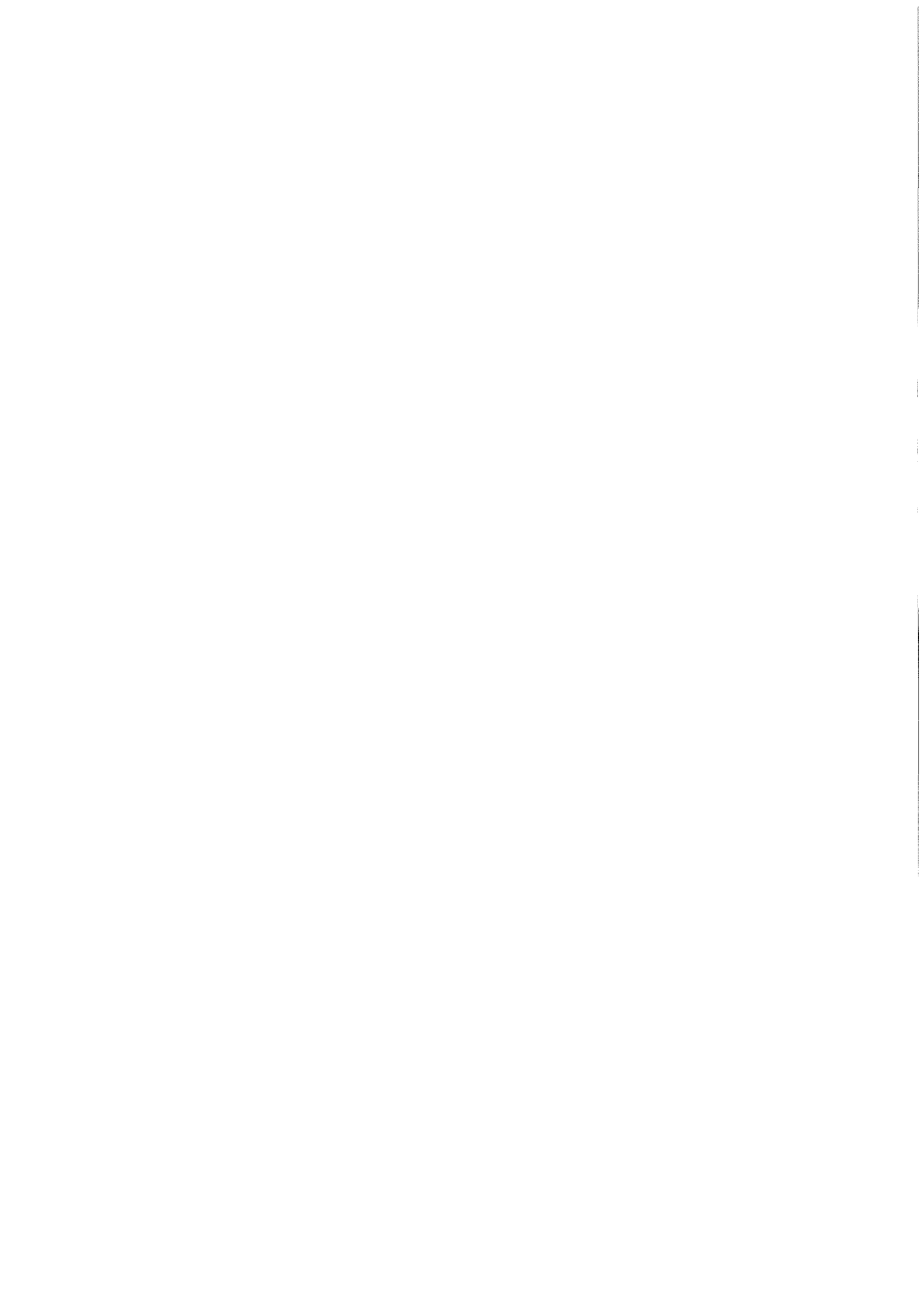


KfK 3713
März 1984

Wärmeübergang durch Naturkonvektion unter horizontalen, geheizten Platten

T. Schulenberg
Institut für Reaktorbauelemente
Projekt Schneller Brüter

Kernforschungszentrum Karlsruhe



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Reaktorbauelemente
Projekt Schneller Brüter

KfK 3713

Wärmeübergang durch Naturkonvektion
unter horizontalen, geheizten Platten

T. Schulenberg

Von der Fakultät für Maschinenbau der
Universität Karlsruhe genehmigte Dissertation

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

ABSTRACT

SCHULENBERG, THOMAS:

WÄRMEÜBERGANG DURCH NATURKONVEKTION UNTER HORIZONTALLEN, GEHEIZTEN PLATTEN

Es wird die stationäre, laminare Konvektionsströmung unter einem horizontalen unendlichen Streifen und unter einer horizontalen runden Platte berechnet, deren Unterseiten eine konstante Temperatur besitzen oder einen konstanten Wärmestrom abgeben. Diese Strömung wird durch die Inhomogenität der Geschwindigkeit und der Temperatur an den Plattenkanten angetrieben. In bisherigen Untersuchungen wurde nicht erkannt und folglich auch nicht berücksichtigt, daß es sich hierbei um ein elliptisches Problem handelt, das mit der Grenzschichttheorie allein nicht gelöst werden kann.

In dieser Arbeit wird eine angepaßte asymptotische Entwicklung zur Lösung der Fragestellung angewandt. Hierzu wird die Konvektionsströmung aus einer durch die Potentialtheorie oder durch die Stokes'sche Theorie bestimmten Außenströmung um die Platte und einer inneren Grenzschichtströmung an der Platte aufgebaut. Beide Strömungsformen werden mit Hilfe einer Energiebilanz in der Umgebung des Staupunkts miteinander verknüpft.

Das Verfahren ist iterativ, aber rein analytisch. Es beschränkt sich zunächst auf die Grenzfälle sehr kleiner und sehr großer Prandtl-Zahlen. Aus diesen Grenzfällen werden daraufhin Korrelationen für den Wärmeübergang bei beliebigen Prandtl-Zahlen erstellt. Im Gegensatz zu früheren Näherungslösungen benötigen diese Ergebnisse keinerlei empirische Ansätze für die Grenzschichtprofile der Geschwindigkeit oder der Temperatur.

ABSTRACT

SCHULENBERG, THOMAS:

NATURAL CONVECTION HEAT TRANSFER BELOW DOWNWARD FACING HORIZONTAL SURFACES

The laminar steady-state natural convection below an infinite strip and below a circular plate, heated at their bottom sides, has been calculated analytically for a uniform surface temperature as well as for a uniform surface heat flux. This convection is driven by the non-uniform temperature distribution near the edges of the plate. This particular feature makes the problem a basically elliptic one, a fact that was not taken into account in earlier studies. In contrast to the flow near inclined heated plates the horizontal situation cannot be described by a boundary layer theory alone.

Similarity solutions have been obtained employing the method of matched asymptotic expansions. A potential flow or a Stokes' flow with an unknown upstream velocity is taken as the outer expansion and a boundary layer flow as the inner expansion. Both expansions are matched by an energy balance in the region near the stagnation point at the plate center. In this way the unknown upstream velocity is fixed.

This iterative procedure is first restricted to the limiting cases of low and high Prandtl numbers. Then an interpolation of these asymptotes yields heat transfer correlations for arbitrary Prandtl numbers. In comparison to earlier approximations these results are independent of any empirical boundary layer profiles and are based on experimental data to a very limited extent.

Übersicht:

Seite

1.	Einleitung	1
2.	Problemstellung	6
3.1	Der Grenzfall sehr kleiner Prandtl-Zahlen	7
3.2	Der Grenzfall sehr großer Prandtl-Zahlen	19
3.3	Wärmeübergang bei beliebigen Prandtl-Zahlen	30
4.	Diskussion der Ergebnisse	31
5.	Schlußfolgerungen	38
	Nomenklatur	39
	Literatur	41

1. Einleitung

An der Unterseite horizontaler, geheizter Platten kann im Gegensatz zu vertikalen Platten infolge der stabilen Temperaturschichtung nur wenig Wärme durch freie Konvektionsströmung abgeführt werden. Eine genaue Kenntnis des Wärmeübergangs ist daher von großem Interesse. Ein aktuelles technisches Beispiel dafür sind reaktorinterne Kernauffangvorrichtungen in flüssigmetallgekühlten Schnellen Brutreaktoren. Einige Konstruktionstypen dieser Kernauffänger entsprechen idealisiert einer horizontalen Platte, die unterhalb des Reaktorkerns angeordnet ist, um im Fall eines hypothetischen schweren Kernschmelzunfalls die entstehenden Kernfragmente aufnehmen zu können /1/. Die Nachwärme dieser Kernfragmente kann sowohl oberhalb als auch unterhalb der Kernauffangplatte durch Naturkonvektion abgeführt werden. Zum Wärmeübergang in Flüssigmetallen unterhalb solcher Platten existieren jedoch bis heute keine hinreichend genauen theoretischen Vorhersagen.

Die hier untersuchte freie Konvektionsströmung unter horizontalen, geheizten Platten unterscheidet sich wesentlich von derjenigen oberhalb geheizter Platten. Im letzteren Fall ist die Temperaturschichtung instabil, es entsteht eine Konvektionsströmung von den Plattenkanten zur Plattenmitte, die an einer kritischen Stelle ablöst. Im Gegensatz dazu entsteht an der Unterseite horizontaler Platten eine Staupunkts-Strömung von der Plattenmitte zur Plattenkante. Die Temperaturschichtung ist stabil, so daß die Strömung selbst bei hohen Heizraten noch laminar ist. Der Wärmeübergangskoeffizient ist in diesem Fall in einem weiten Bereich um die Plattenmitte konstant; mit Annäherung an die Plattenkante nimmt er zu, so daß bei gleichförmig geheizter Platte die Plattenmitte der heißeste Bereich ist.

Zu diesem Problem wurden bereits eine Vielzahl von experimentellen und theoretischen Untersuchungen veröffentlicht. Weise /2/ demonstrierte bereits 1935 das oben beschriebene, qualitative Verhalten der Konvektionsströmung anhand einer Schlierenaufnahme an einer geheizten, quadratischen Platte in Luft. Saunders,

Fishenden und Mansion /3/ veröffentlichten im gleichen Jahr quantitative Meßergebnisse für den lokalen Wärmeübergangskoeffizienten unter einer isothermen, rechteckigen Platte in Luft. Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile der Konvektionsströmung, ebenfalls unter einer isothermen quadratischen Platte in Luft, wurden erstmals 1940 von Kraus /4/ bestimmt.

Diese ersten Experimente deuteten bereits darauf hin, daß der Wärmeübergang durch eine Grenzschicht-Strömung beschrieben werden kann. Die horizontale Geschwindigkeitskomponente wird sowohl an der Platte als auch außerhalb der Grenzschicht sehr klein. Eine Strömung außerhalb der Grenzschicht erschien daher vernachlässigbar, so daß für theoretische Untersuchungen allein die Grenzschichtapproximationen der Impuls- und Energiegleichung verwendet wurden. Nachdem Gill, Zeh und del Casal /5/ 1965 zeigten, daß diese Grenzschichtgleichungen mit einem Ähnlichkeitsansatz zwar für die Konvektion oberhalb geheizter Platten, nicht aber unterhalb horizontaler Platten lösbar sind, wurden Lösungen durch verschiedene Varianten eines Integralverfahrens approximiert.

Dazu werden die Grenzschichtgleichungen integriert, wobei Geschwindigkeits- und Temperaturfelder in den jeweiligen Integranden durch Ansatzfunktionen mit noch freien Parametern angenähert werden, zu denen auch die Grenzschichtdicke δ zählt. Außerhalb der Grenzschicht wird angenommen, daß die horizontale, plattenparallele Geschwindigkeit verschwindet und daß die Flüssigkeit isotherm ist. Es entsteht so ein System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen für die freien Parameter, das analytisch oder numerisch leicht lösbar ist.

1969 veröffentlichten Singh, Birkebak und Drake /6/ erstmals eine derartige Näherungslösung für einen isothermen unendlichen Streifen sowie eine runde und eine quadratische Platte, allerdings für den Spezialfall, daß die Prandtl-Zahl von der Ordnung eins ist. Hier, wie auch in späteren Arbeiten, bestand ein wesentliches Problem darin, eine Randbedingung für die Grenzschichtdicke an den Plattenkanten zu finden. Singh, Birkebak und

Drake wählten $\delta = 0$ als Randbedingung, fanden im Bereich um die Plattenkante jedoch keine befriedigende Übereinstimmung mit älteren Experimenten von Saunders, Fishenden und Mansion /3/.

Noch im gleichen Jahr erweiterten Singh und Birkebak /8/ die zweidimensionale Lösung für den isothermen, unendlichen Streifen auf den Prandtl-Bereich $0.025 < Pr < \infty$ und verbesserten die Randbedingung an der Plattenkante dadurch, daß sie dort die horizontale Ableitung der Grenzschichtdicke unendlich werden ließen. Das führt bei endlichen Prandtl-Zahlen zu einer endlichen Grenzschichtdicke an der Kante. Zur Berechnung der Integranden dieses Näherungsverfahrens wählten Singh und Birkebak Geschwindigkeits- und Temperaturprofile der Form

$$\frac{u}{u_{\text{Max}}} = \left(\frac{z}{\delta}\right) \left(1 - \frac{z}{\delta}\right)^2, \quad (1)$$

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} = \left(1 - \frac{z}{\delta}\right)^2,$$

wobei u die horizontale Geschwindigkeit, z der Wandabstand und T die Temperatur bezeichnet.

Unabhängig davon versuchten Clifton und Chapman /9/ das Problem dieser Randbedingung für die Grenzschichtdicke dadurch zu lösen, daß sie eine kritische Grenzschichtdicke an der Plattenkante mit Hilfe eines Prinzips der minimalen mechanischen Energie einführen.

Um den offensichtlich entscheidenden Bereich um die Plattenecke näher zu untersuchen, führten Birkebak und Abdulkadir 1970 /10/ ein Experiment mit einer quadratischen Platte in Wasser durch und erhielten in der Nähe der Kante höhere Wärmeübergangskoeffizienten als Singh et al. /6/, ansonsten aber bereits eine gute Übereinstimmung mit diesen theoretischen Vorhersagen.

Messungen von Aihara, Yamada und Endo 1972 /11/ an einem simuliert unendlich langen Streifen in Luft ergaben, daß Geschwindigkeits- und Temperaturprofile im Gegensatz zu Singh et al. /6/ an

verschiedenen horizontalen Positionen unterhalb der Platte unterschiedliche Form haben, und insbesondere an den Plattenkanten nicht mehr den Ansätzen (1) entsprechen. Trotzdem stimmten die erhaltenen Wärmeübergangskorrelationen gut mit den theoretischen Ergebnissen /8/ überein, wodurch bestätigt wird, daß die Profilkfunktionen dieser Integralverfahren zumindest bei mäßigen Prandtl-Zahlen das Ergebnis nur wenig beeinflussen. Im Gegensatz zu früheren Messungen wurde bei diesem Experiment ferner beobachtet, daß die Anströmung unterhalb der Platte instabil sein kann, die Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile innerhalb der Grenzschicht waren von dieser Instabilität jedoch nicht betroffen.

Fujii, Honda und Morioka /12/ veröffentlichten 1973 eine umfassende Zusammenstellung der Wärmeübergänge durch freie Konvektion unter einem gleichförmig geheizten, unendlichen Streifen, einer runden und einer quadratischen Platte, die mit einem Integralverfahren mit der gleichen Randbedingung für δ wie von Singh und Birkebak /8/, allerdings mit Ansatzfunktionen der Art

$$\frac{u}{u_{\text{Max}}} = \left(\frac{z}{\delta}\right) \left(1 - \frac{z}{\delta}\right)^3,$$
$$\frac{T - T_w}{q_w \delta / \lambda} = \left(1 + \frac{z}{\delta}\right) \left(1 - \frac{z}{\delta}\right)^3 \quad (2)$$

berechnet wurden (q_w = Wandwärmestromdichte, λ = Wärmeleitfähigkeit). Die Ergebnisse wurden angegeben für den Bereich $0,001 < Pr < \infty$ und umfassen damit auch Prandtl-Zahlen des flüssigen Natriums, die von der Größenordnung 0.005 sind. Da weder bei mäßigen Prandtl-Zahlen entsprechende Profile unter gleichförmig geheizten Platten gemessen wurden, noch bei sehr kleinen Prandtl-Zahlen die verwendeten Profile der Vorstellung entsprechen, daß sich Geschwindigkeits- und Temperaturgrenzschichtdicke um einen Faktor \sqrt{Pr} unterscheiden /13/, sind diese theoretischen Ergebnisse fraglich.

Einen entsprechenden Hinweis darauf gibt ein Experiment von Davies und Sheriff (1980) /14/, die in Natrium an einem horizontalen, gleichförmig geheizten, simuliert unendlichen Streifen

einen um 20 % höheren Wärmeübergangskoeffizient ermittelten als von Fujii et al. /12/ vorausgesagt wurde.

Die Untersuchungen der Konvektion in Flüssigkeiten mit mäßigen Prandtl-Zahlen können damit zumindest bei isothermen Platten als weitgehend konsistent betrachtet werden. Bei sehr kleinen Prandtl-Zahlen sind dagegen auf Grund der überstrapazierten Ansatzfunktionen (2) und der weiterhin zweifelhaften Randbedingung der Grenzschichtdicke an den Plattenkanten die vorhandenen Korrelationen fraglich und stimmen nicht befriedigend mit Experimenten überein. Bei diesem Sachverhalt stellte sich die Aufgabe, den Wärmeübergang unter horizontalen Platten speziell für den Fall extremer Prandtl-Zahlen neu zu berechnen, ohne auf empirische Profilkfunktionen zurückzugreifen.

2. Problemstellung

Während an geneigten oder über horizontalen geheizten Platten Geschwindigkeits- und Temperaturprofile geometrisch ähnlich sind und damit analytische Lösungen der Grenzschichtgleichungen existieren, ist es verwunderlich, daß eine solche Lösung, wie eingangs erwähnt, unterhalb von horizontalen, geheizten Platten nicht möglich ist. Die folgende Überlegung kann diesen Sachverhalt plausibel erklären.

Abgesehen von sehr flachen Neigungswinkeln ist der Wärmeübergang an geneigten, erwärmten Platten nur abhängig von der Entfernung von der unteren, angeströmten und somit stromauf gelegenen Plattenkante, nicht jedoch von der oberen Kante bzw. von der gesamten Plattengröße. Unterhalb von horizontalen geheizten Platten ist dagegen selbst im Staupunkt in der Plattenmitte der Wärmeübergangskoeffizient von der gesamten Plattenbreite abhängig und damit von einem Ereignis, das erst weiter stromab stattfindet. Die Grenzschichtgleichungen, die bisher zur Berechnung ausschließlich verwendet wurden, sind aber parabolische Differentialgleichungen. Sie vernachlässigen daher alle Effekte, die sich längs der Wand stromauf auswirken. Damit schließen sie auch die Rückwirkung der Kantenumströmung aus, die die Konvektionsströmung verursacht; unter einer unendlich großen, erwärmten horizontalen Platte kann sich keine freie Konvektionsströmung ausbilden. Mit den Grenzschichtgleichungen allein kann der Wärmeübergang unter einer horizontalen Platte daher gar nicht berechnet werden.

Diese Überlegung erklärt auch die großen Schwierigkeiten in den oben dargestellten Integralverfahren, eine physikalisch nicht vorhandene Randbedingung für die Grenzschichtdicke an der Plattenkante zu finden. Um überhaupt eine Konvektionsströmung zu erhalten, wurde so versucht, das zu kompensieren, was durch die Grenzschichtapproximation unzulässigerweise vernachlässigt wurde.

Da es nicht möglich war, die Impuls- und Energiegleichung ohne jegliche Grenzschichtapproximationen für den gesamten Bereich analytisch zu lösen, wurde das vorliegende iterative Verfahren

entwickelt. Dieses Verfahren zeichnet sich dadurch aus, daß es zumindest noch im Ansatz für die Grundströmung eine elliptische Differentialgleichung benutzt und damit stromauf wirkende Effekte berücksichtigt.

3.1 Der Grenzfall sehr kleiner Prandtl-Zahlen

Um den Geometrieinfluß in Grenzen zu halten, wird die freie Konvektionsströmung unter einem horizontalen, unendlich langen Streifen der Breite $2R$ und unter einer horizontalen, runden Platte vom Radius R berechnet. Es wird dabei angenommen, daß auf deren Oberfläche eine konstante, gleichförmige Wärmestromdichte q_w oder eine konstante Temperatur T_w vorgegeben sind. Es werden zunächst ausschließlich Flüssigkeiten mit kleinen Prandtl-Zahlen, wie etwa Flüssigmetalle, betrachtet; ferner soll die Strömung stationär und laminar sein und der Temperaturabfall soll in einer Grenzschicht stattfinden.

Ausgangsgleichungen für die analytische Berechnung bilden die Kontinuitätsgleichung und die stationären Impuls- und Energiegleichungen. Sie lauten in den in Abb. 1 skizzierten Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten

(3)

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} = 0 ,$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + n \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] , \quad (4)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + n \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] - \alpha g (T - T_\infty) , \quad (5)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + n \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] , \quad (6)$$

mit $n = 0$ für die zweidimensionale Strömung unter einem unendlich langen Streifen,

$n = 1$ für die dreidimensionale, rotationssymmetrische Strömung unter einer runden Platte.

Zur übrigen Nomenklatur siehe Seite 39.

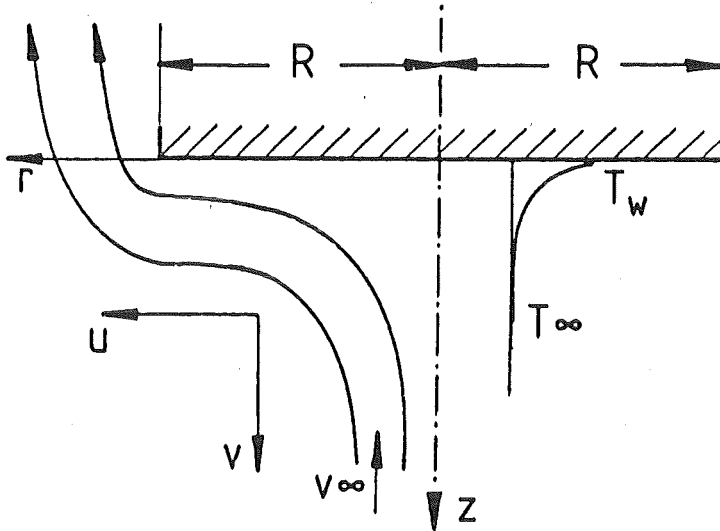


Abb. 1 Schematische Darstellung der Konvektionsströmung und Wahl des Koordinatensystems

Die Kontinuitätsgleichung (3) kann durch eine Stromfunktion ψ erfüllt werden, so daß gilt

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial r} - n \frac{\psi}{r}, \quad (7)$$

Ferner wird aus den Gleichungen (4) und (5) der Druck eliminiert, indem eine Wirbelfunktion

$$\Omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r}, \quad (8)$$

eingeführt wird.

Durch Übergang auf dimensionslose Koordinaten, mit

$$\begin{aligned}
 \xi &= \frac{r}{R}, & \eta &= \frac{z}{R} \sqrt{Pe}, \\
 M &= \frac{\psi}{v_{\infty} R}, & \omega &= \frac{R^2}{\kappa} \frac{A}{Pe^{3/2}} \Omega, \\
 Pe &= \frac{v_{\infty} R}{\kappa}, & Pr &= \frac{\nu}{\kappa}, \\
 \theta &= \frac{T - T_{\infty}}{T_W - T_{\infty}}, & A &= \frac{Pe^{5/2}}{Gr Pr^2}, & Gr &= \frac{\alpha g (T_W - T_{\infty}) R^3}{\nu^2}
 \end{aligned} \tag{9}$$

bei einer isothermen Platte, bzw.

$$\theta = \sqrt{Pe} \frac{(T - T_{\infty}) \lambda}{q_W R}, \quad A = \frac{Pe^3}{Gr^* Pr^2}, \quad Gr^* = \frac{\alpha g q_W R^4}{\lambda \nu^2} \tag{10}$$

bei einer gleichförmig geheizten Platte, erhält man das Gleichungssystem

$$\frac{1}{Pe} \left[\frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} + n \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{M}{\xi} \right) \right] + \frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2} = \frac{\omega}{A \sqrt{Pe}}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} - n \frac{\omega}{\xi} \right) - \left(\frac{\partial M}{\partial \xi} + n \frac{M}{\xi} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \\
 = \frac{Pr}{\sqrt{Pe}} \left\{ \frac{1}{Pe} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + n \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\omega}{\xi} \right) \right] + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right\} + \frac{1}{\sqrt{Pe}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi},
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial M}{\partial \xi} + n \frac{M}{\xi} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{Pe}} \left\{ \frac{1}{Pe} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + n \frac{1}{\xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right\}, \tag{13}$$

In dieser Darstellung ist die Konvektionsströmung von drei dimensionslosen Kennzahlen abhängig:

eine Peclet-Zahl, die eine zunächst noch unbekannte Anströmgeschwindigkeit v_{∞} unterhalb der Platte enthält, eine Grashof-Zahl, Gr bzw. Gr^* , die die Auftriebskräfte enthält, und die Prandtl-Zahl. Da sich die Anströmgeschwindigkeit v_{∞} durch

Auftriebskräfte innerhalb der Grenzschicht von selbst einstellen wird, sind die Peclet-Zahl und die Grashof-Zahl voneinander abhängig.

In den folgenden iterativen Lösungsverfahren wird zunächst die Peclet-Zahl als unabhängig betrachtet. Bei kleinen Prandtl-Zahlen ist eine Reibungsgrenzschicht vernachlässigbar, da der diffusive Term der Wirbeltransportgleichung (12) verschwindet. Daher wird eine Potentialströmung mit der Anströmgeschwindigkeit v_∞ als Startlösung der Iteration gewählt. Sie ergibt sich aus der Potentialgleichung (11) mit $\omega = 0$. Setzt man diese Lösung in die Energiegleichung (13) ein, so erhält man den Wärmeübergang durch Zwangskonvektion einer querangeströmten Platte. Werden die daraus resultierenden Temperaturen und die bereits bekannte Stromfunktion in die Wirbeltransportgleichung (12) eingesetzt, so erhält man eine Wirbelfunktion, die eingesetzt in die Potentialgleichung (11) eine neue Stromfunktion $M^{(1)}$ ergibt. Die Forderung, daß die neue Stromfunktion $M^{(1)}$ den gleichen konvektiven Wärmetransport erzeugt wie die ursprüngliche Stromfunktion M , legt die Konstante A in Gleichung (11) fest. Die Definition von A in Gleichung (9) bzw. (10) ergibt dann den gesuchten Zusammenhang zwischen der Peclet-Zahl und der Grashof-Zahl und damit den Wärmeübergang durch freie Konvektion.

Die Potentialströmung und damit die Startlösung der Iteration, ist also eine Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{Pe} \left[\frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} + n \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{M}{\xi} \right) \right] + \frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2} = 0, \quad (14)$$

mit den dimensionslosen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \eta = 0: & \quad M = 0, \\ \eta \rightarrow \infty: & \quad \frac{\partial M}{\partial \xi} + n \frac{M}{\xi} = 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Nach Milne-Thomson /15/ erhält man die Lösung der Potentialgleichung (14) für einen querangeströmten unendlichen Streifen als Grenzfall der umströmten Ellipse. Damit berechnet sich die Stromfunktion M als Realteil der komplexen Funktion

$$M = \operatorname{Re} \sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad (16)$$

wobei die komplexe Größe ζ als

$$\zeta = \xi + i \eta / \sqrt{\operatorname{Pe}} \quad (17)$$

definiert ist.

Die Potentialströmung um eine runde Platte kann dem Buch von Kotschin, Kibel und Rose /16/ entnommen werden. Wird eine Potentialfunktion ϕ derart gebildet, daß zwischen ϕ und M der Zusammenhang

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = -\sqrt{\operatorname{Pe}} \frac{\partial M}{\partial \eta}, \quad (18)$$

$$\sqrt{\operatorname{Pe}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{\partial M}{\partial \xi} + \frac{M}{\xi}$$

besteht, so erfüllt diese Potentialfunktion die Gleichung (14). Die Kontinuitätsgleichung (3) ergibt dann für ϕ die Laplace'sche Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \operatorname{Pe} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \phi = 0, \quad (19)$$

wobei die Randbedingungen (15) in

$$\eta = 0 : \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0,$$

$$\eta \rightarrow \infty : \phi = \eta / \sqrt{\operatorname{Pe}} \quad (20)$$

umgeformt werden können. Die Lösung dieses Randwertproblems wird als

$$\phi = \frac{\eta}{\sqrt{\operatorname{Pe}}} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\mu} - \operatorname{arcctg} \mu \right) \right\} \quad (21)$$

angegeben, wobei μ^2 die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{\xi^2}{1+\mu^2} + \frac{\eta^2}{Pe \mu^2} = 1 \quad (22)$$

ist.

Die Lösungen (16) und (21) können in eine Potenzreihe um den Staupunkt in der Plattenmitte entwickelt werden. In der kleinsten möglichen Ordnung in ξ und η , die noch den Einfluß der endlichen Plattenlänge enthält, erhält man unter Berücksichtigung der Umformungen (18) die Stromfunktion M als

$$M = (m + \frac{2}{\pi} n) \frac{1}{\sqrt{Pe}} \xi \eta (1 + \frac{1}{2} \xi^2) \quad (23)$$

mit $m = n-1$. Die folgenden Rechnungen beschränken sich auf diese Ordnung. Man erhält so eine lokal ähnliche Lösung für den Bereich um den Staupunkt, der allerdings, wie in Abschnitt 4 gezeigt werden wird, bei hohen Grashof-Zahlen nahezu die gesamte Platte erfaßt.

Nahe der Plattenoberfläche, also für $\eta \lesssim 1$, können die Gleichungen (11) bis (13) für große Peclet-Zahlen durch eine Grenzschichtapproximation vereinfacht werden. Unter Vernachlässigung von Termen mit $1/Pe$ erhält man das Gleichungssystem

$$\frac{\partial M}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial M}{\partial \xi} + n \frac{M}{\xi} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{Pe}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} - n \frac{\omega}{\xi} \right) - \left(\frac{\partial M}{\partial \xi} + n \frac{M}{\xi} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{Pe}} \left[Pr \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right], \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2} = \frac{\omega}{A\sqrt{Pe}} \quad (26)$$

Als Randbedingung ist zu fordern, daß gilt

$$\begin{aligned} \eta = 0: \quad M &= 0, \\ \omega &= 0, \\ \Theta &= 1 \quad \text{bei isothermer Platte,} \end{aligned}$$

bzw. $\partial\Theta/\partial\eta = -1$ bei gleichförmig geheizter Platte, (27)

$$\begin{aligned} \eta \rightarrow \infty: \quad \partial M/\partial\eta &= 0, \\ \omega &= 0, \\ \Theta &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Die Randbedingung $\omega=0$ für $\eta=0$ beinhaltet, daß die Plattenoberfläche schubspannungsfrei ist, daß also für den Grenzfall kleiner Prandtl-Zahlen die Reibungsgrenzschicht vernachlässigt wurde.

Die Lösung (23) wird nun in die Energiegleichung (24) eingesetzt, die durch einen Potenzreihenansatz der Form

$$\theta(\xi, \eta) = \theta_0(\eta) + \xi^2 \theta_1(\eta), \quad (29)$$

gelöst wird. Setzt man diese Bedingung in Gleichung (24) ein und ordnet sie nach Potenzen von ξ , so folgen die beiden folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\theta_0'' + \left(m + \frac{4}{\pi} n\right) \eta \theta_0' = 0, \quad (30)$$

$$\theta_1'' + \left(m + \frac{4}{\pi} n\right) \eta \theta_1' - \left(2m + \frac{4}{\pi} n\right) \theta_1 = - \left(\frac{3}{2} m + \frac{4}{\pi} n\right) \eta \theta_0'. \quad (31)$$

Die Lösung zu Gleichung (30) ist

$$\theta_0 = 1 - \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} m + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} n\right) \int_0^\eta \exp \left[- \left(\frac{m}{2} + \frac{2n}{\pi}\right) \eta^2 \right] d\eta \quad (32)$$

für den Fall der isothermen Platte. Bei gleichförmig geheizter Platte ergibt sich

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} m + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} n - \int_0^n \exp \left[- \left(\frac{m}{2} + \frac{2n}{\pi} \right) \eta^2 \right] d\eta . \quad (33)$$

Beide Funktionen sind in den Abbildungen 2 a) und 3 a) dargestellt.

Die Funktion θ_0 kann nun in Gleichung (31) eingesetzt werden. Die Lösung dieser Gleichung erfolgte numerisch mit einem einfachen Differenzenverfahren. Das Ergebnis ist in den Abbildungen 2 b) und 3 b) dargestellt.

Werden die Stromfunktion M und die Temperatur θ in die Wirbeltransportgleichung (25) eingesetzt, so erhält man mit dem Ansatz

$$\omega(\xi, \eta) = \xi \cdot \omega_1(\eta) \quad (34)$$

die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\text{Pr} \omega_1'' + \left(m + \frac{4}{\pi} n \right) \eta \omega_1' - m \omega_1 = - 2\theta_1 . \quad (35)$$

Diese Gleichung wurde für die Prandtl-Zahlen 10^{-2} und 10^{-3} ebenfalls numerisch gelöst. Das Ergebnis ist in den Abbildungen 2 c) und 3 c) dargestellt. Da bei derart kleinen Prandtl-Zahlen bereits ein asymptotisches Verhalten erkennbar wird, ist die Lösung lediglich in Wandnähe noch geringfügig von Pr abhängig.

Mit dieser Wirbelfunktion erhält man aus Gleichung (26) eine neue Stromfunktion $M^{(1)}$, indem die Gleichung

$$\frac{\partial^2 M^{(1)}}{\partial \eta^2} = \frac{\xi \omega_1(\eta)}{A\sqrt{\text{Pe}}} \quad (36)$$

zweimal integriert wird. Die erste Integration ergibt

$$\frac{\partial M^{(1)}}{\partial \eta} = \frac{\xi}{A\sqrt{\text{Pe}}} U(\text{Pr}, \eta) , \quad (37)$$

wobei $U(\text{Pr}, \eta) = - \int_{\eta}^{\infty} \omega_1(\text{Pr}, \eta) d\eta$ proportional zur horizontalen Geschwindigkeitskomponente ist. Diese Funktion ist in Abb. 2 d) und 3 d) dargestellt. Durch eine zweite Integration erhält man

$$M^{(1)} = \frac{\xi}{A\sqrt{\text{Pe}}} V(\text{Pr}, \eta), \quad (38)$$

wobei $V(\text{Pr}, \eta) = \int_0^{\eta} U(\text{Pr}, \eta) d\eta$ das Profil der vertikalen Geschwindigkeitskomponente enthält, dargestellt in Abb. 2 e) und 3 e). Die Funktionen U und V wurden für $\text{Pr} = 10^{-2}$ und $\text{Pr} = 10^{-3}$ bestimmt, die Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl ist jedoch vernachlässigbar.

Die Iteration kann jetzt beendet werden, wenn die Größe A so gewählt wird, daß die neue Stromfunktion $M^{(1)}$ den gleichen horizontalen, konvektiven Wärmetransport ergibt wie die ursprüngliche Stromfunktion M , wenn also

$$\int_0^{\infty} \theta_0 \frac{\partial M}{\partial \eta} d\eta = \int_0^{\infty} \theta_0 \frac{\partial M^{(1)}}{\partial \eta} d\eta \quad (39)$$

gesetzt wird. Mit den Gleichungen (23) und (38) erhält man daraus die Bedingung

$$\left(m + \frac{2}{\pi} n\right) \frac{\xi}{\sqrt{\text{Pe}}} \int_0^{\infty} \theta_0(\eta) d\eta = \frac{\xi}{A\sqrt{\text{Pe}}} \int_0^{\infty} \theta_0(\eta) U(\text{Pr}, \eta) d\eta. \quad (40)$$

Dadurch wird die dimensionslose Größe

$$A = \frac{\text{Pe}^{5/2}}{\text{Gr} \text{Pr}^2} \quad \text{bzw.} \quad A = \frac{\text{Pe}^3}{\text{Gr}^* \text{Pr}^2} \quad (41)$$

auf den in Tabelle 1 angegebenen Wert festgelegt. Für $\text{Pr} \leq 10^{-2}$ ist A unabhängig von der Prandtl-Zahl.

A	unendlicher Streifen	runde Platte
isotherme Platte	0.188	0.294
gleichförmig geheizte Platte	0.274	0.411

Tabelle 1: Ergebnisse für die dimensionslose Größe A

Die Peclet-Zahl kann damit durch $(A \text{GrPr}^2)^{2/5}$ bzw. $(A \text{Gr}^* \text{Pr}^2)^{1/3}$ ersetzt werden. Eingesetzt in Gleichung (32) bzw. (33) ergibt sich eine Korrelation für die Nusselt-Zahl

$$\text{Nu} = \frac{q_w R}{\lambda(T_w - T_\infty)} = -\sqrt{\text{Pe}} \frac{\left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}}{\theta_{\eta=0}} \quad (42)$$

in der Umgebung des Staupunkts. Sie stellt sich als Funktion der Grashof-Zahl und der Prandtl-Zahl dar.

Man erhält

$$\text{Nu} = 0.571 (\text{GrPr}^2)^{1/5} \quad (43)$$

für einen isothermen, unendlichen Streifen,

$$\text{Nu} = 0.643 (\text{Gr}^* \text{Pr}^2)^{1/2} \quad (44)$$

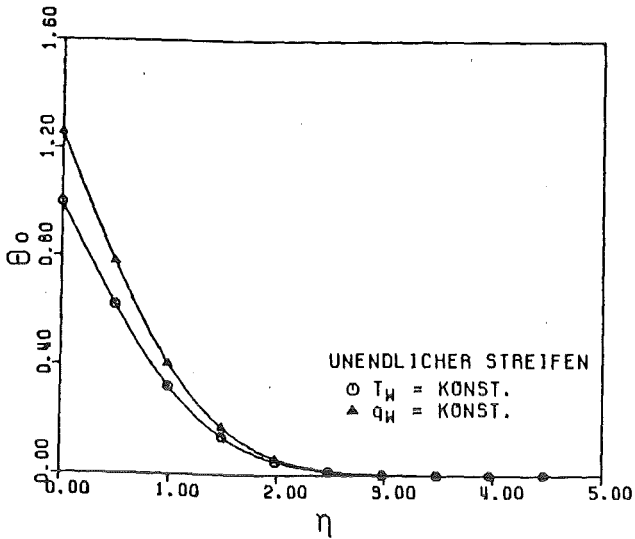
für einen gleichförmig geheizten, unendlichen Streifen,

$$\text{Nu} = 0.705 (\text{GrPr}^2)^{1/5} \quad (45)$$

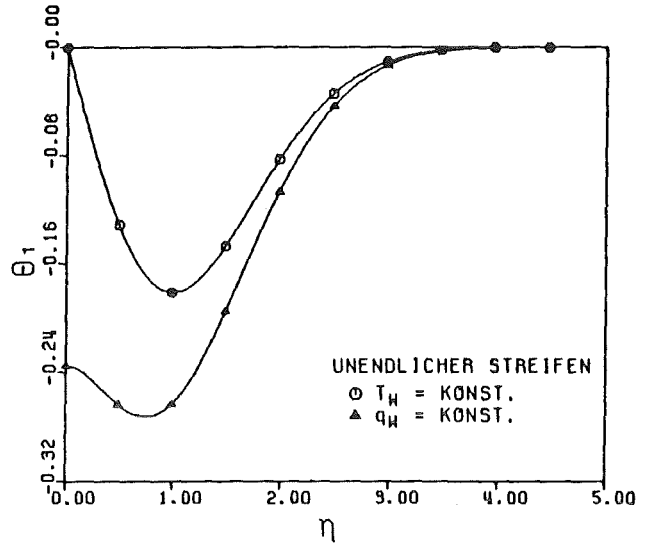
für eine isotherme, runde Platte und

$$\text{Nu} = 0.776 (\text{Gr}^* \text{Pr}^2)^{1/6} \quad (46)$$

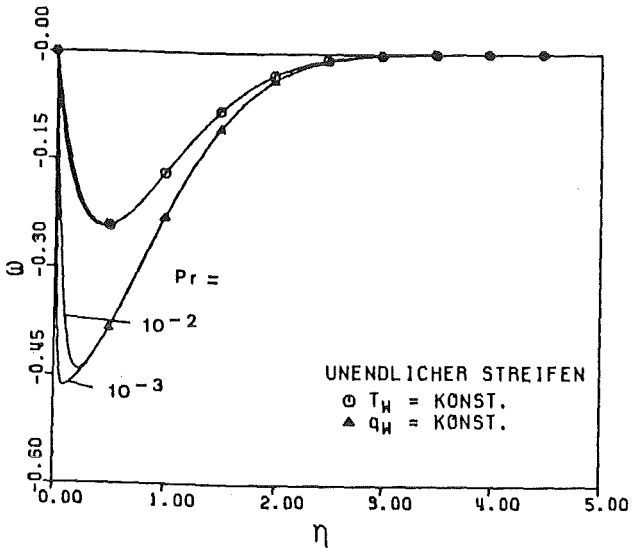
für eine gleichförmig geheizte, runde Platte.



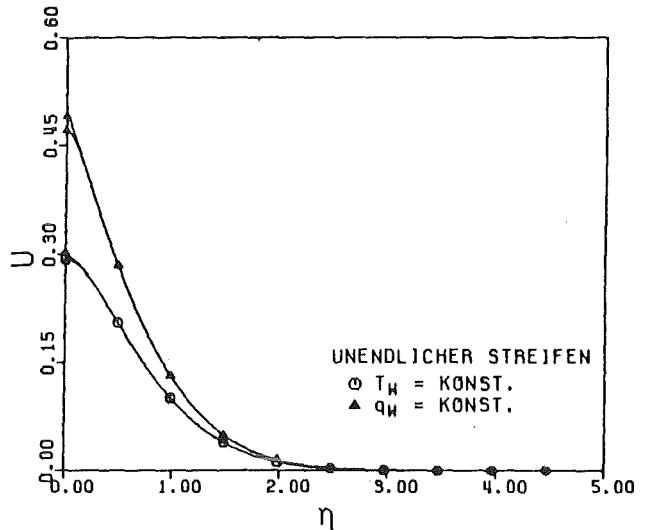
a) TEMPERATUR Koeffizient θ_0



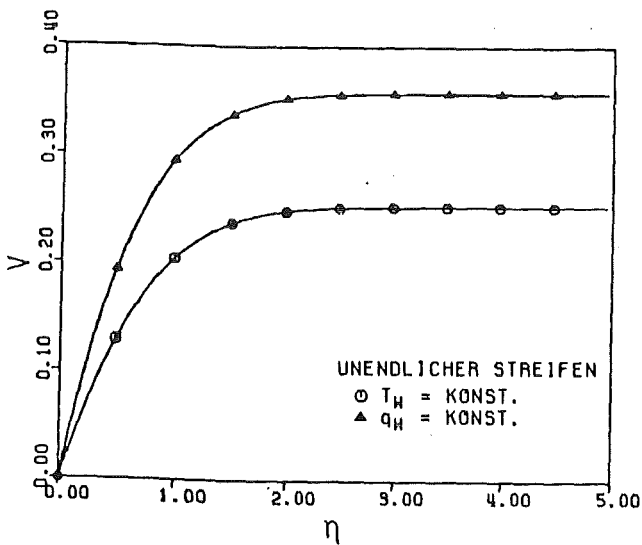
b) TEMPERATUR Koeffizient θ_1



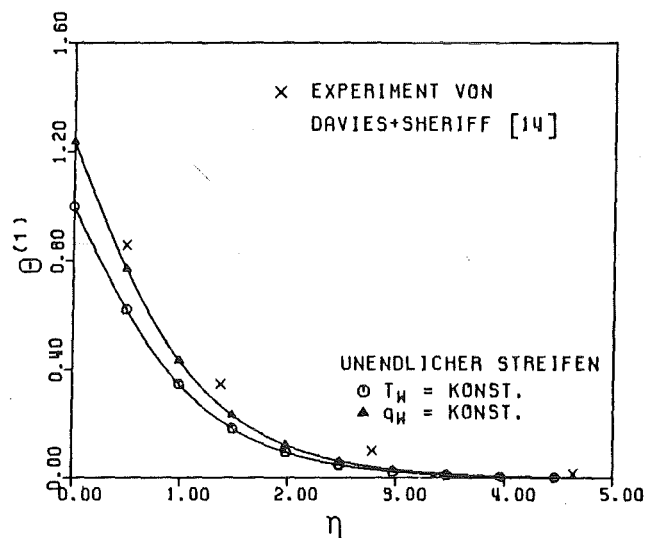
c) PROFIL DER WIRBELFUNKTION



d) HORIZONTALE GESCHWINDIGKEIT

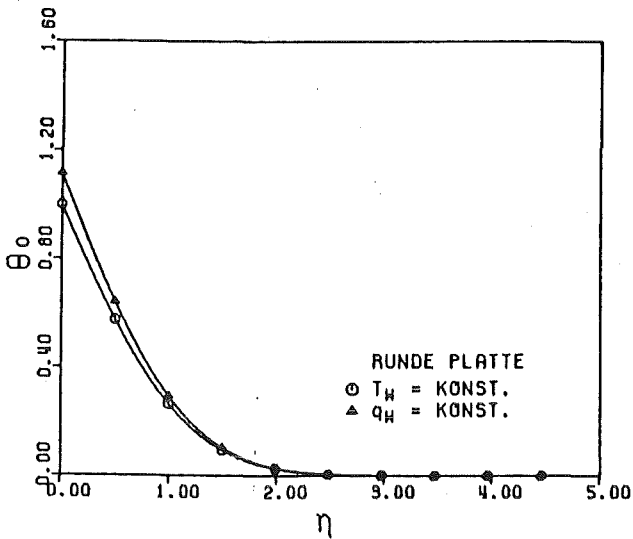


e) VERTIKALE GESCHWINDIGKEIT

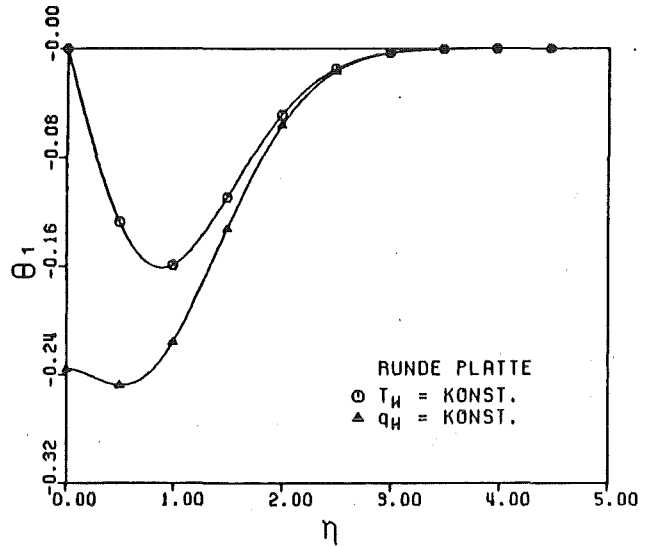


f) ITERIERTES TEMPERATUR PROFIL

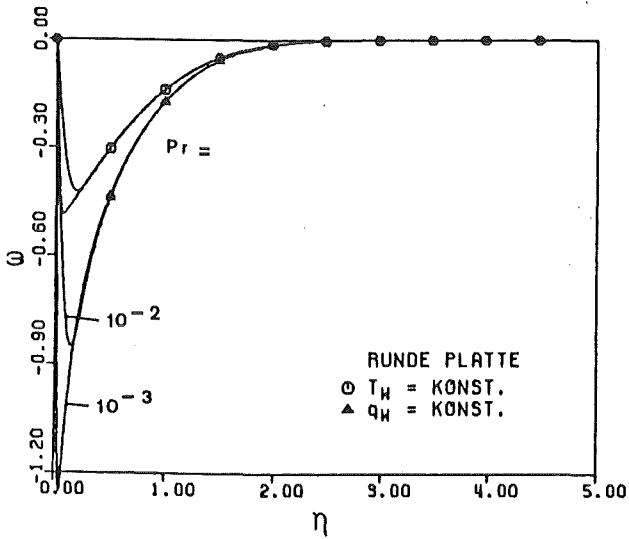
Abb. 2 Naturkonvektion bei kleinen Prandtl-Zahlen im Stau-punktsbereich eines unendlichen Streifens.



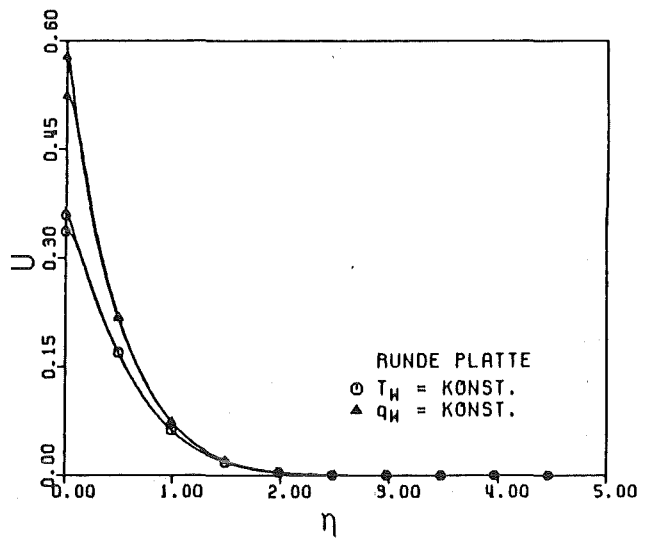
a) TEMPERATUR KÖEFFIZIENT θ_0



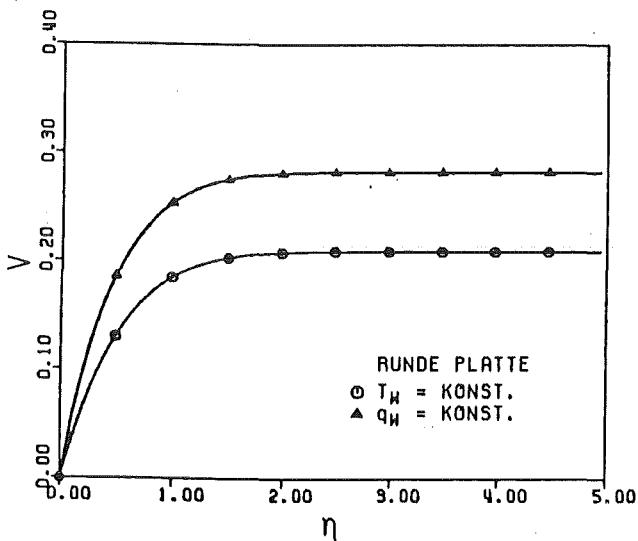
b) TEMPERATUR KÖEFFIZIENT θ_1



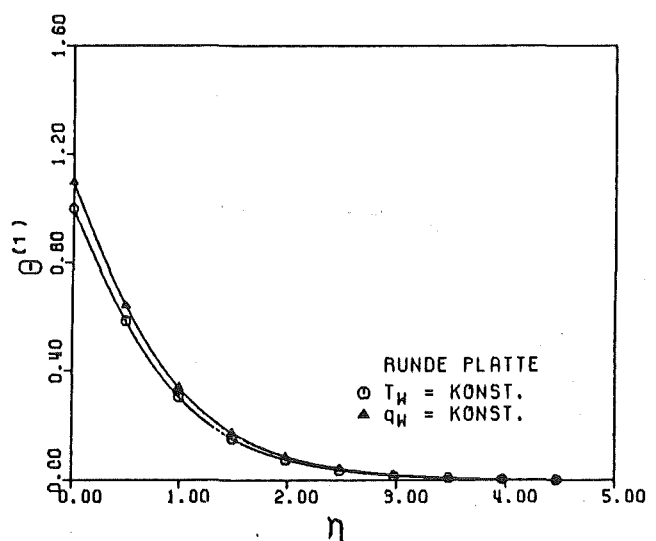
c) PROFIL DER WIRBELFUNKTION



d) HORIZONTALE GESCHWINDIGKEIT



e) VERTIKALE GESCHWINDIGKEIT



f) ITERIERTES TEMPERATUR PROFIL

Abb. 3 Naturkonvektion bei kleinen Prandtl-Zahlen im Stau-punktsbereich einer runden Platte.

Einen Hinweis auf die Genauigkeit des Verfahrens erhält man, wenn die neue Stromfunktion $M^{(1)}$ in die Energiegleichung (24) eingesetzt wird. In niedrigster Ordnung ist die neue Temperatur $\Theta^{(1)}$ nur eine Funktion von η , so daß man die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-(1+n) V(\text{Pr}, \eta) \frac{d\Theta^{(1)}}{d\eta} = A \frac{d^2\Theta^{(1)}}{d\eta^2} \quad (47)$$

erhält, die numerisch integriert werden kann.

Das Ergebnis ist in Abb. 2 f) und 3 f) dargestellt. Die lokale Nusselt-Zahl, die sich daraus ergibt, unterscheidet sich von den Ergebnissen (43) bis (46) um weniger als 2 %, wodurch der Abbruch der Iteration gerechtfertigt wird.

3.2 Der Grenzfall sehr großer Prandtl-Zahlen

Ein analoges Verfahren ermöglicht es, dem Wärmeübergang durch Naturkonvektion unter einer horizontalen Platte in Flüssigkeiten mit sehr großen Prandtl-Zahlen zu berechnen. Da in diesem Fall die Temperaturgrenzschicht sehr viel kleiner ist als die Geschwindigkeitsgrenzschicht, ist die Stokes'sche Umströmung der Platte jetzt die geeignetere Startlösung der Iteration. In gleicher Weise wird jedoch auch hier zunächst die Zwangskonvektion und daraus der Auftrieb innerhalb der Temperaturgrenzschicht berechnet, worauf die unbekannte Anströmgeschwindigkeit der Stokes'schen Strömung durch eine Wärmebilanz nachträglich festgelegt wird.

Die Berechnung erfolgt für die gleichen Plattengeometrien wie in Abschnitt 3.1, also für einen unendlichen Streifen der Breite $2R$ und für eine runde Platte von Radius R . Die Plattenoberfläche ist wiederum als isotherm oder als gleichförmig geheizt angenommen.

Die Stoffeigenschaften der Flüssigkeit sollen entsprechend der Boussinesq-Approximation konstant sein bis auf die Dichte, die sich im Auftriebsterm linear mit der Temperatur ändert.

Die Ausgangsgleichungen (3) bis (6) werden in diesem Grenzfall in einer anderen Form dimensionslos dargestellt. Es wird gesetzt

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{r}{R}, & \eta &= \frac{z}{R} Pe^{1/4}, \\ M &= \frac{\psi}{V_{\infty} R}, & \omega &= \frac{R^2}{\kappa} \frac{A}{Pe^{3/4}} \Omega, \\ Pe &= \frac{V_{\infty} R}{\kappa}, & Pr &= \frac{\nu}{\kappa} \\ \Theta &= \frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}}, & A &= \frac{Pe^{5/4}}{Gr Pr}, & Gr &= \frac{\alpha g (T_w - T_{\infty}) R^3}{\nu^2} \end{aligned} \quad (48)$$

bei einer isothermen Platte bzw.

$$\Theta = Pe^{1/4} \frac{(T - T_{\infty})}{\alpha_w R}, \quad A = \frac{Pe^{3/2}}{Gr^* Pr}, \quad Gr^* = \frac{\alpha g \alpha_w R^4}{\lambda \nu^2} \quad (49)$$

bei einer gleichförmig geheizten Platte. Das zu den Gleichungen (11) bis (13) entsprechende Gleichungssystem lautet damit

$$\frac{1}{Pe^{1/2}} \left[\frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} + n \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{M}{\xi} \right) \right] + \frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2} = \frac{\omega}{A Pe^{3/4}}, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} & \frac{Pe^{3/4}}{Pr} \left[\frac{\partial M}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} - n \frac{\omega}{\xi} \right) - \left(\frac{\partial M}{\partial \xi} + n \frac{M}{\xi} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right] \\ & = \frac{1}{Pe^{1/2}} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + n \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\omega}{\xi} \right) \right] + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial M}{\partial \xi} + n \frac{M}{\xi} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Pe^{3/4}} \left[\frac{1}{Pe^{1/2}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + n \frac{1}{\xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right]. \quad (52)$$

Für große Prandtl-Zahlen sind die konvektiven Terme in der Wirbeltransportgleichung (51) vernachlässigbar. Diese Gleichung vereinfacht sich damit zu

$$\frac{1}{Pe^{1/2}} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + n \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\omega}{\xi} \right) \right] + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} = - \frac{\partial \theta}{\partial \xi}. \quad (53)$$

Als Startlösung wird wiederum eine isotherme und damit auftriebsfreie Strömung angenommen. Die Gleichungen (53) und (50) beschreiben dann mit $\Theta = 0$ und den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \eta = 0: & \quad M = 0, & \quad \frac{\partial M}{\partial \eta} = 0, \\ \eta \rightarrow \infty & \quad \frac{\partial M}{\partial \eta} = 0, & \quad \frac{\partial M}{\partial \xi} + n \frac{M}{\xi} = 1 \end{aligned} \quad (54)$$

eine Stokes'sche Strömung.

Dieses Problem wurde von Berry und Swain (1923) /17/ für einen unendlichen Streifen gelöst. Da in diesem Fall die Lösung im Unendlichen logarithmisch singulär ist, läßt sich die Randbedingung

$$\frac{\partial M}{\partial \xi} = 1 \quad (55)$$

für $\eta \rightarrow \infty$ nicht erfüllen. Stattdessen wird gefordert, daß die Bedingung (55) an einem beliebigen aber festen Punkt stromauf auf der Staustromlinie gilt. Die Lösung dieses Problems wird als

$$M = - \xi (\tanh x_1 - x_1) \quad (56)$$

angegeben, wobei x_1 und x_2 elliptische Koordinaten sind, aus denen sich die Koordinaten ξ und η als

$$\begin{aligned} \xi &= \cosh x_1 \cdot \cos x_2, \\ \eta &= Pe^{1/4} \sinh x_1 \cdot \sin x_2 \end{aligned} \quad (57)$$

berechnen. Damit wird die Bedingung (55) an der Stelle $\xi = 0$, $\eta = 3.6242 Pe^{1/4}$ erfüllt.

Nach Lamb /18/ ergibt sich die Stokes'sche Umströmung der runden Platte als Grenzfall der Umströmung des flachen Rotationsellipsoids mit den Halbachsen 1 und $a \ll 1$ mit Hilfe der Dirichlet'schen Formel. Damit läßt sich die Wirbelfunktion zu

$$\omega = \pi a \int_{\sigma}^{\infty} \left(\frac{1}{Pe^{1/2}} \cdot \frac{\eta^2}{a^2 + \sigma} + \frac{\xi^2}{1 + \sigma} \right) \frac{d\sigma}{\Delta}, \quad (58)$$

mit $\Delta = (a^2 + \sigma)^{1/2} (1 + \sigma)$ berechnen. Dabei ist σ die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{1}{Pe^{1/2}} \frac{\eta^2}{a^2 + \sigma} + \frac{\xi^2}{1 + \sigma} = 1. \quad (59)$$

Durch Differentiation der Gleichung (58) erhält man

$$\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{2\pi a}{Pe^{1/2}} \eta \int_{\sigma}^{\infty} \frac{d\sigma}{(a^2 + \sigma)\Delta} \quad (60)$$

und durch Auswerten dieses Integrals

$$\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{4\pi a^2}{1-a^2} \frac{\eta}{Pe^{1/2}} \left(\frac{1+\sigma}{a^2+\sigma} - 1 \right). \quad (61)$$

Ferner ist die Funktion

$$\chi = a \int_{\sigma}^{\infty} \frac{d\sigma}{\Delta} \quad (62)$$

eine Lösung der Potentialgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + Pe^{1/2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \chi = 0. \quad (63)$$

Das Integral in Gleichung (62) läßt sich auswerten als

$$\chi = \frac{2a}{\sqrt{1-a^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{\frac{\sigma-a^2}{1-a^2}} \right), \quad (64)$$

Daraus ergeben sich die Geschwindigkeitskomponenten, ausgedrückt durch die Stromfunktion M, zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \eta} &= B \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + C \frac{\eta}{Pe^{1/2}} \frac{\partial \chi}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial M}{\partial \xi} + \frac{M}{\xi} &= - B Pe^{1/2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} - C \left(\eta \frac{\partial \chi}{\partial \eta} - \chi \right) + 1. \end{aligned} \quad (65)$$

Die Konstanten B und C sind darin

$$B = - \frac{1}{2\pi} \frac{C a^2}{Pe} \quad \text{und} \quad C = - \frac{1}{\pi a}. \quad (66)$$

Dabei wurde bereits vereinfachend $a \ll 1$ angenommen.

Die Lösung des unendlichen Streifens, Gleichung (56), und die Lösung der runden Platte, die sich aus den Gleichungen (65) durch den Grenzübergang $a \rightarrow 0$ ergibt, lassen sich in eine Potenzreihe um den Staupunkt entwickeln. Man erhält in der kleinsten Ordnung in ξ und η , die noch den Einfluß der endlichen Plattenbreite enthält,

$$M = (m + \frac{2}{\pi} n) \frac{\eta^3}{3 Pe^{3/4}} (\xi + \frac{3}{2} \xi^3), \quad (67)$$

mit $m = n-1$. Im Bereich der Temperaturgrenzschicht können die Gleichungen (50) bis (53) durch eine Grenzschichtapproximation vereinfacht werden. Unter Vernachlässigung von Termen mit $1/Pe^{1/2}$ erhält man das Gleichungssystem

$$\frac{\partial M}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - (\frac{\partial M}{\partial \xi} + n \frac{M}{\xi}) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Pe^{3/4}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}, \quad (68)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} = - \frac{\partial \theta}{\partial \xi}, \quad (69)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2} = \frac{\omega}{A Pe^{3/4}}, \quad (70)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \eta = 0: \quad M &= 0, & \frac{\partial M}{\partial \eta} &= 0 \\ & \theta = 1 & \text{bei isothermer Platte, bzw.} \\ & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -1 & \text{bei gleichförmig geheizter Platte,} \\ \eta \rightarrow \infty: \quad \omega &= 0, & \frac{\partial \omega}{\partial \eta} &= 0, \quad \theta = 0. \end{aligned} \quad (71)$$

Die Randbedingung, daß wie bei kleinen Prandtl-Zahlen die horizontale Geschwindigkeitskomponente außerhalb der thermischen Grenzschicht verschwindet, kann im Grenzfall großer Prandtl-Zahlen nicht erfüllt werden.

Die Stokes'sche Lösung der Gleichung (67) wird in die Energiegleichung (68) eingesetzt. Man erhält man mit einem Potenzreihenansatz der Form

$$\theta(\xi, \eta) = \theta_0(\eta) + \xi^2 \theta_1(\eta) \quad (72)$$

eingesetzt in Gleichung (68) und geordnet nach Potenzen von ξ die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\theta_0'' + \frac{1}{3} \left(m + \frac{4}{\pi} n\right) \eta^3 \theta_0' = 0, \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \theta_1'' + \frac{1}{3} \left(m + \frac{4}{\pi} n\right) \eta^3 \theta_1' - \left(2m + \frac{4}{\pi} n\right) \eta^2 \theta_1 \\ = -\left(\frac{3}{2}m + \frac{4}{\pi} n\right) \eta^3 \theta_0'. \end{aligned} \quad (74)$$

Als Lösung der Gleichung (73) ergibt sich bei isothermer Platte

$$\theta_0 = 1 - \frac{\int_0^\eta \exp\left[-\left(\frac{m}{12} + \frac{n}{3\pi}\right) \eta^4\right] d\eta}{\int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{m}{12} + \frac{n}{3\pi}\right) \eta^4\right] d\eta}. \quad (75)$$

Bei gleichförmig geheizter Platte erhält man analog

$$\theta_0 = \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{m}{12} + \frac{n}{3\pi}\right) \eta^4\right] d\eta - \int_0^\eta \exp\left[-\left(\frac{m}{12} + \frac{n}{3\pi}\right) \eta^4\right] d\eta. \quad (76)$$

Diese Lösungen sind in den Abbildungen 4 a) und 5 a) dargestellt. Gleichung (74) wurde nach Einsetzen von θ_0' numerisch gelöst. Das Ergebnis ist in den Abb. 4 b) bzw. 5 b) dargestellt.

Aus der Krümmung des Temperaturprofils, also aus der Funktion θ_1 , ergibt sich durch Einsetzen in Gleichung (69) durch zweimaliges Integrieren eine neue Wirbelfunktion $\omega^{(1)}$ als

$$\omega^{(1)} = 2 \xi \omega_1(\eta) \quad (77)$$

Dabei enthält die Funktion

$$\omega_1(\eta) = -\int_{\eta}^{\infty} \int_{\eta}^{\infty} \theta_1(\eta) d\eta^2 \quad (78)$$

das Profil der neuen Wirbelfunktion. Sie ist in Abb. 4 c) und 5 c) dargestellt.

Aus Gleichung (70) erhält man durch Integration eine neue Stromfunktion $M^{(1)}$. Die erste Integration ergibt

$$\frac{\partial M^{(1)}}{\partial \eta} = \frac{2\xi}{A Pe^{3/4}} U(\eta), \quad (79)$$

wobei die Funktion

$$U(\eta) = \int_0^{\eta} \omega_1(\eta) d\eta \quad (80)$$

das Profil der horizontalen Geschwindigkeitskomponente enthält. Die zweite Integration ergibt

$$M^{(1)} = \frac{2\xi}{A Pe^{3/4}} V(\eta), \quad (81)$$

wobei die Funktion

$$V(\eta) = \int_0^{\eta} U(\eta) d\eta \quad (82)$$

das Profil der vertikalen Geschwindigkeitskomponente enthält. Diese Profile sind in den Abbildungen 4 d) und e) bzw. 5 d) und e) dargestellt.

Die dimensionslose Größe A und damit die noch unbekannte Anströmgeschwindigkeit der Stokes'schen Strömung, kann jetzt festgelegt werden, indem gefordert wird, daß der gesamte horizontale, konvektive Wärmetransport vor und nach der Iteration gleich ist.

Die Forderung

$$\int_0^{\infty} \theta_0 \frac{\partial M}{\partial \eta} d\eta = \int_0^{\infty} \theta_0 \frac{\partial M^{(1)}}{\partial \eta} d\eta \quad (83)$$

führt mit Hilfe von Gleichung (67) und (81) auf die Bedingung

$$\left(m + \frac{2}{\pi} n\right) \frac{\xi}{Pe^{3/4}} \int_0^{\infty} \eta^2 \theta_0 d\eta = \frac{2\xi}{A Pe^{3/4}} \int_0^{\infty} \theta_0 \cdot U(\eta) d\eta, \quad (84)$$

Dadurch wird die Größe

$$A = \frac{Pe^{5/4}}{Gr Pr} \quad \text{bzw.} \quad A = \frac{Pe^{3/2}}{Gr^* Pr} \quad (85)$$

auf den in Tabelle 2 angegebenen Wert festgelegt.

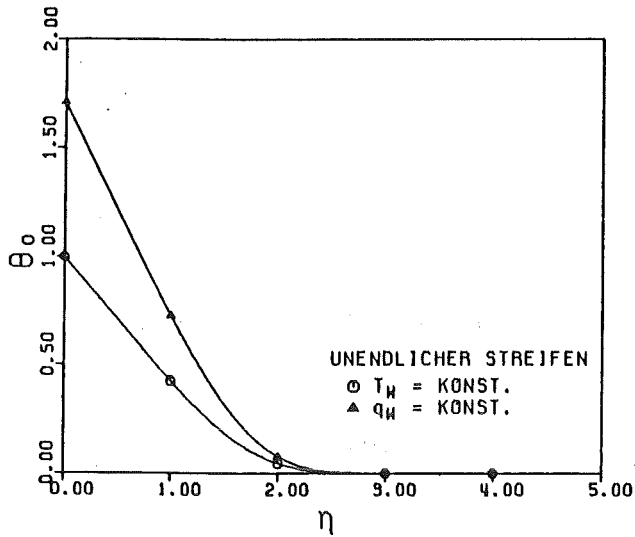
A	unendlicher Streifen	runde Platte
isotherme Platte	0.703	0.991
gleichförmig geheizte Platte	1.384	1.950

Tabelle 2: Ergebnisse für die dimensionslose Größe A

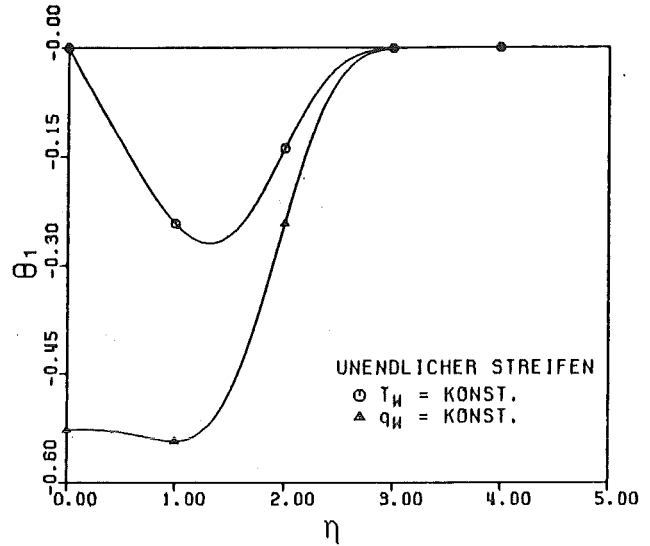
Die Peclet-Zahl kann damit durch $(AGrPr)^{4/5}$ bzw. $(AGr^*Pr)^{2/3}$ ersetzt werden. Mit Hilfe der Ergebnisse (75) und (76) erhält man eine Korrelation für die Nusselt-Zahl

$$Nu = \frac{q_w R}{\lambda (T_w - T_\infty)} = - Pe^{1/4} \frac{\left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}}{\theta_{\eta=0}} \quad (86)$$

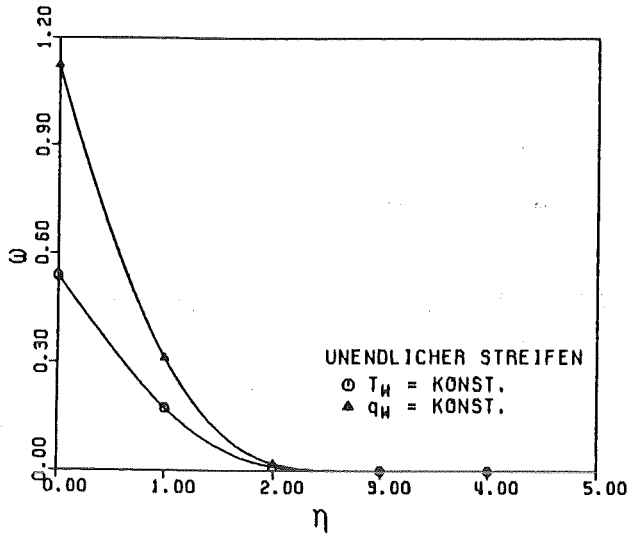
als Funktion der Grashof-Zahl und der Prandtl-Zahl in der Umgebung des Staupunktes.



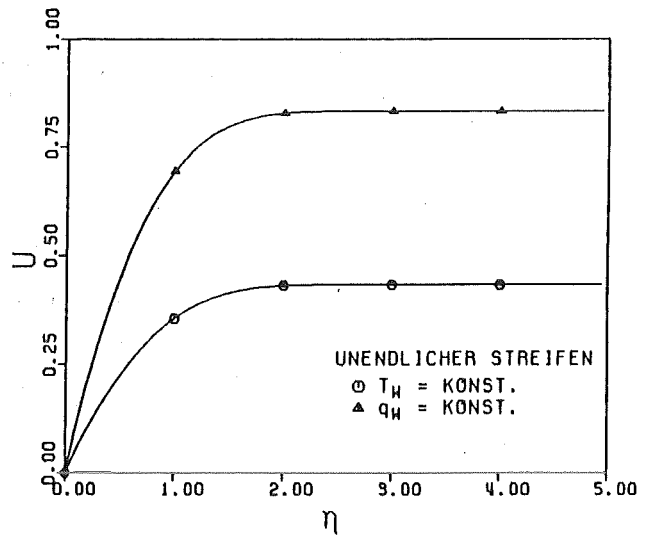
a) TEMPERATUR KOEFFIZIENT θ_0



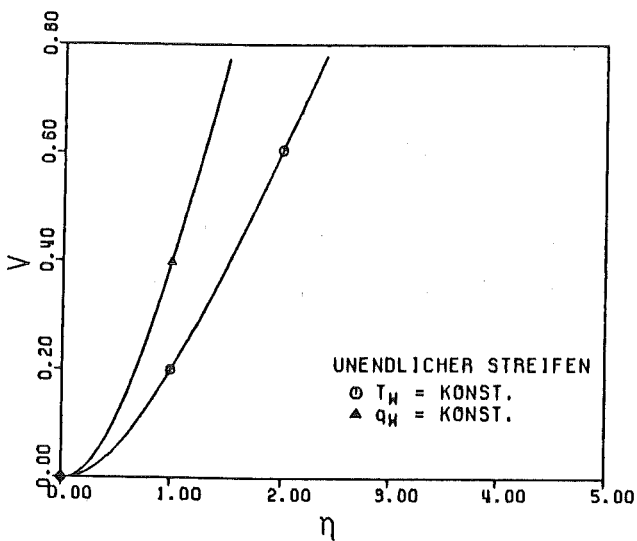
b) TEMPERATUR KOEFFIZIENT θ_1



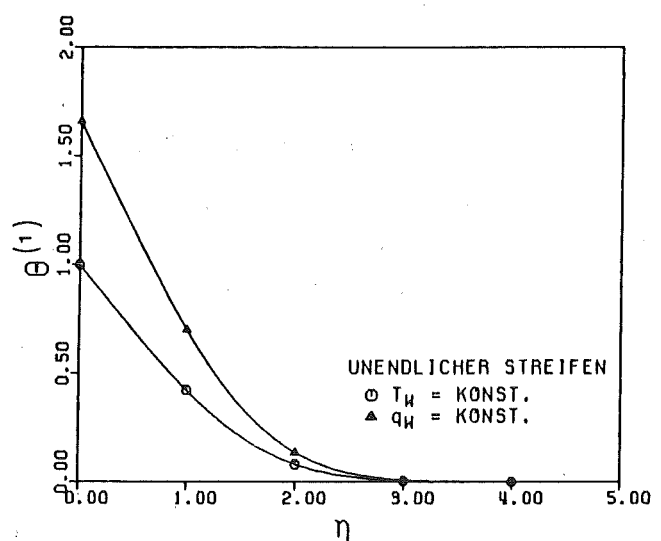
c) PROFIL DER WIRBELFUNKTION



d) HORIZONTALE GESCHWINDIGKEIT

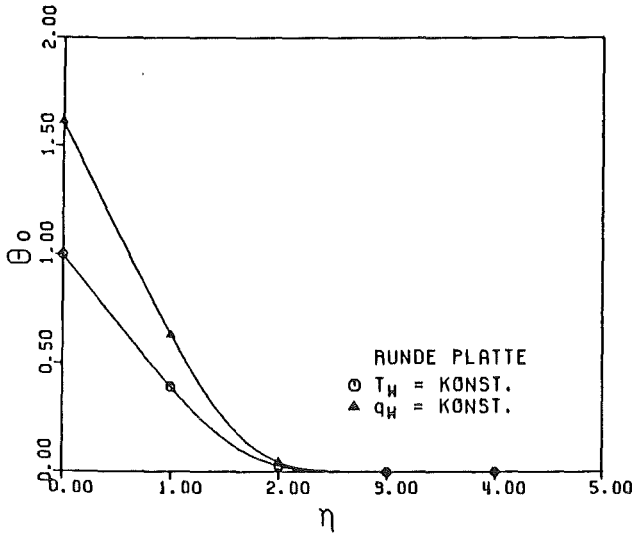


e) VERTIKALE GESCHWINDIGKEIT

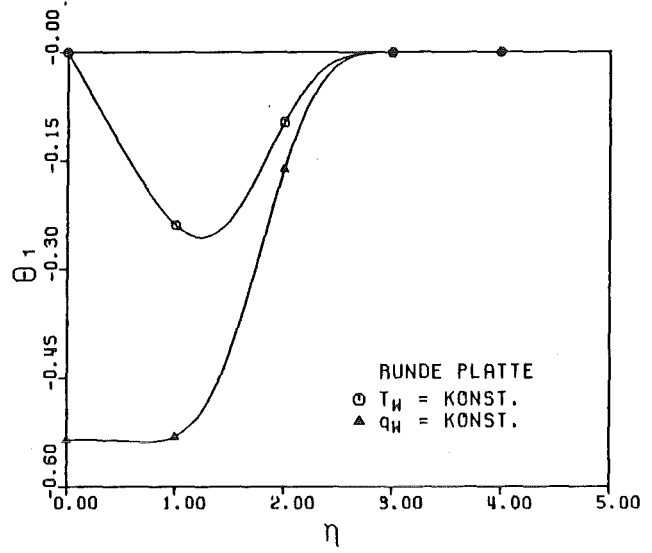


f) ITERIERTES TEMPERATUR PROFIL

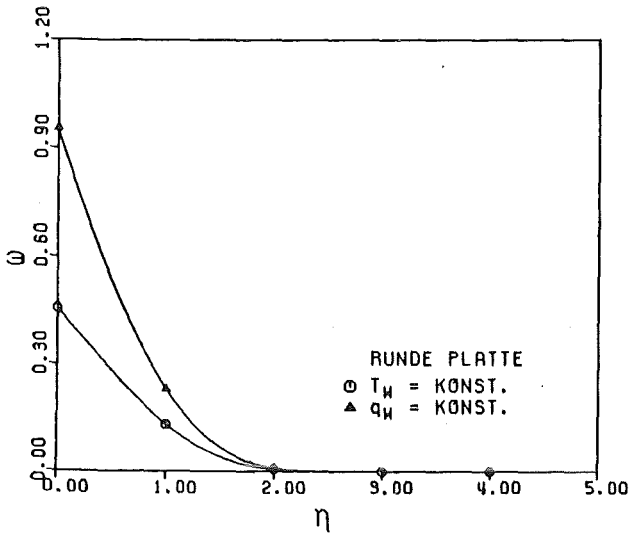
Abb. 4 Naturkonvektion bei großen Prandtl-Zahlen im Staupunktsbereich eines unendlichen Streifens



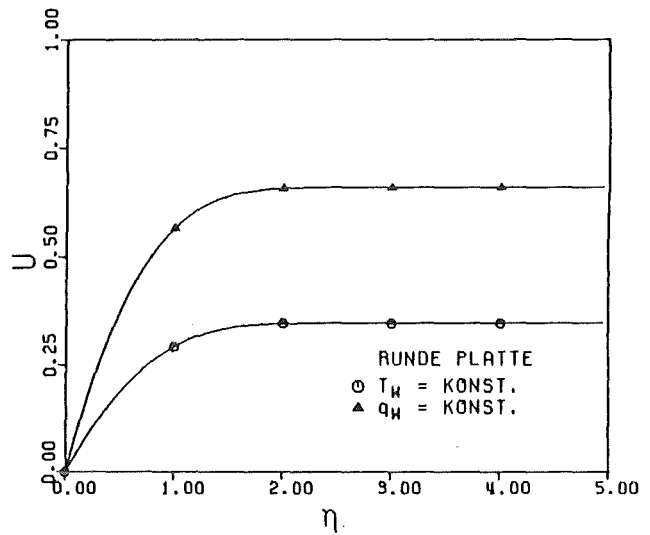
a) TEMPERATUR KÖEFFIZIENT θ_0



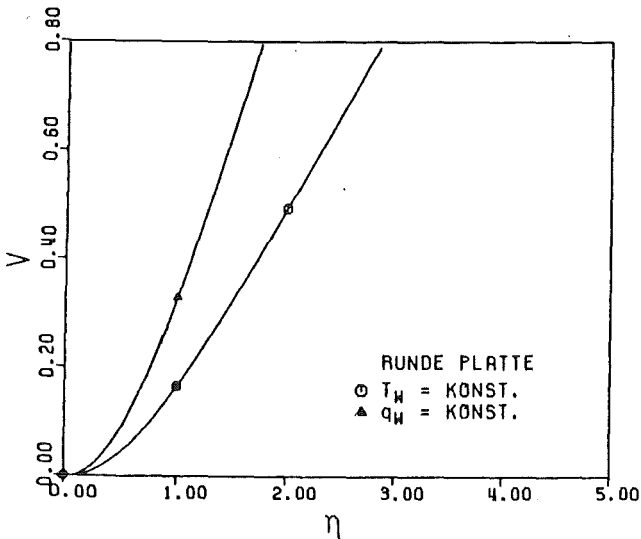
b) TEMPERATUR KÖEFFIZIENT θ_1



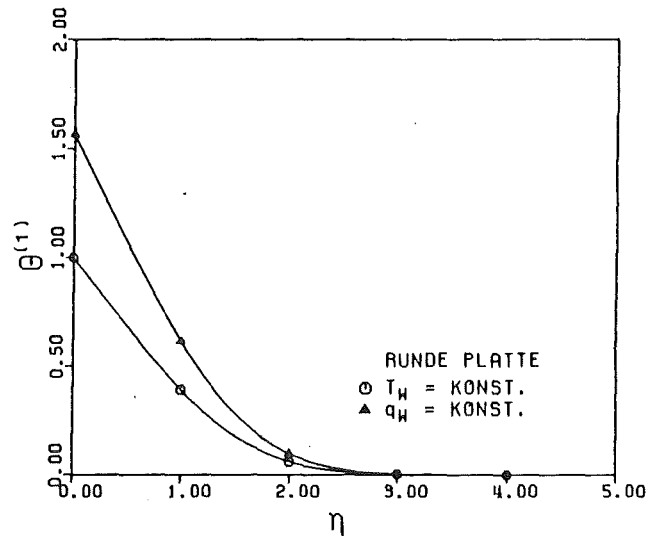
c) PROFIL DER WIRBELFUNKTION



d) HORIZONTALE GESCHWINDIGKEIT



e) VERTIKALE GESCHWINDIGKEIT



f) ITERIERTES TEMPERATUR PROFIL

Abb. 5 Naturkonvektion bei großen Prandtl-Zahlen im Staupunktsbereich einer runden Platte

Die Korrelationen lauten:

$$\text{Nu} = 0.544 (\text{GrPr})^{1/5} \quad (87)$$

für einen isothermen, unendlichen Streifen,

$$\text{Nu} = 0.617 (\text{Gr}^* \text{Pr})^{1/6} \quad (88)$$

für einen gleichförmig geheizten, unendlichen Streifen,

$$\text{Nu} = 0.619 (\text{GrPr})^{1/5} \quad (89)$$

für eine isotherme, runde Platte,

$$\text{Nu} = 0.693 (\text{Gr}^* \text{Pr})^{1/6} \quad (90)$$

für eine gleichförmig geheizte, runde Platte.

Zur Kontrolle der Genauigkeit der Iteration kann wiederum die Stromfunktion $M^{(1)}$ in die Energiegleichung (68) eingesetzt werden. In Staupunktsnähe ergibt sich dann eine neue Temperatur $\Theta^{(1)}$ aus der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$-2(1+n) V(\eta) \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial \eta} = A \frac{\partial^2 \Theta^{(1)}}{\partial \eta^2}, \quad (91)$$

die numerisch integriert wurde, dargestellt in Abb. 4 f) und 5 f); die daraus resultierenden Nusselt-Zahlen unterscheiden sich von den Ergebnissen (87) bis (90) um weniger als 2 %.

3.3 Wärmeübergang bei beliebigen Prandtl-Zahlen

Die Asymptote der kleinen Prandtl-Zahlen, Abschnitt 3.1, und die Asymptote der großen Prandtl-Zahlen, Abschnitt 3.2, können nach Churchill und Usagi /19/ in der Form

$$\frac{1}{\text{Nu}^n(\text{Pr})} = \frac{1}{\text{Nu}^n(\text{Pr} \rightarrow 0)} + \frac{1}{\text{Nu}^n(\text{Pr} \rightarrow \infty)}$$

interpoliert werden, um den Wärmeübergang bei beliebigen Prandtl-Zahlen als Funktion der Rayleigh-Zahl und der Prandtl-Zahl darzustellen, wobei der Exponent n durch Experimente bei mittleren Prandtl-Zahlen festgelegt wird. Die Experimente von Aihara, Yamada und Endo /11/ mit einem isothermen, unendlichen Streifen in Luft und von Faw und Dullforce /20/ mit einer runden Platte in Luft, legen den Exponenten n auf $n = 3$ fest. Durch Kombination der Gleichungen (43) bis (46) mit den Gleichungen (87) bis (90) erhält man die folgenden Wärmeübergangsbeziehungen bei beliebigen Prandtl-Zahlen, wobei $Gr Pr$ als Rayleigh-Zahl Ra und $Gr^* Pr$ als modifizierte Rayleigh-Zahl Ra^* bezeichnet wurde. Es gilt

$$\frac{Nu}{Ra^{1/5}} = \frac{0.571 Pr^{1/5}}{[1 + 1.156 Pr^{3/5}]^{1/3}} \quad (92)$$

für einen isothermen, unendlich langen Streifen,

$$\frac{Nu}{Ra^{*1/6}} = \frac{0.643 Pr^{1/6}}{[1 + 1.132 Pr^{1/2}]^{1/3}} \quad (93)$$

für einen gleichförmig geheizten, unendlich langen Streifen,

$$\frac{Nu}{Ra^{1/5}} = \frac{0.705 Pr^{1/5}}{[1 + 1.48 Pr^{3/5}]^{1/3}} \quad (94)$$

für eine isotherme, runde Platte,

$$\frac{Nu}{Ra^{*1/6}} = \frac{0.776 Pr^{1/6}}{[1 + 1.40 Pr^{1/2}]^{1/3}} \quad (95)$$

für eine gleichförmig geheizte, runde Platte.

4. Diskussion der Ergebnisse

Es wurden Beziehungen für den Wärmeübergang durch Naturkonvektion im Bereich des Staupunkts unter horizontalen, ebenen Flächen ana-

lytisch berechnet. Das Ergebnis läßt sich als eine lokal ähnliche Lösung der Grenzschichtgleichungen bezeichnen, die unter Berücksichtigung der Außenströmung berechnet wurde. Diese Methode unterscheidet sich grundlegend von früheren Berechnungen, die unter Vernachlässigung der Außenströmung die Integralgleichungen der Grenzschichttheorie approximieren. In den Abbildungen 6 bis 9 werden diese Näherungslösungen mit den hier berechneten verglichen.

Man entnimmt Abb. 6, daß die durch die Integralverfahren von Singh und Birkebak /8/ und von Clifton und Chapman /9/ berechneten Nusselt-Zahlen durch eine geeignete Wahl der Ansatzprofile bei $Pr \approx 1$ gut mit den hier berechneten Ähnlichkeitslösungen übereinstimmen.

Da jedoch bei allen Prandtl-Zahlen die gleichen Profile verwendet wurden, wird bei hohen Prandtl-Zahlen die Geschwindigkeit in Wandnähe und damit der Wärmeübergang zum Teil überschätzt /8/, während bei niedrigen Prandtl-Zahlen die Geschwindigkeit in Wandnähe und folglich auch die Nusselt-Zahl erheblich unterschätzt wird.

Da keine Geschwindigkeits- und Temperaturprofile unter gleichförmig geheizten Platten vorlagen, benutzten Fujii, Honda und Morioka /12/ die Profile von Aihara, Yamada und Endo /11/ unter einem isothermen, unendlichen Streifen in Luft, um den Wärmeübergang unter gleichförmig geheizten Platten bei beliebigen Prandtl-Zahlen zu berechnen (Abb. 7 und 9). Es ergibt sich jedoch im Vergleich mit den hier berechneten Ähnlichkeitslösungen bei allen Prandtl-Zahlen keine befriedigende Übereinstimmung. Im Unterschied zu diesen Ergebnissen sind die dort berechneten lokalen Nusselt-Zahlen um 10 bis 20 % kleiner als die korrespondierenden Nusselt-Zahlen nach Singh und Birkebak /8/ für eine isotherme Platte bei gleicher Rayleigh-Zahl. Wird Ra^* durch $Ra \cdot Nu$ ersetzt, so ist hier der Wärmeübergang bei gleichförmig geheizter Platte um 3 bis 4 % größer als bei isothermer Platte, entsprechend der stärkeren Krümmung des Temperaturprofils, ϑ_1 , am Staupunkt und dem damit verbundenen verstärkten Auftrieb innerhalb der Grenzschicht bei gleichförmig geheizter Platte. Die späteren Experi-

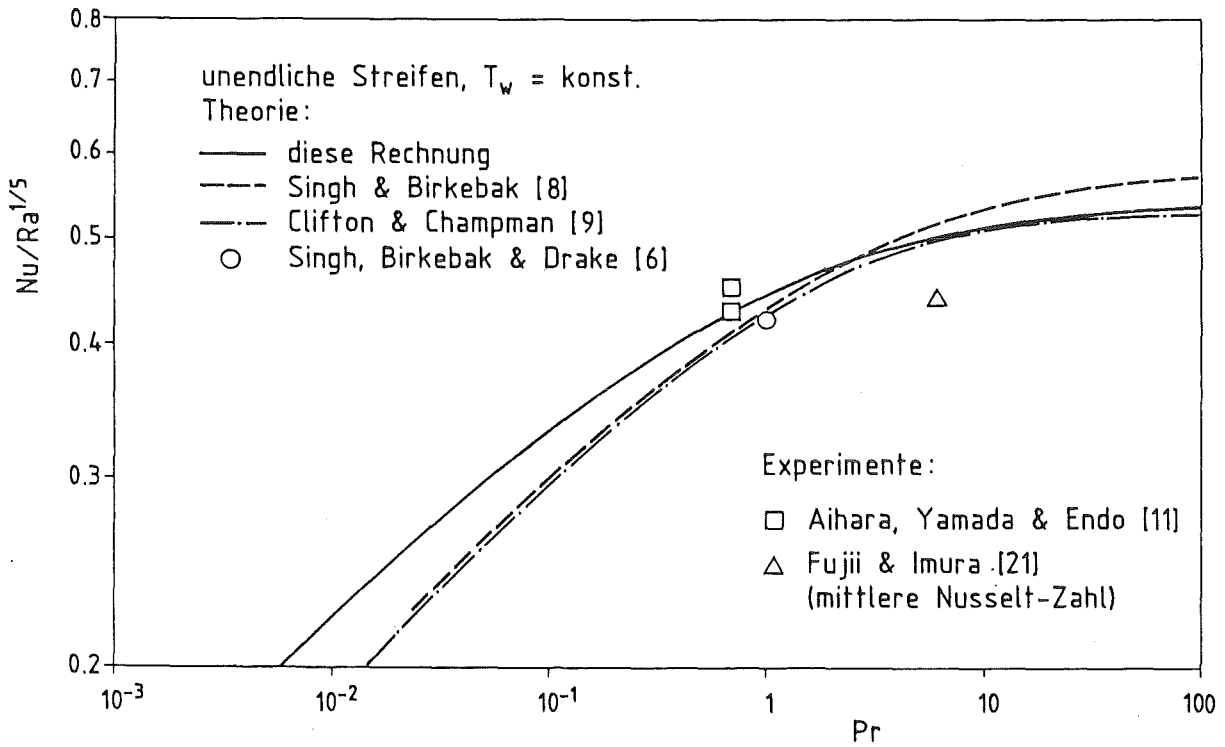


Abb. 6 Wärmeübergangsbeziehungen in Staupunktsnähe eines isothermen, unendlichen Streifens.

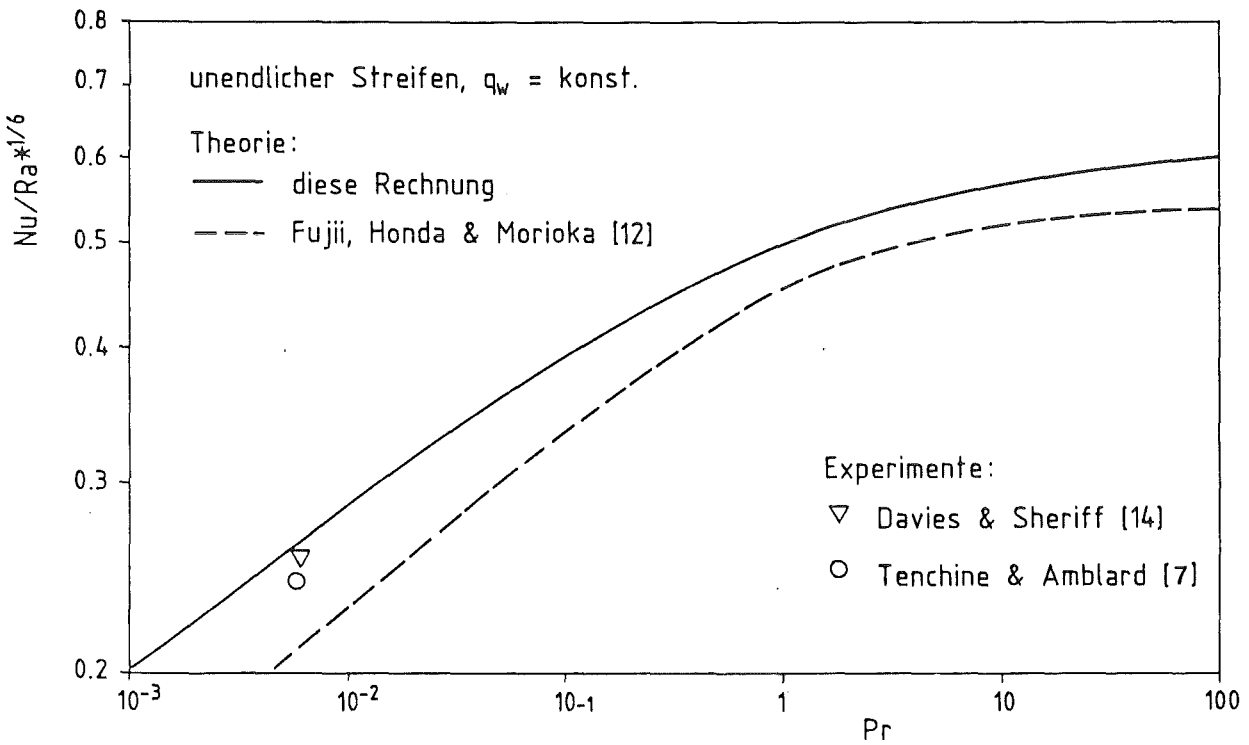


Abb. 7 Wärmeübergangsbeziehungen in Staupunktsnähe eines gleichförmig geheizten, unendlichen Streifens.

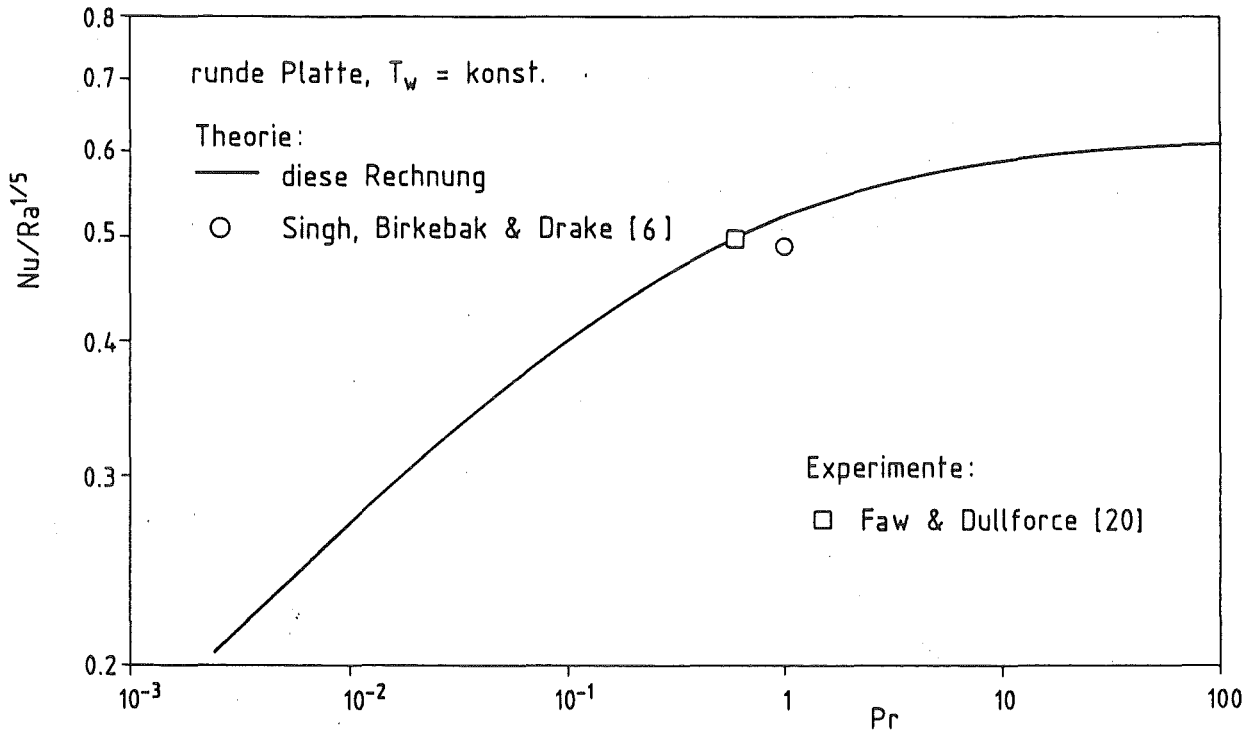


Abb. 8 Wärmeübergangsbeziehungen in Staupunktsnähe einer isothermen, runden Platte.

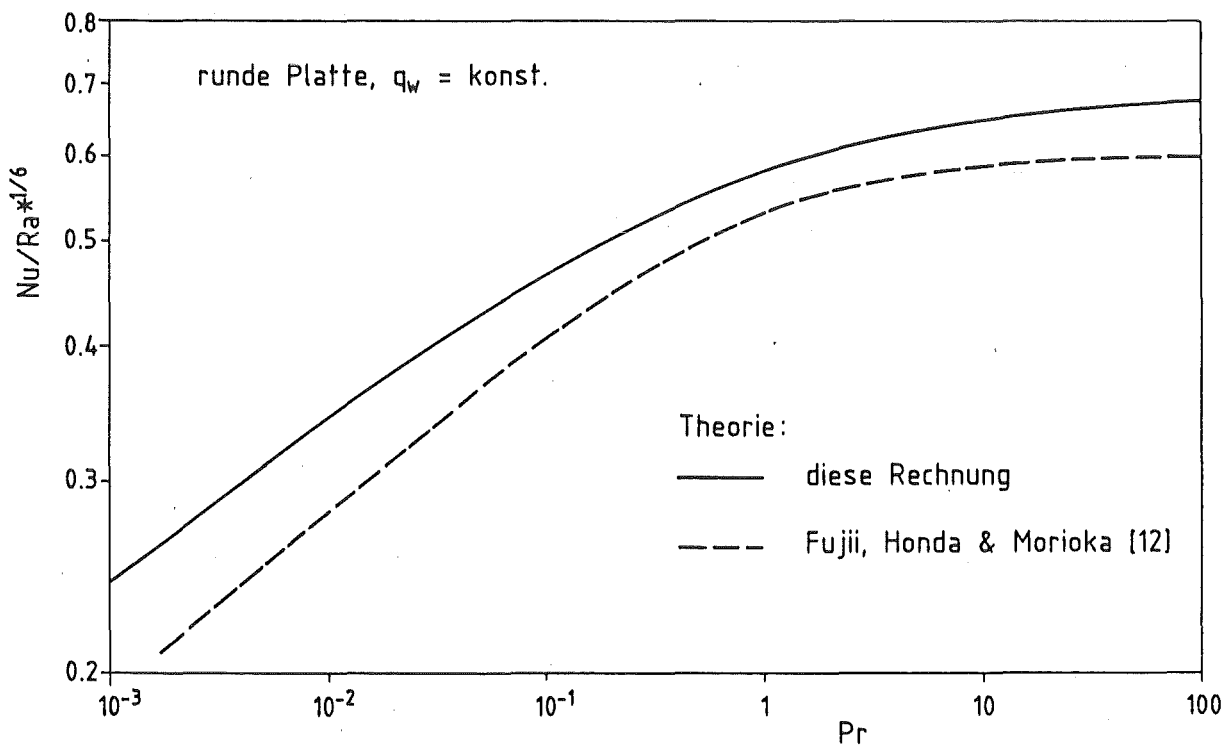


Abb. 9 Wärmeübergangsbeziehungen in Staupunktsnähe einer gleichförmig geheizten, runden Platte.

mente in Natrium von Davies und Sheriff /14/ und von Tenchine und Amblard /7/ bestätigen die hier berechneten Wärmeübergangskorrelationen (Abb. 7) und Temperaturprofile (Abb. 2 f). Lediglich das Experiment von Fujii und Imura (21), Abb. 6, kann das Ergebnis von Fujii et al. /12/ unterstützen.

Wie bereits von Hatfield und Edwards /22/ für die mittlere Nusselt-Zahl angedeutet wurde, bilden der unendliche Streifen und die runde Platte einen unteren und einen oberen Grenzwert für die lokale Nusselt-Zahl einer rechteckigen Platte mit beliebigem Seitenverhältnis. Wie in Abb. 10 ersichtlich ist, unterscheiden sich diese Grenzwerte nur um ca. 13 %, so daß eine genauere Berechnung nicht mehr für erforderlich erachtet wurde. Die von Birkebak und Abdulkadir /10/ sowie von Restrepo und Glicksman /23/ an isothermen, quadratischen Platten gemessenen Nusselt-Zahlen bestätigen die Grenzkurven.

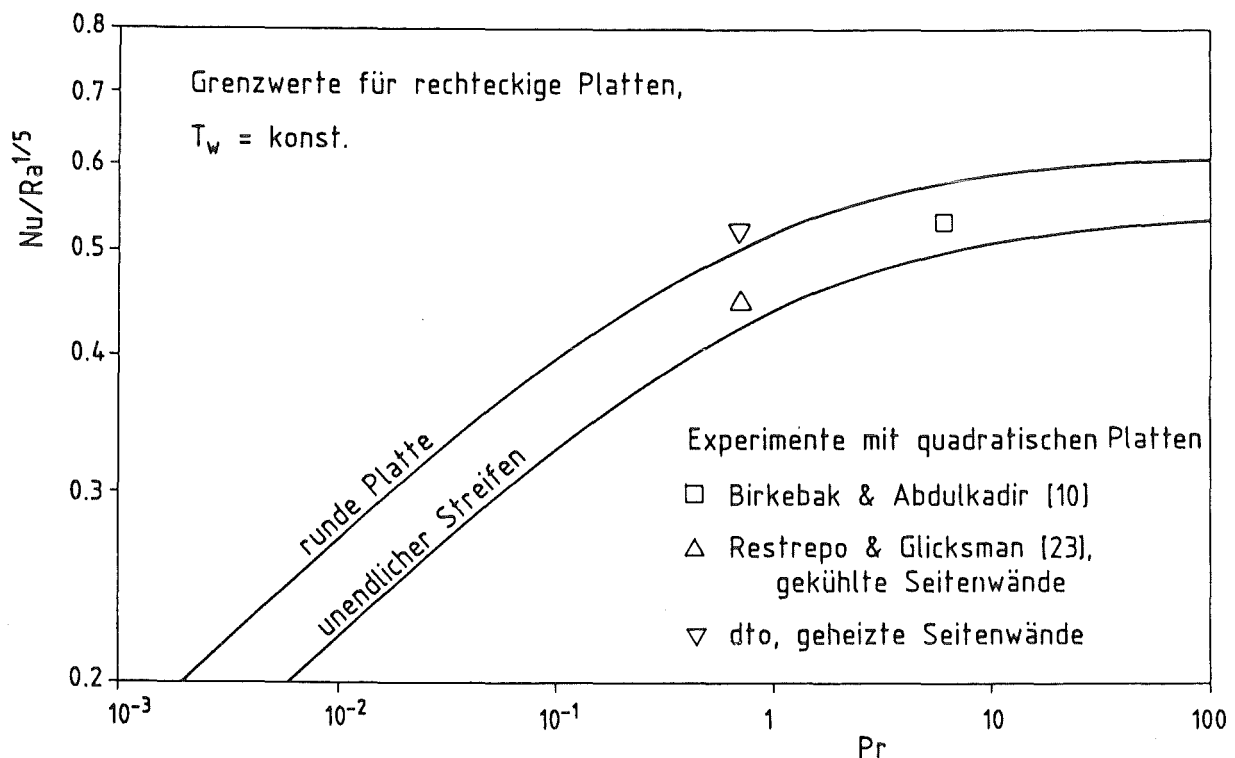


Abb. 10 Grenzwerte für den Wärmeübergang in Staupunktsnähe unter isothermen, rechteckigen Platten.

Das hier beschriebene Lösungsverfahren wurde auf denjenigen Bereich um die Plattenmitte beschränkt, in dem sich die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile nur durch einen Verzerrungsfaktor unterscheiden, also lokal ähnlich sind. Experimentelle Ergebnisse, wie z.B. von Aihara, Yamada und Endo /11/, zeigen, daß dadurch bereits der größte Teil der Platte erfaßt wird. Lediglich im Bereich der Plattenkanten ist der Wärmeübergang besser als durch dieses Ergebnis beschrieben wird.

Ein Vergleich der über die Plattenflächen gemittelten Nusselt-Zahl \bar{Nu} mit der hier berechneten lokalen Nusselt-Zahl Nu zeigt den Einfluß der Plattenkanten quantitativ. In Abb. 11 ist die relative Abweichung $(\bar{Nu}-Nu)/Nu$ als Funktion der Rayleigh-Zahl dargestellt. Die eingezeichneten experimentellen Ergebnisse deuten darauf hin, daß mit zunehmender Rayleigh-Zahl der Unterschied zwischen lokaler und mittlerer Nusselt-Zahl (etwa mit $Ra^{-1/5}$) abnimmt, so daß im Grenzfall hoher Rayleigh-Zahlen sogar der Wärmeübergang der gesamten Platte einheitlich durch die lokale Lösung beschrieben wird. Es wird hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die zitierten Integralverfahren dieses Verhalten der mittleren Nusselt-Zahl nicht erfassen.

Die Anwendbarkeit der Wärmeübergangskorrelationen auf hohe Rayleigh-Zahlen setzt voraus, daß die Strömung dort noch laminar ist. Infolge der stabilen Temperaturschichtung ist eine Instabilität der Grenzschicht jedoch erst bei sehr hohen Rayleigh-Zahlen zu erwarten. So wurde z.B. bei $Ra = 10^{10}$ weder von Hatfield und Edwards /22/ noch von Fujii und Imura /21/ eine turbulente Strömung beobachtet, so daß zumindest bis zu diesen Rayleigh-Zahlen noch eine laminare Strömung garantiert wird.

Diese Abschätzung gilt auch für Flüssigmetalle. Duchatelle und Vautrey /25/ ermittelten experimentell mit NaK in einem einseitig von oben beheizten Spalt zwischen horizontalen, planparallelen Platten, daß der Wärmeübergangskoeffizient gegenüber dem der laminaren Strömung erst zunimmt, wenn die mit der Spaltdicke gebildete Peclet-Zahl größer als 300 ist. Vergleicht man für eine grobe Abschätzung diese Spaltdicke mit der hier entstehenden

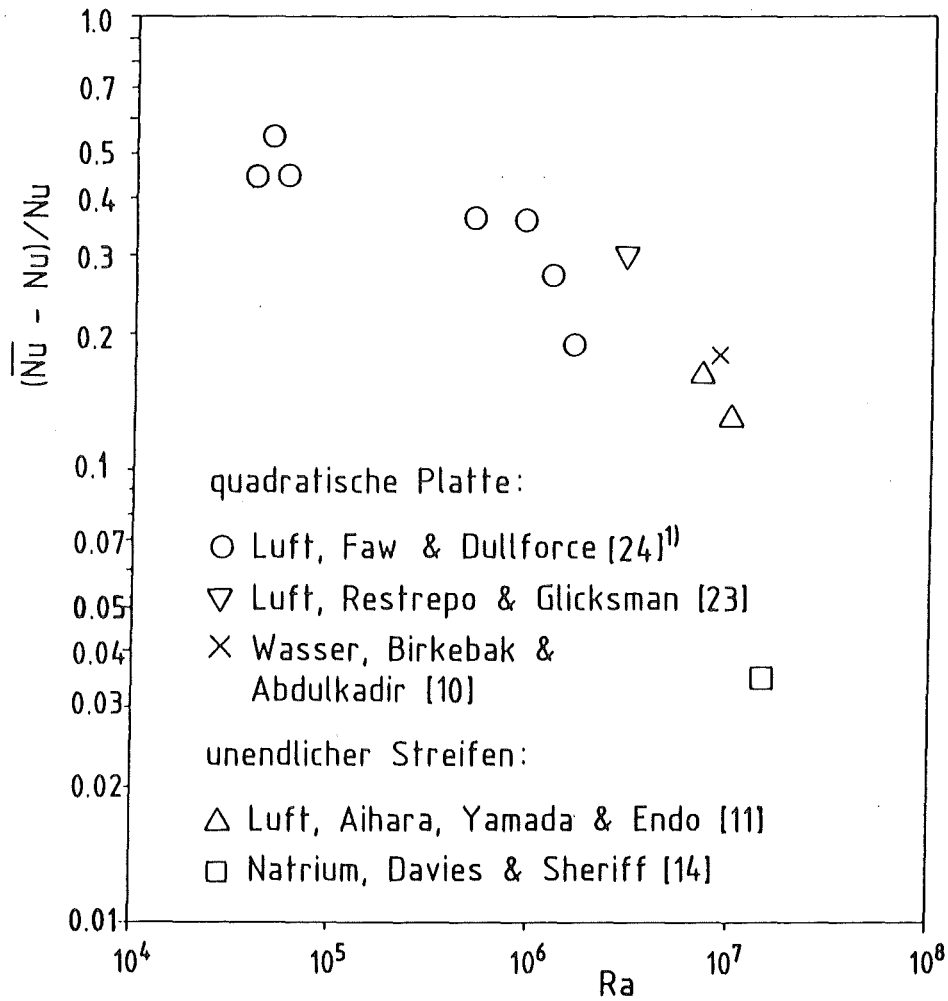


Abb. 11 Relativer Unterschied zwischen mittlerer Nusselt-Zahl \bar{Nu} und lokaler Nusselt-Zahl Nu in Staupunktsnähe

1) Abgeschätzt als $\bar{Nu} - Nu = 2(\bar{Nu} - Nu_1)$, mit Nu_1 - über eine Plattenlänge gemittelte Nusselt-Zahl

Grenzschichtdicke, so müßte die in Gleichung (9) definierte Peclet-Zahl kleiner sein als 22500, d.h. die hier berechneten Wärmeübergangsbeziehungen wären auch bei kleinen Prandtl-Zahlen noch bis zu Rayleigh-Zahlen von 10^{15} gültig.

5. Schlußfolgerungen

Es wurden insgesamt acht Korrelationen für den Wärmeübergang unter horizontalen, geheizten Platten bestimmt. Diese Korrelationen stellen Extremwerte dar, aus denen Beziehungen für Platten mit beliebigen thermischen Randbedingungen und mit beliebigen Geometrien interpoliert werden können. Sie lassen sich ferner interpolieren, um den Wärmeübergang in Flüssigkeiten mit beliebigen Prandtl-Zahlen zu beschreiben.

Voraussetzung für diese Korrelationen ist eine stationäre, laminare Strömung. Diese Annahme wird von allen bisher durchgeführten Experimenten bestätigt. Ein Übergang zu turbulenter Strömung ist nicht bekannt, auf Grund der stabilen Temperatur-Schichtung wird er erst bei sehr hohen Rayleigh-Zahlen vermutet.

Die Korrelationen lassen sich auf denjenigen Bereich um die Plattenmitte anwenden, in dem der Wärmeübergangskoeffizient konstant ist. Dieser Bereich vergrößert sich mit zunehmender Rayleigh-Zahl. Er erstreckt sich bei hohen Rayleigh-Zahlen nahezu auf die gesamte Platte. Bei niedrigen Prandtl-Zahlen ergeben die hier berechneten Korrelationen den Wärmeübergang in der Plattenmitte und damit an der Stelle minimaler Wärmeabfuhr.

Zusammen mit diesen Wärmeübergangskorrelationen wurden die Grenzschichtprofile der Geschwindigkeit und der Temperatur bei hohen und bei sehr niedrigen Prandtl-Zahlen berechnet. Diese Profile unterscheiden sich wesentlich von den experimentell bestimmten Profilen bei mäßigen Prandtl-Zahlen: das Geschwindigkeitsmaximum in der Grenzschicht verlagert sich bei kleinen Prandtl-Zahlen zur Platte und bei hohen Prandtl-Zahlen zur Außenströmung. Damit sind diese Profile nicht, wie bisher angenommen wurde, von der Prandtl-Zahl unabhängig.

Nomenklatur

g	Erdbeschleunigung
n	Schaltervariable; $n = 0$ Zweidimensionale, $n = 1$ dreidimensionale, rotationssymmetrische Strömung
m	$m = n - 1$
p	Druck
q_w	Wandwärmestrom
r	horizontale Koordinate
R	halbe Plattenbreite bzw. Plattenradius
T	Temperatur
T_w, T_∞	Wandtemperatur bzw. Temperatur im Unendlichen
u	horizontale Geschwindigkeit
v	vertikale Geschwindigkeit
v_∞	Anströmgeschwindigkeit
z	vertikale Koordinate
α	Wärmeausdehnungskoeffizient
κ	thermische Diffusivität
λ	Wärmeleitfähigkeit
ν	kinematische Zähigkeit
Ω	Wirbelfunktion
ψ	Stromfunktion

dimensionslose Größen

a	kurze Halbachse des Rotationsellipsoids
A	$Pe^{5/2}/(GrPr^2)$ bei isothermer Platte und $Pr \rightarrow 0$, $Pe^3/(Gr^*Pr^2)$ bei gleichförmig geheizter Platte und $Pr \rightarrow 0$, $Pe^{5/4}/(GrPr)$ bei isothermer Platte und $Pr \rightarrow \infty$, $Pe^{3/2}/(Gr^*Pr)$ bei gleichförmig geheizter Platte und $Pr \rightarrow \infty$.
B, C	Konstanten, definiert durch Gl. (66)
Gr	Grashof-Zahl $Gr = \alpha g (T_w - T_\infty) R^3 / \nu^2$

Gr [*]	modifizierte Graßhof-Zahl $Gr^* = \alpha g q_w R^4 / (\lambda \nu^2)$
M	Stromfunktion $M = \Psi / (v_\infty R)$
M ⁽¹⁾	Stromfunktion nach einem Iterationsschritt
Nu	Nusselt-Zahl $Nu = q_w R / (\lambda (T_w - T_\infty))$
Pe	Peclet-Zahl der Anströmung $Pe = v_\infty R / \chi$
Pr	Prandtl-Zahl $Pr = \nu / \chi$
Ra	Rayleigh-Zahl, $Ra = Gr Pr$
Ra [*]	modifizierte Rayleigh-Zahl, $Ra^* = Gr^* Pr$
U	Profil der horizontalen Geschwindigkeitskomponente $U = - \int_{\eta}^{\infty} \omega_1 d\eta \text{ falls } Pr \rightarrow 0, \quad U = \int_0^{\eta} \omega_1 d\eta \text{ falls } Pr \rightarrow \infty$
V	Profil der vertikalen Geschwindigkeitskomponente, $V = \int_0^{\eta} U d\eta$
x ₁ , x ₂	elliptische Koordinaten, Gl. (57)
η	Wandabstand, $\eta = Pe^{1/2} z / R$ falls $Pr \rightarrow 0$, $\eta = Pe^{1/4} z / R$ falls $Pr \rightarrow \infty$.
ω	Wirbelfunktion $\omega = R^2 A \Omega / (\chi Pe^{3/2})$ falls $Pr \rightarrow 0$, $\omega = R^2 A \Omega / (\chi Pe^{3/4})$ falls $Pr \rightarrow \infty$.
ω_1	Profil der Wirbelfunktion
θ	Temperatur $\theta = (T - T_\infty) / (T_w - T_\infty)$ bei isothermer Platte, $\theta = Pe^{1/2} \lambda (T - T_\infty) / (q_w R)$ bei gleichförmig geheizter Platte falls $Pr \rightarrow 0$, $Pe^{1/4} \lambda (T - T_\infty) / (q_w R)$ bei gleichförmig geheizter Platte falls $Pr \rightarrow \infty$.
θ_0, θ_1	Koeffizienten des Ansatzes $\theta = \theta_0(\eta) + \xi^2 \theta_1(\eta)$
$\theta^{(1)}$	Temperatur nach der Iteration
ξ	horizontale Koordinate, $\xi = r / R$
ϕ	Potentialfunktion, definiert durch Gl. (18)
χ	Potentialfunktion, definiert durch Gl. (62)
μ	Wurzel der Gleichung (22)
\bar{b}	Wurzel der Gleichung (59)
ζ	komplexe Koordinate, Gl. (17)

Literatur

- /1/ C. Le Rigoleur, G. Kayser: An Internal Core Catcher for a Pool LMFBR and Connected Studies, Proc. of the International Meeting on Fast Reactor Safety Technology, Seattle, WA, August 19-23, 1979, Vol. III, pp. 781-791
- /2/ R. Weise: Wärmeübergang durch freie Konvektion an quadratischen Platten, Forschung 6, 281-292 (1935)
- /3/ O.A. Saunders, M. Fishenden, H.D. Mansion: Some measurements of convection by an optical method. Engineering, 139, 483-485 (May 1935)
- /4/ W. Kraus: Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld bei freier Konvektion um eine waagerechte quadratische Platte, Phys. Z. 41, 126-150 (1940)
- /5/ W.N. Gill, D.W. Zeh, E. del Casal: Free convection on a horizontal plate, Z. Angew. Math. Phys. 16, 539-541 (1965)
- /6/ S.N. Singh, R.C. Birkebak, R.M. Drake: Laminar free convection heat transfer from downward-facing horizontal surfaces of finite dimensions. Progress in Heat and Mass Transfer, 2, 87-98 (1969)
- /7/ D. Tenchine, M. Amblard: Heat transfer by natural convection in sodium from downward facing surfaces. In M. Merilo (ed.), Thermal Hydraulics of Nuclear Reactors, Proc. of the Second International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics, Santa Barbara, USA, January 11-14, Vol. 2, 1412-1417, La Grange Park, Ill.: Amer. Nucl. Soc. (1983)
- /8/ S.N. Singh, R.C. Birkebak: Laminar free convection from a horizontal infinite strip facing downwards. Z. Angew. Math. Phys. 20, 454-461 (1969)
- /9/ J.V. Clifton, A.J. Chapman: Natural-convection on a finite-size horizontal plate. Int. J. Heat Mass Transfer, 12, 1573-1584 (1969)
- /10/ R.C. Birkebak, A. Abdulkadir: Heat transfer by natural convection from the lower side of finite horizontal, heated surfaces. Fourth International Heat Transfer Conference, Paris, vol. 4, Paper NC2.2, (1970)
- /11/ T. Aihara, Y. Yamada, S. Endo: Free convection along the downward-facing surface of a heated horizontal plate. Int. J. Heat Mass Transfer, 15, 2535-2549 (1972)
- /12/ T. Fujii, H. Honda, I. Morioka: A theoretical study of natural convection heat transfer from downward-facing horizontal surfaces with uniform heat flux. Int. J. Heat Mass Transfer, 16, 611-627 (1973)

- /13/ H. Schlichting: Grenzschrift-Theorie, Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1965
- /14/ N. W. Davies, N. Sheriff: An experimental investigation of natural convection heat transfer from downward facing surfaces in sodium for fast reactor internal core catchers, International Seminar of the Int. Conf. Heat Mass Transf. Dubrovnik, Sept. 1-5, 1980
- /15/ L.M. Milne-Thomson: Theoretical Hydrodynamics. Macmillan Press Ltd. London 1974
- /16/ N.J. Kotschin, I.A. Kibel, N.W. Rose: Theoretische Hydrodynamik. Akademie-Verlag Berlin 1954
- /17/ A. Berry, L.M. Swain: On the steady motion of a cylinder through infinite viscous fluid, Proc. Royal Soc. of London A, 766-778 (1923)
- /18/ H. Lamb: Hydrodynamics, Cambridge University Press, London (1975)
- /19/ S.W. Churchill, R. Usagi: A general expression for the correlation of rates of transfer and other phenomena, AIChE Journal 18, 6, 1121-1128, (1972)
- /20/ R.E. Faw, T.A. Dullforce: Holographic interferometric measurement of convective heat transport beneath a heated horizontal circular plate in air, Int. J. Heat Mass Transfer, 25, 1157-1166 (1982)
- /21/ T. Fujii, H. Imura: Natural-convection heat transfer from a plate with arbitrary inclination, Int. J. Heat Mass Transfer, 15, 755-767 (1972)
- /22/ D.W. Hatfield, D.K. Edwards: Edge and aspect ratio effects on natural convection from the horizontal heated plate facing downwards. Int. J. Heat Mass Transfer, 24, 6, 1019-1024 (1981)
- /23/ F. Restrepo, L.R. Glicksman: The effect of edge conditions on natural convection from a horizontal plate, Int. J. Heat Mass Transfer, 17, 135-142, (1974)
- /24/ R.E. Faw, T.A. Dullforce: Holographic interferometry measurement of convective heat transport beneath a heated horizontal plate in air, Int. J. Heat Mass Transfer, 24, 859-869 (1981)
- /25/ L. Duchatelle, L. Vautre: Determination des coefficients de convection d'un alliage NaK en écoulement turbulent entre plaques planes parallèles. Int. J. Heat Mass Transfer, 7, 1017-1031 (1964)