

# **KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE**

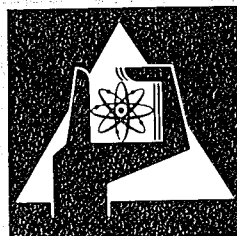
April 1974

KFK 1947

Institut für Reaktorentwicklung  
Projekt Schneller Brüter

Hexagonale Netze und Fachwerke  
Rechnergestützte Automatisierung von  
Netzerzeugung und Redundanzanalyse

H. Zehlein



**GESELLSCHAFT  
FÜR  
KERNFORSCHUNG M.B.H.**

**KARLSRUHE**

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M.B.H.  
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 1947

Institut für Reaktorentwicklung

Projekt Schneller Brüter

HEXAGONALE NETZE UND FACHWERKE

Rechnergestützte Automatisierung  
von Netzerzeugung und Redundanz-  
analyse

---

Herbert Zehlein

Gesellschaft für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe



## Zusammenfassung

Bestimmte Unfalltypen können beim schnellen Brutreaktor zu bleibenden Verformungen der Brennelemente, zu Reaktivitätsänderungen und zu einer Gefährdung des Abschaltsystems führen. Schädliche Auswirkungen auf die Struktur können verhindert werden, wenn man das Verhalten des Reaktorkerns unter transienten Belastungen kennt. Ein wichtiges Teilproblem der dynamischen Strukturanalyse für Schnellbrütercores ist die Simulation der Verformung von Brennstabbindeln unter Querkraft. Dabei bedient man sich der Modellvorstellung eines zugstabfreien Ersatzfachwerks zur Darstellung des Kräftespiels im Bündelquerschnitt.

Die vorliegende Arbeit zeigt, wie einige typische Eigenschaften hexagonaler Netze zur Automatisierung der Modellerstellung herangezogen werden können. Insbesondere wird ein Schema zur automatischen Netzerzeugung angegeben. Dabei werden nicht nur die Koordinaten der Knoten errechnet, sondern auch die zu "Buchhaltungszwecken" benötigte Inzidenzmatrix selbsttätig für die gewählte Reihenzahl des Netzes mit Hilfe von Rekursionsbeziehungen gefunden.

Auch die bei Anwendung der Kraftmethode üblicherweise dem Ingenieurgefühl überlassene zweckmäßige Auswahl der Redundanten (das sogenannte "Freischneiden") kann beim Hexagonalnetz dem Computer zur automatischen Erledigung anvertraut werden. Die zugehörige Vorschrift wird aus einem hier abgeleiteten Satz über den Grad der statischen Unbestimmtheit (sog. "Redundanz") des hexagonalen Ersatzfachwerks gefolgert.

## Abstract

Topological aspects of hexagonal networks representing equivalent trusses for the simulation of rod bundle deformation under transverse loading

Certain types of accidents within a Fast Breeder Reactor may lead to permanent deformations of the fuel rods, to reactivity changes and to danger for the safety system. Therefore the simulation of the deformation of rod bundles under transverse transient loading is an important part of the dynamic structural analysis for a FBR-Core. It is proposed to use the idea of a tension-free ersatz-truss to model the force diffusion and distribution within the bundle section.

The present paper shows how some typical characteristics of hexagonal nets may be utilized for setting-up the model automatically. In particular an automatic mesh generator is described. It not only calculates the nodal coordinates but also determines simultaneously and recursively for a chosen number of rows within the net the incidence matrix required for book-keeping purposes.

Even the selection of the redundant forces (so-called "structural cutting"), which is usually left to the poor engineer's feeling whenever the force method is applied, may be delegated to the computer for automatic execution. The appertaining procedure is derived from a theorem concerning the redundancy of the equivalent hexagonal network. The proof of this theorem is given.

## Inhalt

1. Einleitung
2. Automatische Netzerzeugung
  - 2.1. Inzidenzmatrix, Typisierungen
  - 2.2. Knotenpunktkoordinaten
3. Redundanzanalyse des Ersatzfachwerks
  - 3.1. Grad der statischen Unbestimmtheit
  - 3.2. Automatisches Freischneiden  
(Identifikation der Schnittkräfte)
4. Literatur
5. Anhang

Abbildungen und Tabellen

Abb. 1: Knoten- und Kantennumerierung

Abb. 2: Inzidenzmatrix für  $n = 2$

Abb. 3: Knotentypen

Abb. 4: Knoten-Unter-Typen für  $n = 5$

Abb. 5: Grad der statischen Unbestimmtheit

Abb. 6: Statisch bestimmtes Grundsystem für  $n = 5$

Tabelle 1: Stabtypen

Tabelle 2: Knotentypen

Tabelle 3: Weitere Unterscheidung der Knotentypen 7 und 9

Tabelle 4: Indexdarstellung der Knotennumerierung

Anhang: Automatische Generierung der Inzidenzmatrix

key words:	Fuel element clusters,	Automatic mesh generation,
	Pin bundles,	Computer aided design,
	Reactor lattices,	Computer calculations
	Hexagonal nets,	Mathematics
	Structural analysis,	Geometry,
	Topology,	Redundancy.



## 1. Einleitung

Bei der rechnergestützten Simulation der Verformung von Stabbündeln unter Querkraft, wie sie bei der Analyse von Unfallabläufen im schnellen Brutreaktor durchgeführt wird, bedient man sich der Modellvorstellung eines zugstabfreien Ersatzfachwerks zur Darstellung des Kräftespiels im Bündelquerschnitt.

Wählt man als Rechenverfahren die Kraftmethode [1,9], so müssen dem Computer zur automatischen Berechnung der Deformation u. a. Angaben über die Geometrie (Lagekoordinaten und Abmessungen), die Topologie (Numerierung und Verknüpfung diskreter Objekte wie Punkte oder Kanten) und die Redundanz (hier: Grad der statischen Unbestimmtheit) des Modells bekannt sein.

Die vorliegende Arbeit zeigt, daß auch diese Informationen für den Spezialfall einer (meist äquidistanten) Hexagonalanordnung der Brennstäbe, wie sie im Schnellen Brüter vorliegt, automatisch erzeugt werden können. Als direkte Eingabedaten müssen nur die Reihenzahl  $n$ , der Abstand  $a$  zweier benachbarter Brennstäbe und die Lage des Koordinatensystems spezifiziert werden.

Über die Heranziehung der konformen Abbildung zur Darstellung von Hexagonalnetz-Koordinaten haben DUANE [2] und NAGEL und WOLF [3] berichtet.

Zur Identifizierung typischer Querschnittsbereiche unter Berücksichtigung von Symmetrieeigenschaften benutzt man üblicherweise eine Zelleneinteilung mit mehrdimensionaler Indizierung [4, 5]. SCHLECHTENDAHL [4] gibt eine Systematik der Indizierungsmöglichkeiten für 2 Indizes ("Hex-Koordinaten"), 3 Indizes ("Tri-Koordinaten") sowie für verschiedene Grade von Symmetrie ("Symmetriekennzahl"). Ähnliche Indizierungskonzepte werden auch von anderen Autoren zur Kennzeichnung von Nachbarschaftsverhältnissen bei thermohydraulischen [5] und Kernverspannungs-Untersuchungen [6, 7] bevorzugt.

Ordnet man dem Index-Tupel jeder Zelle eine eigene Zahl eindeutig zu und hat man die Einteilung so gewählt, daß jede Zelle einen anderen Brennstab enthält, so kann man die dabei entstehende Knoten- (= Brennstab-) Numerierung zur eindeutigen Abspeicherung der Mittelpunktskoordinaten der Brennstäbe heranziehen.

Die Kraftübertragung zwischen benachbarten Stäben erfolgt in Richtung der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte. Zur vollständigen Identifizierung des als "Ersatzfachwerk" eingeführten Hexagonalnetzes müssen diese Verbindungslinien (Kanten, "Stäbe") ebenfalls eindeutig nummeriert werden.

Die Ausdrücke "Kanten" und "Knoten" werden in dieser Arbeit in der in der Graphentheorie üblichen Weise verwendet (s. Abb. 1!). In der Fachwerktheorie werden die den Netz-"kanten" entsprechenden Elemente als "Stäbe" bezeichnet. Sie haben natürlich mit den "Brennstäben" des hier im Querschnitt betrachteten Bündels nichts zu tun. Diese werden durch die "Knoten" des Netzes dargestellt. Die Ausdrücke "Stäbe" und "Kanten" werden hier synonym gebraucht.

Unter dem Stichwort "Übertragung auf Dreieckgeometrie" deutet SCHLECHTENDAHL in [4] an, daß die Zellindizierung bzw. -numerierung auch zur Kantenidentifizierung geeignet ist (Abb. 9 von [4]). Dieser in [4] nicht weitergeführte Gedankengang wird in dieser Arbeit aufgegriffen und bei der Berechnung der Knotenpunktskoordinaten des Ersatzfachwerks (siehe Abb. 1) angewendet.

In der Tat repräsentieren Knotennumerierung und Kantennumerierung komplementäre Zellzerlegungen im Sinne der algebraischen Topologie [z. B. 8, § 28]. Zwischen ihnen existiert eine umkehrbar eindeutige Zuordnung. Je nach der Wahl geeigneter Parameter kann die algorithmische Darstellung dieser Abbildung verschieden ausfallen. In der Graphentheorie ist es üblich, solche Abbildungen in Form von Inzidenzmatrizen anzugeben. Wegen seiner besonderen Symmetrieeigenschaften hat das Hexagonalnetz eine Inzidenzmatrix, deren Muster sich bei systematischer Numerierung der Kanten und Knoten aus typischen Elementen mit Hilfe eines rekursiven Algorithmus aufbauen läßt. Das zugehörige Rechenprogramm wird vorgestellt.

Für die Darstellung der Knotenpunktskoordinaten erweist sich die Einführung von 4 Parametern als vorteilhaft. Diese vierfachindizierte Knotenidentifizierung ist eine Erweiterung der in [4, 5, 6, 7] benutzten Konzepte insofern, als zwischen zwei getrennten Symmetriearten unterschieden wird: sektorale Symmetrie (Kennzahl i) und laterale Symmetrie (Kennzahl l). Dieses Konzept wird für die hier gewählte Knotennumerierung demonstriert.

(Anmerkung: Diese Numerierung (siehe Abb. 1) setzt keine Symmetrie voraus. In der Bezeichnungsweise von [4] - dort Abb. 3 - ist es die Numerierung mit der Symmetriekennzahl 1. Auf die programmtechnische Verwirklichung wird aus Platzgründen nicht eingegangen. Listings können beim Verfasser angefordert werden.)

Inzidenzmatrix (Topologie) und Knotenpunktskoordinaten (Geometrie) ermöglichen die automatische Netzerzeugung für das Ersatzfachwerk.

Zur statischen Analyse nach der Kraftmethode muß man eine dem Grad der statischen Unbestimmtheit entsprechende Zahl von Stäben freischneiden (sog. "Redundante"). Ihre Auswahl ist prinzipiell beliebig, ihre automatische Kennzeichnung (sog. "Structural Cutter", siehe [9, 10]) macht bei allgemeinen technischen Tragwerken große Schwierigkeiten. Die vorliegende Arbeit beweist einen Satz über die Redundanz des Hexagonalnetzes, aus dem eine Vorschrift für die automatische Identifizierung der redundanten Schnittkräfte gefolgert werden kann.

## 2. Automatische Netzerzeugung

Vorgelegt sind die in Fig. 1 gezeigten Numerierungen der Knoten und Stäbe sowie die dargestellten Orientierungen der Koordinatensysteme  $(x, y)$  und  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

Folgende Bezeichnungen werden noch eingeführt:

$n$	$\equiv$	Anzahl der Reihen
$s = s(n)$	$\equiv$	Anzahl der Stäbe
$k = k(n)$	$\equiv$	Anzahl der Knoten
$s_{red}$		Anzahl der überzähligen Schnittkräfte

2.1. Inzidenzmatrix , Typisierungen

Abb. 2 zeigt die zu diesen Numerierungen gehörige Inzidenzmatrix für  $n = 2$ .

Die Inzidenzmatrix hat so viele Zeilen (Spalten) wie das Netz Knoten(Kanten). Jede Spalte repräsentiert eine Kante. In ihr sind nur die beiden Zeilen besetzt, welche zu den Knoten am Ende dieser Kante gehören.

Definitionsgemäß haben alle Spaltensummen den Wert 2. Die Zeilensummen dieser Booleschen Matrix geben die Anzahl der Kanten an, die den zur jeweiligen Zeile gehörigen Knoten gemeinsam haben (sog. "Knotengrad"  $g$ ).

Als "Reihe" wird die Menge aller Knoten bezeichnet, die vom Mittelpunkt des Netzes (Knoten 1) dieselbe geometrische Distanz haben.

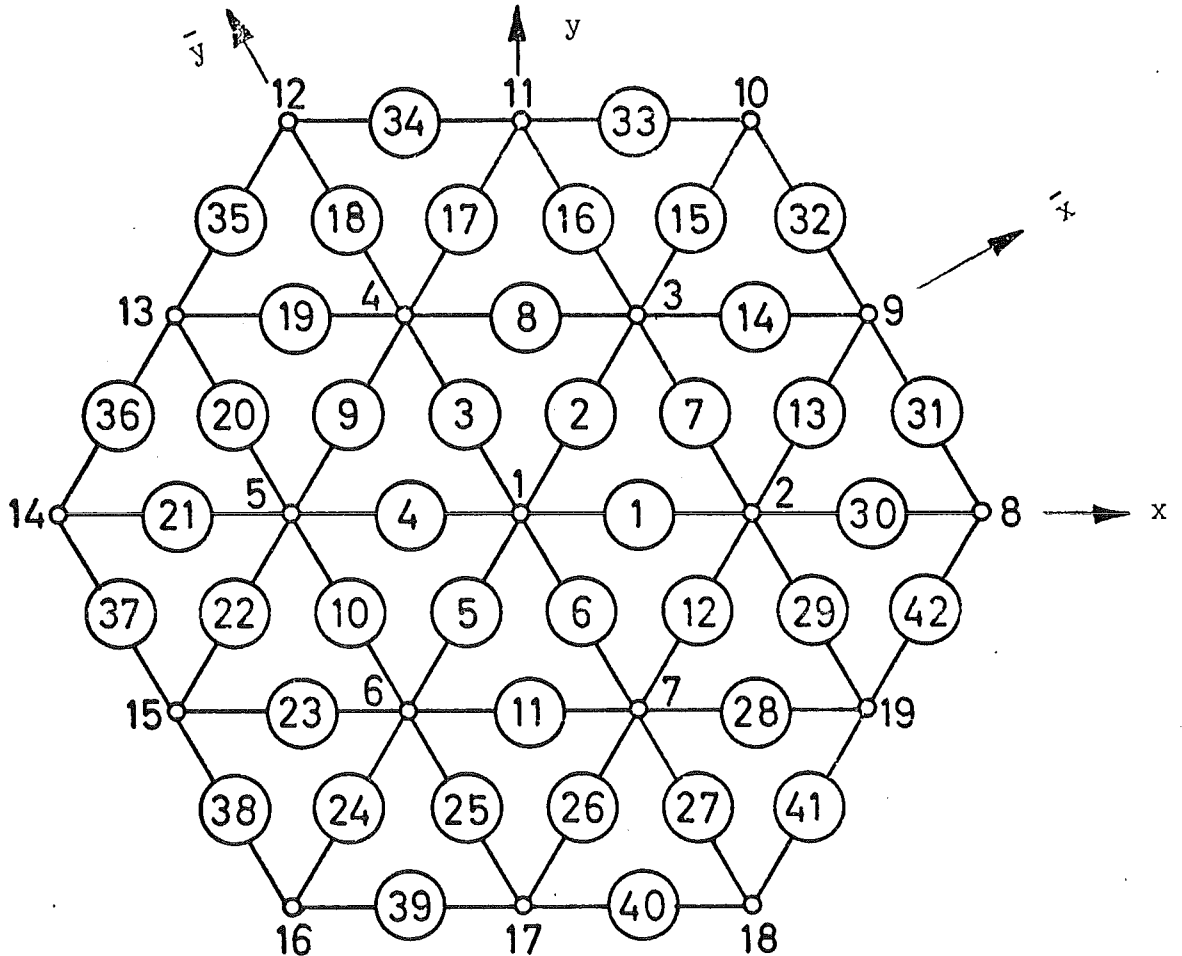
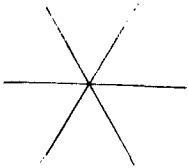
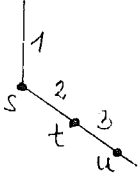
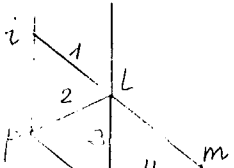
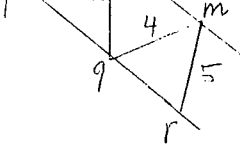


Abb.1 Knoten- und Kantennumerierung

In der Inzidenzmatrix für  $n = 2$  (Abb. 2) sind 3 verschiedene Stabtypen (Kantentypen) markiert: Zentralstäbe (Typ 1, nur für  $n = 1$ ), Umfangsstäbe (Typ 2) und Zwischenstäbe (Typ 3). Bei der gewählten Numerierung sind die  $6n$  letzten Kanten des  $n$ -reihigen Netzes Stäbe

des Typs 2. Der Kantentypus 1 kann auch als Spezialfall des Typus 3 aufgefaßt werden. Dieser Typus 3 wiederum ist ein Spezialfall des allgemeinen Zwischenstabs (Typ 4) insofern, als alle Stäbe dieses Typs 3 mit einer Ecke der Reihe (n-1) inzidieren. Eine Zusammenstellung der Stabtypen gibt Tabelle 1.

Tabelle 1: Stabtypen

Typ	geometrisches Bild	Pattern der Inzidenzmatrix	Bezeichnung
1		<pre> x x x x x x x   x     x       x         x           x </pre>	Zentralstäbe (nur f, n = 1)
2		<pre>       1 2 3 ----- s x x      X t   x x    . u     x     .       . . . . .                 x .                 x x </pre>	Umfangsstäbe
3		<pre>       1 2 3 ----- l x x x . . . . i x . . p   x . q     x </pre>	Zwischenstäbe (Ecke)
4		<pre>       2 3 4 5 ----- l x x m . . x x . . . . p x . . . q . x x . r . . . x </pre>	(Linie)

Man erkennt in Abb. 2 und Tabelle 1 insbesondere, daß sich entsprechend der gewählten Stabnumerierung Bereiche mit Zwischenstäben (Typ 4 für  $n > 2$ , Typ 3 für  $n = 2$ ) und Bereiche mit Umfangsstäben (Typ 2) abwechseln. Ebenso wird deutlich, daß und wie Beginn und Ende dieser Bereiche eine typische Anordnung aufweisen.

Die Existenz typischer Merkmale gestattet es, die Erzeugung des zu einer beliebigen, allgemeinen  $n$ -ten Reihe des Hexagonalnetzes gehörigen Bereichs der Inzidenzmatrix symbolisch darzustellen. Die automatische Generierung der ganzen Inzidenzmatrix (aber natürlich auch nur eines aus mehreren Reihen bestehenden Teils) kann dann rekursiv erfolgen. Programmtechnisch wird dies schlicht dadurch erreicht, daß man über die als "Reihengenerator" aufgefaßte Befehlskette zur symbolischen Darstellung der Inzidenzen der  $n$ -ten Reihe (ein Operator, der nur einen einzigen Operanden, nämlich  $n$ , benötigt) eine alle betroffenen Reihen umfassende Schleife legt. Einzelheiten zu dieser Vorgehensweise können dem im Anhang 1 beigegeführten Flußdiagramm und dem zugehörigen FORTRAN-IV-Listing entnommen werden.

Nach dem Knotengrad kann man 3 Knotentypen unterscheiden:

- $g = 6$  Innenknoten (Menge I)
- $g = 4$  Randknoten (Menge R)
- $g = 3$  Eckenknoten (Menge E)

Ist  $K$  die Menge aller Knoten und werde  $L$  die Menge der "Linienknoten" genannt, so gilt:

$$E \subset R, E \subset K, R \subset K, I \subset K; I \cup R = K$$
$$E \cap R = E, E \cup R = R \text{ sowie per def } L \cup E = R.$$

Eine weitere Verfeinerung der Typisierung wird möglich, wenn man höhere Knotengrade  $g_i$  einführt, die wie folgt definiert sind:

Definition 1: Einem Knoten  $p$  wird der Wert (Grad 1. Ordnung)  $g_i(p) = 1$  zugeordnet, wenn er 1 unmittelbare Nachbarn des Knotengrads  $g(p) = i$  hat.

Beim vollständigen Hexagonalnetz kommen nur  $g_3$ ,  $g_4$  und  $g_6$  vor.  
(s. o. I, R, E!).

Definitionsgemäß muß für jeden Knoten gelten

$$g_3 + g_4 + g_6 = g \quad (2)$$

$g_6$  kann für  $n > 1$  nur die Werte 1 (E), 2 (L), 3, 4, 6 (I) annehmen.  
 $g$  und  $g_6$  sind wie folgt kombiniert:

$$\begin{aligned} g = 3 \text{ verlangt } g_6 &= 1 \text{ (E)} \\ g = 4 \text{ verlangt } g_6 &= 2 \text{ (L)} \\ g = 6 \text{ erlaubt } g_6 &= 3 \text{ bzw. } 4 \text{ bzw. } 6 \quad \text{(I)} \end{aligned} \quad (3)$$

Im Sonderfall  $n = 1$  ist auch  $g_6 = 0$  möglich.  $g_4$  kann nur die Werte 0, 1, 2 und  $g_3$  nur die Werte 0, 1, 2, 6 annehmen.

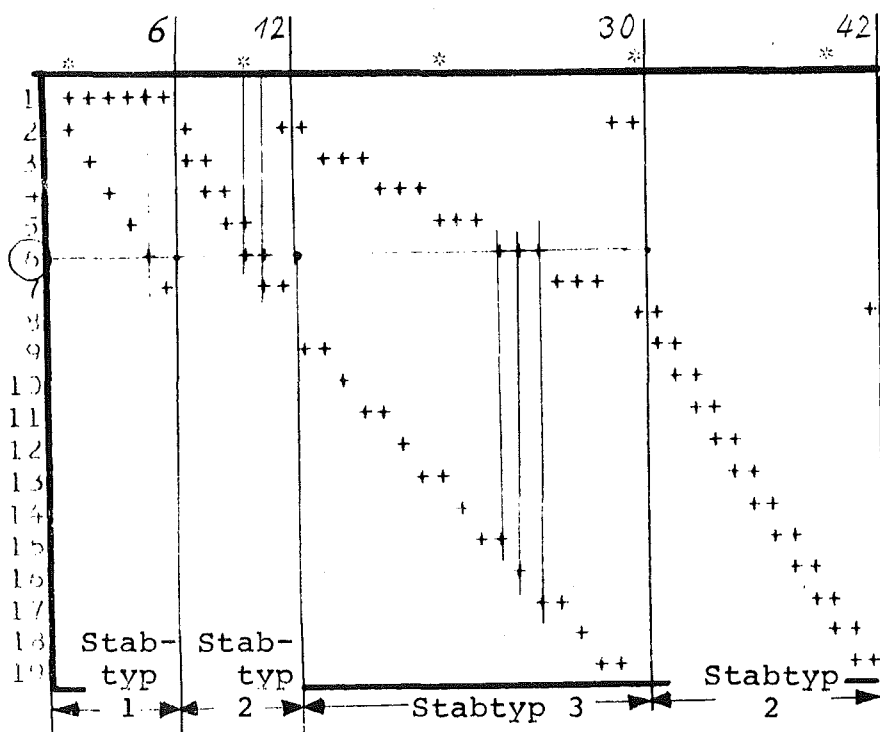


Abb.2 : Inzidenzmatrix für  $n=2$

Tabelle 2 zeigt eine Zusammenstellung von 9 verschiedenen Knotentypen und ihren zugehörigen Zahlentupeln  $(g, g_6, g_4, g_3)$ . Man erkennt, daß je nach der Reihenzahl  $n$  bestimmte Knotentypen nicht vorkommen können (Abb. 3).

Tabelle 2: Knotentypen

Menge		Typ	g	g <sub>6</sub>	g <sub>4</sub>	g <sub>3</sub>	Existenzbedingung				
							n=1	n>1	n=2	n>2	
R	E	1	1	1	0	2	+				
		2	1	1	2	0		+	→		
	L	3	4	2	0	2			+		
		4	4	2	1	1				+	
		5	4	2	2	0	(existiert ab n = 4) n>3				
I		6	6	0	0	6	+				
		7	6	6	0	0		+	→		
		8	6	3	2	1		+	→		
		9	6	4	2	0				+	

Bezeichnungen

- 1 Ecke  $n = 1$
  - 2 Ecke  $n > 1$
  - 3 Ecken-Nachbar,  $n = 2$
  - 4 Ecken-Nachbar,  $n > 2$
  - 5 Linienknoten (kommt ab  $n = 4$  vor)
  - 6 "ganz innen", (Mittelpunkt bei  $n = 1$ )
  - 7 ganz innen: bis Reihe  $n - 2$
  - 8 Ecke der Reihe  $n - 1$
  - 9 Linienknoten der Reihe  $n - 1$
- } Innenknoten



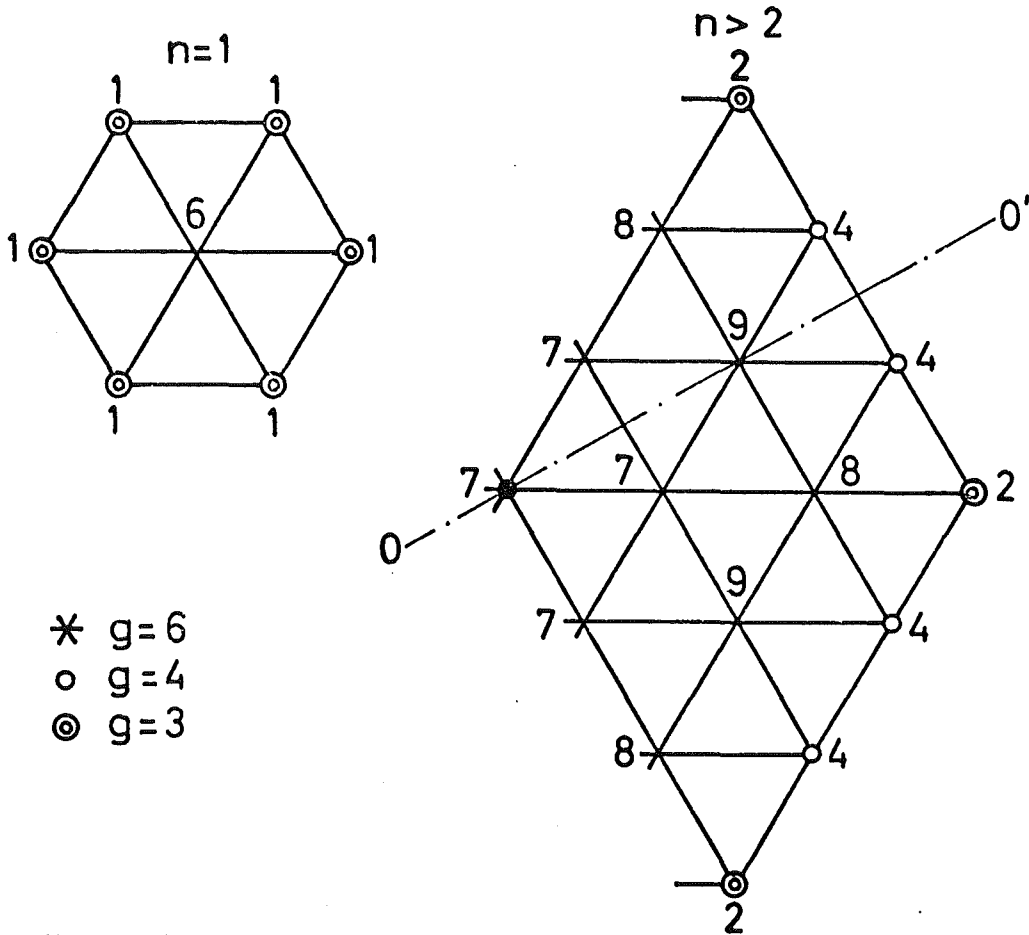


Abb. 3 Knotentypen

Knotentyp 3 kommt nur bei  $n = 2$  vor, Typ 5 gibt es erst ab  $n = 4$ .

Anhand der Inzidenzmatrix kann leicht das zu einem Knoten  $j$  gehörige 4-Tupel  $t_j$  ( $g, g_6, g_4, g_3$ ) ermittelt werden. Für  $n = 2$  (Abb. 2!) findet man z. B. für den Punkt 6 ( $g = 6$ ) die zugehörigen Kantennummern: 5, 10, 11, 23, 24, 25. Diesen Stäben entsprechen die Nachbarknoten 1, 5, 7, 15, 16, 17 mit den Graden  $g = 6, 6, 6, 4, 3, 4$ . Es gilt also:  $g(6) = 6, g_6(6) = 3, g_4(6) = 2, g_3(6) = 1$ , d. h.  $t_6 = (6, 3, 2, 1)$ . Damit ist für  $n = 2$  Punkt 6 ein Knoten vom Typus 8 (Ecke der Reihe  $n - 1$ ). Man bestätigt diese Aussagen durch Inspektion von Abb. 1.

Man erkennt, daß die gewählte Typisierung die Nachbarschaftsverhältnisse nach 2 Unterscheidungsmerkmalen beschreibt (Abb. 3!)

1. Abstand vom Rand,
2. Abstand von der nächstgelegenen Ecke.

Dabei bleiben 2 Arten von Symmetrie unberücksichtigt:

1. Wiederholung der Anordnungsmerkmale in jedem  $60^\circ$ -Sektor (sektorale Symmetrie),
2. Spiegelbildliche Anordnung der Knotentypen bezüglich der Winkelhalbierenden eines jeden Sektors (laterale Symmetrie; siehe Linie  $OO'$  in Abb. 3!).

Weiter fällt auf (für  $n > 5$ ), daß ab der 3. Reihe von außen nur noch der Typus 7 vorkommt. Ferner wird bei den Typen 9 und 5 nicht mehr nach dem Abstand von  $OO'$  (bzw. von der nächstgelegenen Ecke) unterschieden.

Strebt man eine Typisierung an, bei der in jedem Sektor jeder Knotentyp höchstens zweimal (laterale Symmetrie!) vorkommt, so müßte man die Typenzahl durch Hinzunahme weiterer, noch "höherer" Knotengrade vergrößern, akut wird diese Verfeinerung für den Typus 7 ab  $n = 4$ , für den Typus 9 ab  $n = 5$ , für den Typus 5 ab  $n = 6$ .

Es liegt nahe, Definition 1 zu verallgemeinern:

Definition 2: Einem Knoten  $p$  wird der Wert  $g_{ij}(p) = m$  (Grad 2. Ordnung) zugeordnet, wenn er  $m$  unmittelbare Nachbarn des Knotengrads 1. Ordnung  $g_j(p) = j$  hat.

Der bisher gebräuchliche Knotengrad im engeren Sinne wäre demzufolge ein Knotengrad nullter Ordnung.

Die (2) entsprechende Beziehung lautet

$$\sum_j g_{ij}(p) = g(p) \quad (4)$$

Schließlich lautet für einen  $l$ -fach indizierten Knotengrad  $l$ -ter Ordnung die

Definition 3: Einem Knoten  $p$  wird der Wert  $g_{i_1 i_2 \dots i_l}(p) = m$  (Grad  $l$ -ter Ordnung) zugeordnet, wenn er  $m$  unmittelbare Nachbarn des Knotengrads  $(l - 1)$ ter Ordnung  $g_{i_1 i_2 \dots i_{l-1}}(p) = i_l$  hat.

Es gilt analog zu (4):

$$\sum_{i_l} g_{i_1 i_2 \dots i_l}(p) = g(p) \quad (5)$$

Dem geschilderten Konzept der "Knotengrade höherer Ordnung", bei dem nur die unmittelbaren Nachbarn des betrachteten Knotens eine Rolle spielen, könnte man selbstverständlich eine ebenbürtige Verallgemeinerung des Knotengrad-Begriffs zur Seite stellen, bei dem mittelbare Nachbarn und deren Grade abgezählt werden. Anschaulich dargestellt wäre ein solcher Grad der Nachbarschaft  $z$  eines Knotens  $p$  diejenige Zahl von Knoten, die mit  $k$  über mindestens einen Weg aus  $z$  verschiedenen Kanten verbunden sind. Im Sprachgebrauch der Graphentheorie trifft man diesen Sachverhalt mit der

Definition 4: Ist  $Z$  die Untermenge der geschlossenen Hülle eines Knotens  $p$ , die alle  $l$  verschiedenen, mit  $p$  durch je mindestens eine Eulersche Kette der Distanz  $z$  verbundenen Knoten umfaßt, so werde  $l$  der Grad  $z g(p)$  der Nachbarschaft  $z$  des Knotens  $p$  genannt.

$$z g(p) = l$$

Selbstverständlich kann man durch sinngemäße Anwendung der Definition 1 bis 3, die dem vorliegenden Vorschlag entsprechend Knotengrade der Nachbarschaft 1 betreffen, auch Knotengrade  $z g_{i_1 \dots i_n}(p)$  der Nachbarschaft  $z$  von höherer Ordnung ( $n$ ) bilden.

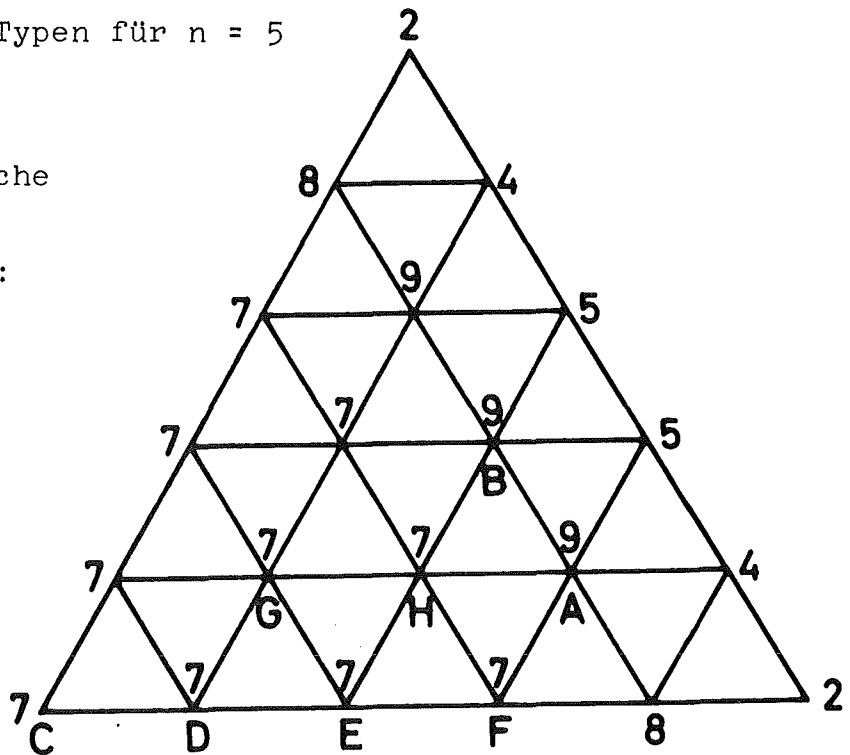
Diese "zweidimensionale" (Nachbarschaft, Ordnung) Verallgemeinerung des Knotengradbegriffs eröffnet eine Vielzahl von Möglichkeiten zur Typisierung der Knoten regelmäßig strukturierter Netze, da sie die Gewinnung kennzeichnender Zahlentupel für topologisch gleichartige ("typische") Knoten erleichtert.

Eine allgemeine Darstellung kann hier aus Platzgründen nicht gegeben werden. Doch soll der hier angedeutete Gedankengang am Beispiel des fünfreihigen Hexagonalnetzes erläutert werden. Abb. 4 zeigt, daß für  $n = 5$  dreimal der Knotentyp 9 und zehnmal der Typ 7 vorkommt, obwohl die entsprechend gekennzeichneten Knoten (A, B) bzw. (C, D, E, F, G) topologisch nicht gleichartig sind. Bildet man die Knotengrade  $^1g$  2. Ordnung, so erhält man Tabelle 3 (man beachte, daß  $g_{32} \neq 0$  nur für  $n = 1$  oder  $n = 2$  und  $g_{36} \neq 0$  nur für  $n \neq 1$ , s. Tab. 1!,  $g_{60} \neq 0$  für alle  $n$ ).

Abb. 4: Knoten-Unter-Typen für  $n = 5$

Im Hexagonalnetz mögliche Werte der 3 möglichen Knotengrade 1. Ordnung:

	$g_3$	$g_4$	$g_6$
0	x	x	
1	x	x	x
2	x	x	x
3			x
6	x		x



C,D,E,F : Reihe 0,1,2,3 .. usw.

Tabelle 3 Weitere Unterscheidung der Knotentypen 7 und 9:  
(s. Abb. 4!) (n = 5)

Typ	Knoten	$g_{30}$	$g_{31}$	$g_{40}$	$g_{41}$	$g_{42}$	$g_{61}$	$g_{62}$	$g_{63}$	$g_{64}$	$g_{66}$
9	A	4	2	2	1	3	0	2	1	1	2
	B	6	0	2	0	4	0	2	0	2	2
7	C	6	0	6	0	0	0	0	0	0	6
	D	6	0	6	0	0	0	0	0	0	6
	E	6	0	6	0	0	0	0	0	0	6
	F	5	1	3	0	3	0	0	1	2	3
	G	6	0	6	0	0	0	0	0	0	6
	H	6	0	4	0	2	0	0	0	2	4

$g_{42}$  als Unterscheidungskriterium bevorzugt geeignet!

$g_{61}$  als Unterscheidungskriterium überhaupt nicht geeignet!

Wie man aus Tabelle 3 entnehmen kann, lassen sich 2 verschiedene Untertypen (A, B) des Knotentyps 9 und 3 verschiedene Untertypen des Knotentyps 7 (F, H, (C, D, E, G)) unterscheiden, wenn man dem Tupel ( $g_5, g_6, g_4, g_3$ ) einen oder mehrere Grade 2. Ordnung hinzufügt. Allgemeine Aussagen über notwendige Mindestzahl und Auswahl hinzutretender höherer Grade sollen hier nicht gemacht werden. Im vorliegenden Beispiel eignet sich nur  $g_{42}$  zu einer verfeinerten Typisierung sowohl von Typ 7 als auch von Typ 9.  $g_{61}$  eignet sich überhaupt nicht als Unterscheidungskriterium, die anderen  $g_{ij}$  sind nur mit Einschränkungen brauchbar.

## 2.2. Knotenpunktkoordinaten

Die erläuterten Konzeptvorschläge dienen der Typisierung der Knoten. Ihre Lokalisierung erfordert zusätzlich die Berücksichtigung der geometrischen Symmetrieeigenschaften des Hexagonalnetzes.

Dabei ist es zweckmäßig, die Knotennummern als eindeutige Funktionen von 4 Kennzahlen (Indizes) darzustellen, von denen 2 die "Dimensionen" (Reihe, Azimut) und 2 die Symmetrien (sektoral, lateral) des hexagonalen Netzes repräsentieren:  $K_{i,\lambda,l}^{(n)}$ . An dieser Stelle muß auf eine topologische Besonderheit dieser Netze hingewiesen werden, die schon bei der Typisierung der Knoten auffiel: Der Wertebereich des Index  $\lambda$  für die azimutale Dimension ist beschränkt. Seine Grenze  $\lambda_{\max}$  ist eine Funktion des Index für die radiale Dimension (Reihenanzahl  $m$ ).

Im einzelnen werden eingeführt

$$\left. \begin{array}{ll} m = 1, n & \text{radialer Index (Reihenanzahl)} \\ \lambda = 1, \lambda_{\max}(m) & \text{azimutaler Index} \\ i = 1, 6 & \text{sektoraler Index} \\ l = 1, 2 & \text{lateraler Index} \end{array} \right\} \quad (6)$$

Die Darstellung der Knotenpunktkoordinaten im System  $(\bar{x}, \bar{y})$  (Abb. 1) ist dann fast trivial. Zunächst geben wir die Beziehungen für die Darstellung der Knotennumerierung an:

$$K_{111}^m = 3 m (m - 1) + 2 \quad (7.1)$$

$$K_{i11} = K_{111} + (i - 1) m \quad (7.2)$$

$$K_{i\lambda 1} = K_{i(\lambda-1)1} + 1 \quad (7.3)$$

$$K_{i\lambda 2} = K_{i\lambda 1} + \Delta\lambda \quad (7.4a)$$

wo

$$\Delta\lambda = m - 2 (\lambda - 1) \quad (7.4b)$$

und

$$\lambda_{\max} = \begin{cases} \frac{m}{2} + 1 & \text{für } n = 2 \text{ \AA} \\ \frac{m-1}{2} + 1 & \text{für } n = 2 \text{ \AA} - 1 \end{cases} \quad (7.5)$$

$\text{\AA} = 1, 2, \dots$  (ganzz)

Es gelten folgende Rekursionsbeziehungen:

$$K_{(j+1)12} = K_{j11} + n \quad (7.6)$$

$$K_{111}^{(j)} = K_{612}^{(j-1)} \quad (7.7)$$

Zur Veranschaulichung dieses Konzepts sind in Tabelle 4 neben dem Wertebereich für  $\lambda$  bis  $n = 7$  zwei Beispiele ( $n = 3$  und  $n = 4$ ) für gerades und ungerades  $\lambda_{\max}$  angegeben.

Tabelle 4 Indexdarstellung der Knotennumerierung

a) Maximalwerte für  $\lambda$

m	(0)	1	2	3	4	5	6	7	
$\lambda_{\max}$	(1)	1	2	2	3	3	4	4	usw.

b)  $n = 3$  (d. h.  $\lambda_{\max} = 2$ )

$\lambda$	$i$	1	2	3	4	5	6	
1	1	1	20	23	26	29	32	35
$\Delta\lambda = 3$	2	2	23	26	29	32	35	<u>38</u>
2	1	1	21	24	27	30	33	36
$\Delta\lambda = 1$	2	2	22	25	28	31	34	<u>37</u>

c)  $n = 4$  (d. h.  $\lambda_{\max} = 3$ )

$\lambda$	$i$	1	2	3	4	5	6	
1	1	1	38	42	46	50	54	58
$\Delta\lambda = 4$	2	2	42	46	50	54	58	<u>62</u>
2	1	1	39	43	47	51	55	59
$\Delta\lambda = 2$	2	2	41	45	49	53	57	<u>61</u>
3	1	1	40	44	48	52	56	60
$\Delta\lambda = 0$	2	2	(40)	(44)	(48)	(52)	(56)	(60)

Die geometrische Bedeutung der in (6) eingeführten Indizes ist so offensichtlich, daß man mit der Kantenlänge  $a$  die Koordinaten des ersten Sektors ( $i = 1$  bzw.  $0 \leq \rho \leq 60^\circ$ ) sofort anschreiben kann:

$$\bar{x}' = m \frac{a}{2} \sqrt{3} \quad (8.1)$$

$$\bar{y}' = (-1)^1 [m - 2(\lambda - 1)] \frac{a}{2} = \Delta\lambda \frac{a}{2} \quad (8.2)$$

Mit  $\rho = i \cdot \pi/3$  (9)

gilt für alle 6 Sektoren:

$$\bar{X} = \phi \bar{X}' \quad (10)$$

wo

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}; \bar{X}' = \begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix}; \phi = \begin{bmatrix} \cos\rho & -\sin\rho \\ \sin\rho & \cos\rho \end{bmatrix} \quad (11, 1, 2, 3)$$

Schließlich kann man die Koordinaten auch noch im System  $X(x, y)$  angeben:

$$X = \bar{\phi} \cdot \bar{X} \quad (12)$$

wo

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ und mit } \rho = -\frac{\pi}{6} \text{ in (11.3):} \quad (13.1)$$

$$\bar{\phi} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (13.2)$$

Die automatische Erstellung der Koordinatenmatrix des gesamten Netzes erfolgt jetzt sehr einfach, indem man in einer Schleifenschachtelung über alle Parameter  $i, l, m, \lambda$  zu sämtlichen vorkommenden Kombinationen dieser Parameter sowohl die Koordinaten als auch deren zugehörige Knotennummer erzeugt.



### 3. Redundanzanalyse des Ersatzfachwerks

Bei der statischen Analyse eines aus  $s$  Stäben und  $k$  Knoten bestehenden Fachwerks mit Hilfe der Kraftmethode ist folgende Vorgehensweise üblich:

- 1.) Man erzwingt eine geeignete, möglichst geschickt gewählte statisch bestimmte Konfiguration durch Herausschneiden (sog. "Freischneiden") überzähliger (sog. "redundanter") Stäbe. Diese "Grundsystem" genannte Konfiguration ist "abbrechbar". Die Stabkräfte können dann sukzessive allein aus den Gleichgewichtsbeziehungen ermittelt werden.
- 2.) Unter den Stabkräften des Grundsystems unter vorgegebener Belastung würden sich die Schnittufer der freigeschnittenen Stäbe relativ zueinander verschieben. Gesucht wird ein Lastsystem von Kräften, die nur an den Schnittufern der redundanten Stäbe derart wirken, daß sie deren Relativ-Verschiebungen gerade zu Null machen. Für lineare Systeme gibt es eine eindeutige Lösung für diese Kräfte (engl. "redundant forces"). Die Beanspruchung des statisch unbestimmten Fachwerks ergibt sich dann durch Überlagerung der Stabkräfte des Grundsystems mit den sich aus den als Belastung aufgefaßten Schnittkräften ergebenden Stabkräften.

#### 3.1. Grad der statischen Unbestimmtheit

Die Anzahl der freizuschneidenden Stäbe bezeichnet man als Grad der statischen Unbestimmtheit (sog. "Redundanz"; Anmerkung: Dieser Redundanzbegriff darf nicht verwechselt werden mit dem in der Zuverlässigkeitsanalyse gebräuchlichen systemtechnischen Redundanzbegriff!).

Zur statisch bestimmten Auflagerung des ebenen Fachwerks ( $2 \times$  Kräftegleichgewicht,  $+ 1 \times$  Momentengleichgewicht) setzt man 3 Freiheits-

grade Null. Es verbleiben dann  $(2k - 3)$  mögliche Lastkomponenten. Statische Bestimmtheit liegt vor, wenn zusätzlich die Bedingung der Abbrechbarkeit des Fachwerks erfüllt ist:

Ausgehend von einem beliebigen Stab des Fachwerks muß dieses in der Weise aufgebaut werden können, daß man neue Knoten durch Anschluß von je 2 Stäben erzeugt, die nicht in einer Geraden liegen. Ein solches Fachwerk heißt "einfach".

Diese Bedingungen werden erfüllt, wenn

$$s = 2k - 3 \quad (14)$$

Als Grad der statischen Unbestimmtheit ("Redundanz") bezeichnet man die Differenz

$$s_{\text{red}} = s - (2k - 3) \quad (15)$$

und trifft folgende fallunterscheidende Sprachregelung

$$s_{\text{red}} \begin{cases} < 0 & \text{Mechanismus} \\ = 0 & \text{kinematisch bestimmt} \\ > 0 & \text{kinematisch überbestimmt} \end{cases}$$

Man kann leicht nachweisen, daß (14) sowohl die statische Bestimmtheit gewährleistet als auch bei Abbrechbarkeit gilt.

Der Nachweis der Bedingung für statische Bestimmtheit folgt aus der Bilanz der Unbekannten:

k Knoten	→	2 k Gleichgewichtsbedingungen
statisch best. Lagerg.	→	<u>- 3 Auflagerkräfte</u>
		2 k - 3 Unbekannte möglich

Diesen stehen s Stabkräfte gegenüber! (q. e. d.)

Der Nachweis der Gültigkeit bei Einfachheit erfolgt durch die Überlegung: Am Schluß des Abbrechens bleibt von den ursprünglich  $k$  Knoten ein Dreieck zurück.  $(k - 3)$  Knoten mußten also durch Entfernen von je 2 Stäben eliminiert werden:

$$(s - 3) = 2 (k - 3) \quad \text{q. e. d.}$$

Diese Aussagen beweisen

Theorem 1 Jedes kinematisch bestimmte Fachwerk ist zugleich statisch bestimmt und hat bei  $k$  Knoten  $s = 2k - 3$  Stäbe.

Der Satz ist nicht umkehrbar. Ohne Beweis fügen wir hinzu :

Theorem 2: Ein nicht abbrechbares, statisch bestimmtes Fachwerk hat mindestens 6 Knotenpunkte.

Für das hier betrachtete Hexagonalnetz gelten die Beziehungen:

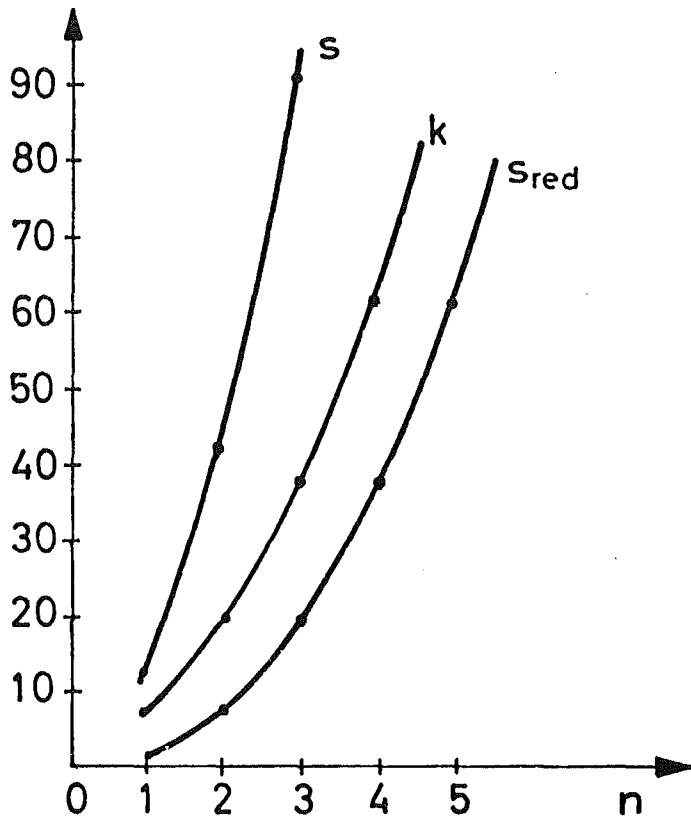
$$s = s(n) = 3n \cdot (3n + 1) \quad (16)$$

$$k = k(n) = 3n \cdot (n + 1) + 1 \quad (17)$$

Durch Einsetzen von (16) und (17) in (14) erhält man

$$s_{\text{red}} = 3n(n - 1) + 1 \quad (18)$$

Abb. 5 gibt eine grafische Darstellung der Funktionen (16) bis (18):



n	s(n)	k(n)	s <sub>red</sub> (n)
1	12	7	1
2	42	19	7
3	90	37	19
4	156	61	37
5	240	91	61

Abb. 5 Grad der statischen Unbestimmtheit

Man erkennt an der Kongruenz der Kurven für  $s_{red}$  und  $k$  die Gültigkeit der Beziehung

$$s_{red}(n) = k(n - 1) \quad (19)$$

die auch als Satz formuliert werden kann:

Theorem 3: Der Grad der statischen Unbestimmtheit des  $n$ -reihigen Hexagonalnetzes ist gleich der Knotenzahl des  $(n - 1)$ -reihigen Hexagonalnetzes.

Den Beweis führt man am besten durch Induktion:

$$u = n + 1 \text{ transformiert (17) in}$$

$$k(u) = k(n + 1) = 3(u - 1) \cdot u + 1$$

Der Vergleich mit (18) liefert

$$k(n) = s_{\text{red}}(n + 1)$$

oder (Induktion)

$$s_{\text{red}}(u) = k(u - 1) \quad \text{q. e. d.}$$

### 3.2. Automatisches Freischneiden (Identifikation der Schnittkräfte)

In Weiterführung der Beweisidee findet man leicht die Rekursionsbeziehung

$$s_{\text{red}}(n) - s_{\text{red}}(n - 1) = 6(n - 1) \quad (20)$$

Sie erlaubt eine sich aus Theorem 3 ergebende Schlußfolgerung:

Corollar 1: Durch Hinzufügen einer Reihe ändert sich nichts am ursprünglichen Grundsystem, wenn die äußere Reihe nach folgender Vorschrift freigeschnitten wird:

- 1.) Man schneidet, willkürlich beginnend, jeden 2. Gurtungsstab (= Randstab).
- 2.) Man schneidet sämtliche Gurtungsstäbe, die jetzt noch zwischen Knoten des Grads  $g = 3$  liegen.
- 3.) Im Sonderfall  $n = 1$  schneidet man einen beliebigen Gurtungsstab.

Der Beweis ist evident: Schnitt 1 beseitigt  $3n$  Stäbe, Schnitt 2 weitere  $(3n - 2)$ . Damit ist (20) erfüllt. Da Corollar 1 für beliebige Reihenzahl eine Rekursionsvorschrift enthält, muß nur nachgewiesen werden, daß am Beginn  $n = 1$  der Folge  $n = 1, 2 \dots$  ein einfaches Fachwerk steht. Davon überzeugt man sich durch Inspektion (Abb. 6, stark ausgezogene Linien): Vollzug von Schnitt 3 erzeugt 2 Stabzweischläge. Ihre Elimination erzeugt 2 neue Zweischläge, deren Abbau hinterläßt ein einfaches Dreieck. (q. e. d.)

Abb. 6 zeigt das Resultat des automatischen Freischneidens für  $n = 5$ . Der Sonderfall  $n = 1$  ist durch starke Linien kenntlich gemacht.

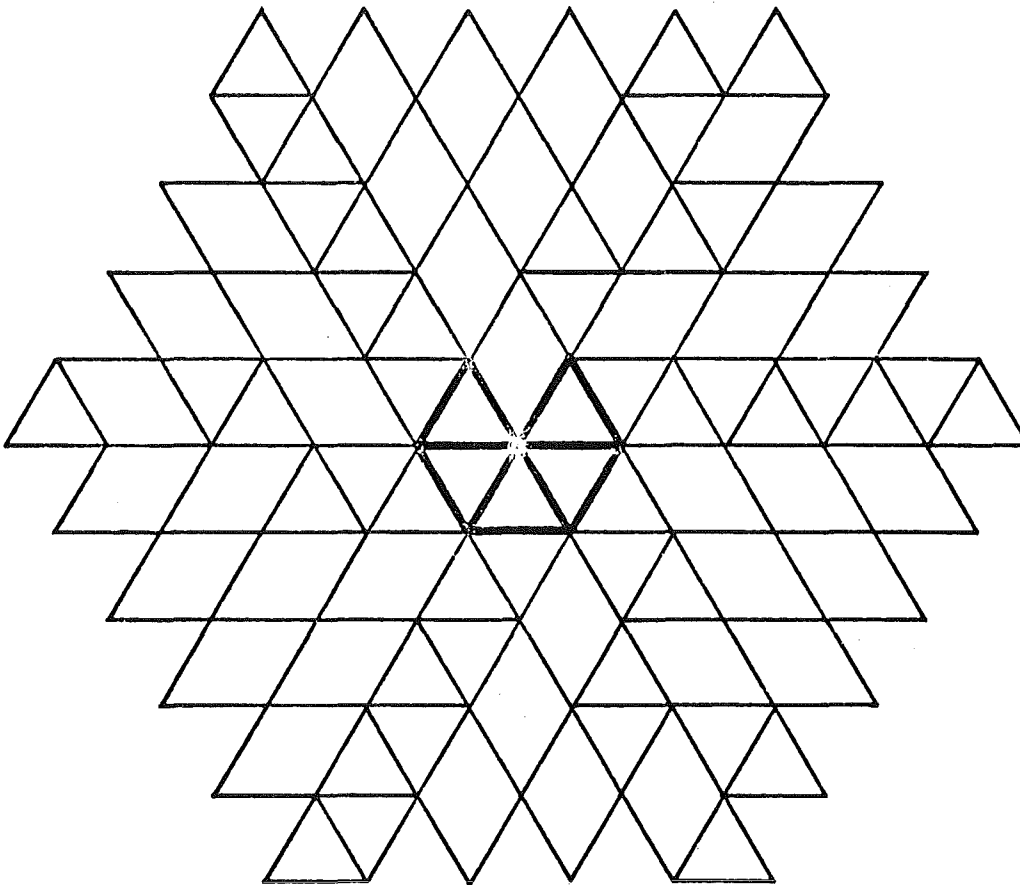


Abb.6 : Grundsystem für  $n=5$

NB!: Die vorliegende Notiz ist der Entwurf einer Veröffentlichung. Für kritische Hinweise (möglichst bis 15.2.74) bin ich deshalb besonders dankbar.

H.Z.

Verteiler:

IRE 5  
Dr.Fischer PNS  
Dr.Keßler PSB  
Dr.Schlechtendahl IRE 6  
Prof.Smidt IRE  
Dr.Stams PDV/CAD

4. Literatur

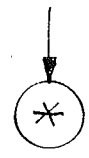
- |1| Przemieniecki, J. S.:  
Theory of Matrix Structural Analysis; McGraw Hill 1968
  
- |2| Duane, B. H.  
Hexagonal Lattices; Nucl. Sci. and Engng 33 (1968) 336 - 339
  
- |3| Nagel, H.; Wolf, L.  
Eine Näherungslösung für den thermischen Einlauf bei Kolbenströmung in einem sechseckigen Kanal ...;  
Nucl. Engng. Design 23 (1972) 10
  
- |4| Schlechtendahl, E. G.  
HEXAGON - Eine Systematik zur Behandlung von Problemen in Sechseckanordnung  
KFK 1432, Juli 1971
  
- |5| Ullrich, R.  
Zelleneinteilung und -indizierung von hexagonalen Stabbündeln mit besonderer Berücksichtigung zwölfacher Symmetrie.  
Atomkernenergie (ATKE) 20 (1972) Lfg. 2, 99 - 101
  
- |6| Class, G.; et. al.  
Auswirkungen des Strukturmaterialschwellens auf den Entwurf schneller Reaktorkerne  
Nucl. Engng. Design 18 (1972) 335
  
- |7| p. 3.11  
ANL-RDP-15/March 1973
  
- |8| Franz, W.  
Topologie II, Göschen 1882/1882a, Berlin 1965
  
- |9| Denke, P. H.  
A General Digital Computer Analysis of Statically Indeterminate Structures;  
NASA TN D-1666, Dec. 1962
  
- |10| Denke, P. H.  
The Matrix Solution of Certain Nonlinear Problems in Structural Analysis  
J. of the Aeron. Sci., 23 (1956) 3, 231 - 236

Unterprogramm CRTINC zur Generierung der Inzidenzmatrix

```
A1      :  FORTRAN-IV Listing
        SUBROUTINE CRTINC( INCID, M, N, LINC, NROW)
        DIMENSION INCID(M,N), LINC(NN,2)
        COMMON/DRUCK/IP
        REAL INCID
C      CCFATES INCIDENCE MATRIX FOR HEXAGONAL NETWORK *
C      INCID(M,N) : INCIDENCE MATRIX (BOOLEAN)
C      LINC (N,2) : LIST OF ENTRIES // NROW=ROW-1.
C      WRITTEN BY HERB ZEHLETT, KFZK, IRE5, AUG.25, 1972*
C
        KSROD(K)=3*K*(1+3*K)
        KNODE(K)=3*K*(K+1)+1
C
C      PATH FINDER NOTE
        IF(IP.EQ.1)PRINT 6
C
C      NODE AND CONNEXION-NO. GENERATOR
        I1=0
        I2=1
        J=0
C      ROW LOOP
        DO 100 N=1,NROW
C      PRINT 5,N
        IF(N.EQ.1) GO TO 101
        I=N-2
        I1=KNODE(I)+1
        I=N-1
        I2=KNODE(I)+2
        J=KSROD(I)+1
        INCID(I1,J)=1.
        INCID(I2,J)=1.
        LINC(J,1)=I1
        LINC(J,2)=I2
C      PRINT 1,N,J,I1,I2
C      101 CONTINUE
C      20 CONTINUE
C      IF(N.LE.2) GO TO 30
        N2=N-2
        DO 50 K=1,N2
        I1=I1+1
        DO 60 L=1,2
C      TYPE 4 CONNEXION
        J=J+1
        INCID(I1,J)=1.
        INCID(I2,J)=1.
        LINC(J,1)=I1
        LINC(J,2)=I2
        I2=I2+1
        60 CONTINUE
        I2=I2-1
        50 CONTINUE
C      30 CONTINUE
        I1=I1+1
        KN1=N-1
        KN2=N-2
        IF(I1.EQ.KNODE(KN1)+1) I1=KNODE(KN2)+1
        IF(N.EQ.1) I1=1
```

$\delta$   
 $\beta$

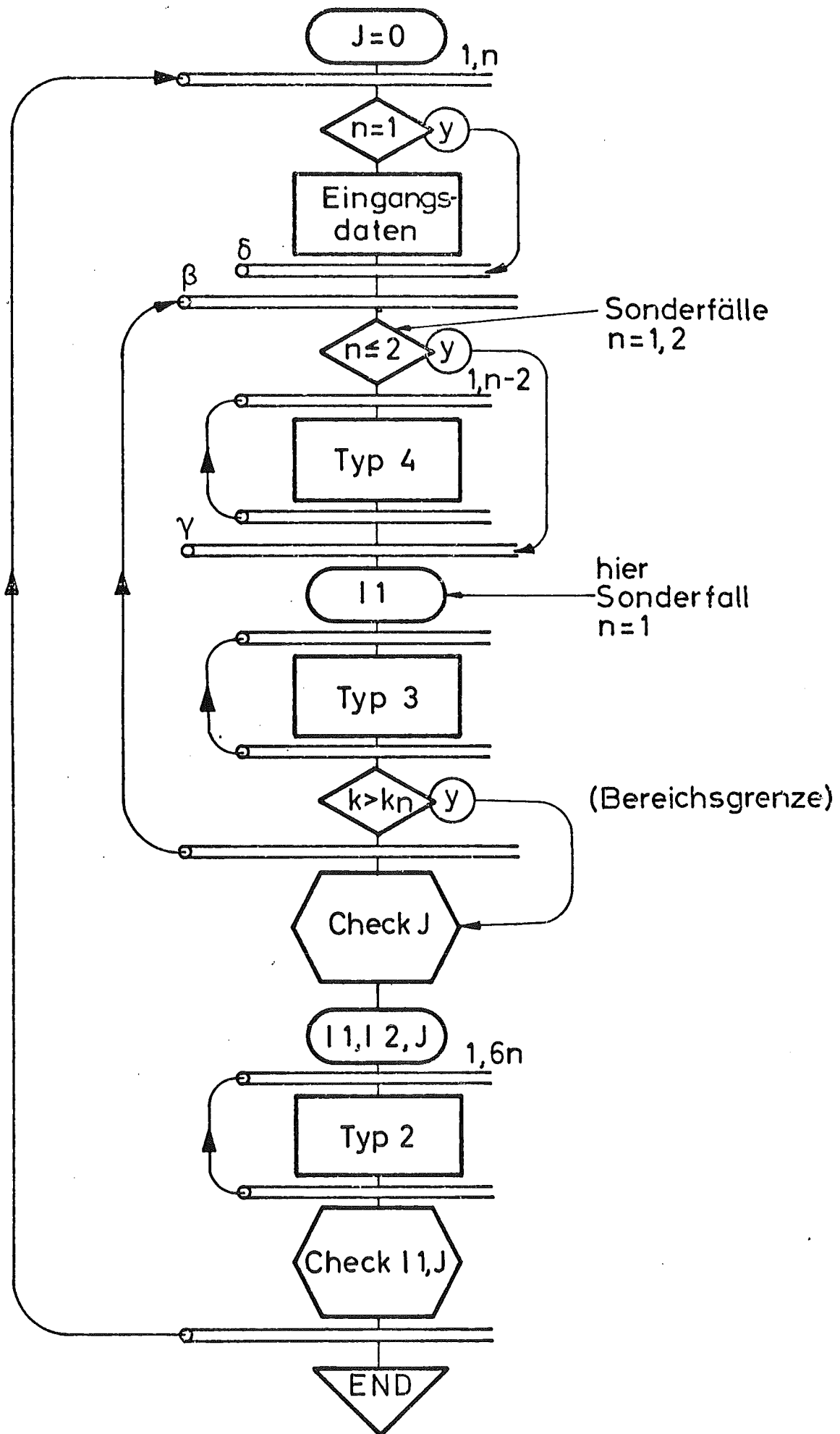
$\gamma$







```
IF (N.NE.1) I2=I2-1
C
C   TYPE 3 CONNECTION
C
DO 70 L=1,3
J=J+1
I2=I2+1
IF (I2.EQ.KNODE(N)+1) I2=KNODE(KN1)+1
INCID(I1,J)=1.
INCID(I2,J)=1.
LINC(J,1)=I1
LINC(J,2)=I2
C   PRINT1,N,J,I1,I2,L
IF(N.NE.1) GO TO 71
IF(I2.EQ.KNODE(N))GO TO 10
71 CONTINUE
IF((I1.EQ.KNODE(KN2)+1).AND.(I2.EQ.KNODE(KN1)+1)) GO TO 10
70 CONTINUE
GO TO 20
10 CONTINUE
C
C   CHECK OF NO OF CONNECTIONS
C
IF(J.EQ.(KSROD(N)-6*N)) GO TO 102
PRINT2
102 CONTINUE
C
C   TYPE 2 CONNECTIONS
C
I1=KNODE(KN1)+1
J=KSROD(N)-6*N
N6=6*N
DO 80 L=1,N6
I2=I1+1
IF (I2.EQ.KNODE(N)+1) I2=KNODE(KN1)+1
J=J+1
INCID(I1,J)=1.
INCID(I2,J)=1.
LINC(J,1)=I1
LINC(J,2)=I2
C   PRINT1,N,J,I1,I2
I1=I1+1
80 CONTINUE
C
C   CHECK OF FINAL CORNER COORDINATES
IF (J.EQ.KSROD(N)) GO TO 103
PRINT3,N,J
103 CONTINUE
I1=I1-1
IF(I1.EQ.KNODE(N))GO TO 104
PRINT 4,N,I1
104 CONTINUE
C
100 CONTINUE
C
C   CALL PRTINM(LINC,NN,2,+HLINC)
IF(IP.EQ.1)PRINT 7
RETURN
1 FORMAT (15,10I10)
2 FORMAT (28HVALUE OF J (COL.)INCORRECT /// )
3 FORMAT (8HROW-NO=15,2X,16HJD-NO INCORRECT,15 ///)
4 FORMAT (8HROW-NO=15,2X,17HJDE-NO INCORRECT,15,///)
5 FORMAT (8HROW-NO=,13,10H*****///)
6 FORMAT (12H ECCD CRTIIC / )
7 FORMAT (12H CIAO CRTIIC / )
END
```



A2 : Flußdiagramm zu CRTINC



B e r i c h t i g u n g zu KFK 1947

=====

Seite	Zeile	muß lauten	statt
2	8	<u>an</u> FBR core	a FBR ...
9	Tabelle 1	<u>für</u> n=1	f,n=1
12	Tabelle 2 (1.u.2.Zeile)	E $\begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}$ usw.	E $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}$ usw.
16	(Schema)	<u>g<sub>3</sub> g<sub>4</sub> g<sub>6</sub></u>	ergänzen
	um die Zeile 4		x
	sowie	0 x x	(x)