} T_{IJ}(p, q) u_J(q) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{IJ}(p, q) [u_J(q) - u_J(p)] d\Gamma + u_J(p) \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{IJ}(p, q) d\Gamma \right] \quad . \quad (4.29)$$

Da die Verschiebungen stetig sind, verschwindet das obige zweite Integral auf der

rechten Seite. Für die linke Seite der Gl. (4.28) haben wir

$$\begin{aligned} u_I(p) + u_J(p) \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{IJ}(p, q) d\Gamma \right] + \int_{\Gamma} T_{IJ}(p, q) u_J(q) d\Gamma = \\ = u_J(p) \left[ \delta_{IJ} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{IJ}(p, q) d\Gamma \right] + \int_{\Gamma} T_{IJ}(p, q) u_J(q) d\Gamma \quad . \quad (4.30) \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist Cauchy-singulär. Wir definieren

$$c_{IJ}(p) = \delta_{IJ} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{IJ}(p, q) d\Gamma \quad , \quad (4.31a)$$

$$c_{IJ}(P) = \delta_{IJ} \quad . \quad (4.31b)$$

Die SOMIGLIANASche Identitäten für einen beliebigen Punkt  $p$  sind:

$$c_{IJ}(p) u_J(p) + \int_{\Gamma} T_{IJ}(p, q) u_J(q) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{IJ}(p, q) t_J(q) d\Gamma + \int_{\Omega} U_I(p, Q) \sigma^{(1)}(Q) d\Omega \quad . \quad (4.32)$$

Mit diesem Gleichungssystem sind alle Plattenverschiebungen und Randspannungsvektoren bestimmt. Das System gilt auch für die Berechnung der Verschiebungen in inneren Punkten  $P \in \Omega$ , siehe Gl. (4.31b). Für das Modell  $s$ -(1,0) ergibt sich (siehe Gl. (4.27))

$$\begin{aligned} c_{ij}(p) u_i(p) + \int_{\Gamma} T_{ij}(p, q) u_j(q) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(p, q) t_j(q) d\Gamma + \\ + \int_{\Omega} \left[ U_{i3}(p, Q) - \frac{\nu_3 k_G}{(1 - \nu) \lambda^2 k_E} U_{i\alpha, \alpha}(p, Q) \right] \sigma^{(1)}(Q) d\Omega \quad . \quad (4.33) \end{aligned}$$

### 4.3 Integralgleichungen für die Spannungen

Um die Integralgleichungen für die Plattenspannungen zu gewinnen, setzen wir die SOMIGLIANASchen Identitäten in die Konstitutivgleichungen (3.47), (3.24) und (3.25d) ein. Es ist zu beachten, dass die Ableitungen im Gleichungssystem (4.32) alle auf den Punkt  $Q$  bezogen sind, und dass gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha(P)} (\cdot) = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha(Q)} (\cdot) \quad . \quad (4.34)$$



Im folgenden gilt, dass alle Ableitungen auf den Punkt  $Q$  bezogen sind. Die Ableitung der Gl. (4.32) für einen inneren Punkt  $P$  liefert

$$u_{I,\alpha}(P) = - \int_{\Gamma} U_{IJ,\alpha}(P, q) t_J(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} T_{IJ,\alpha}(P, q) u_J(q) d\Gamma + \\ - \int_{\Omega} U_{I,\alpha}(P, Q) \sigma^{(1)}(Q) d\Omega \quad . \quad (4.35)$$

Wir ersetzen nun die Gleichungen (4.25a) und (4.35) in den Konstitutivgleichungen und erhalten:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(P) = \int_{\Gamma} U_{\alpha\beta J}(P, q) t_J(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{\alpha\beta J}(P, q) u_J(q) d\Gamma + \\ + \int_{\Omega} S_{\alpha\beta}(P, Q) \sigma^{(1)}(Q) d\Omega + B^{(1)} \sigma^{(1)}(P) \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (4.36a)$$

$$\sigma_{\alpha}^{(1)}(P) = \int_{\Gamma} U_{\alpha 3 J}(P, q) t_J(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{\alpha 3 J}(P, q) u_J(q) d\Gamma + \\ + \int_{\Omega} S_{\alpha 3}(P, Q) \sigma^{(1)}(Q) d\Omega \quad , \quad (4.36b)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(P) = \int_{\Gamma} U_{\alpha 3 + \beta J}(P, q) t_J(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{\alpha 3 + \beta J}(P, q) u_J(q) d\Gamma + \\ + \int_{\Omega} S_{\alpha 3 + \beta}(P, Q) \sigma^{(1)}(Q) d\Omega + B^{(2)} \sigma^{(1)}(P) \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (4.36c)$$

$$\sigma_{\alpha}^{(2)}(P) = \int_{\Gamma} U_{\alpha 6 J}(P, q) t_J(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{\alpha 6 J}(P, q) u_J(q) d\Gamma + \\ + \int_{\Omega} S_{\alpha 6}(P, Q) \sigma^{(1)}(Q) d\Omega \quad , \quad (4.36d)$$

$$\sigma^{(2)}(P) = \int_{\Gamma} U_{36 J}(P, q) t_J(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{36 J}(P, q) u_J(q) d\Gamma + \\ + \int_{\Omega} S_{\alpha 6}(P, Q) \sigma^{(1)}(Q) d\Omega + G \sigma^{(1)}(P) \quad . \quad (4.36e)$$

Die verwendeten Tensoren sind:

$$U_{\alpha\beta J} = -D^{(11)} \frac{1-\nu}{2} \left[ U_{\alpha J, \beta} + U_{\beta J, \alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \left( 1 + \frac{297(1+\nu)k_\nu\nu_3}{10\alpha(\nu, \nu_3)} \right) U_{\gamma J, \gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \\ - \frac{693}{20} D^{(11)} \frac{(1+\nu)\nu_3}{\alpha(\nu, \nu_3)} \left[ 2\nu_3 U_{3+\gamma J, \gamma} + 45(1-\nu) \frac{k_E}{c^2} U_{6J} \right] \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (4.37a)$$

$$T_{\alpha\beta J} = -D^{(11)} \frac{1-\nu}{2} \left[ T_{\alpha J, \beta} + T_{\beta J, \alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \left( 1 + \frac{297(1+\nu)k_\nu\nu_3}{10\alpha(\nu, \nu_3)} \right) T_{\gamma J, \gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \\ - \frac{693}{20} D^{(11)} \frac{(1+\nu)\nu_3}{\alpha(\nu, \nu_3)} \left[ 2\nu_3 T_{3+\gamma J, \gamma} + 45(1-\nu) \frac{k_E}{c^2} T_{6J} \right] \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (4.37b)$$

$$S_{\alpha\beta} = -D^{(11)} \frac{1-\nu}{2} \left[ U_{\alpha, \beta} + U_{\beta, \alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \left( 1 + \frac{297(1+\nu)k_\nu\nu_3}{10\alpha(\nu, \nu_3)} \right) U_{\gamma, \gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \\ - \frac{693}{20} D^{(11)} \frac{(1+\nu)\nu_3}{\alpha(\nu, \nu_3)} \left[ 2\nu_3 U_{3+\gamma, \gamma} + 45(1-\nu) \frac{k_E}{c^2} U_6 \right] \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (4.37c)$$

$$U_{\alpha_3 J} = D^{(11)} \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ U_{\alpha J} - U_{3J, \alpha} - \frac{9}{4} (U_{3+\alpha J} - U_{6J, \alpha}) \right] \quad , \quad (4.37d)$$

$$T_{\alpha_3 J} = D^{(11)} \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ T_{\alpha J} - T_{3J, \alpha} - \frac{9}{4} (T_{3+\alpha J} - T_{6J, \alpha}) \right] \quad , \quad (4.37e)$$

$$S_{\alpha_3} = D^{(11)} \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ U_{\alpha} - U_{3, \alpha} - \frac{9}{4} (U_{3+\alpha} - U_{6, \alpha}) \right] \quad , \quad (4.37f)$$

$$U_{\alpha_3+\beta J} = -D^{(22)} \frac{1-\nu}{2} \left[ U_{3+\alpha J, \beta} + U_{3+\beta J, \alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \left( 1 + \frac{154(1+\nu)k_\nu\nu_3}{5\alpha(\nu, \nu_3)} \right) U_{3+\gamma J, \gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \\ - \frac{33}{5} D^{(22)} \frac{(1+\nu)\nu_3}{\alpha(\nu, \nu_3)} \left[ 2\nu_3 U_{\gamma J, \gamma} + 105(1-\nu) \frac{k_E}{c^2} U_{6J} \right] \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (4.37g)$$

$$T_{\alpha_3+\beta J} = -D^{(22)} \frac{1-\nu}{2} \left[ T_{3+\alpha J, \beta} + T_{3+\beta J, \alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \left( 1 + \frac{154(1+\nu)k_\nu\nu_3}{5\alpha(\nu, \nu_3)} \right) T_{3+\gamma J, \gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \\ - \frac{33}{5} D^{(22)} \frac{(1+\nu)\nu_3}{\alpha(\nu, \nu_3)} \left[ 2\nu_3 T_{\gamma J, \gamma} + 105(1-\nu) \frac{k_E}{c^2} T_{6J} \right] \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (4.37h)$$

$$S_{\alpha_3+\beta} = -D^{(22)} \frac{1-\nu}{2} \left[ U_{3+\alpha, \beta} + U_{3+\beta, \alpha} + \right. \\ \left. + \frac{2\nu}{1-\nu} \left( 1 + \frac{154(1+\nu)k_\nu\nu_3}{5\alpha(\nu, \nu_3)} \right) U_{3+\gamma, \gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \\ - \frac{33}{5} D^{(22)} \frac{(1+\nu)\nu_3}{\alpha(\nu, \nu_3)} \left[ 2\nu_3 U_{\gamma, \gamma} + 105(1-\nu) \frac{k_E}{c^2} U_6 \right] \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (4.37i)$$

$$U_{\alpha 6 J} = 9D^{(22)} \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ U_{3+\alpha J} - U_{6J,\alpha} - \frac{1}{21} (U_{\alpha J} - U_{3J,\alpha}) \right] , \quad (4.37j)$$

$$T_{\alpha 6 J} = 9D^{(22)} \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ T_{3+\alpha J} - T_{6J,\alpha} - \frac{1}{21} (T_{\alpha J} - T_{3J,\alpha}) \right] , \quad (4.37k)$$

$$S_{\alpha 6} = 9D^{(22)} \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ U_{3+\alpha} - U_{6,\alpha} - \frac{1}{21} (U_{\alpha} - U_{3,\alpha}) \right] , \quad (4.37l)$$

$$U_{36J} = \frac{1}{C^{(22)}} \left[ E^{(12)} U_{\alpha\alpha J} + E^{(22)} U_{\alpha 3+\alpha J} - U_{6J} \right] , \quad (4.37m)$$

$$T_{36J} = \frac{1}{C^{(22)}} \left[ E^{(12)} T_{\alpha\alpha J} + E^{(22)} T_{\alpha 3+\alpha J} - T_{6J} \right] , \quad (4.37n)$$

$$S_{36} = \frac{1}{C^{(22)}} \left[ E^{(12)} S_{\alpha\alpha} + E^{(22)} S_{\alpha 3+\alpha 3} - U_6 \right] , \quad (4.37o)$$

$$G = \frac{1}{C^{(22)}} \left[ 2E^{(12)} B^{(1)} + 2E^{(22)} B^{(2)} - C^{(12)} \right] . \quad (4.37p)$$

## 4.4 Der Fundamentaltensor $T_{IJ}$

Aus den Gleichungen (3.10) ergibt sich für den Spannungsvektor der Fundamentallösung

$$\begin{aligned} t_{\alpha}^*(Q) &= \sigma_{\alpha\beta}^{*(1)}(P, Q) n_{\beta}(P) , & t_3^*(Q) &= \sigma_{\alpha}^{*(1)}(P, Q) n_{\alpha}(P) , \\ t_{3+\alpha}^*(Q) &= \sigma_{\alpha\beta}^{*(2)}(P, Q) n_{\beta}(P) , & t_6^*(Q) &= \sigma_{\alpha}^{*(2)}(P, Q) n_{\alpha}(P) . \end{aligned} \quad (4.38)$$

Aus den Gleichungen (4.23b) folgt

$$\begin{aligned} t_{\alpha}^*(Q) &= T_{I\alpha}(P, Q) m_I^*(P) , & t_3^*(Q) &= T_{I3}(P, Q) m_I^*(P) , \\ t_{3+\alpha}^*(Q) &= T_{I3+\alpha}(P, Q) m_I^*(P) , & t_6^*(Q) &= T_{I6}(P, Q) m_I^*(P) . \end{aligned} \quad (4.39)$$

Aus den Gleichungen (4.38) und (4.39) bekommen wir (Westphal Jr. [114])

$$\begin{aligned} T_{I\alpha}(P, Q) m_I^*(P) &= \sigma_{\alpha\beta}^{*(1)}(P, Q) n_{\beta}(P) , \\ T_{I3}(P, Q) m_I^*(P) &= \sigma_{\alpha}^{*(1)}(P, Q) n_{\alpha}(P) , \\ T_{I3+\alpha}(P, Q) m_I^*(P) &= \sigma_{\alpha\beta}^{*(2)}(P, Q) n_{\beta}(P) , \\ T_{I6}(P, Q) m_I^*(P) &= \sigma_{\alpha}^{*(2)}(P, Q) n_{\alpha}(P) . \end{aligned} \quad (4.40)$$

Hieraus resultiert der Fundamentaltensor  $T_{IJ}$ :

$$\begin{aligned}
T_{I\alpha}(P, Q) &= \sigma_{\alpha\beta}^{*(1)I}(P, Q)n_{\beta}(P) \quad , \\
T_{I3}(P, Q) &= \sigma_{\alpha}^{*(1)I}(P, Q)n_{\alpha}(P) \quad , \\
T_{I3+\alpha}(P, Q) &= \sigma_{\alpha\beta}^{*(2)I}(P, Q)n_{\beta}(P) \quad , \\
T_{I6}(P, Q) &= \sigma_{\alpha}^{*(2)I}(P, Q)n_{\alpha}(P) \quad .
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Die Tensoren  $\sigma_{\alpha\beta}^{*(1)I}$ ,  $\sigma_{\alpha}^{*(1)I}$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}^{*(2)I}$  und  $\sigma_{\alpha}^{*(2)I}$  stellen verallgemeinerte Kräfte dar, die von den in den Richtungen  $I$  wirkenden Einzelbelastungen verursacht werden. Die Spannungen  $\sigma_{\alpha\beta}^{*(\xi)}$  und  $\sigma_{\alpha}^{*(\xi)}$  erhalten wir aus den Gleichungen (3.47) und (3.24):

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta}^{*(1)} &= D^{(11)} \frac{1-\nu}{2} \left[ u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} \left( 1 + \frac{297(1+\nu)k_{\nu}\nu_3}{10\alpha(\nu,\nu_3)} \right) u_{\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} \right] + \\
&\quad + \frac{693}{20} D^{(11)} \frac{(1+\nu)\nu_3}{\alpha(\nu,\nu_3)} \left[ 2\nu_3 u_{3+\gamma,\gamma}^* - 45(1-\nu) \frac{k_E}{c^2} u_6^* \right] \delta_{\alpha\beta} \quad , \tag{4.42a}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{\alpha}^{*(1)} = D^{(11)} \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^* - \frac{9}{4} (u_{3+\alpha}^* + u_{6,\alpha}^*) \right] \quad , \tag{4.42b}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta}^{*(2)} &= D^{(22)} \frac{1-\nu}{2} \left[ u_{3+\alpha,\beta}^* + u_{3+\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} \left( 1 + \frac{154(1+\nu)k_{\nu}\nu_3}{5\alpha(\nu,\nu_3)} \right) u_{3+\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} \right] + \\
&\quad + \frac{33}{5} D^{(22)} \frac{(1+\nu)\nu_3}{\alpha(\nu,\nu_3)} \left[ 2\nu_3 u_{\gamma,\gamma}^* - 105(1-\nu) \frac{k_E}{c^2} u_6^* \right] \delta_{\alpha\beta} \quad , \tag{4.42c}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{\alpha}^{*(2)} = 9D^{(22)} \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ u_{3+\alpha}^* + u_{6,\alpha}^* - \frac{1}{21} (u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*) \right] \quad . \tag{4.42d}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (4.23a) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta}^{*(1)I} &= D^{(11)} \frac{1-\nu}{2} \left[ U_{I\alpha,\beta} + U_{I\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \left( 1 + \frac{297(1+\nu)k_{\nu}\nu_3}{10\alpha(\nu,\nu_3)} \right) U_{I\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \\
&\quad + \frac{693}{20} D^{(11)} \frac{(1+\nu)\nu_3}{\alpha(\nu,\nu_3)} \left[ 2\nu_3 U_{I3+\gamma,\gamma} - 45(1-\nu) \frac{k_E}{c^2} U_{I6} \right] \delta_{\alpha\beta} \quad , \tag{4.43a}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{\alpha}^{*(1)I} = D^{(11)} \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ U_{I\alpha} + U_{I3,\alpha} - \frac{9}{4} (U_{I3+\alpha} + U_{I6,\alpha}) \right] \quad , \tag{4.43b}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta}^{*(2)I} &= D^{(22)} \frac{1-\nu}{2} \left[ U_{I3+\alpha,\beta} + U_{I3+\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \left( 1 + \frac{154(1+\nu)k_{\nu}\nu_3}{5\alpha(\nu,\nu_3)} \right) U_{I3+\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \\
&\quad + \frac{33}{5} D^{(22)} \frac{(1+\nu)\nu_3}{\alpha(\nu,\nu_3)} \left[ 2\nu_3 U_{I\gamma,\gamma} - 105(1-\nu) \frac{k_E}{c^2} U_{I6} \right] \delta_{\alpha\beta} \quad , \tag{4.43c}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{\alpha}^{*(2)I} = 9D^{(22)} \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ U_{I3+\alpha} + U_{I6,\alpha} - \frac{1}{21} (U_{I\alpha} + U_{I3,\alpha}) \right] \quad . \tag{4.43d}$$

Der Tensor  $T_{IJ}$  in den Gleichungen (4.41) lässt sich demzufolge aus Kombinationen verschiedener Ableitungen des Tensors  $U_{IJ}$  ausdrücken.

## 4.5 Integralgleichungen für das Modell $s$ -(1,0)

Die Integralgleichungen für das Modell  $s$ -(1,0) erhalten wir in hierarchischer Weise aus den bisherigen Gleichungen. Die Integralgleichungen für die Verschiebungen sind durch Gl. (4.33) gegeben. Die Spannungen erhalten wir aus den Gleichungen (4.36a) und (4.36b):

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(P) = & \int_{\Gamma} U_{\alpha\beta j}(P, q) t_j(q) \, d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{\alpha\beta j}(P, q) u_j(q) \, d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} \left[ U_{\alpha\beta 3}(P, Q) - \frac{\nu_3 k_G}{(1-\nu)\lambda^2 k_E} V_{\alpha\beta 3}(P, Q) \right] \sigma^{(1)}(Q) \, d\Omega + \\ & + \frac{\nu_3 k_G}{(1-\nu)\lambda^2 k_E} \sigma^{(1)}(P) \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (4.44a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^{(1)}(P) = & \int_{\Gamma} U_{\alpha 3 j}(P, q) t_j(q) \, d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{\alpha 3 j}(P, q) u_j(q) \, d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} \left[ U_{\alpha 3 3}(P, Q) - \frac{\nu_3 k_G}{(1-\nu)\lambda^2 k_E} V_{\alpha 3 3}(P, Q) \right] \sigma^{(1)}(Q) \, d\Omega \quad . \quad (4.44b) \end{aligned}$$

Die verwendeten Tensoren ergeben sich aus den Gleichungen (4.37):

$$U_{\alpha\beta j} = -D \frac{1-\nu}{2} \left[ U_{\alpha j, \beta} + U_{\beta j, \alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} U_{\gamma j, \gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \quad , \quad (4.45a)$$

$$T_{\alpha\beta j} = -D \frac{1-\nu}{2} \left[ T_{\alpha j, \beta} + T_{\beta j, \alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} T_{\gamma j, \gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \quad , \quad (4.45b)$$

$$V_{\alpha\beta 3} = -D \frac{1-\nu}{2} \left[ U_{\alpha\gamma, \gamma\beta} + U_{\beta\gamma, \gamma\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} U_{\theta\gamma, \gamma\theta} \delta_{\alpha\beta} \right] \quad , \quad (4.45c)$$

$$U_{\alpha 3 j} = D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 [U_{\alpha j} - U_{3j, \alpha}] \quad , \quad (4.45d)$$

$$T_{\alpha 3 j} = D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 [T_{\alpha j} - T_{3j, \alpha}] \quad , \quad (4.45e)$$

$$V_{\alpha 3 3} = \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 [U_{\alpha\gamma, \gamma} - U_{3\gamma, \gamma\alpha}] \quad (4.45f)$$

mit

$$V_{\alpha\beta 3} = U_{\alpha\beta\gamma, \gamma} \quad , \quad V_{\alpha 3 3} = U_{\alpha 3\gamma, \gamma} \quad . \quad (4.46)$$

Den Spannungstensor entnehmen wir den Gleichungen (4.41):

$$\begin{aligned} T_{i\alpha}(P, Q) &= \sigma_{\alpha\beta}^{*(1)i}(P, Q) n_{\beta}(P) \quad , \\ T_{i3}(P, Q) &= \sigma_{\alpha}^{*(1)i}(P, Q) n_{\alpha}(P) \end{aligned} \quad (4.47)$$

mit (siehe Gleichungen (4.43))

$$\sigma_{\alpha\beta}^{*(1)i} = D \frac{1-\nu}{2} \left[ U_{i\alpha,\beta} + U_{i\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} U_{i\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] , \quad (4.48a)$$

$$\sigma_{\alpha}^{*(1)i} = D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 [U_{i\alpha} + U_{i3,\alpha}] . \quad (4.48b)$$

Für gleichverteilte Belastungen  $\sigma^{(1)}(Q)$  werden auch die Gebietsintegrale (4.33) durch äquivalente Randintegrale ersetzt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ U_{i3}(p, Q) - \frac{\nu_3 k_G}{(1-\nu)\lambda^2 k_E} U_{i\alpha,\alpha}(p, Q) \right] \sigma^{(1)}(Q) d\Omega = \\ = \sigma^{(1)} \int_{\Gamma} \left[ \Lambda_{,\alpha}(p, q) - \frac{\nu_3 k_G}{(1-\nu)\lambda^2 k_E} U_{i\alpha}(p, q) \right] n_{\alpha}(q) d\Gamma , \quad (4.49) \end{aligned}$$

als auch die Gebietsintegrale (4.44)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ U_{\alpha i3}(P, Q) - \frac{\nu_3 k_G}{(1-\nu)\lambda^2 k_E} V_{\alpha i3}(P, Q) \right] \sigma^{(1)}(Q) d\Omega = \\ = \sigma^{(1)} \int_{\Gamma} \left[ Y_{\alpha i\beta}(P, q) - \frac{\nu_3 k_G}{(1-\nu)\lambda^2 k_E} U_{\alpha i\beta}(P, q) \right] n_{\beta}(q) d\Gamma . \quad (4.50) \end{aligned}$$

Für die Definition der obigen Tensoren siehe Abschnitt 6.7 und Anhang B.

# Kapitel 5

## Entkopplung der Differentialgleichungen

### 5.1 Einleitung

Die Gleichungen, die wir in diesem Kapitel herleiten werden, werden zwei wichtige Zwecke erfüllen. Erstens werden wir die Qualität der Modelle beurteilen können, indem wir einen direkten Vergleich mit der 3D-Elastizitätstheorie und andere Plattenmodelle vornehmen. Zweitens erweisen sich die hier abgeleiteten Gleichungen als hilfreich zur Berechnung der skalaren Fundamentallösung, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird.

Um das LAMÉ-NAVIERsche Differentialgleichungssystem weiter zu bearbeiten, werden wir den HELMHOLTZschen Zerlegungssatz anwenden. Wir bekommen folglich drei verschiedene Gleichungssysteme (siehe Tabelle 1.1):

- Kirchhoff;
- Levy (Schubzustand);
- Papkovich-Fadle (für transversal-isotrope Materialien).

### 5.2 Der HELMHOLTZsche Zerlegungssatz

Um die LAMÉ-NAVIERschen Gleichungen weiter zu bearbeiten, definieren wir die Verschiebungsfunktionen (LAMÉsche Potentiale)  $\Psi^{(\xi)}$  und  $\Phi^{(\xi)}$  (siehe Eringen und Suhubi [22], Preußner [72], Lewiński [51])

$$\Psi^{(\xi)} := \epsilon_{\alpha\beta} \varphi_{\alpha,\beta}^{(\xi)} \quad , \quad \Phi^{(\xi)} := \varphi_{\theta,\theta}^{(\xi)} \quad , \quad (6.1)$$

wobei  $\epsilon_{\alpha\beta}$  das Permutationssymbol (LEVI-CIVITÀscher Tensor) ist. Wir erhalten ein System für die Bestimmung von  $\Psi^{(\xi)}$ , welches dem Schubzustand entspricht, und ein System für die Bestimmung von  $\Phi^{(\xi)}$  und  $\varphi_3^{(\xi)}$ , welches den KIRCHHOFFschen und den

PAPKOVICH-FADLESchen Systemen entspricht. Diese Potentiale korrespondieren mit dem HELMHOLTZschen Zerlegungssatz (siehe Tran-Cong [103], Gregory [31]).

Der Einfachheit halber wiederholen wir die LAMÉ-NAVIERSchen Gleichungen (3.59)

$$D \frac{1-\nu}{2} \left\{ \Delta \varphi_{\alpha}^{(1)} - \lambda^2 \varphi_{\alpha}^{(1)} + \frac{1+\nu}{1-\nu} [1+\gamma] \varphi_{\beta,\alpha\beta}^{(1)} - \lambda^2 \varphi_{3,\alpha}^{(1)} + \frac{9}{4} \lambda^2 \varphi_{\alpha}^{(2)} + \right. \\ \left. + \frac{7(1+\nu)}{3(1-\nu)} \gamma \varphi_{\beta,\alpha\beta}^{(2)} + \frac{9}{4} [\lambda^2 - 9\eta] \varphi_{3,\alpha}^{(2)} \right\} = -B^{(1)} \sigma_{,\alpha}^{(1)} \quad , \quad (6.2a)$$

$$D \frac{1-\nu}{2} \left\{ \lambda^2 \varphi_{\alpha,\alpha}^{(1)} + \lambda^2 \Delta \varphi_3^{(1)} - \frac{9}{4} \lambda^2 \varphi_{\alpha,\alpha}^{(2)} - \frac{9}{4} \lambda^2 \Delta \varphi_3^{(2)} \right\} = -F^{(1)} \sigma^{(1)} \quad , \quad (6.2b)$$

$$D \frac{1-\nu}{2} \left\{ \frac{9}{4} \lambda^2 \varphi_{\alpha}^{(1)} + \frac{7(1+\nu)}{3(1-\nu)} \gamma \varphi_{\beta,\alpha\beta}^{(1)} + \frac{9}{4} \lambda^2 \varphi_{3,\alpha}^{(1)} + \frac{21}{4} \Delta \varphi_{\alpha}^{(2)} - 9 \frac{21}{4} \lambda^2 \varphi_{\alpha}^{(2)} + \right. \\ \left. + \frac{21(1+\nu)}{4(1-\nu)} \left[ 1 + \frac{28}{27} \gamma \right] \varphi_{\beta,\alpha\beta}^{(2)} - 9 \frac{21}{4} [\lambda^2 + \eta] \varphi_{3,\alpha}^{(2)} \right\} = -B^{(2)} \sigma_{,\alpha}^{(1)} \quad , \quad (6.2c)$$

$$D \frac{1-\nu}{2} \left\{ -\frac{9}{4} [\lambda^2 - 9\eta] \varphi_{\alpha,\alpha}^{(1)} - \frac{9}{4} \lambda^2 \Delta \varphi_3^{(1)} + 9 \frac{21}{4} [\lambda^2 + \eta] \varphi_{\alpha,\alpha}^{(2)} + \right. \\ \left. + 9 \frac{21}{4} \lambda^2 \Delta \varphi_3^{(2)} - 9 \frac{21}{4} \zeta \varphi_3^{(2)} \right\} = -F^{(2)} \sigma^{(1)} \quad . \quad (6.2d)$$

### 5.2.1 Lösung für $\Psi^{(\xi)}$

Nach Multiplikation der Gleichungen (6.2a) und (6.2c) mit  $\epsilon_{\alpha\beta}$  und Differentiation bezüglich  $\beta$  mit anschließender Einführung von (6.1)<sub>1</sub> erhalten wir wegen  $\epsilon_{\alpha\beta}(\cdot)_{,\alpha\beta} = 0$  (siehe Lewiński [51]):

$$\Delta \Psi^{(1)} - \lambda^2 \Psi^{(1)} + \frac{9}{4} \lambda^2 \Psi^{(2)} = 0 \quad , \quad (6.3a)$$

$$\frac{9}{4} \lambda^2 \Psi^{(1)} + \frac{21}{4} \Delta \Psi^{(2)} - 9 \frac{21}{4} \lambda^2 \Psi^{(2)} = 0 \quad (6.3b)$$

oder

$$\begin{bmatrix} \Delta - \lambda^2 & \frac{9}{4} \lambda^2 \\ \frac{3}{7} \lambda^2 & \Delta - 9 \lambda^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi^{(1)} \\ \Psi^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad . \quad (6.4)$$

Die Lösungen lauten:



- $s$ -(1,0) Modell (Reissner [79])

$$[h^2 \Delta - {}^{s-(1,0)}S_1^2] \Psi^{(1)} = 0 \quad , \quad (6.5a)$$

$${}^{s-(1,0)}S_1 := \sqrt{10k_G} \quad ; \quad (6.5b)$$

- $s$ -(3,2) Modell (Lewiński [51])

$$[h^2 \Delta - {}^{s-(3,2)}S_1^2] [h^2 \Delta - {}^{s-(3,2)}S_2^2] \Psi^{(\alpha)} = 0 \quad , \quad (6.6a)$$

$${}^{s-(3,2)}S_\alpha := 2\sqrt{[14 + (-1)^\alpha \sqrt{133}] k_G} \quad . \quad (6.6b)$$

Eine wichtige Schlußfolgerung aus den Gleichungen (6.5) und (6.6) ist das Auftreten nur eines Materialparameters, nämlich  $k_G$ . Deshalb nennen wir diese Gleichungen *Schubgleichungen* (shear equations), siehe Cheng [14].

Wir vergleichen jetzt diese Gleichungen mit den entsprechenden Gleichungen der 3D-Elastizitätstheorie (siehe Lurje [58] und Cheng [14]) und mit den entsprechenden Gleichungen des hierarchischen Verschiebungsverfahren von Schwab und Wright [92], aus denen sich die  $d$ -(3,2) Modelle von Preußner [72, 73] und Chen und Archer [13] als Spezialfälle ergeben.

Tabelle 5.1 zeigt die prozentualen Fehler für die Modelle der  $s$ - und  $d$ -Gruppe im Vergleich mit den Koeffizienten der 3D-Elastizitätstheorie  $S_1$  und  $S_2$  für Modelle zwölfter Ordnung.

Tabelle 5.1: Prozentuale Fehler der Schubkoeffizienten für Plattenmodelle zwölfter Ordnung.

3D-Elastizitätslösung	$S_1 = \pi$	$S_2 = 3\pi$
Fehler der $s$ -Gruppe	0,00074%	7,23%
Fehler der $d$ -Gruppe	0,028%	38,39%

Die Schubkoeffizienten können wir für beliebige Modelle  $s$ -( $n_r, n_s$ ) (siehe Poniatovskii [68]) oder  $d$ -( $n_r, n_s$ ) (siehe Schwab [91]) bestimmen. Tabelle 5.2 zeigt im oberen Teil die Koeffizienten  ${}^{s-(n_r, n_s)}S_i$ ,  $i = 1$  bis 5, für Modelle sechster, zwölfter, 18., 24. und 30. Ordnung. Die Koeffizienten für die Modelle  $s$ -(1,0) und  $s$ -(3,2) ergeben sich direkt aus den Gleichungen (6.5b) und (6.6b).<sup>1</sup> Im unteren Teil sind die Koeffizienten  ${}^{d-(n_r, n_s)}S_i$ ,  $i = 1$  bis 5, gezeigt. Für das Modell  $d$ -(3,2) stimmen die Koeffizienten mit denen von Preußner [72, 73] und Chen und Archer [13] überein. In den Ansätzen von Poniatovskii und Schwab wurden LEGENDRESche Polynome benutzt, während Preußner und Chen und Archer gewöhnliche Polynome benutzt haben.

<sup>1</sup>Poniatovskii arbeitete mit transversal-isotropen Materialien, während Schwab isotrope Materialien berücksichtigte.

Tabelle 5.2: Schubkoeffizienten.

s-Gruppe (Poniatovskii [68])					
Plattenmodell	$S_1/\sqrt{k_G}$	$S_2/\sqrt{k_G}$	$S_3/\sqrt{k_G}$	$S_4/\sqrt{k_G}$	$S_5/\sqrt{k_G}$
$s(9,8)$	3,1416	9,4248	15,7176	23,0580	43,0417
Fehler (%)	$4,3 \times 10^{-16}$	$5,5 \times 10^{-6}$	$6,1 \times 10^{-2}$	4,8513	52,2289
$s(7,6)$	3,1416	9,4249	15,9505	29,6460	
Fehler (%)	$1,3 \times 10^{-11}$	$1,7 \times 10^{-3}$	1,5439	34,8086	
$s(5,4)$	3,1416	9,4432	18,7338		
Fehler (%)	$1,7 \times 10^{-7}$	0,1952	19,2633		
$s(3,2)$	3,1416	10,1060			
Fehler (%)	$7,4 \times 10^{-4}$	7,2275			
$s(1,0)$	3,1623				
Fehler (%)	0,6584				
d-Gruppe (Schwab [91])					
Plattenmodell	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$
$d(9,8)$	3,1416	9,4248	15,7622	24,8765	70,5267
Fehler (%)	$8,2 \times 10^{-14}$	$1,1 \times 10^{-4}$	$3,4 \times 10^{-1}$	13,1205	149,4374
$d(7,6)$	3,1416	9,4268	16,6063	46,3195	
Fehler (%)	$1,7 \times 10^{-9}$	$2,1 \times 10^{-2}$	5,7191	110,6280	
$d(5,4)$	3,1416	9,5512	27,1828		
Fehler (%)	$1,3 \times 10^{-5}$	1,3414	73,0511		
$d(3,2)$	3,1425	13,0432			
Fehler (%)	$2,8 \times 10^{-2}$	38,3926			
$d(1,0)$	3,4641				
Fehler (%)	10,2658				

Werte für 3D, isotropes Material:  $S_i = (2i - 1)\pi$ ,  $i = 1, 2, \dots$  (Cheng [14]).

5.2.2 Lösungen für  $\Phi^{(\xi)}$  und  $\varphi_3^{(\xi)}$ 

Nach Differentiation der Gleichungen (6.2a) und (6.2c) nach  $\alpha$  und anschließender Einführung von (6.1)<sub>2</sub> erhalten wir

$$\left[ \Delta - \lambda^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} (1+\gamma) \Delta \right] \Phi^{(1)} - \lambda^2 \Delta \varphi_3^{(1)} + \left[ \frac{9}{4} \lambda^2 + \frac{7}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} \gamma \Delta \right] \Phi^{(2)} + \frac{9}{4} (\lambda^2 - 9\eta) \Delta \varphi_3^{(2)} = \frac{-2}{1-\nu} \frac{B^{(1)}}{D} \Delta \sigma^{(1)} \quad , \quad (6.7a)$$

$$\left[ \frac{9}{4} \lambda^2 + \frac{7}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} \gamma \Delta \right] \Phi^{(1)} + \frac{9}{4} \lambda^2 \Delta \varphi_3^{(1)} + \left[ \frac{21}{4} \Delta - 9 \frac{21}{4} \lambda^2 + \frac{21}{4} \frac{1+\nu}{1-\nu} \left( 1 + \frac{28}{27} \gamma \right) \Delta \right] \Phi^{(2)} + \frac{9}{4} (\lambda^2 + \eta) \Delta \varphi_3^{(2)} = \frac{-2}{1-\nu} \frac{B^{(2)}}{D} \Delta \sigma^{(1)} \quad . \quad (6.7b)$$

Die Einführung von (6.1)<sub>2</sub> in die Gleichungen (6.2b) und (6.2d) liefert

$$\lambda^2 \Phi^{(1)} + \lambda^2 \Delta \varphi_3^{(1)} - \frac{9}{4} \lambda^2 \Phi^{(2)} - \frac{9}{4} \lambda^2 \Delta \varphi_3^{(2)} = \frac{-2}{1-\nu} \frac{F^{(1)}}{D} \sigma^{(1)} \quad , \quad (6.8a)$$

$$-\frac{9}{4} (\lambda^2 - 9\eta) \Phi^{(1)} - \frac{9}{4} \lambda^2 \Delta \varphi_3^{(1)} + 9 \frac{21}{4} (\lambda^2 + \eta) \Phi^{(2)} + \frac{9}{4} (\lambda^2 \Delta - \zeta) \varphi_3^{(2)} = \frac{-2}{1-\nu} \frac{F^{(2)}}{D} \sigma^{(1)} \quad . \quad (6.8b)$$

Die Gleichungen (6.7) und (6.8) liefern das System

$$G_{ij} v_j = -K_i \sigma^{(1)} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad , \quad (6.9)$$

wobei

$$\{\mathbf{v}\}_4 := \left\{ \Phi^{(1)} \quad , \quad \Phi^{(2)} \quad , \quad -\varphi_3^{(1)} \quad , \quad -\varphi_3^{(2)} \right\}^T \quad , \quad (6.10a)$$

$$\{\mathbf{K}\}_4 := \frac{1}{E} \left\{ B^{(1)} \Delta \quad , \quad B^{(2)} \Delta \quad , \quad F^{(1)} \quad , \quad F^{(2)} \right\}^T \quad , \quad (6.10b)$$

$$[\mathbf{G}]_{4 \times 4} := \begin{bmatrix} [\mathbf{G}_A]_{2 \times 2} & \Delta [\mathbf{G}_{AB}]_{2 \times 2} \\ [\mathbf{G}_{AB}]_{2 \times 2}^T & [\mathbf{G}_B]_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad , \quad (6.10c)$$

und

$$[\mathbf{G}_A]_{2 \times 2} := \frac{c^3}{3(1+\nu)} \begin{bmatrix} (1+\nu_A)\Delta - \lambda^2 & \frac{9}{4}(\nu_{AB}\Delta + \lambda^2) \\ & \frac{21}{4}[(1+\nu_B)\Delta - 9\lambda^2] \end{bmatrix}_{Sym}, \quad (6.11a)$$

$$[\mathbf{G}_{AB}]_{2 \times 2} := \frac{c^3}{3(1+\nu)} \begin{bmatrix} \lambda^2 & -\frac{9}{4}(\lambda^2 - 9\eta) \\ -\frac{9}{4}\lambda^2 & 9\frac{21}{4}(\lambda^2 + \eta) \end{bmatrix}, \quad (6.11b)$$

$$[\mathbf{G}_B]_{2 \times 2} := \frac{c^3}{3(1+\nu)} \begin{bmatrix} -\lambda^2\Delta & \frac{9}{4}\lambda^2\Delta \\ & -9\frac{21}{4}(\lambda^2\Delta - \zeta) \end{bmatrix}_{Sym}. \quad (6.11c)$$

Die auftretenden Konstanten ergeben sich aus Gl. (3.64).

Bemerkung: Bei der Herleitung des Gleichungssystems multiplizierten wir die Gleichungen (6.7) und (6.8) mit  $\frac{c^3}{3(1+\nu)}$ .

Mit der Bezeichnung

$$k_{EG} := \frac{k_E}{k_G} \quad (6.12)$$

sind die Lösungen des Systems (6.9):

- Modell  $s$ -(1,0) (Reissner [79], Panc [65])

$$D\Delta\Phi^{(1)} = - \left[ 1 + \frac{\nu_3}{10(1-\nu)k_E} h^2\Delta \right] \sigma^{(1)}, \quad (6.13a)$$

$$D\Delta^2\varphi_3^{(1)} = \left[ 1 - \frac{(2k_{EG} - \nu_3)}{10(1-\nu)k_E} h^2\Delta \right] \sigma^{(1)}; \quad (6.13b)$$

- Modell  $s$ -(3,2) (Lewiński [51])

$$D\Delta \left[ c_1 (h^2\Delta)^2 + c_2 (h^2\Delta) + 1 \right] \Phi^{(\alpha)} = g_\alpha \sigma^{(1)}, \quad (6.14a)$$

$$D\Delta^2 \left[ c_1 (h^2\Delta)^2 + c_2 (h^2\Delta) + 1 \right] \varphi_3^{(\alpha)} = h_\alpha \sigma^{(1)}, \quad (6.14b)$$

wobei sich die Koeffizienten  $c_\alpha$  ergeben (Reissner [85]):

$$c_1 := \frac{126 - 121\nu_3^2}{498960(1-\nu^2)k_E^2}, \quad (6.15a)$$

$$c_2 := -\frac{k_{EG} - \nu_3}{45(1-\nu)k_E}. \quad (6.15b)$$

Die Koeffizienten  $g_\alpha$  und  $h_\alpha$  sind:

$$g_1 := -1 + \frac{2k_{EG} - 11\nu_3}{90(1-\nu)k_E} h^2 \Delta + \frac{11(79 + 101\nu)\nu_3^2 - 990(1+\nu)\nu_3 k_{EG} + 126(1-\nu)}{498960(1+\nu)(1-\nu)^2 k_E^2} (h^2 \Delta)^2 + \frac{(12 - 11\nu_3^2)\nu_3}{997920(1+\nu)(1-\nu)^2 k_E^3} (h^2 \Delta)^3, \quad (6.16a)$$

$$g_2 := -\frac{2k_{EG} - \nu_3}{210(1-\nu)k_E} h^2 \Delta + \frac{(1+\nu_3)(1-\nu_3)}{1890(1+\nu)(1-\nu)k_E^2} (h^2 \Delta)^2 + \frac{(98 - 99\nu_3^2)\nu_3}{20956320(1+\nu)(1-\nu)^2 k_E^3} (h^2 \Delta)^3, \quad (6.16b)$$

$$h_1 := 1 - \frac{20k_{EG} - 11\nu_3}{90(1-\nu)k_E} h^2 \Delta + \frac{11(79 + 101\nu)\nu_3^2 + 990(1+\nu)(2k_{EG} - 3\nu_3)k_{EG} + 126(1-\nu)}{498960(1+\nu)(1-\nu)^2 k_E^2} (h^2 \Delta)^2 + \frac{(2k_{EG} - \nu_3)(12 - 11\nu_3^2)}{997920(1+\nu)(1-\nu)^2 k_E^3} (h^2 \Delta)^3, \quad (6.16c)$$

$$h_2 := -\frac{\nu_3}{210(1-\nu)k_E} h^2 \Delta - \frac{(1+\nu_3)(1-\nu_3)}{1890(1+\nu)(1-\nu)k_E^2} (h^2 \Delta)^2 + \frac{(2k_{EG} - \nu_3)(98 - 99\nu_3^2)}{20956320(1+\nu)(1-\nu)^2 k_E^3} (h^2 \Delta)^3. \quad (6.16d)$$

Für ein isotropes Material und  $\nu = 0,3$  stimmen die Werte von  $c_\alpha$  mit denen von Lewiński [51] überein.

Die Durchbiegung der Mittelebene entnehmen wir aus Gl. (2.38b) mit den Rotationen  $\varphi_3^{(\xi)}$ :

$$D\Delta^2 \left[ c_1 (h^2 \Delta)^2 + c_2 (h^2 \Delta) + 1 \right] u_3 \Big|_{x_3=0} = y\sigma^{(1)}, \quad (6.17)$$

wobei

$$u_3 := \varphi_3^{(1)} + \frac{21}{4} \left[ 1 - 5\frac{x_3^2}{c^2} \right] \varphi_3^{(2)}, \quad (6.18a)$$

$$y := 1 - \frac{16k_{EG} - 7\nu_3}{72(1-\nu)k_E} h^2 \Delta + \frac{11(41 - 5\nu)\nu_3^2 + 198(1+\nu)(2k_{EG} - 3\nu_3)k_{EG} - 252(1-\nu)}{99792(1+\nu)(1-\nu)^2 k_E^2} (h^2 \Delta)^2 + \frac{(2k_{EG} - \nu_3)(10 - 11\nu_3^2)}{798336(1+\nu)(1-\nu)^2 k_E^3} (h^2 \Delta)^3. \quad (6.18b)$$

Das Gleichungssystem (6.14) können wir folgendermaßen darstellen:

$$D\Delta [h^2\Delta - {}^{s-(3,2)}P_1^2] [h^2\Delta - {}^{s-(3,2)}P_2^2] \Phi^{(\alpha)} = ({}^{s-(3,2)}P_1 {}^{s-(3,2)}P_2)^2 g_\alpha \sigma^{(1)} \quad , \quad (6.19a)$$

$$D\Delta^2 [h^2\Delta - {}^{s-(3,2)}P_1^2] [h^2\Delta - {}^{s-(3,2)}P_2^2] \varphi_3^{(\alpha)} = ({}^{s-(3,2)}P_1 {}^{s-(3,2)}P_2)^2 h_\alpha \sigma^{(1)} \quad , \quad (6.19b)$$

wobei

$$\begin{aligned} {}^{s-(3,2)}P_1^2 := & \frac{36(1+\nu)k_E}{126-121\nu_3^2} \left\{ 154(k_{EG} - \nu_3) + \right. \\ & \left. + i\sqrt{\frac{77}{1+\nu}} \left\{ 14 \left[ 45(1-\nu) - 22(1+\nu)(k_{EG} - 2\nu_3)k_{EG} \right] - 11(83 - 27\nu)\nu_3^2 \right\} \right\} \end{aligned} \quad (6.20)$$

und  ${}^{s-(3,2)}P_2$  der konjugiert komplexe Wert von  ${}^{s-(3,2)}P_1$  ist. Für einen isotropen Stoff erhalten wir

$${}^{s-(3,2)}P_1^2 := \frac{36(1-\nu^2)}{126-121\nu^2} \left[ 154 + i\sqrt{77\frac{322-297\nu^2}{1-\nu^2}} \right] \quad . \quad (6.21)$$

Für eine gleichverteilte Belastung ist  $\Delta\sigma^{(1)} = 0$ . In diesem Fall folgt aus Gl. (6.13b)

$$D\Delta^2 \varphi_3^{(1)} = \sigma^{(1)} \quad , \quad (6.22)$$

was der biharmonischen KIRCHHOFFschen Gleichung entspricht. Jedoch sind noch drei Randbedingungen zu erfüllen. Wir erhalten dieselbe Gleichung aus der entsprechenden Gleichung des Modells  $s-(3,2)$ , indem wir  $\alpha = 1$  in Gl. (6.14b) setzen und den Übergang  $h \rightarrow 0$  betrachten.

Analytische Lösungen für bestimmte Probleme sind möglich, indem die Gleichungen (6.13)-(6.21) berücksichtigt werden (für die Modelle  $s-(1,0)$  bzw.  $d-(1,0)$  siehe Salerno und Goldberg [89] bzw. Dym und Shames [20]).

## 5.3 Schlussuntersuchung des hergeleiteten Differentialgleichungssystems

Wir werden nun die Qualität der im vorherigen Abschnitt abgeleiteten Differentialgleichungen untersuchen. Die Verschiebungs- und Spannungsfelder der Modelle der  $s$ -Gruppe sind im Vergleich mit den Modellen der  $d$ -Gruppe von höherer Ordnung,<sup>2</sup> siehe Gleichungen (2.39) für die Spannungen und Gleichungen (3.7) für die Verschiebungen  $\varphi_i^{(\xi)}$ . Aufgrund dieser Tatsache können wir schon voraussagen, dass die Differentialgleichungen der  $s$ -Gruppe den entsprechenden Gleichungen der  $d$ -Gruppe überlegen sind. Diese Aussage werden wir nun zeigen.

<sup>2</sup>Für das Modell  $d-(3,2)$  sind  $\sigma_{\alpha\beta} = O(x_3^3)$ ,  $\sigma_{\alpha 3} = O(x_3^2)$  und  $\sigma_{33} = O(x_3)$ , da die Spannungen durch die Konstitutivgleichung anstatt durch Integration der Gleichgewichtsgleichungen berechnet werden.

Das homogene Gleichungssystem (6.6a) führt für beide Größen  $\Psi^{(\alpha)}$  auf dieselbe Gleichung (siehe Preußer [72]). Es sei

$$\Psi^{(\alpha)} := \Psi_1^{(\alpha)} + \Psi_2^{(\alpha)} \quad . \quad (6.23)$$

Somit lassen sich die Lösungen  $\Psi^{(\alpha)}$  aus zwei Anteilen zusammensetzen, die den beiden Differentialgleichungen

$$(h^2 \Delta - {}^{s-(3,2)}S_1^2) \Psi_1^{(\xi)} = 0 \quad , \quad (6.24a)$$

$$(h^2 \Delta - {}^{s-(3,2)}S_2^2) \Psi_2^{(\xi)} = 0 \quad , \quad (6.24b)$$

genügen müssen, wobei

$$\begin{aligned} {}^{s-(3,2)}S_1 &:= 2\sqrt{\left[14 - \sqrt{133}\right] k_G} = 3,141615768 \sqrt{k_G} \quad , \\ {}^{s-(3,2)}S_2 &:= 2\sqrt{\left[14 + \sqrt{133}\right] k_G} = 10,10595123 \sqrt{k_G} \quad . \end{aligned}$$

Beide Teillösungen klingen rasch ab, wobei die erste Gleichung am wichtigsten ist, da  ${}^{s-(3,2)}S_1 < {}^{s-(3,2)}S_2$  ist und  $\Psi_2^{(\xi)}$  nur in einem sehr schmalen Randbereich wirksam ist (siehe Preußer [72], Lewiński [51]).

In den Differentialgleichungen für die Durchbiegung (6.19b) sind zwei Operatoren beteiligt, der klassische biharmonische Operator und zwei modifizierte HELMHOLTZsche Gleichungen mit den Parametern  ${}^{s-(3,2)}P_1$  und  ${}^{s-(3,2)}P_2$ . Den Operator  $\Delta^2$  können wir folgendermaßen darstellen (siehe Zimmermann [119]):

$$h^4 \Delta^2 \equiv (h^2 \Delta - 0^2) (h^2 \Delta - 0^2) \quad . \quad (6.25)$$

Für die Gl. (6.19b) erhalten wir nun

$$\prod_{\gamma=0}^1 (h^2 \Delta - \tau_\gamma^2) (h^2 \Delta - \bar{\tau}_\gamma^2) \varphi_3^{(\alpha)} = \frac{12(1 - \nu^2)h}{E} (\tau_1 \bar{\tau}_1)^2 h_\alpha \sigma^{(1)} \quad (6.26a)$$

mit

$$\tau_0 \equiv 0 \quad , \quad \tau_1 \equiv {}^{s-(3,2)}P_1 \quad , \quad \bar{\tau}_1 \equiv {}^{s-(3,2)}P_2 \quad , \quad (6.26b)$$

da  ${}^{s-(3,2)}P_2 = {}^{s-(3,2)}\bar{P}_1$ .

In (6.26a) haben wir auf der linken Seite dieselben Differentialoperatoren für die zwei Komponenten  $\varphi_3^{(1)}$  und  $\varphi_3^{(2)}$  der Durchbiegung. Da die modifizierte HELMHOLTZsche Gleichung eine Randschichtgleichung ist (vergleiche mit den Gleichungen (6.24)), ist das Abklingverhalten beider Durchbiegungskomponenten gleich.  $\Delta^2$  ist der einzige nicht abklingende Anteil (die biharmonische Gleichung), der im ganzen Plattengebiet wirksam ist.

Tabelle 5.3: Die ersten Zehn PAPKOVICH-FADLEschen Eigenwerte für das Biegeproblem.

k	$P_k$
0	0
1, 2	$7,4976762777763854983 \pm 2,7686782829873215325i$
3, 4	$13,899959713976464002 \pm 3,3522098848535049052i$
5, 6	$20,238517707830020965 \pm 3,7167676797524991137i$
7, 8	$26,554547265491559985 \pm 3,9831416403399617498i$
9,10	$32,859741005069862594 \pm 4,1932514704312085707i$
11,12	$39,158816520064986741 \pm 4,3667951176706184213i$
13,14	$45,454071464355111349 \pm 4,5146404494813027697i$
15,16	$51,746768302821786748 \pm 4,6434279570518964580i$
17,18	$58,037662059094268410 \pm 4,7575151180816208907i$
19,20	$64,327233713285566916 \pm 4,8599166478970964147i$

Die Parameter  $\tau_0$  und  $\tau_1$  der Gleichung (6.26a) sind Approximationen des ersten PAPKOVICH-FADLEschen Eigenwertes, welche den Wurzeln der transzendenten Gleichung (siehe Cheng [14], Timoshenko und Goodier [100], Papkovich [66], Fadle [24], Ricci [87])

$$\sin P = P \quad (6.27)$$

mit nicht negativen Realteilen entsprechen.

Die unendlichen Wurzeln dieser Gleichung sind komplexwertig (ausgenommen der trivialen Lösung  $P_0 = 0$ ) und treten in Vierer-Gruppen auf, jeweils einer pro Quadrant.<sup>3</sup> Die ersten zehn Wurzeln, zusammen mit der trivialen Lösung  $P_0$ , sind in Tabelle 5.3 angegeben.

Der Koeffizient  $s^{-(3,2)}P_1$  in Gl. (6.20) hat einen wesentlichen Imaginärteil für ein isotropes Material und für  $|\nu| < 1$ , siehe Gl. (6.21). Die Real- und Imaginärteile für  $\nu \in [0, 1/2]$  sind in Abbildung 5.1 zusammen mit dem Elastizitätswert  $P_1$  aufgetragen. Man erkennt, dass  $s^{-(3,2)}P_1$  nur eine sehr geringe Variation bzgl.  $\nu$  aufweist, was aus Gl. (6.21) direkt zu sehen ist.

Die von Preußner [72, 73] und Chen und Archer [13] berechneten PAPKOVICH-FADLEschen Werte  $d^{-(3,2)}P_1$  sind in Abbildung 5.2 aufgetragen. Diese Werte sind reelle Zahlen für  $\nu > 2/7$ . Man beachte die gute Annäherung der Werte  $s^{-(3,2)}P_1$  im Vergleich mit  $d^{-(3,2)}P_1$ .

<sup>3</sup>Wenn  $P$  eine Lösung ist, dann sind auch  $-P$ ,  $\bar{P}$  und  $-\bar{P}$  Lösungen.



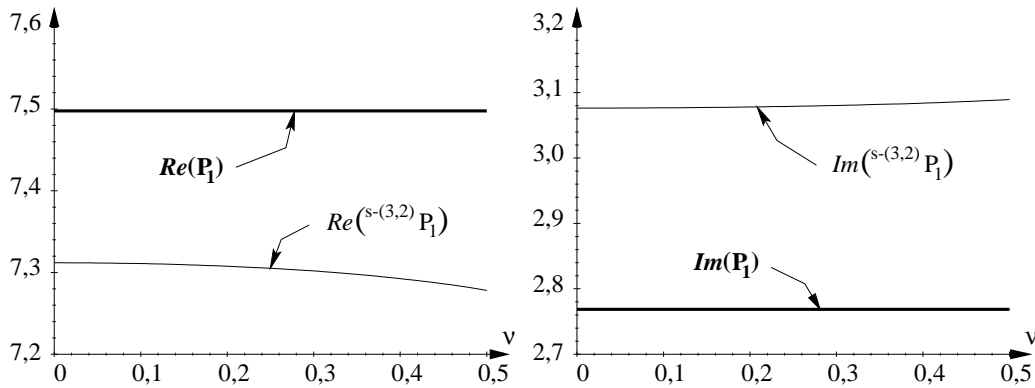


Abbildung 5.1: Real- und Imaginärteile des ersten PAPKOVICH-FADLESchen Eigenwertes,  $0 \leq \nu \leq 0,5$ .

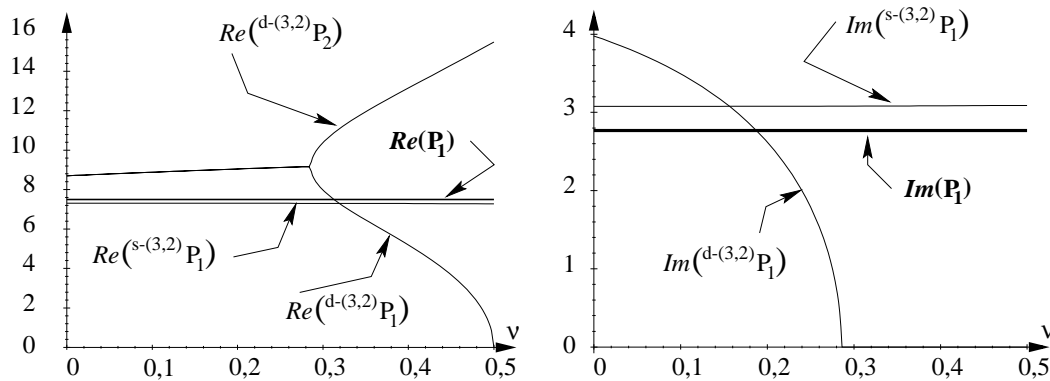


Abbildung 5.2: Real- und Imaginärteile des ersten PAPKOVICH-FADLESchen Eigenwertes,  $0 \leq \nu \leq 0,5$ .

Abbildung 5.3 zeigt wieder den Verlauf von  ${}^{s-(3,2)}P_1$ , nun für  $-5 \leq \nu \leq 5$ . Hier ist der Unterschied zwischen  ${}^{s-(3,2)}P_1$  und  $P_1$  klein.<sup>4</sup>

Die entsprechenden Werte  $P_k$  für transversal-isotrope Materialien kann man aus der Veröffentlichung von Horgan [36] ermitteln, was noch durchzuführen wäre.

Im nächsten Kapitel werden wir zeigen, dass sich die Fundamentallösung für das Problem  $s-(3,2)$  durch die Lösungen der biharmonischen, Schub- und HELMHOLTZschen Differentialgleichungen (6.6) und (6.19b) berechnen läßt.

<sup>4</sup>Ausgenommen ist die Umgebung von  $\nu = \pm\sqrt{126/121}$ , in der  ${}^{s-(3,2)}P_1$  singularär ist (siehe Gl. (6.21)).

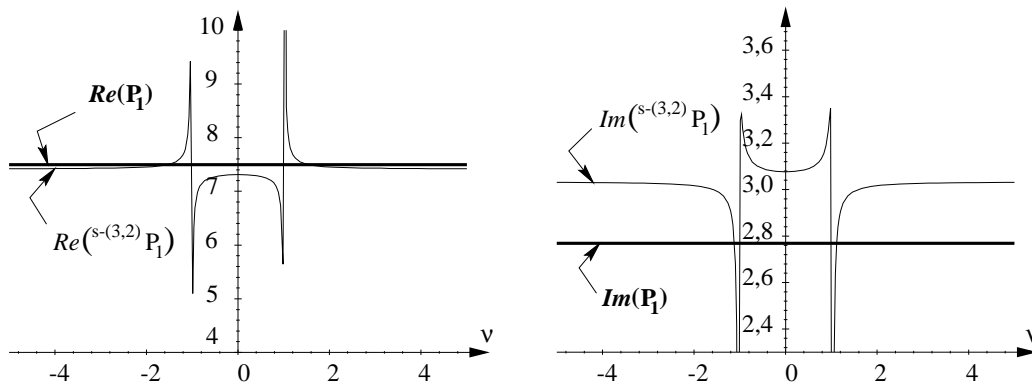


Abbildung 5.3: Real- und Imaginärteile des ersten PAPKOVICH-FADLEsches Eigenwertes,  $-5 \leq \nu \leq 5$ .

# Kapitel 6

## Die allgemeine Fundamentallösung

### 6.1 Einleitung

Die allgemeinen skalaren Fundamentallösungen beider Probleme,  $s$ -(1,0) und  $s$ -(3-2), werden in diesem Kapitel abgeleitet. Wir benutzen die HÖRMANDERSche Methode, um die skalaren Fundamentallösungen zu berechnen. Durch Anwendung der Theorie der Distributionen werden die zunächst unbestimmten Konstanten dieser Lösungen so bestimmt, dass die Fundamentallösung eine verallgemeinerte DIRACsche Deltafunktion darstellt. Freie Konstanten werden nicht zu Null gesetzt, so dass unsere Lösung keinen Spezialfall, sondern die allgemeinen Fundamentallösungen darstellt.

### 6.2 Ansatz für die Bestimmung der Tensoren $U_{IJ}$ und $U_{ij}$

Wir betrachten das hierarchische LAMÉ-NAVIERsche System (siehe Gleichungen (3.61) bzw. (3.65)),

$$L_{IJ}u_J(Q) = -F_I\sigma^{(1)}(Q) \quad . \quad (6.1)$$

Zur Bestimmung der Fundamentallösung entnehmen wir aus Gl. (4.23a)

$$u_J^*(Q) := U_{KJ}(P, Q)m_K^*(P) \quad . \quad (6.2)$$

Die Belastungen der Fundamentallösung sind verallgemeinerte DIRACsche Deltafunktionen mit dem Aufpunkt in P,

$$F_I\sigma^{(1)}(Q) := \delta(P, Q)m_I^*(P) \quad . \quad (6.3)$$

Für die Fundamentallösung setzen wir die Gleichungen (6.2) und (6.3) in Gl. (6.1) ein und erhalten

$$L_{IJ}U_{KJ}(P, Q) = -\delta(P, Q)\delta_{IK} \quad . \quad (6.4)$$

Diese sind die LAMÉ-NAVIERschen Gleichungen für die Fundamentallösung. Dieses Differentialgleichungssystem kann weiter vereinfacht werden. Zuerst verwenden wir, dass (Hörmander [40])

$$L_{IJ}^{co} L_{KJ} = L_{IJ} L_{KJ}^{co} = \det(\mathbf{L}) \delta_{IK} \quad , \quad (6.5)$$

wobei  $\mathbf{L}^{co}$  die Kofaktormatrix von  $\mathbf{L}$  und  $\det(\mathbf{L})$  die Determinante von  $\mathbf{L}$  ist. Wir führen folgenden Ansatz ein:

$$U_{KJ}(P, Q) := L_{KJ}^{co} G(P, Q) \quad . \quad (6.6)$$

Das System (6.4) vereinfacht sich zu

$$\det(\mathbf{L}) G(P, Q) = -\delta(P, Q) \quad . \quad (6.7)$$

Es wird zuerst das Problem (6.7) gelöst. Danach setzen wir die skalare Fundamentallösung  $G(P, Q)$  in (6.6) ein, um die Fundamentallösung  $U_{KJ}(P, Q)$  des LAMÉ-NAVIERschen Systems (6.4) zu bestimmen. Die anderen Fundamentaltensoren, die zur Lösung der Integralgleichungen benötigt werden, lassen sich durch Ableiten von  $U_{KJ}$  bzw.  $U_{kj}$  berechnen (siehe Kapitel 4). Die allgemeine Fundamentallösung des Problems  $s$ -(1,0) ist in Westphal Jr., Schnack und de Barcellos [117] angegeben.

## 6.3 Berechnung der Determinante

Die Fundamentallösungen beider Probleme  $s$ -(1,0) und  $s$ -(3,2) werden durch die Determinanten der Matrizen  $\mathbf{L}$ , Gleichungen (3.61) und (3.65), berechnet. Für  $G_3(P, Q)$  und  $G_6(P, Q)$ , welche die skalaren Fundamentallösungen des Problems  $s$ -(1,0) bzw.  $s$ -(3,2) darstellen, gilt nach Gl. (6.7),

$$\det[\mathbf{L}]_{3 \times 3} G_3(P, Q) = -\delta(P, Q) \quad , \quad (6.8a)$$

$$\det[\mathbf{L}]_{6 \times 6} G_6(P, Q) = -\delta(P, Q) \quad . \quad (6.8b)$$

Die Berechnung von  $\det[\mathbf{L}]_{3 \times 3}$  kann per Hand durchgeführt werden. Zur Berechnung von  $\det[\mathbf{L}]_{6 \times 6}$  sind die Rechenschritte aber zu kompliziert. Zur Automatisierung dieser Aufgabe wird das Computer-Algebra-Programm MAPLE angewendet. Es ergeben sich folgende Lösungen:

- Für das Problem  $s$ -(1,0):

$$\det[\mathbf{L}]_{3 \times 3} = - \left( \frac{1 - \nu}{2} \right)^2 D^3 \lambda^2 \Delta^2 [\Delta - \lambda^2] \quad ; \quad (6.9)$$

- Für das Problem  $s$ -(3,2):

$$\det[\mathbf{L}]_{6 \times 6} = \left(\frac{3}{128}\right)^2 \left(\frac{1-\nu}{2}\right)^4 D^6 \lambda^2 \Delta^2 [28\Delta^2 - 280\lambda^2\Delta + 225\lambda^4] [a\Delta^2 + b\Delta + c] , \quad (6.10)$$

wobei

$$a := 1400\lambda^2 [55(1+\nu)\gamma + 54] , \quad (6.11a)$$

$$b := 56 [1215(1-\nu)(11\eta + 10\lambda^2)\eta - 28\zeta(55(1+\nu)\gamma + 54)] , \quad (6.11b)$$

$$c := -6075(1-\nu)\lambda^2 [243(1-\nu)\eta^2 - 28\zeta((1+\nu)\gamma + 2)] . \quad (6.11c)$$

Diese Determinanten können wir folgendermaßen schreiben:

$$\det[\mathbf{L}]_{3 \times 3} = A_3 (h^2\Delta)^2 [h^2\Delta - {}^{s-(1,0)}S_1^2] , \quad (6.12a)$$

$$\det[\mathbf{L}]_{6 \times 6} = A_6 (h^2\Delta)^2 [h^2\Delta - {}^{s-(3,2)}S_1^2] [h^2\Delta - {}^{s-(3,2)}S_2^2] [h^2\Delta - {}^{s-(3,2)}P_1^2] [h^2\Delta - {}^{s-(3,2)}P_2^2] \quad (6.12b)$$

mit

$$A_3 := -\left(\frac{1-\nu}{2}\right)^2 \left(\frac{D}{h^2}\right)^3 \lambda^2 , \quad (6.13a)$$

$$A_6 := \frac{9282994875(1+\nu)k_E}{8[63(1-\nu) - 121\nu_z^2]\tau_1^2\tau_2^2} \left(\frac{1-\nu}{2}\right)^6 \left(\frac{D}{h^2}\right)^6 \lambda^4 \quad (6.13b)$$

und  $\lambda$  aus Gl. (3.23) mit  $h = 2c$ .

Diese Differentialgleichungen entsprechen genau den Gleichungen, die im vorherigen Kapitel hergeleitet wurden. Für das Problem  $s$ -(1,0) haben wir einen biharmonischen Operator  $\Delta^2$  (siehe Gl. (6.13b)) und einen metaharmonischen (modifizierten HELMHOLTZschen) Operator  $[h^2\Delta - {}^{s-(1,0)}S_1^2]$  (siehe Gl. (6.5a)).

Für das Problem  $s$ -(3,2) haben wir wieder einen biharmonischen Operator und vier metaharmonische Operatoren, siehe Gleichungen (6.6a) und (6.19b). Bei den metaharmonischen Operatoren müssen die LAPLACESchen Operatoren der unbekannteten Funktion multipliziert mit einem kleinen Zahlenfaktor und dem kleinen  $h^2$  den Betrag der Funktion selbst ergeben, d.h. die Lösungsfunktionen müssen Exponentialfunktionen mit großen Exponenten enthalten,<sup>1</sup> also vom Rande her rasch abklingen. Dabei ist der Zahlenfaktor  ${}^{s-(1,0)}S_2^{-2}$  nur etwa ein Zehntel des Wertes von  ${}^{s-(1,0)}S_1^{-2}$ , d.h. diese Lösung ist nur in einem noch schmalen Randbereich wirksam (siehe Preußner [72]).<sup>2</sup> Alle metaharmonischen Operatoren klingen rasch vom Rande aus ab und werden daher Randschichtoperatoren genannt. Der einzige nicht abklingende Operator ist der biharmonische Operator

<sup>1</sup>Für  $y(x) - \alpha^{-1}y'(x) = 0$  ist  $y(x) = Ce^{\alpha x}$ , wobei  $C$  eine Konstante ist.

<sup>2</sup>Die metaharmonischen Gleichungen werden folgendermaßen geschrieben:

$$\left[1 - \frac{h^2}{{}^{s-(1,0)}S_\alpha^2} \Delta\right] ,$$

wobei  ${}^{s-(1,0)}S_1^{-2} / {}^{s-(1,0)}S_2^{-2} = 10,3478$  (siehe Gl. (6.6b)).

(siehe Poniatovskii [68]). Es ist zu erkennen, dass die Fundamentallösung aller im Kapitel 5 hergeleiteten Gleichungen Randschichteffekte enthält. Ein Produkt modifizierter HELMHOLTZschen Gleichungen für die skalare Fundamentallösung wie (6.12) tritt auch für anderen Operatoren auf, wie z.B. für thermoelastische Probleme, siehe Tehrani und Eslami [97].

## 6.4 Die skalare Fundamentallösung $G$

Partikuläre Fundamentallösungen für die obigen Gleichungen sind bekannt (siehe z.B. Cheng, Antes und Ortner [15]). Die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen (6.12) sind

- der biharmonische Operator,  $\Delta^2 V_b(r) = 0$  (innere Lösung):

$$V_b(r) := C_1 r^2 \ln r + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 \quad , \quad (6.14)$$

wobei  $C_1 - C_4$  beliebige Konstanten sind;

- der metaharmonische Operator,  $[\Delta - \kappa^2] V_m(r) = 0$  (Randschichtlösung):

$$V_m(r) := C_5 K_0(\kappa r) + C_6 I_0(\kappa r) \quad , \quad (6.15)$$

wobei  $C_5$  und  $C_6$  beliebige Konstanten und  $I_0(r)$  und  $K_0(r)$  modifizierte BESSELSche Funktionen nullter Ordnung und zweiter Art sind (siehe Abramowitz und Stegun [1]), mit

–  $\kappa := {}^{s-(1,0)}S_1/h = \lambda$  für das Problem  $s-(1,0)$  ( $\lambda$  aus Gl. (3.23));

–  $\kappa$  ist gleich  $\lambda_p$ ,  $p = 1, \dots, 4$  für das Problem  $s-(3,2)$ , wobei

$$\lambda_1 := {}^{s-(3,2)}S_1/h \quad , \quad \lambda_2 := {}^{s-(3,2)}S_2/h \quad , \quad (6.16a)$$

$$\lambda_3 := {}^{s-(3,2)}P_1/h \quad , \quad \lambda_4 := {}^{s-(3,2)}P_2/h \quad . \quad (6.16b)$$

Die allgemeinen Fundamentallösungen sind:

- Problem  $s-(1,0)$

$$G_3(r) := C_1 r^2 \ln r + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 + C_5 K_0(\lambda r) + C_6 I_0(\lambda r) \quad ; \quad (6.17)$$

- Problem  $s-(3,2)$

$$G_6(r) := C_1 r^2 \ln r + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 + \sum_{i=1}^4 C_{(4+i)} K_0(z_i) + \sum_{i=1}^4 C_{(8+i)} I_0(z_i) \quad , \quad (6.18)$$

wobei

$$z_i = \lambda_i r \quad . \quad (6.19)$$

## 6.5 Die Bestimmung der Koeffizienten

Die Koeffizienten  $C_1$  bis  $C_{12}$  sind so zu bestimmen, dass die Gl. (6.8b) mit der verallgemeinerten DIRACschen Deltafunktion auf der rechten Seite erfüllt wird. Für die Berechnung der Konstanten  $C_1$  bis  $C_6$  in Gl. (6.17) siehe Westphal Jr., Schnack und de Barcellos [117]. Das Problem läßt sich durch die Anwendung der Theorie der Distributionen und mittels partieller Integration (zweite GREENSche Formel) lösen.

Die Lösungen der Gleichungen (6.8), die in den Gleichungen (6.17) und (6.18) angegeben sind, gelten für  $r = |P - Q| \neq 0$ . In diesem Fall sind die Gleichungen (6.8) homogen. Für den Fall  $r = 0$  sind die Gleichungen (6.8) aber singular. Für das Problem  $s$ -(3,2) haben wir, gemäß der Theorie der Distributionen (siehe Stakgold [93])

$$\langle G_6(r), \det[\mathbf{L}]_{6 \times 6} \phi(r) \rangle = -\phi(0) \quad , \quad \phi(r) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \quad , \quad (6.20)$$

wobei  $\langle a, b \rangle$  das duale Produkt zwischen  $a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  und  $b \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  ist;  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  ist der Raum der Testfunktionen in  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  der dazugehörige duale Raum, der Raum der Distributionen.

Mit  $\lambda_p$  ( $p = 1, \dots, 4$ ) aus den Gleichungen (6.16) schreiben wir für Gl. (6.12b)

$$\det[\mathbf{L}]_{6 \times 6} = A_6 (h^2 \Delta)^2 \prod_{i=1}^4 [\Delta - \lambda_i^2] \quad . \quad (6.21)$$

Aus den Gleichungen (6.20) und (6.21) ergibt sich

$$\left\langle G_6(r), A_6 (h^2 \Delta)^2 \prod_{i=1}^4 [\Delta - \lambda_i^2] \phi(r) \right\rangle = -\phi(0) \quad . \quad (6.22)$$

Wir wenden die zweite GREENSche Formel

$$\int_{\Omega} [v \Delta w - w \Delta v] \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left[ v \frac{dw}{dn} - w \frac{dv}{dn} \right] \, d\Gamma \quad (6.23)$$

sechs Mal zur partiellen Integration an und erhalten (siehe Abb. 6.1)<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Auf  $\Gamma_\varepsilon$  ist  $\frac{d}{dn}(\cdot) = -\frac{d}{dr}(\cdot)$ .

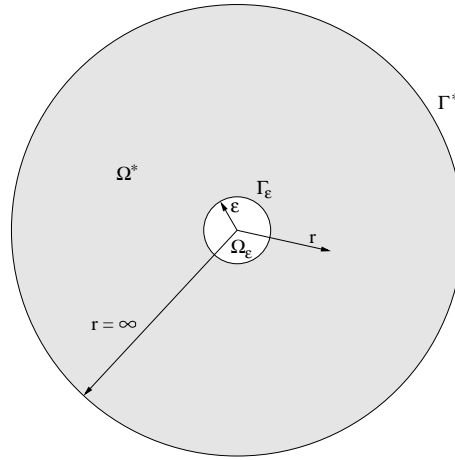


Abbildung 6.1: Geometriedarstellung für die partielle Integration.

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Gamma_\varepsilon} G_6(r) \Delta \prod_{i=1}^4 [\Delta - \lambda_i^2] \frac{d\phi(r)}{dr} d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{dG_6(r)}{dr} \Delta \prod_{i=1}^4 [\Delta - \lambda_i^2] \phi(r) d\Gamma + \\
& - \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta G_6(r) \prod_{i=1}^4 [\Delta - \lambda_i^2] \frac{d\phi(r)}{dr} d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta \frac{dG_6(r)}{dr} \prod_{i=1}^4 [\Delta - \lambda_i^2] \phi(r) d\Gamma + \\
& - \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta^2 G_6(r) \prod_{i=2}^4 [\Delta - \lambda_i^2] \frac{d\phi(r)}{dr} d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta^2 \frac{dG_6(r)}{dr} \prod_{i=2}^4 [\Delta - \lambda_i^2] \phi(r) d\Gamma + \\
& - \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta^2 [\Delta - \lambda_1^2] G_6(r) \prod_{i=3}^4 [\Delta - \lambda_i^2] \frac{d\phi(r)}{dr} d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta^2 [\Delta - \lambda_1^2] \frac{dG_6(r)}{dr} \prod_{i=3}^4 [\Delta - \lambda_i^2] \phi(r) d\Gamma + \\
& - \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta^2 \prod_{i=1}^2 [\Delta - \lambda_i^2] G_6(r) [\Delta - \lambda_4^2] \frac{d\phi(r)}{dr} d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta^2 \prod_{i=1}^2 [\Delta - \lambda_i^2] \frac{dG_6(r)}{dr} [\Delta - \lambda_4^2] \phi(r) d\Gamma + \\
& - \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta^2 \prod_{i=1}^3 [\Delta - \lambda_i^2] G_6(r) \frac{d\phi(r)}{dr} d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta^2 \prod_{i=1}^3 [\Delta - \lambda_i^2] \frac{dG_6(r)}{dr} \phi(r) d\Gamma + \\
& + \int_{\Omega^* - \Omega_\varepsilon} \phi(r) \Delta^2 \prod_{i=1}^4 [\Delta - \lambda_i^2] G_6(r) d\Omega = -\frac{1}{A_6 h^4} \phi(0) \quad . \quad (6.24)
\end{aligned}$$



Die Ableitungen von  $G_6(r)$ , Gl. (6.18), sind:

$$\begin{aligned} \frac{dG_6(r)}{dr} = C_1 r (2 \ln r + 1) + C_2 \frac{1}{r} + 2C_3 r - \sum_{i=1}^4 C_{(4+i)} \lambda_i K_1(z_i) + \\ + \sum_{i=1}^4 C_{(8+i)} \lambda_i I_1(z_i) \quad , \quad (6.25a) \end{aligned}$$

$$\Delta G_6(r) = 4C_1 (\ln r + 1) + 4C_3 + \sum_{i=1}^4 C_{(4+i)} \lambda_i^2 K_0(z_i) + \sum_{i=1}^4 C_{(8+i)} \lambda_i^2 I_0(z_i) \quad , \quad (6.25b)$$

$$\Delta \frac{dG_6(r)}{dr} = 4C_1 \frac{1}{r} - \sum_{i=1}^4 C_{(4+i)} \lambda_i^3 K_1(z_i) + \sum_{i=1}^4 C_{(8+i)} \lambda_i^3 I_1(z_i) \quad , \quad (6.25c)$$

$$\Delta^2 G_6(r) = \sum_{i=1}^4 C_{(4+i)} \lambda_i^4 K_0(z_i) + \sum_{i=1}^4 C_{(8+i)} \lambda_i^4 I_0(z_i) \quad , \quad (6.25d)$$

$$\Delta^2 \frac{dG_6(r)}{dr} = - \sum_{i=1}^4 C_{(4+i)} \lambda_i^5 K_1(z_i) + \sum_{i=1}^4 C_{(8+i)} \lambda_i^5 I_1(z_i) \quad , \quad (6.25e)$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 [\Delta - \lambda_1^2] G_6(r) = \sum_{i=2}^4 C_{(4+i)} \lambda_i^4 [\lambda_i^2 - \lambda_1^2] K_0(z_i) + \\ + \sum_{i=2}^4 C_{(8+i)} \lambda_i^4 [\lambda_i^2 - \lambda_1^2] I_0(z_i) \quad , \quad (6.25f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 [\Delta - \lambda_1^2] \frac{dG_6(r)}{dr} = - \sum_{i=2}^4 C_{(4+i)} \lambda_i^5 [\lambda_i^2 - \lambda_1^2] K_1(z_i) + \\ + \sum_{i=2}^4 C_{(8+i)} \lambda_i^5 [\lambda_i^2 - \lambda_1^2] I_1(z_i) \quad , \quad (6.25g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 \prod_{i=1}^2 [\Delta - \lambda_i^2] G_6(r) = \sum_{i=3}^4 C_{(4+i)} \lambda_i^4 [\lambda_i^2 - \lambda_1^2] [\lambda_i^2 - \lambda_2^2] K_0(z_i) + \\ + \sum_{i=3}^4 C_{(8+i)} \lambda_i^4 [\lambda_i^2 - \lambda_1^2] [\lambda_i^2 - \lambda_2^2] I_0(z_i) \quad , \quad (6.25h) \end{aligned}$$

$$\Delta^2 \prod_{i=1}^2 [\Delta - \lambda_i^2] \frac{dG_6(r)}{dr} = - \sum_{i=3}^4 C_{(4+i)} \lambda_i^5 [\lambda_i^2 - \lambda_1^2] [\lambda_i^2 - \lambda_2^2] K_1(z_i) + \sum_{i=3}^4 C_{(8+i)} \lambda_i^5 [\lambda_i^2 - \lambda_1^2] [\lambda_i^2 - \lambda_2^2] I_1(z_i) \quad , \quad (6.25i)$$

$$\Delta^2 \prod_{i=1}^3 [\Delta - \lambda_i^2] G_6(r) = \lambda_4^4 \prod_{i=1}^3 [\lambda_4^2 - \lambda_i^2] \{C_8 K_0(z_4) + C_{12} I_0(z_4)\} \quad , \quad (6.25j)$$

$$\Delta^2 \prod_{i=1}^3 [\Delta - \lambda_i^2] \frac{dG_6(r)}{dr} = \lambda_4^5 \prod_{i=1}^3 [\lambda_4^2 - \lambda_i^2] \{-C_8 K_1(z_4) + C_{12} I_1(z_4)\} \quad , \quad (6.25k)$$

$$\Delta^2 \prod_{i=1}^4 [\Delta - \lambda_i^2] G_6(r) = 0 \quad . \quad (6.25l)$$

Nun können wir die Integrale in Gl. (6.24) analysieren. Die Integrale 1, 3, 5, 7, 9 und 11 sind regulär und verschwinden für den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Um die Integrale 2, 4, 6, 8 und 10 zu regularisieren, setzen wir (in der angegebenen Reihenfolge):

$$C_2 = C_5 + C_6 + C_7 + C_8 \quad , \quad (6.26a)$$

$$C_1 = \frac{1}{4} [C_5 \lambda_1^2 + C_6 \lambda_2^2 + C_7 \lambda_3^2 + C_8 \lambda_4^2] \quad , \quad (6.26b)$$

$$C_5 \lambda_1^4 + C_6 \lambda_2^2 + C_7 \lambda_3^2 + C_8 \lambda_4^4 = 0 \quad , \quad (6.26c)$$

$$C_6 \lambda_2^4 [\lambda_2^2 - \lambda_1^2] + C_7 \lambda_3^4 [\lambda_3^2 - \lambda_1^2] + C_8 \lambda_4^4 [\lambda_4^2 - \lambda_1^2] = 0 \quad , \quad (6.26d)$$

$$C_7 \lambda_3^4 [\lambda_3^2 - \lambda_1^2] [\lambda_3^2 - \lambda_2^2] + C_8 \lambda_4^4 [\lambda_4^2 - \lambda_1^2] [\lambda_4^2 - \lambda_2^2] = 0 \quad . \quad (6.26e)$$

Das letzte Randintegral in Gl. (6.24) gibt uns die notwendige Singularität, so dass aus Gl. (6.25k)

$$C_8 = \frac{1}{2\pi A_6 h^4 \lambda_4^4 \prod_{i=1}^3 [\lambda_4^2 - \lambda_i^2]} \quad (6.27)$$

folgt.

Daraus ergeben sich folgende Beziehungen:

$$C_1 = \frac{-\lambda_4^2}{4\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2} [\lambda_4^2 - \lambda_1^2] [\lambda_4^2 - \lambda_2^2] [\lambda_4^2 - \lambda_3^2] C_8 \quad , \quad (6.28a)$$

$$C_2 = \frac{\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2\lambda_4^2 + \lambda_3^2\lambda_4^2\lambda_1^2 + \lambda_4^2\lambda_1^2\lambda_2^2}{\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2} [\lambda_4^2 - \lambda_1^2] [\lambda_4^2 - \lambda_2^2] [\lambda_4^2 - \lambda_3^2] C_8 \quad , \quad (6.28b)$$

$$C_5 = -\frac{\lambda_4^4 [\lambda_4^2 - \lambda_2^2] [\lambda_4^2 - \lambda_3^2]}{\lambda_1^4 [\lambda_1^2 - \lambda_2^2] [\lambda_1^2 - \lambda_3^2]} C_8 \quad , \quad (6.28c)$$

$$C_6 = -\frac{\lambda_4^4 [\lambda_4^2 - \lambda_1^2] [\lambda_4^2 - \lambda_3^2]}{\lambda_2^4 [\lambda_2^2 - \lambda_1^2] [\lambda_2^2 - \lambda_3^2]} C_8 \quad (6.28d)$$

$$C_7 = -\frac{\lambda_4^4 [\lambda_4^2 - \lambda_1^2] [\lambda_4^2 - \lambda_2^2]}{\lambda_3^4 [\lambda_3^2 - \lambda_1^2] [\lambda_3^2 - \lambda_2^2]} C_8 \quad (6.28e)$$

$$C_8 = \frac{1}{2\pi A_6 h^4 \lambda_4^4 \prod_{i=1}^3 [\lambda_4^2 - \lambda_i^2]} \quad , \quad (6.28f)$$

$$C_9 = 0 \quad , \quad (6.28g)$$

$$C_{10} = 0 \quad , \quad (6.28h)$$

$$C_{11} = 0 \quad , \quad (6.28i)$$

$$C_{12} = 0 \quad . \quad (6.28j)$$

Die Konstanten  $C_9$ ,  $C_{10}$ ,  $C_{11}$  und  $C_{12}$  ergeben sich aus der Regularitätsbedingung für  $\varepsilon \rightarrow \infty$  (siehe Brebbia, Telles und Wrobel [10], Kerr und El-Sibaie [47]).

Analog zum Problem  $s$ -(1,0) sind zwei Konstanten frei,  $C_3$  und  $C_4$ . Wir setzen diese Konstanten aber nicht gleich Null, wie es normalerweise gemacht wird. Wir behandeln folglich die allgemeine Fundamentallösung und können so die Tensoren  $U_{IJ}$ ,  $T_{IJ}$  usw. mit verbesserten Eigenschaften herleiten, siehe Westphal Jr., de Barcellos und Tomás Pereira [116]. Die Konstanten  $C_3$  und  $C_4$  werden folgendermaßen gewählt:

$$C_3 = F_1 C_8 \quad , \quad C_4 = F_2 C_8 \quad . \quad (6.29)$$

Damit sind alle Konstanten als Funktion der Konstanten  $C_8$  geschrieben. Daher kann  $C_8$  in sämtlichen Tensoren, die in den Integralgleichungen benötigt werden, ausgeklammert werden.  $F_1$  und  $F_2$  sind frei wählbare Konstanten.

## 6.6 Berechnung der Kofaktoren

Um den Tensor  $U_{KJ}$  berechnen zu können, brauchen wir die Kofaktoren der Matrix  $L_{KJ}$ , siehe Gl. (6.6). Die Kofaktoren werden folgendermaßen geschrieben (siehe Gl. (3.62c))

$$[\mathbf{L}^{co}]_{6 \times 6} := \begin{bmatrix} [\mathbf{L}_A^{co}]_{3 \times 3} & [\mathbf{L}_{AB}^{co}]_{3 \times 3} \\ & [\mathbf{L}_B^{co}]_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{Sym} \quad . \quad (6.30)$$

Die Element der Matrix  $[\mathbf{L}_B^{co}]_{3 \times 3}$  sind:

$$\begin{aligned}
L_{B_{\alpha\beta}}^{co} = & 36K\lambda^2\Delta^2 \left\{ [\Delta - \lambda^2] \left\{ 25\lambda^2\Delta^2 [28(1 + \nu_A)(1 + \nu_B) - 27\nu_{AB}^2] + \right. \right. \\
& + 2\Delta \left[ -14\zeta (28(1 + \nu_A)(1 + \nu_B) - 27\nu_{AB}^2) + \right. \\
& + 9\eta (14\eta(28\nu_A + 27\nu_B - 54\nu_{AB} + 55) + 25\lambda^2(28(1 + \nu_A) - 27\nu_{AB})) \left. \right] + \\
& + 225\lambda^2(28\zeta(1 + \nu_A) - 243\eta^2) \left. \right\} \delta_{\alpha\beta} + \\
& - \left\{ 25\lambda^2\Delta^2 [28\nu_B(1 + \nu_A) - 27\nu_{AB}^2] + \right. \\
& + \Delta \left[ 25\lambda^2 \left( 18\eta(28(1 + \nu_A) - 27\nu_{AB}) - \lambda^2(28\nu_B(1 + \nu_A) - 27\nu_{AB}^2 - 252(1 + \nu_A)) \right) \right. \\
& - 28\zeta(28\nu_B(1 + \nu_A) - 27\nu_{AB}) + 252\eta^2(28(1 + \nu_A) + 27(\nu_B - 2\nu_{AB})) \left. \right] + \\
& - \lambda^2 \left[ 225\lambda^2(2\eta(28(1 + \nu_A) - 27\nu_{AB}) + 25\lambda^2(1 + \nu_A)) + \right. \\
& - 28\zeta(28\nu_B(1 + \nu_A) - 27(\nu_A + \nu_{AB}^2 + 1)) + \\
& \left. \left. 9\eta^2(28(28\nu_A + 27\nu_B - 54\nu_{AB}) + 55) \right] \right\} \partial_{\alpha\beta}^2 \left. \right\} , \quad (6.31a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{B_{\alpha 3}}^{co} = & -36K\lambda^2\Delta^2 [28\Delta^2 - 280\lambda^2\Delta + 225\lambda^4] \\
& [\eta(28\nu_A - 27\nu_{AB} + 28) + 25\lambda^2(1 + \nu_A)] \partial_{\alpha} , \quad (6.31b)
\end{aligned}$$

$$L_{B_{3\alpha}}^{co} = L_{B_{\alpha 3}}^{co} , \quad (6.31c)$$

$$\begin{aligned}
L_{B_{33}}^{co} = & 4K\lambda^2\Delta^2 [28\Delta^2 - 280\lambda^2\Delta + 225\lambda^4] \\
& [\Delta [28(1 + \nu_A)(1 + \nu_B) - 27\nu_{AB}^2] - 225\lambda^2(1 + \nu_A)] , \quad (6.31d)
\end{aligned}$$

wobei

$$K := \frac{9}{32768} D^5 (1 - \nu)^5 . \quad (6.32)$$

Die Kofaktoren wurden mit dem Programm MAPLE berechnet. Die auftretenden Operatoren sind im wesentlichen von der Form

$$\Delta , \quad \partial_{\alpha\beta} , \quad \partial_{\alpha} , \quad 1$$

sowie Produkte dieser vier Grundoperatoren bis  $\Delta^4$ .

Man erkennt, dass die partiellen Ableitungen nur in den Formen  $\partial_{\alpha\beta}$  und  $\partial_\alpha$  auftreten. Alle partiellen Ableitungen höherer Ordnung ergeben sich in der Form von LAPLACESchen Operatoren.

Die Ausdrücke der Kofaktoren werden noch vereinfacht, indem adäquate Konstanten definiert werden. (Beispielweise kann die Konstante  $28(1 + \nu_A)(1 + \nu_B) - 27\nu_{AB}^2$  in Gl. (6.31) als neue Konstante definiert werden.) Es ist auch möglich, die notwendigen Rechenschritte zur Berechnung aller Tensoren mit dem Programm MAPLE zu automatisieren.

Wichtig für die Realisierbarkeit der allgemeinen Fundamentallösung ist die folgende Komponente des Kofaktors:

$$\begin{aligned}
 L_{A33}^{co} = & 189K \left[ 225\lambda^4 + 28\Delta^2 - 280\lambda^2\Delta \right] \left\{ \lambda^2\Delta^3 \left[ 28 + 28\nu_A - 27\nu_{AB}^2 + 28\nu_B + 28\nu_A\nu_B \right] + \right. \\
 & + \Delta^2 \left[ 243\eta^2\nu_B + 495\eta^2 - 25\lambda^4 - 54\eta\nu_B\lambda^2 - 28\zeta\nu_A - 486\nu_{AB}\eta^2 + 450\eta\lambda^2 - 28\zeta + \right. \\
 & + 504\lambda^2\nu_A\eta - 432\lambda^2\nu_{AB}\eta - 28\nu_B\zeta + 27\nu_{AB}^2\zeta - 28\nu_A\nu_B\zeta + 252\nu_A\eta^2 - 25\lambda^2\nu_B \left. \right] + \\
 & + \lambda^2\Delta \left[ 252\zeta\nu_A - 450\eta\lambda^2 - 2925\eta^2 + 54\zeta\nu_{AB} + 28\nu_B\zeta + 280\zeta \right] + \\
 & \left. - 225\lambda^4\zeta \right\} \quad (6.33)
 \end{aligned}$$

In dieser Komponente des Kofaktors gibt es ein Glied, das keinen Differentialoperator enthält, nämlich  $-9568125K\lambda^8\zeta$ . Das hat zur Folge, dass bei der Berechnung von  $U_{33}$  aus Gl. (6.6) die Konstante  $C_4$  der Fundamentallösung (6.18) nicht eliminiert wird. Die anderen Komponenten des Kofaktors sind reine Differentialoperatoren.

Im Anhang C geben wir  $L_{A11}^{co}$  in der Form an, die mit dem MAPLE-Programm berechnet wurde, wobei  $\xi_1 \equiv \partial_1$  und  $\xi_1^2 \equiv \partial_{11}^2$  zu setzen ist (siehe Constanda [17]).

## 6.7 Die allgemeine Fundamentallösung des Problems $s$ -(1,0)

Wir werden zunächst zeigen, dass die in Westphal Jr., Schnack und de Barcellos [117] abgeleitete allgemeine Fundamentallösung des Problems  $s$ -(1,0) widerspruchsfrei ist. Diese Lösung lautet:

$$\begin{aligned}
 U_{\alpha\beta}(r) &= \frac{1}{4\pi D(1-\nu)} \left\{ [4B(\lambda r) - (1-\nu)\ln(\alpha_1 r)]\delta_{\alpha\beta} - [4A(\lambda r) + (1-\nu)]r_{,\alpha}r_{,\beta} \right\} , \\
 U_{\alpha 3}(r) &= -U_{3\alpha}(r) = \frac{1}{4\pi D} \ln(\alpha_1 r) r r_{,\alpha} , \\
 U_{33}(r) &= \frac{1}{8\pi D} \left\{ r^2 \left[ \ln(\alpha_1 r) - \frac{1}{2} \right] - \frac{8}{(1-\nu)\lambda^2} \ln(\alpha_2 r) \right\} , \quad (6.34)
 \end{aligned}$$

wobei

$$A(z) := K_0(z) + \frac{2}{z} \left( K_1(z) - \frac{1}{z} \right) , \quad (6.35a)$$

$$B(z) := K_0(z) + \frac{1}{z} \left( K_1(z) - \frac{1}{z} \right) . \quad (6.35b)$$

Darin sind  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  freie Konstanten, die sich aus  $C_3$  und  $C_4$  ergeben,  $z := \lambda r$  und  $\lambda^2 = \frac{5}{2c^2} k_G$  (siehe Gleichungen (6.17), (6.19) und (3.23)).

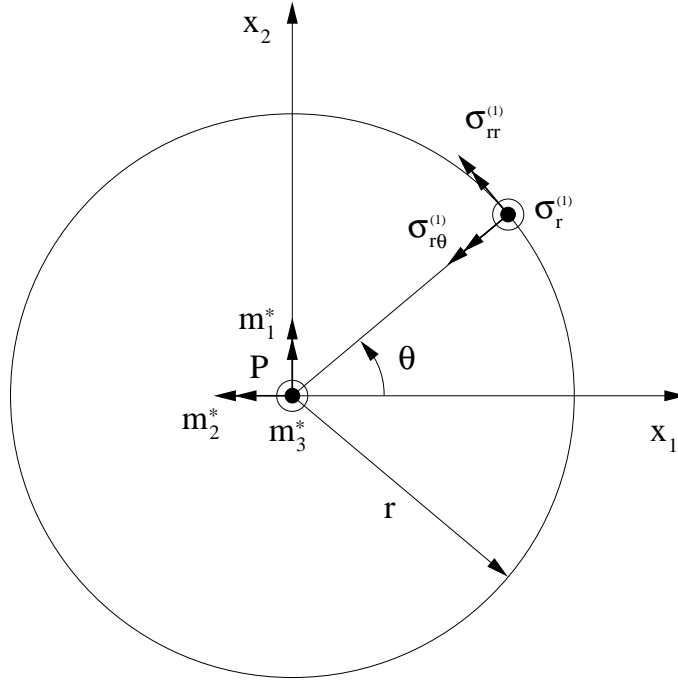


Abbildung 6.2: Kreisförmiger Plattenausschnitt mit dem Radius  $r$ .

Das Gleichgewicht eines kreisförmigen Plattenausschnittes, der durch eine Einheitseinzelbelastung im Mittelpunkt  $P$  beansprucht wird (siehe Abb 6.2), ergibt in Polarkoordinaten  $(r, \theta)$  (siehe Reismann [77], S. 143) mit  $m_\alpha^* = 0$

$$\psi_r(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{-m_3^*(P)}{4\pi D} r \ln r , \quad (6.36a)$$

$$w(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{m_3^*(P)}{8\pi D} \left[ r^2 \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) - \frac{8}{(1-\nu)\lambda^2} \ln r \right] , \quad (6.36b)$$

wobei  $\psi_r(\bar{\mathbf{x}})$  die radiale Rotation und  $w(\bar{\mathbf{x}})$  die Durchbiegung bezeichnen. Die Rotationen bezüglich der Achsen  $x_\alpha$  sind durch

$$\psi_\alpha(\bar{\mathbf{x}}) = \psi_r(\bar{\mathbf{x}}) r_{, \alpha} \quad (6.37)$$

gegeben, wobei  $r_{,1} = \cos \theta$  und  $r_{,2} = \sin \theta$ . Daraus folgt

$$\psi_\alpha(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{-m_3^*}{4\pi D} \ln(r) r r_{, \alpha} , \quad (6.38a)$$

$$w(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{m_3^*}{8\pi D} \left[ r^2 \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) - \frac{8}{(1-\nu)\lambda^2} \ln r \right] . \quad (6.38b)$$

Aus Gl. (4.23a) ergibt sich mit  $m_\alpha^* = 0^4$  und  $m_3^* = 1$ :

$$u_\alpha^* = U_{3\alpha} \quad , \quad (6.39a)$$

$$u_3^* = U_{33} \quad . \quad (6.39b)$$

Aus den Gleichungen (6.34), (6.38) und (6.39) folgt schließlich mit  $\alpha_\beta := 1$ :

$$\psi_\alpha = u_\alpha^* \equiv U_{3\alpha} \quad , \quad (6.40a)$$

$$w = u_3^* \equiv U_{33} \quad . \quad (6.40b)$$

Diese Schlussfolgerung kann man nur mit Hilfe der allgemeinen Fundamentallösung von Westphal Jr., Schnack und de Barcellos [117] ziehen. Mit der weitverbreiteten Fundamentallösung von van der Weeën [106, 107] und Constanda [18] ist es nicht möglich, diese Schlussfolgerung zu ziehen. Deshalb benutzen wir die Bezeichnung *allgemeine* Fundamentallösung, weil die freien Konstanten berücksichtigt werden und die daraus resultierende Fundamentallösung widerspruchsfrei ist.

Abschließend wird die obige Fundamentallösung  $U_{ij}(r)$  so zerlegt (siehe Westphal Jr., Andrä und Schnack [115]), dass auf einer Seite die KIRCHHOFFSche Lösung  $U_{ij}^K(r)$  wiedergegeben wird, während auf der anderen Seite die REISSNER- und MINDLINSche Lösung  $U_{ij}^{RM}(r)$  dargestellt wird, d.h.  $U_{ij}(r) \equiv U_{ij}^{RM}(r) = U_{ij}^K(r) + U_{ij}^{Sh}(r)$ , wobei  $U_{ij}^{Sh}(r)$  die Fundamentallösung infolge reiner Schubverzerrungen darstellt. Diese lauten

$$\begin{aligned} U_{\alpha\beta}^K(r) &= \frac{-1}{4\pi D} \left[ \ln(\alpha_1 r) \delta_{\alpha\beta} + r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad , \\ U_{\alpha 3}^K(r) &= -U_{3\alpha}^K(r) = \frac{1}{4\pi D} \ln(\alpha_1 r) r r_{,\alpha} \quad , \\ U_{33}^K(r) &= \frac{r^2}{8\pi D} \left[ \ln(\alpha_1 r) - \frac{1}{2} \right] \quad ; \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} U_{\alpha\beta}^{Sh}(r) &= \frac{1}{\pi D(1-\nu)} \left[ B(\lambda r) \delta_{\alpha\beta} - A(\lambda r) r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad , \\ U_{\alpha 3}^{Sh}(r) &= U_{3\alpha}^{Sh}(r) = 0 \quad , \\ U_{33}^{Sh}(r) &= \frac{-1}{\pi D(1-\nu)\lambda^2} \ln(\alpha_2 r) \quad . \end{aligned} \quad (6.42)$$

## 6.8 Beispiel für das Modell $s$ -(1,0) (Probleme K, Sh und RM)

Eine fest eingespannte MINDLINSche Kreisplatte mit dem Radius  $a = 1/2$  unterliegt einer gleichverteilten Einheitsbelastung  $\sigma^{(1)}$ . In diesem Fall werden die Gebietsintegrale durch äquivalente Randintegrale ersetzt, siehe Gl. (4.49) und (4.50). Für dieses Problem sind die analytischen Lösungen sowohl für das KIRCHHOFFSche als auch für das REISSNERSche und

<sup>4</sup>Da in diesem Fall die wirkenden Einheitseinzelmomente gleich Null sind.

MINDLINSche Modell bekannt (siehe [20,106,115]). Die Lösung des REISSNERSchen Modells ist

$$\begin{aligned}
\frac{64D}{a^4\sigma^{(1)}}u_3^{(1)}(r) &= \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \left\{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 + 2C_1\right\} , \\
\frac{16D}{a^3\sigma^{(1)}}u_r^{(1)}(r) &= \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \frac{r}{a} , \\
u_\theta^{(1)}(r) &= 0 , \\
\frac{16}{a^2\sigma^{(1)}}\sigma_{rr}^{(1)}(r) &= 1 + \nu(1 + C_2) - (3 + \nu)\left(\frac{r}{a}\right)^2 , \\
\frac{16}{a^2\sigma^{(1)}}\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r) &= 1 + \nu(1 + C_2) - (1 + 3\nu)\left(\frac{r}{a}\right)^2 , \\
\sigma_{r\theta}^{(1)}(r) &= 0 , \\
\frac{2}{a\sigma^{(1)}}\sigma_r^{(1)}(r) &= -\frac{r}{a} , \\
\sigma_\theta^{(1)}(r) &= 0 ,
\end{aligned} \tag{6.43}$$

wobei

$$C_1 = C_2 := \frac{4}{3k^2(1 - \nu)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 . \tag{6.44}$$

Für das MINDLINSche Modell ist  $C_2 := 0$  und für das KIRCHHOFFSche Modell sind  $C_1 = C_2 := 0$ .

Da es keine Ecke gibt, sind die Lösungen der Probleme RM und K in Einstimmung, wenn die Platte dünn ist (oder wenn der transversale Schubmodul sehr groß ist), obgleich nur zwei Randbedingungen für das KIRCHHOFFSche Problem erforderlich sind.

Wir analysieren eine isotrope Platte ( $k_G = 1$ ), mit  $k^2 = 5/6$  und  $\nu = 0,3$ . Die Platte wird mit 8 quadratischen Randelementen diskretisiert. Für die numerische Integration werden 10 GAUSS-Integrationspunkte verwendet und für die Integration der logarithmischen Singularitäten wird die kubische Transformation von Telles eingesetzt [98].

Die Probleme RM, Sh und K sind in der Lage, das Randwertproblem getrennt zu lösen, wie in Tabelle 6.1-6.5 gezeigt ist. Für die normalisierten Werte von Gl. (6.43), hängen die KIRCHHOFFSchen Lösungen nicht von der Plattendicke ab, wie in Gl. (6.43) und Tabelle 6.1 gezeigt ist. Für eine dünne Platte ist das Problem Sh verantwortlich für die Schubkräfte in inneren Punkten, die im Problem K nicht berücksichtigt sind. Wird die Platte dicker, weist das Problem Sh eine zusätzliche Durchsenkung auf, die das KIRCHHOFFSche Modell nicht erfasst. Das KIRCHHOFFSche Modell ist in diesen Fall „zu steif“. Um es zu entscheiden, ob die gelieferten Werte eines KIRCHHOFFSchen Problems in einem inneren Punkt annehmbar sind, ohne das Problem RM zu lösen, kann das Problem Sh eingesetzt werden. Stimmen die Verschiebungen oder Biegemomente nicht überein, sind zu den entsprechenden KIRCHHOFFSchen Werte diese Werte zu addieren.

Es wurde keine Symmetrie des Problems berücksichtigt. Demzufolge ist es in diesen Fall nicht möglich, die Randwerte des Biegemoments  $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$  zu berechnen. Wenn



---

der Innenpunkt in der Nähe des Randes ist, treten fast-singuläre Integrale auf, was im Programm noch nicht berücksichtigt wurde. Deswegen sind größere Fehler für einige Werte in den Fall  $r/a \approx 1$  zu erwarten.

Tabelle 6.1: Problem K: BEM und analytische Werte für die Kreisplatte  $h/a = 0,0002$  und  $h/a = 0,5$ .

	$\frac{64D}{a^4\sigma^{(1)}}u_3$	$\frac{16D}{a^3\sigma^{(1)}}u_\theta$	$\frac{16}{a^2\sigma^{(1)}}\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$	$\frac{16}{a^2\sigma^{(1)}}\sigma_{rr}^{(1)}$	$\frac{2}{a\sigma^{(1)}}\sigma_r^{(1)}$
$r/a$	Analyt./BEM	Analyt./BEM	Analyt./BEM	Analyt./BEM	Analyt./BEM
0,000	1,0000/0,9979	0,0000/0,0000	1,3000/ 1,2986	1,3000/ 1,2986	0,0000/ 0,0000
0,100	0,9801/0,9780	0,0990/0,0989	1,2810/ 1,2796	1,2670/ 1,2656	-0,1000/ 0,0000
0,200	0,9216/0,9196	0,1920/0,1918	1,2240/ 1,2226	1,1680/ 1,1666	-0,2000/ 0,0000
0,300	0,8281/0,8262	0,2730/0,2727	1,1290/ 1,1276	1,0030/ 1,0016	-0,3000/ 0,0000
0,400	0,7056/0,7038	0,3360/0,3356	0,9960/ 0,9945	0,7720/ 0,7707	-0,4000/ 0,0000
0,500	0,5625/0,5609	0,3750/0,3745	0,8250/ 0,8232	0,4750/ 0,4739	-0,5000/ 0,0000
0,600	0,4096/0,4082	0,3840/0,3835	0,6160/ 0,6134	0,1120/ 0,1111	-0,6000/ 0,0000
0,700	0,2601/0,2589	0,3570/0,3565	0,3690/ 0,3650	-0,3170/-0,3181	-0,7000/ 0,0000
0,800	0,1296/0,1287	0,2880/0,2874	0,0840/ 0,0776	-0,8120/-0,8151	-0,8000/ 0,0000
0,900	0,0361/0,0354	0,1710/0,1700	-0,2390/-0,2487	-1,3730/-1,3835	-0,9000/ 0,0000
0,920	0,0236/0,0230	0,1413/0,1402	-0,3082/-0,3180	-1,4931/-1,5067	-0,9200/ 0,0000
0,940	0,0135/0,0131	0,1094/0,1080	-0,3788/-0,3877	-1,6159/-1,6327	-0,9400/ 0,0000
0,960	0,0061/0,0058	0,0753/0,0736	-0,4510/-0,4669	-1,7413/-1,7547	-0,9600/ 0,0000
0,980	0,0016/0,0014	0,0388/0,0371	-0,5248/-0,5766	-1,8693/-1,9015	-0,9800/ 0,0000
0,998	0,0000/0,0000	0,0040/0,0016	-0,5924/-0,2821	-1,9868/-1,4034	-0,9980/ 0,0000
1,000	0,0000/0,0000	0,0000/0,0000	-0,6000/—	-2,0000/-1,9606	-1,0000/-0,9785

Tabelle 6.2: Problem Sh: BEM und analytische Werte für die Kreisplatte  $h/a = 0,0002$ .

	$\frac{64D}{a^4\sigma^{(1)}}u_3$	$\frac{16D}{a^3\sigma^{(1)}}u_\theta$	$\frac{16}{a^2\sigma^{(1)}}\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$	$\frac{16}{a^2\sigma^{(1)}}\sigma_{rr}^{(1)}$	$\frac{2}{a\sigma^{(1)}}\sigma_r^{(1)}$
$r/a$	BEM	BEM	BEM	BEM	BEM
0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,100	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,1000
0,200	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,2000
0,300	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,3000
0,400	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,4000
0,500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5001
0,600	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,6004
0,700	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,7011
0,800	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,8027
0,900	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,9063
0,920	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,9272
0,940	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,9479
0,960	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,9690
0,980	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0093
0,998	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,6530
1,000	0,0000	0,0000	—	0,0000	-0,9810

Tabelle 6.3: Problem RM: BEM und analytische Werte für die Kreisplatte  $h/a = 0,0002$ .

	$\frac{64D}{a^4\sigma^{(1)}}u_3$	$\frac{16D}{a^3\sigma^{(1)}}u_\theta$	$\frac{16}{a^2\sigma^{(1)}}\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$	$\frac{16}{a^2\sigma^{(1)}}\sigma_{rr}^{(1)}$	$\frac{2}{a\sigma^{(1)}}\sigma_r^{(1)}$
$r/a$	Analyt./BEM	Analyt./BEM	Analyt./BEM	Analyt./BEM	Analyt./BEM
0,000	1,0000/0,9978	0,0000/0,0000	1,3000/ 1,2986	1,3000/ 1,2986	0,0000/ 0,0000
0,100	0,9801/0,9779	0,0990/0,0989	1,2810/ 1,2796	1,2670/ 1,2656	-0,1000/-0,1000
0,200	0,9216/0,9195	0,1920/0,1918	1,2240/ 1,2226	1,1680/ 1,1666	-0,2000/-0,2000
0,300	0,8281/0,8261	0,2730/0,2727	1,1290/ 1,1275	1,0030/ 1,0016	-0,3000/-0,3000
0,400	0,7056/0,7038	0,3360/0,3356	0,9960/ 0,9944	0,7720/ 0,7707	-0,4000/-0,4000
0,500	0,5625/0,5609	0,3750/0,3745	0,8250/ 0,8231	0,4750/ 0,4738	-0,5000/-0,5002
0,600	0,4096/0,4082	0,3840/0,3834	0,6160/ 0,6134	0,1120/ 0,1111	-0,6000/-0,6009
0,700	0,2601/0,2585	0,3570/0,3565	0,3690/ 0,3650	-0,3170/-0,3181	-0,7000/-0,7025
0,800	0,1296/0,1286	0,2880/0,2874	0,0840/ 0,0776	-0,8120/-0,8151	-0,8000/-0,8065
0,900	0,0361/0,0354	0,1710/0,1700	-0,2390/-0,2487	-1,3730/-1,3835	-0,9000/-0,9149
0,920	0,0236/0,0230	0,1413/0,1402	-0,3082/-0,3180	-1,4931/-1,5067	-0,9200/-0,9344
0,940	0,0135/0,0131	0,1094/0,1080	-0,3788/-0,3877	-1,6159/-1,6327	-0,9400/-0,9471
0,960	0,0061/0,0058	0,0753/0,0735	-0,4510/-0,4669	-1,7413/-1,7546	-0,9600/-1,0167
0,980	0,0016/0,0014	0,0388/0,0370	-0,5248/-0,5766	-1,8693/-1,9015	-0,9800/-1,4880
0,998	0,0000/0,0000	0,0040/0,0015	-0,5924/-0,2822	-1,9868/-1,4032	-0,9980/19,7424
1,000	0,0000/0,0000	0,0000/0,0000	-0,6000/—	-2,0000/-1,9608	-1,0000/-0,9786

Tabelle 6.4: Problem Sh: BEM und analytische Werte für die Kreisplatte  $h/a = 0,5$ .

	$\frac{64D}{a^4\sigma^{(1)}}u_3$	$\frac{16D}{a^3\sigma^{(1)}}u_\theta$	$\frac{16}{a^2\sigma^{(1)}}\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$	$\frac{16}{a^2\sigma^{(1)}}\sigma_{rr}^{(1)}$	$\frac{2}{a\sigma^{(1)}}\sigma_r^{(1)}$
$r/a$	BEM	BEM	BEM	BEM	BEM
0,000	4,5636	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,100	4,5179	0,0000	0,0000	0,0000	-0,1000
0,200	4,3807	0,0000	0,0000	0,0000	-0,2000
0,300	4,1522	0,0000	0,0000	0,0000	-0,3000
0,400	3,8322	0,0000	0,0000	0,0000	-0,4000
0,500	3,4207	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5001
0,600	2,9176	0,0000	0,0000	0,0000	-0,6004
0,700	2,3228	0,0000	0,0000	0,0000	-0,7011
0,800	1,6354	0,0000	0,0000	0,0000	-0,8027
0,900	0,8544	0,0000	0,0000	0,0000	-0,9063
0,920	0,6867	0,0000	0,0000	0,0000	-0,9272
0,940	0,5153	0,0000	0,0000	0,0000	-0,9479
0,960	0,3401	0,0000	0,0000	0,0000	-0,9690
0,980	0,1598	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0093
0,998	0,0028	0,0000	0,0000	0,0000	-0,6530
1,000	0,0000	0,0000	—	0,0000	-0,9810

Tabelle 6.5: Problem RM: BEM und analytische Werte für die Kreisplatte  $h/a = 0,5$ .

	$\frac{64D}{a^4\sigma^{(1)}}u_3$	$\frac{16D}{a^3\sigma^{(1)}}u_\theta$	$\frac{16}{a^2\sigma^{(1)}}\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$	$\frac{16}{a^2\sigma^{(1)}}\sigma_{rr}^{(1)}$	$\frac{2}{a\sigma^{(1)}}\sigma_r^{(1)}$
$r/a$	Analyt./BEM	Analyt./BEM	Analyt./BEM	Analyt./BEM	Analyt./BEM
0,000	5,5714/5,5578	0,0000/ 0,0000	1,3000/ 1,2962	1,3000/ 1,2962	0,0000/-0,0000
0,100	5,5058/5,4923	0,0990/ 0,0987	1,2810/ 1,2772	1,2670/ 1,2632	-0,1000/-0,1000
0,200	5,3102/5,2968	0,1920/ 0,1914	1,2240/ 1,2202	1,1680/ 1,1642	-0,2000/-0,2000
0,300	4,9881/4,9750	0,2730/ 0,2721	1,1290/ 1,1252	1,0030/ 0,9992	-0,3000/-0,3000
0,400	4,5456/4,5329	0,3360/ 0,3348	0,9960/ 0,9923	0,7720/ 0,7681	-0,4000/-0,4000
0,500	3,9911/3,9789	0,3750/ 0,3735	0,8250/ 0,8216	0,4750/ 0,4707	-0,5000/-0,5001
0,600	3,3353/3,3235	0,3840/ 0,3821	0,6160/ 0,6132	0,1120/ 0,1066	-0,6000/-0,6005
0,700	2,5915/2,5798	0,3570/ 0,3544	0,3690/ 0,3671	-0,3170/-0,3250	-0,7000/-0,7014
0,800	1,7753/1,7628	0,2880/ 0,2843	0,0840/ 0,0832	-0,8120/-0,8255	-0,8000/-0,8034
0,900	0,9047/0,8892	0,1710/ 0,1653	-0,2390/-0,2395	-1,3730/-1,3974	-0,9000/-0,9076
0,920	0,7258/0,7092	0,1413/ 0,1351	-0,3082/-0,3099	-1,4931/-1,5194	-0,9200/-0,9287
0,940	0,5457/0,5280	0,1094/ 0,1026	-0,3788/-0,3828	-1,6159/-1,6423	-0,9400/-0,9494
0,960	0,3645/0,3457	0,0753/ 0,0678	-0,4510/-0,4430	-1,7413/-1,7833	-0,9600/-0,9707
0,980	0,1826/0,1611	0,0388/ 0,0294	-0,5248/-0,4871	-1,8693/-1,9960	-0,9800/-1,0118
0,998	0,0183/0,0028	0,0040/-0,0012	-0,5924/-0,5697	-1,9868/-1,1168	-0,9980/-0,6538
1,000	0,0000/0,0000	0,0000/ 0,0000	-0,6000/—	-2,0000/-1,9627	-1,0000/-0,9798

# Kapitel 7

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde ein hierarchisches Differential- und Integralgleichungssystem zur Berechnung von Plattenbiegungsproblemen hergeleitet. Es wurden zwei Plattenmodelle berücksichtigt: 1) das bekannte REISSNERSche Modell sechster Ordnung  $s$ -(1,0) und 2) das REISSNER-PONIATOVSKIISche Modell zwölfter Ordnung  $s$ -(3,2). Es wurde gezeigt, wie die Differential- und Integralgleichungen des Modells  $s$ -(1,0) durch Vereinfachungen aus dem Modell  $s$ -(3,2) gewonnen werden können. Die Einführung transversal-isotroper Materialien in die Konstitutivgleichungen hat sich zur Interpretation der resultierenden Gleichungen als vorteilhaft erwiesen. Mit den hergeleiteten Gleichungen können transversale Effekte durch die Materialkonstanten  $k_E$ ,  $k_\nu$  und  $k_G$  leicht verfolgt werden. Die entsprechenden Gleichungen für isotrope Materialien können daraus direkt gewonnen werden. Durch Anwendung des HELMHOLTZschen Zerlegungssatzes wurde gezeigt, dass das hier hergeleitete 2D-Differentialgleichungssystem die bessere Annäherung an das 3D-Problem im Vergleich mit Plattenmodellen der  $d$ -Gruppe liefert.

Im zweiten Kapitel wurden die räumlichen Verschiebungs- und Spannungsfelder so dargestellt, dass sich der Verlauf beider Felder in Dickenrichtung über die Plattenhöhe in Form von LEGENDRESchen Polynomen ergibt. Der Verlauf der Plattenspannungen wurde direkt vom Verschiebungsansatz hergeleitet. Die Bedeutung der durch das HELLINGER-REISSNERSche Variationsprinzip hergeleiteten Plattenverschiebungen wurde erklärt, indem der ursprüngliche Verschiebungsansatz eingesetzt wurde. Es wurden gleichzeitig die Gleichgewichtsgleichungen für eine beliebige Plattenbelastung und für ein System von Einzelbelastungen hergeleitet, die zur Herleitung der Integralgleichungen notwendig sind.

Im dritten Kapitel wurden die hierarchischen Differentialgleichungen durch Anwendung des HELLINGER-REISSNERSchen Variationsprinzips hergeleitet. Kopplungsvariablen wurden so definiert, dass das Modell  $s$ -(1,0) direkt aus dem Modell  $s$ -(3,2) abgeleitet werden kann. Es wurden die LAMÉ-NAVIERschen Gleichungen für beide Modelle präsentiert.

Im vierten Kapitel wurden die hierarchischen Integralgleichungen für Verschiebungen und Spannungen abgeleitet. Die notwendigen Tensoren zweiter und dritter Stufe wurden als Ableitungen des Verschiebungstensors  $U_{IJ}$  präsentiert.

Im fünften Kapitel wurden die LAMÉ-NAVIERschen Differentialgleichungen durch die Anwendung des HELMHOLTZschen Zerlegungssatzes entkoppelt. Drei Gleichungssysteme haben sich ergeben. Es wurde durch direkten Vergleich mit den entsprechenden Gleichungen der 3D-Elastizitätstheorie gezeigt, dass die Differentialgleichungen der Modelle der  $s$ -Gruppe eine passendere Beschreibung als diejenigen der  $d$ -Gruppe liefern.

Im abschließenden Abschnitt der Arbeit wurden die allgemeinen Fundamentallösungen betrachtet. Für das Problem  $s$ -(1,0) wurde gezeigt, dass die allgemeine Fundamentallösung widerspruchsfrei ist. Für das Problem  $s$ -(3,2) wurde die allgemeine skalare Fundamentallösung hergeleitet. Alle Informationen der drei Differentialgleichungsfamilien (KIRCHHOFFsche, Schub- und PAPKOVICH-FADLESche Gleichungen) sind in der allgemeinen Fundamentallösung enthalten. Sowohl für das Problem  $s$ -(1,0) als auch für das Problem  $s$ -(3,2) sind zwei freie Konstanten vorhanden. Die Fundamentallösung des Problems  $s$ -(1,0) wurde so zerlegt, dass die entsprechende Fundamentallösung des KIRCHHOFFschen Modells direkt aus der Fundamentallösung des REISSNER-MINDLINSchen Modells gewonnen wurden,  $U_{ij}^{RM}(r) = U_{ij}^{Sh}(r) + U_{ij}^K(r)$ .

Die Integralgleichungen ermöglichen es, die fest mit Randschichtproblemen verbundenen Plattenaufgaben effektiv zu lösen, da die lokalen Randeffekte direkt von den Fundamentallösungen beschrieben werden. Im Gegensatz dazu ist bei den z.Zt. überwiegend verwendeten FE-Methoden eine aufwendige lokale Netzverfeinerung in Randnähe notwendig, die stark von den Randbedingungen und den Materialparametern  $k_E$ ,  $k_\nu$  und  $k_G$  bei transversal-isotropen Materialien abhängt. Derartige Netzverfeinerungen sind bei den Integralgleichungsverfahren in keinem Fall notwendig, da keine inneren Netze erforderlich sind.



# Anhang A

## Das Spannungsfeld

Hier wird das Spannungsfeld für transversal-isotrope Materialien bestimmt. Ausgangspunkt ist der Ansatz (2.1). Die Definition der LEGENDRESchen Polynome (RODRIGUESsche Gleichungen) und einige bekannte Beziehungen zwischen ihnen lauten ( $k, i \in \mathbb{N}_0$ ):

$$P_k(\xi) := \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{d\xi^k} (\xi^2 - 1)^k \quad , \quad (\text{A1a})$$

$$P_{(k+1)}(\xi) = \frac{1}{k+1} [(2k+1)\xi P_k(\xi) - kP_{(k-1)}(\xi)] \quad , \quad (\text{A1b})$$

$$\frac{d}{d\xi} P_k(\xi) = (2k-1)P_{(k-1)}(\xi) + \frac{d}{d\xi} P_{(k-2)}(\xi) \quad , \quad (\text{A1c})$$

$$\int_{-1}^1 P_i(\xi) P_k(\xi) d\xi = \begin{cases} 2/(2k+1) & \text{wenn } k = i \\ 0 & \text{wenn } k \neq i \end{cases} \quad . \quad (\text{A1d})$$

Durch mehrmaliges Anwenden der Gl. (A1c) ergibt sich:

$$P'_{2(k-1)}(\xi) = \sum_{j=1}^{k-1} (4j-1) P_{(2j-1)}(\xi) \quad , \quad (\text{A2a})$$

$$P'_{(2k-1)}(\xi) = \sum_{j=0}^{k-1} (4j+1) P_{2j}(\xi) \quad , \quad (\text{A2b})$$

$$P''_{(2k-1)}(\xi) = \sum_{i=1}^{k-1} (4i+1) \sum_{j=1}^i (4j-1) P_{(2j-1)}(\xi) \quad (\text{A2c})$$

mit  $P'_k(\xi) \equiv \frac{d}{d\xi} P_k(\xi)$ .

Wir brauchen zusätzlich die folgenden Lemmata:

LEMMA A.0.1

$$\sum_{k=1}^m k \sum_{i=1}^k A_i = \sum_{k=1}^m A_k \sum_{i=k}^m i \quad , \quad (\text{A3})$$

wobei  $A_i$  ein Vektor ist ( $i = 1, \dots, m$ ),  $m \in \mathbb{N}$ .

BEWEIS A.0.1 *Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Für  $m=1$  haben wir  $A_1 = A_1$ . Zunächst nehmen wir an, dass die Behauptung für  $k = 1, \dots, m$  gilt. Wir zeigen dann, dass die Behauptung auch für  $k = 1, \dots, m+1$  gilt.*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k \sum_{i=1}^k A_i &= \sum_{k=1}^m k \sum_{i=1}^k A_i + (m+1) \sum_{i=1}^{m+1} A_i = \\ &= \sum_{k=1}^m A_k \sum_{i=k}^m i + \sum_{k=1}^{m+1} A_k \sum_{i=m+1}^{m+1} i = \sum_{k=1}^{m+1} A_k \sum_{i=k}^{m+1} i \quad . \quad \square \end{aligned}$$

LEMMA A.0.2

$$\sum_{k=1}^m B_k \sum_{i=1}^{k-1} i \sum_{j=1}^i A_j = \sum_{k=1}^m A_k \sum_{i=k}^m i \sum_{j=i+1}^m B_j \quad , \quad (\text{A4})$$

wobei  $A_i$  und  $B_i$  Vektoren sind ( $i = 1, \dots, m$ ),  $m \in \mathbb{N}$ .

BEWEIS A.0.2 *Der Beweis erfolgt wieder durch vollständige Induktion. Für  $m=1$  ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. Für  $m=2$  haben wir*

$$B_2 \sum_{i=1}^1 i \sum_{j=1}^i A_j = A_1 \sum_{i=1}^2 i \sum_{j=i+1}^2 B_j \implies B_2 A_1 = A_1 B_2 \quad .$$

Wenn (A4) gilt, müssen wir einfach zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{m+1} B_k \sum_{i=1}^{k-1} i \sum_{j=1}^i A_j = \sum_{k=1}^{m+1} A_k \sum_{i=k}^{m+1} i \sum_{j=i+1}^{m+1} B_j \quad .$$

Es folgt dann mit dem Lemma A.0.1

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} B_k \sum_{i=1}^{k-1} i \sum_{j=1}^i A_j &= \sum_{k=1}^m B_k \sum_{i=1}^{k-1} i \sum_{j=1}^i A_j + B_{m+1} \sum_{i=1}^m i \sum_{j=1}^i A_j = \\ &= \sum_{k=1}^m A_k \sum_{i=k}^m i \sum_{j=i+1}^m B_j + \sum_{k=1}^m A_k \sum_{i=k}^m i \sum_{j=m+1}^{m+1} B_j = \\ &= \sum_{k=1}^m A_k \sum_{i=k}^m i \sum_{j=i+1}^{m+1} B_j = \sum_{k=1}^{m+1} A_k \sum_{i=k}^{m+1} i \sum_{j=i+1}^{m+1} B_j \quad . \quad \square \end{aligned}$$

Zunächst haben wir, mit Anwendung des Ansatzes (2.1), die Gleichungen (2.10)-(2.12) zu erfüllen.

SATZ A.0.1 *Unter Berücksichtigung des Verschiebungsansatzes (2.1), des Stoffgesetzes (2.9) und der kinematischen Beziehungen (2.10) ist das Spannungsfeld*

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2c^2} \sum_{k=1}^M \frac{4k-1}{a_{(2k-1)}} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) P_{(2k-1)}(\xi) \quad (\text{A5})$$

mit den Plattenspannungen

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c a_{(2k-1)} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) c P_{(2k-1)}(\xi) dx_3 \quad . \quad (\text{A6})$$

BEWEIS A.0.3 *Man setzt (2.1) in (2.10) ein und durch Anwendung von (2.9) resultiert*

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^M \left[ a_{(2k-1)} A_{\alpha\beta}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) c P_{(2k-1)}(\xi) + a_{2(k-1)} B_{\alpha\beta}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \sum_{i=1}^{k-1} (4i+1) \sum_{j=1}^i (4j-1) c P_{(2j-1)}(\xi) \right]$$

mit

$$A_{\alpha\beta}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) := G \left[ \phi_{\alpha,\beta}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) + \phi_{\beta,\alpha}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] + \frac{2\nu(1+k_\nu^2\nu)}{\beta} \phi_{\gamma,\gamma}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \delta_{\alpha\beta} \quad ,$$

$$B_{\alpha\beta}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) := G \frac{2\nu(1+\nu)k_\nu k_E}{\beta} \phi_3^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \delta_{\alpha\beta} \quad .$$

Es folgt durch Anwendung vom Lemma A.0.2

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^M \left\{ a_{(2k-1)} A_{\alpha\beta}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) + (4k-1) \sum_{j=k}^M (4j+1) \left[ \sum_{l=j+1}^M a_{2(l-1)} B_{\alpha\beta}^{(l)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] \right\} c P_{2k-1}(\xi) \quad .$$

Setzt man jetzt diese Gleichung in (A6) ein unter Beachtung von (A1d), so folgt

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{2c^2}{4k-1} a_{(2k-1)} \left\{ a_{(2k-1)} A_{\alpha\beta}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) + (4k-1) \sum_{j=k}^M (4j+1) \left[ \sum_{l=j+1}^M a_{2(l-1)} B_{\alpha\beta}^{(l)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] \right\} c \quad .$$

Aus den letzten zwei Gleichungen resultiert die Gl. (A5). □

Um die anderen Spannungskomponenten abzuleiten, verwenden wir nun die Gleichgewichtsgleichungen (2.11), wobei der Verlauf von  $b_i(\mathbf{x})$  sinngemäß nach dem Satz A.0.1 folgendermaßen angenommen wird:

FOLGERUNG A.0.3 *Der Verlauf der Volumenkräfte  $b_\alpha(\mathbf{x})$  (der später zur Ableitung der Integralgleichungen nötig ist) ergibt sich zu (siehe Krenk [49])*

$$b_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{2c^2} \sum_{k=1}^M \frac{4k-1}{a_{(2k-1)}} m_\alpha^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) P_{(2k-1)}(\xi) \quad (\text{A7})$$

mit

$$m_\alpha^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) = \int_{-c}^c a_{(2k-1)} b_\alpha(\mathbf{x}) c P_{(2k-1)}(\xi) dx_3 \quad . \quad (\text{A8})$$

Die integrierten Volumenkräfte  $m_\alpha^{(k)}(\bar{\mathbf{x}})$  stellen äußere Plattenbiegungsmomente dar, die zur Deutung der Plattenverzerrungsdefinitionen hilfreich sind.

Die Gleichgewichtsgleichungen können wir wie folgt schreiben

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}(\mathbf{x}) + \sigma_{\alpha 3,3}(\mathbf{x}) + b_\alpha(\mathbf{x}) = 0 \quad , \quad (\text{A9a})$$

$$\sigma_{3\alpha,\alpha}(\mathbf{x}) + \sigma_{33,3}(\mathbf{x}) + b_3(\mathbf{x}) = 0 \quad . \quad (\text{A9b})$$

Die Spannungen  $\sigma_{\alpha 3}$  sind durch folgenden Satz gegeben.

**SATZ A.0.2** *Unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsgleichungen (A9a) ergibt sich aus (A5) und (A7) unter Beachtung des Belastungszustandes für die Schubverzerrung (2.12):*

$$\sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^M \frac{1}{a_{2(k-1)}} \sigma_\alpha^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) [P_{2(k-1)}(\xi) - P_{2k}(\xi)] \quad (\text{A10})$$

mit den Plattenspannungen

$$\sigma_\alpha^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) := \int_{-c}^c a_{2(k-1)} \sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x}) \frac{dP_{(2k-1)}(\xi)}{d\xi} dx_3 \quad (\text{A11})$$

und den Plattengleichgewichtsgleichungen

$$\sigma_\alpha^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{a_{2(k-1)}}{a_{(2k-1)}} \left[ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_\alpha^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] \quad . \quad (\text{A12})$$

**BEWEIS A.0.4** *Setzt man (A5) und (A7) in (A9a) ein und integriert die resultierende Gleichung, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (A1c) und (2.12)*

$$\sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^M \left\{ \frac{1}{a_{(2k-1)}} \left[ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_\alpha^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] \right\} [P_{2(k-1)}(\xi) - P_{2k}(\xi)] \quad .$$

Verwendet man die Definition (A11), so ergibt sich mit (A2a) und (A1d)

$$\sigma_\alpha^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) = a_{2(k-1)} \left\{ \frac{1}{a_{(2k-1)}} \left[ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_\alpha^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] \right\} \quad .$$

Mit der Herleitung der zwei obigen Gleichungen ist der Beweis vollständig.  $\square$

**FOLGERUNG A.0.4** *Der Verlauf der wirkenden Volumenkräfte  $b_3(\mathbf{x})$  ergibt sich zu*

$$b_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^M \frac{1}{a_{2(k-1)}} m_3^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) [P_{2(k-1)}(\xi) - P_{2k}(\xi)] \quad (\text{A13})$$

mit

$$m_3^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) = \int_{-c}^c a_{2(k-1)} b_3(\mathbf{x}) \frac{dP_{(2k-1)}(\xi)}{d\xi} dx_3 \quad . \quad (\text{A14})$$

Die Variablen  $m_\alpha^{(k)}(\bar{\mathbf{x}})$ , Gl. (A8), die aus den parallel zur Plattenebene integrierten Volumenkräften  $b_\alpha(\mathbf{x})$  resultieren, stellen wirkende Momente dar. Die Variablen  $m_3^{(k)}(\bar{\mathbf{x}})$ , Gl. (A14), die aus der senkrecht zur Plattenebene integrierten Volumenkraft  $b_3(\bar{\mathbf{x}})$  folgen, beschreiben wirkende Kräfte.

Die letzte Komponente des Spannungstensors erhalten wir aus folgenden Satz:

**SATZ A.0.3** *Aus der Gleichgewichtsgleichung (A9b) ergibt sich unter Berücksichtigung der Gl. (A13)*

$$\sigma_{33}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \frac{1}{a_{2(k-1)}} \left[ \sigma_{\alpha,\alpha}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_3^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] \times \left\{ \frac{1}{4k-3} P_{(2k-3)}(\xi) - \frac{2(4k-1)}{(4k-3)(4k+1)} P_{(2k-1)}(\xi) + \frac{1}{4k+1} P_{(2k+1)}(\xi) \right\} \quad (\text{A15})$$

mit der Gleichgewichtsgleichung

$$\sigma^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{a_0} \left[ \sigma_{\alpha,\alpha}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_3^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] . \quad (\text{A16})$$

Die Spannung  $\sigma_{33}(\mathbf{x})$  verursacht keine Plattenspannung für das Modell sechster Ordnung ( $r = s := 1$ ) (nur  $\sigma^{(1)}(\bar{\mathbf{x}})$  tritt auf, und das ist die Belastung). Die Gleichgewichtsgleichung (A16) ist von der Definition der Plattenspannungen, in der  $\sigma_{33}$  beteiligt ist, unabhängig. Die folgende Plattenspannung gilt insbesondere für das Modell zwölfter Ordnung ( $r=s:=2$ ):

$$\sigma^{(i-r+1)}(\bar{\mathbf{x}}) = \int_{-c}^c a_{(2i-1)} \sigma_{33}(\mathbf{x}) c P_{(2i-1)}(\xi) dx_3 \quad , \quad i - r + 1 = 2, \dots, s \quad (\text{A17})$$

mit der entsprechenden Gleichgewichtsgleichung für  $r = s := 2$

$$\sigma^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{c^2 a_5}{99 a_2} \left[ \sigma_{\alpha,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) + m_3^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) \right] . \quad (\text{A18})$$

**BEWEIS A.0.5** *Setzt man (A10) und (A13) in der Gleichgewichtsgleichung (A9b) ein unter Beachtung von (A1c) und (2.12), so resultieren (A15) und (A16). Setzt man danach (A15) in (A17) ein unter Berücksichtigung von (A1d), so folgt*

$$\sigma^{(i-r+1)}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{c^2 a_{(2i-1)}}{4i-1} \left\{ \sum_{k=1}^M \frac{(\sigma_{\alpha,\alpha}^{(k)} + m_3^{(k)})}{a_{2(k-1)}} \left[ \overbrace{\frac{1}{4k-3}}^{k=i+1} - \overbrace{\frac{2(4k-1)}{(4k-3)(4k+1)}}^{k=i} + \overbrace{\frac{1}{4k+1}}^{k=i-1} \right] \right\} .$$

Für  $r = s := 2$  sind  $M = 2$  und  $i = 3$ . Von der obigen Gleichung kann die Gleichgewichtsgleichung (A18) direkt abgeleitet werden.  $\square$



# Anhang B

## Die Tensoren für die Probleme K, Sh und RM

Wir geben hier die vollständigen Fundamentaltensoren für die Probleme K, Sh und RM. Die Normalenableitung ist  $r_{,n} := r_{,\alpha}n_\alpha$  .

$$\underline{T_{ij}^{RM}(r) = T_{ij}^K(r) + T_{ij}^{Sh}(r)}$$

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^K(r) &= \frac{-(1-\nu)}{4\pi r} \left\{ r_{,\beta}n_\alpha + r_{,n}\delta_{\alpha\beta} + [\hat{\nu}n_\beta - 2r_{,\beta}r_{,n}]r_{,\alpha} \right\} , \\ T_{\alpha 3}^K(r) &= 0 , \\ T_{3\alpha}^K(r) &= \frac{-1}{4\pi} \left\{ [(1+\nu)\ln(\alpha_1 r) + \nu]n_\alpha + (1-\nu)r_{,\alpha}r_{,n} \right\} , \\ T_{33}^K(r) &= 0 . \end{aligned} \tag{B1}$$

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^{Sh}(r) &= \frac{-1}{2\pi r} \left\{ \lambda r K_1(\lambda r) [r_{,\beta}n_\alpha + (\delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha}r_{,\beta})r_{,n}] + \right. \\ &\quad \left. + 2A(\lambda r) [r_{,\alpha}n_\beta + r_{,\beta}n_\alpha + (\delta_{\alpha\beta} - 4r_{,\alpha}r_{,\beta})r_{,n}] \right\} , \\ T_{\alpha 3}^{Sh}(r) &= \frac{\lambda^2}{2\pi} \left\{ B(\lambda r)n_\alpha - A(\lambda r)r_{,\alpha}r_{,n} \right\} , \\ T_{3\alpha}^{Sh}(r) &= 0 , \\ T_{33}^{Sh}(r) &= \frac{-r_{,n}}{2\pi r} . \end{aligned} \tag{B2}$$

$$\underline{U_{ij,\alpha}^{RM}(r)} = U_{ij,\alpha}^K(r) + U_{ij,\alpha}^{Sh}(r)$$

$$\begin{aligned} U_{\alpha\beta,\gamma}^K(r) &= \frac{-1}{4\pi D r} \left\{ r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + [\delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta}] r_{,\gamma} \right\} , \\ U_{\alpha 3,\gamma}^K(r) &= -U_{3\alpha,\gamma}^K(r) = \frac{1}{4\pi D} \left\{ \ln(\alpha_1 r) \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\alpha} r_{,\gamma} \right\} , \\ U_{33,\gamma}^K(r) &= \frac{1}{4\pi D} r \ln(\alpha_1 r) r_{,\gamma} . \end{aligned} \quad (B3)$$

$$\begin{aligned} U_{\alpha\beta,\gamma}^{Sh}(r) &= \frac{-1}{\pi D (1-\nu) r} \left\{ \lambda r K_1(\lambda r) [\delta_{\alpha\beta} - r_{,\alpha} r_{,\beta}] r_{,\gamma} + \right. \\ &\quad \left. + A(\lambda r) [r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + (\delta_{\alpha\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta}) r_{,\gamma}] \right\} , \\ U_{\alpha 3,\gamma}^{Sh}(r) &= -U_{3\alpha,\gamma}^{Sh}(r) = 0 , \\ U_{33,\gamma}^{Sh}(r) &= \frac{-r_{,\gamma}}{\pi D (1-\nu) \lambda^2 r} . \end{aligned} \quad (B4)$$

$$\underline{U_{\alpha ij}^{RM}(r)} = U_{\alpha ij}^K(r) + U_{\alpha ij}^{Sh}(r)$$

$$\begin{aligned} U_{\alpha\beta\gamma}^K(r) &= \frac{1-\nu}{4\pi r} \left\{ r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + [\hat{\nu} \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta}] r_{,\gamma} \right\} , \\ U_{\alpha\beta 3}^K(r) &= \frac{-1}{4\pi} \left\{ [(1+\nu) \ln(\alpha_1 r) + \nu] \delta_{\alpha\beta} + (1-\nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} \right\} , \\ U_{\alpha 3\beta}^K(r) &= 0 , \\ U_{\alpha 33}^K(r) &= 0 . \end{aligned} \quad (B5)$$

$$\begin{aligned} U_{\alpha\beta\gamma}^{Sh}(r) &= \frac{1}{2\pi r} \left\{ \lambda r K_1(\lambda r) [r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + (\delta_{\alpha\gamma} - 2r_{,\alpha} r_{,\gamma}) r_{,\beta}] + \right. \\ &\quad \left. + 2A(\lambda r) [r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + (\delta_{\alpha\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta}) r_{,\gamma}] \right\} , \\ U_{\alpha\beta 3}^{Sh}(r) &= 0 , \\ U_{\alpha 3\beta}^{Sh}(r) &= \frac{\lambda^2}{2\pi} \left\{ B(\lambda r) \delta_{\alpha\beta} - A(\lambda r) r_{,\alpha} r_{,\beta} \right\} , \\ U_{\alpha 33}^{Sh}(r) &= \frac{r_{,\alpha}}{2\pi r} . \end{aligned} \quad (B6)$$



$$\underline{T_{\alpha ij}^{RM}(r)} = T_{\alpha ij}^K(r) + T_{\alpha ij}^{Sh}(r)$$

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta\gamma}^K(r) &= \frac{D(1-\nu)^2}{4\pi r^2} \left\{ n_\alpha \delta_{\beta\gamma} + n_\beta \delta_{\alpha\gamma} + \frac{1+3\nu}{1-\nu} n_\gamma \delta_{\alpha\beta} \right. \\ &\quad - 2[(r_{,\alpha} n_\beta + r_{,\beta} n_\alpha) r_{,\gamma} + (r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma}) r_{,n}] \\ &\quad \left. - 2\hat{\nu}[r_{,\alpha} r_{,\beta} n_\gamma + r_{,\gamma} r_{,n} \delta_{\alpha\beta}] + 8r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,n} \right\} , \\ T_{\alpha\beta 3}^K(r) &= 0 \quad , \\ T_{\alpha 3\beta}^K(r) &= 0 \quad , \\ T_{\alpha 33}^K(r) &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{B7}$$

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta\gamma}^{Sh}(r) &= \frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2} \left\{ -\lambda^2 r^2 K_0(\lambda r) [(r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma}) r_{,n} + (r_{,\alpha} n_\beta + r_{,\beta} n_\alpha - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n}) r_{,\gamma}] \right. \\ &\quad + 2\lambda r K_1(\lambda r) [(n_\alpha - 3r_{,\alpha} r_{,n}) \delta_{\beta\gamma} + (n_\beta - 3r_{,\beta} r_{,n}) \delta_{\alpha\gamma} + \\ &\quad - (2r_{,\alpha} r_{,\beta} n_\gamma + 3r_{,\alpha} r_{,\gamma} n_\beta + 3r_{,\beta} r_{,\gamma} n_\alpha + 2(\delta_{\alpha\beta} - 8r_{,\alpha} r_{,\beta}) r_{,\gamma} r_{,n})] + \\ &\quad + 4A(\lambda r) [(n_\alpha - 4r_{,\alpha} r_{,n}) \delta_{\beta\gamma} + (n_\beta - 4r_{,\beta} r_{,n}) \delta_{\alpha\gamma} + (n_\gamma - 4r_{,\gamma} r_{,n}) \delta_{\alpha\beta} + \\ &\quad \left. - 4((r_{,\beta} n_\gamma + r_{,\gamma} n_\beta) r_{,\alpha} + (n_\alpha - 6r_{,\alpha} r_{,n}) r_{,\beta} r_{,\gamma})] \right\} , \\ T_{\alpha\beta 3}^{Sh}(r) &= \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left\{ \lambda r K_1(\lambda r) [r_{,\alpha} n_\beta + (n_\alpha - 2r_{,\alpha} r_{,n}) r_{,\beta}] + \right. \\ &\quad \left. + 2A(\lambda r) [r_{,\alpha} n_\beta + r_{,\beta} n_\alpha + (\delta_{\alpha\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta}) r_{,n}] \right\} , \\ T_{\alpha 3\beta}^{Sh}(r) &= \frac{-D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left\{ \lambda r K_1(\lambda r) [r_{,\beta} n_\alpha + (\delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta}) r_{,n}] + \right. \\ &\quad \left. + 2A(\lambda r) [r_{,\alpha} n_\beta + r_{,\beta} n_\alpha + (\delta_{\alpha\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta}) r_{,n}] \right\} , \\ T_{\alpha 33}^{Sh}(r) &= \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2} \left\{ [\lambda^2 r^2 B(\lambda r) + 1] n_\alpha - [\lambda^2 r^2 A(\lambda r) + 2] r_{,\alpha} r_{,n} \right\} . \end{aligned} \tag{B8}$$

$$\underline{V_{\alpha i}^{RM}(r)} = V_{\alpha i}^K(r) + V_{\alpha i}^{Sh}(r)$$

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta}^K(r) &= \frac{1-\nu}{2\pi r^2} \{ \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \} , \\ V_{\alpha 3}^K(r) &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{B9}$$

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta}^{Sh}(r) &= 0 \quad , \\ V_{\alpha 3}^{Sh}(r) &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{B10}$$

$$\underline{\Lambda_{i,\alpha}^{RM}(r) = \Lambda_{i,\alpha}^K(r) + \Lambda_{i,\alpha}^{Sh}(r)}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{\alpha,\beta}^K(r) &= \frac{r^2}{128\pi D} \{ [4 \ln(\alpha_1 r) - 3] \delta_{\alpha\beta} + 2 [4 \ln(\alpha_1 r) - 1] r_{,\alpha} r_{,\beta} \} \ , \\ \Lambda_{3,\alpha}^K(r) &= \frac{r^3}{128\pi D} \{ 4 \ln(\alpha_1 r) - 3 \} r_{,\alpha} \ .\end{aligned}\tag{B11}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{\alpha,\beta}^{Sh}(r) &= 0 \ , \\ \Lambda_{3,\alpha}^{Sh}(r) &= \frac{-r}{4\pi D(1-\nu)\lambda^2} \{ 2 \ln(\alpha_2 r) - 1 \} r_{,\alpha} \ .\end{aligned}\tag{B12}$$

$$\underline{Y_{\alpha i \beta}^{RM}(r) = Y_{\alpha i \beta}^K(r) + Y_{\alpha i \beta}^{Sh}(r)}$$

$$\begin{aligned}Y_{\alpha\beta\gamma}^K(r) &= \frac{-(1-\nu)r}{64\pi} \{ [4 \ln(\alpha_1 r) - 1] [r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma}] + \\ &\quad + \left[ \frac{4(1+3\nu)}{1-\nu} \ln(\alpha_1 r) - 1 \right] r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 4 r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \} \ , \\ Y_{\alpha 3 \beta}^K(r) &= 0 \ .\end{aligned}\tag{B13}$$

$$\begin{aligned}Y_{\alpha\beta\gamma}^{Sh}(r) &= 0 \ , \\ Y_{\alpha 3 \beta}^{Sh}(r) &= \frac{1}{8\pi} \{ [2 \ln(\alpha_2 r) - 1] \delta_{\alpha\beta} + 2 r_{,\alpha} r_{,\beta} \} \ .\end{aligned}\tag{B14}$$

# Anhang C

## Der Differentialoperator $L_{A_{11}}^{co}$

Der Differentialoperator  $L_{A_{11}}^{co}$ , der mit dem Computer-Algebra-System MAPLE berechnet wurde, lautet:

$$\begin{aligned} L_{A_{11}}^{co} := & -189\lambda^2 K \left( -25\lambda^2 \Delta^4 \left( \Delta \left( 28 + 28\nu_A - 27\nu_{AB}^2 + 28\nu_B + 28\nu_A\nu_B \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. \xi_1^2 \left( 28\nu_A\nu_B - 27\nu_{AB}^2 + 28\nu_A \right) \right) + \right. \\ & \Delta^3 \left( \Delta \left( 12150\%1 + 784\zeta + 6300\lambda^4\nu_B - 12600\eta\lambda^2 + 6300\lambda^4\nu_A\nu_B - 13860\eta^2 + 6300\lambda^4 + \right. \right. \\ & 6300\lambda^4\nu_A + 784\nu_A\nu_B\zeta + 13608\nu_{AB}\eta^2 - 6075\lambda^4\nu_{AB}^2 + 784\nu_B\zeta + 784\zeta\nu_A - 7056\nu_A\eta^2 - \\ & 756\nu_{AB}^2\zeta - 12600\%2 - 6804\eta^2\nu_B \left. \right) - \xi_1^2 \left( -6804\eta^2 - 700\lambda^4\nu_B - 6075\lambda^4\nu_{AB}^2 + 6300\lambda^4\nu_A \right. \\ & + 6300\lambda^4\nu_A\nu_B - 700\lambda^4 + 784\nu_A\nu_B\zeta - 12600\%2 + 12150\%1 - 6804\eta^2\nu_B - 756\nu_{AB}\zeta \\ & + 13608\nu_{AB}\eta^2 - 7056\nu_A\eta^2 + 784\zeta\nu_A \left. \right) + \lambda^2 \Delta^2 \left( 9\Delta \left( -12150\%1 - 1484\zeta + 19935\eta^2 \right. \right. \\ & + 7056\nu_A\eta^2 + 6804\eta^2\nu_B + 756\nu_{AB}\zeta - 1484\zeta\nu_A - 13608\nu_{AB}\eta^2 + 12600\eta\lambda^2 - 784\nu_B\zeta \\ & - 784\nu_A\nu_B\zeta + 12600\%2 \left. \right) - \xi_1^2 \left( 784\zeta + 108855\eta^2 + 5625\lambda^4\nu_B - 12600\eta\lambda^2 + 784\nu_B\zeta \right. \\ & + 5625\lambda^4 - 7056\zeta + 113400\%2 - 109350\%1 + 61236\eta^2\nu_B + 6804\nu_{AB}\zeta - 122472\nu_{AB}\eta^2 \\ & + 63504\nu_A\eta^2 - 13356\zeta\nu_A \left. \right) + 225\lambda^4 \Delta \left( 9\Delta \left( 28\zeta - 243\eta^2 + 28\zeta\nu_A \right) \right. \\ & \left. \left. - \xi_1^2 \left( 450\eta\lambda^2 - 1935\eta^2 - 56\zeta - 28\nu_B\zeta + 252\zeta\nu_A \right) \right) - 50625\lambda^6\zeta\xi_1^2 \right) \end{aligned}$$

$$\%1 := \lambda^2\nu_{AB}\eta$$

$$\%2 := \lambda^2\nu_A\eta$$



# Literaturverzeichnis

- [1] Abramowitz M, Stegun IA: *Handbook of mathematical functions*. New York : Dover, 1965.
- [2] Ainsworth M, Arnold M: Construction and analysis of optimal hierarchical models of boundary value problems on thin circular and spherical geometries. *SIAM Journal on Scientific Computing* **22**(2):673–703, 2000.
- [3] Aksentian OK: On stress concentrations in thick plates. *PMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **30**(5):1146–1155, 1966.
- [4] Antes H: Static and dynamic analysis of Reissner-Mindlin plates. In [8], S. 312–340.
- [5] Arnold DN, Falk RS: Asymptotic analysis of the boundary layer for the Reissner-Mindlin plate model. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **27**(2):486–514, 1996.
- [6] Babuška I, Li L: The problem of plate modeling: Theoretical and computational results. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **100**(2):249–273, 1992.
- [7] Barrett KE, Ellis S: An exact theory of elastic plates. *International Journal of Solids and Structures* **24**(9):859–880, 1988.
- [8] Beskos DE (Hrsg.): *Boundary element analysis of plates and shells*. Berlin : Springer, 1991.
- [9] Bolle L: Contribution au problème linéaire de flexion d’une plaque élastique. *Bulletin Technique de la Suisse Romande* **73**:281–285 + 293–298, 1947.
- [10] Brebbia CA, Telles JCF, Wrobel LC: *Boundary element techniques. Theory and applications in engineering*. Berlin : Springer, 1984.
- [11] Buefler H: A unified representation of variational principles in non-linear elasticity. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **80**(1):53–59, 2000.
- [12] Celep Z: On the axially symmetric vibration of thick circular plates. *Ingenieur-Archiv* **47**:411–420, 1978.
- [13] Chen PS, Archer RR: Solutions of a twelfth order thick plate theory. *Acta Mechanica* **79**(1-2):97–111, 1989.

- [14] Cheng S: Elasticity theory of plates and a refined theory. *ASME Journal of Applied Mechanics* **46**(3):644–650, 1979.
- [15] Cheng AH-D, Antes H, Ortner N: Fundamental solutions of products of Helmholtz and polyharmonic operators. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **14**(2):187–191, 1994.
- [16] Choi I, Horgan CO: Saint-Venant's principle and end effects in anisotropic elasticity. *ASME Journal of Applied Mechanics* **44**(3):424–430, 1977.
- [17] Constanda C: Some comments on the integration of certain systems of partial differential equations in continuum mechanics. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* **29**:835–839, 1978.
- [18] Constanda C: *A mathematical analysis of bending of plates with transverse shear deformation*. London : Longman Scientific & Technical, 1990.
- [19] de Barcellos CS, Silva LHM: A boundary element formulation for the Mindlin's plate model. In: Brebbia CA, Venturini WS (Hrsg.), *BETECH 87*. Southampton : Computational Mechanics, 1987, S. 123–130.
- [20] Dym CL, Shames IH: *Solid mechanics. A variational approach*. New York : McGraw-Hill, 1973.
- [21] Džanelidze GYu: Survey of the work published in the USSR on the theory of the bending of thick and thin plates (russische Version ursprünglich von 1948). *American Mathematical Society Translations, Series 1*, **2**:231–257, 1962.
- [22] Eringen C, Suhubi E: *Elastodynamics. Volume II: Linear theory*. New York : Academic Press, 1975.
- [23] Eshelby JD: Elastic inclusions and inhomogeneities. In: Sneddon IN, Hill R (Hrsg.), *Progress in Solid Mechanics II*, Amsterdam : North-Holland, 1961, S. 87–140.
- [24] Fadle J: Die Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe. *Ingenieur-Archiv* **11**:125–149, 1941.
- [25] Fraeijns de Veubeke BM: *A course in elasticity*. New York : Springer, 1979.
- [26] Friedrichs KO, Dressler RF: A boundary-layer theory for elastic plates. *Communications in Pure and Applied Mathematics* **14**(1):1–33, 1961.
- [27] Galileev SM, Matrosov AV, VerizhenkoVE: Method of initial functions for layered and continuously inhomogeneous plates and shells. *Mechanics of Composite Materials* **30**(4):386–392, 1994.
- [28] Gaul L, Fiedler C: *Methode der Randelemente in Statik und Dynamik*. Braunschweig: Vieweg, 1997.
- [29] Goodier JN: Discussion of the paper [79]. *ASME Journal of Applied Mechanics* **13**(3):A249–A252, 1946.

- [30] Gregory RD: The general form of the three-dimensional elastic field inside an isotropic plate with free faces. *Journal of Elasticity* **28**(1):1–28, 1992.
- [31] Gregory RD: Helmholtz's theorem when the domain is infinite and when the field has singular points. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* **49**(3):439–450, 1996.
- [32] Gründemann H: *Randelementmethode in der Festkörpermechanik*. Leipzig : Fachbuchverlag, 1991.
- [33] Hartmann F: Static analysis of plates. In [8], S. 1–34.
- [34] Hencky H: Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten. *Ingenieur-Archiv* **16**(1):72–76, 1947.
- [35] Hong H-K, Chen J-T: Derivations of integral equations of elasticity. *Journal of Engineering Mechanics* **114**(6):1028–1044, 1988.
- [36] Horgan CO: On Saint-Venant's principle in plane anisotropic elasticity. *Journal of Elasticity* **2**(3):169–180, 1972.
- [37] Horgan CO: Recent developments concerning Saint-Venant's principle: An update. *Applied Mechanics Review* **42**(11):295–303, 1989.
- [38] Horgan CO: Recent developments concerning Saint-Venant's principle: A second update. *Applied Mechanics Review* **49**(10) (Part 2):S101–S111, 1996.
- [39] Horgan CO, Knowles JK: Recent developments concerning Saint-Venant's principle. In: Hutchinson JV, Wu TY (Hrsg.), *Advances in Applied Mechanics, Band 23*, 1983, S. 179–269.
- [40] Hörmander L: *Linear partial differential operators*. Berlin : Springer, 1964.
- [41] Iyengar KTSR, Chandrashekhara K, Sebastian VK: On the analysis of thick rectangular plates. *Ingenieur-Archiv* **43**(5):317–330, 1974.
- [42] Iyengar KTSR, Chandrashekhara K, Sebastian VK: Method of initial functions in the analysis of thick circular plates. *Nuclear Engineering and Design* **36**:341–354, 1976.
- [43] Iyengar KTSR, Pandya SK: Application of the method of initial functions for the analysis of composite laminated plates. *Ingenieur-Archiv* **56**:407–416, 1986.
- [44] Jemielita G: *On the winding paths of the theory of plates* (in polnisch). Warszawa : Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, 1991.
- [45] Jemielita G: On the winding paths of the theory of plates. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics (Mechanika Teoretyczna i Stosowana)* **31**(2):317–327, 1993
- [46] Jones RM: *Mechanics of composites materials*. New York : McGraw-Hill, 1975.
- [47] Kerr AD, El-Sibaie M: Green's functions for continuously supported plates. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* **40**:15–38, 1989.

- [48] Kirchhoff GR: Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **40**(1):51-88, 1850.
- [49] Krenk S: Theories for elastic plates via orthogonal polynomials. *ASME Journal of Applied Mechanics* **48**(4):900–904, 1981.
- [50] Levy M: Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **30**:219–306, 1877.
- [51] Lewiński T: On the twelfth-order theory of elastic plates. *Mechanics Research Communications* **17**(6):375–382, 1990.
- [52] Lewiński T, Telega JJ: *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*. Singapore : World Scientific, 2000.
- [53] Li L, Babuška I: Accuracy of some plate models for clamped-in boundary conditions. *Communications in Applied Numerical Methods* **8**(4):211–217, 1992.
- [54] Li L, Babuška I, Chen J: The boundary layer for  $p$ -model plate problems. Part I. Asymptotic analysis. *Acta Mechanica* **122**:181–201, 1997.
- [55] Li L, Babuška I, Chen J: The boundary layer for  $p$ -model plate problems. Part II. Boundary layer behavior. *Acta Mechanica* **122**:203–216, 1997.
- [56] Love AEH: *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4. Ausgabe. Cambridge : Cambridge University Press, 1927.
- [57] Lurje AI: On the problem of the equilibrium of plates of variable thickness (in russisch). *Trudy Leningradskogo Industrial'nogo Instituta*, Heft 6:57-80, 1936.
- [58] Lurje AI: On the theory of thick plates (in russisch). *Prikladnaja Matematika i Mechanika* **6**(2-3):151-168, 1942.
- [59] Lurje AI: *Three-dimensional problems of the theory of elasticity* (russisch von 1955). New York : Interscience, 1964.
- [60] Malvern LE: *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall, 1969.
- [61] Mieth H-J: *Über abklingende Lösungen elliptischer Randwertprobleme (Prinzip von Saint-Venant)*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, 1975.
- [62] Mindlin RD: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics* **18**(1):31–38, 1951.
- [63] Mindlin RD, Medick MA: Extensional vibrations of elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics* **26**(4):561–569, 1959.
- [64] Noor AK, Burton WS: Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates. *Applied Mechanics Review* **42**(1):1–13, 1989.
- [65] Panc V: *Theories of elastic plates*. Leyden : Noordhoff, 1975.



- [66] Papkovich PF: Über eine Form der Lösung des byharmonischen Problems für das Rechteck. *Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'URSS* **27**(4):334–338, 1940.
- [67] Poniatovskii VV: Theory for plates of medium thickness. *PMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **26**(2):478–486, 1962.
- [68] Poniatovskii VV: On the theory of bending of anisotropic plates. *PMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **28**(6):1247–1254, 1964.
- [69] Poniatovskii VV: Uravneniia teorii anizotropnih plastinok (Die Gleichungen der anisotropischen Plattentheorie). *Issledovaniya po uprogosti i plastitčnosti*, Sbornik 4, Izdat. Leningradskogo Universiteta, S. 3–28, 1965.
- [70] Poniatovskii VV: Utotchnennaia teoriia transversal'no izotropnih plastin (Verbesserte Theorie für transversal-isotropische Platten). *Issledovaniya po uprogosti i plastitčnosti*, Sbornik 6, Izdat. Leningradskogo Universiteta, S. 72–92, 1965.
- [71] Prange G: *Das Extremum der Formänderungsarbeit. Habilitationsschrift Technische Hochschule Hannover, 1916.* Herausgegeben von K. Knothe. Reihe Algorithmus, Heft 31. München : Institut für Geschichte der Naturwissenschaften, 1999.
- [72] Preußner G: *Eine Erweiterung der KIRCHHOFFschen Plattentheorie.* Dissertation. Technische Hochschule Darmstadt, 1982.
- [73] Preußner G: Eine systematische Herleitung verbesserter Plattengleichungen. *Ingenieur-Archiv* **54**:51–61, 1984.
- [74] Prusakov AP: Construction of twelfth-order bending equations for a transversely isotropic plate. *International Applied Mechanics* **29**(12):1001–1007, 1993.
- [75] Prusakov AP: Analysis of the theory of bending of transversally isotropic plates. *International Applied Mechanics* **32**(7):554–559, 1996.
- [76] Ramm E: From Reissner plate theory to three dimensions in large deformation shell analysis. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **80**(1):61–68, 2000.
- [77] Reissner H: *Elastic plates. Theory and applications.* New York : John Wiley, 1988.
- [78] Reissner E: On the theory of bending of elastic plates. *Journal of Mathematical Physics* **23**(4):184–191, 1944.
- [79] Reissner E: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics* **12**(2):A69–A77, 1945.
- [80] Reissner E: On bending of elastic plates. *Quarterly of Applied Mathematics* **5**(1):55–68, 1947.
- [81] Reissner E: On a variational theorem in elasticity. *Journal of Mathematical Physics* **29**(2):90–95, 1950.

- [82] Reissner E: On the theory of transverse bending of elastic plates. *International Journal of Solids and Structures* **12**(8):545–554, 1976.
- [83] Reissner E: A twelfth order theory of transverse bending of transversely isotropic plates. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **63**(7):285–289, 1983.
- [84] Reissner E: Reflection on the theory of elastic plates. *Applied Mechanics Review* **38**(11):1453–1464, 1985.
- [85] Reissner E: On a generalization of some formulas of the theory of moderately thick elastic plates. *International Journal of Solids and Structures* **23**(6):711–717, 1987.
- [86] Reissner E: On the equations of an eighth-order theory for nonhomogeneous transversely isotropic plates. *International Journal of Solids and Structures* **31**(1):89–96, 1994.
- [87] Ricci L: Tavola di radici di basso modulo di un'equazione interessante la scienza delle costruzioni. *Rivista di Ingegneria* **1**(2):150–156, 1951.
- [88] Rössle A, Bischoff M, Wendland W, Ramm E: On the mathematical foundation of the (1,1,2)-plate model. *International Journal of Solids and Structures* **36**(14):2143–2168, 1999.
- [89] Salerno VL, Goldberg MA: Effect of shear deformations on the bending of rectangular plates. *ASME Journal of Applied Mechanics* **27**(1):54–58, 1960.
- [90] Schumann W: *Theoretische und experimentelle Untersuchungen über das de Saint-Venantsche Prinzip, speziell mit Anwendung auf die Plattentheorie*. Dissertation, Eidgenössische Technische Hochschule in Zürich, 1955.
- [91] Schwab C: *Hierarchical models of elliptic boundary value problems on thin domains – a-posteriori error estimation and Fourier analysis*. Habilitation Thesis, Stuttgart Universität, 1995.
- [92] Schwab C, Wright S: Boundary layers of hierarchical beam and plate models. *Journal of Elasticity* **38**(1):1–40, 1995.
- [93] Stakgold I: *Boundary value problems of mathematical physics, Vol. 1*. New York : MacMillan, 1967.
- [94] Stoker JJ: Mathematical problems connected with the bending and buckling of elastic plates. *Bulletin of the American Mathematical Society* **48**(4):247–261, 1942.
- [95] Szabó I: Die Geschichte der Plattentheorie. *Die Bautechnik* **49**(1):1–8, 1972.
- [96] Szabó I: Die Entwicklung der Elastizitätstheorie im 19. Jahrhundert nach Cauchy. *Die Bautechnik* **53**(4):109–116, 1976.
- [97] Tehrani PH, Eslami MR: Boundary element analysis of coupled thermoelasticity with relaxation times in finite domain. *AIAA Journal* **38**(3):534–541, 2000.

- [98] Telles JCF: A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **24**(5):959–973, 1987.
- [99] Timoshenko SP: *History of strenght of materials*. New York : McGraw-Hill, 1953.
- [100] Timoshenko SP, Goodier JN: *Theory of elasticity*, 3. Ausgabe. Auckland : McGraw-Hill, 1982.
- [101] Timoshenko SP, Woinowsky-Krieger S: *Theory of plates and shells*, 2. Ausgabe. Auckland : McGraw-Hill, 1959.
- [102] Todhunter I, Pearson K: *A history of the theory of elasticity and of the strength of materials*. Bände I, II-I und II-II. New York : Dover, 1960.
- [103] Tran-Cong T: On Helmholtz's decomposition theorem and Poisson's equation with an infinite domain. *Quarterly of Applied Mathematics* **51**(1):23–35, 1993.
- [104] Truesdell CA: *Essays in the history of mechanics*. Berlin : Springer, 1968.
- [105] van der Weeën F: *Rand-integraalvergelijkingen voor het plaatmodel van Reissner*. Ph.D. Thesis, Rijksuniversiteit Gent, Belgien, 1981.
- [106] van der Weeën F: Application of the boundary integral equation method to Reissner's plate model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **18**(1):1–10, 1982.
- [107] van der Weeën F: Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model. In: Brebbia CA (Hrsg.), *4th International Seminar Boundary Element Method (BEM 4)*, Southampton, 1982, S. 487–499.
- [108] Vekua IN: *Shell theory: General methods of construction*. Boston : Pitman, 1985.
- [109] Vladimirov VS: *Equations of mathematical physics*. New York : Marcel Dekker, 1971.
- [110] Vlasov VZ: Die Methode der Anfangsfunktion in einer Aufgabe der Elastizitätstheorie (in russisch). *Izvestija Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Techniceskich Nauk*, Heft 7:49–69, 1955.
- [111] Vlasov VZ: The method of initial functions in problems of the theory of thick plates and shells. In: International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM), *Proceedings of the 9th International Congress for Applied Mechanics*, Brussel, 1957, S. 321–330.
- [112] Vlasov VZ, Leontjev NN: *Beams, plates and shells on elastic foundations*. Jerusalem : Israel Program for Scientific Translations, 1966.
- [113] Washizu K: *Variational methods in elasticity and plasticity*, 3. Ausgabe. Oxford : Pergamon, 1982.

- [114] Westphal Jr. T: *Direkte Annäherung der REISSNERSchen und MINDLINSchen Plattenmodelle durch die Randelementmethode* (in portugiesisch). MSc Thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasilien, 1990.
- [115] Westphal Jr. T, Andrä H, Schnack E: Some fundamental solutions for the Kirchhoff, Reissner and Mindlin plates and a unified BEM formulation. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **25**(2):129–139, 2001.
- [116] Westphal Jr. T, de Barcellos CS, Tomás Pereira J: On general fundamental solutions of some linear elliptic differential operators. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **17**(4):279–285, 1996.
- [117] Westphal Jr. T, Schnack E, de Barcellos CS: The general fundamental solution of the sixth-order Reissner and Mindlin plate bending models revisited. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **166**(3-4):363–378, 1998.
- [118] Zhong Z-H, Luo J-H: Theory and refined theory of elasticity for transversely isotropic plates and a new theory for thick plates. *Applied Mathematics and Mechanics* **9**(4):375–389, 1988.
- [119] Zimmermann G: On the asymptotic theory of plates. *Acta Mechanica* **50**(1-2):49–58, 1983.