

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM  
KARLSRUHE**

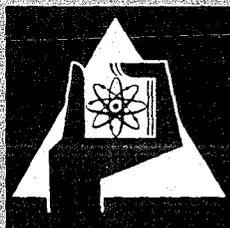
Juli 1972

KFK 1636

Institut für Experimentelle Kernphysik

Parameterstudie für eine Dosenspule  
als Elektronenringkompressor

L. Steinbock



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.  
KARLSRUHE

**Als Manuskript vervielfältigt**

**Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.  
KARLSRUHE**

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Juli 1972

KFK 1636

Institut für Experimentelle Kernphysik

Parameterstudie für eine Dosenspule  
als Elektronenringkompressor<sup>\*)</sup>

L. Steinbock

Gesellschaft für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe

<sup>\*)</sup> von der Fakultät für Physik der Universität Karlsruhe  
genehmigte Dissertation



Berichtigungen zu KFK 1636

S. 10 Die rechte Seite von (3.6) ist mit  $\dot{\theta}$  zu multiplizieren.

S. 47 In Fig. 7.1 ist in der oberen Detailzeichnung l/l durch l/R zu ersetzen.

Der Parameter l/R hat für die obere Kurve den Wert 0.5, für die mittlere den Wert 0.4 und für die untere den Wert 0.3.

Seiten 53 - 56 Alle Zeitskalen sind mit 10 zu multiplizieren.

S. 72 In Zeile [10] und [11] ist STOEME durch STROEME zu ersetzen.



## Zusammenfassung

Die gegenwärtigen Elektronenringkompressoren, in denen relativistische Elektronenringe gebildet werden, bestehen aus mehreren Helmholtzspulenpaaren, deren komplizierte Schaltfolge nur Wiederholfrequenzen von einigen Hertz erlaubt. Für künftige Beschleuniger ist jedoch zur Erzielung hoher Intensitäten eine hohe Wiederholfrequenz anzustreben. Es wird gezeigt, daß mit einem einzigen Spulenpaar, das eine geeignete Windungsverteilung besitzt, eine vergleichbare Kompression erzielt werden kann. Gleichzeitig kann das Spulenpaar kontinuierlich betrieben werden und die Wiederholrate auf 1 kHz gesteigert werden. Die geeignete Windungsverteilung ist so zu wählen, daß auf der Ringbahn ein Magnetfeld herrscht, das den physikalischen Forderungen der Injektion, Kompression und Extraktion genügt. Dieser neue Kompressor, dessen Spule die Form einer flachen Dose hat, wird auf sein Wirbelstrom- und Stabilitätsverhalten untersucht. Zum Schluß werden die nötigen elektrischen Leistungen berechnet und mit einem herkömmlichen Kompressor verglichen.

Abstract :

The present electron ring compressors which produce relativistic electron rings consist of a set of Helmholtz coils which allows only a repetition rate of several cycles/sec because of the complicated switching mechanism. For future accelerators a high repetition rate must be achieved for the sake of high intensity. It is shown that with only one single coil pair with a suitable winding distribution one may obtain a comparable good compression and simultaneously increase the repetition rate up to 1 cycle/sec by the possible use of continuous alternating current. The winding distribution must be chosen in that manner that the magnetic field on the orbit fulfills the physical demands of the injection compression and extraction. The new compressor geometry which has the form of a flat tin is also studied for its eddy current behaviour, its extraction properties and its collective instabilities. At last the power requirements are computed and compared with a conventional compressor.

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	1
2. Der Kompressor	4
2.1 Der Kompressionsvorgang	4
2.2 Kompressionsparameter und Feldstärke im Elektronenring	5
2.3 Bedeutung des Feldindex während der Inflektion	6
3. Bewegungsgleichungen in einem Magnetfeld	9
3.1 Einführende Bemerkungen	9
3.2 Adiabatische Bewegungsgleichungen	9
3.3 Betatronbewegungsgleichungen	10
4. Kompressionsdynamik in einer Einzelspule	12
4.1 Allgemeine Bemerkungen zur Kompressions- dynamik	12
4.2 Kompressionsdynamik bei vorgegebenem Feldindex	12
4.3 Untersuchung zweier Feldindexverläufe	15
4.4 Kompressionsdynamik einer Dospule	19
5. Wirbelströme	24
5.1 Allgemeine Bemerkungen	24
5.2 Das Feld eines Torus in einem zeitveränder- lichen Magnetfeld	24
5.3 Wirbelstromeinfluß bei Helmholtz- und Dospulen	30
6. Kollektive Instabilitäten	32
6.1 Allgemeine Bemerkungen	32
6.2 Die inkohärente Raumladungsgrenze in der Dospule	32
6.3 Diskussion der longitudinalen Instabili- tätsgleichung	33
6.4 Diskussion der Dispersionsgleichung der transversalen Instabilität	39

	Seite
6.5 Vergleich der transversalen Instabilitäten bei Dosen- und Helmholtzspule	41
7. Extraktion	44
7.1 Zusammenhang von Extraktion und Beladung	44
7.2 Allgemeine Bemerkungen zur Extraktion	45
7.3 Vergleich verschiedener Extraktionssysteme	46
7.4 Eine kombinierte Extraktions-Kompressionsanordnung	48
8. Parametervergleich von Helmholtz- und Dosenkompressor	53
9. Schlußbemerkungen	60
Anhang	
A1 Fourierreihen	61
A2 Lösung der elliptischen Gleichung $\Delta H + K^2 H = 0$	64
A3 Die Berechnung der Parameter der Kompression und Extraktion	67
A4 Flußdiagramme der Programme KOMP, AFFE, AFNEW, SUPGEO, ALPHA	71
Symboltabelle	79
Literaturverzeichnis	81

## Einleitung

Beschleuniger erobern sich ein immer größeres Anwendungsbiet. Neben rein wissenschaftlichen Anwendungen für Beschleuniger gewinnen heute zunehmend auch medizinische und industrielle Anwendungen an Bedeutung. Dabei kann ganz allgemein gesagt werden, daß die Überlegenheit des Beschleunigers als Bestrahlungsanlage von seiner größeren Flexibilität gegenüber Reaktor und Radionukliden herrührt. Zwei Beispiele mögen dies erläutern. Für Materialuntersuchungen von Reaktorwerkstoffen haben Beschleuniger gegenüber Reaktoren den Vorteil, daß durch Fokussierung des Strahles die Teilchenflüsse erstens wesentlich höher als im Reaktor sein können (kürzere Untersuchungszeiten) und der gut definierte Ausgangsstrahl (nur eine Energie, nur eine Ionensorte) eine differenziertere Untersuchung als im Reaktor erlaubt.

Bei der Bestrahlung von Krebsgeschwülsten ist je nach der Tiefenlage Strahlung mit variabler Eindringtiefe erforderlich. Da aber Radionuklide nur Strahlung mit diskreter Energie und damit definierter Eindringtiefe aussenden, sind deshalb nur bestimmte Tiefen erreichbar, so daß die Anwendung auf spezielle Fälle beschränkt ist. Die in der Medizin zukünftig geplante Anwendung von  $\pi$ -Mesonen aus Beschleunigern<sup>1,2)</sup> wird dagegen eine Bestrahlung ermöglichen, die über die Steuerung der Mesonenenergie jede gewünschte Eindringtiefe erreicht und das darüberliegende Gewebe wesentlich weniger als bei den Radionukliden schädigt. Neben der Variation der Energie ist es aber für einen Beschleuniger wünschenswert, auch die Teilchenart ohne zeitraubende Arbeiten an der Ionenquelle zu ändern, so daß z.B. für Materialuntersuchungen und Ionenimplantationen mit einem Beschleuniger gleichzeitig verschiedene Ionensorten beschleunigt werden können.

Leider sind Beschleuniger technisch aufwendige und teure Apparaturen, so daß die Flexibilität in der Anwendung durch die

örtliche Gebundenheit ausgeglichen wird. Dieser technische Aufwand hat neben dem Streben nach hohen Intensitäten einen Grund im begrenzten Energiegewinn pro Längeneinheit. Diese Größe läßt bei der Entwicklung zu immer höheren Energien einerseits die Linearbeschleuniger immer länger und die Kreisbeschleuniger immer schwerer, komplizierter und größer werden. Diese entscheidende Größe, der Energiegewinn pro Meter, wird bei der üblichen direkten Beschleunigungsmethode durch die maximale elektrische Feldstärke in den Beschleunigungsabschnitten begrenzt, die von den Eigenschaften der verwendeten Materialien abhängt.

In den letzten Jahren wurde begonnen, kollektive Beschleunigungsmethoden zu untersuchen, bei denen statt des durch Ladungen und Ströme auf den Wänden hervorgerufene externe Feld das interne elektrische Feld einer Ladungsverteilung zur Beschleunigung benutzt wird. Bei der Beschleunigung positiver Ionen besteht die Ladungswolke daher aus Elektronen. Die elektrischen Felder derartiger Raumladungswolken sind bei genügender Dichte ( $n_e \approx 10^{13}$  Elektronen/cm<sup>3</sup>) und entsprechender Geometrie um ein bis zwei Größenordnungen höher als konventionelle elektrische Beschleunigungsfelder. Außerdem erlauben sie, Ionen jeder Art und jeden Ionisierungsgrades ohne große apparative Änderungen zu beschleunigen. Bei der Entwicklung der kollektiven Beschleunigungsmethode sind nun drei Probleme zu lösen:

1. die Erzeugung einer Raumladungswolke genügender Dichte,
2. die Stabilisierung der Wolke gegen ihre eigenen Raumladungskräfte,
3. die Beschleunigung der Wolke so, daß die darin enthaltenen "Nutzteilchen" mitbeschleunigt werden.

Für die Erzeugung der Wolke stehen heute noch keine Apparaturen zur Verfügung, sie wird daher heute in zwei Schritten aufgebaut. Zuerst wird ein Elektronenstrahl gebildet und in einem Magnetfeld zu einem Ring geformt, der dann durch Erhöhen des Magnetfeldes so stark komprimiert wird, daß seine interne Feld-

stärke groß genug ist, um Ionen im Ring zu halten. Das Problem der Stabilisierung löst sich glücklicherweise von selbst, da bei einem Elektronen-Ionenverhältnis  $N_e/N_i = 1/\eta$  ein derartiger Ring selbstfokussierend wird, wenn  $1 > Z\eta > 1 - \beta_e^2$  gilt (Budker-Benett-Pinch). Für die Beschleunigung des Ringes gibt es zwei Verfahren:

1. der Ring wird auf die übliche Art durch die elektrischen Felder von Hochfrequenzresonatoren beschleunigt,
2. die Rotationsenergie des Ringes wird in einem schwach abfallenden Magnetfeld in Translationsenergie verwandelt ("adiabatische Expansion").

Für die Erzeugung des fast homogenen Expansionsfeldes bieten sich dabei supraleitende Spulen an, mit denen die angestrebten Longitudinalfelder leicht zu realisieren sind.

Neben den Hauptcharakteristika Teilchenart und Endenergie ist der nächstwichtige Parameter der maximale Nutzteilchenstrom, der bei gepulsten Beschleunigern der Teilchenzahl pro Puls und der Wiederholfrequenz proportional ist. Da nun die Teilchenzahl in einem Elektronenringbeschleuniger aus Raumladungsgründen und wegen kollektiver Instabilitäten nicht ohne große Anstrengungen über  $10^{13}$  Elektronen pro Ring und damit etwa  $10^{11}$  Ionen pro Puls gesteigert werden kann, wäre ein gangbarer Weg, die Wiederholfrequenz zu erhöhen, um hohe Teilchenströme zu erzielen. Die in Bezug auf die Wiederholungsrate kritischsten Bestandteile eines Elektronenringbeschleunigers sind der Injektor und der Kompressor. Die folgende Arbeit zeigt, daß die Wiederholfrequenz des letzteren durch eine geeignete Spulenkonstruktion <sup>3)</sup> bis auf 1 kHz gesteigert werden kann, und damit um Größenordnungen höhere Teilchenströme erreichbar sind.

## 2. Der Kompressor

### 2.1 Der Kompressionsvorgang

Weil die Injektoren für Elektronenringbeschleunigerexperimente bis auf eine Ausnahme eines zylindrischen Strahls<sup>4)</sup> einen linearen Strahl ungenügender Emittanz und Dichte liefern, wird dieser in einem Magnetfeld zu einem stabilen Ring geformt. Damit dieser die für eine Beschleunigung erforderliche hohe Dichte und kleine Emittanz erhält, werden seine geometrischen Abmessungen wie Radius und Dichte durch Erhöhung des Magnetfeldes verkleinert. Dieser Kompressionsvorgang erhöht also die für die Beschleunigung der Ionen nötige Feldstärke im Ring. In den meisten bis heute aufgebauten Elektronenringbeschleunigerexperimenten besteht die Kompressionsanordnung aus mehreren Helmholtzspulenpaaren, in deren Mittelebene der Elektronenring durch aufeinanderfolgendes Einschalten der verschieden großen Spulen komprimiert wird. Das Magnetfeld dieser Spulen ist ein schwach fokussierendes Feld, dessen Fokussierungsstärke, der Feldindex

$$n = - \frac{\partial B_r}{\partial z} \frac{R}{B_z} \quad (2.1)$$

stark vom Radius abhängt (Fig. 5.1), so daß beim Durchlaufen der verschiedenen Helmholtzspulen unter Umständen mehrfach Resonanzen gekreuzt werden, die zu Teilchenverlusten führen können. Im Dauerbetrieb würde die komplizierte Schaltabfolge dieses Helmholtzkompressors zu beträchtlichen Nachteilen führen; denn für jeden Kompressionszyklus müssen mehrere Kondensatorbänke geladen, zu einem bestimmten Zeitpunkt an die Spulen angeschaltet und nach einer Viertelperiode kurzgeschlossen werden. Bei einem Betrieb mit hoher Wiederholfrequenz wäre dies wegen der vielen verschleißanfälligen Hochspannungshochstromschalter (Lebensdauern von Hochstromhoch-

spannungsfunkenstrecken für die hier nötigen Leistungen betragen etwa 10 000 Schaltungen <sup>5)</sup> ein störanfälliger und kostspieliger Weg, da die gesamte Energie nach jedem Kompressionszyklus in Wärme umgesetzt wird. Eine einzige Spule, die durch ihre Wicklungsdichte alle physikalischen Forderungen erfüllt, kann kontinuierlich mit Wechselstrom betrieben werden, wobei lediglich die Ohmschen Verluste pro Zyklus nachgespeist würden.

## 2.2 Kompressionsparameter und Feldstärke im Elektronenring

Wie bereits gesagt, ist der wichtigste Zweck der Kompression die Erhöhung der Teilchendichte  $\frac{dN}{dV}$  im Ring, da die Ionisationszeiten bei der Beladung dieser proportional sind, und die Erhöhung der Feldstärke im Potentialtopf des Elektronenringes. Unter diesem Aspekt ist für die Güte eines Kompressors das Verhältnis der Feldstärken des Ringes im komprimierten und im injizierten Zustand ein gutes Maß. Unter der Annahme eines elliptischen Strahles mit kastenförmiger Ladungsverteilung in axialer und radialer Richtung mit den Strahlradien  $a$  und  $b$  erhält man für die maximale Feldstärke am Ringrand

$$E_{\max} = \frac{e N_e}{\pi R(a + b)\epsilon_0} \quad (2.2)$$

und folglich für das Verhältnis der Feldstärken auf Kompressions- und Injektionsradius:

$$\frac{E_{\max,c}}{E_{\max,i}} = \frac{(a_i + b_i)R_i}{(a_c + b_c)R_c} \quad (2.3)$$

Nun ist in einem Beschleuniger die normierte Emittanz konstant (das Produkt aus Impuls und Emittanz dividiert durch  $m_0 c$ ):

$$\epsilon_{\text{norm}} = \frac{\pi Q \{ \begin{matrix} b^2 \\ a^2 \end{matrix} \} \beta \gamma}{R} \quad (2.4)$$

Dies gilt für beide Richtungen, mit  $Q_r = \sqrt{1-n}$  und  $Q_z = \sqrt{n}$ . Nach einigen Umformungen folgt dann für das Verhältnis der Feldstärken

(2.5)

$$\frac{E_{\max,c}}{E_{\max,i}} = \frac{R_i^{3/2} p_c^{1/2}}{R_c^{3/2} p_i^{1/2}} \frac{(1-n_c)^{-1/4} + n_c^{-1/4} \sqrt{\frac{\epsilon_z}{\epsilon_r}}}{(1-n_i)^{-1/4} + n_i^{-1/4} \sqrt{\frac{\epsilon_z}{\epsilon_r}}}$$

D.h. um ein besonders tiefes Potential zu erhalten, ist es vorteilhafter, den Radius zu verkleinern, als den Impuls zu erhöhen.

Im Falle einer nachfolgenden Expansionsbeschleunigung und aus Stabilitätsgründen ist jedoch ein gewisser Mindestimpuls nötig, so daß die eben gezogene Folgerung nur begrenzt gültig ist. Die Feldindizes sind nur von geringer Bedeutung, da  $n_i$  und  $n_c$  durch Injektion und Extraktion weitgehend festgelegt sind und außerdem nur mit der Potenz 1/4 die Feldstärke beeinflussen.

### 2.3 Bedeutung des Feldindex während der Inflektion

Um die Teilchen im Magnetfeld auf eine Kreisbahn zu bringen, müssen sie in einem magnetisch abgeschirmten Rohr tangential auf dem zu ihrem Impuls passenden Radius in den Kompressor eingeschossen werden. Damit sie nach einigen Umläufen nicht gegen diese abschirmende Einschußschnauze stoßen, müssen sie durch ein innerhalb einer Umlaufzeit abfallendes Magnetfeld abgelehnt werden. Ein idealer Einschußmechanismus wäre eine Anordnung, in der die Teilchen auf einem Radius eingeschossen werden, der größer als ihr "Impulsradius" ist, so daß sie Betatronschwingungen ausführen. Am vom Feldindex abhängigen Ort ihrer ersten Kreuzung des Gleichgewichtsradius lenkt sie ein Magnetfeld auf diesen ein.

Dieses Magnetfeld muß nach einer Umlaufzeit null sein, da die Teilchen sonst wieder abgelenkt werden. Aus technischen Gründen kann dieses Inflektionsmagnetfeld jedoch nicht beliebig kurz und sein zeitlicher Abfall nicht beliebig schnell sein. Bei der Untersuchung der Feldindexabhängigkeit des Inflektors wird deshalb ein Modell von Merkel <sup>7)</sup> übernommen, bei dem das Magnetfeld einer Anordnung nach Fig. 2.1 während einer Umlaufzeit linear abfällt. In der erwähnten Arbeit wird gezeigt, daß bei Vorgabe des Feldindex  $n$  und der Länge des Inflektors  $\bar{\phi}$  die Lage  $\bar{\psi}$  (Fig. 2.1) (alle Winkel im Bogenmaß) und die Größe  $\Delta B/B$  des Inflektormagnetfeldes durch folgende Gleichungen gegeben sind.

(2.6)

$$\cot \bar{\psi} = - \frac{1 - \frac{\phi}{2} \cot \frac{\phi}{2}}{\delta - \frac{\phi}{2}} \quad \psi = \bar{\psi} \sqrt{1-n}$$

$$\phi = \bar{\phi} \sqrt{1-n}$$

$$\delta = 2\pi\sqrt{1-n}$$

$$\frac{\Delta B}{B} = - \frac{1-n}{2 \sin \frac{\phi}{2}} \frac{\sin \psi}{1 - \frac{\phi}{2\delta}} \frac{a}{R}$$

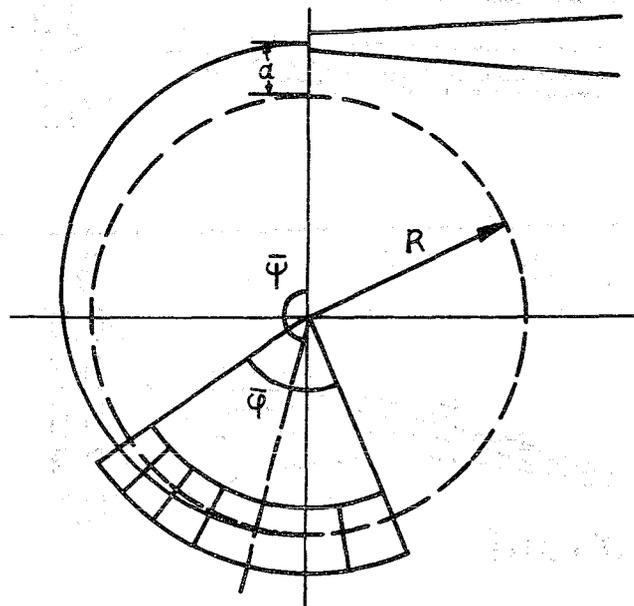


Fig.: 2.1 Inflektoranordnung

Die Fig. 2.2 zeigt Lage  $\bar{\psi}$  und Störmagnetfeld  $\Delta B/B$  für verschiedene Feldindizes als Funktion des Inflektorwinkels  $\bar{\phi}$ . Die Lage des Inflektors ist dabei nur schwach von seiner Länge  $\bar{\phi}$ , aber stark vom Feldindex abhängig. Für einen Feldindex  $n \geq 0,9$  würde die Inflektorlage zu sehr in die Nähe der Einschussschnauze geraten, so daß während der Inflektion ein geringerer Wert gewählt werden muß. Das Minimum der nötigen Inflektorstärke liegt je nach Feldindex zwischen  $180^\circ$  und  $270^\circ$  Inflektorlänge, es fällt mit zunehmendem Feldindex schwach ab, so daß zur Erleichterung der Inflektion ein Feldindex zwischen 0,8 und 0,9 vorteilhaft ist. Die soeben angestellten Überlegungen gelten nur bei konstantem Feldindex. Hängt dieser noch vom Radius ab, wie es in einer Helmholtzspule der Fall ist, so können sich die Ergebnisse wesentlich ändern.

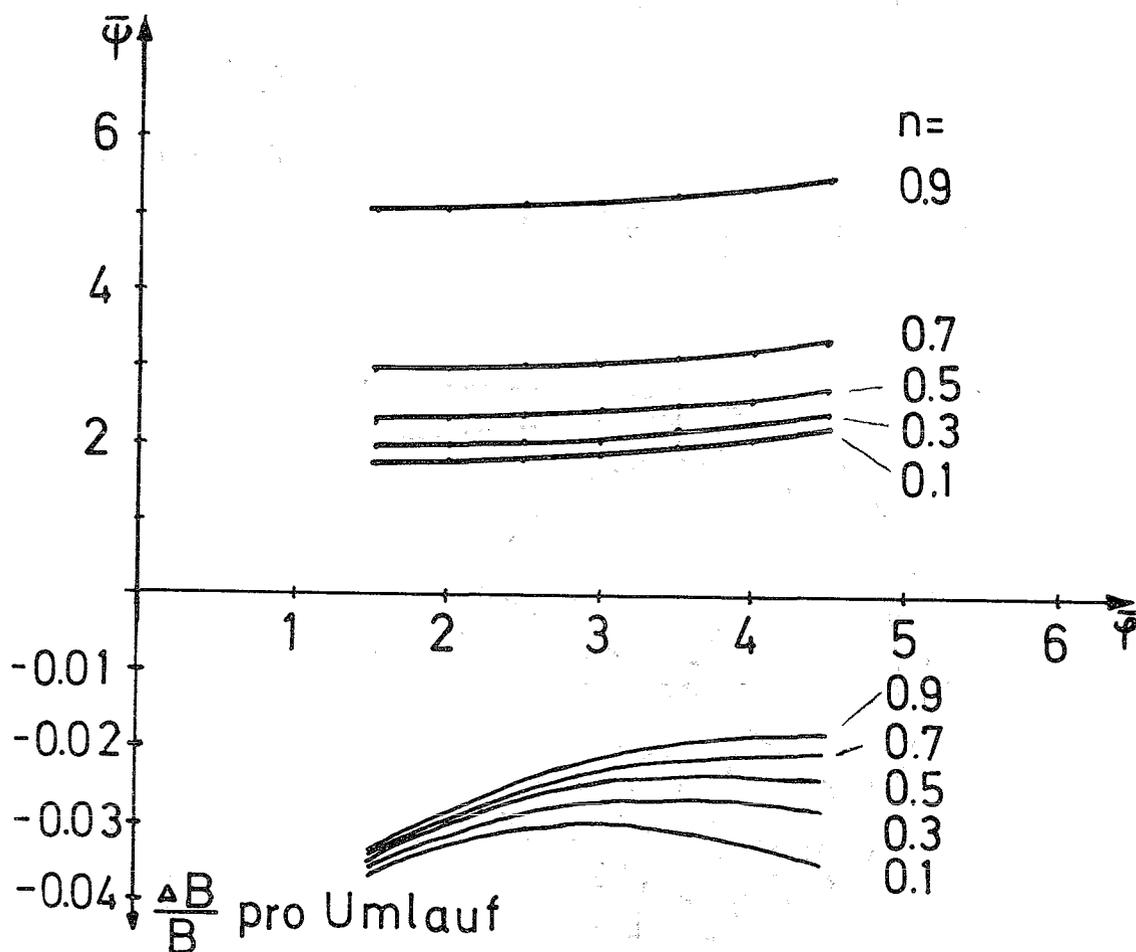


Fig.: 2.2 Lage  $\bar{\psi}$  und  $\Delta B/B$  als Funktion der Inflektorlänge  $\bar{\phi}$

### 3. Bewegungsgleichungen in einem Magnetfeld

#### 3.1 Einführende Bemerkungen

Die Lösung der Bewegungsgleichungen in einem rotationssymmetrischen Magnetfeld kann in zwei Schritten erfolgen. Zuerst berechnet man die Koordinatenänderungen, die langsam gegenüber der Umlauffrequenz also adiabatisch sind. Mit diesen Teillösungen können dann die Bewegungsgleichungen unter der Annahme weiterer Näherungen linearisiert werden und damit die Koordinatenänderungen berechnet werden, die ebenso schnell wie die Umlauffrequenz sind. Die letzteren werden nach ihrem ersten Auftreten auch Betatronbewegungsgleichungen genannt. Im folgenden werden die adiabatischen Bewegungsgleichungen abgeleitet und die Betatronbewegungsgleichungen angegeben und kurz diskutiert.

#### 3.2 Adiabatische Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen eines geladenen Teilchens in einem rotationssymmetrischen Magnetfeld lassen sich aus folgender Lagrangefunktion ableiten:

$$L(r, \dot{\theta}, z, \dot{z}, t) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} + e r \dot{\theta} A_{\theta}(r, z, t) \quad (3.1)$$

$\theta$  ist bezüglich dieser Lagrangefunktion zyklische Variable und der entsprechende kanonisch konjugierte Impuls ein Integral der Bewegung:

$$P_{\theta} = m_0 \gamma \cdot r^2 \dot{\theta} + e r A_{\theta} = \text{const} \quad (3.2)$$

Da  $L$  explizit von der Zeit abhängt, ist die Teilchenenergie keine Konstante, sie wächst gemäß

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} = e r \dot{\theta} \frac{\partial A_{\theta}}{\partial t} = \frac{e \dot{\theta}}{2\pi} \dot{\phi} = e \cdot v \dot{\phi} \quad (3.3)$$

Dabei ist  $\phi$  der von der jeweiligen Umlaufbahn eingeschlossene magnetische Fluß und  $v$  die Umlauffrequenz.

Die Koordinaten einer Gleichgewichtsbahn werden dann durch die Bedingung der Kräftefreiheit in axialer und radialer Richtung gegeben. Die Bedingung des axialen Gleichgewichts ist durch

$$0 = K_z = \frac{\partial L}{\partial z} = e r \dot{\theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial z} = e r \dot{\theta} B_r(r, z, t) \quad (3.4)$$

ausgedrückt. Da weder  $r$  noch  $\dot{\theta}$  null werden ist

$$B_r(r, z, t) = 0 \quad (3.5)$$

eine Bestimmungsgleichung für die  $z$ -Koordinate. Die zweite ergibt sich aus der Bedingung des radialen Gleichgewichts

$$0 = K_r = \frac{\partial L}{\partial r} = m_0 \gamma r \dot{\theta} + e r B_z(r, z, t) \quad (3.6)$$

zusammen mit (3.2):

$$B_z(r, z, t) r^2 - r A_\theta(r, z, t) = P_\theta / -e = \text{const} \quad (3.7)$$

In einer symmetrischen Spulenordnung ist 3.5 in der Symmetrieebene automatisch erfüllt und es genügt 3.7 zu lösen. Erst bei der Betrachtung der Extraktion, die nur durch ein asymmetrisches Magnetfeld bewirkt wird, sind beide Gleichungen gleichzeitig zu lösen. Die Gleichungen 3.5 und 3.7 definieren eine Gleichgewichtsbahn, die sich während eines Umlaufs nur wenig ändert, und werden daher adiabatische Bewegungsgleichungen genannt.

### 3.3 Betatronbewegungsgleichungen

Da ein realer Strahl endliche Dicke hat, vollführen die Teilchen wegen der Kräfte (3.5 und 3.7) außerhalb der Gleichgewichtsbahn die bereits erwähnten Betatronschwingungen. Die Ableitung der Differentialgleichung kann in <sup>8)</sup> nachgelesen werden. Diese Gleichungen werden durch eine Linearisierung der

Magnetfelder erhalten, wobei jeweils die ersten Ableitungen der radialen bzw. axialen Magnetfeldkomponenten nach  $z$  bzw.  $r$  die Frequenz dieser Schwingungen bestimmen:

$$d^2z/d\theta^2 + nz = 0 \tag{3.8}$$

$$d^2r/d\theta^2 + (1 - n)r = 0$$

$$n = - \frac{\partial B_z}{\partial r} \frac{r}{B_z} = - \frac{\partial B_r}{\partial z} \frac{r}{B_z}$$

Da die realen Magnetfelder nicht vollständig rotationssymmetrisch sind (z.B. aufgrund der Spiralität der Spulenwindungen und Fehljustierungen) treten Störterme auf den linken Seiten von 3.8 und 3.9 hinzu, die bei geeigneten Frequenzkombinationen von  $Q_r = \sqrt{1 - n}$  und  $Q_z = \sqrt{n}$  in der Art, daß

$$mQ_r + lQ_z = k \quad \text{und} \quad m, l, k$$

ganze Zahlen sind, zu Resonanzen führen, die einen Strahlverlust zur Folge haben. Dabei sind Resonanzen mit  $m, l, k \leq 2$  besonders gefährlich, da die Fourierkomponenten entsprechender Störungen am größten sind. Im Arbeitsbereich eines schwach fokussierenden Beschleunigers ( $0 \leq n \leq 1$ ) sind insbesondere die Resonanzen bei  $n = 0,2; 0,25; 0,36; 0,5$  und  $0,75$  gefährlich. Andererseits können die Betatronschwingungen durch die Verschmierung der Umlaufgeschwindigkeit und die damit verbundene Landau-dämpfung kollektive Instabilitäten stabilisieren helfen.

#### 4. Kompressionsdynamik in einer Einzelspule

##### 4.1 Allgemeine Bemerkungen zur Kompressionsdynamik

Der normale Gang bei der Berechnung der physikalischen Parameter eines Kompressors ist die Vorgabe einer Spulengeometrie und die nachfolgende systematische Variation verschiedener Stromzeitkombinationen für die einzelnen Spulen des Systems. Ziel dieses Probierens ist ein Feldindexverlauf mit möglichst wenig Resonanzdurchgängen auf großen Radien (das Feld ist dort noch stark gestört) und möglichst geringen Anregungen von anderen Instabilitätsformen.

Man kann nun umgekehrt vorgehen und fragen, wie muß ein Kompressor aussehen, wenn er bestimmte physikalische Forderungen erfüllen soll. Diese Forderungen sind im wesentlichen der Feldindexverlauf und der Energiebedarf pro Kompressionszyklus. Ein in dieser Hinsicht idealer Kompressor könnte ein Spulen-Kondensatorsystem sein, in dem eine Wanderwelle so hin und herläuft, daß der Elektronenring komprimiert wird und gleichzeitig am Ringort der richtige Feldindex herrscht. Wenn das Magnetfeldvolumen auch noch gleichzeitig mit dem Ringradius schrumpft, so wäre der Energiebedarf pro Zyklus sehr klein. Die Lösung eines derartigen Problems bestände wahrscheinlich aus etwa 10 Spulen, die nacheinander angeschaltet würden und den Feldindex innerhalb der gewünschten Grenzen halten würden. Da ein derartiges System nicht nur mathematisch sehr schwer zu handhaben wäre, sondern auch sehr viele physikalisch-technische Probleme mit sich brächte, wird im folgenden versucht, einen einspuligen Kompressor nur mit der Vorgabe des Feldindexverlaufes zu entwerfen.

##### 4.2 Kompressionsdynamik bei vorgegebenem Feldindex

Das Magnetfeld einer zu einer Ebene symmetrischen Spule, die in allen Windungen vom gleichen Strom durchflossen wird, hat in dieser Ebene die folgende Form:

$$B_z(r,t) = \hat{B}_z(r) I(t) \quad (4.1)$$

Die Größe  $\hat{B}$  hat die Dimension Tesla/A und stellt das Magnetfeld für den Strom 1 A dar.

Die radiale Form des Magnetfeldes hängt nicht von der Zeit ab. Daraus folgt, daß der Feldindex

$$n(r) = - \frac{\partial B_z}{\partial r} \frac{r}{B} = - \frac{d\hat{B}}{dr} \frac{r}{\hat{B}} \quad (4.2)$$

der nur logarithmische Ableitungen nach dem Radius enthält, nur mehr vom Radius allein abhängt und nicht von den Schaltzeitpunkten der einzelnen Spulen wie in einem mehrstufigen Kompressor. Da in den Betatronbewegungsgleichungen der Feldindex wesentlich die Lösung bestimmt, ist es sinnvoll, das Magnetfeld durch den Feldindex auszudrücken. Für einen vorgegebenen Feldindexverlauf  $n(r)$  erhält man dann durch Integration von (4.2)

$$B(r) = I_i \hat{B}_i e^{-\int_{r_i}^r \frac{n(\rho)}{\rho} d\rho} \quad (4.3)$$

Dabei ist

$\hat{B}_i$ : Magnetfeld auf dem Einschußradius  $r_i$  dividiert durch den Einschußspulenstrom  $I_i$ .

Im folgenden werden nun die anderen physikalischen Parameter, wie Impuls und Spulenstrom, allein aus der Kenntnis des Feldindexes berechnet.

Der Kreisbahnradius eines geladenen Teilchens in einem axial-symmetrischen Magnetfeld folgt aus der Konstanz des kanonisch konjugierten Impulses  $P_\theta$  (3.7). Im Mehrstufenkompressor werden die Spulenströme und damit das Magnetfeld  $B_z$  und das Vektorpotential  $A_\theta$  zu einem bestimmten Zeitpunkt berechnet und der Radius  $r$  als Lösung der Gleichung (3.7) bestimmt. Da im Einspulenkompressor nur ein Strom in Gleichung (3.7) eingeht, kann diese auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$I(\hat{B}_z(r) r^2 - \hat{A}_\theta(r) r) = \text{const} \quad (4.4)$$

Das Vektorpotential  $\hat{A}_\theta$  erhält man dabei aus (4.3) durch Integration über den Radius:

$$\hat{A}_\theta(r) = r \int_0^r \hat{B}(\rho) d\rho \quad (4.5)$$

Mit Hilfe der Gleichung (4.4) kann der Strom  $I_{12}$ , der nötig ist, um vom Radius  $r_1$  auf  $r_2$  zu komprimieren, allein durch Funktionen des Feldindexes ausgedrückt werden. Da (4.4) für jeden Radius konstant ist, kann nämlich das Verhältnis der beiden Ströme  $I_1$  und  $I_2$  einfach durch den Kehrwert des Verhältnisses der runden Klammern in (4.4) für die zwei Radien  $r_1$  und  $r_2$  ausgedrückt werden:

$$\frac{I_{r_1}}{I_{r_2}} = \frac{\hat{B}_z(r_2) r_2^2 - \hat{A}_\theta(r_2) r_2}{\hat{B}_z(r_1) r_1^2 - \hat{A}_\theta(r_1) r_1} \quad (4.6)$$

Mit  $I_{inj} = \frac{p_i \cdot c}{e_0 \cdot r_i \cdot \hat{B}_z(r_i)}$  als Injektionsstrom und den

Formeln (4.3) und (4.5) für  $\hat{B}_z$  bzw.  $\hat{A}_z$  kann der Strom, der nötig ist, um den Ring vom Injektionsradius  $r_i$  auf den Radius  $r$  zu komprimieren, wie folgt geschrieben werden:

$$I(r) = I_i \frac{B_i r_i^2 - B_i \int_0^r e^{-\int_{r_i}^r \frac{n(r)}{r} dr}}{B_i (r^2 e^{-\int_{r_i}^r \frac{n(r)}{r} dr} - \int_0^r e^{-\int_{r_i}^r \frac{n(r)}{r} dr})} \quad (4.7)$$

Der Zusammenhang zwischen Radius und Spulenstrom ist damit im Falle eines einspuligen Kompressors allein vom Feldindex-

verlauf abhängig. Im Zusammenhang damit steht auch die einfache Beziehung zwischen dem Radius und dem Impuls der Elektronen auf diesem Radius. Da der Impuls eines Teilchens in einem Magnetfeld proportional dem Radius und dem Magnetfeld ist und das Magnetfeld nach (4.1) dem Strom proportional ist, folgt für das Verhältnis der Impulse auf dem Radius  $r$  und dem Injektionsradius  $r_i$ :

$$\frac{p(r)}{p_i} = \frac{r}{r_i} \cdot e^{\int_{r_i}^r \frac{n(r)}{r} dr} \cdot \frac{I(r)}{I_i} \quad (4.8)$$

Dabei ergibt sich die Möglichkeit, den Impulsverlauf und den Spulenstromverlauf für hypothetische Feldindexverläufe zu untersuchen, ohne die Geometrie der Spule zu kennen, die das entsprechende Magnetfeld erzeugt. Obwohl besonders ausgefallene Feldindexverläufe nur durch sehr exotische Spulengeometrien hergestellt werden könnten, ist diese Untersuchung doch sehr brauchbar für Feldindexverläufe mit stetiger Ableitung.

#### 4.3 Untersuchung zweier Feldindexverläufe

Es werden nun zwei Feldindexverläufe untersucht werden, wobei der erste die heute verwendeten Helmholtzspulen annähert und der zweite zu einer hinsichtlich Resonanzverhalten und Energieverbrauch optimalen Kompressionsspule gehört. In diesem und den folgenden Kapiteln werden dieser neue Kompressor und ein Helmholtzkompressor auf ihre verschiedenen Eigenschaften untersucht. Ein einzelnes Helmholtzspulenpaar kann durch

$$n(r) = n_i \left(\frac{r}{r_i}\right)^2 \quad (4.9)$$

approximiert werden (dies entspricht genau dem Feldindexverlauf

einer Spule mit dem Axialabstandsverhältnis 2 und gibt bei der Stromberechnung einen zu günstigen Wert).

Aus diesem Verlauf folgt für das Magnetfeld nach (4.2):

$$B_z(r) = B_i e^{-\frac{n_i}{2} \left[ \left( \frac{r}{r_i} \right)^2 - 1 \right]} \quad (4.10)$$

und für das Strom- und Impulsverhältnis nach (4.7) bzw. (4.8):

$$\frac{I(r)}{I_i} = \frac{1 + (n_i - 1) e^{-\frac{n_i}{2}}}{1 + \left( \left( \frac{r}{r_i} \right)^2 n_i - 1 \right) e^{-\frac{n_i}{2} \left( \frac{r}{r_i} \right)^2}} \quad (4.11)$$

$$\frac{p(r)}{p_i} = \frac{\frac{r}{r_i} \left[ (n_i - 1) + e^{-\frac{n_i}{2}} \right]}{\left[ \left( \frac{r}{r_i} \right)^2 n_i - 1 \right] + e^{-\frac{n_i}{2} \left( \frac{r}{r_i} \right)^2}} \quad (4.12)$$

Bei einem Feldindex auf dem Einschubradius zwischen 0,9 und 0,1 folgt für das Stromverhältnis im komprimierten Zustand ( $r \ll r_i$ ):

(4.13)

$$\frac{I(r)}{I_i} \approx c \left( \frac{r_i}{r} \right)^2$$

mit  $1,06 < c < 1,45$

für  $0,9 > n_i > 0,1$

Dieser quadratische Stromanstieg bei kleinen Kompressionsradien ist unökonomisch; daher werden in den herkömmlichen Kompressoren die maximalen Spulenströme so gewählt, daß dieser steile  $1/r^2$  Anstieg noch nicht wirksam ist.

Ein wesentlich besseres Stromverhältnis zeigt dagegen der folgende Feldindexverlauf:

$$n = n_i \theta(r - r_1) \quad \theta(r): \text{ Sprungfunktion} \quad (4.14)$$

Dieser Verlauf ist auch vorteilhaft, wenn Resonanzkreuzungen bei kleinen Radiuswerten erfolgen sollen, da dort die resonanzanregenden Störfelder von Einschußschnauze und Spulenzuleitungen schon sehr klein sind. Der Feldindexsprung bei  $r_1$  ist zwar unrealistisch, aber für eine Diskussion sind die entstehenden Formeln wesentlich übersichtlicher und können zumindest qualitative Ergebnisse bringen. Wie ein Feld mit einem solchen Feldindex erzeugt werden kann, wird später untersucht. Für das Stromverhältnis erhält man:

$$\frac{I(r)}{I_i} = \frac{1 + \frac{n_i}{2(1-n_i)} \left(\frac{r_1}{r_i}\right)^{2-n_i}}{\left(\frac{r}{r_i}\right)^{2-n_i} + \frac{n_i}{2(1-n_i)} \left(\frac{r_1}{r_i}\right)^{2-n_i}} \quad r \geq r_1 \quad (4.15)$$

$$\frac{I(r)}{I_i} = \frac{1 + \frac{n_i}{2(1-n_i)} \left(\frac{r_1}{r_i}\right)^{2-n_i}}{\frac{2-n_i}{2(1-n_i)} \left(\frac{r}{r_i}\right)^{2-n_i} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{n_i}} \quad r \leq r_1 \quad (4.16)$$

In Fig. 4.1 und 4.2 sind die physikalischen Parameter einer derartigen Spule für  $n_i = 0,8$  und  $r_1 = 0,05$  m berechnet.

Der Strom- und Impulsverlauf sind hier flacher als in einer Helmholtzspule, d.h. es wird weniger Strom gebraucht, um den Ring auf einen bestimmten Radius zu komprimieren. Wie in der Einführung bereits erwähnt, ist es für die Feldstärkeerhöhung

aber gerade wünschenswert, den Radius zu verkleinern, statt den Impuls zu vergrößern, da die maximale Feldstärke des Elektronenringes mit dem reziproken Radius stärker als mit dem Impuls ansteigt. Andererseits darf der Impuls im Falle einer nachfolgenden Expansionsbeschleunigung aber auch nicht zu klein sein.

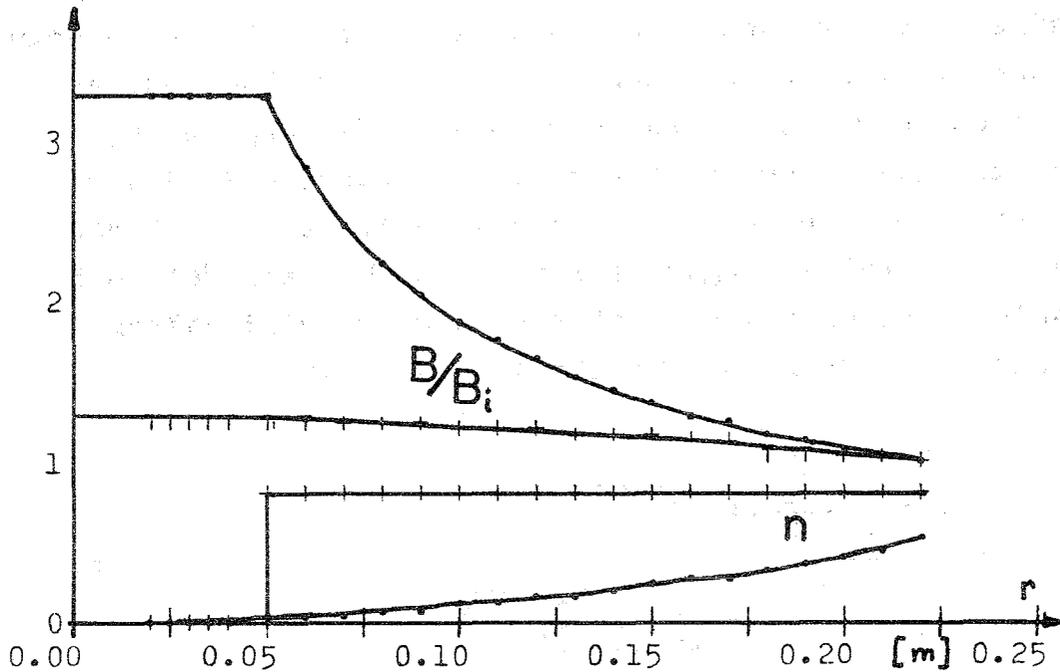


Fig.: 4.1 Feldindexverlauf und Magnetfeld hypothetischer Spulen mit Feldindexverlauf nach 4.9 (·) und 4.14 (+)

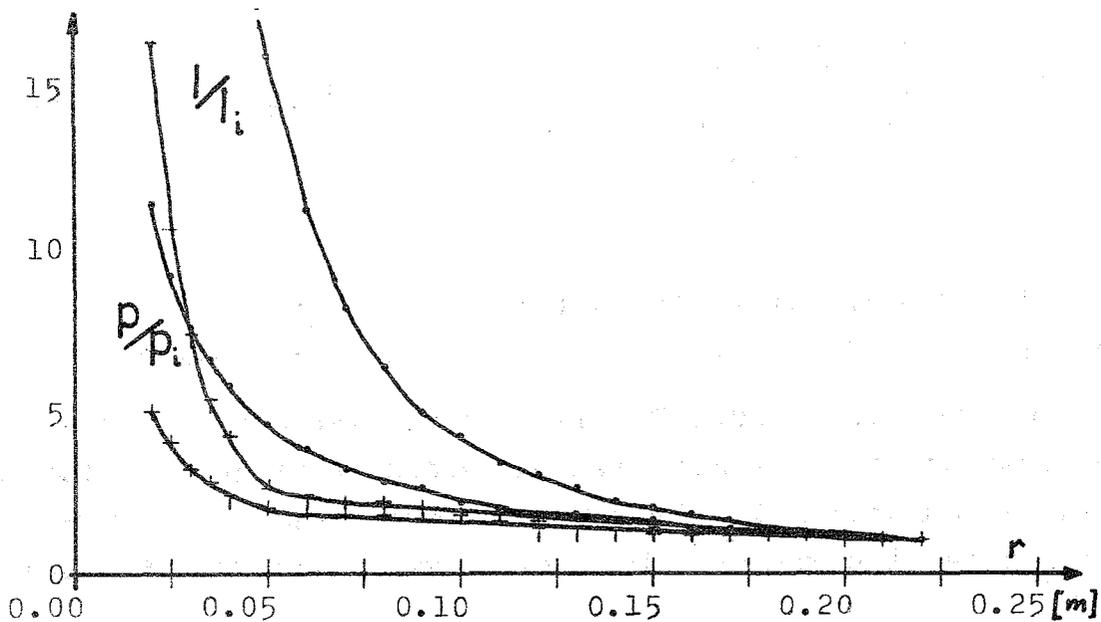


Fig.: 4.2 Stromverhältnis und Impulsverhältnis in Magnetfeldern mit Feldindex nach Formel 4.9 (·) bzw. 4.14 (+)

#### 4.4 Kompressionsdynamik einer Dospenspule

Die Aufgabe, eine Spule mit einem bestimmten Magnetfeldverlauf in der Mittelebene zu konstruieren, könnte prinzipiell mit einem von Laslett <sup>9)</sup> angegebenen Verfahren gelöst werden, bei dem aus Feldstärke und Vektorpotential auf der Randfläche des Magnetfeldvolumens eine Strom- und Dipolbelegung bestimmt wird. Der Energie-Inhalt der letzteren beträgt jedoch ein Vielfaches der Strombelegung. Wegen dieser Schwierigkeiten wurde daher die nach der Laslett'schen Methode bestimmte Stromverteilung, die das geforderte Magnetfeld nur ungefähr liefert, durch systematisches Verändern der Stromverteilung dem gewünschten Magnetfeld angepaßt.

Es wurden nun zwei Spulen berechnet, die den Feldindexverlauf von Fig. 4.1 verschieden gut approximieren. Wenn die in der Spule enthaltene Magnetfeldenergie klein gehalten werden soll, dann muß das Feldvolumen mit großem B klein sein. Daraus folgt, daß die Spule erstens so flach wie möglich sein sollte und ihr Feldindex bis zu kleinen Radien nahe bei eins liegen muß, da das Magnetfeld in radialer Richtung dann sehr schnell abfällt. Die erste Spule in Fig. 4.3 (+) approximiert den Feldindexsprung sehr gut, wird aber hier nicht näher untersucht, da Vakuumkammer und Isolierung ebenfalls Platz benötigen und somit bei 4 cm kein Platz für den Ring ist. Die zweite Spule in Fig. 4.3 (·) wurde einerseits nach diesen Gesichtspunkten und andererseits unter der Beachtung experimenteller Zugänglichkeit berechnet. So sind keine Wicklungen in der Mittelebene vorhanden, da der Zugang zur Vakuumkammer durch sie erschwert wäre. Auch der Wicklungsabstand ist in der Nähe des Injektionsradius so groß, daß die Zuleitungen für den Inflektor bequem untergebracht werden können.

Obwohl das Magnetfeld und der Feldindex (Fig. 4.4 und Fig. 4.5) in der Übergangsregion um  $r = r_1$  erheblich von den idealisierten

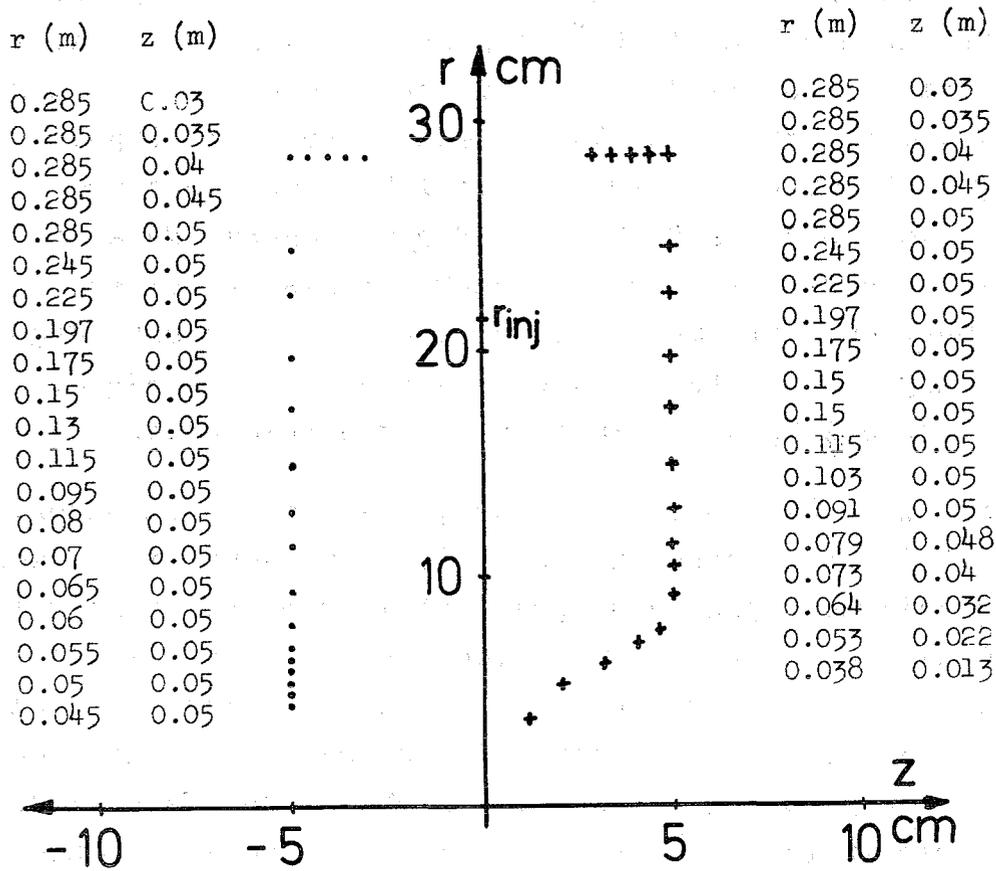


Fig.: 4.3 Geometrie zweier Dosenspulen mit unterschiedlicher Approximation des Feldindexes 4.10

Werten in Fig. 4.1 abweicht, ist das Impuls- und Stromverhältnis doch im wesentlichen das gleiche wie die Figur 4.5 zeigt.

Wie bei der Spule mit idealisiertem Feldindex steigt der Impuls und der Strom im Gegensatz zu einer Helmholtzspule erst bei kleinen Radiuswerten steil an. Das bedeutet für den zeitlichen Kompressionsverlauf, bei dem der zeitliche Stromverlauf Sinusform hat, daß der Radiusbereich vom Injektionsradius bis etwa 5 cm sehr schnell durchlaufen wird. Die schnelle Kompression

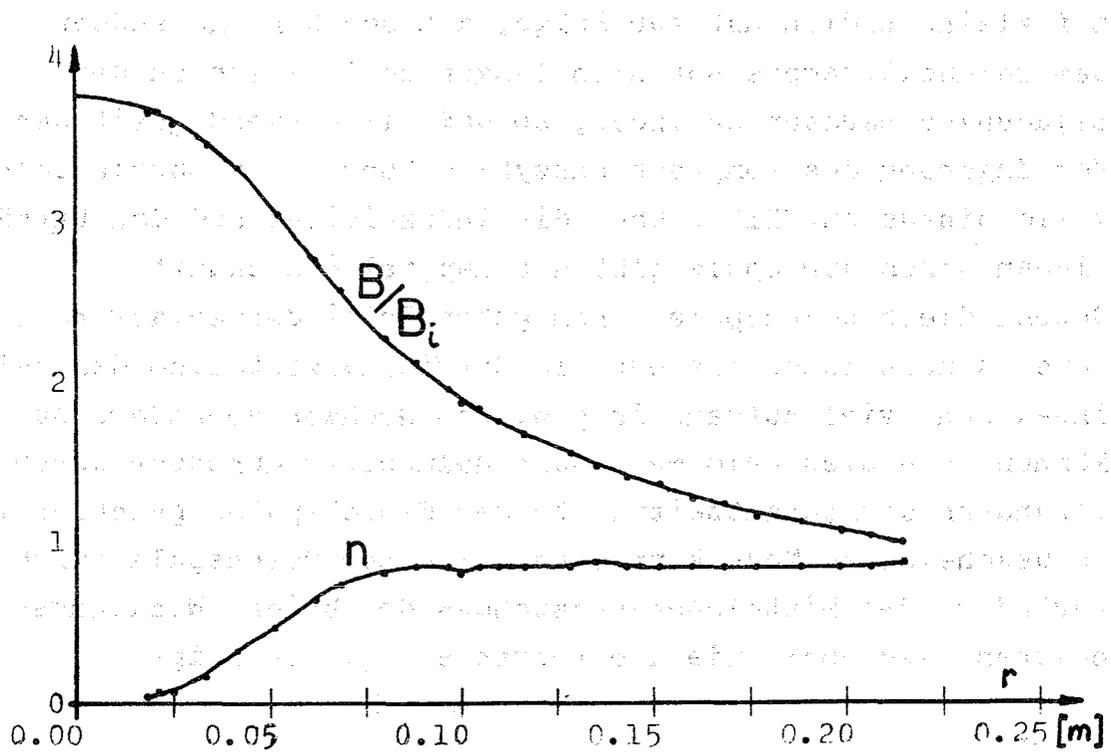


Fig.: 4.4 Magnetfeld und Feldindex der Spule nach Fig. 4.3

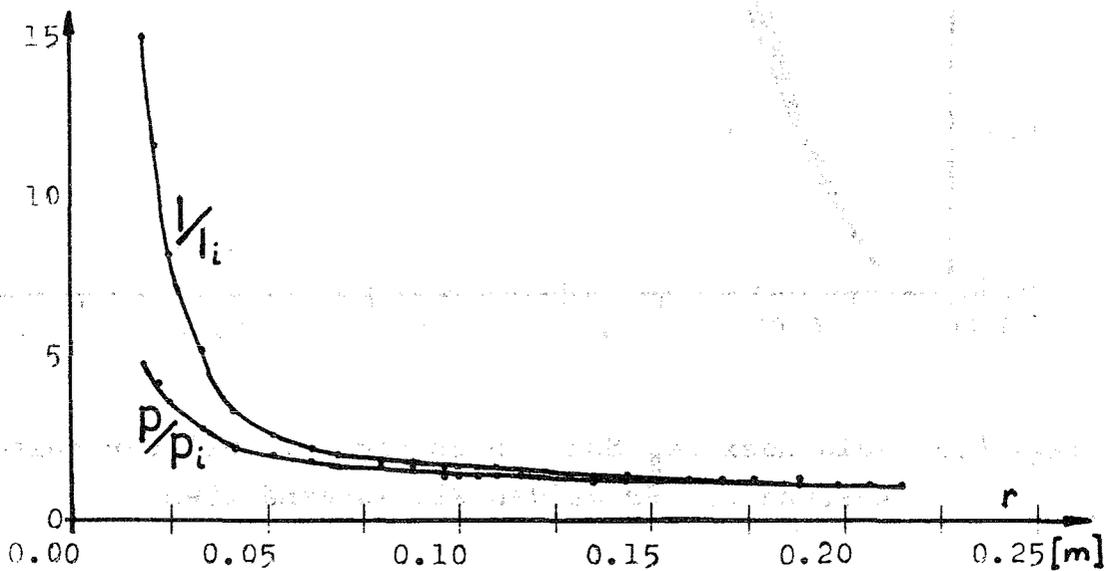


Fig.: 4.5 Impuls- und Stromverhältnis einer Dosenspule nach Fig. 4.3

auf kleine Radien hat zur Folge, daß der Ring gegenüber dem Helmholtzkompressor sich länger im Zielbereich der Beladungsapparatur befindet, so daß die Notwendigkeit der Verlängerung des Kompressionszyklus über die Sinusviertelwelle hinaus entfällt. Über die Induktivität und den tatsächlichen Strom der Spule gibt das Kapitel 8 Auskunft. Obwohl diese Dospule einen guten Feldindexverlauf hat, wäre es doch wünschenswert, im Entwicklungsstadium den Feldindex ohne viel Aufwand in gewissen Grenzen verändern zu können, wie dies beim Mehrstufenhelmholtzkompressor durch Verändern der Schaltzeitpunkte der Einzelspulen geschieht. In bescheidenem Maße kann dies bei einer Dospule durch Verändern des Mittelebenenabstandes der beiden Wicklungshälften geschehen, wie die folgende Fig. 4.6 zeigt.

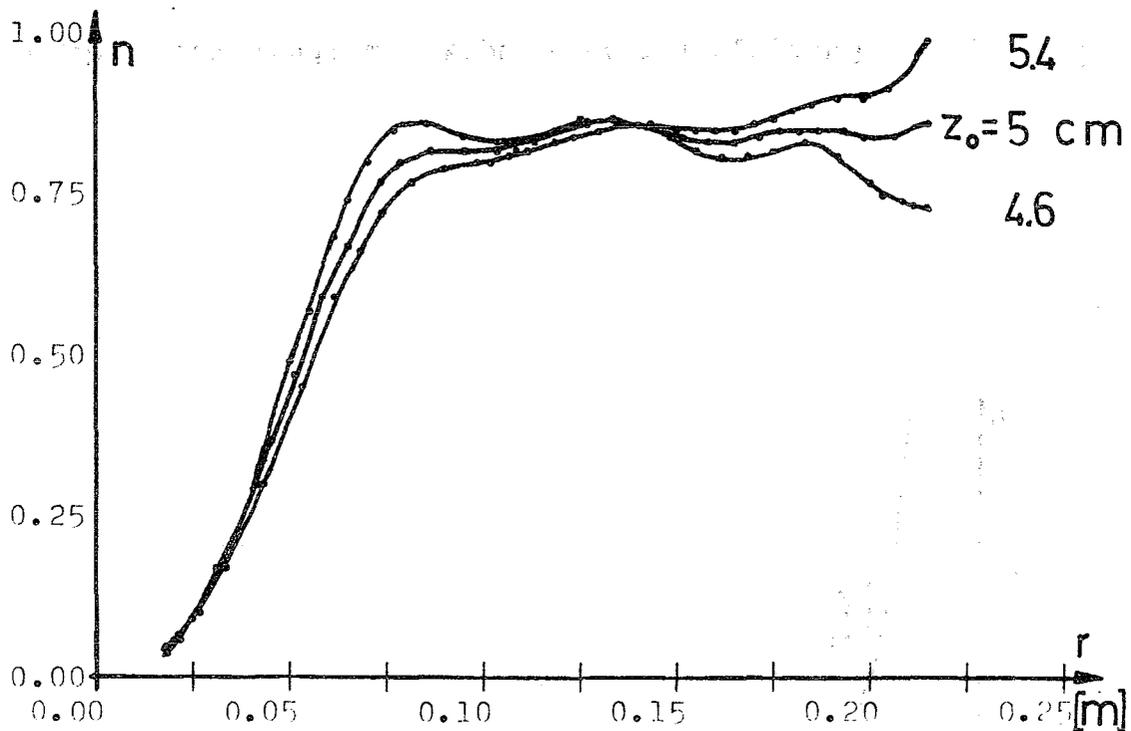


Fig.: 4.6 Feldindex der Spule nach Fig. 4.3 bei verschiedenem Abstand  $z_0$  der beiden Wicklungshälften

Bei größerem Abstand ist der Feldindex  $n_i$  auf dem Einschlußradius  $r_i$  größer und fällt schon bei größeren Radien zu Null ab, während bei kleinerem Abstand der Feldindex  $n_i$  kleiner ist und erst auf kleineren Radien abfällt. Die Spule könnte außerdem noch in Sektionen gebaut werden, deren Mittelebenenabstand unabhängig voneinander nach den experimentellen Forderungen an den Feldindex eingestellt werden kann.

Die Spule könnte auch in Sektionen gebaut werden, deren Mittelebenenabstand unabhängig voneinander nach den experimentellen Forderungen an den Feldindex eingestellt werden kann.

Die Spule könnte auch in Sektionen gebaut werden, deren Mittelebenenabstand unabhängig voneinander nach den experimentellen Forderungen an den Feldindex eingestellt werden kann.

Die Spule könnte auch in Sektionen gebaut werden, deren Mittelebenenabstand unabhängig voneinander nach den experimentellen Forderungen an den Feldindex eingestellt werden kann.

$$n_i = \frac{r_i}{r_0} \quad (1)$$

$$n_i = \frac{r_i}{r_0} \quad (2)$$

Die Spule könnte auch in Sektionen gebaut werden, deren Mittelebenenabstand unabhängig voneinander nach den experimentellen Forderungen an den Feldindex eingestellt werden kann.

Die Spule könnte auch in Sektionen gebaut werden, deren Mittelebenenabstand unabhängig voneinander nach den experimentellen Forderungen an den Feldindex eingestellt werden kann.

## 5. Wirbelströme

### 5.1 Allgemeine Bemerkungen

Bei der Berücksichtigung von Wirbelströmen in endlich dicken Leitern ist das Verhältnis Skintiefe  $\delta$  zu Leiterradius  $d/2$  der wesentliche Parameter. Für  $\delta \gg d/2$  können die Wirbelströme vernachlässigt werden und für  $\delta \ll d/2$  können sie als induzierte Ströme in der Außenhaut des Leiters angenommen werden, deren Feld in guter Näherung durch zwei parallele Ströme mit dem Abstand  $d$  simuliert werden können. Sind  $\delta$  und  $d$  von gleicher Größenordnung, so muß das Problem in Strenge durch Lösen der Maxwellgleichungen für Leiterinneres und Leiteräußeres gelöst werden.

Das durch das äußere periodische Feld der Frequenz  $\omega$  induzierte Magnetfeld des Leiters ist ein Dipolfeld, d. h. der Leiter besitzt eine von der Frequenz  $\omega$  abhängige Polarisierbarkeit. Da das Wirbelstromfeld nur in Entfernungen  $\gg d$  interessiert, genügt es wieder, dieses Feld durch zwei parallele Ströme mit Abstand  $d$  zu simulieren; die Größe dieser Ströme wird jetzt jedoch nicht durch Induktion sondern durch die Polarisierbarkeit bzw. dem daraus resultierenden magnetischen Dipolmoment bestimmt.

### 5.2 Das Feld eines Torus in einem zeitveränderlichen Magnetfeld

In einem leitenden Medium der Leitfähigkeit  $\sigma$  und der Permeabilität  $\mu$  bestehen für das elektromagnetische Feld folgende Gleichungen

$$\Delta \vec{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (5.1)$$

$$\vec{E} = \frac{c}{4\pi\sigma} \nabla \times \vec{H} \quad (5.2)$$

Die erste dieser Gleichungen ist eine parabolische Differentialgleichung (Diffusionsgleichung). Sie kann mit der Annahme einer zeitperiodischen Lösung der Form

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) e^{j\omega t} \quad j^2 = -1 \quad (5.3)$$

separiert werden:

$$\Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \quad \text{mit } k = \sqrt{2\pi\sigma\omega} \frac{1+j}{c} = \frac{1+j}{\delta} \quad (5.4)$$

$\delta$  = Skintiefe

Zusammen mit den Randbedingungen für  $H$  ist damit das Magnetfeld bestimmt. Für den Fall eines Leiters mit kreisförmigem Querschnitt lauten diese Randbedingungen:

1. Verschwinden des induzierten Magnetfeldes im Unendlichen.
2. Stetigkeit beim Durchgang durch die Leiteroberfläche.

Bei der Lösung des Randwertproblems für einen leitenden Torus werden nun folgende Näherungen benutzt:

1. Das Magnetfeld ist homogen über den Querschnitt des Leiters.
2. Die Krümmung des Torus wird vernachlässigt, d. h. es wird nur ein geradliniger Leiter betrachtet.

Diese Näherungen bringen zwar Fehler in der Größenordnung von einigen Prozenten, aber da die Wirbelstrombeiträge selbst nur max. 10% der eingepprägten Ströme ausmachen, ist diese Näherung durchaus berechtigt.

In einer Spule aus konzentrischen Ringen steht das Magnetfeld immer senkrecht zur Leiterachse. Das Problem eines senkrecht zu einem Leiter stehenden Magnetfeldes der Frequenz  $\omega$  und seiner resultierenden Wirbelströme ist in <sup>10)</sup> behandelt. Im folgenden sollen nur die Ergebnisse diskutiert werden, die strenge Behandlung erfolgt im Anhang. Für das von den Wirbelströmen erzeugte Magnetfeld erhält man danach im Außenraum:

$$\Delta \vec{H}^e = 2\pi\alpha \frac{d^2}{4r^2} (2\vec{e}_r (\vec{e}_r, \vec{H}) - \vec{H}) \quad (5.5)$$

Dabei ist  $\vec{e}_r$  ein Einheitsvektor in Radiusrichtung,  $r$  der Abstand vom Leitermittelpunkt und  $\alpha$  die magnetische Polarisierbarkeit des Leiters:

$$\alpha = -\frac{1}{2\pi} \left( 1 - \frac{4J_1(kd/2)}{kJ_0(kd/2)} \right) \quad (5.6)$$

Setzt man  $\vec{e}_r = (\cos\phi, \sin\phi)$  und  $\vec{H} = (H, 0)$  in (5.5) ein, so erhält man für das Feld der Wirbelströme

$$\Delta \vec{H}^e = \frac{\pi d^2 \alpha H}{2r^2} (\cos 2\phi, \sin 2\phi) \quad (5.7)$$

Dies ist das Feld einer magnetischen Dipollinie (r - Abfall  $1/r^2$  statt  $1/r^3$  wie beim Einzeldipol). Da, wie bereits erwähnt, das Wirbelstromfeld nur in großen Entfernungen vom Leiter interessiert, reicht es aus, dieses Dipolfeld durch zwei parallele Stromfäden zu ersetzen, deren magnetisches Dipolmoment den gleichen Betrag wie das oben erwähnte Dipolfeld hat. Das Dipolmoment einer derartigen Dipollinie ist

$$\vec{M}(t) = I(t) \cdot d\vec{e}_i \quad \vec{e}_i \perp \vec{I} \quad (5.8)$$

Das Dipolmoment der durch das äußere Magnetfeld erzeugten Wirbelströme ist:

$$\vec{M}_\omega = \alpha(\omega) \pi d^2 / 4 \vec{H}(\vec{r}_0, t) \quad (5.9)$$

$\vec{r}_0$  = Ortsvektor des Leitermittelpunktes

Daraus folgt für den Simulationsstrom  $I_w(t)$ :

$$I_w(t) = \frac{\pi d \alpha(\omega)}{4} \vec{H}(\vec{r}_0, t) \quad (5.10)$$

Das Feld  $\vec{H}(\vec{r}_0)$  ist dabei das eingeprägte Feld am Ort des Leiters. Dieses Magnetfeld hat für einen einspuligen Kompressor die Form:

$$\vec{H}(\vec{r}_0, t) = \vec{H}(\vec{r}_0) \cdot I_0(t) \quad (5.11)$$

Um die Wirbelströme für alle Windungen des Kompressors zu berechnen, ist also das Magnetfeld für alle Windungsorte  $r_i, z_i$  zu berechnen und das Produkt  $\alpha \cdot I_0(t)$  zu bilden. In komplexer Schreibweise werden die Wirbelströme dann durch

$$I_w(r_i, z_i, t) = \frac{\pi d}{4} \vec{H}(\vec{r}_0, r_i, z_i) \operatorname{Re}(\alpha \cdot I_0(t)) \quad (5.12)$$

gegeben. Für den Fall, daß das Magnetfeld Sinusform hat, also nur

aus einer Frequenz besteht, bewirkt der Imaginärteil von  $\alpha$  eine Phasenverzögerung des Wirbelstromfeldes gegenüber dem eingepprägten Magnetfeld. Besitzt das äußere Feld dagegen eine kompliziertere Zeitstruktur, die durch eine Fourierreihe

$$I_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_K e^{jk\omega t} \quad (5.13)$$

beschrieben wird, so ist es nötig für jede dieser Frequenzen  $k\omega$  die entsprechende Polarisierbarkeit zu berechnen. Das Zeitverhalten des Wirbelstromes wird dann durch

$$I_w \sim \operatorname{Re} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) \cdot C_K e^{jk\omega t} \quad (5.14)$$

bestimmt. Das eingepprägte Magnetfeld hat dann Wirbelströme zur Folge, die nicht nur in Größe und Phase, sondern auch in der zeitlichen Form verändert sind. Da diese Formänderung von  $\alpha$  hervorgerufen wird und  $\alpha$  von  $kd \sim \frac{d}{\delta} \sim \frac{d}{\sqrt{\omega}}$  abhängt, gilt ein Ähnlichkeitsgesetz für alle Leiter mit gleichem  $\frac{d}{\sqrt{\omega}}$ . Es genügt daher, das magnetische Dipolmoment für einige oft vorkommende Stromformen und für einige Leiterdickenwerte zu berechnen.

Da die Elektronenringkompressoren bis heute gepulst betrieben werden, wären die Wirbelströme für ein eingepprägtes Magnetfeld, das aus einer Sinusviertelwelle und einem exponentiellen Abfall besteht, zu bestimmen. Dabei beträgt der Exponentialabfall ein Vielfaches der Viertelwelle. Bei einer Fourierdarstellung brauchte man dazu unnötig viele niedrige Fourierkomponenten, die die Genauigkeit während der Viertelwelle und kurze Zeit nach dem Kurzschluß nicht wesentlich erhöhen. Als eingepprägtes Magnetfeld wird daher ein Feldverlauf nach Fig. A 1.1 angenommen, der aus einer Viertelwelle der Frequenz  $\omega_0$  mit anschließender Kosinushalbwellen der Frequenz  $\frac{4}{7}\omega_0$  besteht, so daß die Gesamtperiode  $2T = \frac{4\pi}{\omega_0}$  ist. Diese Form hat den Vorteil, unmittelbar nach der Viertelwelle einen Kurzschluß und unmittelbar vor der Viertelwelle den Strom null zu simulieren. Fig. 5.1 zeigt für diese Stromform die magnetischen Momente von Leitern mit verschiedenem Radius-Eindringtiefenverhältnis  $d/\delta$ . Als Einheit ist dabei der maximale Wert für einen Idealleiter ( $\delta = 0$ ) gewählt.

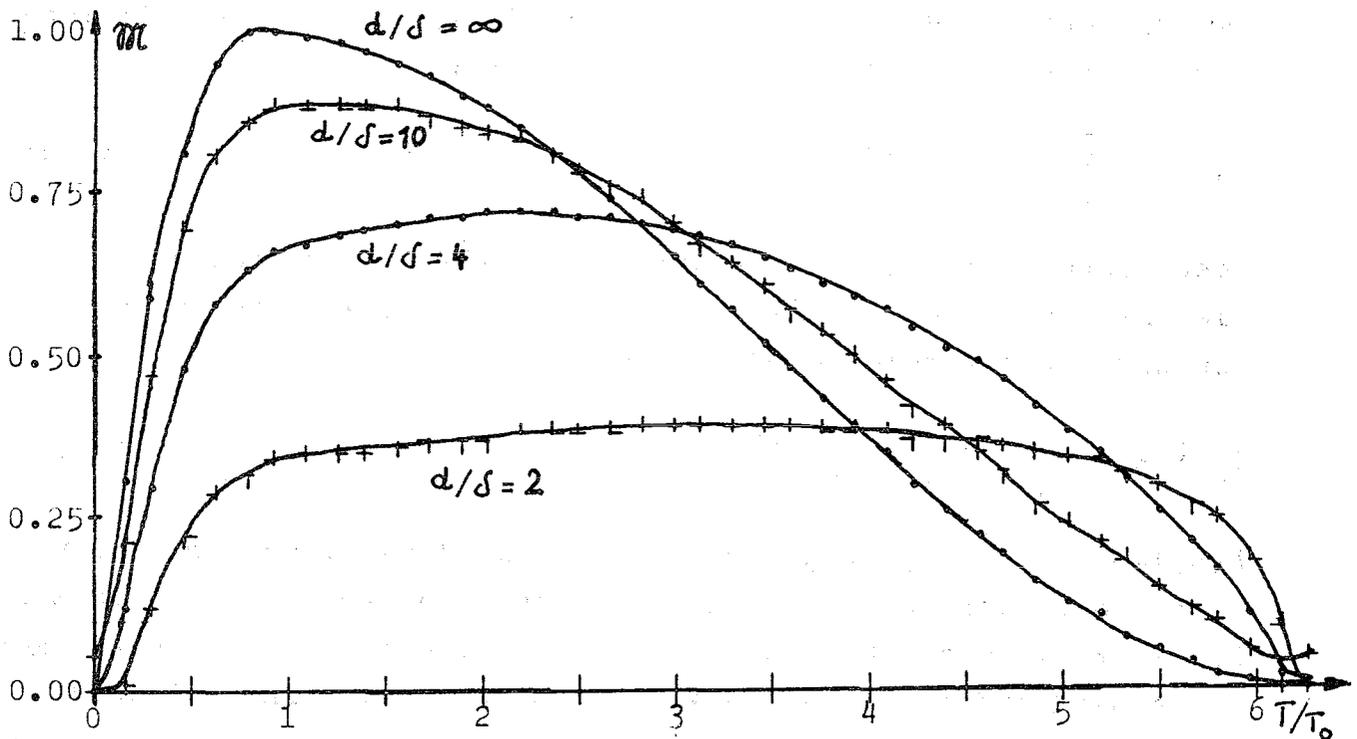


Fig. 5.1: Magnetische Momente  $\vec{M}$  für Leiter mit verschiedenem Radius-Eindringtiefenverhältnis  $d/\delta$  als Funktion der Zeit

In allen Fällen steigt das magnetische Moment zuerst ebenso schnell an wie das eingepreßte Magnetfeld, erreicht aber aufgrund der Dämpfung nicht den vollen Wert 1 und fällt nach dem Kurzschluß wegen der endlichen Eindringzeit später ab. Bei einem eingepreßten Magnetfeld  $B = B_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$  hat das magnetische Moment die gleiche Form und ist lediglich etwas abgeschwächt und phasenverschoben wie Fig. 5.2 zeigt.

Bei der Simulation des magnetischen Dipolverhaltens durch zwei parallele entgegengesetzte Ströme ist die Wahl des gegenseitigen Abstandes zunächst nur nach oben durch den Leiterdurchmesser begrenzt. Da der Leiter im vorliegenden Fall noch einen eingepreßten Strom trägt und dieser ja auch räumlich verteilt fließt, ist es sinnvoll, diesen auf die beiden Wirbelströme aufzuteilen. Der Abstand der Ströme sollte dann so gewählt werden, daß der Strom ungefähr im Stromschwerpunkt des Halbzylinders liegt.

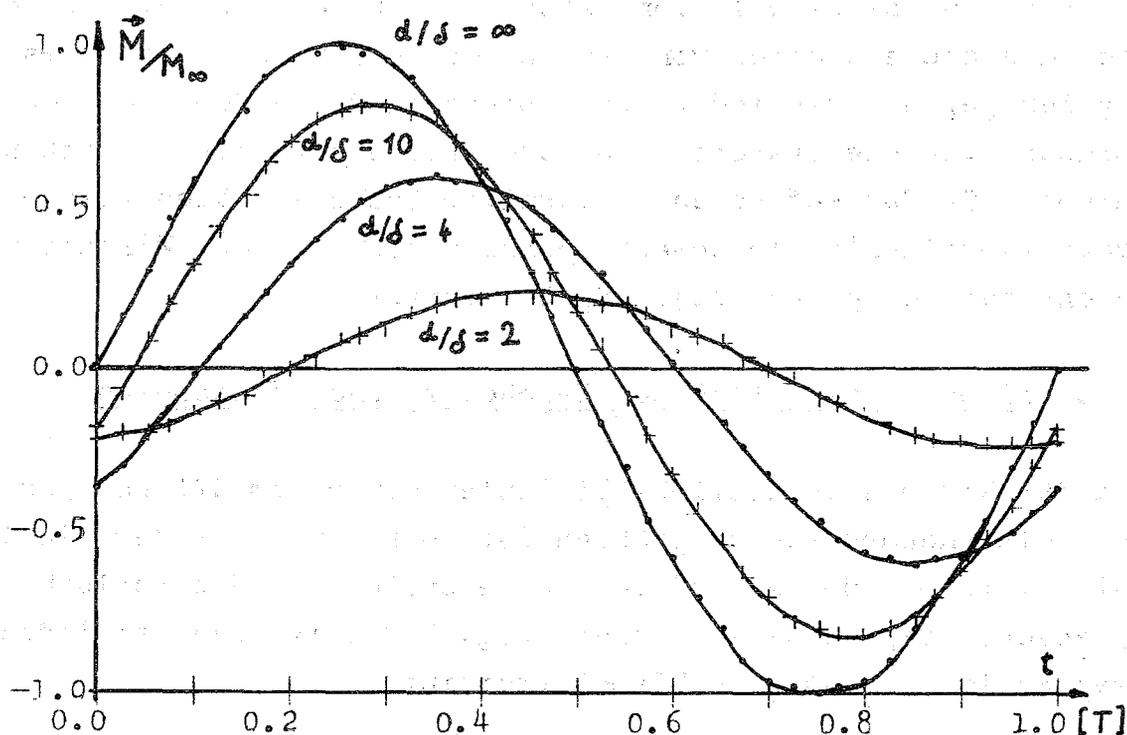


Fig. 5.2: Magnetfeld und magnetisches Dipolmoment bei einer reinen Sinusschwingung

Bei der Frequenz null ist dieser Ort  $x_s = d/3$  und bei der Frequenz unendlich  $x_s = 2d/3$ . Als Abstand wird daher der halbe Durchmesser gewählt, was im Übergangsbereich zwischen statischen Strom und Idealleiter den geringsten Fehler bedeutet. Rechnungen zeigen außerdem, daß der Einfluß der Aufteilung des eingepprägten Stromes den Feldindex einer Spule nur unwesentlich ändert. ( $\Delta n \lesssim 1\%$ ).

Die Wirbelströme verschieben also den Stromschwerpunkt aus der Mitte eines Leiters nach außen. Dabei ist in Dosenspulen die Stromschwerpunktverlagerung wegen der ausgedehnten Wicklung und der unterschiedlichen Wicklungsdichte nicht so einfach zu verstehen. Eine Spule mit nahe beieinanderliegenden Leitern wie es in einer Helmholtzspule der Fall ist, verhält sich dagegen in gewisser Weise wie ein kompakter Leiter, weil die Stromschwerpunkte in Richtung des Spulenrandes verschoben werden. Bei Helmholtzspulen bewirken die Wirbelströme daher eine effektive Vergrößerung des Mittelebenenabstandes und damit eine Veränderung des Feldindex, wie sie aufgrund von Fig. 7.3 zu erwarten ist.

Neben diesen Effekten, bei denen eine Spule durch ihr Magnetfeld in sich selbst Wirbelströme erzeugt, gibt es noch die Wirbelströme, die die einzelnen von verschiedenen Strömen durchflossenen Spulen gegenseitig induzieren. Diese sind von der gleichen Größenordnung wie die ersteren und waren bei einer amerikanischen ERA-Gruppe für das Auftreten kollektiver Instabilitäten (siehe Kap. 6) verantwortlich<sup>11)</sup>. Im Dosenkompressor treten diese Wirbelströme nicht auf, da er aus einer Spule besteht.

### 5.3 Wirbelstromeinfluß bei Helmholtz- und Dosenwindungen

Da der Wirbelstromeinfluß bei Spulen mit hohem  $d/\delta$  und geringem Mittelebenenabstand am größten ist, wird zunächst der Einfluß der Wirbelströme für das dritte innere Spulenpaar des Karlsruher Kompressors (Fig. 8.5) berechnet. Fig. 5.3 zeigt den Feldindex dieser Spule mit und ohne Wirbelstromeinfluß.

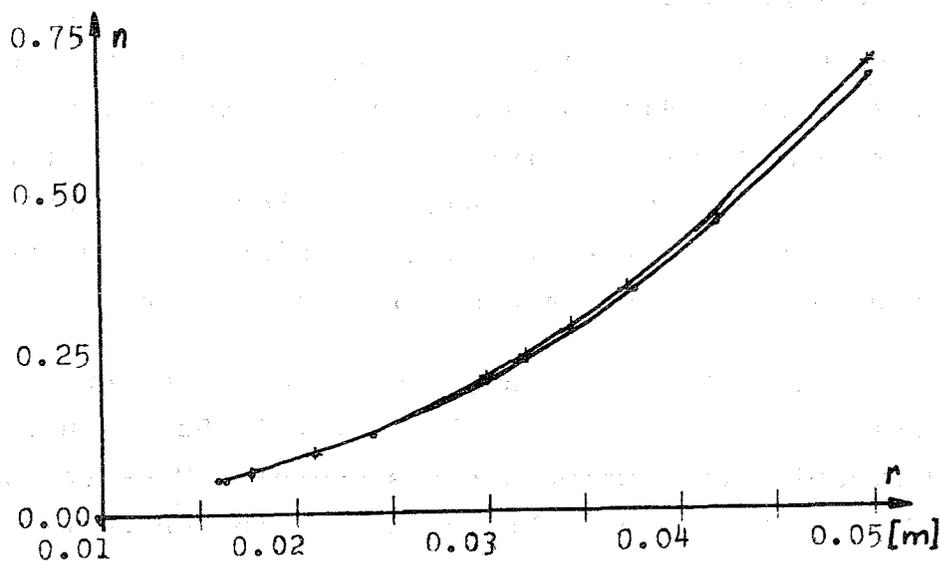


Fig. 5.3: Feldindex der dritten Spule des Karlsruher Elektronenringkompressors ohne (oben) und mit (unten) Wirbelstromeinfluß bei einer Stromform nach Fig. A 1.1 mit der Grundfrequenz  $\nu = 5$  kHz ( $L = 20$   $\mu$ H,  $C = 50$   $\mu$ F)

Der Feldindex wird durch die Wirbelströme über den ganzen Radius um etwa 5% verkleinert. Leider ist die Meßgenauigkeit bei kleinen Radien sehr klein, so daß diese Änderung nur sehr schwer nachweisbar ist. Bei den größeren Spulen ist das Verhältnis Spulenbreite zu Mittelebenenabstand sehr viel kleiner als bei der dritten und da die Wirbelströme entsprechend weniger voneinander entfernt sind, ist auch ihr Beitrag geringer und liegt daher auch bei den großen Spulen unterhalb der Meßgenauigkeit.

Beim gepulsten Dosenkompressor spielen die Wirbelströme eine noch untergeordnetere Rolle. Erstens ist die Frequenz der Spulenströme 5 mal kleiner und die Eindringtiefe entsprechend größer. Zweitens läßt der geringere Maximalstrom einen kleineren Leiterradius zu, so daß das Radius-Eindringtiefenverhältnis über eine Größenordnung kleiner ist als beim Mehrstufenkompressor und die Wirbelströme nach Fig. 5.1 dann sehr klein sind. Rechnungen für den Dosenkompressor nach Fig. 4.3 ergeben dann auch, daß der Feldindexbeitrag der Wirbelströme bei 1 kHz und 4 mm Leiterdicke nur wenige Promille beträgt. Bei einem kontinuierlich betriebenen Dosenkompressor würden der höheren Leistungen wegen wahrscheinlich breite Bandleiter zur Anwendung kommen, für die die benutzten Formeln nicht gelten. Da bei einem Band das Breite-Eindringtiefenverhältnis die gleiche Rolle wie bei einem Zylinder das Durchmesser-Eindringtiefenverhältnis spielt, werden die Wirbelstromkorrekturen höchstens einen Beitrag von einigen Prozent ausmachen, der aber durch Drehung der Bänder in die jeweilige Magnetfeldrichtung um eine Größenordnung gesenkt werden kann.

## 6 Kollektive Instabilitäten

### 6.1 Allgemeine Bemerkungen

Oberhalb bestimmter Intensitäten sind die Eigenfelder des Ringes und die entsprechenden Zusatzkräfte so stark, daß der Q-Wert (3.11) in die Nähe von Resonanzen gerät. Die durch diesen Mechanismus bedingte maximale Teilchenzahl wird inkohärente Raumladungsgrenze genannt und wird im folgenden Absatz untersucht werden.

Neben diesen Instabilitäten, die durch Zusammenwirken von hoher Intensität und gewissen Fourierkomponenten der Feldfehler angeregt werden, gibt es noch Instabilitäten, die nur durch die hohe Intensität verursacht werden. Ihr Anregungsmechanismus kann grob so beschrieben werden: Während bei einem freien Teilchenstrahl fern von allen materiellen Wänden alle Eigenfelder auf ein Auseinanderlaufen des Strahls hinwirken, gibt es in Beschleunigern auf Grund der Struktur des Strahlrohres und der Geometrie des Strahles Rückkopplungsmechanismen, die kleine Störungen der Strahlform verstärken und damit die Strahlqualität verschlechtern. Normalerweise treten diese Instabilitäten bei hoher Impulsunschärfe des Strahles und der damit verbundenen Landaudämpfung nicht auf. Das gesamte Instabilitätsverhalten wird nun durch die Landaudämpfungsfaktoren ausgedrückt, die außer von Energie und Intensität noch vom Feldindex und seinen Ableitungen abhängig sind, so daß untersucht werden muß, ob der Feldindexverlauf einer Dosenschule Anlaß zu kollektiven Resonanzen geben kann.

### 6.2 Die unkohärente Raumladungsgrenze in der Dosenschule

In den meisten Beschleunigern mit konstantem Radius ist die Raumladungsgrenze zur Injektionszeit am niedrigsten und wächst dann stetig an. Da in der Dosenschule der Elektronenring bei dem

hier untersuchten Feldindexverlauf auf großen Radien sehr wenig Impuls gewinnt, könnte die Frage auftauchen, ob während der Kompression nicht die Raumladungsgrenze kleiner wird als zur Injektionszeit, weil der Radius schrumpft und die Raumladungsdichte damit erhöht wird, ohne den Impuls im gleichen Verhältnis zu erhöhen.

Die max. Teilchenzahl ist unter der Annahme einer höchstlässigen Q-Wertverschiebung von Q durch die folgende Gleichung gegeben:

$$N_{\max} = \min \left\{ \frac{\pi Q_{r,z} |\Delta Q_{r,z}| \beta^2 \gamma^3 \left\{ \frac{b}{a} \right\} (a+b)}{r_e R} \right\} \quad (6.1)$$

$r_e$ : klassischer Elektronenradius,  $\frac{b}{a}$ : kleiner Strahlradius

Wegen der Konstanz der normierten Emittanz  $\epsilon_n$ , die aussagt, daß unter adiabatischen Bedingungen  $Q\beta\gamma\frac{a^2}{b^2} / R$  konstant ist, folgt:

$$N_{\max} = \frac{\pi\beta\gamma^2 \text{const}}{r_e} \min \left\{ \begin{array}{l} \Delta Q_r \left(1 + \frac{Q_z}{Q_r}\right) \\ \Delta Q_z \left(1 + \frac{Q_r}{Q_z}\right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} Q_r = \sqrt{1-n} \\ Q_z = \sqrt{n} \end{array} \quad (6.2)$$

Wegen der Minimumbildung spielen in der Nähe von  $n=0$  und  $n=1$  die Wurzelterme keine Rolle, da jeweils die Klammer mit kleinem Wurzelterm gilt. Da  $\beta$  und  $\gamma$  während der Beschleunigung nicht abnehmen, bestimmt die Raumladungsgrenze bei Injektion die maximale Teilchenzahl. Für  $n_i = 0,85$ ,  $\Delta Q_r = 0,1$ ,  $\gamma_i = 5,5$  und  $a = b = 0,01$  m beträgt sie z.B.  $N_{i,\max} \approx 7,5 \cdot 10^{12}$ .

### 6.3 Diskussion der longitudinalen Instabilitätsgleichung

Bei der Untersuchung der kollektiven Instabilitäten bedient man sich plasmaphysikalischer Rechenmethoden. Ausgangspunkt ist dabei die stoßfreie Boltzmann-Gleichung, da direkte Stöße bei den im Beschleuniger vorkommenden Teilchendichten zu vernachlässigen sind:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \vec{p} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right) F(t, \vec{r}, \vec{p}) = 0 \quad (6.3)$$

Bei Zugrundelegung einer nur vom Impuls  $\vec{p}$  abhängigen ungestörten Verteilungsfunktion  $F_0(\vec{p})$  wird dann das zeitliche Verhalten einer kleinen Störung  $f(\vec{r}, \vec{p}, t) = F - F_0(\vec{p})$  untersucht. Dazu wird  $f$  in 6.3 eingesetzt, so daß eine inhomogene partielle Differentialgleichung erster Ordnung entsteht:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{p}} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right) f(\vec{r}, \vec{p}, t) = -\dot{\vec{p}} \frac{\partial F_0}{\partial \vec{p}} \quad (6.4)$$

Für die Ableitung der longitudinalen Instabilität<sup>(12)</sup> genügt es, nun die eindimensionale Form von 6.4 in Zylinderkoordinaten zu betrachten, dabei kann der Term mit  $\partial f / \partial p_\theta$  vernachlässigt werden wegen  $f \ll F_0$ .

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\dot{p}_\theta \frac{\partial F_0}{\partial p_\theta} \quad (6.5)$$

$\dot{p}_\theta$  ist in diesem Fall keine Kraft, sondern ein Drehmoment und hat die Form (magnetische Eigenfelder sollen später mit einem Faktor  $1-\beta^2$  berücksichtigt werden):

$$\dot{p}_\theta = e R E_\theta \quad (6.6)$$

Die kleine Störung  $f$  habe die Form einer umlaufenden Dichteschwankung

$$f = f_1 e^{j(1\theta - \omega t)} \quad (6.7)$$

das heißt eine mit der Frequenz  $\omega$  umlaufende Dichtemodulation mit 1 Verdichtungen. Das azimuthale Feld  $E_\theta$  dieser kleinen Störung wird dann durch die Inhomogenitäten der Ladungsverteilung

$$\lambda = e \int_{-\infty}^{\infty} f \frac{dp_\theta}{R} = \lambda_1 e^{j(1\theta - \omega t)} \quad (6.8)$$

erzeugt. Deren Potential kann unter der Annahme, daß die Strahlbreite sehr viel kleiner als die zu  $2\pi R/1$  gehörende

Länge ist, wie folgt beschrieben werden:

$$\phi = g_1 \lambda \quad (6.9)$$

wobei  $g_1$  ein im Allgemeinen von  $l$  abhängiger Geometriefaktor ist, der den Einfluß der Strahlgeometrie und der Vakuumkammerwände ausdrückt.

Für einen Strahl mit kleinem Radius  $a$  zwischen zwei leitenden Wänden mit Abstand  $2h$  ist er z.B.

$$g_1 = \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{2h}{a} \right) \quad (6.10)$$

Dabei trägt  $1/\gamma^2 = 1-\beta^2$  den Strahlmagnetfeldern Rechnung. Für das Drehmoment  $\dot{p}_\theta$  folgt dann:

$$\dot{p}_\theta = e R E_\theta = -e R \nabla_\theta \phi = -e R \frac{\partial \phi}{R \partial \theta} = -e g_1 j l \lambda \quad (6.11)$$

Die partielle Differentialgleichung 6.5 für  $f$  wird nun gelöst, indem zuerst die Gleichung der Charakteristik

$$\dot{\theta} = \omega = \omega_0 - \frac{\partial \omega}{\partial p_\theta} (p_\theta - p_{\theta 0}) \quad \frac{\partial \omega}{\partial p_\theta} = k = \frac{1}{m_e \gamma R^2} \left( \frac{1}{1-n} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \quad (6.12)$$

gelöst wird und ihre Lösung zusammen mit 6.11 in 6.5 eingesetzt wird. Man erhält dann für  $f$ :

$$f = \int_0^t \frac{df}{dt} dt = - \int_0^t \dot{p}_\theta \frac{\partial F_0}{\partial p_\theta} dt = -e g_1 j l \lambda_1 \int_0^t e^{j(l\theta(t) - \omega t)} \frac{\partial F_0}{\partial p_\theta} dt \quad (6.13)$$

Nach Ausführen der Zeitintegration folgt dann ( $\Delta p = p_\theta - p_{\theta 0}$ ):

$$f = \frac{e g_1 l \lambda_1}{\omega - l(\omega_0 - k \Delta p)} \frac{\partial F_0}{\partial p_\theta} e^{j(l\theta(t) - \omega t)} \quad (6.14)$$

Wird dieser Ausdruck für  $f$  in 6.9 eingesetzt und die Gleichung durch  $\lambda_1$  geteilt, so erhält man die Dispersionsgleichung:

$$1 = \frac{g_1}{R} e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial F_{\theta}}{\partial p_{\theta}} dp_{\theta}}{\omega/l - (\omega_0 - k\Delta p)} \quad (6.15)$$

die  $\omega$  mit  $l$  verknüpft. Besitzt diese Gleichung für irgendein  $l$  eine Wurzel  $\omega'$ , deren Imaginärteil positiv ist, folgt daraus, daß die angenommene kleine Störung  $f$  exponentiell anwächst, der Strahl also zerstört wird. Im folgenden wird nun untersucht, unter welchen Umständen eine Wurzel von  $\omega'$  einen positiven Imaginärteil haben kann.

Dazu ist es zweckmäßig, die Integrationsvariable durch  $p = p_{\theta} - p_{\theta 0}$  zu substituieren und das Integral in Hauptwert und Residuum zu zerlegen:

$$1 = \frac{e^2 g_1}{R k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial F_0}{\partial p} dp}{p - \frac{1}{k}(\omega_0 - \frac{\omega}{l})} = \frac{e^2 g_1}{R k} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial F_0}{\partial p} dp}{p - (\omega_0 - \frac{\omega}{l})/k} - \pi j \frac{\frac{\partial F_0}{\partial p} ((\omega_0 - \omega/l)/k)}{\frac{\partial p}} \right) \\ = Z \left( \frac{\omega}{l} \right) \quad (6.16)$$

Die Suche nach komplexen Wurzeln für  $\omega'$  mit positivem Imaginärteil kann nun in der Weise geschehen, daß mit Hilfe der Funktion  $Z(\omega/l)$  die reelle  $\omega$ -Achse auf die  $Z$ -Ebene abgebildet wird. Man erhält so für alle Verteilungen  $F_0$ , die samt ihren ersten Ableitungen im Unendlichen verschwinden, eine geschlossene Kurve in der  $Z$ -Ebene. Umschließt dieses Abbild der reellen  $\omega$ -Achse, das Hodograph genannt wird, den Punkt  $Z = 1$ , so folgt daraus umgekehrt die Existenz einer Wurzel  $\omega'$  mit positivem Imaginärteil.

Für eine Gauss'sche Impulsverteilung:

$$F_0(p) = \frac{e^{-\frac{p^2}{\Delta_p^2}}}{\Delta_p \sqrt{\pi}} \quad (6.17)$$

die die natürlichen Impulsverteilungen gut approximiert, erhält man mit der Abkürzung

$$\Omega = \frac{\omega - \omega_0}{k \Delta_p} \text{ für } Z(\omega/l):$$

$$Z(\omega/l) = \frac{2e^2 g_1}{\sqrt{\pi} \Delta_p^2 R} \frac{1}{-k} \left[ 1 - \phi(\Omega) + \pi j \Omega e^{-\Omega^2} \right] \quad (6.18)$$

wobei die Funktion

$$\phi(x) = 2 x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt \quad (6.19)$$

eine in der Plasmaphysik häufig benutzte Funktion ist und tabelliert vorliegt<sup>13)</sup>.

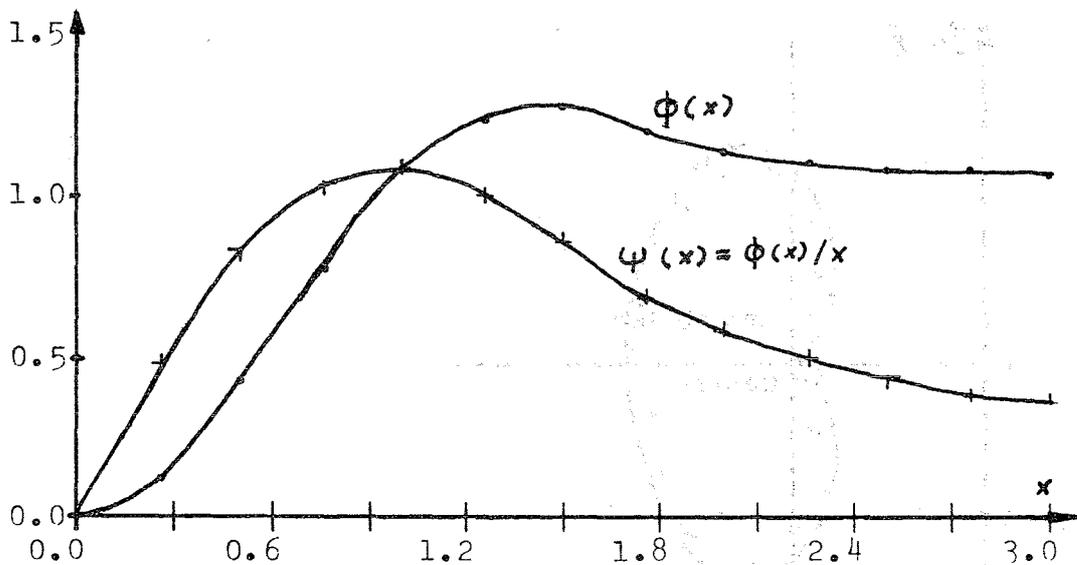


Fig. 6.1 Die Funktion  $\phi(x)$

Den Hodograph des Klammerausdrucks von 6.19 zeigt Fig. 6.4. Er hat die Form einer Niere und muß bei negativem  $k$  um  $180^\circ$  gedreht werden. Das Vorzeichen von  $k$  entscheidet daher, ob der Punkt  $Z(\omega/l) = 1$  vom Hodographen eingeschlossen werden kann und damit die longitudinale Instabilität möglich ist. Damit ist erklärt, daß die longitudinale In-

stabilität, die auch negative Masseninstabilität genannt wird, bei nichtleitenden Wänden nur oberhalb der Übergangsenergie eines Beschleunigers, d.h. für  $k < 0$ , auftritt. Aus 6.18 geht hervor, daß der "Dämpfungsfaktor" genannte Term  $k\Delta^2$  möglichst groß sein sollte, damit der Punkt  $z = 1$  weit außerhalb des Hodographen liegt und die Instabilität nicht auftritt. Da der Term  $1/\gamma^2$  im Elektronenringbeschleuniger immer sehr viel kleiner als  $1/(1-n)$  ist, wird der Dämpfungsfaktor allein durch den Feldindex bestimmt, der im Dosenkompressor bis auf den inneren Radiusbereich gegenüber einem Helmholtzkompressor den jeweils größten Wert hat. Die Landaudämpfung der negativen Masseninstabilität ist daher im Dosenkompressor besser als im Helmholtzkompressor.

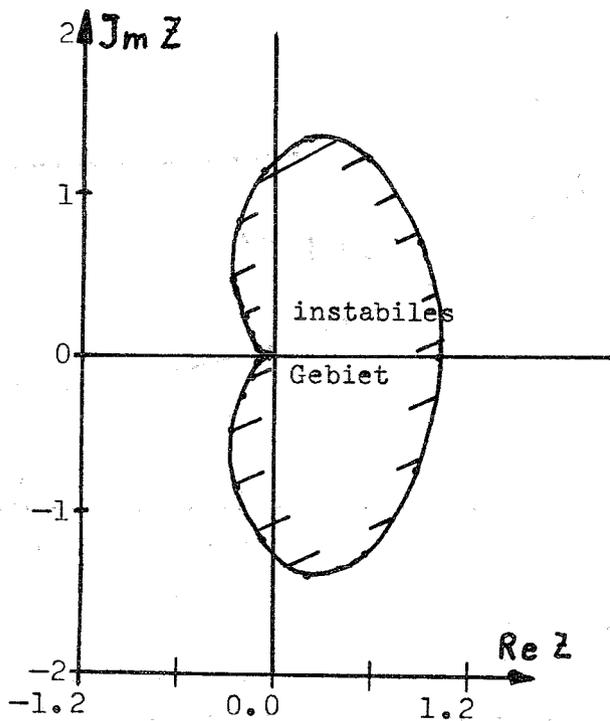


Fig. 6.2 Der Hodograph von Gleichung 6.18

#### 6.4 Diskussion der Dispersionsgleichung der transversalen Instabilität

Die Dispersionsgleichung für die transversale Instabilität wird hier ohne Ableitung von Laslett, Neil und Sessler<sup>14)</sup> übernommen. Sie lautet:

$$1 = - \frac{U+V+jV}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{h'(a)a^2 g(p) da dp}{\omega - (1-Q)(\omega_0 - kp)} \quad (6.20)$$

Dabei ist U ein Term, der von der Geometrie und V ein Term, der der Wurzel aus der Leitfähigkeit der Vakuumkammerwände umgekehrt proportional ist. h und g sind die Verteilungsfunktionen im transversalen Phasenraum (a) bzw. im longitudinalen Impulsraum (p). Entwickelt man den Nenner des Integrals nach Potenzen von p und a<sup>2</sup>:

$$\omega - (1-Q)(\omega_0 - kp) = \omega - (1-Q)\omega_0 - S_p p + S_a a^2 \quad (6.21)$$

mit  $S_p = (1-Q_0)k - \omega_0 \frac{\partial Q}{\partial p}$  und  $S_a = +\omega_0 \frac{\partial Q}{\partial a^2}$  (6.22)

so erhält man für eine Gauß'sche Impulsverteilung 6.17 folgende Dispersionsgleichung:

$$\left( \Omega_a = \frac{\omega - (1-Q_0)\omega_0 - S_a a^2}{\Delta_p S_p} \right):$$

$$1 = -(U+V+jV) \int_0^{\infty} \frac{a^2 h'(a)}{\Delta_p \sqrt{\pi} S_p} \left| \psi(\Omega_a) + \pi j e^{-\Omega_a^2} \right| da \quad (6.23)$$

Da der Strahlquerschnitt sehr scharfe Grenzen besitzt, ist im Ortsraum eine Kastenverteilung realistischer, so daß mit

$$h'(a) = \frac{2}{\Delta_a^2} \left| \delta(a) - \delta(a - \Delta_a) \right| \quad (6.24)$$

die Integration leicht ausgeführt werden kann.

$$(\Omega = \frac{\omega - (1 - Q_0)\omega_0 - S_a \Delta_a^2}{\Delta_p S_p}) :$$

$$\frac{1}{U+V+jV} = Z_G(\omega, 1) = \frac{2}{S_p \Delta_p \sqrt{\pi}} \left| \psi(\Omega) + \pi j e^{-\Omega^2} \right| \quad (6.25)$$

Der Hodograph für diese Kastenverteilung (Fig. 6.3) ist symmetrisch, so daß das Auftreten der Instabilität unabhängig vom Vorzeichen des Faktors  $S_p$  ist, der dem Faktor  $k$  bei der longitudinalen Instabilität entspricht. Da  $1/(U+V+jV)$  auf seine Lage relativ zum Hodographen untersucht werden soll, ist es jedoch zweckmäßig, die Funktion  $Z_G^{-1}(\omega, 1)$  aufzuzeichnen und dann die Lage von  $U+V+jV$  zu untersuchen.

Die Gauß'sche Verteilung hat eine unendlich lange Flankenausdehnung, die in der Natur nicht vorkommt. Für den anderen Extremfall einer Kastenverteilung, also keine Flankenausdehnung:

$$f(p) = \frac{1}{2\Delta_p} (\theta(p+\Delta_p) - \theta(p-\Delta_p)) \quad (6.26)$$

erhält man für den Hodographen:

$$-\frac{1}{U+V+iV} = Z_k(\omega, e) = \frac{1}{2 S_p \Delta_p} \text{Ln} \frac{\Omega+1}{\Omega-1} \quad (6.27)$$

Die Instabilitätsgrenzen beider Verteilungen sind samt ihren Spiegelungen am Einheitskreis in Fig. 6.3 aufgetragen.

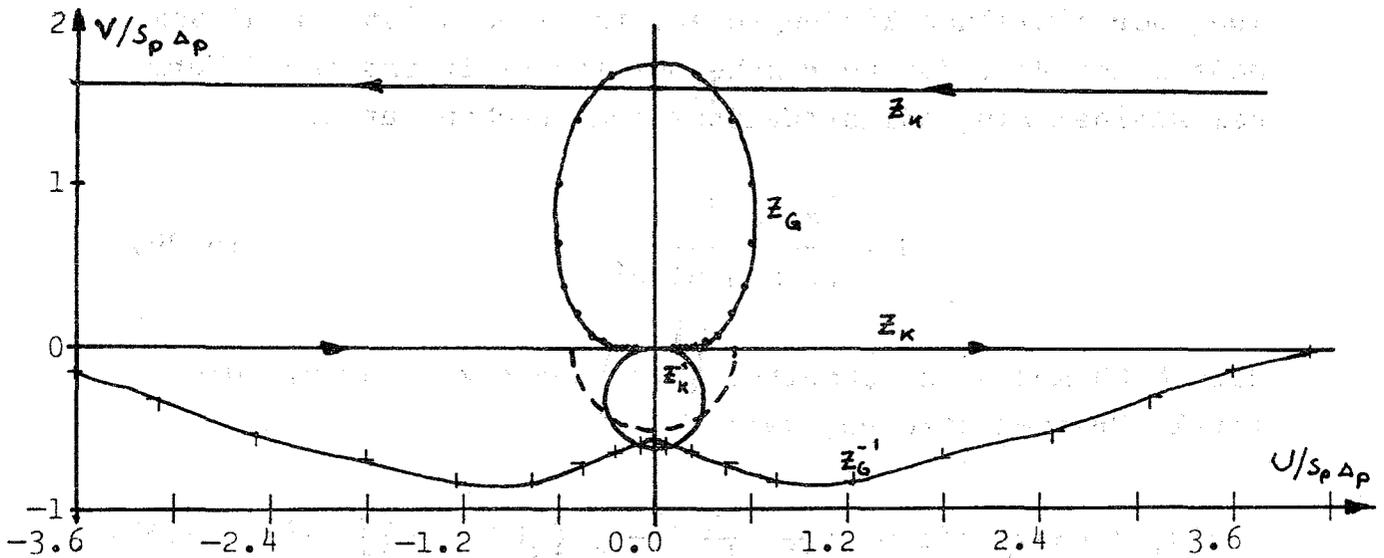


Fig. 6.3 Hodograph der transversalen Instabilität für Gauß'sche und Kastenverteilung

Genauere Untersuchungen von Hübner und Vaccaro<sup>15)</sup> für verschiedene endliche Verteilungen sowohl im Impulsraum als auch im Betatronphasenraum zeigen, daß für  $V \ll U$  mit hinreichender Genauigkeit

$$|U + V + iV| \leq 0.5 \Delta S = 0.5 (|S_p| \Delta_p + |S_a| \Delta_a^2) \quad (6.28)$$

als Instabilitätskriterium benutzt werden kann. Diese Grenze entspricht dem gestrichelt eingetragenen Kreis in Fig. 6.3.

### 6.5 Vergleich der transversalen Instabilitäten bei Dosen- und Helmholtzspule

Für die Berechnung der Instabilitätsgrenzen werden die Geometriefaktoren  $U$  und  $V$  benötigt. Für die spezielle Geometrie der Dospule findet das Modell einer leitenden Dose<sup>16)</sup> Anwendung, da die Dospule in azimuthaler Richtung hohe Leitfähigkeit besitzt und die radiale Leitfähigkeit bei den hohen Umlauffrequenzen ( $\sim 1$  GHz) durch die kapazitive Kopp-

lung der einzelnen Windungen ebenfalls hoch ist. In diesem Modell ist  $V \ll U$  für sehr hohe Leitfähigkeit und der U-Term bei kleinem Ringradius  $\ll$  Wandabstand gegeben durch:

$$U = \frac{N_e r_e c}{\pi Q b(a+b)\beta\gamma^3} \quad (6.29)$$

Nach 6.28 muß sein doppelter Absolutwert kleiner als die totale Frequenzstreuung sein:

$$2|U| \leq \Delta S = \omega_0 \left( (1-Q_0) \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{1-n} \right) + \frac{R}{1-n} \frac{\partial Q}{\partial R} \right) \frac{\Delta p}{p} + \frac{\partial Q}{\partial a^2} a^2 \quad (6.30)$$

Da in beiden Formeln noch Werte auftreten, die in komplizierter Weise vom Radius abhängen und die Teilchenzahl die einzig interessierende Größe ist, ist es sinnvoll, die maximale Teilchenzahl als Funktion des Radius zu untersuchen:

$$N_{\max} = \frac{\pi Q b(a+b)\beta\gamma^3}{r_e R} \left( (1-Q_0) \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{1-n} \right) + \frac{R}{1-n} \frac{\partial Q}{\partial R} \right) \frac{\Delta p}{p} + \frac{\partial Q}{\partial a^2} a^2 \quad (6.31)$$

Da die beiden kleinen Strahlradien ebenfalls vom großen Radius abhängen, können sie mit Hilfe der normierten Emittanz ausgedrückt werden:

$$N_{\max} = \frac{\pi \gamma^2 \epsilon_r}{r_e} \left( 1 + \sqrt{\frac{1-n}{n}} \sqrt{\frac{\epsilon_z}{\epsilon_r}} \right) \left( (1-Q_0) \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{1-n} \right) + \frac{R}{1-n} \frac{\partial Q}{\partial R} \right) \frac{\Delta p}{p} + \frac{\partial Q}{\partial a^2} a^2 \quad (6.32)$$

Da die beiden Emittanzen sich nicht sehr voneinander unterscheiden und ihr Verhältnis auch nur mit der Wurzel eingeht, kann es durch 1 ersetzt werden. Ein Vergleich der durch die radiale transversale Instabilität bedingten maximalen Teilchenzahlen für eine Dospule  $N_D$  und einen Helmholtzkompresor  $N_H$ . (Fig. 6.4) zeigt, daß die Dospule nach Fig. 4.3 ebenso große Intensitäten zuläßt wie eine Helmholtzspule.

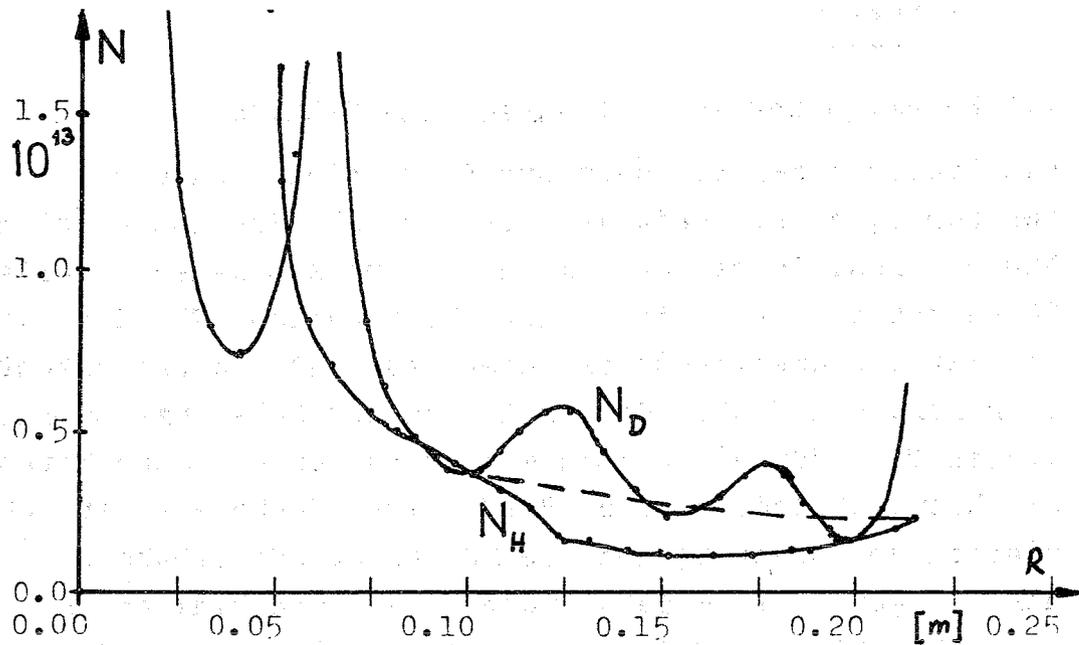


Fig. 6.4 Maximale Teilchenzahlen der radialen transversalen Instabilität für eine Dosenspule nach Fig. 4.3 und den Karlsruher Helmholtzkompressor ( $dp/p = 1\%$ ,  $b_i, a_i = 1$  cm)

Die Schwankungen im Bereich 10-22 cm bei der Dosenspule sind auf die verbliebenen Restschwankungen des Feldindex zurückzuführen. Bei einem konstanten Feldindex von 0,85 zwischen 0,1 und 0,215 m ergibt sich die gestrichelt eingetragene Teilchenzahl, die höher als in der ersten Spule des Helmholtzkompressors ist. Da die maximale Teilchenzahl durch das Minimum der Funktionen  $N_{\max}(R)$  bestimmt ist, erübrigt sich eine Diskussion für den kleinen Radiusbereich.

## 7. Extraktion

### 7.1 Zusammenhang von Extraktion und Beladung

Die Probleme der Beladung und Extraktion sind eng miteinander verknüpft, da sie zeitlich mit dem Ende der Kompression verbunden sind. Jedes der beiden Systeme muß daher jeweils mit Rücksicht auf das andere entwickelt werden. Für die Auslegung des Extraktionssystems bedeutet das, daß die Leiterkonfiguration genügend Platz für den Aufbau der Beladungsapparatur lassen muß. Für die Beladung gibt es verschiedene Methoden: die Restgasbeladung, die "Puff valve" Methode (zeitliche Variation des Druckes) und die Molekularstrahlmethode<sup>17)</sup>, bei der ein gepulster Molekularstrahl auf den Ring geschossen wird. Ein kleiner Teil der durch den Ring fliegenden Moleküle wird dabei von den Elektronen ionisiert und damit als nun elektrisch geladene Teilchen vom Potential des Elektronenringes angezogen. Die Zeit, die für einen bestimmten Beladungsgrad nötig ist, wird im Folgenden Einfangzeit genannt und ist u.A. proportional der Elektronendichte und der Dichte des Molekularstrahles. Die Dichte des Molekularstrahles kann so hoch gewählt werden, daß eine Einfangzeit bis herab zu einigen  $\mu\text{sec}$ . erreicht werden kann.

Anschließend an die Einfangzeit muß der Ring vor der Beschleunigung noch so lange festgehalten werden, bis die Ionen die angestrebte Ladungszahl erreicht haben. Diese Beladungszeit ist direkt proportional der Elektronendichte und unabhängig von der eingefangenen Ionenzahl und beträgt z.B. für einen Ring mit  $2 \cdot 10^{12}$  Elektronen  $\gamma = 46$ ,  $r = 2$  cm, Strahldurchmesser = 0.1 cm für den Ladungszustand 25 bei Uran etwa 100  $\mu\text{sec}$ . Bei der Berechnung der Ionisierungsgrade in Abhängigkeit von der Zeit zeigt sich<sup>18)</sup>, daß zu einem bestimmten Zeitpunkt nach Ionisierungsbeginn nur wenige benachbarte Ionisierungsgrade auftreten.

Um diese geringe Streuung der Ionisierungsgrade auszunutzen, ist es daher notwendig, daß die Beladungszeit ein Vielfaches der Einfangzeit beträgt. Für die Beladung der Ringe mit Hilfe von Molekularstrahlen sind nun zwei Mechanismen denkbar.

Beim ersten<sup>17)</sup> wird ein kegelmantelförmiger gepulster Molekularstrahl in axialer Richtung auf den Ring gerichtet (Fig.7.3). Dabei sind mit den verwendeten mechanischen Ventilen Pulsdauern bis herab zu 100  $\mu\text{sec}$ . möglich. Bei Einfangzeiten von gleicher Größenordnung würden dann die Beladungsgrade stärker streuen, was zu größeren Verlusten bei der Beschleunigung führen würde.

Bei einem zweiten denkbaren Beladungsmechanismus würde der Ring am Ende der Kompression während der Abwanderung aus der Mittelebene durch einen dünnen dichten Gasvorhang gezogen werden (Fig.7.3). Die untere Grenze der Einfangzeit würde dann durch die minimale Breite des Molekularstrahles ( $\sim 2$  mm) und die Axialgeschwindigkeit des Ringes während der Extraktionsphase gegeben sein. Der erste Mechanismus setzt von der Spulengeometrie her freien axialen Zugang von einer Seite voraus, während der zweite im Bereich der Extraktionsspule Platz fordert.

## 7.2 Allgemeine Bemerkungen zur Extraktion

Während der Extraktion wird der Ring aus dem Kompressionsfeld, dessen wesentliche Aufgabe es ist, den Ring zu komprimieren und in einer Ebene zu halten, mit Hilfe von Zusatzspulen in den Beschleunigungsabschnitt gebracht, dessen Eigenschaft die leichte axiale Verschiebbarkeit des Ringes ist. Die Berechnung der Ringkoordinaten ist daher umfangreicher als in einem symmetrischen Kompressorfeld, da zusätzlich zu dem variablen Parameter  $r$  noch ein weiterer Parameter der Mittelebenenabstand  $z$  hinzukommt. Das wesentliche an der Extraktion ist die erst langsame und dann schnellere Verschiebung der Ringgleichgewichtsbahn in axialer Richtung. Dies geschieht durch eine asymmetrische Anordnung der Strom- und / oder Spulenverteilung bezüglich der Mittelebene. Daher ist wie bereits in § 3 erwähnt, zusätzlich noch die Gleichung (3.5) zu lösen, die die Mitte des magnetischen Potentialtopfes definiert. Am Ende der Extraktion muß dieser Potentialtopf verschwinden, da die schnelle axiale Bewegung dieses Topfes erhebliche Schwierigkeiten mit sich bringt und die Fokussierung durch andere Mittel wie dielektrische Wunde, pulsierendes Magnetfeld oder Budker-Benettische Selbstfokussierung gewährleistet wird.

### 7.3 Vergleich verschiedener Extraktionssysteme

Für das Überwinden des Potentialtopfes können verschiedene Wege gewählt werden. Einerseits kann am Ende des Kompressionszyklus die eine Seite des Topfes abgebaut werden, entweder durch eine aktive Stromverminderung einer Spulenseite oder durch die Anbringung von passiven Spulen im Außenraum der Spulen, die wegen ihres entgegengesetzten Stromes das Magnetfeld am Ringort erniedrigen<sup>19)</sup>.

Andererseits kann auch eine Seite des Potentialtopfes so weit angehoben werden, bis es schließlich keinen Punkt mit  $B_r = 0$  mehr gibt und der Ring daher nicht mehr festgehalten wird. Diese Anhebung kann wieder durch eine aktive Erhöhung des Stromes einer Kompressorseite oder durch eine Reihe von aktiven oder passiven Spulen innerhalb der Ringbahn geschehen. Die passiven Spulen tragen zwar negativen Strom gegenüber den Hauptspulen, da sie aber einen kleineren Radius als der Ring haben und dieser sich damit im Rückfluß befindet, ist ihr Magnetfeldbeitrag positiv. Da die passiven Spulen sich aber im Vakuum befinden, sind sie schwer zugänglich und für hohe Wiederholfrequenzen würden sich Kühlprobleme ergeben. Die eleganteste Methode der Extraktion wäre jedoch eine Spule, deren Wicklungsverteilung so beschaffen ist, daß bei einem bestimmten Radius der Feldindex null wird (die axiale Fokussierung also verschwindet) und das expansionsseitige Feld auf diesem Radius homogen ist. Eine rohe Annäherung eines solchen Systems ist eine Spule, deren Feldindex bei kleinen Radien negativ wird. Die Fig. 7.1 und 7.2 zeigen den Feldindex und das Radialfeld  $B_r$  von Spulenpaaren für verschiedene Axialabstands- Radienverhältnisse. Flache Spulen, deren Radius-Axialabstandsverhältnis kleiner als 0.4 ist, ermöglichen also eine leichtere Extraktionsmöglichkeit, weil der Feldindex bei einem bestimmten Radius durch Null geht; dies bedeutet, daß das Feld dort homogen wird ( $B_r \approx 0$ ). Da in der Dosenpule jedes Windungspaar das kleinste, durch die Vakuumkammer gegebene Axialabstands-Radiusverhältnis hat, ist der Dosenkompressor in Bezug auf die Extraktion besonders günstig.

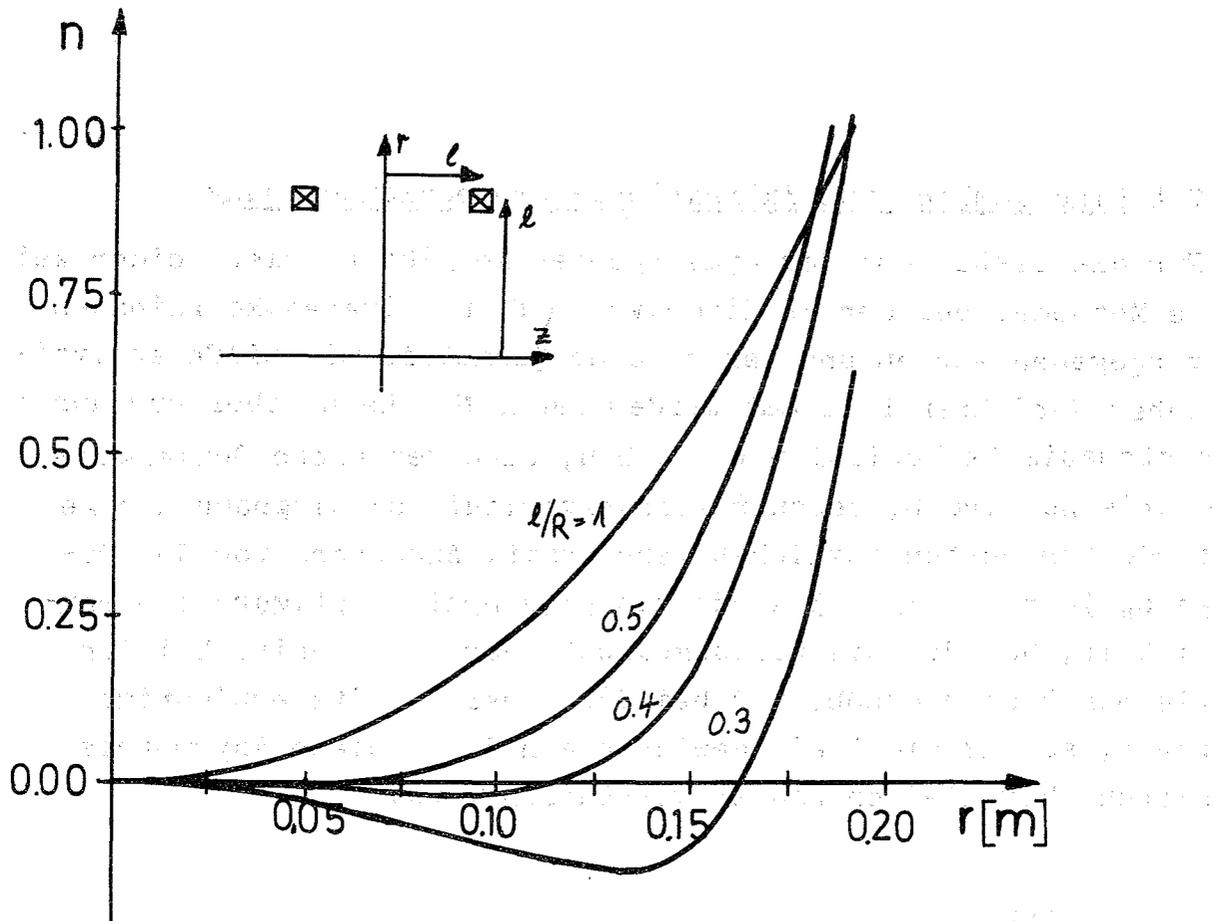


Fig.7.1 Feldindex für Spulenpaare mit verschiedenen Axialabstands-Radiusverhältnis

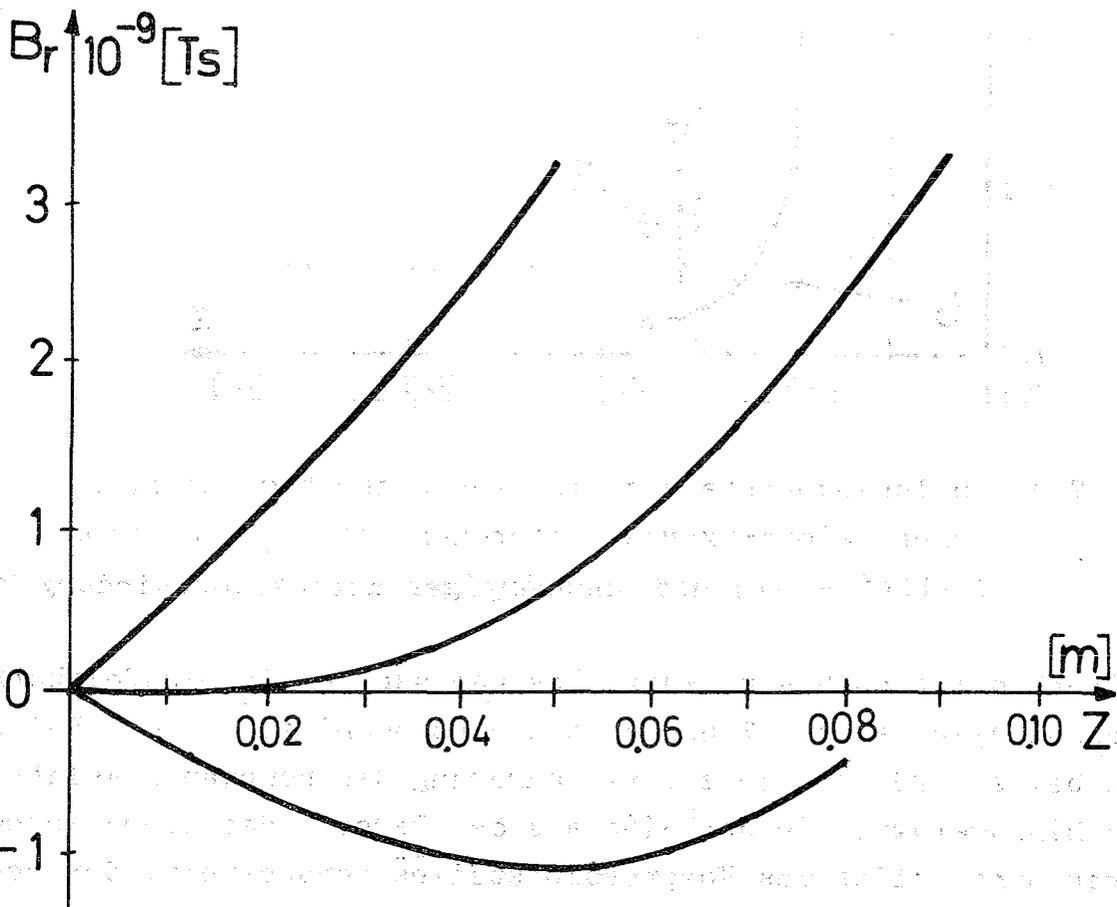


Fig. 7.2  $B_r(r = 0.47 R, z)$  für verschiedene Axialabstands-Radiusverhältnisse

#### 7.4 Eine kombinierte Extraktions-Kompressionsordnung

Für die Bestimmung der Spulengeometrie gibt es hier leider keine Methode, bei der Feldindexverlauf und Ringbahnkoordinaten vorgegeben werden und daraus eine Geometrie mit Hilfe analytischer Verfahren bestimmt werden kann. Man kann daher nur durch systematische Variation versuchen, eine geeignete Spulengeometrie zu finden, deren Feldindexverlauf und Ringbahn den geforderten Werten möglichst nahe kommt. Ausgehend von der Dossenspule nach Fig.4.3 wurde nun eine Spulenkonfiguration entwickelt, bei der die Windungsdichte der einen Seite bei den kleinen Radien erhöht und bei der anderen Seite erniedrigt wurde, so daß die Gleichgewichtsbahn durch diese Asymmetrisierung bei kleinen Radien verschoben wird.

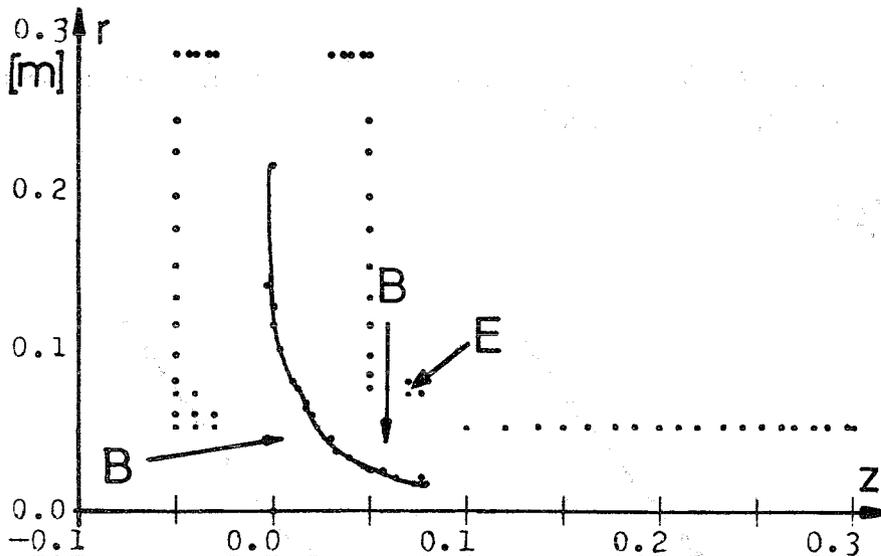


Fig.7.3 Spulengeometrie und Ringbahn einer kombinierten Kompressions-Extraktionsordnung mit Beladungsmöglichkeiten (B) und unabhängiger Extraktionswindung E.

Weiterhin ist noch eine kurze Übergangsspule mit Randfeldkorrekturwindungen bei  $z = 7$  und  $8$  cm zur Homogenisierung des Feldes und bei  $z = 29 - 30$  cm zur Verlängerung des homogenen Feldteiles hinzugefügt, die den Ring aus dem Bereich des stark inhomogenen Streufeldes des Kompressionsteiles herausführt, der bei

der obigen Spulenkonfiguration am Ende des Solenoidteiles bei  $z = 0.3$  m noch 10 %, bei  $z = 0.5$  m noch 3 % des Solenoidmagnetfeldes ausmacht. Der Entwurf des Beschleunigungssystems wird auf diese Weise unabhängig vom Kompressionsteil. Die Spulengeometrie läßt auch genügend Platz sowohl für eine axiale Beladung von links als auch für die Beladung durch einen "Gasvorhang" bei  $z = 8$  cm, da die Leiterdicke zwischen Solenoidteil und Kompressionsteil nicht sehr hoch ist. Der Abstand zwischen Ringbahn und Spule ist ebenfalls groß genug, um Platz für die Vakuumkammer und Isolation der Spulen zu bieten. Der Feldindexverlauf (Fig.7.4) der Spule wird durch die zusätzlichen Windungen und die Asymmetrisierung der Bahn gegenüber der Spule (Fig.4.3) nur unwesentlich geändert.

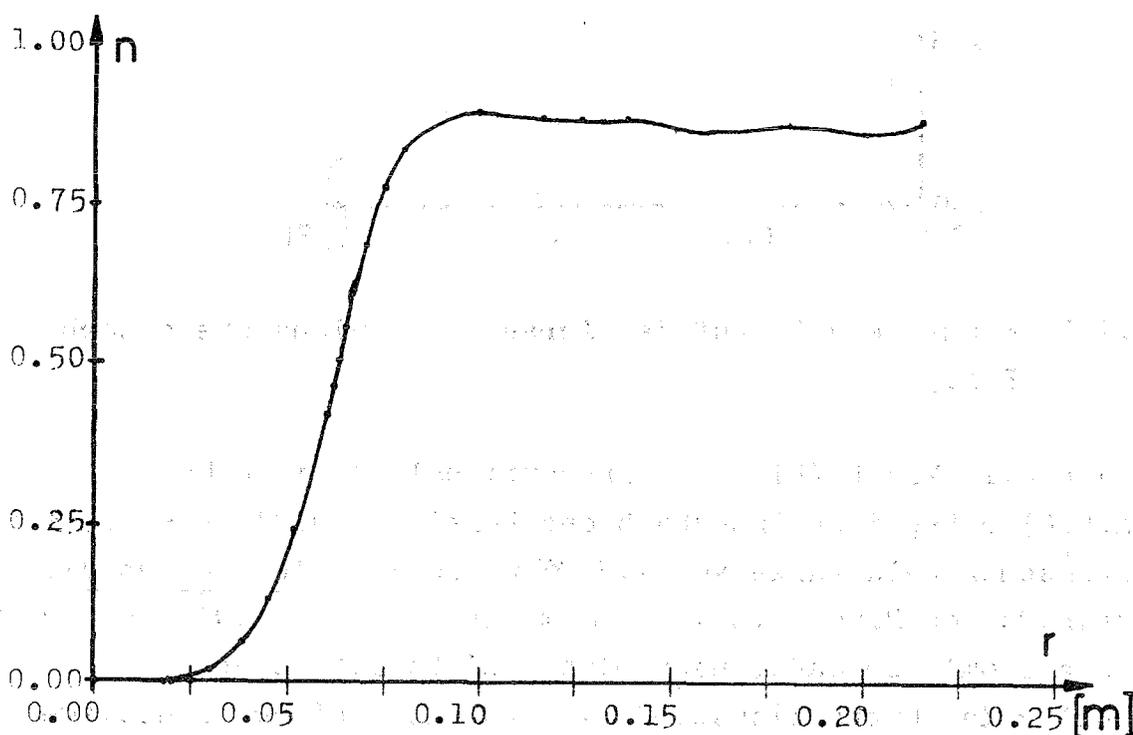


Fig.7.4: Feldindexverlauf auf der Ringbahn  $r(z)$  von Fig.5.3

Auch die Gesamtinduktivität ist mit 300  $\mu$ H nur unwesentlich erhöht, da der Hauptbeitrag von den unveränderten Windungen mit großem Radius herrührt. Bei einer Kompression des Ringes auf

1,8 cm befindet sich der Ring 6 - 8 cm außerhalb der Mittel-  
ebene am Anfang eines fast homogenen Feldes, das eine erste  
kurze Expansionsbeschleunigung gestattet (Fig.7.5).

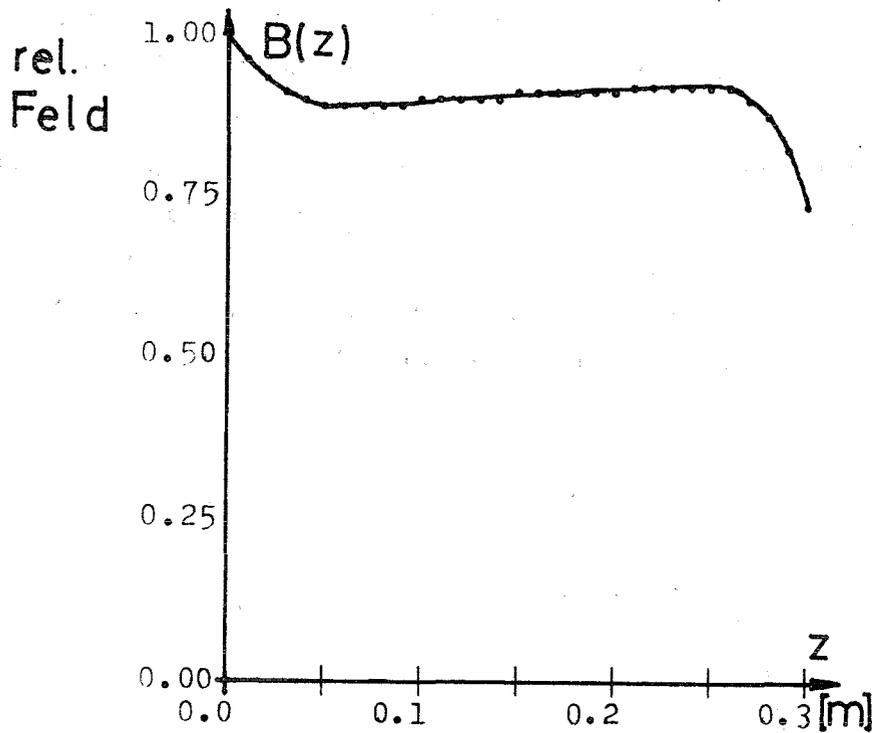


Fig.7.5 Magnetfeld  $B_z$  auf der Achse des Spulensystems nach  
Fig.5.3

Das der Axialkraft (Fig.3.4) proportionale radiale Magnetfeld  $B_r$   
(Fig.5.6) entspricht innerhalb des Bereiches  $0.07 \text{ m} < z < 0.25 \text{ m}$  einer  
elektrischen Feldstärke von  $1.5 \text{ MV/m}$  und ist klein gegen die  
Haltekraft des Ringes ( $E = 60 \text{ MV/m}$  für  $N_e = 2.5 \cdot 10^{12}$ ,  $R = 2 \text{ cm}$ ,  
 $a = b = 1 \text{ mm}$ ), so daß Ionenverluste nicht auftreten.

Mit Hilfe der Extraktionswindung kann die Gleichgewichtslage  
( $B_r = 0$ ,  $B_r'(z) < 0$ ) um rund 10 cm verschoben werden, so daß eine  
Anfangsbeschleunigung durch Stromerhöhung dieser Windung möglich  
ist.

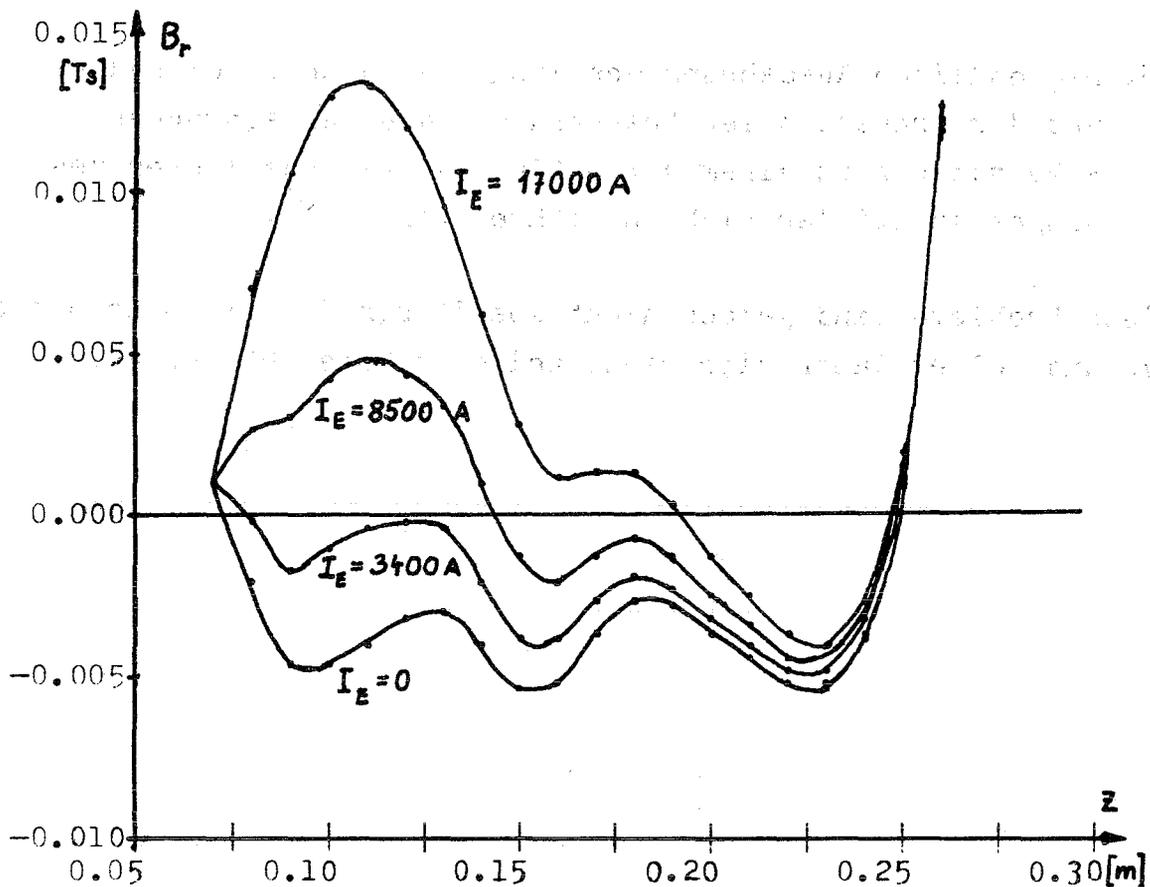


Fig.5.6 Radiales Magnetfeld  $B_r(z)$  des Spulensystems nach Fig.5.3 auf dem Radius 1,8 cm, für verschiedene Ströme  $I_E$  der Extraktionswindung in Fig.7.3

Für eine endgültige Version wären jedoch noch eine Reihe von Problemen zu lösen, insbesondere:

1. Die durch die fehlende Spulensymmetrie bedingte Kopplung von radialen und axialen Betatronschwingungen und damit verbundene Resonanzen.
2. Die durch Raumladungskräfte verursachte Kreuzung der Resonanz  $Q_r = 1$ .
3. Die durch endliche Windungssteigerungen hervorgerufenen Feldfehler.

4. Die Feldänderungen durch Wirbelstromeffekte.
5. Die endliche Ausdehnung des longitudinalen Impulsraumes und der transversalen Phasenräume, die bei schwacher Fokussierung zu einem vorzeitigen Auseinanderlaufen des Ringes in axialer Richtung führen können<sup>20)</sup>.

Diese Probleme sind jedoch nicht spezifisch für einen Kompressor-  
typ und sollen daher hier nicht weiter untersucht werden.

## 8. Parametervergleich von Helmholtz- und Dosenkompressor

In den vorhergehenden Kapiteln wurden bis auf die Wirbelströme alle Größen als Funktion des Radius untersucht, weil diese Betrachtungsweise vom zeitlichen Verhalten der Spulenströme unabhängig ist. Zur Vervollständigung der Untersuchung ist es daher noch nötig, einige Variablen wie den Impuls, den Radius und den Feldindex am Ringort als Funktion der Zeit zu untersuchen und deren Verlauf mit den Werten eines Helmholtzkompressors zu vergleichen. Für den zeitlichen Verlauf der erregenden Ströme wird angenommen, daß jede Spule mit einer Kondensatorbatterie verbunden wird und im Falle des Helmholtzkompressors jeweils nach einer Viertelwelle im Strommaximum kurzgeschlossen wird (Fig. 8.1). (Spulengeometrie des Helmholtzkompressors siehe Fig. 8.5)

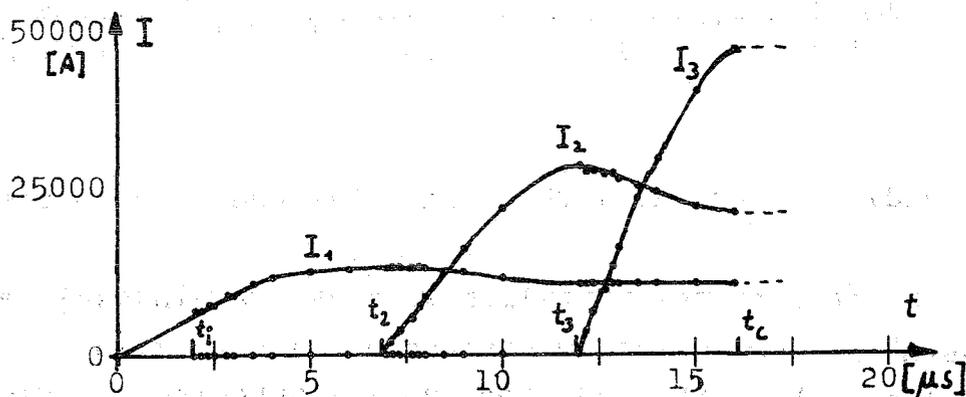


Fig.: 8.1 Stromzeitdiagramm für den Vergleichshelmholtzkompressor

Der Radiusverlauf (Fig. 8.2) zeigt daher an den Schaltzeitpunkten Knickstellen. Der Radiusverlauf des Dosenkompressors

fällt sofort nach Injektion gegenüber dem Helmholtzkompressor auf sehr kleine Werte ( $\approx 5$  cm) ab und ändert sich dann während der restlichen 230  $\mu$ sec nur noch wenig. Der Vorteil dieses Verhaltens, der eine künstliche Verlängerung des Strommaximums für die Beladung erübrigt, wurde bereits diskutiert (Kap. 4.4)

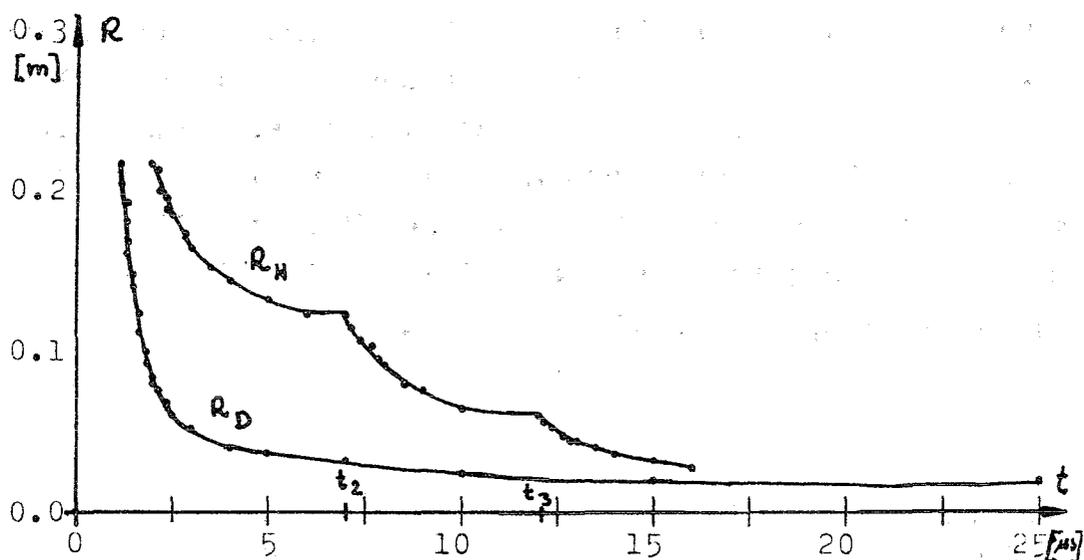


Fig.: 8.2 Radiusverlauf  $R(t)$  für Helmholtz- und Dosenkompressor

Wegen des schnellen Radiusabfalles wird das Feldindexplateau in Abhängigkeit vom Radius im Dosenkompressor (Fig. 8.3) in Abhängigkeit von der Zeit sehr schnell durchlaufen. Die Feldindexänderungsgeschwindigkeit  $n(t)$ , die das Instabilitätsverhalten bestimmt, ist dagegen im weiteren Verlauf in beiden Kompressortypen vergleichbar.

Der Vorteil des kleinen Feldindex im Dosenkompressor am Ende der Kompression, der eine leichtere Extraktion ermöglicht, wurde schon (Kap. 5) diskutiert. Obwohl der Impuls als Funktion des Radius sehr viel langsamer als in einer Helmholtzspule wächst, steigt er als Funktion der Zeit wegen der schnellen

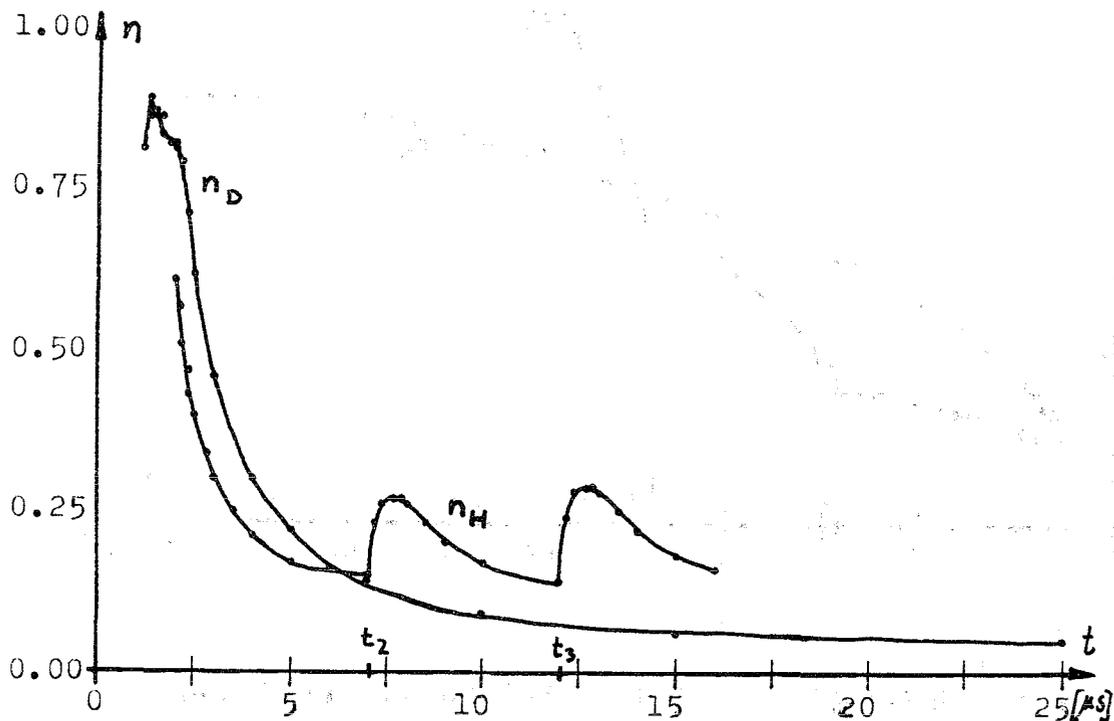


Fig.: 8.3 Feldindex am Ringort  $n(t)$  für Helmholtz- und Dosenkompressor

Kompression wesentlich schneller als im Helmholtzkompressor an (Fig. 8.4). Damit wird das Verhalten impulsabhängiger Instabilitäten verbessert.

Die folgende Tabelle 8.1 gibt einen Vergleich der wichtigsten Parameterwerte für beide Kompressortypen, dabei gelten folgende Werte in beiden Fällen:

Injektionsradius	$r_i = 0,215$ m
max. Kondensatorspannung	$U = 30$ kV
Einschußimpuls	$p_i = 2,8$ MeV/c

Die Spulengeometrie des Helmholtzkompressors befindet sich in Fig. 8.5)

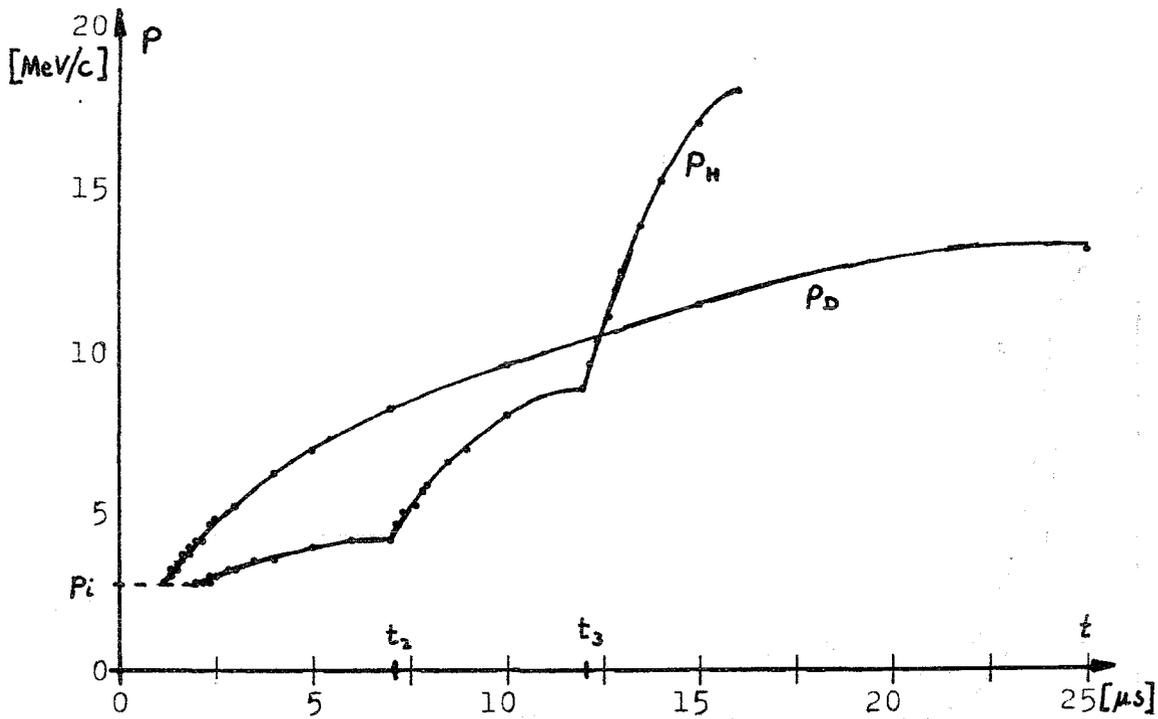


Fig.: 8.4 Impulsanstieg  $p(t)$  im Helmholtz- und Dosenkompressor

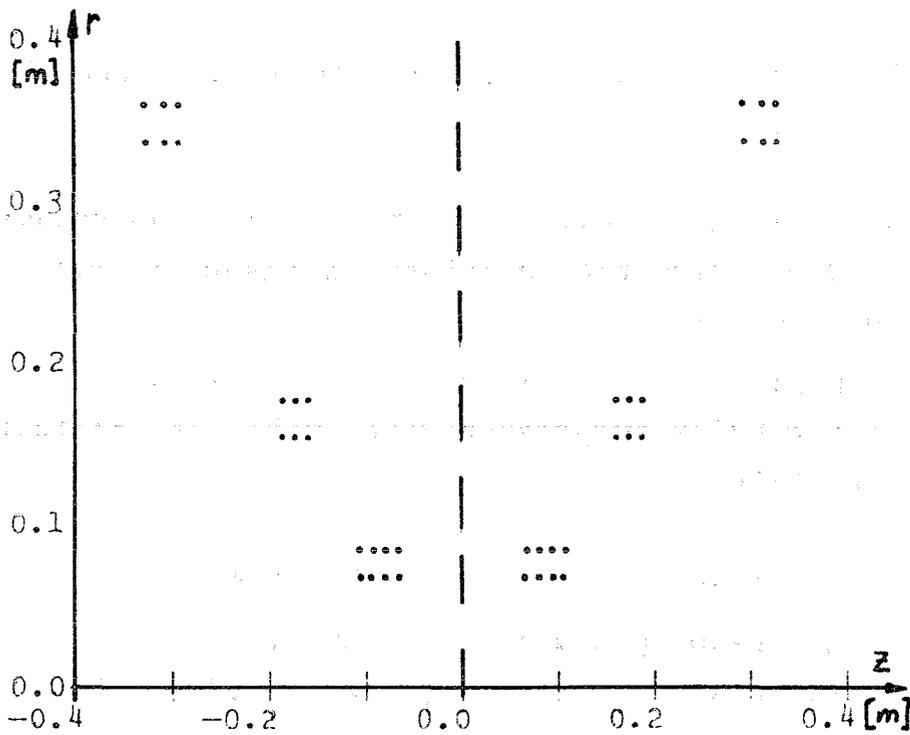


Fig.: 8.5 Spulengeometrie des Karlsruher Helmholtzkompressors

Tabelle 8.1: Parametervergleich zwischen Helmholtz- und Dosenkompressor

	Dosenkompressor	Helmholtzkompressor
maximale Magnetfeldenergie (kJ)	45	12
elektrisches Feldstärkeverhältnis $E_c/E_i$	125	50
Injektionsspulenstrom (kA)	1,1	1,1
maximaler Spulenstrom (kA)	17	9,5
Ohmsche Verlustenergie pro Zyklus (kJ) *	5,5	0,7
Spuleninduktivität ( $\mu\text{H}$ )	270	270
Sintiefe (mm)	2,2	1,6
Kompressionsradius $r_c$ (cm)	1,85	2,5
Feldindex auf $r_c$	0,05	0,09
Kompressionsimpuls (MeV/c)	13,2	9,8
gesamte Kompressionszeit $t_c$ ( $\mu\text{sec}$ )	250	160
Kompressionszeit bis 5 cm ( $\mu\text{sec}$ )	20	20

\* bei 40 m $\Omega$  Spulenwiderstand der Dosenspule

Der erste Parametersatz des Dosenkompressors ist für den gleichen Energieinhalt, der zweite für das gleiche Verhältnis der elektrischen Feldstärken  $E_c/E_i$  (2.5) wie beim Helmholtzkompressor berechnet. Die Werte des Stufenkompressors sind noch vom Zeitprogramm der Spulenschaltung abhängig. Ein schnelleres Einschalten der zweiten und dritten Spule verändert die Werte von  $p_c$ ,  $r_c$ ,  $n_c$  und  $t_c$  hin zu denen des Dosenkompressors, führt aber zu einem unerwünschten Oszillieren des Feldindex während der Kompression. Der Dosenkompressor produziert kleinere Ringe mit kleinerem Impuls, deren Feldstärkevergrößerung aber trotzdem noch 100 % größer bzw. ebenso groß wie im Helmholtzkompressor ist.

Im Gegensatz zum Helmholtzkompressor, der wegen des Kurzschlußbetriebes die gesamte Magnetfeldenergie während eines Zyklus verbraucht, treten im Dosenkompressor bei Dauerbetrieb allein die Ohmschen Verluste pro Zyklus auf. Diese sind proportional dem spezifischen Widerstand, dem Quadrat der Stromdichte  $i$ , dem Leitervolumen und einem dimensionslosen Geometriefaktor  $g$ , der die Stromverdrängung durch den Skin-Effekt berücksichtigt:

$$N = i^2 \rho V g / 2 \quad (8.1)$$

Bei einem Leiterquerschnitt von  $20 \text{ mm}^2$ , bei dem  $g$  noch nicht viel größer als eins ist, erhält man bei Zimmertemperatur für eine Kupferspule nach Fig. 4.3 einen Ohmschen Widerstand von  $40 \text{ m}\Omega$  und somit pro Zyklus Verluste von  $5,5$  bzw.  $1,1 \text{ kJ}$ . Gegenüber dem Helmholtzkompressor ergibt sich daher eine 8 bis 60-fach bessere Ausnutzung der Energie. Bei Dauerbetrieb betragen die entsprechenden Verlustleistungen  $5,5 \text{ MW}$  ( $I_{\text{max}} = 17 \text{ kA}$ ) bzw.  $0,7 \text{ MW}$  ( $I_{\text{max}} = 9,5 \text{ kA}$ ). Diese Leistungen sind zwar sehr hoch, entsprechen aber auch bei einer Ionenzahl von  $10^{11}$  /Ring (entsprechend einer 1%igen Beladung eines  $10^{13}$  Elektronen enthaltenden Ringes) der sehr hohen Intensität von  $10^{14}$  Teilchen/sec.

Der einzige Weg, die Ohmschen Verluste zu senken, besteht in der Vergrößerung des stromtragenden Leitervolumens bei gleichzeitiger Verringerung der Stromdichte. Dieser Weg ist aber nur bis zu einem gewissen Punkt gangbar, weil besonders im Zentrum der Kompressionsspule eine Vergrößerung des Leitervolumens auch eine Verschiebung des Leiterschwerpunktes nach außen bringt (innen begrenzt die Vakuumkammer die Wicklung) und eine geringe Wirksamkeit des Stromes zur Folge hat.

## 9. Schlußbemerkungen

Die vorliegende Arbeit zeigt, daß ein Einspulenkompressor Vorteile gegenüber einem Helmholtzkompressor besitzt. Nicht nur die bereits in der Einleitung erwähnte Konstanz des Feldindex auf großen Radien und die unkomplizierte Betriebsweise, sondern auch die sehr schnelle Kompression wegen des hohen Feldindex und die leichtere Extraktion des Ringes sind als vorteilhaft zu nennen. Die Wirbelströme spielen bei den untersuchten Geometrien, wie gezeigt, nur einen geringen Einfluß und auch die Frage nach den kollektiven Instabilitäten ist positiv zu beantworten: Bei der Dosenspule sind die Stabilitätsgrenzen nicht kleiner als in einem Helmholtzkompressor. Als weitaus größter Vorteil neben den physikalischen Vorteilen ist aber gegenüber dem Helmholtzkompressor die mögliche hohe Wiederholfrequenz von ungefähr einem kHz zu betrachten, die mit einem Stufenkompressor nicht möglich wäre.

Neben der Frage der technischen Durchführbarkeit eines 1 kHz Kompressors wäre weiterhin die Frage zu klären, ob ein Injektor für diese Frequenz realisierbar ist. Heute existieren Induktionsbeschleuniger (Dubna <sup>21</sup>), LRL Berkeley <sup>22</sup>), die in Elektronenringbeschleuniger-Experimenten benutzt werden und Wiederholraten von 50 Hz bzw. 1 Hz zulassen. Die weitere Entwicklung wird sicher auch diese Grenze verschieben.

## A n h a n g

### A1. Fourierreihen

Soll eine periodische Funktion  $x(t)$  mit der Periode  $T$  durch eine Fourierreihe dargestellt werden, so sind die Fourierkoeffizienten zu bestimmen. In komplexer Schreibweise werden die Funktion und ihre Fourierkoeffizienten folgendermaßen dargestellt:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega t} \quad j^2 = -1 \quad (\text{A1.1})$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (\text{A1.2})$$

Mit Hilfe der Einheitssprungfunktion  $\Theta(s)$  können die Fourierkoeffizienten in der Form

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} |\Theta(t) - \Theta(t - T)| x(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (\text{A1.3})$$

geschrieben werden <sup>23)</sup>, wobei das Integral als Laplacetransformierte  $X(s)$  der Funktion  $x(t)$  mit imaginären Parametern  $s = jk\omega$  aufgefaßt werden kann. Die Fourierkoeffizienten sind dann durch

$$C_k = \frac{1}{T} X(s) \Big|_{s = jk\omega} \quad (\text{A1.4})$$

mit

$$X(s) = \int_0^{\infty} |\Theta(t) - \Theta(t - T)| x(t) e^{-st} dt \quad (\text{A1.5})$$

gegeben. Diese etwas umständliche Darstellung der Fourier-

koeffizienten besitzt den Vorteil, daß die umfangreichen Tafelwerke über Laplacetransformierte benutzt werden können, so daß die oft schwierigen Berechnungen der Integrale (A1.2) entfallen.

Die Funktion, die den Einschaltvorgang eines Stromes mit einer Sinusviertelwelle und einem Exponentialabfall beschreibt, ist:

(A1.6)

$$x(t) = \theta(t) \sin \omega t - \theta(t-T/4) \cos \omega t + \theta(t-T/4)e^{-a(t-T/4)}$$

Dabei ist die Abklingkonstante  $a$  sehr viel kleiner als  $\omega$ . Eine korrekte Fourierdarstellung dieser Funktion im Intervall  $[-\infty, \infty]$  würde eine große Anzahl von Fourierkomponenten erfordern. Da im Dreistufenkompressor nur das Zeitintervall  $(0, 3 T/4)$  und im Dosenkompressor das Zeitintervall  $(0, T/4)$  interessant ist, reicht es aus, wenn die Funktion A1.6 durch eine Funktion wie in Fig. A1.1 ersetzt wird. Diese Funktion hat vor und nach der Sinusviertelwelle einen ähnlichen Verlauf wie A1.6 und den Vorteil, daß der wesentliche Teil von  $x(t)$ , die Sinusviertelwelle bereits mit wenigen Fourierkomponenten approximiert wird, wie später gezeigt wird. Die Funktion  $x(t)$  aus Fig. A1.1 ist der Spezialfall  $n = 2$  der Funktion

(A1.7)

$$x_n(t) = \theta(t) \sin n\omega t - \theta(t-T/4n) \cos n\omega(t-T/4n) + 1/2 [\theta(t-T/4n) - \theta(t-T) + \theta(t-T/4n) \cos(t-T/4n) \frac{2n\omega}{4n-1} + \theta(t-T) \cos \frac{2n\omega}{4n-1}(t-T)]$$

Ihre Laplacetransformierte ist:

(A1.8)

$$X_T(s) = \frac{n\omega - s}{s^2 + n^2\omega^2} e^{-\frac{sT}{4n}} + \frac{e^{-\frac{sT}{4n}} - e^{-sT}}{2s} + \frac{s(e^{-\frac{sT}{4n}} + e^{-sT})}{2(s^2 + \frac{4n^2\omega^2}{(4n-1)^2})}$$

woraus mit A1.4 sofort die Fourierkomponenten bestimmt werden können:

(A1.9)

$$2\pi C_k = \frac{n - jke^{-\frac{jk\pi}{2n}}}{n^2 - k^2} + \frac{e^{-\frac{jk\pi}{2n}} - 1}{2jk} + \frac{jk(e^{-\frac{jk\pi}{2n}} + 1)}{\frac{32n^2}{(4n-1)^2} - 2k^2} \quad |k| \neq n$$

Für  $k = n$  ist der erste Term durch  $(+1 - \pi j/2)/2n$  zu ersetzen. Für den Fall  $n = 2$  reichen dabei 10 Fourierkomponenten aus, um die Funktion A1.7 gut zu approximieren, wie die folgende Figur zeigt.

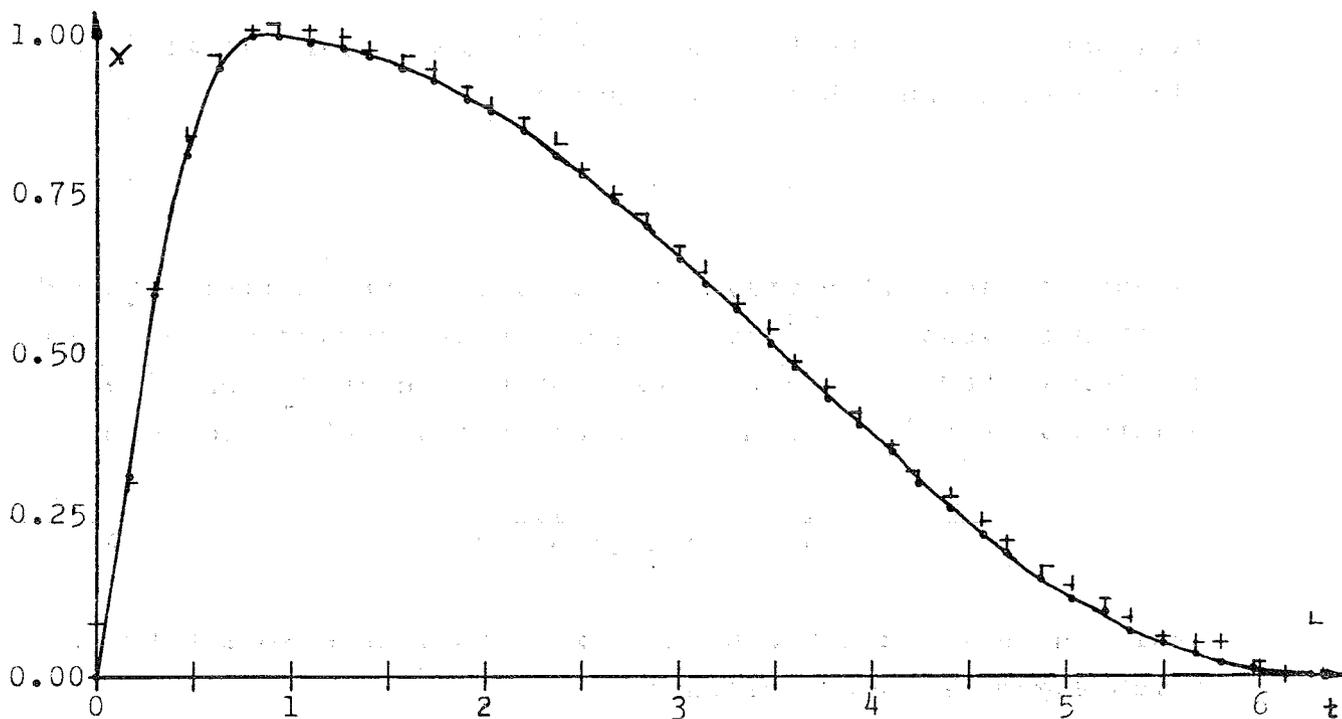


Fig.: A1.1 Die Funktion  $x_2(t)$  (durchgezogen) und ihre zehnte Fourierapproximation (+)

A2. Lösung der elliptischen Gleichung  $\Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$

in Zylinderkoordinaten mit der Randbedingung  
 $\vec{H} = \vec{H}^{(0)}$  im Unendlichen

k habe die Form  $k = k_0 \theta(d-r)$

Gesucht wird  $\delta \vec{H}$  mit der Randbedingung, daß  $\delta \vec{H}$  im Unendlichen verschwindet. Das Problem kann nach <sup>10)</sup> in zwei Schritten gelöst werden: Zuerst werden die Felder für den Innenraum ( $r \leq a$ ) und den Außenraum ( $r \geq a$ ) bestimmt, wobei noch willkürliche Konstanten in den Lösungen auftreten. Durch Ausnutzen der Stetigkeitsbedingungen an der Grenze durch  $r = a$  werden diese Konstanten und damit  $\delta \vec{H}$  bestimmt.

Im Innenraum ist die Gleichung

$$\Delta \vec{H}^{(i)} + k_0^2 \vec{H}^{(i)} = 0 \quad (\text{A2.1})$$

zu lösen. Stellt man  $\vec{H}^{(i)}$  durch  $\vec{H}^{(i)} = \text{rot } \vec{A}$  dar, so gilt dann für  $\vec{A}$  eine entsprechende Gleichung:

$$\Delta \vec{A} + k_0^2 \vec{A} = 0 \quad (\text{A2.2})$$

Da das Problem zylindersymmetrisch ist, kann  $\vec{A}$  allein von dem konstanten Vektor  $\vec{H}^{(0)}$  des äußeren Feldes abhängen. Da  $\vec{A}$  ein axialer Vektor ist und rot der einzige Operator, der einen polaren in einen axialen Vektor umwandelt, muß  $\vec{A}$  die Form

$$\vec{A} = \beta \text{rot} (f \vec{H}^{(0)}) \quad (\text{A2.3})$$

besitzen.  $\beta$  ist dabei eine noch zu bestimmende Konstante und  $f$  muß wegen (2) der Gleichung

$$\Delta f + k_0^2 f = 0 \quad (\text{A2.4})$$

genügen. Für das zylindrische Gebiet ist  $f = J_0(k_0 r)$  eine solche Lösung.

Damit folgt für das Magnetfeld  $\vec{H}^{(i)}$ :

$$\begin{aligned} \vec{H}^{(i)} &= \beta \operatorname{rot} \operatorname{rot} (f \vec{H}^{(o)}) \\ &= \beta \left[ \vec{H}^{(o)} (k^2 f + f'/r) - \vec{e}_r (\vec{e}_r \vec{H}^{(o)}) (k^2 f + 2f'/r) \right] \end{aligned} \quad (\text{A2.5})$$

Im Außenraum hat das äußere Feld die Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{H}^{(e)} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \vec{H}^{(e)} = 0 \quad (\text{A2.6})$$

zu befriedigen und im Unendlichen gegen  $\vec{H}^{(o)}$  zu gehen. Dies kann durch den folgenden Ansatz versucht werden:

$$\vec{H}^{(e)} = \vec{H}^{(o)} - \operatorname{grad} \phi \quad (\text{A2.7})$$

wobei  $\phi$  im Unendlichen verschwinden muß, der Gleichung  $\Delta \phi = 0$  genügt und außerdem noch linear von  $\vec{H}^{(o)}$  abhängt. Eine Funktion, die das leistet, ist die Grundlösung der Potentialgleichung in zylindrischen Koordinaten multipliziert mit  $\vec{H}^{(o)}$ :

$$\phi = \frac{2 \alpha F}{r^2} \operatorname{grad} (\vec{H}^{(o)}), \operatorname{grad}_r \ln r \quad (\text{A2.8})$$

Dabei ist  $F = \pi a^2$  der Querschnitt und  $\alpha$  ein zu bestimmender Faktor. Für  $\vec{H}^{(e)}$  erhält man somit:

$$\vec{H}^{(e)} = \vec{H}^{(o)} + \left[ 2 \vec{e}_r (\vec{e}_r \vec{H}^{(o)}) - \vec{H}^{(o)} \right] \frac{2\pi d^2 / 4\alpha}{r^2} \quad (\text{A2.9})$$

Da die beiden Komponenten von  $\vec{H}^{(e)}$  und  $\vec{H}^{(i)}$  unabhängig voneinander für  $r = d/L$  gleich sein müssen, erhält man zwei Bestimmungsgleichungen für  $\alpha$  und  $\beta$ :

(A2.10)

$$\vec{H}^{(o)}\text{-Komponente } 1 - 2\pi\alpha d^2/4r^2 \Big|_{r=a} = \beta(J_0'(kr)/r + k^2 J_0(kr)) \Big|_{r=d/2}$$

(A2.11)

$$\vec{e}_r(\vec{e}_r, \vec{H}^{(o)})\text{-Komponente } 4\pi\alpha d^2/4r^2 \Big|_{r=a} = -\beta(2J_0'(kr)/r + k^2 J_0(kr)) \Big|_{r=d/2}$$

Löst man beide Gleichungen nach  $\alpha$  auf, so erhält man:

$$\alpha = -\left(1 - \frac{2J_1(kd/2)}{kd J_0(kd/2)}\right) / 2\pi \quad (A2.12)$$

$2\pi\alpha$  wird vom Programm ALPHA berechnet. Für  $d/2\delta > 10$  werden dazu die Näherungsformeln der Besselfunktionen für großes Argument benutzt.  $2\pi\alpha$  hat dann die Form:

$$2\pi\alpha = -\left(1 - \frac{2\delta}{d}\right) + j\frac{2\delta}{d} \quad (A2.13)$$

Für  $d/2\delta < 10$  müssen, da  $k$  komplex ist (5.4), die Besselfunktionen in A2.12 durch Besselfunktionen mit reellem Argument ausgedrückt werden<sup>13)</sup>:

$$J_\nu(\lambda z) = \lambda^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k (\lambda^2 - 1)^k (z/2)^k}{k!} J_{\nu+1}(z) \quad (A2.14)$$

mit  $z = |k|d/\sqrt{2} = d/\sqrt{2} \delta$  und  $\lambda = e^{j\pi/4}$  folgt:

(A2.15)

$$J_0\left(\frac{d}{\sqrt{2}\delta} e^{\frac{j\pi}{4}}\right) = e^{\frac{j\pi}{4}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k \left(\frac{d}{2\delta\sqrt{2}}\right)^k (e^{\frac{j\pi}{2}} - 1)^k}{k!} J_{0+k}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\delta}\right)$$

(A2.16)

$$= e^{\frac{j\pi}{4}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k \left(\frac{d}{2\delta}\right)^k e^{3/4 \pi j k}}{k!} J_{0+k}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\delta}\right)$$

oder

$$J_0\left(\frac{d}{2\delta}(1+j)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d/2\delta)^k}{k!} e^{\frac{\pi j}{4}(k-1)} J_k\left(\frac{d}{\sqrt{2}\delta}\right) \quad (A2.17)$$

$$J_1\left(\frac{d}{2\delta}(1+j)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d/2\delta)^k}{k!} e^{\frac{\pi j k}{4}} J_{k+1}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\delta}\right) \quad (A2.18)$$

Die Besselfunktionen mit höherer Ordnung als eins werden mit Hilfe des Programms BES rekursiv aus  $J_0$  und  $J_1$  berechnet.

### A3. Die Berechnung der Parameter der Kompression und Extraktion

Für die Berechnung der Ringkoordinaten werden die Magnetfelder und Vektorpotentiale und Ströme der Kompressorspulen benötigt. Die Ströme werden durch Lösen der folgenden Differentialgleichung gewonnen:

(A3.1)

$$\sum_{i=1}^n L_{ji} \ddot{Q}_i + R_j \dot{Q}_j + Q_j / C_j = 0 \quad j = 1 \dots n$$

Die  $L_{ij}$  sind die Wechsel- bzw. Selbstinduktivitätskoeffizienten der  $n$  Spulen,  $R_j$  die Ohmschen Widerstände und  $C_j$  die den Spulen zugeordneten Kapazitäten. Die Anfangsbedingungen sind durch  $\dot{Q}_j = 0$  und  $Q_j = C_j U_j$  mit den  $U_j$  als Ladespannungen gegeben. Werden  $n-m$  Spulen kurzgeschlossen, so vereinfachen sich  $n-m$  Gleichungen zu

(A3.2)

$$\sum_{i=1}^n L_{ji} \dot{I}_i + R_j I_j = 0 \quad j = m + 1 \dots n$$

Beide Gleichungen lassen sich jeweils nach den höchsten Ableitungen auflösen:

(A3.3)

$$\ddot{Q}_i = - \sum_{j=1}^n L_{ij}^{-1} (R_j \dot{Q}_j + Q_j / C_j) \quad i = 1 \dots m$$

(A3.4)

$$\dot{I}_i = - \sum_{j=1}^n L_{ij}^{-1} R_j I_j \quad j = m + 1, \dots n$$

Dieses Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung kann durch die Umformung

$$\dot{Q}_i = I_i \quad i = 1 \dots m \quad (A3.5)$$

$$i = 1 \dots m$$

$$\dot{I}_i = - \sum_{j=1}^n L_{ij}^{-1} (R_j I_j + Q_j / C_j) \quad i = 1 \dots m \quad (A3.6)$$

$$\dot{I}_i = - \sum_{j=1}^n L_{ij}^{-1} R_j I_j \quad i = m + 1, \dots n \quad (A3.7)$$

in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit  $m + n$  Gleichungen umgewandelt werden. Nach <sup>24)</sup> kann die Lösung eines derartigen Systems mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} y_j \quad y_i(t_0) = y_{i0} \quad i = 1 \dots n \quad (A3.8)$$

folgendermaßen geschrieben werden:

$$y_i(t-t_0) = \sum_{j=1}^n B_{ij} y_{j0} \quad i = 1 \dots n \quad (A3.9)$$

mit  $B_{ij} = \text{expm} \left( \int_{t_0}^t A_{ij} dt \right) = \text{expm} (A_{ij}(t-t_0))$  (A3.10)

wobei  $\text{expm} C_{ij} = \delta_{ij} + C_{ij} + 1/2 \sum_{k=1}^n C_{ik} C_{kj} + \dots$  (A3.11)

die Matrixexponentialfunktion bedeutet. Für eine bestimmte Schrittweite  $h$  leistet dann die Matrix

$$B_{ij}^{(h)} = \text{expm} (A_{ij} h) \quad (A3.12)$$

Die Transformation von  $y_i(t)$  nach  $y_i(t + h)$ . Die Ordnung des Lösungsverfahrens ist dabei gleich der Ordnung des letzten Gliedes der Reihenentwicklung A3.11. Das Programm KOMP (siehe auch Flußdiagramm auf den folgenden Seiten) berechnet auf diese Weise die Ströme der verschiedenen Spulen mit deren Hilfe dann die Unterprogramme AFNEW bzw. AFFE die Ringkoordinaten  $r$  bzw.  $r$  und  $z$  nebst dem dortigen Magnetfeld  $B_z$  und dem Feldindex  $n$  durch Lösen der Gleichungen 3.7 bzw. 3.5 berechnen. Dabei wird das Newton-Raphsonsche Nullstellenverbesserungsverfahren für eine bzw. zwei Dimensionen angewandt:

$$r_{n+1} = r_n - P_\theta(r_n) / (\partial P_\theta(r_n) / \partial r) \quad (A3.13)$$

(A3.14)

$$\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n \\ z_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_r(r_n, z_n) \\ P_\theta(r_n, z_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial B_r(r_n, z_n) / \partial r & \partial B_r(r_n, z_n) / \partial z \\ \partial P_\theta(r_n, z_n) / \partial r & \partial P_\theta(r_n, z_n) / \partial z \end{pmatrix}^{-1}$$

Die für die Bestimmung von  $B_r$  und  $P$  benötigten Magnetfelder und Vektorpotentiale werden durch die Unterprogramme GAPH bzw. SUPGEO und GEO nach <sup>3)</sup> berechnet:

(A3.15)

$$A = \frac{\mu_0}{\pi} \sqrt{\frac{a}{k^2 r}} \left( (1 - k^2/2) K - E \right) \quad k^2 = 4 \cdot ar / ((a+r)^2 + z^2)$$

(Dabei sind  $E$  und  $K$  die unten definierten elliptischen Integrale)

$$B_r = \frac{\mu_0 z}{2\pi r \sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left( -K + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right) \quad (A3.16)$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi \sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left( K + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right) \quad (A3.17)$$

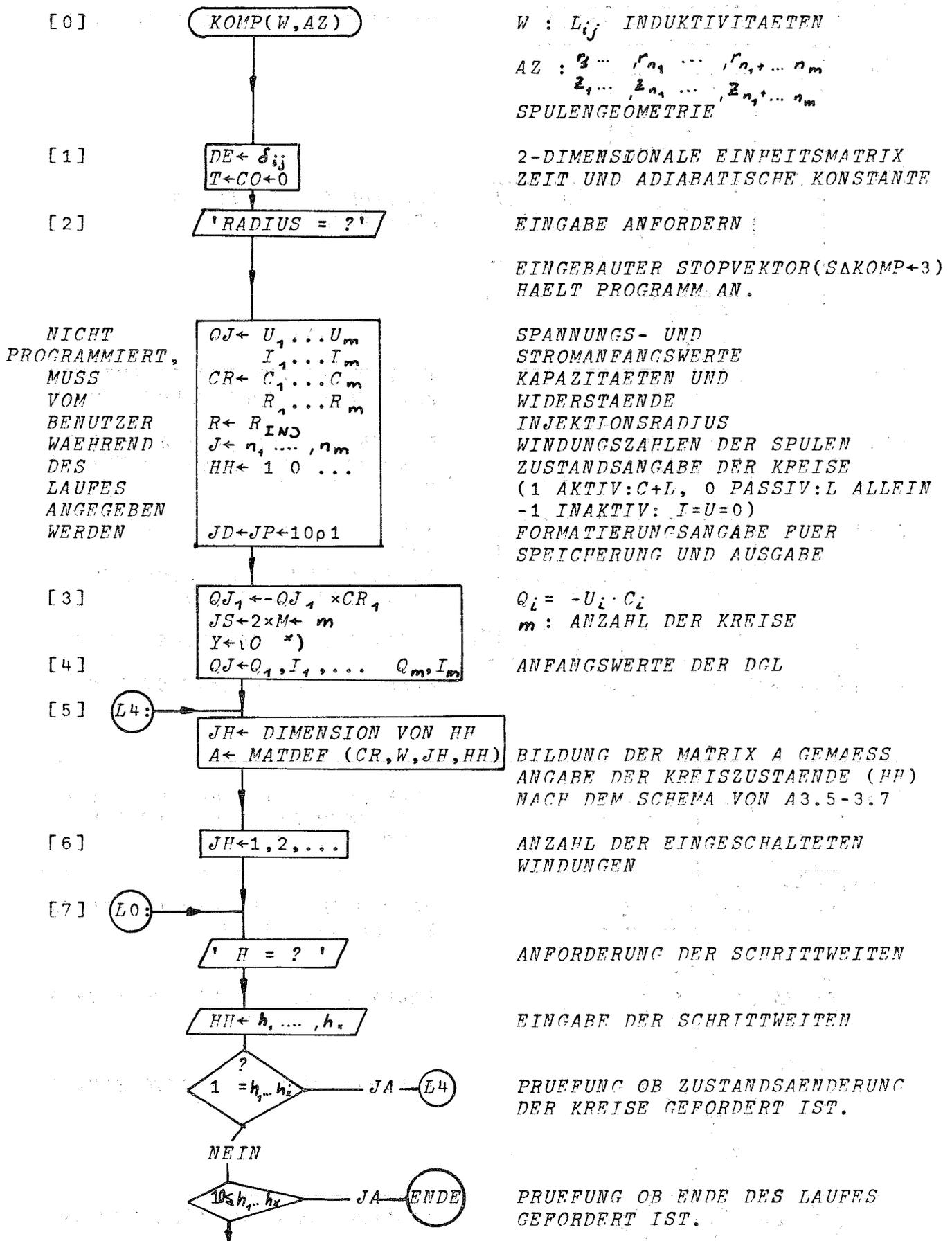
Die elliptischen Integrale sind hierbei durch

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (A3.18)$$

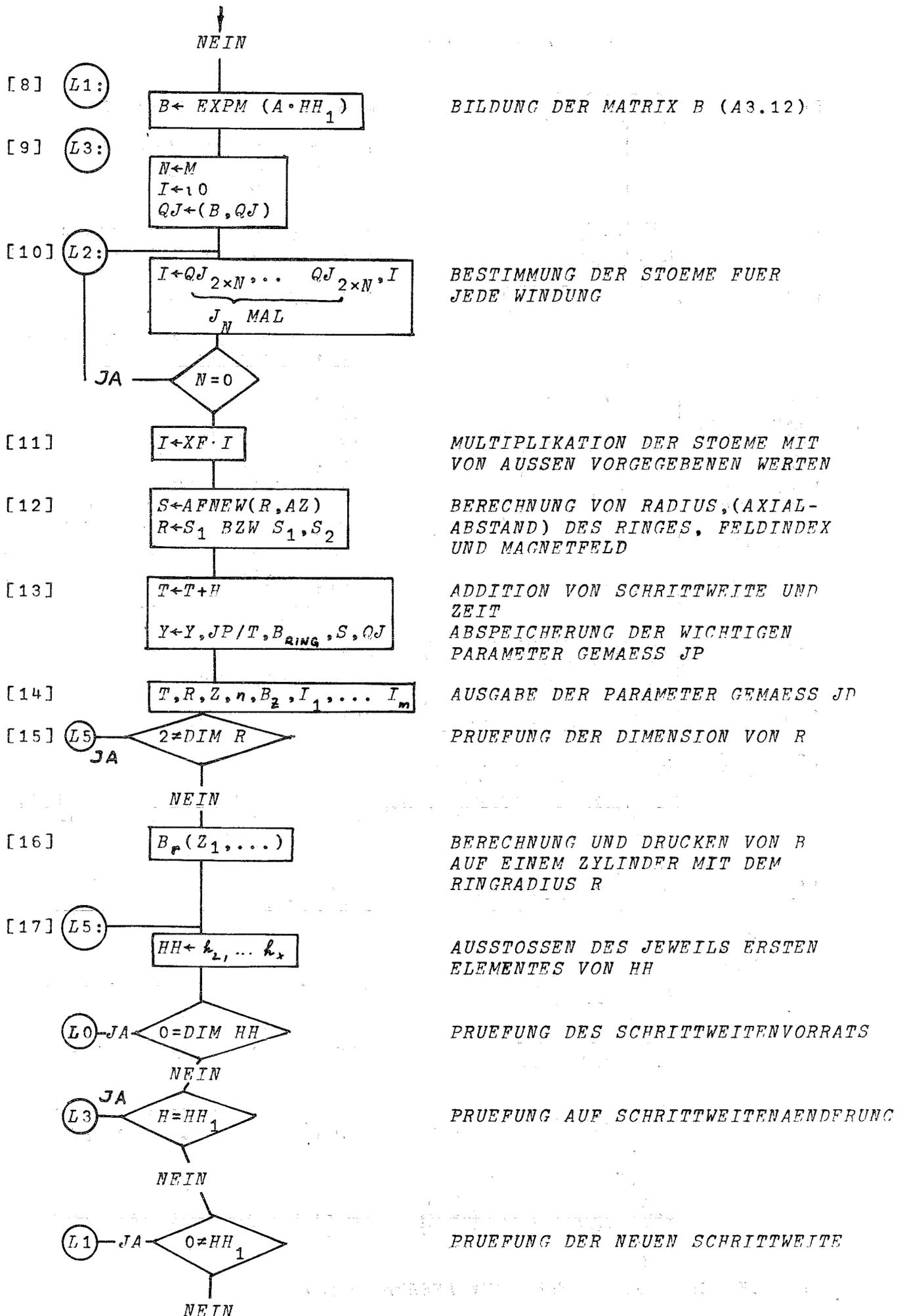
$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

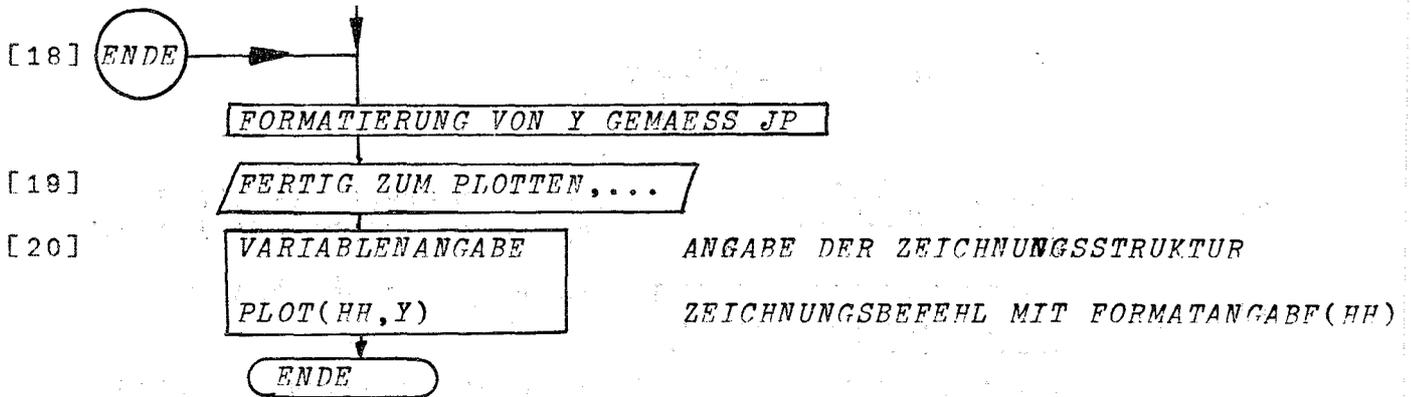
definiert und werden durch 17.3.34 und 17.3.36 aus <sup>13)</sup> approximiert.

DAS PROGRAMM KOMP



x) 10 ODER 0p... STEHT FUER DEN LEEREN VEKTOR.





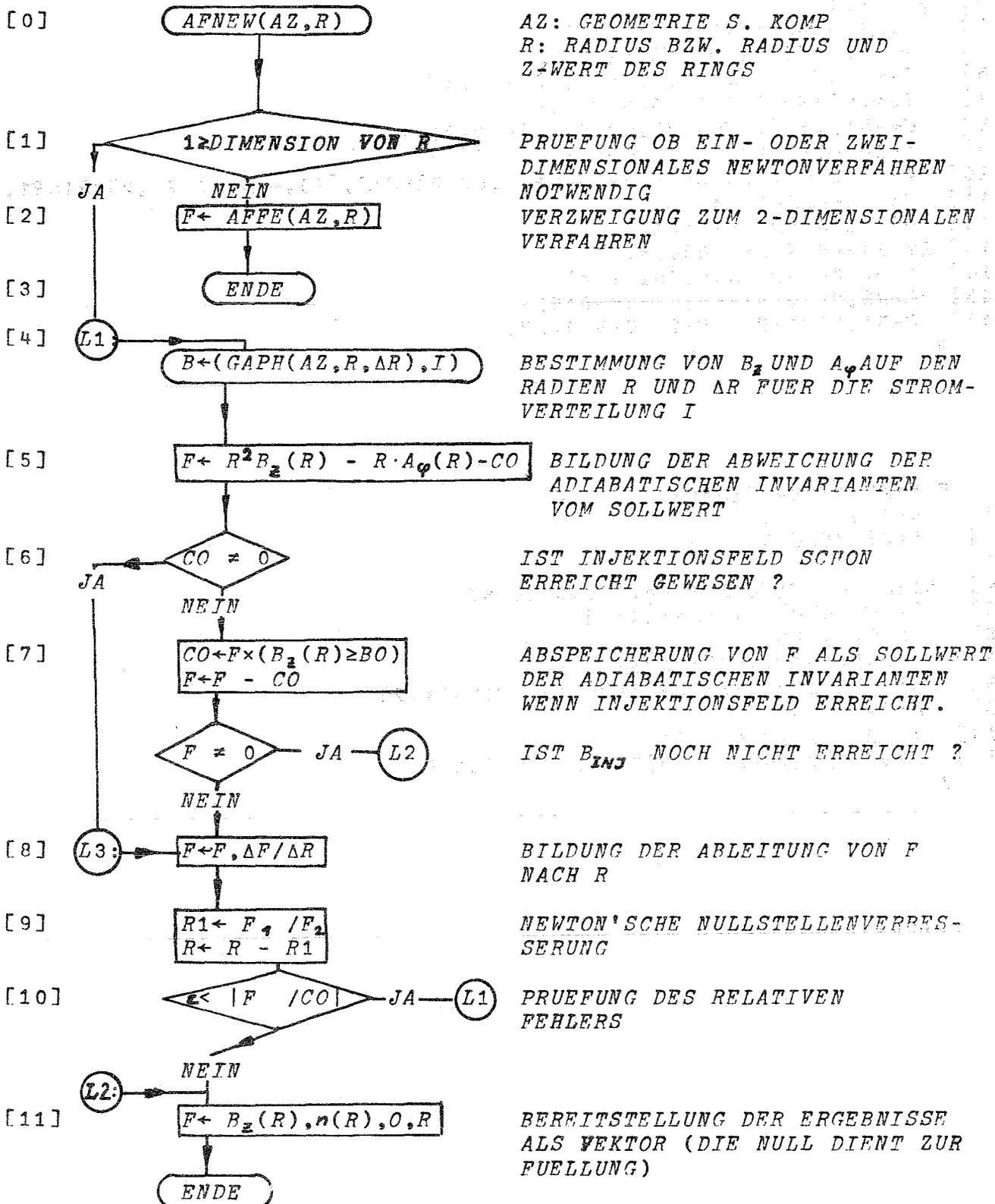
DAS PROGRAMM KOMP IN DER APL<sup>25)</sup>-VERSION:

```

∇ Y←W KOMP AZ;R;J;T;N;B;I;SJ;M;MQ;A;JH;CR;JS;H;HH;JJ;DE;JD
[1] DE← 2 2 ρ 1 0 , (T←CO+0), 1
[2] □←'RADIUS:R← ; STRUKTURVEKTOR: ←; SPANNUNG UND STROEMME: QJ←; KAP.
[3] Y←0ρJS+2×M←ρ, QJ[1;]←-QJ[1;]×CR[1;]
[4] QJ←,QQJ
[5] L4:A←CR[;JH] MATDEF W[1JH;1JH←ρHH]
[6] JH←1+/J[1MQ←ρHH]
[7] L0:→((10≤1+HH), 1=[ / |HH←, □, 0ρ□←'H=?' )/ENDE, L4
[8] L1:B←MDGL MATEXP A×H←1+HH
[9] L3:QJ[JJ]←B+.×QJ[JJ, I←0ρN←MQ]
[10] L2:→L2+0=N←N-1, 0ρI←(J[N]ρQJ[2×N]), I
[11] I←XF[JH]×I
[12] R←(ρ, R)↑S←AZ[;JH] AFNEW R
[13] Y←Y, JP/S←(T←T+H), (4.8E-7÷S[1]*2), S, QJ[2×15[M]
[14] □←JD/S
[15] →(2≠ρR)/L5
[16] □←AZ[;JH] GEOS(2, MGE)ρ(MGEρ1+R), (0.001×(MGE÷2)-1MGE)+-11+R
[17] L5:→((0=ρHH), (H=1+HH), 0≠1+HH←1+HH)/L0, L3, L1
[18] ENDE:Y←((1+(ρY)÷JP), JP)ρY, (JP←+/JP)ρ0
[19] ' FERTIG ZUM PLOTTEN, KOPFWECHSEL '
[20] HH PLOT Y[;□]
∇
  
```



DAS PROGRAMM AFNEW



▽ F←AZ AFFE RZ;R;Z;ZP;DZR;C;A;B;B1;R2;PAZ;AZP

- [1] C←2ρ10×MAG←1
- [2] B3←Φ(PAZ+ΦρAZ)ρ 0 0.0001
- [3] L1:R←1↑RZ
- [4] AZP←AZ-ZP←ΦPAZρ0,Z←<sup>-</sup>1↑RZ
- [5] →(EPS>+|C÷100,CO)/L2
- [6] B1←(AZP SUPGEO R,R1←R+0.0001)+.×I
- [7] B2←,((AZP-B3) SUPGEO R)+.×I
- [8] C←-B1[1;1],-CO--/B1[3 2 ;1]×(R×R),R
- [9] A←10000×C[1]+B2[1],B1[1;2]
- [10] A← 2 2 ρA,10000×C[2]-CO-(+/B2[3 2 ]×R×R,<sup>-</sup>1),+/B1[3 2 ;2]×R1×R1,<sup>-</sup>1
- [11] RZ←RZ+DZR←ΦC⊗A
- [12] →(10≥MAC←MAG+1)/L1
- [13] L2:B1←(AZP GEO R)+.×I
- [14] B2←(AZP GEO R+0.001)+.×I
- [15] F←RZ,B1,((B1-B2)×R×1000÷B1)
- [16] F←B1,((B1-B2)×R×1000÷B1),ΦRZ

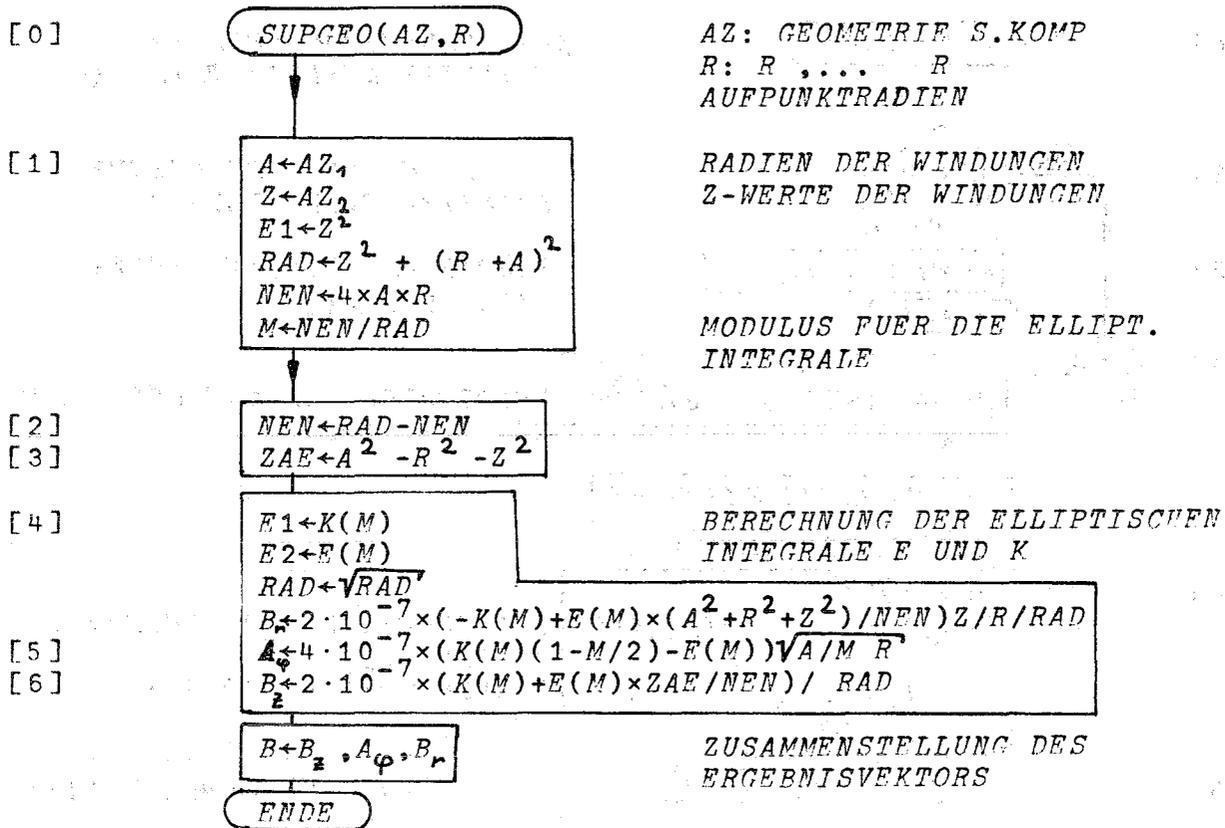
▽

▽ F←AZ AFNEW R;B;R1

- [1] →(1≥ρ,R)/L1
- [2] F←AZ AFNE R
- [3] →0
- [4] L1:B←(AZ GAPH R,R1←R+0.0001)+.×I
- [5] F←-CO+R×B[2;1]-R×B[1;1]
- [6] →(CO≠0)/L3
- [7] →(0≠F←F-CO←F×B[1;1]≥BO)/L2
- [8] L3:F←F,-10000×F+CO+R1×B[2;2]-R1×B[1;2]
- [9] R←R-R1←÷/F
- [10] →(EPS<|F[1]÷CO)/L1
- [11] L2;F←B[2],((B[1]-B[2])×R÷B[2]),0,R

▽

DAS PROGRAMM SUPGEO

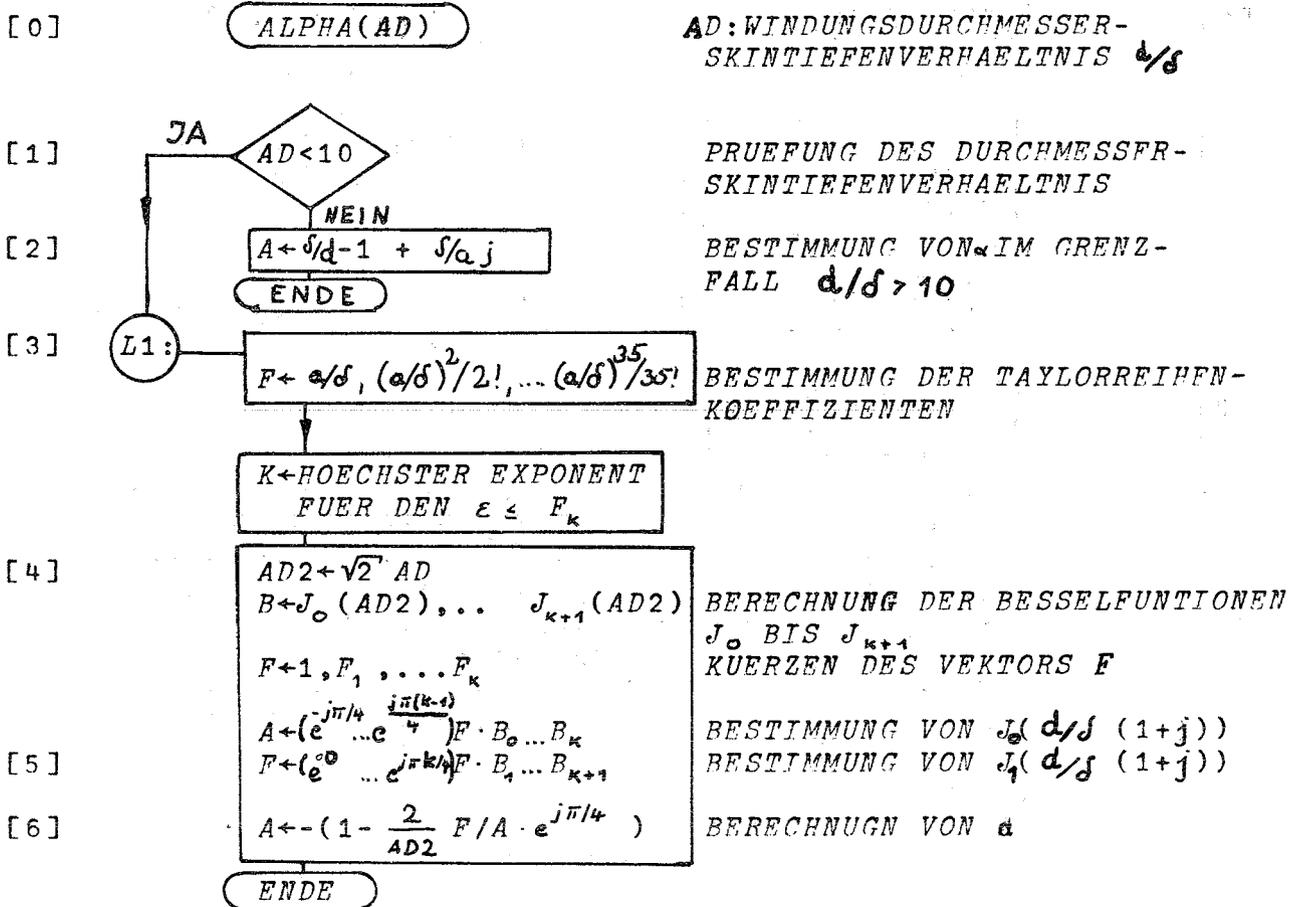


▽ B ← AZ SUPGEO R; RAD; NEN; ZAE; A; Z; N; E1; M; E2; B1

- [1] M ← (NEN + R · 4 × A) ÷ RAD ← ((N ← (ρR), ρZ) ρE1 + Z × Z + AZ[2;]) + ((R ←, R) · + A + AZ[1;])
- [2] NEN ← RAD - NEN
- [3] ZAE ← (-R × R) · + (B ← A × A) - E1
- [4] B ← (B1 ← (ρNEN), 1) ρ 2E<sup>-7</sup> × ((-E1 ← N + E1) + (E2 ← (-N) + E1 + T1 M) × ((N ρ 2 × B) - ZAE)
- [5] Z ← B1 ρ 4E<sup>-7</sup> × (((1 - M ÷ 2) × E1) - E2) ÷ (M × R · ÷ A) × 0.5
- [6] B ← 2 3 1 ρ B, Z, B1 ρ 2E<sup>-7</sup> × (E1 + E2 × ZAE ÷ NEN) ÷ RAD

▽

DAS PROGRAMM ALPHA



```

∇ A ← ALPHA AD; F; AD2; K
[1] → (AD < 10) / L1
[2] → 0 × A ← (-1 ÷ AD), ÷ AD
[3] L1: S Δ ALPHA ← 4 × 35 ≤ K ← + / EPS ≤ F + (AD × 1 35) ÷ ! 1 35
[4] A ++ / IXPX[; 8-8 | -2 + 1 K + 1] × (2, K + 1) ρ (F + 1, F[1 K]) × -1 + B ← (K + 1) BES AD2 ← AD ×
[5] F ++ / IXPX[; 8-8 | -3 + 1 K + 1] × (2, K + 1) ρ F × 1 + B
[6] A ← - 1 0 -2 ÷ AD2 ÷ F CT A CM IXPX[; 2]
∇
    
```

Symboltabelle

1) Indizes

- a Betatronschwingungsgrößen
- c Kompressionsgrößen
- e elektronische Größen
- i Injektionsgrößen
- I ionische Größen
- l Bezeichnung der azimuthalen Ordnung
- p Impulsgrößen
- r radiale Größen
- $\theta$  azimuthale Größen
- z axiale Größen

2) Kleinbuchstaben

- a radialer kleiner Ringradius
- b axialer kleiner Ringradius
- c Lichtgeschwindigkeit, Konstante
- d Leiterdurchmesser
- $e_0$  Elementarladung
- f Störung der Verteilungsfunktion
- g Verteilungsfunktion im Impulsraum
- h Verteilungsfunktion im radialen Betatronphasenraum
- i Stromdichte
- j imaginäre Einheit
- k Ableitung der Kreisfrequenz nach dem Impuls, Modulus der elliptischen Integrale
- l azimuthale Ordnungszahl (mode number)
- m Masse
- n Feldindex
- p Impuls
- r Radius
- s komplexe Integrationsvariable
- t Zeit
- x radiale Schwingungsvariable
- z axiale Schwingungsvariable

3) Großbuchstaben

- A Vektropotential, Koeffizientenmatrix eines DGL-Systems
- B Magnetfeld, Lösungsmatrix eines DGL-Systems
- C Kapazität, Konstante
- E elektrische Feldstärke, elliptisches Integral 2. Ordnung
- F<sub>0</sub> ungestörte Verteilungsfunktion
- H magnetische Feldstärke
- I Spulenstrom
- K elliptisches Integral 1. Ordnung, Kraft
- L Selbst- und Wechselinduktivitätskoeffizienten, Lagrangefunktion
- M magnetisches Moment
- N Teilchenzahl
- Q Verhältnis der transversalen Schwingungsfrequenz zur Umlauffrequenz (Q-Wert)
- R Ohmscher Widerstand, Radius
- S Frequenzstreuung
- U Spannung, Geometriefaktor
- V Geometriefaktor
- Z Ionenladungszahl

4) Griechische Buchstaben

- $\alpha$  Polarisierbarkeit
- $\beta$   $v/c$
- $\gamma$  Energie durch Ruhemasse
- $\delta$  Eindringtiefe
- $\epsilon$  Emittanz
- $\rho$  Radius, Ladungsdichte
- $\theta$  Azimutwinkel
- $\psi$  Lage des Inflektors im Bogenmaß
- $\phi$  Länge des Inflektors im Bogenmaß
- $\omega$  Kreisfrequenz
- $\sigma$  Leitfähigkeit
- $\lambda$  Wellenlänge
- $\Delta$  Deltaoperator, kleine Differenz

Literaturverzeichnis

- 1) L. Rosen, Relevance of Particle Accelerators to National Goals, 1971 Part. Acc. Conf., Chicago, Ill. S. 29
- 2) M.L.M. Boone, A.L. Wiley, Fast Neutrons and Mesons in Cancer Therapy, 1971 Part. Acc. Conf., Chicago, Ill. S. 36
- 3) L. Steinbock, Some Remarks on Future ERA Compressors, Proc. of the 8<sup>th</sup> Int. Conf. on High Energy Acc. CERN 1972 S. 478
- 4) M.J. Rhee, G.T. Zorn, Cylindrical Beam Studies for the Maryland ERA, Proc. of the 8<sup>th</sup> Int. Conf. on High Energy Acc. CERN 1972
- 5) H. Menke, K.-H. Schröder, Lebensdaueruntersuchungen an Hochstrom-Schaltfunkenstrecken, ETZ-A, Bd. 87 (1966) S. 323
- 6) H. Bruck, Accélérateurs circulaires de particules, Presses Universitaire de France, Paris, 1966, S. 82-87
- 7) P. Merkel, Zur Elektroneninflektion in den Elektronenring-kompressor, München IPP O/5 April 71
- 8) E.D. Courant, H.S. Snyder, Theory of the Alternating - Gradient Synchrotron, Annals of Physics, 3, 1-48, 1958
- 9) L.J. Laslett, An equivalent Distribution of Surface Currents for the Generation of a Prescribed Static Magnetic Field within an enclosed volume, Journ. of Appl. Phys. 37, No 6, S. 2361
- 10) L.D. Landau, Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 8 Akademie-Verlag Berlin, 1967, S. 227, S. 149
- 11) R.T. Avery and L.J. Laslett, Eddy currents, Landau-Damping coefficients and their Implications in Electronring Compressor Design, UCRL - 20684 (1971)
- 12) R.W. Landau, V.K. Neil, The Negative Mass Instability, UCRL 14406, 1965
- 13) M. Abramowitz, I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover (1964)
- 14) L.J. Laslett, V.K. Neil, A.M. Sessler, Transverse Resistive Instabilities of Intense Coasting Beams in Particle Accelerators, Rev. of Scientific Instr. 36, 4, 436-448 (1965)

- 15) K. Hübner, V.G. Vaccaro, Dispersion Relations and Stability of Coasting particles Beams, CERN-ISR-TH/70-44
- 16) D. Möhl, Transverse Beam Stability in the ERA Compressor: Rough Estimates on the Influence of Sidewalls with Azimuthal Slots, LBL-ERAN 183, (1971)
- 17) H. Krauth, Molecular Beam Apparatus for Defined Loading of the Electron Ring, Proc. of the 4<sup>th</sup> Work Meeting on ERAs, IPP, Garching, 1971, S. 86
- 18) G.S. Jones, Ion stripping in the ERA, LRL-ERAN-17 (unveröffentlicht), 1968
- 19) K.A. Reschetnikowa, V.P. Saranzew, Extraktion eines Elektronenringes aus dem Kompressor ("Adgesator") JINR-P9-4678, 1969
- 20) C. Pellegrini, A. Sessler, Lower Bounds on Ring Self-focussing so as to maintain ring Integrity During Spillout and Subsequent Acceleration UCRL-19398, 1969
- 21) V.D. Gitt, A.D. Kowalenko, P.I. Rulzew, V.P. Saranzew, Hochstrom-Induktions-Linearbeschleuniger im Nanosekundenbereich "SILUND" JINR - P9 - 5601, Dubna 1971 (russ.) KFK - tr. - 394 (dt. Übersetzung)
- 22) R. Avery, et al., The ERA 4 MeV Injector, LRL UCRL 20174, Feb. 1971
- 23) G. Fodor, Laplace Transforms in Engeneering, Academiai Kiado, Budapest
- 24) E. Erwe, Gew. Differentialgleichungen, BI 19, Mannheim 1964, S. 79
- 25) APL-Handbuch, IBM Form GH 12-1030-0