

KFK-186

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Oktober 1963

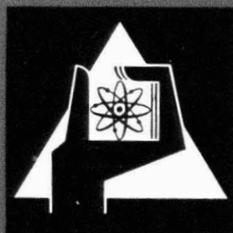
KFK 186

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Über den Einfluß eines prompten negativen Temperaturkoeffizienten
auf das Verhalten eines schnellen Reaktors nach einem Reaktivitätssprung

Axel Fraude

*Gesellschaft für Kernforschung m. b. H.
Verwaltung der Zentralbibliothek*



KERNREAKTOR

BAU- UND BETRIEBS-GESELLSCHAFT M. B. H.

KARLSRUHE

**Über den Einfluß eines prompten negativen Temperaturkoeffizienten
auf das Verhalten eines schnellen Reaktors nach einem Reaktivitätssprung**

Von **AXEL FRAUDE**

(Aus dem Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik des Kernforschungszentrums Karlsruhe)

Mit 1 Textabbildung

(Eingegangen am 2. August 1963)

Gesellschaft für Kernforschung m. b. H.
Zentralbücherei

4. Mrz 1964

Zusammenfassung. Die nichtlinearen ortsunabhängigen dynamischen Gleichungen werden im Bereich solcher Reaktivitätssprünge näherungsweise analytisch gelöst, bei denen sich der Einfluß der verzögerten Neutronen und der des negativen Temperaturkoeffizienten ganz oder teilweise kompensieren.

1. Einleitung

In dem voranstehenden Beitrag von K. OTT [1] ist die Verwendung verzögert überkritischer Exkursionen zur Messung des Doppler-Koeffizienten mathematisch in vereinfachter Weise behandelt worden. In der nachfolgenden Arbeit soll als Ergänzung hierzu das zeitliche Verhalten der Neutronendichte nach einem Reaktivitätssprung unter Berücksichtigung eines gegebenen negativen prompten Temperaturkoeffizienten auf einem anderen Wege näher beschrieben werden.

2. Lösungssatz für die Integro-Differentialgleichung der normierten Neutronendichte

Bezieht man die zeitabhängige Neutronendichte $n(t)$ auf ihren Anfangswert n_0 zur Zeit $t=0$, so kann man für die normierte Neutronendichte

$$y = \frac{n(t)}{n_0} \quad (1)$$

unter Zusammenfassung der kinetischen Gleichungen die folgende Integro-Differentialgleichung anschreiben

$$\frac{l}{\beta} \dot{y} = - \left(1 - k + \gamma^* \int_0^t (y(\tau) - 1) d\tau \right) y(t) + \left. \begin{aligned} &+ \sum_{i=1}^6 a_i \left(e^{-\lambda_i t} + \lambda_i \int_0^t e^{-\lambda_i(t-\tau)} y(\tau) d\tau \right) \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(0) = 1. \quad (2b)$$

Diese Gleichung entspricht der Gl.(1) in der oben genannten Arbeit [1]. Es sind darin k der zur Zeit $t=0$ eingeführte Sprung des Multiplikationsfaktors, gemessen in Einheiten von β ($0 < k < 1$), γ^* [sec⁻¹] die Rückkopplungskonstante und $a_i = \beta_i/\beta$.

Die Lösung der Gl.(2a) läßt sich in strenger analytischer Form nicht herstellen. Um einen brauchbaren Ansatz für eine Näherungslösung machen zu können, ist es zweckmäßig, sich zunächst mit Hilfe eines Analogrechners einige Anhaltspunkte über das

Verhalten der exakten Lösung zu verschaffen. Hierbei zeigt sich, daß die Neutronendichte nach einem plötzlichen Anstieg des Multiplikationsfaktors zunächst den bekannten „prompten Sprung“ macht. Ohne Temperaturreckwirkung würde sich dann ein weiteres jedoch langsames exponentielles Ansteigen anschließen, das im wesentlichen durch die verzögerten Neutronen bestimmt ist. Bei großen Werten von k ($k \approx 1$) ist wegen des höheren Sprunges von y auch die negative Temperaturreckwirkung auf die Reaktivität größer. In diesem Falle wird y unmittelbar nach dem Sprung wieder kleiner, während es bei kleineren Werten von k zunächst noch weiter ansteigt. Es ist daher sinnvoll, den „prompten Sprung“

$$y_p(t) = \frac{1 - k e^{-\frac{\beta}{l}(1-k)t}}{1 - k} \quad (3)$$

als eine bequem darstellbare Bezugskurve zu verwenden und die vollständige Lösung für $y(t)$ durch Hinzufügen einer Korrektur $\psi(t)$ herzustellen.

$$y(t) = y_p(t) + \psi(t). \quad (4)$$

$y_p(t)$ ist die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{l}{\beta} \dot{y}_p = -(1 - k) y_p + 1 \quad (5)$$

mit der Anfangsbedingung

$$y_p(0) = 1. \quad (6)$$

3. Formale Lösung

Nach Einsetzen des Ansatzes Gl.(4) in Gl.(2a) erhält man unter Berücksichtigung der Gl.(5) für $\psi(t)$ die ebenfalls noch nichtlineare Integro-Differentialgleichung

$$\frac{l}{\beta} \dot{\psi} = - \left(1 - k \right) \psi - \gamma^* (y_p + \psi) \int_0^t (y_p + \psi - 1) d\tau + \left. \begin{aligned} &+ \sum_i a_i \left(e^{-\lambda_i t} - 1 + \lambda_i \int_0^t e^{-\lambda_i(t-\tau)} (y_p + \psi) d\tau \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Hier kann man jedoch die Nichtlinearität beheben, wenn man nur einen kurzen Zeitraum nach dem Reaktivitätssprung betrachtet. Dann ist das Produkt

$$\psi \int_0^t \psi d\tau \ll \left(y_p \int_0^t (y_p + \psi - 1) d\tau + \psi \int_0^t (y_p - 1) d\tau \right) \quad (8)$$

und kann vernachlässigt werden.

Ferner ist für kleine t

$$\int_0^t e^{-\lambda_i(t-\tau)} \psi d\tau \approx \int_0^t \psi d\tau.$$

Damit erhält man

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta}{l} \dot{\psi} = & - \left(1 - k + \gamma^* \int_0^t (y_p - 1) d\tau \right) \psi - \\ & - \left(\gamma^* y_p - \sum a_i \lambda_i \right) \int_0^t \psi d\tau - \gamma^* y_p \int_0^t (y_p - 1) d\tau + \\ & + \sum_i a_i \left(e^{-\lambda_i t} - 1 + \lambda_i \int_0^t e^{-\lambda_i(t-\tau)} y_p d\tau \right). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Nun liegt bei schnellen Reaktoren β/l in der Größenordnung von $10^4/\text{sec}$, d.h. $\exp\left[-\frac{\beta}{l}(1-k)t\right]$ in Gl. (3) fällt sehr rasch ab. Da andererseits die Temperaturrückwirkung praktisch erst nach dem prompten Sprung einsetzt, ist der Wert von ψ dann erst merklich von Null verschieden. Man kann daher in der obigen Gleichung in den beiden Termen mit ψ ohne wesentlichen Fehler

$$y_p \approx \frac{1}{1-k}$$

setzen. Das ergibt nach Ausführung der Integrationen und nachfolgender Differentiation für $\psi(t)$ die inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{\beta} \ddot{\psi} + \left(1 - k + \frac{\gamma^* k}{1-k} t \right) \dot{\psi} + \\ + \left(\gamma^* \frac{1+k}{1-k} - \sum_i a_i \lambda_i \right) \psi = - \frac{k}{1-k} \varphi(t), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

wobei mit

$$\alpha = \frac{\beta}{l} (1-k) \quad (11)$$

für $\varphi(t)$ der Ausdruck

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) = & \frac{\gamma^*}{1-k} \left(1 - e^{-\alpha t} (1 + 2k - k\alpha t) + 2k e^{-\alpha t} \right) - \\ & - \sum_i a_i \lambda_i \frac{\alpha}{\alpha - \lambda_i} (e^{-\lambda_i t} - e^{-\alpha t}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

zu setzen ist. Die Differentialgleichung (10) ist mit den Anfangsbedingungen

$$\psi(0) = \dot{\psi}(0) = 0 \quad (13)$$

zu lösen. Mit dem Ansatz

$$\psi(t) = u(t) e^{-\frac{1}{2} \frac{\beta}{l} \left[(1-k)t + \frac{1}{2} \frac{\gamma^* k}{1-k} t^2 \right]} \quad (14)$$

läßt sich die Differentialgleichung (10) in die sogenannte Normalform überführen:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u} + \frac{\beta}{l} \left(\gamma^* \frac{1 + \frac{1}{2} k}{1-k} - \sum_i a_i \lambda_i - \frac{1}{4} \frac{\beta}{l} \left(1 - k + \frac{\gamma^* k}{1-k} t \right)^2 \right) u \\ = - \frac{\beta}{l} \frac{k}{1-k} \varphi(t) e^{\frac{\beta}{2l} \left[(1-k)t + \frac{1}{2} \frac{\gamma^* k}{1-k} t^2 \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Mit Hilfe der Transformation

$$z(t) = \sqrt{\frac{\beta}{l} \frac{\gamma^* k}{1-k}} \left(t + \frac{(1-k)^2}{\gamma^* k} \right) \quad (16a)$$

$$= bt + z_0 \quad (16b)$$

vereinfacht sich diese Differentialgleichung zu

$$u'' + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right) u = - \frac{1}{\gamma^*} \varphi(z) e^{\lambda(z^2 - z_0^2)} \quad (17)$$

mit

$$\nu = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1-k}{\gamma^*} \sum_i a_i \lambda_i \right). \quad (18)$$

Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung (17) sind die Funktionen des parabolischen Zylinders $D_\nu(z)$, von denen $D_\nu(z)$ und $D_{-\nu-1}(iz)$ ein für alle Werte von ν gültiges Fundamentalsystem bilden [2], [3]. Die Wronskische Determinante dieser beiden Funktionen ist

$$\mathfrak{W}\{D_\nu(z); D_{-\nu-1}(iz)\} = e^{-i \frac{\nu+1}{2} \pi}. \quad (19)$$

Die vollständige Lösung der Differentialgleichung (17) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$u(z_0) = u'(z_0) = 0 \quad (20)$$

läßt sich mit Hilfe des Ansatzes $u(z) = A(z) D_\nu(z) + B(z) D_{-\nu-1}(iz)$ ohne Schwierigkeiten herstellen. Sie lautet

$$\left. \begin{aligned} u(z) = \frac{1}{\gamma^*} e^{i \frac{\nu+1}{2} \pi} \int_{z_0}^z [D_\nu(z) D_{-\nu-1}(i\zeta) - \\ - D_\nu(\zeta) D_{-\nu-1}(iz)] \varphi(\zeta) e^{\lambda(\zeta^2 - z_0^2)} d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Damit ist dann die gesuchte Lösung für $\psi[z(t)]$

$$\left. \begin{aligned} \psi(z) = \frac{1}{\gamma^*} e^{i \frac{\nu+1}{2} \pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{z_0}^z [D_\nu(z) D_{-\nu-1}(i\zeta) - \\ - D_\nu(\zeta) D_{-\nu-1}(iz)] \varphi(\zeta) e^{\lambda \zeta^2} d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Hierin ist für $\varphi(\zeta)$ nach Gl. (12) und (16)

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) = & \left[\frac{\gamma^*}{1-k} - \sum a_i \lambda_i e^{-\frac{\lambda_i}{b}(\zeta - z_0)} \right] - \\ & - e^{-(\zeta - z_0) z_0} \left(\frac{\gamma^*}{1-k} [1 + 2k - k z_0 (\zeta - z_0) - \right. \\ & \left. - 2k e^{-z_0(\zeta - z_0)}] - \sum_i a_i \lambda_i \right) \\ & = \varphi_1(\zeta) - \varphi_2(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

einzusetzen. Der Ausdruck ist dabei in einen sich nur schwach ändernden Anteil $\varphi_1(\zeta)$ und einen rasch abklingenden Anteil $\varphi_2(\zeta)$ aufgeteilt.

4. Ausführliche Darstellung der Lösung

Mit den bekannten Funktionen $D_\nu(z)$ und $D_{-\nu-1}(iz)$ kann man das Integral in Gl. (22) zwar numerisch auswerten; der tatsächliche Verlauf von $\psi(z)$ — besonders bei Variation der einzelnen Parameter — ist aus dieser Gleichung jedoch noch nicht erkennbar. Wie man aus Gl. (23) erkennt, wird $\varphi(\zeta)$ im wesentlichen durch $\varphi_1(\zeta)$ bestimmt; $\varphi_2(\zeta)$ geht mit

$$\exp[-z_0(\zeta - z_0)] = \exp\left[-\frac{\beta}{l} (1-k)t\right]$$

sehr schnell gegen Null und zwar in derselben Zeit, in der y_p nach Gl.(3) seinen asymptotischen Wert $\frac{1}{1-k}$ erreicht hat. Man erhält daher eine brauchbare Näherung für ψ bereits mit dem Anteil φ_1 , zu dem man gegebenenfalls φ_2 als Korrektur hinzunehmen kann. Setzt man

$$\sum_i a_i \lambda_i e^{-\frac{\lambda_i}{b}(\zeta-z_0)} \approx \sum_i a_i \lambda_i \left(1 - \frac{\lambda_i}{b}(\zeta-z_0) + \dots\right), \quad (24)$$

so ist das Integral in Gl.(22) durch wiederholte partielle Integration leicht zu lösen. Hierzu benötigt man die sich aus den Rekursionsformeln für die parabolischen Zylinderfunktionen

$$D_{\nu+1}(z) - z D_\nu(z) + \nu D_{\nu-1}(z) = 0, \quad (25a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} D_\nu(z) + \frac{z}{2} D_\nu(z) &= e^{-\frac{z^2}{4}} \frac{d}{dz} \left(e^{\frac{z^2}{4}} D_\nu(z) \right) \\ &= \nu D_{\nu-1}(z), \end{aligned} \right\} (25b)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} D_\nu(z) - \frac{z}{2} D_\nu(z) &= e^{\frac{z^2}{4}} \frac{d}{dz} \left(e^{-\frac{z^2}{4}} D_\nu(z) \right) \\ &= -D_{\nu+1}(z) \end{aligned} \right\} (25c)$$

unmittelbar ergebenden Beziehungen

$$\int e^{\frac{z^2}{4}} D_\nu(z) dz = \frac{1}{\nu+1} e^{\frac{z^2}{4}} D_{\nu+1}(z) \quad (26a)$$

und

$$\int e^{-\frac{z^2}{4}} D_{\nu+1}(z) dz = -e^{-\frac{z^2}{4}} D_\nu(z). \quad (26b)$$

Damit erhält man nach kurzer Zwischenrechnung

$$\left. \begin{aligned} \psi(z) \approx \psi_1(z) &= -\frac{\varphi_1(z)}{\gamma^*(\nu+1)} - \\ &- \frac{\varphi_1(z_0) e^{i\frac{\nu+1}{2}\pi} e^{-\frac{z^2-z_0^2}{4}}}{\gamma^*(\nu+1)} \times \\ &\times [i(\nu+1) D_\nu(z) D_{-\nu-2}(i z_0) - \\ &- D_{\nu+1}(z_0) D_{-\nu-1}(i z)] + \frac{\varphi'(z) z}{\gamma^*(\nu+1)(\nu+2)} - \\ &- \frac{\varphi'(z_0) e^{i\frac{\nu+1}{2}\pi} e^{-\frac{z^2-z_0^2}{4}}}{\gamma^*(\nu+1)(\nu+2)} \times \\ &\times [(\nu+1) (D_\nu(z) D_{-\nu-1}(i z_0) - D_\nu(z_0) D_{-\nu-1}(i z)) - \\ &- z_0 (i(\nu+1) D_\nu(z) D_{-\nu-2}(i z_0) - \\ &- D_{\nu+1}(z_0) D_{-\nu-1}(i z))] + \dots \end{aligned} \right\} (27)$$

Da der Wert für z_0 nach Gl.(16) im allgemeinen $> \sim 3$ ist und ferner stets $z > z_0$, kann man diese Gleichung mit Hilfe der asymptotischen Entwicklungen für die Funktionen $D_\nu(z)$ weiter vereinfachen.

Für $|\arg z| < \frac{3\pi}{4}$ gilt

$$D_\nu(z) \sim e^{-\frac{z^2}{4}} \cdot z^\nu \left(\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} (-1)^\lambda \frac{(-\nu)_{2\lambda}}{\lambda!} \frac{1}{(2z^2)^\lambda} + O(z^{-2\nu}) \right). \quad (28)$$

Damit erhält man schließlich nach kurzer Zwischenrechnung bei Berücksichtigung von Gliedern mit $1/z^2$

für $\psi(z)$ den Ausdruck

$$\left. \begin{aligned} \psi(z(t)) \approx \psi_1(z) \approx & -\frac{1}{\gamma^*(\nu+1)} \left(\frac{\gamma^*}{1-k} - \sum_i a_i \lambda_i \right) \times \\ & \times \left(1 - \left(\frac{z_0}{z} \right)^{\nu+1} \left[1 - \frac{\nu+1}{2z_0^2} (\nu - (\nu+2) \left(\frac{z_0}{z} \right)^2) \right] + \right. \\ & + \frac{\nu+1}{z_0^2} \left(\frac{z}{z_0} \right)^\nu e^{-\frac{z^2-z_0^2}{2}} \left. + \right. \\ & + \frac{(1-k)^2 \sum_i a_i \lambda_i^2}{k \gamma^{*2} (\nu+1)(\nu+2)} \left((\nu+2) - (\nu+1) \frac{z}{z_0} - \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{z_0}{z} \right)^{\nu+1} \left(1 - \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2z_0^2} \left[1 - \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right] \right) \right) \right). \end{aligned} \right\} (29)$$

Diese vereinfachte Darstellung der Lösungsgleichung (22) gestattet zusammen mit der Gl.(3) für $y_p(t)$ eine hinreichend genaue Beschreibung der normierten Neutronendichte y .

5. Zahlenbeispiel und Diskussion

Die Genauigkeit und der Gültigkeitsbereich der obigen Rechnung lassen sich am einfachsten an einem Zahlenbeispiel deutlich machen. Bei einem Versuchsreaktor sei bei einer Nennleistung von 10 MW die Wärmequellendichte $q_0 = 12,0 \frac{\text{cal}}{\text{cm}^3 \text{sec}}$, die Brennstoffdichte $\rho = 10 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und die spezifische Wärme $c = 0,078 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}$. Nimmt man für den Reaktivitäts-Temperaturkoeffizienten $\gamma' = 5 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ an, so erhält man bei einem Bruchteil $\beta = 3,455 \cdot 10^{-3}$ der verzögerten Neutronen mit

$$\gamma^* = \frac{\gamma'}{\beta} \cdot \frac{q_0}{\rho c} \quad (30)$$

für die Rückkopplungskonstante den Wert $\gamma^* = 0,0222/\text{sec}$.

Die Zerfallskonstanten λ_i [sec⁻¹] und Anteile β_i der verzögerten Neutronen sind in der Tabelle 1 in [1] enthalten; $\sum_i a_i \lambda_i = 0,404/\text{sec}$.

Für die Lebensdauer der prompten Neutronen wurde $l/\beta = 10^{-4}$ sec angenommen. Mit diesen Zahlenwerten wurde für verschiedene Reaktivitätssprünge k das Verhalten der normierten Neutronendichte $y(t)$ sowohl streng auf einem Analogrechner, als auch näherungsweise nach Gln.(3), (4) und (29) bestimmt. Das Ergebnis ist im Diagramm Abb.1 gezeigt. Die ausgezeichneten Linien sind die Analogrechnerkurven; die gestrichelten stellen die Näherung dar. Außerdem ist für drei Fälle der prompte Sprung y_p eingezeichnet. Nach Beendigung des prompten Sprunges hängt der unmittelbare weitere Verlauf von y davon ab, ob $\frac{\gamma^*}{1-k} \geq \sum a_i \lambda_i$ ist, d.h. ob die Vermehrung infolge der verzögerten Neutronen die Verminderung infolge der negativen Rückkopplung überwiegt oder nicht. Bei gegebener Größe der Rückkopplungskonstanten gibt es für den Reaktivitätssprung k einen bestimmten Wert

$$k_0 = 1 - \frac{\gamma^*}{\sum a_i \lambda_i}, \quad (31)$$

bei dem sich die beiden Effekte zunächst kompensieren, so daß $y(t)$ nach dem Anklingen von y_p noch für kurze Zeit horizontal verläuft. Ist $k < k_0$, so ist bei ebenfalls kleinerem asymptotischem Wert von y_p

$$y_p \approx \frac{1}{1-k}$$

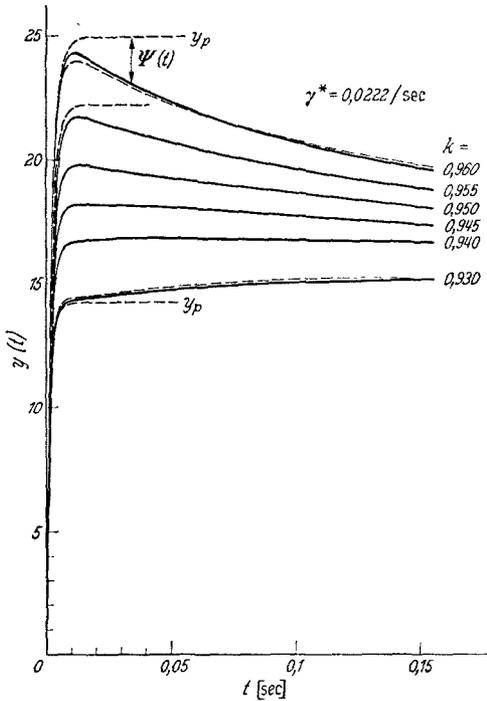


Abb. 1. Wirkung eines prompten negativen Temperaturkoeffizienten bei verschiedenen hohen Reaktivitätssprüngen. Ausgezogene Kurven: Lösung durch Analogrechner. Gestrichelte Kurven: Näherungslösung nach Gl.(3) und (29)

die Rückkopplung zunächst kleiner als die Vermehrung durch die verzögerten Neutronen, und $y(t)$ steigt

zunächst weiter an. Bei $k > k_0$ liegen die Verhältnisse umgekehrt.

Je kleiner die Rückkopplung wird, desto näher rückt k_0 an 1 heran; $y_{p\infty}$ wird dann sehr groß und der Bereich, in dem $y(t) \approx \text{const}$ ist, schrumpft zusammen.

Ferner wird bei größeren Werten von k die Zeitkonstante $T_p = 1/\beta (1-k)$ für das Ansteigen von y_p größer, so daß in der Rechnung $y_p(t)$ nicht mehr näherungsweise durch eine Sprungfunktion ersetzt werden kann. In der Anregungsfunktion $\varphi(\zeta)$ in Gl.(22) ist dann auch der Anteil $\varphi_2(\zeta)$ nach Gl.(23) zu berücksichtigen. Die in dem Diagramm bei den Kurven für $k=0,96$ zu erkennende Abweichung von $\approx 1,6\%$ im Maximum ist auf diese Vernachlässigung von φ_2 zurückzuführen (abgesehen von inhärenten Ungenauigkeiten des Analogrechners).

Schließlich sei noch bemerkt, daß für sehr kleine Werte von γ^* und zu große Werte von k die Voraussetzung für die Anwendung der asymptotischen Entwicklungen nicht mehr erfüllt sein können. In dem praktisch interessierenden Bereich stellt die Rechnung jedoch eine brauchbare Lösung dar.

Literatur: [1] OTT, K.: Nukleonik 5, 285 (1963). — [2] BUCHHOLZ, H.: Die konfluente hypergeometrische Funktion. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1953. — [3] MAGNUS-OBERHETTINGER: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1948.