

KFK-30

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

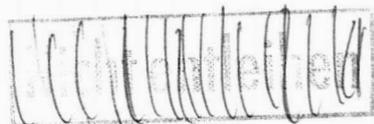
Juni 1960

KFK 30

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

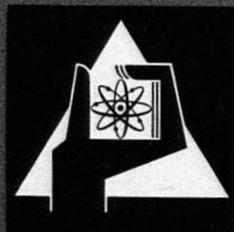
Die Bremsung von Neutronen in heterogenen Anordnungen

Gerd Blässer



KERNREAKTOR
Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.
Zentralbücherei

5. DEZ. 1960



KERNREAKTOR

BAU- UND BETRIEBS-GESELLSCHAFT M. B. H.

KARLSRUHE

Die Bremsung von Neutronen in heterogenen Anordnungen

Von GERD BLÄSSER*

(Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik, Kernforschungszentrum Karlsruhe)

(Eingegangen am 11. April 1960)

Zusammenfassung. Die Transportgleichung, die die Abbremsung von Neutronen in einem heterogenen System beschreibt, wird durch Lösung eines Hilfsproblems auf eine Integralgleichung reduziert, in die nur noch die Stoßdichte im Moderator eingeht. In erster Näherung ergibt sich eine bekannte Beziehung für den Resonanzeinfang in heterogenen Systemen.

Einleitung

Die mathematische Behandlung der Neutronenbremsung in heterogenen Systemen wird dadurch besonders erschwert, daß die Bremseigenschaften ortsabhängig, d. h. in Brennstoff und Moderator verschieden sind. Es ist daher vorteilhaft, die Transportgleichung für die Neutronenbremsung in dem betrachteten heterogenen Problem aufzuspalten in zwei Gleichungen, von denen die eine Gleichung lediglich Punkte im Brennstoff miteinander verknüpft, während die andere Gleichung den Verlauf der Stoßdichte im Moderator beschreibt. Unter der Annahme, daß man die Bremsung im Brennstoff gegenüber der im Moderator vernachlässigen kann, läßt sich diese Separation leicht ausführen. Außerdem zeigt sich, daß man die Gleichung für das Hilfsproblem, das den Transport von Neutronen im Brennstoff behandelt, nicht exakt zu lösen braucht, da man für die Größe, die für die weiteren Betrachtungen wesentlich ist, einen stationären Ausdruck angeben kann.

Die so erhaltene Gleichung für die Neutronenbremsung im Moderator läßt sich iterativ lösen. Jedoch wird hier nur das allgemeine Verfahren skizziert. Man erhält so bereits in erster Näherung einen Ausdruck, der schon an anderer Stelle [1] für die Beschreibung des Resonanzeinfangs in heterogenen Systemen abgeleitet wurde.

1. Die Grundgleichungen

Wir beschränken uns auf den Fall ebener Geometrie, d. h. auf die Betrachtung der Diffusion von Neutronen in einem Plattengitter; diese Beschränkung vereinfacht die Schreibweise, obwohl sich prinzipiell die hier angegebene Methode auch auf andere Geometrien anwenden läßt.

Weiter wollen wir die Bremsung im Uran und die Absorption im Moderator vernachlässigen, sowie bei der Streuung im Moderator lediglich den kugelsymmetrischen Anteil des Streuoperators berücksichtigen.

Die Koordinate x verlaufe senkrecht zu den Platten. $K(x, x', u)$ sei die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron der Lethargie u in einem Punkt mit der Koordinate x eine Wechselwirkung erfährt, nachdem seine letzte Wechselwirkung mit den Atomen des umgebenden Mediums in einem Punkt mit der Koordinate x' stattgefunden hat. Dann gilt für die Stoßdichte $\varphi(x, u)$ die Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, u) = & h(u) \int_{x' \in V_0} K(x, x', u) \varphi(x', u) dx' + \\ & + \int_{x' \in V_1} \int_0^u K(x, x', u) f(u - u') \varphi(x', u') dx' du' + \\ & + S(x, u). \end{aligned} \right\} (1.1)$$

Der Index 0 bezieht sich auf die Punkte im Uran, 1 auf den Moderator. $h(u)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Wechselwirkung im Uran eine Streuung ist;

* Forschungsabteilung der AEG, Frankfurt; zur Zeit beim Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik der Kernreaktor Bau- und Betriebs-Gesellschaft mbH., Karlsruhe.

$f(u-u')$ ist der Bremskern des Moderators

$$f(u-u') = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} e^{-(u-u')} & \text{für } u' \leq u \leq u' + \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$\alpha = \left(\frac{M-1}{M+1}\right)^2, \quad \varepsilon = \ln \frac{1}{\alpha}$$

(M = Massenzahl der Moderatorkerne).

Der explizite Ausdruck für $K(x, x', u)$ lautet bekanntlich

$$K(x, x', u) = \Sigma(x, u) E_1\{\tau(x, x', u)\}.$$

Dabei ist $\tau(x, x', u)$ der „optische Weg“

$$\tau(x, x', u) = \int_0^{|x-x'|} \Sigma\left(x-s \frac{x-x'}{|x-x'|}, u\right) ds.$$

Führt man nun die Beziehungen

$$\varphi_0(x, u) = \begin{cases} \varphi(x, u) & x \in V_0 \\ 0 & x \in V_1 \end{cases}$$

und

$$\varphi_1(x, u) = \begin{cases} 0 & x \in V_0 \\ \varphi(x, u) & x \in V_1 \end{cases}$$

ein und indiziert auch den Bremskern entsprechend, so zerfällt Gl. (1.1) in die gekoppelten Integralgleichungen für die Stoßdichten in Uran und Moderator

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(x, u) &= \int_{x' \in V_0} h(u) K_{00}(x, x', u) \varphi_0(x', u) dx' + \\ &+ \int_{x' \in V_1} \int_0^u K_{01}(x, x', u) f(u-u') \varphi_1(x', u') dx' du' + \\ &+ S_0(x, u) \\ \varphi_1(x, u) &= \int_{x' \in V_0} h(u) K_{10}(x, x', u) \varphi_0(x', u) dx' + \\ &+ \int_{x' \in V_1} \int_0^u K_{11}(x, x', u) f(u-u') \varphi_1(x', u') dx' du' + \\ &+ S_1(x, u). \end{aligned} \right\} (1.2)$$

Ist nun $L(x, x', u)$ Lösung des Hilfsproblems

$$\left. \begin{aligned} L(x, x', u) &= h(u) \int_{x'' \in V_0} L(x, x'', u) K_{00}(x'', x', u) dx'' + \\ &+ K_{10}(x, x', u) \end{aligned} \right\} (1.3)$$

so folgt durch Multiplikation der ersten Gl. (1.2) mit $L(x, x', u)$ und Integration über x' die Beziehung

$$\left. \begin{aligned} \int_{x' \in V_0} K_{10}(x, x', u) \varphi_0(x', u) dx' \\ = \int_{x' \in V_0} \int_{x'' \in V_1} \int_0^u L(x, x', u) K_{01}(x', x'', u) f(u-u') \times \\ \times \varphi_1(x'', u') dx'' du' + \\ + \int_{x' \in V_0} L(x, x', u) S(x', u) dx'. \end{aligned} \right\} (1.4)$$

Setzt man (1.4) in die zweite Gl. (1.2) ein, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x, u) &= \int_{x' \in V_1} \int_0^u R(x, x', u) \varphi_1(x', u') \times \\ &\times f(u-u') dx' du' + S_1(x, u) \end{aligned} \right\} (1.5)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} R(x, x', u) &= K_{11}(x, x', u) + h(u) N(x, x', u) \\ N(x, x', u) &= \int_{x'' \in V_0} L(x, x'', u) K_{01}(x'', x', u) dx'' \\ S'(x, u) &= S_1(x, u) + h(u) \int_{x' \in V_0} L(x, x', u) \times \\ &\times S_0(x', u) dx'. \end{aligned} \right\} (1.6)$$

Damit erhalten wir statt des Systems von zwei gekoppelten Integralgleichungen eine einzige Integralgleichung, die sich nur noch auf Größen im Moderator bezieht. Die Gln. (1.3) und (1.5) liefern zusammen mit den Definitionen (1.6) die vollständige Formulierung des Problems.

2. Variationsprinzip für $N(x, x', u)$

Neben der Hilfsgröße $L(x, x', u)$ führen wir noch die Größe $\tilde{L}(x, x', u)$ ein als Lösung der Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \tilde{L}(x, x', u) &= h(u) \int_{x'' \in V_0} \tilde{L}(x'', x', u) \times \\ &\times K_{00}(x, x'', u) dx'' + K_{01}(x, x', u). \end{aligned} \right\} (2.1)$$

Offensichtlich gilt dann

$$\left. \begin{aligned} N(x, x', u) &= \int_{x'' \in V_0} L(x, x'', u) K_{01}(x'', x', u) dx'' \\ &= \int_{x'' \in V_0} \int_{x''' \in V_0} L(x, x'', u) \{\delta(x'' - x''') - \\ &\quad - h(u) K_{00}(x'', x''', u)\} \tilde{L}(x''', x', u) dx''' dx'' \\ &= \int_{x'' \in V_0} K_{10}(x, x'', u) \tilde{L}(x'', x', u) dx''. \end{aligned} \right\} (2.2)$$

Infolgedessen kann man $N(x, x', u)$ auch in der Form schreiben

$$\left. \begin{aligned} N(x, x', u) &= \frac{\left(\int_{x'' \in V_0} L(x, x'', u) K_{01}(x'', x', u) dx''\right) \times \\ &\int_{x' \in V_0} \int_{x''' \in V_0} L(x, x'', u) \{\delta(x'' - x''') - \\ &\quad \times \left(\int_{x'' \in V_0} K_{10}(x, x'', u) \tilde{L}(x'', x', u) dx''\right) \\ &\quad - h(u) K_{00}(x'', x''', u)\} \tilde{L}(x''', x', u) dx''' dx''}{\int_{x'' \in V_0} L(x, x'', u) K_{01}(x'', x', u) dx''}. \end{aligned} \right\} (2.3)$$

Der Ausdruck (2.3) ist für beliebige Werte von x, x' und u stationär bei Variationen der Funktionen L und \tilde{L} (als Funktionen von x'') in der Umgebung der Lösungen der Integralgleichungen (1.3) und (2.1), denn es gilt

$$\begin{aligned} \delta N(x, x', u) &= \int_{x'' \in V_0} \delta L(x, x'', u) \{K_{01}(x'', x', u) - \\ &\quad - \tilde{L}(x'', x', u) + h(u) \int_{x''' \in V_0} K_{00}(x'', x''', u) \tilde{L}(x''', x', u) \times \\ &\quad \times dx'''\} dx'' + \int_{x'' \in V_0} \delta \tilde{L}(x'', x', u) \{K_{10}(x, x'', u) - \\ &\quad - L(x, x'', u) + h(u) \int_{x''' \in V_0} K_{00}(x''', x'', u) \times \\ &\quad \times L(x, x''', u) dx'''\} dx'' = 0 \end{aligned}$$

bei Gültigkeit dieser Integralgleichungen.

Die Integralgleichungen für L und \tilde{L} kann man ansehen als die Integralgleichungen für den Transport von Neutronen im Uran, die von Quellpunkten im Moderator aus ins Uran gelangt sind. Befindet man sich nicht gerade in einem Lethargiebereich hoher Absorption im Uran (in dem $h \ll 1$ gilt), so wird der

Fluß im Uran nicht sehr wesentlich mit der x -Koordinate variieren; wir können also in erster Näherung annehmen, daß

$$\left. \begin{aligned} L(x, x'', u) &= \bar{L}(x, -, u) \equiv \frac{1}{V_0} \int_{x' \in V_0} L(x, x'', u) dx'' \\ \tilde{L}(x'', x, u) &= \tilde{\bar{L}}(-, x, u) \equiv \frac{1}{V_0} \int_{x' \in V_0} \tilde{L}(x'', x, u) dx' \end{aligned} \right\} (2.4)$$

gilt. Setzt man dies in Gl. (2.3) ein und bezeichnet man zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{ij}(-, x', u) &= \int_{x'' \in V_i} K_{ij}(x'', x', u) dx'' \\ \bar{K}_{ij}(x, -, u) &= \frac{1}{V_j} \int_{x' \in V_j} K_{ij}(x, x', u) dx' \\ \bar{\bar{K}}_{ij}(u) &= \frac{1}{V_j} \int_{x \in V_i} \int_{x' \in V_j} K_{ij}(x, x', u) dx dx' \end{aligned} \right\} (2.5)$$

so erhält man

$$N(x, x', u) = \frac{\bar{K}_{10}(x, -, u) \bar{K}_{01}(-, x', u)}{1 - h(u) \bar{\bar{K}}_{00}(u)} \quad (2.6)$$

Da $N(x, x', u)$ stationär ist, dürfte der Ausdruck (2.6) auch noch in den Gebieten merklicher Absorption eine gute Näherung für $N(x, x', u)$ darstellen, auch wenn in diesen Gebieten L und \tilde{L} im Uran nicht mehr als konstant anzusehen sind.

Da außerdem $N(x, x', u)$ noch mit dem Faktor $h(u)$ multipliziert in den endgültigen Ausdruck für $R(x, x', u)$ eingeht, stellt dieser Term im Gebiet starker Absorption im allgemeinen nur eine kleine Korrektur dar, so daß sich die Ungenauigkeit in N nur sehr gering auf das Endergebnis auswirkt.

Wir können also allgemein annehmen, daß die Größe $N(x, x', u)$ durch die Gl. (2.6) gegeben wird.

3. Störungstheorie in erster Näherung; Resonanzformel

Wie an anderer Stelle gezeigt [1], ist in einem genügend großen Reaktor bei fehlender Absorption und konstanten Wirkungsquerschnitten in Lethargiebereichen merklich oberhalb der Quell-Lethargie der Fluß (und damit auch die Stoßdichte) im Moderator konstant. Setzt man diesen konstanten Wert $\varphi_{1(0)}$ auf der rechten Seite der Gl. (1.5) ein, so erhält man in erster Näherung (in Lethargiebereichen weit oberhalb der Quell-Lethargie)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1(1)}(x, u) &= \int_{x' \in V_1} \int_0^u R(x, x', u) \varphi_{1(0)} f(u - u') du' dx' \\ &= \varphi_{1(0)} \bar{R}(x, -, u) \end{aligned} \right\} (3.1)$$

mit der Abkürzung

$$\bar{R}(x, -, u) = \int_{x' \in V_1} R(x, x', u) dx'$$

Speziell erhalten wir für die Größe

$$\bar{\Phi}_1(u) = \int_{x \in V_1} \varphi_1(x, u) dx$$

in dieser Näherung den Ausdruck

$$\bar{\Phi}_{1(1)}(u) = \bar{\bar{R}}(u) \bar{\Phi}_{1(0)} \quad (3.2)$$

mit

$$\bar{\bar{R}}(u) = \frac{1}{V_1} \int_{x \in V_1} \int_{x' \in V_1} R(x, x', u) dx dx'$$

Im Falle verschwindender Absorption muß $\bar{\Phi}_{1(1)}(u) = \bar{\Phi}_{1(0)}$ gelten. Die Größe

$$W(u) \bar{\Phi}_{1(0)} = (1 - \bar{\bar{R}}(u)) \bar{\Phi}_{1(0)} \quad (3.3)$$

beschreibt also den Einfluß der Absorption pro Lethargie-Einheit in erster Näherung.

Haben wir es mit vielen, weit auseinanderliegenden Resonanzlinien zu tun, so können wir annehmen, daß auf die i -te Resonanzlinie der asymptotische (räumlich und hinsichtlich der Lethargie wieder konstante Fluß auftritt, der sich hinter der $(i - 1)$ -ten Resonanzlinie einstellt, und wir erhalten in erster Näherung bei Normierung der Quellstärke auf Eins, so daß $\bar{\Phi}_{1(0)} \approx 1/\xi$ ist,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Phi}_{1(1)}(u) &\approx \frac{1}{\xi} \prod_{\text{alle } u_i; \leq u} \left(1 - \frac{\Delta_i}{\xi} W(u_i)\right) \\ &\approx \frac{1}{\xi} e^{-\frac{1}{\xi} \sum_i W(u_i) \Delta_i} \approx \frac{1}{\xi} e^{-\frac{1}{\xi} \int_0^u W(u') du'} \end{aligned} \right\} (3.4)$$

wobei Δ_i die Größe des Lethargie-Intervalls ist, in dem u_i liegt.

Damit ergibt sich für die Resonanzentkommwahrscheinlichkeit bis zur Lethargie u der Ausdruck

$$p(u) = \int_0^u \bar{\Phi}_{1(1)}(u') G(u - u') du' = e^{-\frac{1}{\xi} \int_0^u W(u') du'} \quad (3.5)$$

Hierbei ist

$$G(u - u') = \int_u^\infty f(u'' - u') du''$$

Explizit ist mit $M_0(u) = \bar{\bar{K}}_{00}(u)$ und $M_1(u) = \bar{\bar{K}}_{11}(u)$ wegen

$$\bar{\bar{K}}_{01}(u) + \bar{\bar{K}}_{11}(u) = 1, \quad \bar{\bar{K}}_{00}(u) + \bar{\bar{K}}_{10}(u) = 1$$

die Größe $W(u)$ gegeben durch

$$W(u) = (1 - h(u)) \frac{1 - M_1(u)}{1 - h(u) M_0(u)} \quad (3.6)$$

und das ist wieder genau der gleiche Ausdruck, der auf Grund einer etwas anderen Argumentation in einer früheren Arbeit [1] abgeleitet wurde.

4. Störungstheorie in höherer Näherung

Im Gegensatz zu dem in der früheren Arbeit [1] verwendeten Verfahren kann man jetzt auch beliebige höhere Näherungen berechnen, indem man die Störungstheorie weitertreibt. So erhält man in zweiter Näherung unter der Voraussetzung, daß die Absorption erst weit oberhalb der Quell-Lethargie einsetzt, den Ausdruck

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1(2)}(x, u) &= \varphi_{1(0)} \int_{x' \in V_1} \int_{x'' \in V_1} \int_0^u R(x, x', u) \times \\ &\quad \times R(x', x'', u') f(u - u') dx' dx'' du' \end{aligned} \right\} (4.1)$$

Er gilt in einem Lethargiebereich weit oberhalb der Quell-Lethargie. Zur Konvergenz des störungstheoretischen Verfahrens ist zu bemerken, daß die effektive Absorptionswahrscheinlichkeit W ungefähr gleich $V_0 \bar{\Sigma}_{a0}^{\text{eff}} / V_1 \Sigma_1$ ist, wobei $\bar{\Sigma}_{a0}^{\text{eff}}$ der unter Berücksichtigung der Selbstabschirmung [2] berechnete effektive Absorptionskoeffizient des Urans ist. Der Querstrich über dem $\bar{\Sigma}_{a0}^{\text{eff}}$ soll dabei die Mittelung über das betrachtete Lethargieintervall andeuten. Das Verhältnis $\bar{\Sigma}_{a0}^{\text{eff}} / \Sigma_1$ wird bei den üblichen Ausführungsformen heterogener Reaktoren im ungünstigsten Fall etwa gleich 1, so daß für $V_0 \ll V_1$ die Iteration sehr schnell konvergieren dürfte.

5. Zusammenhang mit der diffusionstheoretischen Behandlung des heterogenen Abbremsproblems

Die der Gl. (1.1) entsprechende diffusionstheoretische Formulierung des Problems wäre

$$\left. \begin{aligned} \rho(x, u) = \Sigma_{0s}(u) \int_{x \in V_0} K_D(x, x', u) \rho(x', u) dx' + \\ + \int_{x \in V_1} \int_0^u K_D(x, x', u) f(u - u') \times \\ \times \Sigma_1 \rho(x', u') dx' du' + S(x, u). \end{aligned} \right\} (5.1)$$

Dabei ist $\rho(x, u)$ der Fluß pro Lethargieeinheit und K_D der Diffusionskern für das heterogene System, d.h. die Greensche Funktion des heterogenen Problems, also die Lösung der Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} K_D(x, x', u) - \kappa^2(x, u) K_D(x, x', u) \\ = -\delta(x - x') / D(x, u) \end{aligned} \right\} (5.2)$$

mit

$$\begin{aligned} \kappa^2(x, u) &= \frac{\Sigma_i(u)}{D_i(u)} \text{ für } x \in V_i \quad (i = 0, 1), \\ D(x, u) &= D_i(u) \text{ für } x \in V_i \quad (i = 0, 1) \end{aligned}$$

und den Randbedingungen: a) Stetigkeit von Fluß und Strom an den Grenzflächen Uran-Moderator, und b) Verschwinden des Flusses auf dem extrapolierten Rand des Reaktors. Die Funktion K_D wird also als Lösung eines Eingruppen-Diffusionsproblems gewonnen.

Ersetzt man der Einfachheit halber die Uranplatten endlicher Dicke durch unendlich dünne Platten in den Punkten $x = x_i$ ($i = 1, \dots, N$) mit geeignet

gewähltem effektiven Absorptionsquerschnitt Σ_{a0}^{eff} , so ergibt sich K_D aus

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} K_D(x, x', u) - \kappa_1^2(u) K_D(x, x', u) - \\ - \sum_{i=1}^N \frac{a \Sigma_{a0}^{\text{eff}}}{D_1} \delta(x - x_i) K_D(x, x', u) = -\frac{\delta(x - x')}{D_1} \end{aligned} \right\} (5.3)$$

Geht man mit dem so bestimmten K_D in (5.1) ein, so kann man den ersten Term, der die Streuung im Uran beschreibt, weglassen, wenn bei der Berechnung des effektiven Absorptionsquerschnitts der Uranplatten die Streuung im Uran bereits berücksichtigt wurde. Gl. (5.1) geht also in dieser Näherung über in

$$\left. \begin{aligned} \rho(x, u) = \int_{x' \in V_1} \int_0^u K_D(x, x', u) f(u - u') \times \\ \times \Sigma_1 \rho(x', u') dx' du' + S(x, u). \end{aligned} \right\} (5.4)$$

Diese Gleichung ist der von MEETZ [3] betrachteten Gleichung

$$\left. \begin{aligned} D_1 \frac{d^2}{dx^2} \rho(x, u) + \Sigma_1 \int_0^u \rho(x, u') f(u - u') du' - \\ - \Sigma_1 \rho(x, u) - \sum_{i=1}^N a \Sigma_{a0}^{\text{eff}} \delta(x - x_i) \rho(x, u) + \\ + q(x, u) = 0 \end{aligned} \right\} (5.5)$$

äquivalent, wenn der Quellterm in (5.4) durch

$$S(x, u) = \int_{x' \in V_1} K_D(x, x', u) q(x', u) dx'$$

gegeben wird.

Eine direkte Ableitung der Gl. (5.1) bzw. des Diffusionskerns K_D aus dem Transportkern $\Sigma(x, u) \times E_1[\tau(x, x', u)]$ ist dagegen praktisch nicht möglich, da man nur in homogenen Medien die Diffusionstheorie aus der Transporttheorie ableiten kann. Infolgedessen sind die transporttheoretische und die diffusionstheoretische Beschreibung mathematisch im wesentlichen verschiedene Formulierungen des Abbremsproblems, die nur im Falle eines weiten Gitters und kleiner epithermischer Absorption die gleichen Ergebnisse liefern dürften.

Literatur: [1] BLÄSSER, G.: Nukleonik 1, 216 (1959). — [2] STEWART, J.C., u. P.F. ZWEIFEL: Genfer Ber. P/631 (1958). — [3] MEETZ, K.: Unveröffentlicht.