

KFK-144

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM  
KARLSRUHE**

**KERNREAKTOR**  
BAU- UND BETRIEBS-GESSELLSCHAFT M. B. H.  
Verwaltung der Kernforschungsanstalt  
2. Juli 1963

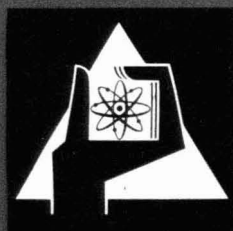
Februar 1963

KFK 144

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Über eine Lösung der kinetischen Gleichungen bei periodischen  
Reaktivitätsänderungen

A. Fraude



KERNREAKTOR

BAU- UND BETRIEBS-GESellschaft M. B. H.

KARLSRUHE

## **Über eine Lösung der kinetischen Gleichungen bei periodischen Reaktivitätsänderungen**

Von **A. FRAUDE**

Aus dem Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik des Kernforschungszentrums Karlsruhe

Mit 3 Textabbildungen

*(Eingegangen am 29. Oktober 1962)*

**KERNREAKTOR**  
Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H.  
Verwaltung der Zentralbücherei

**2. Juli 1963**

*Zusammenfassung.* Es wird eine Lösung der kinetischen Gleichungen eines Reaktors bei periodischem Reaktivitätsverlauf angegeben, die aus der Lösung der linearisierten Form dieser Gleichungen entwickelt wird. Anhand dieser Lösung wird das Zustandekommen und die Größe des exponentiellen Anstiegs der Neutronendichte erläutert.

### 1. Einleitung

Im Zusammenhang mit Stabilitätsuntersuchungen an Reaktoren stellt sich die Frage nach dem zeitlichen Verhalten der Neutronendichte bei periodischer Änderung der Reaktivität. In den meisten Fällen genügt es hierbei, die sog. linearisierte Form der kinetischen Gleichungen zu verwenden, die ohne Schwierigkeiten lösbar ist, wobei die Lösung auf die bekannte Übertragungsfunktion führt. In der vorliegenden Arbeit wird eine Lösung der kinetischen Gleichungen in ihrer nichtlinearen Form angegeben. Dabei interessiert vor allem das exponentielle Ansteigen der Neutronendichte, das sich der rein periodischen Änderung überlagert, wenn die Reaktivitätsänderung  $\delta k(t)$  nicht auch einen zeitlich konstanten negativen Term von bestimmter Größe enthält. Die Untersuchung beschränkt sich auf eine gemittelte Gruppe verzögerter Neutronen.

### 2. Kinetische Gleichungen und Lösungsansatz

Das Zeitverhalten der ortsunabhängigen Neutronendichte  $n(t)$  unter Berücksichtigung der Neutronenvorläufer  $C_i(t)$  der verzögerten Neutronen, die mit einem Bruchteil  $\beta_i$  der Gesamtzahl der Neutronen vertreten sind und eine Zerfallskonstante  $\lambda_i$  haben, wird durch die Gleichungen beschrieben:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\beta}{l} ((1 - \beta) \delta k(t) - 1) \cdot n(t) + \sum_i \lambda_i C_i(t), \quad (1a)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = -\lambda_i C_i(t) + \frac{\beta_i}{l} (1 + \beta \cdot \delta k(t)) \cdot n(t). \quad (1b)$$

Dabei ist  $l$  die effektive Lebensdauer und  $\delta k(t)$  die auf  $\beta = \sum_i \beta_i$  bezogene Änderung des effektiven Multiplikationsfaktors, die für die folgende Rechnung in der Form

$$\left. \begin{aligned} \delta k(t) &= \delta + k \cdot \cos(\omega t + \varphi) & t \geq 0 \\ &= 0 & t < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

angesetzt wird. Dabei sind  $\delta$  ein zeitlich konstanter Term,  $\omega$  die Kreisfrequenz der Anregung und  $\varphi$  deren Phasenwinkel. Mit Gl. (2) gelten dann die Anfangsbedingungen

$$n(0) = n_0, \quad (3a)$$

$$C_i(0) = C_{i_0} = \frac{\beta_i n_0}{\lambda_i l}, \quad (3b)$$

sowie 
$$\dot{n}(0) = \frac{\beta}{l} (1 - \beta) \cdot n_0 \cdot \delta k(0). \quad (3c)$$

Für sehr kleine Werte von  $\delta k$  ist auch die Änderung  $\delta n$  der Neutronendichte  $n$  klein, und man kann dann mit dem Ansatz

$$n(t) = n_0 + \delta n(t), \quad (4a)$$

$$C_i(t) = C_{i_0} + \delta C_i(t) \quad (4b)$$

die Gln. (1) unter Vernachlässigung von Produkten  $\delta k \cdot \delta n$  in die linearisierte Form

$$\frac{d\delta n}{dt} = \frac{\beta}{l} (1 - \beta) n_0 \cdot \delta k - \frac{\beta}{l} \delta n + \sum_i \lambda_i \delta C_i, \quad (5a)$$

$$\frac{d\delta C_i}{dt} = -\lambda_i \cdot \delta C_i + \frac{\beta_i}{l} (\delta n + \beta \cdot n_0 \cdot \delta k) \quad (5b)$$

überführen, die sich streng lösen läßt. Mit Hilfe der Laplace-Transformation erhält man mit

$$\overline{\delta n}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \delta n(t) dt, \quad (6)$$

$$\overline{\delta n}(s) = n_0 \cdot \beta \cdot G_0(s) \cdot \overline{\delta k}(s), \quad (7)$$

wobei

$$G_0(s) = \frac{1 - s \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i + s}}{s \left( l + \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i + s} \right)} \quad (8)$$

ist. Mit  $\delta = 0$ , also rein periodischer Anregung, ist

$$\overline{\delta k}(s) = \frac{k}{2} \left( \frac{e^{j\varphi}}{s - j\omega} + \frac{e^{-j\varphi}}{s + j\omega} \right). \quad (9)$$

Die Rücktransformation von Gl. (7) ergibt bei sechs Gruppen verzögerter Neutronen

$$\left. \begin{aligned} \delta n(t) &= n_0 \cdot \beta \cdot \frac{k}{2} \left[ - \frac{2 \sin \varphi}{\omega \left( l + \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{v=1}^6 \frac{1 - s_v \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\lambda_i + s_v}}{s_v \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{(\lambda_i + s_v)^2}} \left( \frac{e^{j\varphi}}{s_v - j\omega} + \frac{e^{-j\varphi}}{s_v + j\omega} \right) e^{s_v t} + \right. \\ &\quad \left. + G_0(j\omega) e^{j(\omega t + \varphi)} + G_0(-j\omega) e^{-j(\omega t + \varphi)} \right], \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

wobei die  $s_v$  die Wurzeln der Gleichung

$$l + \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i + s_v} = 0 \tag{11}$$

sind. Da alle  $s_v < 0$  sind, stellt der zweite Term in Gl. (10) den abklingenden Einschwingvorgang dar. Nach hinreichend langer Zeit bleibt eine rein periodische Änderung von  $\delta n$ , zu der je nach der Anfangsphase der Reaktivität ein konstantes Glied hinzu kommt.

Eine strenge Lösung der kinetischen Gln. (1) in der vollständigen, nichtlinearen Form bereitet erhebliche Schwierigkeiten und ist bisher auch noch nicht angegeben worden. Das Hilfsmittel der Laplace-Transformation, mit der auch die Einschwingvorgänge erfaßt werden, ist wegen des Produktes  $\delta k(t) n(t)$  nicht mehr anwendbar. Eine wesentliche Erleichterung bringt hier nun die Zusammenfassung der sechs Gruppen verzögerter Neutronen zu einer gemittelten Gruppe mit den Parametern  $\beta$  und  $\lambda$ . Ohne daß dabei die Struktur der Lösung verändert wird, gewinnt man — bei hinreichender Genauigkeit — einen guten Einblick in die Zusammenhänge.

Durch Einsetzen der Gln. (1) in die nach  $t$  abgeleitete Gl. (1a) erhält man für  $n(t)$  die Differentialgleichung

$$\ddot{n} + \left( \frac{\beta}{l} + \lambda - \frac{\beta}{l} (1-\beta) \delta k \right) \dot{n} - \frac{\beta}{l} \left( (1-\beta) \delta \dot{k} + \lambda \delta k \right) n = 0 \tag{12}$$

oder

$$\ddot{n} + g(t) \dot{n} + h(t) n = 0. \tag{13}$$

In dieser Differentialgleichung mit den periodischen Koeffizienten  $g$  und  $h$  läßt sich durch den Ansatz

$$n(t) = u(t) \cdot v(t) \tag{14}$$

und die Bedingung

$$\frac{\dot{v}}{v} = - \frac{1}{2} g \tag{15}$$

das Glied mit der 1. Ableitung beseitigen; man erhält für  $u(t)$  die Differentialgleichung

$$\ddot{u} + \Phi(t) u = 0 \tag{16}$$

mit

$$\Phi(t) = h - \frac{g^2}{4} - \frac{\dot{g}}{2}. \tag{17}$$

Diese Differentialgleichung ist vom Typ der Hillschen Differentialgleichung [1], [2], für die man die Lösung in der Form

$$u(t) = e^{\mu t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i n \omega t} \tag{18}$$

ansetzt, wenn  $\omega$  die Grundfrequenz von  $\Phi(t)$  ist. Der charakteristische Exponent  $\mu$  wird dabei aus der unendlichen Hillschen Determinanten bestimmt. Dieser Lösungsweg gibt jedoch keine Auskunft darüber, wie die einzelnen Parameter der Gl. (12) in  $\mu$  eingehen, und wie groß  $\delta$  in Gl. (2) sein muß, damit  $\mu$  zu Null wird.

Deshalb soll im folgenden eine Lösung angegeben werden, aus der diese Zusammenhänge erkennbar sind. Hierzu machen wir den Ansatz

$$n(t) = n_0 \left( 1 + \frac{\delta n}{n_0} \right) (A e^{z_1(t)} + B e^{z_2(t)}) \tag{19}$$

der als ersten Faktor die Lösung der linearisierten Gleichungen enthält und als zweiten einen Ausdruck, der das nichtlineare Verhalten beschreibt.

Nach Einsetzen von Gl. (19) in die Differentialgleichung (12) und unter Berücksichtigung, daß für  $\delta n/n_0$  nach Gl. (5a, b)

$$\frac{\delta \ddot{n}}{n_0} + \left( \frac{\beta}{l} + \lambda \right) \frac{\delta \dot{n}}{n_0} - \frac{\beta}{l} \left( (1-\beta) \delta k + \lambda (\delta k - \delta) \right) = 0 \tag{20}$$

gilt, folgt für die gesuchten Funktionen  $z(t)$  die Differentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} & \left( 1 + \frac{\delta n}{n_0} \right) (\ddot{z} + \dot{z}^2) + 2 \frac{\delta \dot{n}}{n_0} \dot{z} + \\ & + \left( \frac{\beta}{l} + \lambda - \frac{\beta}{l} (1-\beta) \delta k \right) \left( 1 + \frac{\delta n}{n_0} \right) \dot{z} \\ & = \frac{\beta \lambda}{l} \delta + \frac{\beta}{l} \left( (1-\beta) \left( \delta \dot{k} \cdot \frac{\delta n}{n_0} \right) + \lambda \delta k \cdot \frac{\delta n}{n_0} \right). \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

Mit der Substitution

$$z(t) = \int_0^t \psi(t) dt \tag{22}$$

geht Gl. (21) über in

$$\left. \begin{aligned} & \left( 1 + \frac{\delta n}{n_0} \right) (\dot{\psi} + \psi^2) + \\ & + \left( 2 \frac{\delta \dot{n}}{n_0} + \left( \frac{\beta}{l} + \lambda - \frac{\beta}{l} (1-\beta) \delta k \right) \left( 1 + \frac{\delta n}{n_0} \right) \right) \psi \\ & = \frac{\beta \lambda}{l} \delta + \frac{\beta}{l} \left( (1-\beta) \left( \delta \dot{k} \cdot \frac{\delta n}{n_0} \right) + \lambda \delta k \cdot \frac{\delta n}{n_0} \right). \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

Vernachlässigt man in dieser Gleichung die Produkte  $\delta k \cdot \frac{\delta n}{n_0}$ , so wird die Differentialgleichung mit  $\delta = 0$  homogen, wobei eine Lösung  $\psi_1 = 0$  ist. Gleichzeitig wird in Gl. (19)  $A = 1$  und  $B = 0$ , so daß sich wieder die lineare Lösung ergibt. Da  $\delta n/n_0$  proportional zur Reaktivitätsamplitude  $k$  ist, können daher in den gesuchten Funktionen  $\psi_1(t)$  und  $\psi_2(t)$  mit  $\delta = 0$  nur Glieder mit  $k^2$  und höherer Ordnung auftreten.

Die Randbedingungen Gln. (3) gehen mit dem Ansatz (19) und mit

$$\delta n(0) = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\delta \dot{n}(0)}{n_0} = \frac{\beta}{l} (1-\beta) (\delta k - \delta)_{t=0} \tag{25}$$

und

$$z(0) = 0 \tag{26}$$

nach Gl. (22) über in

$$A + B = 1 \tag{27a}$$

und

$$A \cdot \psi_1(0) + B \psi_2(0) = \frac{\beta}{l} (1-\beta) \cdot \delta. \tag{27b}$$

Das ergibt

$$A = \frac{\frac{\beta}{l} (1-\beta) \delta - \psi_2(0)}{\psi_1(0) - \psi_2(0)} \tag{28a}$$

und

$$B = \frac{\psi_1(0) - \frac{\beta}{l} (1-\beta) \delta}{\psi_1(0) - \psi_2(0)}, \tag{28b}$$

wobei  $\psi_1(0)$  und  $\psi_2(0)$  die partikulären Integrale von Gl. (24) für  $t=0$  darstellen. Damit ist

$$\left. \begin{aligned} n(t) = n_0 \left( 1 + \frac{\delta n}{n_0} \right) & \left( \frac{\frac{\beta}{l} (1-\beta) \delta - \psi_2(0)}{\psi_1(0) - \psi_2(0)} e^{\int_0^t \psi_1(t) dt} + \right. \\ & \left. + \frac{\psi_1(0) - \frac{\beta}{l} (1-\beta) \delta}{\psi_1(0) - \psi_2(0)} e^{\int_0^t \psi_2(t) dt} \right) \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

Die Differentialgleichung (23) ist eine Riccatische Differentialgleichung für  $\psi(t)$ , die durch die Transformation

$$\psi = \frac{d \ln v}{dt} = \frac{\dot{v}}{v} \quad (30)$$

in eine Differentialgleichung 2. Ordnung für  $v(t)$  mit periodischen Koeffizienten, also wieder eine Hillische Differentialgleichung, überführt werden kann. Dieser Weg soll hier jedoch nicht besprochen werden. Vielmehr setzen wir für die  $\psi_\mu$  in Form einer Störungsrechnung

$$\psi_\mu(t) = \psi_{\mu 0} + \varepsilon \psi_{\mu 1}(t) + \varepsilon^2 \psi_{\mu 2}(t) + \dots \quad \mu = 1, 2 \quad (31)$$

und versehen die Terme mit  $\delta n/n_0$  und  $\delta k$  ebenfalls mit dem Faktor  $\varepsilon$ . Für  $\varepsilon = 0$  erhält man dabei die Lösung des „ungestörten“, linearisierten Problems, für  $\varepsilon = 1$  die des „gestörten“, nichtlinearen.

### 3. Die Lösungsfunktionen $\psi_1(t)$ und $\psi_2(t)$

Nach dem Einsetzen von Gl. (31) in Gl. (23) wird nach Potenzen von  $\varepsilon$  geordnet. Dies ergibt für die gesuchten Funktionen  $\psi_{\mu\nu}(t)$  die Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\varepsilon^0 \quad \psi_{\mu 0}^2 + s_1 \psi_{\mu 0} = 0, \quad (32)$$

$$\varepsilon^1 \quad \left. \begin{aligned} \dot{\psi}_{\mu 1} + (2\psi_{\mu 0} + s_1) \psi_{\mu 1} + \frac{\delta n}{n_0} \psi_{\mu 0}^2 + \\ + \left( 2 \frac{\delta \dot{n}}{n_0} + s_1 \frac{\delta n}{n_0} - \frac{\beta}{l} (1-\beta) \delta k \right) \psi_{\mu 0} = \frac{\beta \lambda}{l} \delta, \end{aligned} \right\} (33)$$

$$\varepsilon^2 \quad \left. \begin{aligned} \dot{\psi}_{\mu 2} + (2\psi_{\mu 0} + s_1) \psi_{\mu 2} + \frac{\delta n}{n_0} \dot{\psi}_{\mu 1} + \psi_{\mu 1}^2 + \\ + 2 \frac{\delta n}{n_0} \psi_{\mu 0} \psi_{\mu 1} + \left( 2 \frac{\delta \dot{n}}{n_0} + s_1 \frac{\delta n}{n_0} - \right. \\ \left. - \frac{\beta}{l} (1-\beta) \delta k \right) \psi_{\mu 1} - \frac{\beta}{l} (1-\beta) \delta k \frac{\delta n}{n_0} \psi_{\mu 0} \\ = \frac{\beta}{l} \left( (1-\beta) \left( \delta \dot{k} \cdot \frac{\delta n}{n_0} \right) + \lambda \delta k \frac{\delta n}{n_0} \right) \end{aligned} \right\} (34)$$

usw.

Dabei ist

$$s_1 = \frac{\beta}{l} + \lambda. \quad (35)$$

Diese Differentialgleichungen sind ohne Schwierigkeiten nacheinander lösbar, wobei jedoch die Lösung mit steigender Potenz von  $\varepsilon$  umfangreicher wird.

Wie man bereits aus Gl. (32) erkennt, ergeben sich unmittelbar die zwei Lösungsreihen für  $\psi_1(t)$  und  $\psi_2(t)$ , und zwar ist

$$\psi_{10} = 0, \quad (36a)$$

$$\psi_{20} = -s_1. \quad (36b)$$

Für die weitere Rechnung ist für  $\delta n/n_0$  die Lösung von Gl. (7) einzusetzen, die sich mit einer mittleren Gruppe verzögerter Neutronen ergibt, nämlich

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta n}{n_0} = -\frac{\beta}{l} \frac{k \cdot \lambda \sin \varphi}{\omega s_1} + \\ + \frac{\beta}{l} \frac{k}{s_1} (\lambda - s_1 (1-\beta)) \frac{s_1 \cos \varphi + \omega \sin \varphi}{s_1^2 + \omega^2} e^{-s_1 t} + \\ + \beta \frac{k}{2} (G_0(j\omega) e^{j(\omega t + \varphi)} + G_0(-j\omega) e^{-j(\omega t + \varphi)}). \end{aligned} \right\} (37)$$

Damit folgen nach einiger Zwischenrechnung die Lösungen von Gl. (33)

$$\psi_{11} = \frac{\beta \lambda}{s_1 l} \delta \quad (38)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \psi_{21} = -\frac{\beta \delta}{s_1 l} (\lambda - s_1 (1-\beta)) + \\ + \frac{\beta}{l} k (\lambda - s_1 (1-\beta)) \frac{s_1 \cos \varphi + \omega \sin \varphi}{s_1^2 + \omega^2} e^{-s_1 t} + \\ + \frac{\beta}{l} \frac{k}{2} \frac{s_1}{s_1 - j\omega} (1-\beta - 2j\omega l G_0(j\omega)) e^{j(\omega t + \varphi)} + \\ + \frac{\beta}{l} \frac{k}{2} \frac{s_1}{s_1 + j\omega} (1-\beta + 2j\omega l G_0(-j\omega)) e^{-j(\omega t + \varphi)}. \end{aligned} \right\} (39)$$

Wie aus Gl. (36b) unmittelbar folgt, geht in dem Ansatz Gl. (19) der Term mit  $B \exp\left(\int_0^t \psi_2(t) dt\right)$  mit  $e^{-s_1 t}$  zu Null; er trägt also nur zu dem Einschwingvorgang bei. Auf die weiteren Funktionen  $\psi_{2\nu}(t)$  soll daher hier nicht weiter eingegangen werden.

Für die nachfolgenden Diskussion ist schließlich nur noch die Kenntnis vom  $\psi_{12}(t)$  erforderlich; auf die weiteren  $\psi_{1\nu}(t)$  kann dann ebenfalls verzichtet werden. Aus der Differentialgleichung (34) ergibt sich nach einiger Zwischenrechnung

$$\left. \begin{aligned} \psi_{12}(t) = \frac{1}{s_1} \left[ -\left(\frac{\beta \delta}{s_1 l}\right)^2 \lambda (\lambda - s_1 (1-\beta)) + \right. \\ + \left(\frac{\beta k}{2}\right)^2 \frac{\lambda}{l} [G_0(j\omega) + G_0(-j\omega)] + \\ + \left(\frac{\beta}{l}\right)^2 \delta \cdot \frac{k}{s_1} (\lambda - s_1 (1-\beta)) (2\lambda - s_1 (1-\beta)) \times \\ \times \frac{s_1 \cos \varphi + \omega \sin \varphi}{s_1^2 + \omega^2} \cdot t \cdot e^{-s_1 t} + \left(\frac{\beta}{l}\right)^2 \frac{k}{2s_1} \times \\ \times [\lambda \cdot \delta \cdot (1-\beta) - j\omega l G_0(j\omega) (2\lambda - s_1 (1-\beta)) \cdot \delta - \\ - \frac{k\lambda}{\omega} (\lambda + j\omega (1-\beta)) \sin \varphi] \frac{e^{j(\omega t + \varphi)}}{s_1 + j\omega} + \\ + \left(\frac{\beta}{l}\right)^2 \frac{k}{2s_1} [\lambda \cdot \delta \cdot (1-\beta) + j\omega l G_0(-j\omega) \times \\ \times (2\lambda - s_1 (1-\beta)) \cdot \delta - \frac{k\lambda}{\omega} (\lambda - j\omega (1-\beta)) \sin \varphi] \times \\ \times \frac{e^{-j(\omega t + \varphi)}}{s_1 - j\omega} + \left(\frac{\beta}{l} \frac{k}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{s_1} (\lambda - s_1 (1-\beta)) \times \\ \times \frac{s_1 \cos \varphi + \omega \sin \varphi}{j\omega (s_1^2 + \omega^2)} (\lambda + (1-\beta)(j\omega - s_1)) \times \\ \times e^{-s_1 t} e^{j(\omega t + \varphi)} - \left(\frac{\beta}{l} \frac{k}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{s_1} (\lambda - s_1 (1-\beta)) \times \\ \times \frac{s_1 \cos \varphi + \omega \sin \varphi}{j\omega (s_1^2 + \omega^2)} (\lambda - (1-\beta)(j\omega + s_1)) e^{-s_1 t} \times \\ \times e^{-j(\omega t + \varphi)} + \left(\frac{\beta}{l} \frac{k}{2}\right)^2 l \cdot G_0(j\omega) (\lambda + j2\omega (1-\beta)) \times \\ \times \frac{e^{j2(\omega t + \varphi)}}{s_1 + j2\omega} + \left(\frac{\beta}{l} \frac{k}{2}\right)^2 l \cdot G_0(-j\omega) \times \\ \times (\lambda - j2\omega (1-\beta)) \frac{e^{-j2(\omega t + \varphi)}}{s_1 - j2\omega}. \end{aligned} \right\} (40)$$

Mit den Gln. (36) bis (40) ist der formale Aufbau der Lösungsfunktionen im wesentlichen beschrieben. Die folgenden  $\psi_{1\nu}(t)$  sind von ähnlicher Bauart: Die Funktionen enthalten konstante und rein periodische Terme sowie Glieder, die mit  $e^{-s_1 t}$  abklingen. Die Amplituden werden mit  $k^\nu$  bzw.  $\delta^\nu$  kleiner.

4. Das exponentielle Ansteigen von  $n(t)$

Die konstanten Glieder in  $\psi_1(t)$  führen mit  $\exp\left(\int_0^t \psi_1(\tau) d\tau\right)$  auf eine exponentielle Änderung von  $n(t)$ , die je nach der Größe von  $\delta$  positiv oder negativ sein kann.

Nach Gl. (38) und (40) ist der konstante Anteil von  $\psi_1(t)$  bis auf Glieder mit  $(k/2)^3$  und höherer Ordnung

$$\psi_1^{(0)} = \left. \begin{aligned} & \frac{\beta\lambda}{s_1 l} \delta + \frac{\lambda}{s_1} \left( \frac{\beta\delta}{s_1 l} (s_1(1-\beta) - \lambda) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\beta}{l} \frac{k}{2} \right)^2 l (G_0(j\omega) + G_0(-j\omega)) \right) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Für  $\delta = 0$  folgt

$$\psi_1^{(0)} = \left( \frac{\beta}{l} \frac{k}{2} \right)^2 \frac{\lambda l}{s_1} (G_0(j\omega) + G_0(-j\omega)). \quad (42)$$

Ersetzt man  $G_0(j\omega)$  nach Gl. (8) durch einen entsprechenden Ausdruck mit einer gemittelten Gruppe verzögerter Neutronen, so führt dies auf einen mittleren komplexen Wert  $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_1 + j\tilde{\lambda}_2$  (s. Abschnitt 5).

Damit ist

$$G_0(j\omega) = \frac{\tilde{\lambda} + j\omega(1-\beta)}{j\omega l \left( \frac{\beta}{l} + \tilde{\lambda} + j\omega \right)} \quad (43)$$

und

$$l(G_0(j\omega) + G_0(-j\omega)) = 2 \frac{\frac{\beta}{l} \left( 1 - \beta - \tilde{\lambda}_1 l + \frac{\tilde{\lambda}_2}{\omega} \right)}{\left( \frac{\beta}{l} + \tilde{\lambda}_1 \right)^2 + (\omega + \tilde{\lambda}_2)^2} \quad (44)$$

Das ergibt

$$\psi_1^{(0)} = \left( \frac{\beta}{l} \cdot \frac{k}{2} \right)^2 \frac{2\lambda}{\frac{\beta}{l} + \lambda} \frac{\frac{\beta}{l} \left( 1 - \beta - \tilde{\lambda}_1 l + \frac{\tilde{\lambda}_2}{\omega} \right)}{\left( \frac{\beta}{l} + \tilde{\lambda}_1 \right)^2 + (\omega + \tilde{\lambda}_2)^2} \quad (45)$$

bei  $\delta = 0$ .

Der Wert  $\delta_0$ , der  $\psi_1^{(0)}$  zu Null macht, ergibt sich aus Gl. (41) zu

$$\delta_0 \approx - \frac{k^2 \left( \frac{\beta}{l} \right)^2 \left( 1 - \beta - \tilde{\lambda}_1 l + \frac{\tilde{\lambda}_2}{\omega} \right)}{2 \left( \frac{\beta}{l} + \tilde{\lambda}_1 \right)^2 + (\omega + \tilde{\lambda}_2)^2} \quad (46)$$

$\psi_1^{(0)}$  und  $\delta_0$  sind im wesentlichen proportional zum Quadrat der Reaktivitätsamplitude  $k^2$ ; sie können deshalb in der linearisierten Rechnung, die keine Glieder mit  $k^2$  und höherer Ordnung enthält, nicht vorkommen.

Der eigentliche Grund für das exponentielle Ansteigen von  $n(t)$  bei periodischer Reaktivität liegt, wie zu erwarten, in dem Zusammenspiel der prompten und verzögerten Neutronen. Wie Gl. (45) zeigt, ist  $\psi_1^{(0)}$  direkt proportional zu  $\lambda$ , dem Mittelwert der Zerfallskonstanten  $\lambda_i$ . Man kann nun leicht zeigen, daß  $n(t)$  nicht exponentiell ansteigt, wenn alle  $\lambda_i = 0$  sind, wenn also Neutronenvorläufer entstehen, die erst nach unendlich langer Zeit zerfallen und dadurch verzögerte Neutronen liefern.

Setzt man die Gl. (1b) nach Integration in (1a) ein, so ist

$$\dot{n} = \left. \begin{aligned} & \frac{\beta}{l} ((1-\beta)\delta k - 1)n + \\ & + \frac{\beta}{l} \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\beta} e^{-\lambda_i t} \left( \frac{n_0}{\lambda_i} + \int_0^t e^{\lambda_i \tau} (1 + \beta \cdot \delta k) n(\tau) d\tau \right) \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Nimmt man die  $\lambda_i$  als sehr klein an, so daß man  $e^{\pm \lambda_i t} \approx 1$  setzen kann, so ist

$$\dot{n} \approx \left. \begin{aligned} & \frac{\beta}{l} ((1-\beta)\delta k - 1)n + \frac{\beta}{l} n_0 + \\ & + \left( \frac{\beta}{l} \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\beta} \right) \int_0^t (1 + \beta \delta k(\tau)) n(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Mit  $\lambda_i = \beta_i = 0$  und  $\delta k = k \cdot \cos \omega t$  erhält man hieraus für  $n(t)$  eine rein periodische Lösung

$$n(t) = n_0 e^{\frac{\beta k}{l \omega} \sin \omega t} \quad (49)$$

die wegen  $\exp \sin \omega t$  sowohl die Grundfrequenz  $\omega$  als auch ganzzahlige Vielfache davon enthält.

Der Mittelwert von  $n(t)$  über eine Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  ist zeitlich konstant und mit

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} n(t) dt = n_0 \left( 1 + \left( \frac{\beta k}{2\omega l} \right)^2 + \dots \right) \quad (50)$$

etwas größer als der ursprüngliche Anfangswert  $n_0$ . Das bedeutet, daß die Neutronenvermehrung in der positiven Reaktivitätsphase größer ist als die Abnahme in der negativen Phase.

Für sehr kleine  $\lambda_i \neq 0$  ist die vollständige Differentialgleichung (48) zu lösen, die nach einmaliger Differentiation wieder in eine Hillsche Differentialgleichung übergeht. Deren Lösung ergibt dann ein  $n(t)$ , das mit einem exponentiellen Ansteigen behaftet ist. Der Grund dafür ist jetzt leicht einzusehen: Die verzögerten Neutronen kommen mit einer Verzögerungszeit  $\tau_i = 1/\lambda_i$  zu den prompten Neutronen hinzu und liefern wegen der unterschiedlichen Multiplikation in der positiven und negativen Phase der Reaktivität einen zusätzlichen Beitrag zum Mittelwert von  $n(t)$  über eine Periode. Dadurch erhöht sich wiederum im Mittel die Zahl der Vorläufer  $C_i$ , die nach der Verzögerungszeit  $\tau_i$  weitere verzögerte Neutronen ins Spiel bringen. Dieser Vorgang läuft kontinuierlich ab; der Mittelwert von  $n(t)$  über eine Periode  $T$  ist eine mit der Zeit anwachsende Funktion. Sofern also die unterschiedliche Multiplikation in der positiven und negativen Phase nicht durch einen hinreichend großen negativen Mittelwert der Reaktivität kompensiert wird, zeigt  $n(t)$  ein exponentielles Ansteigen. Dies gilt für beliebige periodische Reaktivitätsänderungen, wie H. SMETS [3] in allgemeiner Form durch eine Abschätzung der Mittelwerte von  $n(t)$  über Periodenintervalle  $t \dots t + T$  nachgewiesen hat.

Je größer nun die  $\lambda_i$ , d.h. je kürzer die Verzögerungszeiten  $\tau_i$  sind, desto eher führen die verzögerten Neutronen zu einer Erhöhung des Mittelwertes, und  $n(t)$  steigt stärker an. Andererseits wirkt sich — wie aus Gl. (50) ersichtlich — die unterschiedliche Multiplikation in der positiven und negativen Phase bei kleineren Frequenzen stärker aus als bei großen.  $\psi_1^{(0)}$  hat demnach bei kleinen Frequenzen größere Werte, wobei die Periodendauer  $T = 2\pi/\omega$  zur prompten Lebensdauer  $l$  in Bezug zu setzen ist.

Für einen thermischen und einen schnellen Reaktor sind mit den Werten der Tabelle  $\psi_1^{(0)}$  und  $\delta_0$  für Reaktivitätsamplituden  $k = 0 \dots \beta$  und die drei Kreisfrequenzen  $\omega = 0, 1; 1$  und  $10 \text{ sec}^{-1}$  berechnet worden. Das Ergebnis ist in den Abb. 1 und 2 eingetragen.

Die Abb. 3 zeigt den zeitlichen Verlauf der Neutronendichte  $n(t)$  und den einiger Neutronenvorläufer  $C_i(t)$  — jeweils bezogen auf den Anfangswert — für  $\delta k = 0,4 \sin \omega t$ . Die Kurven wurden auf einem Analogrechner unter Berücksichtigung von sechs Gruppen von verzögerten Neutronen gewonnen.

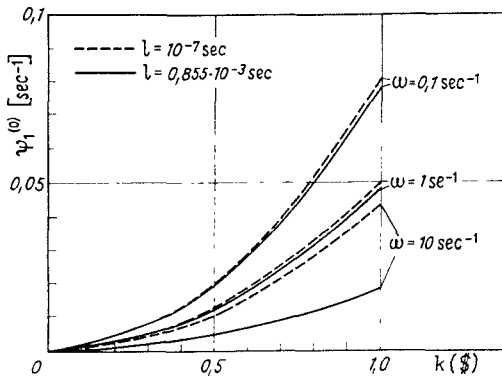


Abb. 1. Reziproke Zeitkonstante  $\psi_1^{(0)}$  in Abhängigkeit von der Reaktivitätsamplitude  $k$  ( $k$  in Einheiten von  $\beta$ )

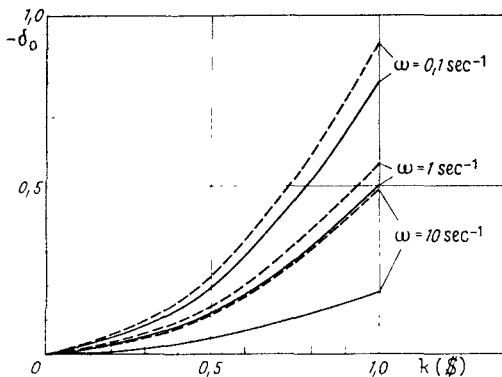


Abb. 2. Negativer konstanter Reaktivitätsanteil  $\delta_0$  zur Unterdrückung des exponentiellen Anstiegs von  $n(t)$  in Abhängigkeit von der Reaktivitätsamplitude  $k$  ( $k$  und  $\delta_0$  in Einheiten von  $\beta$ )

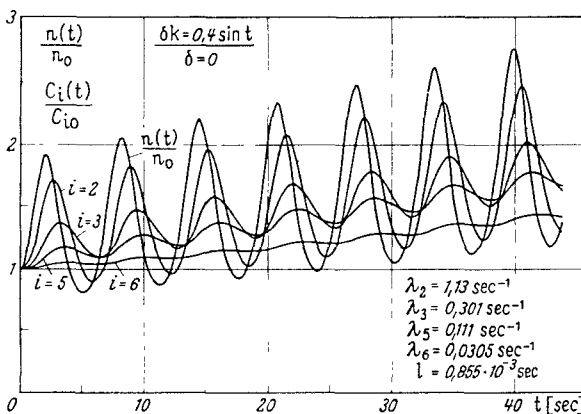


Abb. 3. Zeitlicher Verlauf der Neutronendichte  $n(t)$  und einiger Vorläuferkonzentrationen  $C_i(t)$  bei rein periodischer Reaktivitätsänderung  $\delta k = 0,4 \sin t$  (thermischer Reaktor)

Man erkennt das den Schwingungen überlagerte exponentielle Ansteigen sowohl bei  $n(t)$  als auch bei den  $C_i(t)$ . Je größer die jeweilige Zerfallskonstante  $\lambda_i$  ist, desto stärker ist das exponentielle Ansteigen, desto größer ist die Schwingungsamplitude und desto kleiner ist die Phasenverschiebung gegenüber  $n(t)$ . Entsprechend Gl. (1b) müssen die Maxima und Minima von  $C_i(t)/C_{i0}$  auf der Kurve  $n(t)/n_0$  liegen.

Schließlich ist bei allen Kurven deutlich die Verzerrung durch Oberwellen erkennbar.

Tabelle

a) Thermischer Reaktor

$i$	$\beta_i \cdot 10^3$	$\lambda_i \text{ sec}^{-1}$
1	0,294	3,00
2	0,820	1,13
3	2,630	0,301
4	0,340	0,277
5	1,292	0,111
6	1,422	0,0305

Neutronen-Lebensdauer

$$l = 0,855 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$$

$$\lambda_0 = 0,424 \text{ sec}^{-1}$$

$$\lambda_\infty = 0,0983 \text{ sec}^{-1}$$

$$\beta = \sum_i \beta_i = 6,798 \cdot 10^{-3}$$

b) Schneller Reaktor (90% Pu<sup>239</sup> + 10% U<sup>238</sup>; Daten nach ANL 5800, p. 25)

$i$	$\beta_i \cdot 10^3$	$\lambda_i \text{ sec}^{-1}$
1	0,184	3,615
2	0,548	1,335
3	1,229	0,344
4	0,662	0,136
5	0,744	0,0316
6	0,0922	0,013

$$l = 10^{-7} \text{ sec}$$

$$\lambda_0 = 0,559 \text{ sec}^{-1}$$

$$\lambda_\infty = 0,0875 \text{ sec}^{-1}$$

$$\beta = 3,46 \cdot 10^{-3}$$

### 5. Mittelwerte für die Zerfallskonstanten $\lambda_i$

Wegen des komplizierten Zusammenhanges zwischen prompten und verzögerten Neutronen ist es nicht möglich, die Zerfallskonstanten  $\lambda_i$  durch einen einzigen Mittelwert zu ersetzen. Aus der mit dem Mittelwert  $\lambda$  geschriebenen Differentialgleichung (12) erhält man daher lediglich die Struktur der Lösung, die sich bei Verwendung von sechs Gruppen verzögerter Neutronen ergeben würde. Dies ist ausreichend, wenn man nur einen Einblick in die Verhältnisse gewinnen will. So steht die Differentialgleichung (12) als Ersatz für eine Differentialgleichung 7. Ordnung in  $n(t)$  mit periodischem Koeffizienten, und anstelle der beiden Konstanten  $A$  und  $B$  in Gl. (19) müßten bei sechs Gruppen sieben Konstanten angeschrieben werden.

Vor einer numerischen Auswertung der Lösung, speziell zur Bestimmung von  $\psi_1^{(0)}$  und  $\delta_0$ , sind jedoch einige zusätzliche Überlegungen zur Größe des Mittelwertes  $\lambda$  erforderlich.

Durch Laplace-Transformation der Gln. (1) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (3a, b) erhält man die Beziehung

$$\bar{n}(s) = \frac{n_0}{s} + \beta \cdot G_0(s) \cdot \overline{\delta k} \cdot n(s). \quad (51)$$

In der Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  nach Gl. (8) sind die Gruppenparameter  $\beta_i$  und  $\lambda_i$  enthalten. Geht man zu einer mittleren Gruppe mit  $\beta$  und  $\lambda$  über, so soll gelten

$$G_0(s) = \frac{1-s \frac{\beta}{\lambda+s}}{s \left( l + \frac{\beta}{\lambda+s} \right)}. \quad (52)$$

Dies ergibt

$$\lambda = \frac{\sum_i \beta_i \lambda_i}{\sum_i \beta_i}. \quad (53)$$

Nun transformiert sich die Umgebung von  $t \rightarrow 0$  im Oberraum in die Umgebung von  $s \rightarrow \infty$  im Unterraum.

Andererseits wird  $t \rightarrow \infty$  in  $s \rightarrow 0$  abgebildet. Dies führt für  $\lambda$  auf die beiden Grenzwerte

$$t \rightarrow 0 \quad \lambda_0 = \frac{\sum_i \beta_i \lambda_i}{\beta}, \quad (54)$$

$$t \rightarrow \infty \quad \lambda_\infty = \frac{\beta}{\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}}. \quad (55)$$

Hieraus erkennt man, daß  $\lambda$  streng genommen zeitabhängig ist, und daß man bei der Anwendung zwischen Einschwingvorgängen und asymptotischen Lösungen unterscheiden muß bzw. zwischen schnell und langsam ablaufenden Änderungen.

Für periodische Vorgänge ist die Mittelung über die komplexe Übertragungsfunktion  $G_0(j\omega)$  vorzu-

nehmen. Damit erhält man den komplexen Mittelwert

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_1 + j\tilde{\lambda}_2 = \frac{\beta}{\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i + j\omega}} - j\omega. \quad (56)$$

Da es sich bei dem exponentiellen Ansteigen von  $n(t)$  im allgemeinen um eine relativ langsame Änderung handelt, kann man in guter Näherung in Gl. (41) mit  $\lambda = \lambda_\infty$  rechnen; dagegen ist bei  $G_0(\pm j\omega)$  in dieser Gleichung nach Gl. (56) zu verfahren.

**Literatur:** [1] WITTAKER, E. T., and G. N. WATSON: A Course of Modern Analysis, 4th ed., Cambridge: Cambridge University Press 1958. — [2] INCE, E. L.: Ordinary Differential Equations. New York: Dover Publications, Inc. 1956. — [3] SMETS, HENRI B.: General Properties of the Response of a Nuclear Reactor at low Power Undergoing a Periodic Reactivity Variation. Nukleonik 3, 181—185 (1961).