

KFK-181

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

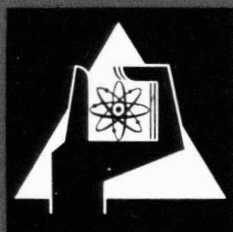
September 1963

KFK 181

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Die Impulskorrelation zweier Neutronendetektoren im stationären Reaktor

Horst Borgwaldt und Dieter Sanitz



KERNREAKTOR

BAU- UND BETRIEBS-GESELLSCHAFT M. B. H.

KARLSRUHE

Gesellschaft für Kernforschung m. b. H.
Zentralbücherei

8. Jan. 1964

Die Impulskorrelation zweier Neutronendetektoren im stationären Reaktor

Von HORST BORGWALDT und DIETER SANITZ

(Aus dem Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik, Kernforschungszentrum Karlsruhe)

Mit 2 Textabbildungen

(Eingegangen am 15. Mai 1963)

Zusammenfassung. Die Arbeit behandelt die Korrelation der Impulse von zwei Neutronendetektoren im stationären Reaktor, wie sie im Rossi- α -Experiment gemessen wird. Für die erzeugende Funktion der Detektorzählungen wird eine Erststoßbeziehung, d. h. eine Verallgemeinerung der integralen Boltzmann-Gleichung, aufgestellt und aus ihr ein exakter Ausdruck für die raum-, energie- und detektorabhängige Impulskorrelation hergeleitet. Die einzelnen Summanden dieses Ausdrucks beschreiben die verschiedenen Ursachen der Korrelation (Neutronenketten, Spontanspaltung, Detektoreinflüsse).

Die Abhängigkeit von der Verzögerungszeit entspricht genau der zeitlichen Verteilung der Detektorimpulse in einem Experiment mit gepulster Neutronenquelle.

Die Berechnung der Impulskorrelation erfordert die Lösung einer binären Boltzmann-Gleichung und geht damit wesentlich über die klassische Reaktortheorie hinaus. Die Projektion der binären Neutronendichte auf die persistente Eigenfunktion des Boltzmann-Operators erlaubt jedoch, die Bestimmung des Grundmodes auf bekannte Gleichungen zu reduzieren.

1. Einführung

Im Rossi- α -Experiment [1], [2] mißt man am stationären oder nahezu stationären Reaktor die Zeitintervalle t zwischen Einzelimpulsen von Neutronendetektoren. Für einen kleinen Reaktor wie Godiva bestätigt man experimentell (ORNDORFF [1]) eine Verteilung

$$A + B e^{-\alpha t} \quad \text{mit} \quad \alpha = \beta/l \quad (1.1)$$

(β = Anteil der verzögerten Neutronen, l = Lebensdauer). Somit erlaubt eine Messung dieser Impulskorrelation die Untersuchung des prompten kinetischen Verhaltens des Reaktors. Dies gilt auch für den im folgenden behandelten Fall ausgedehnter Systeme, in denen die gemessenen Impulskorrelationen auch von Ort und spektraler Empfindlichkeit der Detektoren abhängen können.

Für eine theoretische Behandlung solcher Experimente, die wesentlich auf dem stochastischen Charakter von Neutronenketten beruhen, bieten sich verschiedene Methoden an. Die Grundlagen einer Theorie für den Punkt-Reaktor wurden schon sehr früh von COURANT und WALLACE [3] mit Hilfe von Zustandsgleichungen entwickelt. Später kamen LARISSE und BRAFFORT [4] durch Aufstellung stochastischer Differentialgleichungen zu ähnlichen Ergebnissen.

In neuerer Zeit konzentrieren sich die Bemühungen auf die Abhängigkeit von Ort und Energie. Einige Autoren [5], [6], [7] teilen den Phasenraum in endliche Zellen auf und wenden danach die Methode der Zustandsgleichungen an. Die in ihnen auftretenden Wahrscheinlichkeiten für den Übergang von Neutronen zwischen diesen Zellen müssen approximativ bestimmt werden. In dieser Arbeit verwenden wir dagegen eine

Erststoßmethode, d.h. eine stochastische Verallgemeinerung der Boltzmann-Gleichung in ihrer integralen Formulierung [18]. Spezielle Erststoßgleichungen wurden bereits für einzelne stochastische Probleme der Neutronenphysik benutzt [8], [9]. Sie werden in voller Allgemeinheit auf das stochastische Verhalten stationärer Reaktoren erstmals hier und in einer neueren Arbeit von PÁL [10] angewandt. PÁL

benutzte Boltzmann-Operator B besitzt bei uns die Darstellung

$$Bf(x, v) = -v \text{grad } f - \alpha(x, v)f + \left. \begin{aligned} &+ \int dv' \alpha_s(x, v' \rightarrow v) f(x, v') + \\ &+ \chi(v) \int dv' \nu(x, v') \alpha_f(x, v') f(x, v'). \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Dabei bezeichnen

- $\alpha(x, v)$ die Stoß-Zeitkonstante (Dimension sec^{-1}) für Neutronen der Koordinaten (x, v) ,
- $\alpha_s(x, v' \rightarrow v)$ die Zeitkonstante für Streuung von v' nach v ,
- $\alpha_f(x, v)$ die Zeitkonstante für Spaltung,
- $\nu(x, v)$ die Neutronenausbeute pro Spaltung durch Neutronen der Koordinaten (x, v) ,
- $\chi(v)$ das Spaltspektrum im v -Raum.

Diese Darstellung folgt aus einer trivialen Umformung der in der Literatur [11] üblichen Ausdrücke und wird von uns wegen ihrer zwanglosen Anwendbarkeit auf höhere Momente von Neutronendichte-Verteilungen bevorzugt.

Ein indizierter Boltzmann-Operator B_i , in Ausdrücken der Form

$$B_i f(x_1, v_1, \dots, x_i, v_i, \dots), \quad (2.3)$$

wird im folgenden stets geschrieben, wenn der B -Operator allein auf die Koordinaten (x_i, v_i) einer vielparametrischen Funktion f anzuwenden ist. Die stationäre mittlere Neutronendichte $n_1(x, v)$ wird aufrechterhalten durch spontane, Poisson-verteilte Quellprozesse der Gesamtrate Q (Ereignisse/sec). Diese Quellprozesse zerfallen in eine Reihe von physikalisch unterscheidbaren Typen i ($i \geq 1$), deren Anteile an der Gesamtrate Q räumlich wie $q_i(x)$ verteilt sein mögen. Das bedingt eine Normierung

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int dx q_i(x) = 1. \quad (2.4)$$

Ein spezieller Typ des Quellprozesses ist die Spontanspaltung. Sie sei im Reaktor im wesentlichen nur durch ein Isotop verursacht, und es sei

$$Q_{sf}(x) = Q q_{sf}(x) \quad (2.5)$$

die räumliche Verteilung der Spontanspaltungsrate. Bezeichnen wir mit $s_i(v)$ die (nichtnormierte) Verteilung der Quellneutronen eines einzelnen Quellereignisses vom Typ i im v -Raum, so lautet die in (2.1) einzusetzende Queldichte für Neutronen

$$S_1(x, v) = Q \sum_{i=1}^{\infty} q_i(x) s_i(v). \quad (2.6)$$

Nach dieser Aufzählung von Größen und Gleichungen, die den mittleren Zustand des stationären Reaktors beschreiben, betrachten wir das mathematische Modell einer für Impulskorrelations-Messungen benutzten Schaltung. Unser Vorbild ist hierbei die von ORNDORF [1] angegebene Schaltung (Abb. 1), jedoch können wir uns im folgenden auf einen einzigen Koinzidenzkanal beschränken (Abb. 2). Die Benutzung eines Mehrkanal-Zeitanalysators setzt in trivialer Weise allein den Zeitaufwand für die Messung herab.

Wir gehen bei unserer Darstellung davon aus, daß im Reaktor zwei Detektoren oder Systeme von

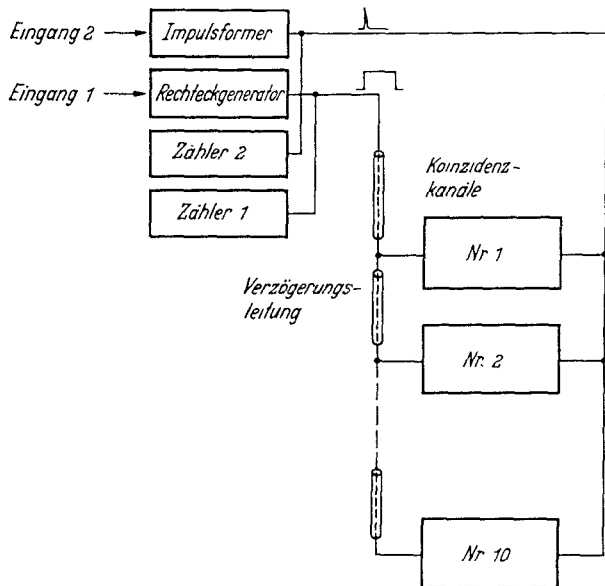


Abb. 1. Schaltung nach ORNDORF [1]

diskutiert im wesentlichen die von ihm aus der Integralgleichung hergeleitete stochastische Verallgemeinerung der differentiellen Boltzmann-Gleichung.

Die in unserer Arbeit entwickelte Formulierung der Erststoßmethode umfaßt neben der strengen Behandlung von Ort und Energie konsistent die Eigenschaften der Detektoren und ihre Einflüsse auf die Impulskorrelation.

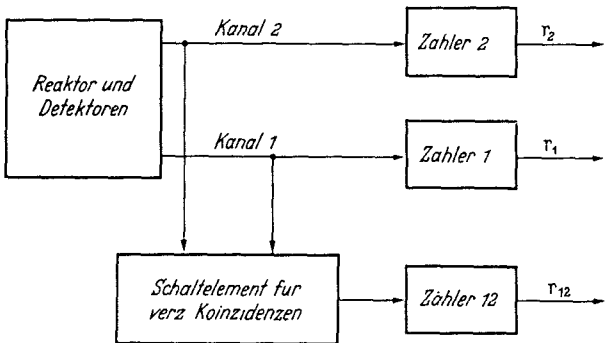


Abb. 2. Schema für einen Koinzidenzkanal

2. Die neutronenphysikalische Fragestellung, Definitionen

Unsere Untersuchungen betreffen ein unterkritisches, stationäres System, in dem eine mittlere Neutronendichte-Verteilung $n_1(x, v)$ vorliegt. Diese genügt einer stationären Boltzmann-Gleichung

$$Bn_1(x, v) + S_1(x, v) = 0 \quad (2.1)$$

x und v bezeichnen als dreidimensionale Vektoren die Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten. Der häufig

Detektoren untergebracht sind (Abb. 2), welche neutronenphysikalisch als integrale Bestandteile des Reaktors anzusehen sind. Den Detektoren sind Informations-Kanäle zugeordnet, welche die vom Detektor erfaßten Ereignisse irgendwelcher Art in einheitliche Impulse umwandeln und übertragen. Alle Impulse des Kanals 1 gehen direkt auf einen Zähler 1 und ergeben dort eine mittlere Zählrate r_1 .

$$r_1 = r_{1,k} + r_{1,q}, \quad (2.7)$$

$$r_{1,k} = \int dx dv E_1(x, v) n_1(x, v), \quad (2.8)$$

$$E_1(x, v) = w_{1,0}(x, v) \alpha(x, v), \quad (2.9)$$

$$w_{1,0}(x, v) = \int db P(x, v, b) w_{1,0}(x, v, b), \quad (2.10)$$

$$r_{1,q} = Q \sum_{i=1}^{\infty} \int dx w_{1,i}(x) q_i(x). \quad (2.11)$$

Nach (2.7) zählt Kanal 1 sog. Kettenereignisse (Index k), d.h. Stoßprozesse von Neutronen, und Quellereignisse (Index q). In (2.8) ist $E_1(x, v)$ die Empfindlichkeit des Kanals 1 für Neutronen der Koordinaten (x, v) (Impulse pro Neutron und Zeiteinheit). E_1 ist das Produkt aus der Stoß-Zeitkonstanten α und der Wahrscheinlichkeit $w_{1,0}(x, v)$ für die Erfassung eines Stoßes mit den Stoßkoordinaten (x, v) . Diese Wahrscheinlichkeit bestimmt sich nach (2.10) aus der Wahrscheinlichkeit $P(x, v, b)$ dafür, daß ein Stoß eines Neutrons mit den Koordinaten (x, v) irgendwelche Bedingungen b erfüllt und der entsprechenden bedingten Wahrscheinlichkeit $w_{1,0}(x, v, b)$ für die Erfassung dieses Stoßes. In dieser allgemeinen Formulierung können zur Registrierung von Neutronen alle, durch eine entsprechende Bedingung b zu charakterisierenden Prozesse dienen, welche mit einem Neutronenstoß praktisch gleichzeitig sind, u.a. Absorption, Spaltung, Erzeugung von Rückstoßkernen sowie γ -Quanten (durch Einfang oder unelastische Streuung).

In die Zählrate $r_{1,q}$ von Quellereignissen geht nach (2.11) die Wahrscheinlichkeit $w_{1,i}(x)$ ein für die direkte Erfassung eines Quellereignisses vom Typ i am Ort x . Beispielsweise kann eine Spontanspaltung durch die Spaltbruchstücke oder Spaltgammas direkt, unabhängig von den Spaltneutronen, erfaßt werden.

Für die Zählrate r_2 des Zählers 2, der sämtliche Impulse aus dem Kanal 2 registriert, gelten zu (2.7) bis (2.11) analoge Gleichungen mit dem Index 2. Zwischen beiden Kanälen liege ein ideales Schaltelement für verzögerte Koinzidenzen, das alle und nur die Fälle registriert, in denen ein Impuls auf Kanal 2 irgendeinem Impuls auf Kanal 1 mit einer Verzögerung τ folgt, die der Ungleichung

$$0 < t_n \leq \tau \leq t_{n+1} \quad (2.12)$$

genügt. t_n, t_{n+1} sind die Kanalgrenzen dieses Zeitkanals. Die Zählrate für diese verzögerten Koinzidenzen sei r_{12} .

Wenn keinerlei Korrelation zwischen den Kanälen 1 und 2 bestünde, wäre r_{12} offenbar gleich dem Ausdruck $r_1 \cdot r_2(t_{n+1} - t_n)$. Dies legt folgende Definitionsgleichung für die Korrelationsfunktion $y_{12}(t_n, t_{n+1})$ nahe

$$r_1 y_{12}(t_n, t_{n+1}) = r_{12} - r_1 r_2 (t_{n+1} - t_n). \quad (2.13)$$

In den folgenden Abschnitten entwickeln wir eine Methode zur Berechnung des Ausdrucks (2.13) unter Beschränkung auf Systeme ohne verzögerte Neutronen. Messungen der Korrelationsfunktion y_{12} zieht man meist zur Analyse der prompten Reaktorkinetik heran [1], [2]. Im Rahmen derartiger Kurzzeit-Betrachtungen ist die erwähnte Einschränkung ohne Belang; denn die verzögerten Neutronen übernehmen hier die Rolle einer nahezu konstanten Poissonverteilten Quelle in einem prompt-unterkritischen Reaktor. Es zeigt sich im übrigen, daß eine Einbeziehung der verzögerten Neutronen in die exakte Behandlung die auszuwertenden Endformeln (Abschnitt 7ff.) erheblich durch zusätzliche Terme erweitert, ohne die wesentlichen Züge der angewandten Methode zu verändern.

3. Erzeugende Funktionen (EF)

Wir betrachten jetzt den oberen Teil der Abb. 2 und interessieren uns dabei nicht mehr für die mittleren Impulsraten sondern für das statistische Geschehen. Es sei $M = M(t)$ die zufällige Zahl von Impulsen auf Kanal 1 in einem kleinen Zeitintervall $(0, t)$, N die entsprechende Zahl auf Kanal 2 im Intervall (t_n, t_{n+1}) . Dabei soll gelten

$$0 < t < t_n < t_{n+1}. \quad (3.1)$$

Mit M wollen wir im weiteren den Operator der Bildung von Mittel- oder Erwartungswerten bezeichnen. Der Operator M wird gelegentlich indiziert auftreten, wenn die Mittelwertbildung nur bezüglich der im Index genannten Größen zu erfolgen hat.

Den Erwartungswert des Produkts (MN) definieren wir als

$$M(MN) = G^{(1,1)}(t). \quad (3.2)$$

Im folgenden soll mit \lim_t stets der Grenzwert

$$\lim_t = \lim_{t \rightarrow 0} \quad (3.3)$$

gemeint sein. Nun ist gerade

$$\lim_t \frac{G^{(1,1)}(t)}{t} = r_{12} \quad (3.4)$$

oder nach (2.13)

$$r_1 y_{12}(t_n, t_{n+1}) = \lim_t \frac{G^{(1,1)}(t)}{t} - r_1 r_2 (t_{n+1} - t_n) \quad (3.5)$$

Für die weitere mathematische Behandlung erscheint die Einführung der Erzeugenden Funktionen (abgekürzt: EF; englisch: probability generating function, p.g.f.) vorteilhaft.

Die oben eingeführten Größen M, N bilden nämlich einen ganzzahligen zufälligen Vektor, für den eine EF $G(z_1, z_2) = G(z_1, z_2, t)$ über z_1, z_2 durch

$$G(z_1, z_2) = M(z_1^M z_2^N) \quad (3.6)$$

zu erklären ist. Bezeichnen wir allgemein mit prob (Ereignis) die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses und mit

$$p_{m,n} = \text{prob} (m \text{ Impulse auf Kanal 1, } n \text{ Impulse auf Kanal 2}), \quad (3.7)$$

so schreibt sich (3.6) ausführlicher

$$G(z_1, z_2) = \sum_{m,n} p_{m,n} z_1^m z_2^n. \quad (3.8)$$

Von den für EF geltenden Lehrsätzen [12] benutzen wir die folgenden drei.

Satz 1. Die EF $G(z_1, z_2)$ ist für $|z_1|, |z_2| < 1$ regulär in beiden Variablen. Sind die wahren Radien der Konvergenzkreise von (3.8) größer als 1, so gilt sicher

$$G^{(m,n)} \equiv \left. \begin{aligned} & \frac{\partial^{(m+n)}}{\partial z_1^m \partial z_2^n} G(z_1, z_2) \Big|_{z_1=z_2=1} \\ & = M \left(\prod_{i=0}^{m-1} (M-i) \prod_{k=0}^{n-1} (N-k) \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Gl. (3.9) ermöglicht durch wiederholte Differentiation der EF eine leichte Bestimmung der Momente der durch die EF charakterisierten Verteilung. In den uns interessierenden Fällen ist die bezüglich der Regularität geforderte Voraussetzung immer erfüllt. Satz 1 folgt trivial aus der Darstellung (3.8) und den Eigenschaften der Koeffizienten $p_{m,n}$ als Wahrscheinlichkeiten. Speziell ist $G^{(0,0)} = 1$.

Die in (3.9) eingeführte Schreibweise $G^{(m,n)}$ für die Differentialquotienten an der Stelle $z_1 = z_2 = 1$ enthält insbesondere die Definition (3.2).

Satz 2. Sei (b) ein vollständiges System von durchschnittsfreien Ereignissen b_i mit Wahrscheinlichkeiten $p(b_i)$, und sei

$$G(z_1, z_2, b_i) = \sum_{m,n} p_{m,n}(b_i) z_1^m z_2^n.$$

eine durch b_i bedingte EF, so gilt

$$G(z_1, z_2) \equiv \sum_i p(b_i) G(z_1, z_2, b_i) \equiv M_b G(z_1, z_2, b). \quad (3.10)$$

Definitionsgemäß gilt eine Formel (3.10) für alle Mittelwerte und somit nach (3.6) auch für die EF.

Satz 3. Seien $G_1(z_1, z_2)$ und $G_2(z_1, z_2)$ die EF für zwei voneinander unabhängige Zufallsvektoren (M_1, N_1) und (M_2, N_2) . Dann hat der zufällige Summenvektor $(M_1 + M_2, N_1 + N_2)$ die EF

$$G(z_1, z_2) = G_1(z_1, z_2) G_2(z_1, z_2). \quad (3.11)$$

Da alle in dieser Arbeit benutzten EF sich auf die Informationskanäle 1 und 2 der Abb. 2 beziehen und die Variablen z_1, z_2 in dieser Bedeutung enthalten, lassen wir sie in abgekürzter Schreibweise der Funktionen als Argument fort.

4. Stationäre Poisson-verteilte Quellen

Wir beziehen uns wieder auf das im Anfang des vorigen Abschnitts erläuterte Gedankenexperiment, bei dem die Kanäle 1 und 2 in vorgegebenen Intervallen $(0, t)$ bzw. (t_n, t_{n+1}) zur Registrierung von Ereignissen herangezogen werden. Man definiert

$G(t, t', x, i)$ = EF für die Zahl von Registrierungen, die von einem Quellereignis mit den Bestimmungsgrößen t' = Zeit, x = Ort, i = Typ abhängen.

$G(t, t')$ = EF für die Zahl von Registrierungen, die von irgendeinem Quellereignis abhängen, das zum Zeitpunkt t' stattfand.

$G(t)$ = EF für die Zahl von Registrierungen in dem Gedankenexperiment, wenn im Reaktor stationäre Poisson-verteilte Quellen vorliegen. Bezüglich der Quellen sei auf den Abschnitt 2, insbesondere die Gln. (2.4), (2.5), (2.6), verwiesen. Bezeichnen wir mit $M_{x,i}$ die Mittelung sowohl über i als auch über die

Verteilungen $q_i(x)$ aus (2.4), so gilt nach Satz 2 über die EF

$$G(t, t') = M_{x,i} G(t, t', x, i). \quad (4.1)$$

Die Summe von Poisson-Verteilungen ist wieder eine Poisson-Verteilung. Somit ist der in $G(t, t')$ als Bedingung enthaltene Zeitpunkt t' des Quellereignisses aus einer Poisson-Verteilung der Intensität Q zu entnehmen. Für diese gilt

$$\left. \begin{aligned} & \text{prob}(n \text{ Quellereignisse treten im Intervall} \\ & (T_0, T) \text{ zu den Zeitpunkten } u_1, \dots, u_n \text{ auf}) \\ & = \frac{1}{n!} \exp Q(T_0 - T) \prod_{k=1}^n Q du_k. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Auf unabhängige Quellereignisse, die von ihnen ausgelösten Neutronenkettens und auf die von ihnen abhängigen Registrierungen ist offenbar Satz 3 über die EF anzuwenden (neben Satz 2). Daraus folgt für die Zahl von Registrierungen, deren auslösendes Quellereignis im Intervall (T_0, T) liegt, eine bedingte EF

$$\left. \begin{aligned} g(t, T_0, T) &= \exp Q(T_0 - T) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(Q \int_{T_0}^T G(t, t') dt' \right)^n \\ &= \exp Q \int_{T_0}^T dt' (G(t, t') - 1). \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Quellereignisse, die später als t_{n+1} erfolgen, können in keinem der Kanäle eine Registrierung auslösen, vgl. (3.1). Damit ist

$$G(t, t') = 1 \quad \text{für} \quad t' > t_{n+1}. \quad (4.4)$$

In einem unterkritischen Reaktor, den wir hier betrachten, konvergiert G auch gut gegen 1 für t' gegen $-\infty$. Somit können wir das Intervall (T_0, T) beliebig erweitern und erhalten in der Grenze folgende fundamentale Beziehung für $G(t)$, welche auch von BARTLETT [13] und PAL [10] angegeben wurde.

$$G(t) = \exp Q \int dt' (G(t, t') - 1). \quad (4.5)$$

Die Formeln (4.5) und (4.1) reduzieren die Untersuchung von $G(t)$ auf die wesentlich einfachere Behandlung von $G(t, t', x, i)$.

Insbesondere erhalten wir nach Satz 1 über EF aus (4.5) leicht Ausdrücke für einige uns interessierende Momente.

$$r_1 t \equiv G^{(1,0)}(t) = Q \int dt' G^{(1,0)}(t, t'), \quad (4.6)$$

$$r_2(t_{n+1} - t_n) \equiv G^{(0,1)}(t) = Q \int dt' G^{(0,1)}(t, t'), \quad (4.7)$$

$$G^{(1,1)}(t) = G^{(1,0)}(t) G^{(0,1)}(t) + Q \int dt' G^{(1,1)}(t, t'). \quad (4.8)$$

Diese Gln. (4.6), (4.7), (4.8) ergeben mit (3.5) schließlich die weiter zu behandelnde Formel

$$r_1 y_{1,2}(t_n, t_{n+1}) = \lim_t \frac{Q}{t} \int dt' G^{(1,1)}(t, t'). \quad (4.9)$$

Neben (4.9) benötigen wir die aus (4.1) trivial folgende Gleichung

$$G^{(1,1)}(t, t') = M_{x,i} G^{(1,1)}(t, t', x, i). \quad (4.10)$$

5. Beitrag der Quellereignisse zur Korrelation

Unter einer Neutronenkette wollen wir die Gesamtheit der Prozesse verstehen, die von einem einzelnen

Quellneutron ausgelöst werden. Nach dieser Definition kann ein Quellereignis (z.B. die Spontanspaltung) gleichzeitig mehrere Neutronenketten auslösen. Wir können jetzt zeigen, daß die Zählrate der nichtzufälligen Koinzidenzen $r_1 y_{12}$ drei Beiträge enthält:

1. Der in der Praxis wichtigste Beitrag kommt von der Zählung zweier Ereignisse aus derselben Neutronenkette.

2. Ein weiterer Beitrag beruht auf der direkten Registrierung eines Quellereignisses über Kanal 1 und einer darauf folgenden Registrierung eines Ereignisses aus einer dem Quellereignis zugeordneten Neutronenkette über Kanal 2.

3. Der letzte Beitrag bezieht sich auf die Spontanspaltung als mögliches Quellereignis; Registrierungen von Ereignissen aus verschiedenen Neutronenketten liefern nichtzufällige Koinzidenzen, wenn sie durch das gemeinsame Quellereignis korreliert sind.

Zum Beweis führen wir ein

$W_i(t, t', x) = EF$ für die Zahl von direkten Registrierungen von Quellereignissen mit den Bestimmungsgrößen t', x und $i = \text{Typ}$ ($i \geq 1$),

$F(t, t', x, v) = EF$ für die Zahl der Registrierungen von Ketteneignissen aus einer Neutronenkette, deren Quellneutron die Bestimmungsgrößen t', x, v besitzt ($v = \text{Geschwindigkeit}$).

Auf die Registrierung von Quell- und Ketteneignissen ist Satz 3 über die EF anzuwenden. Zu einem Quellereignis zur Zeit t' vom Typ i gehört, falls nur ein Quellneutron mit den Koordinaten (x, v) erzeugt wird, eine EF

$$G(t, t', x, v, i) = W_i(t, t', x) F(t, t', x, v). \quad (5.1)$$

Bezeichnen wir mit $M_v^{(i)}$ die Mittelung über das Spektrum $s_i(v)$ der Quelle, so liefert Satz 2 über die EF

$$G(t, t', x, i) = W_i(t, t', x) M_v^{(i)} F(t, t', x, v). \quad (5.2)$$

In diesem Fall eines einzelnen Quellneutrons erhalten wir für das Moment

$$G^{(1,1)}(t, t', x, i) = \left. \begin{aligned} &M_v^{(i)} F^{(1,1)}(t, t', x, v) \\ &+ W_i^{(1,0)}(t, t', x) M_v^{(i)} F^{(0,1)}(t, t', x, v). \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Die Terme in $W^{(1,1)}$ und $W^{(0,1)} F^{(1,0)}$ verschwinden wegen der Absprache (3.1) über die Arbeitszeiten der Kanäle 1 und 2. Ein Quellereignis kann nur in eines der Zeitintervalle fallen und muß vor den registrierten Ketteneignissen liegen.

Werden bei einer Spontanspaltung n Neutronen mit den Geschwindigkeiten v_1, \dots, v_n erzeugt, erweitert sich (5.1) zu

$$\left. \begin{aligned} &G(t, t', x, v_1, \dots, v_n, sf) \\ &= W_{sf}(t, t', x) \prod_{k=1}^n F(t, t', x, v_k). \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Für die Verteilung der Zahlen und der Spektren von Neutronen aus der Spontanspaltung machen wir eine kernphysikalische Annahme,

$$\left. \begin{aligned} &\text{prob}(n \text{ Neutronen mit den Geschwindigkeiten} \\ &v_1, \dots, v_n \text{ werden erzeugt}) \\ &= p_{n, sf} \prod_{k=1}^n \chi(v_k) dv_k. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Der Ausdruck (5.5), welcher die weitere mathematische Darstellung wesentlich vereinfacht, ist für die häufigsten Fälle eine gute Approximation der wahren Verteilung. Wir benötigen im folgenden die Momente

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}_{sf} &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{n, sf} n, \\ \overline{v(v-1)}_{sf} &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{n, sf} n(n-1). \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Die Mittelung über die Verteilung (5.5) läßt (5.4) übergehen in

$$G(t, t', x, sf) = W_{sf}(t, t', x) \sum_{n=0}^{\infty} p_{n, sf} (M_x F(t, t', x, v))^n, \quad (5.7)$$

worin M_x den Operator der Mittelung bezüglich v über das Spaltspektrum $\chi(v)$ bezeichnet. Hieraus folgt

$$\left. \begin{aligned} G^{(1,1)}(t, t', x, sf) &= \bar{r}_{sf} M_x F^{(1,1)}(t, t', x, v) + \\ &+ W_{sf}^{(1,0)}(t, t', x) \bar{r}_{sf} M_x F^{(0,1)}(t, t', x, v) + \\ &+ \overline{v(v-1)}_{sf} (M_x F^{(1,0)}(t, t', x, v)) \times \\ &\times (M_x F^{(0,1)}(t, t', x, v)). \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Wir werden (5.3) und (5.8) in (4.9) einsetzen. Vorweg jedoch wollen wir den zweiten Beitrag gesondert betrachten. Für die Wahrscheinlichkeit, ein Quellereignis über Kanal 1 direkt zu registrieren, haben wir

$$W_i^{(1,0)}(t, t', x) = \left. \begin{aligned} &w_{i, i}(x) \text{ für } 0 \leq t' \leq t, \text{ nach (2.11).} \\ &0 \text{ sonst.} \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Ferner ist $F^{(0,1)}$, als unbedingter Erwartungswert für Zählungen über Kanal 2, von t unabhängig, so daß dieser Beitrag zu (4.9)

$$Q \int dx dv \sum_{i=1}^{\infty} q_i(x) w_{1, i}(x) s_i(v) F^{(0,1)}(0, 0, x, v)$$

lautet; für die Spontanspaltung ist gerade $s_{sf}(v) = \bar{r}_{sf} \chi(v)$!

Erweitern mit der Zählrate für Quellereignisse über Kanal 1, $r_{1, q}$ nach (2.11), führt auf

$$r_{1, q} \int dx dv F^{(0,1)}(0, 0, x, v) N_q(x, v).$$

Darin ist

$$N_q(x, v) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} q_i(x) w_{1, i}(x) s_i(v)}{\int dx \sum_{i=1}^{\infty} q_i(x) w_{1, i}(x)} \quad (5.10)$$

die mittlere Verteilung von Quellneutronen aus einem Quellprozeß, der über Kanal 1 registriert wird. Für gemischte Neutronenquellen (aus Einzelneutronenerzeugung und Spontanspaltung) gilt offenbar die nützliche Ungleichung

$$1 \leq \int dx dv N_q(x, v) \leq \bar{r}_{sf}. \quad (5.11)$$

Wir erinnern an die Bezeichnungen aus Abschnitt 2 und definieren zusätzlich

$$Q_2(x) = Q q_{sf}(x) \overline{v(v-1)}_{sf} = Q_{sf}(x) \overline{v(v-1)}_{sf}. \quad (5.12)$$

Damit läßt sich (4.9) in eine Form bringen, welche die anfangs beschriebenen Beiträge einzeln ausweist:

$$r_1 y_{12}(t_n, t_{n+1}) = \int dx dv S_1(x, v) \lim_t \int dt' \times \left. \begin{aligned} &\times \frac{F^{(1,1)}(t, t', x, v)}{t} + r_{1,q} \int dx dv F^{(0,1)}(0, 0, x, v) \times \\ &\times N_q(x, v) + \int dx' dv_1' dv_2' Q_2(x') \chi(v_1') \chi(v_2') \times \\ &\times \lim_t \int dt' \left[\frac{F^{(1,0)}(t, t', x', v_1')}{t} F^{(0,1)}(t, t', x', v_2') \right]. \end{aligned} \right\} (5.13)$$

Nun kann man die 1. Momente $F^{(1,0)}$ und $F^{(0,1)}$ direkt mit Hilfe der für Mittelwerte geltenden Boltzmann-Gleichung angeben. Injizieren wir zum Zeitpunkt $\vartheta = 0$ ein Neutron mit den Koordinaten (x_0, v_0) in ein multiplizierendes System, so liefert die Lösung der zeitabhängigen homogenen Boltzmann-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} n(x_0, v_0, x_1, v_1, \vartheta) = \mathbf{B}_1 n(x_0, v_0, x_1, v_1, \vartheta) \quad (5.14)$$

mit der Anfangsverteilung

$$n(x_0, v_0, x_1, v_1, +0) = \delta(x_1 - x_0, v_1 - v_0) \quad (5.15)$$

($\delta =$ Dirac-Funktion) die für $\vartheta \geq 0$ erwartete Neutronendichte-Verteilung in (x_1, v_1) .

$E_1(x_1, v_1)$ ist nach (2.9) die Nachweis-Empfindlichkeit des Kanals I für Neutronen. Dann ist ersichtlich

$$\left. \begin{aligned} &F^{(1,0)}(t, t', x', v_1') \\ &= \int_0^t d\vartheta \int dx_1 dv_1 E_1(x_1, v_1) n(x', v_1', x_1, v_1, \vartheta - t'). \end{aligned} \right\} (5.16)$$

Hieraus folgt direkt

$$\left. \begin{aligned} &\lim_t \frac{F^{(1,0)}(t, t', x', v_1')}{t} \\ &= \int dx_1 dv_1 E_1(x_1, v_1) n(x', v_1', x_1, v_1, -t'). \end{aligned} \right\} (5.17)$$

Das Moment $F^{(0,1)}(0, t', x', v_2')$ interessiert nunmehr nur noch für $t' \leq 0$. Für positive ϑ gilt dann, wie man leicht einsieht,

$$\left. \begin{aligned} &n(x', v_2', x_2, v_2, \vartheta - t') \\ &= \int dx dv n(x', v_2', x, v, -t') n(x, v, x_2, v_2, \vartheta). \end{aligned} \right\} (5.18)$$

Setzen wir (5.18) in den zu (5.16) analogen Ausdruck ein, so erhalten wir für $t' \leq 0$

$$\left. \begin{aligned} &F^{(0,1)}(0, t', x', v_2') \\ &= \int dx dv F^{(0,1)}(0, 0, x, v) n(x', v_2', x, v, -t'). \end{aligned} \right\} (5.19)$$

Wir definieren jetzt einen linearen Operator \mathbf{G} durch

$$\mathbf{G} f(x, v) = \int dx dv F^{(0,1)}(0, 0, x, v) f(x, v). \quad (5.20)$$

Ist $f(x, v)$ eine Neutronenverteilung zum Zeitpunkt $\vartheta = 0$, so gibt offenbar $\mathbf{G} f(x, v)$ den Erwartungswert für die von diesen Neutronen verursachten, im Zeitintervall (t_n, t_{n+1}) über Kanal 2 erfolgenden Registrierungen. \mathbf{G} soll stets auf die Koordinaten (x, v) wirken.

Ferner sei in einem unterkritischen System

$$\left. \begin{aligned} &n^{(2)}(x', v_1', v_2', x_1, v_1, x_2, v_2) \\ &= \int_{+0}^{\infty} d\vartheta n(x', v_1', x_1, v_1, \vartheta) n(x', v_2', x_2, v_2, \vartheta). \end{aligned} \right\} (5.21)$$

(5.17), (5.19), (5.20), (5.21) führen auf

$$\left. \begin{aligned} &\lim_t \int dt' \frac{F^{(1,0)}(t, t', x', v_1')}{t} F^{(0,1)}(t, t', x', v_2') \\ &= \mathbf{G} \int dx_1 dv_1 E_1(x_1, v_1) \times \\ &\quad \times n^{(2)}(x', v_1', v_2', x_1, v_1, x, v). \end{aligned} \right\} (5.22)$$

Einsetzen in (5.13) schließlich liefert bei Erweitern dieses Terms mit der Zählrate für Kettenereignisse über Kanal 1, $r_{1,k}$ nach (2.8),

$$\left. \begin{aligned} &r_1 y_{12}(t_n, t_{n+1}) = \int dx dv S_1(x, v) \lim_t \int dt' \times \\ &\times \frac{F^{(1,1)}(t, t', x, v)}{t} + r_{1,q} \mathbf{G} N_q(x, v) + r_{1,k} \mathbf{G} \times \\ &\times \frac{\int dx_1 dv_1 E_1(x_1, v_1) \int dx' dv_1' dv_2' Q_2(x') \chi(v_1') \chi(v_2') \times}{\int dx_1 dv_1 E_1(x_1, v_1) \times} \\ &\quad \times n^{(2)}(x', v_1', v_2', x_1, v_1, x, v). \end{aligned} \right\} (5.23)$$

In den folgenden Abschnitten behandeln wir $F^{(1,1)}(t, t', x, v)$ und $n^{(2)}(x', v_1', v_2', x_1, v_1, x_2, v_2)$.

6. Die Erststoßbeziehungen für eine Neutronenkette

In Ergänzung der Definition von $F(t, t', x, v)$ im vorigen Abschnitt führen wir eine entsprechende bedingte EF $F(t, t', x, v, \vartheta, b)$ ein mit der Bedingung, daß der erste Stoßprozeß des Quellneutrons zum Zeitpunkt $t' + \vartheta$ erfolgt und vom Typ b ist.

$W_0(t, t', x, v, b)$ sei die EF für die Zahl der Registrierungen eines Stoßes zum Zeitpunkt t' vom Typ b , wenn das stoßende Neutron die Koordinaten (x, v) hat.

Die Stoßzeiten ϑ eines Neutrons mit den Anfangskordinaten (x, v) sind für $\vartheta \geq 0$ verteilt wie

$$\left. \begin{aligned} &K(x, v, \vartheta) d\vartheta \\ &= \alpha(x + v\vartheta, v) d\vartheta \exp\left(-\int_0^{\vartheta} \alpha(x + v\tau, v) d\tau\right). \end{aligned} \right\} (6.1)$$

Weit draußen im Raum Sorge ein das Experiment nicht störender schwarzer Absorber dafür, daß

$$\int_0^{\infty} K(x, v, \vartheta) d\vartheta = 1. \quad (6.2)$$

Mit $M_{\vartheta, b} = M_{\vartheta} M_b^{(\vartheta)}$ bezeichnen wir den Operator der Mittelung über die Verteilung (6.3) von Stoßzeiten und -typen,

$$K(x, v, \vartheta) P(x + v\vartheta, v, b) d\vartheta db. \quad (6.3)$$

Nach Satz 2 über die EF ist

$$F(t, t', x, v) = M_{\vartheta, b} F(t, t', x, v, \vartheta, b). \quad (6.4)$$

Wir ziehen jetzt drei Arten von Stößen in Betracht, auf die jeweils Satz 3 über die EF anzuwenden ist. Angegeben werden die entsprechenden EF, das Moment $F^{(1,0)}$ ($F^{(0,1)}$ ist dazu analog) sowie $F^{(1,1)}$. Dabei sind die Arbeitszeiten der Kanäle 1 und 2 nach (3.1) berücksichtigt. Als häufig auftauchende Argumente werden abgekürzt

$$x + v\vartheta = y, \quad t' + \vartheta = u. \quad (6.5)$$

1. Die Bedingung b bezeichne eine Absorption.

$$F(t, t', x, v, \vartheta, b) = W_0(t, u, y, v, b), \quad (6.6)$$

$$F^{(1,0)}(t, t', x, v, \vartheta, b) = W_0^{(1,0)}(t, u, y, v, b), \quad (6.7)$$

$$F^{(1,1)} = 0. \quad (6.8)$$

2. b bezeichne eine Streuung.

$$\left. \begin{aligned} F(t, t', x, v, \vartheta, b) \\ = W_0(t, u, y, v, b) \int dv_1 s_0(v_1, v, b) F(t, u, y, v_1) \end{aligned} \right\} (6.9)$$

$s_0(v_1, v, b)$ charakterisiert hier und bei der Spaltung Zahl und Verteilung der Geschwindigkeit v_1 der Folgeneutronen eines Stoßes vom Typ b mit der Ausgangsgeschwindigkeit v .

$$\left. \begin{aligned} F^{(1,0)}(t, t', x, v, \vartheta, b) \\ = \int dv_1 s_0(v_1, v, b) F^{(1,0)}(t, u, y, v_1) + \\ + W_0^{(1,0)}(t, u, y, v, b), \end{aligned} \right\} (6.10)$$

$$\left. \begin{aligned} F^{(1,1)}(t, t', x, v, \vartheta, b) \\ = \int dv_1 s_0(v_1, v, b) F^{(1,1)}(t, u, y, v_1) + \\ + W_0^{(1,0)}(t, u, y, v, b) \times \\ \times \int dv_1 s_0(v_1, v, b) F^{(0,1)}(t, u, y, v_1). \end{aligned} \right\} (6.11)$$

3. b bezeichne eine Spaltung. Die Verteilung der Spaltneutronen (5.5) verallgemeinern wir zu

$$p_n(v, b) \prod_{k=1}^n \chi(v_k) dv_k. \quad (6.12)$$

Ist M_x jetzt die Mittelung in v_1 über das Spaltspektrum $\chi(v_1)$, so gilt offenbar für beliebiges $f(v_1)$

$$\bar{v}(v, b) M_x f(v_1) = \int dv_1 s_0(v_1, v, b) f(v_1). \quad (6.13)$$

Damit wird

$$\left. \begin{aligned} F(t, t', x, v, \vartheta, b) \\ = W_0(t, u, y, v, b) \sum_{n=0}^{\infty} p_n(v, b) (M_x F(t, u, y, v_1))^n, \end{aligned} \right\} (6.14)$$

$$\left. \begin{aligned} F^{(1,0)}(t, t', x, v, \vartheta, b) \\ = \int dv_1 s_0(v_1, v, b) F^{(1,0)}(t, u, y, v_1) + \\ + W_0^{(1,0)}(t, u, y, v, b), \end{aligned} \right\} (6.15)$$

$$\left. \begin{aligned} F^{(1,1)}(t, t', x, v, \vartheta, b) \\ = \int dv_1 s_0(v_1, v, b) F^{(1,1)}(t, u, y, v_1) + \\ + W_0^{(1,0)}(t, u, y, v, b) \int dv_1 s_0(v_1, v, b) \times \\ \times F^{(0,1)}(t, u, y, v_1) + \bar{v}(\bar{v}-1)(v, b) \times \\ \times (M_x F^{(1,0)}(t, u, y, v_1)) (M_x F^{(0,1)}(t, u, y, v_1)). \end{aligned} \right\} (6.16)$$

Da für Absorptionsprozesse $s_0 \equiv 0$ ist und $\bar{v}(\bar{v}-1) = 0$ für Absorption und Streuung, folgen aus (6.4) Integralgleichungen für $F^{(1,0)}$, $F^{(0,1)}$ und $F^{(1,1)}$ der Form

$$\left. \begin{aligned} F^{(1,0)}(t, t', x, v) \\ = M_{\vartheta, b} \int dv_1 s_0(v_1, v, b) F^{(1,0)}(t, u, y, v_1) + \\ + M_{\vartheta, b} W_0^{(1,0)}(t, u, y, v, b), \end{aligned} \right\} (6.17)$$

$$\left. \begin{aligned} F^{(0,1)}(t, t', x, v) \\ = M_{\vartheta, b} \int dv_1 s_0(v_1, v, b) F^{(0,1)}(t, u, y, v_1) + \\ + M_{\vartheta, b} W_0^{(0,1)}(t, u, y, v, b), \end{aligned} \right\} (6.18)$$

$$\left. \begin{aligned} F^{(1,1)}(t, t', x, v) \\ = M_{\vartheta, b} \int dv_1 s_0(v_1, v, b) F^{(1,1)}(t, u, y, v_1) + \\ + M_{\vartheta, b} W_0^{(1,0)}(t, u, y, v, b) \int dv_1 s_0(v_1, v, b) \times \\ \times F^{(0,1)}(t, u, y, v_1) + M_{\vartheta, b} \bar{v}(\bar{v}-1)(v, b) \times \\ \times (M_x F^{(1,0)}(t, u, y, v_1)) (M_x F^{(0,1)}(t, u, y, v_1)). \end{aligned} \right\} (6.19)$$

Darin ist

$$y = x + v\vartheta, \quad u = t' + \vartheta. \quad (6.5)$$

Die Lösung von (6.17) ist unmittelbar zugänglich, ohne Benutzung von (6.17) in dieser Gestalt. Wir formen etwas um,

$$\left. \begin{aligned} M_{\vartheta, b} W_0^{(1,0)}(t, u, y, v, b) \\ = M_{\vartheta} \int db P(y, v, b) W_0^{(1,0)}(t, u, y, v, b) \\ = M_{\vartheta} w_{1,0}(y, v, t, u). \end{aligned} \right\} (6.20)$$

Dabei ist $w_{1,0}(y, v, t, u)$ nach (2.10) eine durch die Zeitabhängigkeit in u verallgemeinerte Wahrscheinlichkeit für die Erfassung (über Kanal 1) eines Stoßes mit den Stoßkoordinaten (y, v) ; die Öffnungszeit t wird als Parameter mitgeschrieben.

$$\left. \begin{aligned} F^{(1,0)}(t, t', x_0, v_0) \\ = M_{\vartheta, b} \int dv s_0(v, v_0, b) F^{(1,0)}(t, u, y_0, v) \\ + M_{\vartheta} w_{1,0}(y_0, v_0, t, u). \end{aligned} \right\} (6.21)$$

Mit $n(x_0, v_0, x', v', \vartheta)$ nach (5.14), (5.15) ist aber gerade

$$\left. \begin{aligned} F^{(1,0)}(t, t', x_0, v_0) \\ = \int_0^{\infty} d\vartheta \int dx' dv' n(x_0, v_0, x', v', \vartheta) \times \\ \times \alpha(x', v') w_{1,0}(x', v', t, t' + \vartheta). \end{aligned} \right\} (6.22)$$

Entsprechendes gilt für $F^{(0,1)}$. Da nun (6.19) als Integralgleichung für $F^{(1,1)}$ die gleiche Struktur besitzt wie (6.17), (6.18), kann die Lösung in der Form (6.22) hingeschrieben werden, indem $w_{1,0}$ durch die geeignet umgeformten inhomogenen Terme aus (6.19) ersetzt wird. Wir ziehen es jedoch vor, (6.19) zunächst in die entsprechende Integralgleichung für

$$F_t^{(1,1)}(t', x_0, v_0) = \lim_t \frac{F^{(1,1)}(t, t', x_0, v_0)}{t} \quad (6.23)$$

umzuwandeln, die uns letztlich allein interessiert. Es gilt

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha_f(x_0, v_0)}{\alpha(x_0, v_0)} \overline{v(v-1)}(x_0, v_0) \\ = \int db P(x_0, v_0, b) \overline{v(v-1)}(v_0, b). \end{aligned} \right\} (6.24)$$

Weiter ist

$$\boxed{\frac{\delta(x-x_0) \bar{s}_0(v, x_0, v_0)}{w_{1,0}(x_0, v_0)} = \frac{\int db P(x_0, v_0, b) w_{1,0}(x_0, v_0, b) s_0(v, v_0, b) \delta(x-x_0)}{w_{1,0}(x_0, v_0)}} \quad (6.25)$$

die mittlere Verteilung in (x, v) der Folgeneutronen aus einem Stoßprozess mit den Koordinaten (x_0, v_0) , welcher über Kanal 1 registriert wird.

Nach Einsetzen und Durchführung der leicht möglichen Grenzübergänge in den inhomogenen Termen von (6.19) gelangen wir zu der wie (6.21) aufgebauten Gleichung

$$\left. \begin{aligned} F_t^{(1,1)}(t', x_0, v_0) \\ = M_{\vartheta, b} \int dv s_0(v, v_0, b) F_t^{(1,1)}(u, y_0, v) + \\ + M_{\vartheta} \delta(u) w_{1,0}(y_0, v_0) \int dv \bar{s}_0(v, y_0, v_0) \times \\ \times F^{(0,1)}(0, 0, y_0, v) + M_{\vartheta} \frac{\alpha_f(y_0, v_0)}{\alpha(y_0, v_0)} \times \\ \times \overline{v(v-1)}(y_0, v_0) \int dv_1' dv_2' dx_1' dv_1' \times \\ \times [\chi(v_1') \chi(v_2') E_1(x_1, v_1) n(y_0, v_1', x_1, v_1, -u) \times \\ \times F^{(0,1)}(0, u, y_0, v_2')], \end{aligned} \right\} (6.26)$$

woraus in Analogie zu (6.22) folgt

$$\begin{aligned}
 & F_i^{(1,1)}(t', x_0, v_0) \\
 &= \int dx' dv' E_1(x', v') n(x_0, v_0, x', v', -t') \times \\
 & \quad \times \int dv \bar{s}_0(v, x', v') F^{(0,1)}(0, 0, x', v) + \\
 & \quad + \int_0^\infty d\vartheta \int dx' dv' dv'_1 dv'_2 dx_1 dv_1 [\chi(v'_1) \chi(v'_2) \times \\
 & \quad \times \alpha_f(x', v') \overline{\nu(\nu-1)}(x', v') n(x_0, v_0, x', v', \vartheta) \times \\
 & \quad \times E_1(x_1, v_1) n(x', v'_1, x_1, v_1, -t' - \vartheta) \times \\
 & \quad \times F^{(0,1)}(0, t' + \vartheta, x', v'_2)].
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Beiträge werden nur für t', ϑ aus

$$0 \leqq \vartheta \leqq -t' \tag{6.28}$$

geliefert. Nach (5.19), (5.20) schreiben wir jetzt

$$\begin{aligned}
 & F_i^{(1,1)}(t', x_0, v_0) \\
 &= \int dx' dv' E_1(x', v') n(x_0, v_0, x', v', -t') \times \\
 & \quad \times G \delta(x - x') \bar{s}_0(v, x', v') + \\
 & \quad + \int_0^\infty d\vartheta \int dx' dv' dv'_1 dv'_2 dx_1 dv_1 [\chi(v'_1) \chi(v'_2) \times \\
 & \quad \times \alpha_f(x', v') \overline{\nu(\nu-1)}(x', v') E_1(x_1, v_1) \times \\
 & \quad \times n(x_0, v_0, x', v', \vartheta) n(x', v'_1, x_1, v_1, -t' - \vartheta) \times \\
 & \quad \times G n(x', v'_2, x, v, -t' - \vartheta)].
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

An dieser Stelle möchten wir auf zwei ganz wesentliche Punkte ausdrücklich hinweisen:

1. Mit (6.29) ist die gestellte Aufgabe reduziert auf die Integration über Lösungen der zeitabhängigen Boltzmann-Gleichung. Bezüglich des Operators G sei für diese Behauptung auf (6.22) und seine Definition (5.20) verwiesen.

2. Die bisher für die Neutronenkette abgeleiteten Beziehungen gelten ganz allgemein, auch in einem überkritischen Reaktor. Die beiden Terme in (6.29) sind im übrigen leicht als Einfluß des Detektors und als ein hiervon unabhängiger Hauptanteil zu erkennen. Jetzt kehren wir zum stationären, unterkritischen Reaktor zurück und führen die in (5.23) geforderte Integration über t' aus. Danach ist auch die Integration über ϑ ausführbar. Mit den Definitionen (5.21) und

$$n^{(1)}(x_0, v_0, x_1, v_1) = \int_0^\infty n(x_0, v_0, x_1, v_1, \vartheta) d\vartheta \tag{6.30}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
 & \int dt' F_i^{(1,1)}(t', x_0, v_0) \\
 &= \int dx' dv' E_1(x', v') n^{(1)}(x_0, v_0, x', v') \times \\
 & \quad \times G \delta(x - x') \bar{s}_0(v, x', v') + \\
 & \quad + \int dx' dv' dv'_1 dv'_2 dx_1 dv_1 [\chi(v'_1) \chi(v'_2) \times \\
 & \quad \times \alpha_f(x', v') \overline{\nu(\nu-1)}(x', v') E_1(x_1, v_1) \times \\
 & \quad \times n^{(1)}(x_0, v_0, x', v') G n^{(2)}(x', v'_1, v'_2, x_1, v_1, x, v)].
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

G wirkt vor mehrparametrischen Funktionen definitionsgemäß stets auf die Koordinaten (x, v) .

$n^{(1)}(x_0, v_0, x, v)$ genügt, wie man auch auf die im folgenden Abschnitt gezeigte Art beweisen könnte, einer stationären Boltzmann-Gleichung

$$B n^{(1)}(x_0, v_0, x, v) + \delta(x - x_0, v - v_0) = 0. \tag{6.32}$$

7. Die stationäre binäre Boltzmann-Gleichung

Bezeichnen wir die Gl. (6.32) als stationäre Boltzmann-Gleichung der Ordnung 1, so können wir die folgende für $n^{(2)}$ nach (5.21) geltende Gleichung

$$\begin{aligned}
 & (B_1 + B_2) n^{(2)}(x', v'_1, v'_2, x_1, v_1, x_2, v_2) + \\
 & \quad + \delta(x_1 - x', x_2 - x', v_1 - v'_1, v_2 - v'_2) = 0
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

als Boltzmann-Gleichung der Ordnung 2 oder als binäre Boltzmann-Gleichung definieren. Zum Beweis dieser Gl. (7.1) ziehen wir (5.14), (5.15), (5.21) sowie die Linearität des Boltzmann-Operators B heran:

$$\begin{aligned}
 & (B_1 + B_2) \int_0^\infty d\vartheta n(x', v'_1, x_1, v_1, \vartheta) \times \\
 & \quad \times n(x', v'_2, x_2, v_2, \vartheta) \\
 &= \int_0^\infty d\vartheta ((B_1 n(x', v'_1, x_1, v_1, \vartheta)) \times \\
 & \quad \times n(x', v'_2, x_2, v_2, \vartheta) + \\
 & \quad + n(x', v'_1, x_1, v_1, \vartheta) B_2 n(x', v'_2, x_2, v_2, \vartheta)) \\
 &= \int_0^\infty d\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} (n(x', v'_1, x_1, v_1, \vartheta) \times \\
 & \quad \times n(x', v'_2, x_2, v_2, \vartheta)) \\
 &= -n(x', v'_1, x_1, v_1, +0) n(x', v'_2, x_2, v_2, +0) \\
 &= -\delta(x_1 - x', v_1 - v'_1) \delta(x_2 - x', v_2 - v'_2), \\
 & \quad \text{w. z. b. w.}
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Aus der Definitionsgleichung (5.21) folgt unmittelbar die für gewöhnlich mit dem Operator $(B_1 + B_2)$ zu verknüpfende Randbedingung am Vakuum, nämlich Verschwinden für den Fall, daß x_1 oder x_2 ein Randpunkt ist und die zugehörige Geschwindigkeit, v_1 bzw. v_2 , aus dem Vakuum in das (konvexe) Reaktorvolumen weist.

Der B -Operator besitzt Eigenfunktionen $f_i(x, v)$ und Eigenwerte α_i , definiert durch

$$B f_i(x, v) + \alpha_i f_i(x, v) = 0. \tag{7.3}$$

Wir setzen im folgenden der Einfachheit halber voraus, daß die $f_i(x, v)$ ein vollständiges System bilden. Dann bilden die Funktionen $f_i(x_1, v_1) f_k(x_2, v_2)$ das vollständige System der Eigenfunktionen des Operators $(B_1 + B_2)$ mit zugehörigen Eigenwerten $(\alpha_i + \alpha_k)$. Wir erinnern uns an die Bestimmung der mittleren Neutronendichte $n_1(x, v)$ für eine Quelle $S_1(x, v)$

$$B n_1(x, v) + S_1(x, v) = 0. \tag{7.4}$$

Wir definieren jetzt eine binäre Neutronenquelle

$$S_2(x_1) \delta(x_1 - x_2) \chi(v_1) \chi(v_2) \tag{7.4}$$

mit

$$\begin{aligned}
 & S_2(x_1) = Q_2(x_1) + \\
 & \quad + \int dv n_1(x_1, v) \alpha_f(x_1, v) \overline{\nu(\nu-1)}(x_1, v)
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

und $Q_2(x_1)$ nach (5.12).

Die binäre Neutronendichte $n_2(x_1, v_1, x_2, v_2)$ genüge der Definitionsgleichung

$$\begin{aligned}
 & (B_1 + B_2) n_2(x_1, v_1, x_2, v_2) + \\
 & \quad + S_2(x_1) \delta(x_1 - x_2) \chi(v_1) \chi(v_2) = 0.
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

$n_2(x_1, v_1, x_2, v_2)$ ist in (x_1, v_1) und (x_2, v_2) symmetrisch. Bei Benutzung der Bezeichnungen nach (2.7) bis (2.13) gewinnen wir den endgültigen Ausdruck für die Zählrate nicht zufälliger verzögerter Koinzidenzen im Koinzidenz-Intervall (t_n, t_{n+1}) durch Zusammenfassen der Gln. (5.23) und (6.31):

$$r_1 y_{12}(t_n, t_{n+1}) = r_{12} - r_1 r_2 (t_{n+1} - t_n) = r_{1,k} \mathbf{G} \left(\frac{\int dx_1 dv_1 E_1(x_1, v_1) n_2(x_1, v_1, x, v)}{\int dx_1 dv_1 E_1(x_1, v_1) n_1(x_1, v_1)} + N_k(x, v) \right) + r_{1,q} \mathbf{G} N_q(x, v). \quad (7.7)$$

$N_q(x, v)$ wurde in (5.10) definiert, die analoge mittlere Verteilung $N_k(x, v)$ der Folgeneutronen aus einem Stoßprozeß, welcher über Kanal 1 registriert wurde, ist

$$N_k(x, v) = \frac{\int dx_1 dv_1 E_1(x_1, v_1) n_1(x_1, v_1) \bar{s}_0(v, x, v_1)}{\int dx_1 dv_1 E_1(x_1, v_1) n_1(x_1, v_1)} \quad (7.8)$$

mit $\bar{s}_0(v, x, v_1)$ aus (6.25). Je nach Art des Detektors (Absorptions-, Streuungs-, Spaltungszähler) gilt

$$0 \leq \int dx dv N_k(x, v) \leq v \text{ (Spaltkammer)}. \quad (7.9)$$

Der Operator $\mathbf{G} = \mathbf{G}(t_n, t_{n+1})$ liefert angewandt auf eine Anfangsverteilung $f(x, v, 0)$ der Neutronen für Kanal 2 den Erwartungswert von Registrierungen im Zeitintervall (t_n, t_{n+1})

$$\mathbf{G} f(x, v, 0) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt \int dx_2 dv_2 E_2(x_2, v_2) f(x_2, v_2, t). \quad (7.10)$$

Dabei genügt $f(x, v, t)$ für $t \geq 0$

$$\mathbf{B} f(x, v, t) = \frac{\partial}{\partial t} f(x, v, t). \quad (7.11)$$

Durch den \mathbf{G} -Operator wird die Rossi- α -Messung zum exakten Analogon des Experiments mit gepulsten Neutronenquellen [7]. $r_{1,k}$ und $r_{1,q}$ liefern die Analoga für die Rate der Quellimpulse, die dem Operator \mathbf{G} unterworfenen Verteilungen für die analogen Verteilungen der Quellneutronen im Phasenraum.

Zur Gl. (7.6) sei noch erwähnt, daß GOVORKOV in einer kurzen Mitteilung [14] ohne eingehendere Begründung eine Verallgemeinerung dieser Gleichung für eine nichtstationäre binäre Neutronendichte $n_2(x_1, v_1, x_2, v_2, t)$ angibt.

8. Entwicklung nach Eigenfunktionen

Im allgemeinen rührt der wichtigste Beitrag zur Korrelationsfunktion vom 1. Term des Ausdrucks (7.7) her, d.h. von der binären Neutronendichte nach (7.4), (7.5), (7.6). Die anderen Terme in (7.7) stellen Korrekturen dar [1], die überdies trivial zu ermitteln bzw. abzuschätzen sind [vgl. (5.10), (5.11) und (7.8), (7.9)]. Zur Vereinfachung der Darstellung nehmen wir daher an, daß über Kanal 1 nur Absorptionsprozesse registriert werden, z.B. mit einem BF_3 -Zählrohr, so daß

$$N_k(x, v) = r_{1,q} = 0, \quad (8.1)$$

$$r_{1,k} = r_1 \quad (8.2)$$

und

$$y_{12} = \mathbf{G} \frac{\int dx_1 dv_1 E_1(x_1, v_1) n_2(x_1, v_1, x, v)}{\int dx_1 dv_1 E_1(x_1, v_1) n_1(x_1, v_1)}. \quad (8.3)$$

Es liegt nunmehr nahe, die binäre Neutronendichte in (x_2, v_2) nach dem als vollständig vorausgesetzten

System der Eigenfunktionen (7.3) des \mathbf{B} -Operators zu entwickeln,

$$n_2(x_1, v_1, x_2, v_2) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x_1, v_1) f_i(x_2, v_2). \quad (8.4)$$

Die $g_i(x_1, v_1)$ verschwinden, wenn x_1 ein Randpunkt ist und v_1 ins Innere weist.

Danach ist

$$y_{12} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\int dx_1 dv_1 E_1(x_1, v_1) g_i(x_1, v_1)}{\int dx_1 dv_1 E_1(x_1, v_1) n_1(x_1, v_1)} \mathbf{G} f_i(x, v). \quad (8.5)$$

Nach (7.3), (7.10), (7.11) wird offenbar

$$\mathbf{G} f_i(x, v) = \left. \begin{aligned} &= A_i e^{-\alpha_i t_n} (t_{n+1} - t_n) \int dx dv E_2(x, v) f_i(x, v), \end{aligned} \right\} (8.6)$$

mit

$$A_i = A_i(t_{n+1} - t_n) = \frac{1 - \exp \alpha_i (t_n - t_{n+1})}{\alpha_i (t_{n+1} - t_n)}, \quad (8.7)$$

$$A_i \approx 1 \quad \text{für} \quad |\alpha_i (t_{n+1} - t_n)| \ll 1. \quad (8.8)$$

Wir setzen jetzt voraus, daß die stationäre mittlere Neutronendichte $n_1(x_1, v_1)$, die fundamentale Eigenfunktion $f_0(x, v)$ mit Eigenwert α_0 sowie die Adjungierte $f_0^*(x, v)$ gegeben sind. Diese Voraussetzungen müssen natürlich erfüllt sein, bevor man höhere Momente der Neutronenverteilung untersucht.

Dann erfordert die Bestimmung der asymptotischen Korrelationsfunktion, d.h. y_{12} für $t_n \rightarrow \infty$, lediglich die Kenntnis des Entwicklungskoeffizienten $g_0(x_1, v_1)$ aus (8.4). Setzen wir diese Entwicklung in (7.6) ein und bilden das linksseitige Skalarprodukt mit $f_0^*(x_2, v_2)$, so erhalten wir zunächst gliedweise (mit der üblichen Normierung $\int f_0^* f_0 dx dv = 1$ für die Eigenfunktionen)

$$\left. \begin{aligned} \int dx_2 dv_2 f_0^*(x_2, v_2) \mathbf{B}_1 n_2(x_1, v_1, x_2, v_2) \\ = \mathbf{B}_1 g_0(x_1, v_1), \end{aligned} \right\} (8.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \int dx_2 dv_2 f_0^*(x_2, v_2) \mathbf{B}_2 n_2(x_1, v_1, x_2, v_2) \\ = -\alpha_0 g_0(x_1, v_1), \end{aligned} \right\} (8.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \int dx_2 dv_2 f_0^*(x_2, v_2) S_2(x_1) \delta(x_1 - x_2) \chi(v_1) \chi(v_2) \\ = S_2(x_1) \varphi_0^*(x_1) \chi(v_1). \end{aligned} \right\} (8.11)$$

In (8.11) steckt die Definition der über das Spalt-spektrum gemittelten Adjungierten

$$\varphi_0^*(x_1) = \int dv_2 \chi(v_2) f_0^*(x_1, v_2). \quad (8.12)$$

Somit ergibt sich für den Entwicklungskoeffizienten $g_0(x_1, v_1)$ die mit der stationären Boltzmann-Gleichung (2.1) nahezu identische Gleichung

$$(\mathbf{B}_1 - \alpha_0) g_0(x_1, v_1) + S_2(x_1) \varphi_0^*(x_1) \chi(v_1) = 0. \quad (8.13)$$

Mit der Aufstellung dieser Gl. (8.13) ist, da $(\mathbf{B}_1 - \alpha_0)$ als Operator dieselbe Struktur wie \mathbf{B} nach (2.2) hat, die Berechnung des asymptotischen Modes der Korrelationsfunktion y_{12} im wesentlichen reduziert auf die Lösung der Eigenwertaufgabe (7.3) und zweimalige Integration einer stationären Boltzmann-Gleichung (2.1) bzw. (8.13), letztere mit einem Quellterm nach (7.5) und (8.12). Entsprechende Gleichungen gelten natürlich für die höheren Modes. Das Einsetzen in (8.5) bereitet danach keinerlei Schwierigkeiten, so daß wir unsere theoretischen Untersuchungen hiermit abschließen können.

9. Einfache Anwendungsbeispiele

Unter der gängigen Annahme, daß der Koinzidenzkanal (Abb. 2) eine hinreichend gute Auflösung besitzt, schreiben wir

$$t_n = t, \quad t_{n+1} - t_n = dt. \quad (9.1)$$

Die für eine Rossi- α -Messung optimale Verteilung der Neutronennachweis-Empfindlichkeit der dem Kanal 2 zugeordneten Detektoren ist wegen der Orthogonalitätsbeziehungen

$$E_2(x, v) = E_2 f_0^*(x, v), \quad E_2 = \text{const.} \quad (9.2)$$

Denn dann gilt nach (8.5), (8.6), (8.7) streng

$$y_{12}(t, t + dt) = \frac{\int dx_1 dv_1 E_1(x_1, v_1) g_0(x_1, v_1) \cdot E_2 dt e^{-\alpha_0 t}}{\int dx_1 dv_1 E_1(x_1, v_1) n_1(x_1, v_1)} \quad (9.3)$$

Das Arbeiten mit zwei unabhängigen Detektoren, das nach ORNDOFF [1] eine etwas einfachere Elektronik zuläßt, ermöglicht nach (8.5), (8.6) auch eine zweifache Diskriminierung gegen höhere Moden. Zur Isolierung des Grundmodes sollten die Detektoren so gewählt werden, daß $E_2(x, v)$ sich der in Strenge nicht erfüllbaren Forderung (9.2) anpaßt und daß $E_1(x, v)$ im Quotienten der Integrale einen großen Vorfaktor (Amplitude) in (9.3) für den Grundmode liefert.

In den Endgleichungen (2.1), (7.3) und (8.13) dürfen wir, da wir jetzt die Auswirkungen übersehen, den Boltzmann-Operator B in üblicher Weise approximieren, z.B. durch den Mehrgruppen-Diffusionsformalismus. Wir wählen als einfachstes Beispiel die Eingruppen-Diffusionstheorie und behandeln den unreflektierten Reaktor mit

$$S_1(x) = \text{const } f_0(x), \quad (9.4)$$

$$E_1(x) = E_2(x) = E f_0^*(x). \quad (9.5)$$

Die Koordinate v entfällt natürlich. Wie man leicht bestätigt, gilt

$$n_1(x) = \frac{S_1(x)}{\alpha_0} \quad (9.7)$$

sowie

$$S_2(x) = \frac{\alpha_f v(v-1)}{\alpha_0} S_1(x) \quad (9.8)$$

nach (7.5), wenn wir Spontanspaltung als Quellprozeß ausschließen. Die vereinfachte Gl. (8.13),

$$(B_{\text{Diff}} - \alpha_0) g_0(x) + S_2(x) f_0^*(x) = 0 \quad (9.9)$$

ergibt bei Bildung des linksseitigen Skalarprodukts mit $E_1(x)$, wenn wir (9.4), (9.5) berücksichtigen,

$$-2\alpha_0 \int dx E_1(x) g_0(x) + E \int dx S_2(x) f_0^{*2}(x) = 0 \quad (9.10)$$

$$\int dx E_1(x) g_0(x) = \frac{E \alpha_f v(v-1)}{2\alpha_0^2} \int dx S_1(x) f_0^{*2}(x), \quad (9.11)$$

$$\frac{\int dx E_1(x) g_0(x)}{\int dx E_1(x) n_1(x)} = \frac{\int dx f_0(x) f_0^{*2}(x)}{\int dx f_0(x) f_0^*(x)} \frac{v(v-1) \alpha_f \bar{v}}{2\bar{v} \alpha_0}. \quad (9.12)$$

Es sei in üblicher Bezeichnungweise k der effektive Multiplikationsfaktor, l_0 die Neutronenlebensdauer im Reaktormedium, l die Neutronenlebensdauer im endlichen System. Dann gelten

$$\alpha_f \bar{v} = \frac{k_\infty}{l_0} = \frac{k}{l}, \quad (9.13)$$

$$\alpha_0 = \frac{1-k}{l}, \quad (9.14)$$

$$\frac{\alpha_f \bar{v}}{\alpha_0} = \frac{k}{1-k}. \quad (9.15)$$

Einsetzen von (9.5), (9.12), (9.15) in (9.3) führt auf

$$y_{12}(t, t + dt) = \frac{\int dx f_0(x) f_0^*(x) E_2(x)}{\int dx f_0(x) f_0^*(x)} \cdot \frac{v(v-1)k}{2\bar{v}(1-k)} e^{-\alpha_0 t} dt. \quad (9.16)$$

Dies ist im wesentlichen eine Verallgemeinerung der von ORNDOFF [1] angegebenen Formel; der nach Ausführung der Mittelung über $E_2(x)$ verbleibende Unterschied beruht allein darauf, daß unser $E_2(x)$ sich auf den Nachweis von Neutronen, das Orndoffsche E sich dagegen auf den Nachweis einer Spaltung bezieht.

Neben der Zählrate für korrelierte Ereignisse,

$$r_1 y_{12}(t, t + dt) \text{ nach (7.7),}$$

interessiert die Zählrate unkorrelierter Ereignisse

$$r_1 r_2 dt = r_1 dt \int dx E_2(x) n_1(x) = r_1 dt \cdot \frac{1}{\alpha_0} \int dx E_2(x) S_1(x). \quad (9.17)$$

Aus (9.16), (9.17) folgt ein Verhältnis

$$\frac{y_{12}(0, dt)}{r_2 dt} = \frac{\int dx f_0(x) f_0^*(x) E_2(x)}{\int dx f_0(x) f_0^*(x) \cdot \int dx E_2(x) S_1(x)} \times \frac{v(v-1)k}{l \cdot 2\bar{v}}, \quad (9.18)$$

welches sich als Verhältnis Nutzsinal/Untergrund deuten läßt. Es enthält die Lebensdauer l der einzelnen Neutronen, nicht aber die mittlere Lebensdauer der Neutronenketten! (9.18) ermöglicht die Absolutbestimmung der Quellstärke $S_1(x)$; auf ähnliche Beziehungen in der Frequenzanalyse des Reaktorrauschens sei nur kurz verwiesen [16], [17].

Diese Behandlung eines idealisierten Systems, des unreflektierten Reaktors, nach der Eingruppen-Diffusionstheorie sollte nur die Anwendung des in den vorangehenden Abschnitten entwickelten Formalismus veranschaulichen. Die für die Praxis wichtige Behandlung eines Mehrzonen-Reaktors nach einer Mehrgruppentheorie und unter Verwendung realistischer Ansätze für die Empfindlichkeitsverteilung der Detektoren erfordert natürlich einen größeren numerischen Aufwand. Jedoch zeigt die Struktur der entscheidenden Gln. (2.1), (7.3) und (8.13), daß hierfür die gebräuchlichen Reaktorcodes — mit gewissen Modifikationen — eingesetzt werden können.

Literatur: [1] ORNDOFF, J.D.: Nuclear Sci. and Eng. 2, 450 (1957). — [2] BRUNSON, G.S., R. CURRAN et al.: Nucleonics 15, No. 11, 132 (1957). — [3] COTRANT, E.D., and P.R. WALLACE: Phys. Rev. 72, No. 11 (Dez. 1947). — [4] LARISSE, J., and BRAFFORT: J. Nuclear Energy, Part A 13, 133 (1961). — [5] RAJEVSKI, V.: Rapport CEA No. 917 (1958). — [6] BLAQUIÈRE, A., u. R. PACHOWSKA: Rapport CEA No. 2115 (1962). — [7] MATTHES, W.: Nukleonik 4, 213 (1962). — [8] HANSEN, G.E.: Nuclear Sci. and Eng. 8, 709 (1960). — [9] MULLIKIN, T.W.: US-Bericht RM-2693, RAND-Corporation (1961). — [10] PÁL, L.: Acta Phys. Acad. Sci. Hung. 14, Fasc. 4 (1962). — [11] WEINBERG, A.M., and E.P. WIGNER: The Physical Theory of Neutron Chain Reactors. Chicago: Chicago University Press 1958. — [12] FELLER, W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications. New York 1950. — [13] BARTLETT, M.S.: An Introduction to

Stochastic Processes. Cambridge 1955. — [14] GOVORKOV, A.B.: *Atomnaya Energ.* **13**, 152 (1962). — [15] FRISCH, O.R., and D.J. LITTLER: *Phil. Mag.* [7] **45**, 126 (1954). — [16] SCHRÖDER, R.: *Nukleonik* **4**, 227 (1962). — [17] THIE, J.A.: *Nuclear Physics* **21**, No. 3, 72 (1963). — [18] BORGWALDT, H., and D. SANITZ: Proc. of the EAES-Symposium on „Advances in Reactor Theory“, Karlsruhe, April 1963, Sessions IV, 3/4 (unveröffentlicht).