

KERNFORSCHUNGSZENTRUM

KARLSRUHE

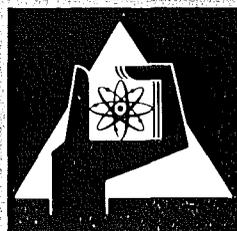
Oktober 1974

KFK 2062

Institut für Experimentelle Kernphysik

Topographie mit negativen Pionen durch Beobachtung der
 γ -Quanten nach der Ladungsaustauschreaktion $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$

G. Büche



**GESELLSCHAFT
FÜR
KERNFORSCHUNG M.B.H.**

KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 2062

Institut für Experimentelle Kernphysik

Topographie mit negativen Pionen durch Beobachtung der
 γ -Quanten nach der Ladungsaustauschreaktion $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$

G. Büche

Gesellschaft für Kernforschung m.b.H. Karlsruhe

Topographie mit negativen Pionen durch Beobachtung der γ -Quanten nach der Ladungsaustauschreaktion $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, daß die beiden Quanten aus dem π^0 -Zerfall nach der Ladungsaustauschreaktion $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$ dazu benutzt werden können, die Einfangregion eines abgebremsten Strahls negativer Pionen in wasserstoffhaltigen Substanzen darzustellen. Im Hinblick auf spätere therapeutische Anwendungen müssen die ortsempfindlichen Nachweisgeräte außerhalb der Bremssubstanz angebracht werden. Für eine solche Geometrie sind die Häufigkeitsverteilungen für γ - γ -Koinzidenzen berechnet worden. Die Ergebnisse zeigen, daß die Eindringtiefe des Strahls und dessen seitliche Position im Prinzip auf Millimeter genau vermessen werden können in Zeiten, die klein sind gegen typische therapeutische Bestrahlungsdauern.

Topography with negative pions by observation of gammas from the π^0 decay after the charge exchange reaction $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$.

Abstract

It is shown that the gamma quanta from the π^0 decay after the charge exchange reaction $\pi^-p \rightarrow n\pi^0$ can be used to map the capture region of a π^- beam in hydrogenous substances. In view of the applications in radiotherapy, the detectors have to be placed laterally from the absorber volume. For such a geometry the probability distribution of γ - γ -coincidences have been calculated. The results show that the range of the beam and its lateral position can be determined to the order of one millimeter within a time short compared with irradiation times usual in radiotherapy.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Zusammenfassung	
1. Einleitung	1
2. Welche Sekundärteilchen sind für die Topographie geeignet?	3
3. Die Häufigkeitsverteilung der γ - γ -Koinzidenzen aus dem π^0 -Zerfall beim Abbremsen eines π -Strahls	7
3.1. Gliederung der Aufgabenstellung	7
3.2. Berechnung der Häufigkeitsverteilung für ein dickes Target	7
3.3. Stoppen und stragglung der Teilchen	9
4. Zusammenstellung von Funktionen, die in der Rechnung verwendet werden	12
4.1. Die Winkelverteilung für $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$	12
4.2. Kinematik der Reaktion $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$	16
4.3. Kinematik des Zerfalls $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	17
4.4. Winkelbeziehungen für die korrelierten γ -Quanten im Labor-System	20
5. Ergebnisse und Diskussion	23
5.1. Ergebnisse für die relativen Koinzidenzraten	23
5.2. Empfindlichkeit der Anordnung	29
6. Schlußbemerkung	31
Anhang. Rechenprogramme	32
A. Reichweite und Energieverlust pro Wegstrecke für schwere Teilchen	33

B.	Berechnung der Häufigkeitsverteilung	35
C.	Berechnung der Richtungen der korrelierten γ -Quanten im Raum	41
	Literaturverzeichnis	43

1. Einleitung

Die zukünftige Anwendung negativer Pionen in der Strahlentherapie erfordert, daß deren mittlere Reichweite im Gewebe sowie die zugehörige Schwankungsbreite in jedem einzelnen Fall genau überwacht wird. Das Ziel ist, den Bereich des maximalen Energieübertrags des Teilchenstrahls an die Bremssubstanz durch Variation der Teilchenenergie mit einem zuvor festgelegten Gewebebereich zur Deckung zu bringen. Der Bereich maximalen Energieübertrags an das Gewebe fällt in guter Näherung mit dem Reichweitenende des Pionenstrahls zusammen.

Dieses Reichweitenende ist im Prinzip berechenbar. Jedoch sind Unsicherheiten damit verbunden, daß in verschiedenen Gewebearten jeweils andere Elementzusammensetzungen vorliegen und vor allem Dichte-Schwankungen auftreten.

Zur Kontrolle der Reichweite können verschiedene Meßverfahren angewandt werden. Grundsätzlich erhält man dabei auch Information über die applizierte Dosis. Eine Einschränkung in der Wahl der Verfahren ist dadurch gegeben, daß die Nachweisgeräte außerhalb des Körpers angebracht werden müssen, da für therapeutische Zwecke die Bestrahlungszone nicht unmittelbar zugänglich ist.

Neben den biomedizinischen Anwendungen läßt sich die π -Topographie auch in physikalischen Experimenten verwenden. Insbesondere dann, wenn über die Bildung pionischer Moleküle chemische Effekte in wasserstoffhaltigen Verbindungen studiert werden sollen. Dazu müssen Einfangsquerschnitte verglichen werden, deren zugeordnete Zählraten von Untergründereignissen weitgehend frei sein sollten. Das kann dadurch erreicht werden, daß zu jedem γ -Quant festgestellt wird, ob es von der Reaktionszone ausgegangen ist.

In den folgenden Kapiteln wird eine kurze Übersicht gegeben, welche Sekundärteilchen sich für die Topographie der Reichweite von negativen Pionen eignen. Dann wird der Spezialfall der Ladungsaustauschreaktion $\pi^- + p \rightarrow n + \pi^0$ mit dem anschließenden Zerfall $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ näher betrachtet. Insbesondere werden die zu erwartenden Häufigkeitsverteilungen an γ - γ -Koinzidenzereignissen für Wasser als Bremssubstanz diskutiert.

2. Welche Sekundärteilchen sind für die Topographie geeignet?

Ein negativ geladenes Pion, das sich in einer Bremssubstanz bewegt, verliert seine Energie durch inelastische Stoßprozesse. Bevorzugt wenn es thermische Energien erreicht hat, wird es von den Atomen und Molekülen der Bremssubstanz eingefangen. Daran schließen sich Übergänge zwischen den Atomzuständen an, die zur Emission von mesonischer Röntgenstrahlung führen. Die aufeinanderfolgenden Stadien des Mesoneneinfangs sind in einer zusammenfassenden Arbeit von Ponomarev [1] beschrieben worden. Sobald das Meson die unteren Atomzustände erreicht hat, wird es vom Kern eingefangen. Die ihm übertragene Ruheenergie des Mesons führt zum Zerplatzen des Kerns. Die freiwerdenden Nukleonen sind überwiegend Neutronen. Von den entstandenen Bruchstücken befindet sich ein Teil in angeregten Zuständen und kann γ -Quanten aussenden, ein anderer ist instabil gegenüber Positronenemission.

In wasserstoffhaltigen Substanzen wird ein geringer Bruchteil der Mesonen von Protonen eingefangen. Dann sind zwei Prozesse möglich: 60% dieser π^- tauschen ihre Ladung aus und ergeben π^0 , das mit einer Lebensdauer von $0,84 \cdot 10^{-16}$ sec in zwei γ -Quanten zerfällt. Die übrigen Pionen erleiden Strahlungseinfang: $\pi^- + p \rightarrow n + \gamma$.

In Tabelle I sind diejenigen Sekundärteilchen aufgeführt, welche die Bremssubstanz mit Ausdehnungen in der Größenordnung von 10 cm noch verlassen können. Neben der ungefähren Energie dieser Teilchen ist angegeben, ob sie nur während der Bestrahlung ('prompt') beobachtet werden können oder auch verzögert nach dem Abschalten des Strahls. Die letzte Spalte enthält Angaben darüber, ob zu jedem Teilchen ein zweites, in der Emissionsrichtung durch die Kinematik eindeutig festgelegtes, ausgesandt wird.

A r t	Energie	wird emittiert	streng korreliert?
Pionische Röntgenstrahlung	~0,1 MeV	prompt	nein
Kern- γ -Quanten	~10 MeV	prompt	nein
Neutronen	Spektrum	prompt	nein
Positron-Vernichtungsstrahlung	0,5 MeV	verzögert	ja
γ -Quanten aus $\pi^- p \rightarrow n\gamma$	129 MeV	prompt	ja
γ -Quanten aus $\pi^- p \rightarrow n\pi^0$	67 MeV	prompt	ja

Tabelle I. Zusammenstellung der Sekundärteilchen, die einen Körper verlassen können, in dem ein Strahl negativer Pionen gestoppt wird.

Von den aufgeführten Teilchen sind die beiden γ -Quanten aus den Zerfällen von Positronium und π^0 sowie Neutron und γ -Quant aus dem Strahlungseinfang von π^- an p streng korreliert. Die übrigen Sekundärteilchen sind daher für topographische Zwecke nur dann brauchbar, wenn zusätzlich zu ihrem Nachweisort auch die Richtung bestimmt werden kann, aus der sie gekommen sind. Die Richtung läßt sich durch Verwendung von Kollimatoren oder durch Beobachtung der Bahnen von Rückstoßteilchen ermitteln. Mit einzelnen Quanten bzw. Neutronen kann man eindimensionale Häufigkeitsverteilungen messen, wobei die Intensitäten aus Bereichen kommen, die senkrecht zur Strahlachse ausgedehnt sind. Man erfährt nichts darüber, wie weit die Bereiche in Richtung des Impulses der Sekundärteilchen ausgedehnt sind. Diese Methode genügt daher für medizinische Anwendungen nur insofern, als mit ihr lediglich die Reichweite eines Pionenstrahls im Körper fest-

gestellt werden kann und nicht Lage sowie Ausdehnung des bestrahlten Volumens.

Die verschiedenen Möglichkeiten, die mit einzelnen γ -Quanten für die Ortsdarstellung bestehen, sind in einem Bericht von SPERINDE et al. [2] diskutiert worden. Trotz ihrer großen Anzahl pro Verdampfungsprozeß verlieren nicht streng korrelierte Neutronen an Bedeutung, da man keine ausreichend dichten Kollimatoren bauen kann. Die Beobachtung mesonischer Röntgenstrahlung würde für diesen Zweck große, ortsempfindliche Festkörperzähler erfordern. Die Trennung der verbreiterten Pion-Röntgenlinien von denen der Myonen, die den Strahl unreinigen, bereitet Schwierigkeiten. Von Bedeutung sind somit nur die hochenergetischen γ -Quanten, die mit einem System aus Kollimatoren und Vieldrahtkammern nachgewiesen werden. Mit einer solchen Anordnung ist eine räumliche Auflösung von 0,75 cm für die in einer dünnen Schicht gestoppten Pionen erzielt worden.

Dagegen entfällt die Verwendung von Kollimatoren bei der Beobachtung korrelierter Sekundärteilchen. Mit ihnen läßt sich der Entstehungsort in zwei Dimensionen vermessen, falls sie in Koinzidenz zueinander in gegenüberliegenden ortsempfindlichen Detektoren nachgewiesen werden. Neutronen aus der Strahlungseinfangreaktion können von den zahlreichen, nicht korrelierten dadurch unterschieden werden, daß ihre Energie durch die Zweikörper-Reaktion festgelegt ist. Während diese Reaktion prompt abläuft, werden Positronen von instabilen Kernen wie ^{15}O , ^{13}N und ^{11}C mit Halbwertszeiten im Minutenbereich emittiert. Halbwertszeiten von dieser Größenordnung bewirken eine erhebliche Zeitverzögerung für den Fall, daß die Einstellung der Energie während der Bestrahlung überwacht werden soll. Diese Halbwertszeiten sind vorteilhaft, wenn nach erfolgter Bestrahlung die Einfangzone mit niedriger Untergrundrate vermessen werden soll. Die erreichbare Ortsauflösung wird durch die Reichweite der Positronen von bis zu 0,5 cm vom Ort der Aussendung beeinträchtigt.

Strahlungseinfang mit Positron-Vernichtung liefern Teilchen, die unter 180° auseinanderlaufen. Aus ihrer Beobachtung erfährt man nichts über die dritte Komponente des Ortes der Reaktion parallel zur Impulsrichtung der Sekundärteilchen. Die Rekonstruktion des Zerfallsortes in allen Dimensionen ist beim neutralen Pion möglich. Selbst wenn der Ladungsaustausch annähernd in Ruhe erfolgt, sorgt der Q-Wert der Reaktion dafür, daß die beiden Quanten einen Winkel einschließen, der im allgemeinen von 180° verschieden ist. Die Wege, welche die π^0 während ihrer kurzen Lebensdauer zurücklegen können, liegen in der Größenordnung von 10^{-6} cm für Energien, die bei therapeutischen Anwendungen vorkommen. Die γ -Quanten können daher prompt nach der Reaktion und vom Ort des Ladungsaustausches her kommend nachgewiesen werden. Fragen nach der Winkelverteilung und welche Zählraten erwartet werden dürfen, werden in den folgenden Kapiteln behandelt.

3. Die Häufigkeitsverteilung der γ - γ -Koinzidenzen aus dem π^0 -Zerfall beim Abbremsen eines π^- -Strahls

3.1. Gliederung der Aufgabenstellung

Die korrelierten γ -Quanten aus dem π^0 -Zerfall lassen sich auf zwei Weisen für die Überwachung einer Bestrahlung mit negativen Pionen verwenden. Es wird davon ausgegangen, daß beide Quanten in gegenüberliegenden Vieldrahtkammern in Koinzidenz zueinander nachgewiesen werden. Die charakteristische Häufigkeitsverteilung für Koinzidenz-Zählraten ermöglicht, die mittlere Reichweite und die seitliche Position des Strahls auszumessen und deren Änderungen zu überwachen. Diese Möglichkeit soll in den folgenden Abschnitten näher untersucht werden. Die zweite Möglichkeit ist die Rekonstruktion des Zerfallsortes von π^0 , wenn zusätzlich für jedes γ -Quant die Impulsrichtung bestimmt wird. So läßt sich das bestrahlte Volumen und die Stoppdichte für einzelne Teilbereiche ermitteln. Für Experimente dieser Art muß die Genauigkeit näher untersucht werden, mit der die Richtung des Impulses von γ -Quanten der Energie 70 MeV bestimmt werden kann.

3.2. Berechnung der Häufigkeitsverteilung für ein dickes Target

In Figur 1 ist eine Anordnung bestehend aus Phantom, Aufpunkt A und einer Reihe von Aufpunkten B wiedergegeben, in denen die Quanten nachgewiesen werden. Der Pionenstrahl habe beim Eintritt ins Phantom die Energie E_0 , das Impulsband $\frac{\Delta p}{p}$ und die mittlere Reichweite R z.B. in Wasser. Die seitliche Ausdehnung des Strahls werde zunächst vernachlässigt.

Die Energie der π^- als Funktion des zurückgelegten Weges wird schrittweise mit Hilfe der von BETHE angegebenen Beziehung für den Energieverlust pro Wegstrecke berechnet. Das entsprechende Rechenprogramm ist in Anhang A wiedergegeben.

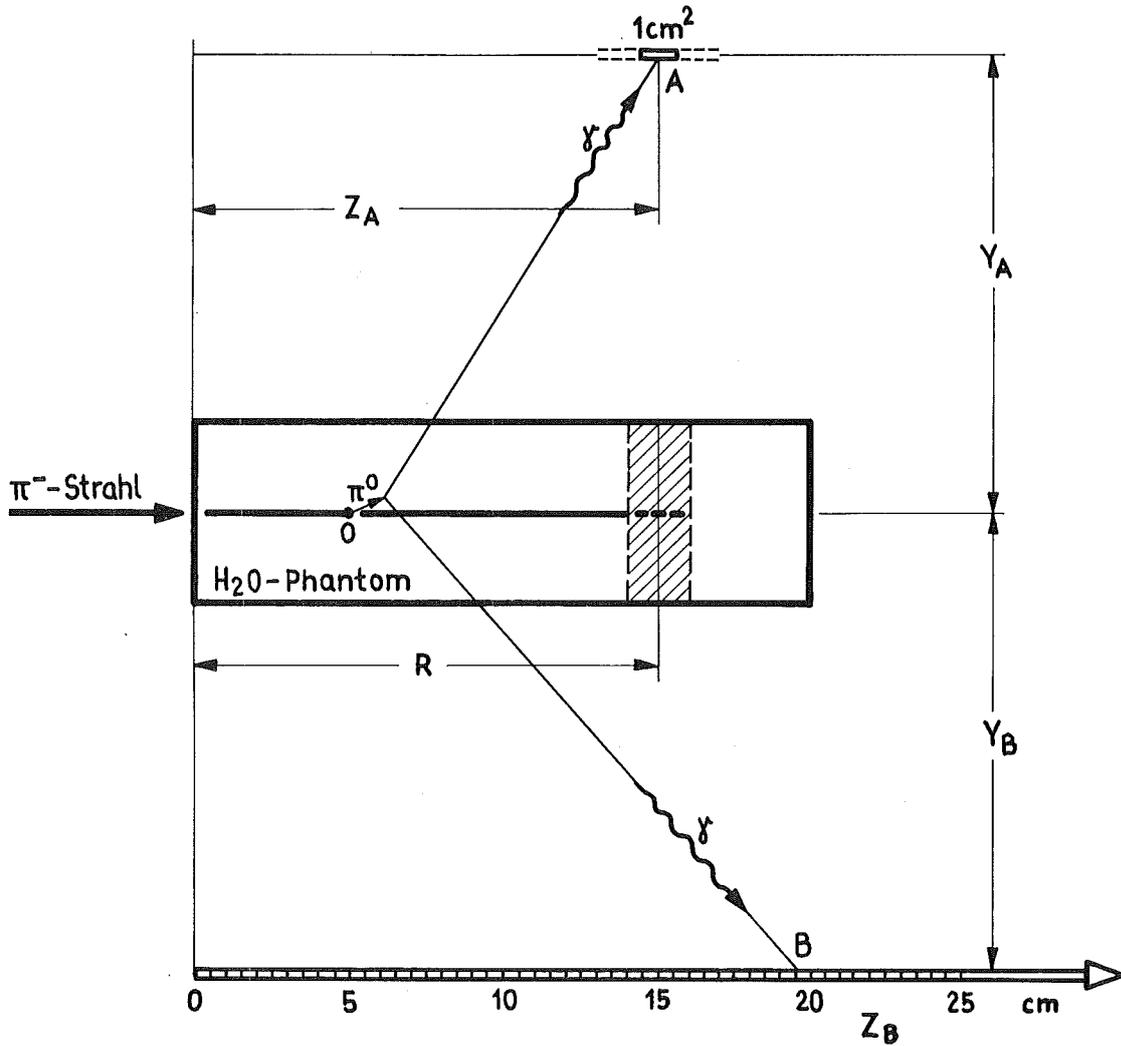


Fig. 1 : Ein Strahl negativer Pionen wird in einem Wasser-Phantom gebremst. Anordnung der Zähler, für die die Intensitäten aus dem π^0 -Zerfall berechnet werden.

Für eine Folge von Örtern O (siehe Fig. 1), die in der Einfangregion verdichtet ist, wird die Erzeugungsrate von π^0 berechnet, wobei über die jeweils vorliegende Energieverteilung der π^- integriert wird. Es wird ein rechtshändiges Koordinatensystem gewählt, dessen Ursprung in O liegt, dessen z-Achse in Richtung des π^- -Strahls zeigt und in dem der Aufpunkt A in der yz-Ebene mit $y_A > 0$ liegt. In Abhängigkeit von der Emissionsrichtung des π^0 in diesem Koordinatensystem und seiner Energie wird die Emission eines γ -Quants in Richtung zum Aufpunkt A verlangt und die Richtung des mit ihm korrelierten zweiten Quants berechnet. Von diesem wird untersucht, ob es eine längs der Geraden $X_B = 0; Y_B = y_B < 0$ aufgestellte Reihe von Zählern trifft. Wenn das der Fall ist, wird die entsprechende Wahrscheinlichkeit summiert. Über die vorkommenden Emissionsrichtungen für π^0 wird integriert. Die entsprechenden Rechenprogramme sind im Anhang B wiedergegeben, der zugehörige mathematische Formalismus ist in Kapitel 4 zusammengestellt.

3.3. Stoppen und stragglng der Teilchen

In einem Bereich um die mittlere Reichweite R haben die einlaufenden negativen Pionen ihre kinetische Energie verloren. Sie erzeugen dann keine π^0 mehr im Flug, sondern werden von den Wassermolekülen eingefangen. Mit einer kleinen Wahrscheinlichkeit W_H gelangen sie in die untersten Atombahnen des Wasserstoffs und tauschen ihre Ladung mit dem Proton aus. Die Abnahme der einlaufenden negativen Pionen wird bei der Integration über deren Energieverteilung berücksichtigt. Die Verteilungsfunktion der Energie der Pionen am Ort z_1 , nachdem sie im Mittel die Energie \bar{E}_1 verloren haben, wird als Gaußfunktion angesetzt (siehe Fig. 2):

$$f(E, \bar{E}_1, E_0) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(E - (E_0 - \bar{E}_1))^2}{\sigma_i^2}} \quad (1)$$

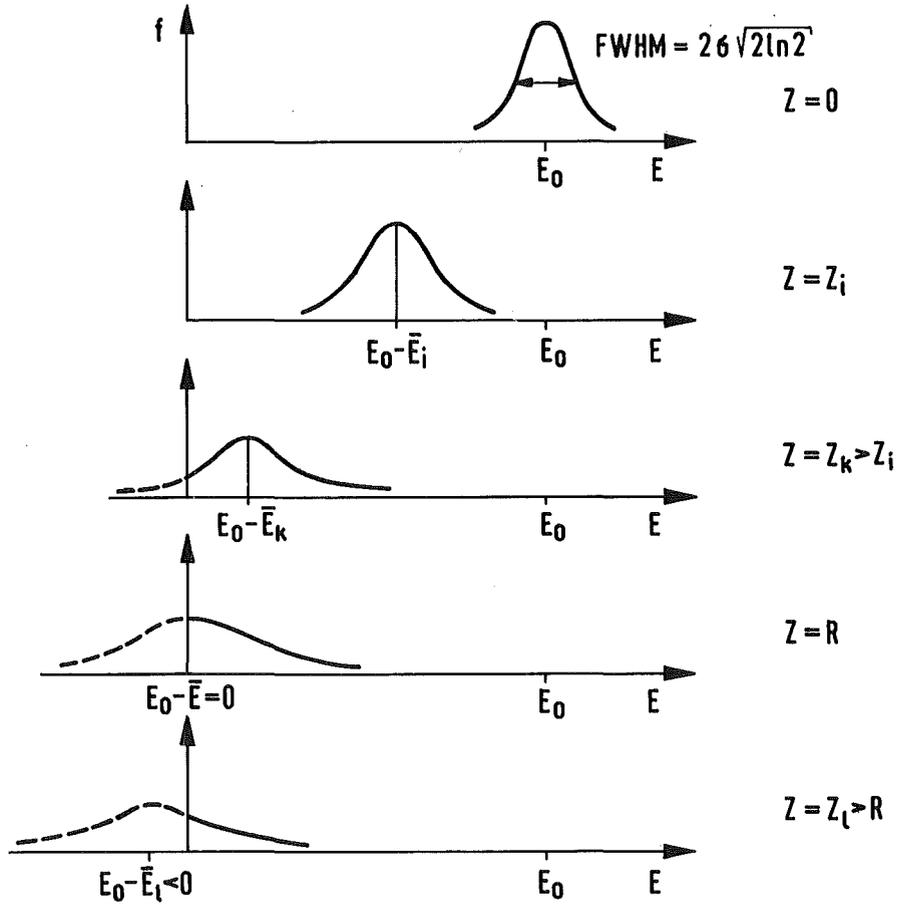


Fig. 2 : Schematische Darstellung des Verhaltens der Energieverteilung und der normierten Teilchenzahl als Funktion des Weges.

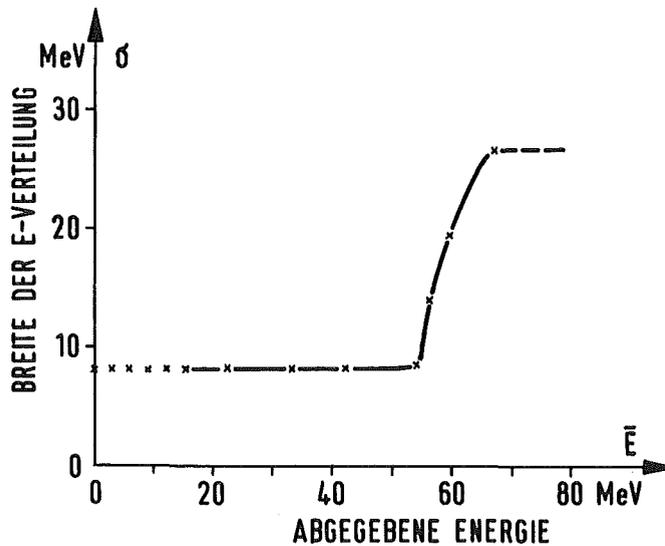


Fig. 3 : Energiebreite eines Strahls der Energie $E_0 = 67,7$ MeV mit $\Delta p/p = 6\%$ als Funktion der abgegebenen Energie \bar{E} .

Das Integral über die Energie ergibt die normierte Zahl der π^- , die noch Ladungsaustauschprozesse im Flug machen können:

$$F_i(\bar{E}_i, E_0) = \int_0^{\infty} f(E, \bar{E}_i, E_0) dE \quad (2)$$

Die Differenz von F für 2 verschiedene Örter z gibt die Anzahl der auf der Strecke gebliebenen π^- an:

$$\Delta F_i = F_{i-1} - F_i \quad (3)$$

mit $F_0 \equiv 1$.

Das Energie-stragglings spielt bei Strahlen von Teilchen schwerer Masse mit Impulsbandbreiten von einigen Prozent eine untergeordnete Rolle [3]. Damit wird das entsprechende Reichweite-stragglings praktisch von der Breite des Impulsbandes bestimmt. Die Varianz σ_i der Energie \bar{E}_i ist zu Anfang des Bremsprozesses durch das Impulsband gegeben. Ihre Zunahme bis zum Wert $E_i/E_0 \approx 0,7$ ist nach den Kurven berechnet worden, die in der Arbeit von TSCHALÄR [4] wiedergegeben sind. Im Bereich $\bar{E} \approx 0,7 E_0$ bis $\bar{E} = E_0$ steigen die Varianzen sehr stark an. Für die vorliegenden Rechnungen sind sie über dem Weg bis zum Endwert linear interpoliert worden. Der Wert der Varianz für den vollen, mittleren Energieverlust $\bar{E} = E_0$ ist aus der Reichweiten-Schwankung ermittelt worden, die vom Impulsband eines biomedizinischen Pionenstrahls von typisch $\Delta p/p = 6\%$ bestimmt wird (siehe Fig. 3).

4. Zusammenstellung von Funktionen, die in der Rechnung
benutzt werden

4.1. Die Winkelverteilung für $\pi^- + p \rightarrow n + \pi^0$

Die Winkelverteilung der Ladungsaustauschreaktion im Schwerpunktsystem (CM) als Funktion der Energie der negativen Pionen wird mit Hilfe der Streuphasen berechnet. Bei den hier vorkommenden Energien unterhalb 100 MeV wird die Streuung durch s- und p-Wellen beschrieben. Dann hat die Winkelverteilung folgende Form (siehe z.B. Ref. [5]):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A + B \cos\theta + C \cos^2\theta \quad (4)$$

wobei die Koeffizienten A, B und C Funktionen der Streuamplituden $a_{\ell, 2J}$ (J = Gesamtdrehimpuls, ℓ = Bahndrehimpuls) sind:

$$a_{\ell, 2J} = \sin\delta_{\ell} e^{i\delta_{\ell}} \quad (5)$$

Da bei der Streuung von π^+ an Protonen nur Zustände mit dem Isospin $T = 3/2$ auftreten, sind die Koeffizienten der Winkelverteilung besonders einfach:

$$\begin{aligned} A &= |a_s|^2 + |a_{p3} - a_{p1}|^2 \\ B &= 2 \cdot \operatorname{Re} a_s^* (2a_{p3} + a_{p1}) \\ C &= 3|a_{p3}|^2 + 6 \operatorname{Re} a_{p1}^* a_{p3} \end{aligned} \quad (6)$$

Aus diesen Ausdrücken erhält man die entsprechenden für die Ladungsaustausch-Reaktion (cx) durch die Ersetzung (7), da hierbei auch Zustände zum Isospin 1/2 auftreten:

$$a_{\ell, 2J} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3} \left[a_{\ell, 2J} \left(\frac{3}{2} \right) - a_{\ell, 2J} \left(\frac{1}{2} \right) \right] . \quad (7)$$

Mit der Bezeichnung δ_1 und δ_3 für die Phasen der s-Welle und $\delta_{2T, 2J}$ für diejenigen der p-Welle ergibt sich für die Koeffizienten A_{cx} , B_{cx} und C_{cx} :

$$\begin{aligned} A_{cx} = & \frac{2}{9} \{ \sin^2 \delta_3 + \sin^2 \delta_1 - 2 \sin \delta_1 \sin \delta_3 \cos(\delta_3 - \delta_1) \\ & + \sin^2 \delta_{33} + \sin^2 \delta_{11} + 2 \sin \delta_{11} \sin \delta_{33} \cos(\delta_{33} - \delta_{11}) \\ & + \sin^2 \delta_{13} + \sin^2 \delta_{31} + 2 \sin \delta_{13} \sin \delta_{31} \cos(\delta_{13} - \delta_{31}) \\ & - 2 \left[\sin \delta_{13} \sin \delta_{33} \cos(\delta_{13} - \delta_{33}) + \sin \delta_{11} \sin \delta_{13} \cos(\delta_{13} - \delta_{11}) \right. \\ & \left. + \sin \delta_{31} \sin \delta_{33} \cos(\delta_{31} - \delta_{33}) + \sin \delta_{31} \sin \delta_{11} \cos(\delta_{31} - \delta_{11}) \right] \} \\ & (8a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{cx} = & \frac{4}{9} \{ \sin \delta_3 \cdot \left[2 \sin \delta_{33} \cos(\delta_{33} - \delta_3) - 2 \sin \delta_{13} \cos(\delta_{13} - \delta_3) \right. \\ & \left. + \sin \delta_{31} \cos(\delta_{31} - \delta_3) - \sin \delta_{11} \cos(\delta_{11} - \delta_3) \right] \\ & - \sin \delta_1 \left[2 \sin \delta_{33} \cos(\delta_{33} - \delta_1) - 2 \sin \delta_{13} \cos(\delta_{13} - \delta_1) \right. \end{aligned}$$

$$+ \sin\delta_{31} \cos(\delta_{31}-\delta_1) - \sin\delta_{11} \cos(\delta_{11}-\delta_1) \Big] \Big\} \quad (8b)$$

$$C_{CX} = \frac{2}{3} \left\{ \sin^2\delta_{33} + \sin^2\delta_{13} - 2 \sin\delta_{13} \sin\delta_{33} \cos(\delta_{13}-\delta_{33}) \right. \\ \left. + 2 \left[\sin\delta_{31} \sin\delta_{33} \cos(\delta_{33}-\delta_{31}) - \sin\delta_{11} \sin\delta_{33} \cos(\delta_{33}-\delta_{11}) \right. \right. \\ \left. \left. - \sin\delta_{13} \sin\delta_{31} \cos(\delta_{13}-\delta_{31}) + \sin\delta_{11} \sin\delta_{13} \cos(\delta_{13}-\delta_{11}) \right] \right\} \quad (8c)$$

Die Streuphasen selbst sind Funktionen der Energie. Das Ergebnis einer Phasenanalyse von MIYAKE et al. [6] ist:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (0.17 \pm 0.03) \eta \\ \delta_3 &= (-0.107 \pm 0.003) \eta \\ \delta_{11} &= (0.05 \pm 0.33) \eta^3 \\ \delta_{13} &= (-0.14 \pm 0.07) \eta^3 \\ \delta_{31} &= (-0.041 \pm 0.004) \eta^3 \\ \delta_{33} &= (0.217 \pm 0.004) \eta^3 \end{aligned} \quad (9)$$

wobei η den Impuls des Pions im CM-System bedeutet:

$$\eta^2 \equiv \frac{P_{CM}^2}{(m_\pi c)^2} = \frac{P_\pi^2}{(m_\pi c)^2} \left[1 + \frac{m_\pi^2}{m_p^2} + 2 \sqrt{\frac{P_\pi^2 c^2}{m_p^2 c^4} + \frac{m_\pi^2}{m_p^2}} \right]^{-1} \quad (10)$$

Für zwei verschiedene Energien des π^- im Laborsystem ist die Winkelverteilung in Fig. 4 wiedergegeben. Bei den höheren Energien werden Winkel in Rückwärtsrichtung stark bevorzugt. Bei sehr kleinen Energien ist die Verteilung nahezu isotrop.

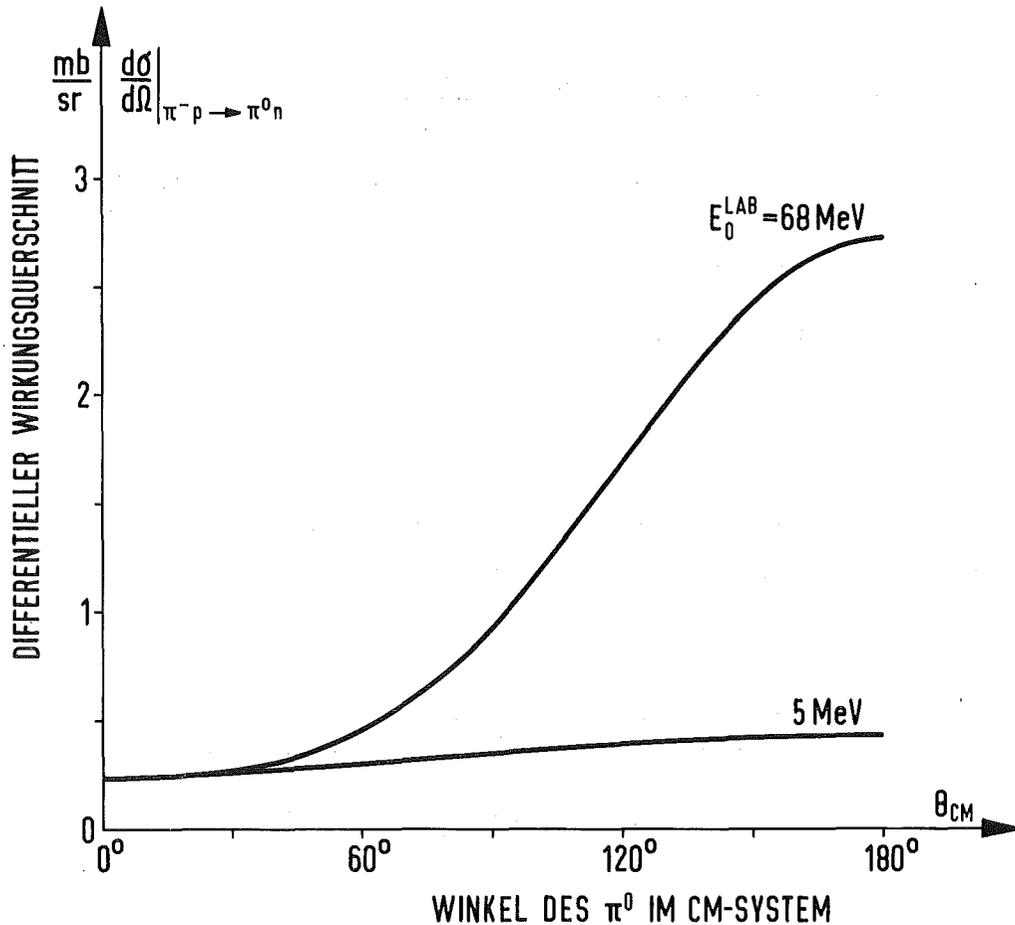


Fig. 4 : Differentieller Wirkungsquerschnitt für $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ als Funktion des Winkels des π^0 im Schwerpunktsystem.

Für Energien $E \rightarrow 0$ steigt der totale Wirkungsquerschnitt jedoch stark an:

$$\sigma_{cx}(E \rightarrow 0) = \frac{8\pi}{9} \chi^2 \frac{v_0}{v_-} (\delta_1 - \delta_3)^2 \quad (11)$$

mit $\lambda \cdot \eta =$ Compton-Wellenlänge des π^- , $v =$ Geschwindigkeit des Pions im CM System.

In der Rechnung wurde daher bei 2 MeV abgeschnitten und Pionen, deren Energie darunter lag, zu denen gezählt, die eingefangen werden.

4.2. Kinematik der Reaktion $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$

Die Richtung des π^0 im Laborsystem ist gegeben durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \sin\theta_3 \cos\phi_3 \\ \sin\theta_3 \sin\phi_3 \\ \cos\theta_3 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Die Beziehung zwischen dem Emissionswinkel θ_{CM} des π^0 im CM-System von π^- und p und dem Polarwinkel θ_3 ist:

$$\cos\theta_3 = \frac{\gamma_{\pi^- p} (\xi_{\pi^0} + \cos\theta_{CM})}{\sqrt{\gamma_{\pi^- p}^2 (\xi_{\pi^0} + \cos\theta_{CM})^2 + \sin^2\theta_{CM}}} \quad (13)$$

mit
$$\xi_{\pi^0} = \frac{\beta_{\pi^- p}}{\beta_{\pi^0}} = \beta_{\pi^- p} \cdot \sqrt{m_{\pi^0}^2 + p_{CM}^2} \cdot p_{CM}^{-1}, \quad (14)$$

$$p_{CM}^2 = \frac{(M^2 - m_{\pi^0}^2 - m_n^2)^2 - 4 m_{\pi^0}^2 m_n^2}{4 M^2} \quad (15)$$

= Impuls des π^0 im CM-System,

$$M^2 = (m_{\pi^-} + m_p)^2 + 2 m_p T_{\pi^-} \quad (16)$$

= Gesamtenergie im CM-System
($m =$ Masse der Teilchen, $T =$ kinetische Energie),

$$\beta_{\pi^-p} = \sqrt{T_{\pi^-}^2 + 2 m_{\pi^-} T_{\pi^-}} \cdot (m_{\pi^-} + m_p + T_{\pi^-})^{-1} \quad (17)$$

= Transformationsgeschwindigkeit Lab.System \rightarrow CM-System,

β_{π^0} = Geschwindigkeit des π^0 im CM-System,

$$E_{\pi^0}^{\text{Lab}} = \frac{\gamma_{\pi^-p}}{2 M} \left[M^2 + m_{\pi^0}^2 - m_n^2 + \beta_{\pi^-p} \sqrt{(M^2 + m_{\pi^0}^2 - m_n^2)^2 - 4M^2 m_{\pi^0}^2} \cdot \cos\theta_{\text{CM}} \right] \quad (18)$$

= Gesamtenergie des π^0 im Labor-System.

4.3. Kinematik des Zerfalls $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$

Im CM-System des π^0 ist der Zerfall isotrop. Die Umrechnung ins Labor-System ist durch die Lorentztransformation gegeben (Das System Σ' bewege sich mit der Geschwindigkeit β relativ zu Σ parallel zur x-Komponente des Impulses):

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ i\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ i\omega' \end{pmatrix} \quad (19)$$

Die Emission eines Quants erfolge

in Σ (= Lab. System) unter dem Winkel θ gegenüber
der Impulskomponente \vec{p}_x ,
in Σ' (= CM System) unter dem Winkel θ' gegenüber der
Impulskomponente \vec{p}'_x .

Es wird ausgenutzt, daß der Transversalimpuls eine Invariante ist:

$$p_T = \sqrt{p_Y^2 + p_Z^2} = \sqrt{p_Y'^2 + p_Z'^2} = p_T' \quad (20)$$

Dann erhält man für den Winkel θ :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{p_T}{p_X} = \frac{p_T'}{\gamma p_X' + \beta \gamma \omega'} \quad (21)$$

Nach Division der Impulse durch die Länge des 3-Impulses $p' = \sqrt{p_X'^2 + p_Y'^2 + p_Z'^2}$ ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma \cdot \cos\theta' + \beta \cdot \gamma} \quad (22)$$

Die Energie des Quants, das unter θ' emittiert wird, beträgt:

$$\omega = \gamma(\beta \cos\theta' + 1)\omega' \quad (23)$$

Nach θ' aufgelöst ergibt sich die Winkelbeziehung:

$$\cos\theta' = \frac{\beta - \cos\theta}{\beta \cos\theta - 1} \quad (24)$$

Wenn eines der beiden Quanten unter dem Winkel θ_1' emittiert wird, so tritt das zweite unter $\theta_2' = \theta_1' + \pi$ auf. Im Labor-System gilt:

$$\cos\theta_2 = \frac{\beta - \cos\theta_1'}{1 - \beta \cos\theta_1'} \quad (25)$$

Die beiden Winkel im Labor-System sind verknüpft miteinander über die Beziehung:

$$\cos\theta_2 = \frac{-2\beta + (1 + \beta^2) \cos\theta_1}{-(1 + \beta^2) + 2\beta \cos\theta_1} \quad (26)$$

Die Wahrscheinlichkeit W für den π^0 -Zerfall ist im Ruh-system isotrop:

$$\frac{dW}{d\Omega_{CM}} = \frac{1}{4\pi} \quad , \quad (27)$$

dagegen nicht mehr im Labor-System:

$$\frac{d\Omega_{CM}}{d\Omega_{Lab}} = \gamma^2 (1 + \beta \cos\theta')^2 \quad . \quad (28)$$

Neutrale Pionen, die aus dem System ($p\pi^-$) stammen, werden isotrop emittiert. Dazu wird das System ($p\pi^-$) als ruhend angenommen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein γ -Quant zum Aufpunkt A der Fig. 1 hin emittiert wird:

$$W_{01}^{Lab} = W_{\pi^0}(\theta_3, \phi_3) \cdot W_{\pi^0\gamma}(A) \cdot d\Omega_{Lab}(A) \quad , \quad (29)$$

$$\text{mit } W_{\pi^0}(\theta_3, \phi_3) = \frac{1}{4\pi} \sin\theta_3 \, d\theta_3 \, d\phi_3 \quad (30)$$

= Wahrscheinlichkeit für Emission des π^0 unter dem Winkel (θ_3, ϕ_3) ;

$$W_{\pi^0\gamma}(A) = \frac{dW}{d\Omega_{CM}} \cdot \left(\frac{d\Omega_{CM}}{d\Omega_{Lab}} \right) \quad (31)$$

= Wahrscheinlichkeit für Emission eines γ -Quants unter dem Winkel θ'_A , wobei θ'_A derjenige Winkel ist, unter dem A im CM-System des π^0 erscheint;

$$d\Omega_{\text{Lab}} = \frac{dF}{y_A^2} \cdot \left(\frac{y_A^2}{(z_A - z)^2 + y_A^2} \right)^{3/2} \quad (32)$$

= Raumwinkel des Zählers der Fläche dF
am Aufpunkt A.

4.4. Winkelbeziehungen für die korrelierten γ -Quanten im Labor-System

Zu einem π^0 , das im Labor-System in einer bestimmten Richtung ausgesandt wird und von dem ein Zerfallsquant den Aufpunkt A erreicht, soll die Richtung des zweiten Quants bestimmt werden. Die beiden Winkel mit der Impulsrichtung des π^0 in der Zerfallsebene sind nach Formel (26) bekannt. Die Aufgabe ist daher durch Koordinatentransformationen zu lösen.

Die Emissionsrichtung des π^0 sei \vec{r} , der Einheitsvektor vom Koordinatenursprung (= Ort der Reaktion \equiv Ort des Zerfalls) zum Aufpunkt sei \vec{a} . Dann bezeichnet:

- a) D_z die Drehung um die z-Achse, bis \vec{r} in der x'z-Ebene liegt:

$$D_z = \begin{pmatrix} \cos\phi_3 & \sin\phi_3 & 0 \\ -\sin\phi_3 & \cos\phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad (33)$$

- b) $D_{y'}$, die Drehung um die y'-Achse, bis die neue z'-Achse in \vec{r} -Richtung weist:

$$D_{y'} = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & 0 & -\sin\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_3 & 0 & \cos\theta_3 \end{pmatrix} ; \quad (34)$$

c) $D_{z'}$, die Drehung um die z' -Achse, bis der Aufpunkt A in der $x''z'$ -Ebene liegt:

$$D_{z'} = \begin{pmatrix} \cos\phi'' & \sin\phi'' & 0 \\ -\sin\phi'' & \cos\phi'' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

wobei der Winkel ϕ'' aus den Produkten des Vektors

$$\vec{a}'' = D_{y'} D_{z'} \vec{a}$$

mit den Einheitsvektoren \vec{e} entlang der Koordinatenachsen bestimmt wird:

$$\begin{aligned} \cos\theta'' &= \vec{a}'' \cdot \vec{e}_{z'} \\ \sin\theta'' \cos\phi'' &= \vec{a}'' \cdot \vec{e}_{x''} \\ \sin\theta'' \sin\phi'' &= \vec{a}'' \cdot \vec{e}_{y''} \end{aligned} \quad (36)$$

Aus dem Vektor $\vec{a}''' = D_{z'} \vec{a}'' = \begin{pmatrix} \sin\theta'' \\ 0 \\ \cos\theta'' \end{pmatrix}$ erhält man durch Anwendung

der Beziehung (26) mit $\theta_1 = \theta''$ den Einheitsvektor für die

Richtung des zweiten Quants $\vec{b}''' = \begin{pmatrix} -\sin\theta_2 \\ 0 \\ \cos\theta_2 \end{pmatrix}$, dessen Vektor im

ursprünglichen, nicht gedrehten Koordinatensystem $\vec{b} = D^{-1} \vec{b}'''$

mit $D^{-1} = D_{z'}^{-1} D_{y'}^{-1} D_{z'}^{-1}$ ist und

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 \cos\phi_3 \cos\phi'' + (-\sin\phi_3) \sin\phi'' & -\cos\theta_3 \cos\phi_3 \sin\phi'' - \sin\phi_3 \cos\phi'' & \sin\theta_3 \cos\phi_3 \\ \cos\theta_3 \sin\phi_3 \cos\phi'' + \cos\phi_3 \sin\phi'' & -\cos\theta_3 \sin\phi_3 \sin\phi'' + \cos\phi_3 \cos\phi'' & \sin\theta_3 \sin\phi_3 \\ -\sin\theta_3 \cos\phi'' & \sin\theta_3 \sin\phi'' & \cos\theta_3 \end{pmatrix}$$

(37)

Das entsprechende Rechenprogramm findet man im Anhang C.

5. Ergebnisse und Diskussion

5.1. Ergebnisse für die relativen Koinzidenzraten

Für einen Strahl negativer Pionen mit einer mittleren Reichweite $R = 15$ cm in Wasser ist in Fig. 5 die relative Anzahl der Teilchen aufgetragen, die in den einzelnen Schichtelementen gestoppt werden. Die Verteilung ist eine Folge des nach Figur 3 zugrunde gelegten Anwachsens des stragglings. Es ergibt sich, daß in einer Schicht von $2,5 \text{ g cm}^{-2}$ 90% der ankommenden Teilchen gestoppt werden. Dieses Gebiet ist als Einfangregion zu betrachten, während der gesamte Weg des Strahls im Phantom das Bremsgebiet darstellt.

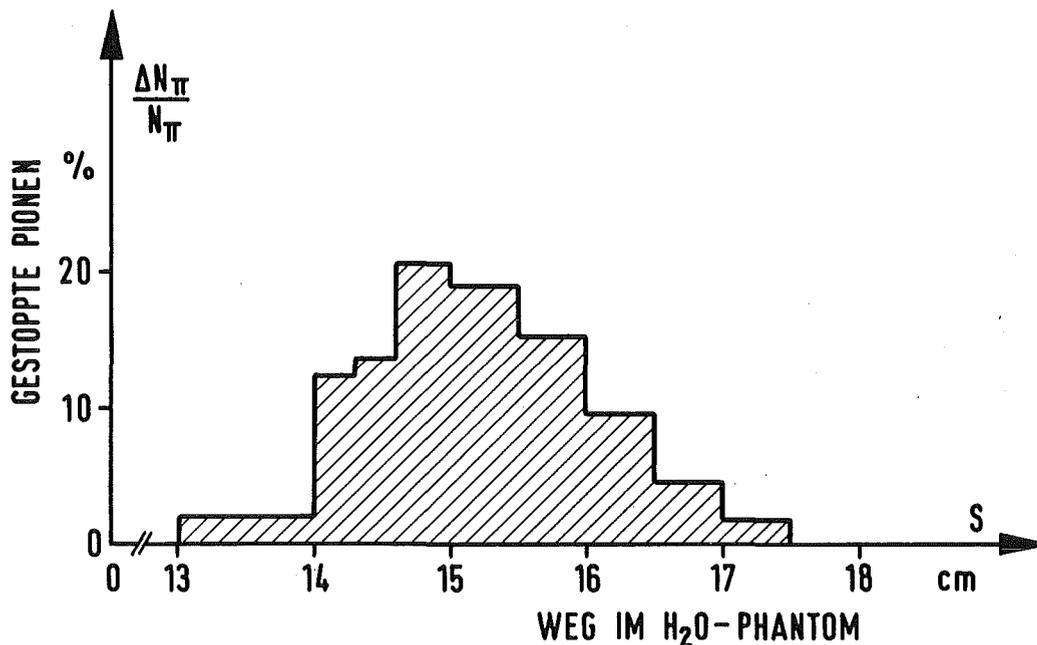


Fig. 5: Relative Anzahl der gestoppten π^- über dem Weg des Strahls im Phantom. Mittlere Reichweite $R = 15$ cm, Zunahme der Energieverteilung im Strahl nach Fig. 3.

In den folgenden Abbildungen sind die Koinzidenzraten K – bezogen auf den einlaufenden Teilchenstrom N_{π^-} – wiedergegeben, wie sie für die Geometrie der Fig. 1 erwartet werden können. Der Zähler beim Aufpunkt A hat dabei eine wirksame Fläche von 1 cm^2 , jeder Zähler in den Aufpunkten B eine solche von $0,5 \times 0,5 \text{ cm}^2$. Die Rechnungen enthalten außer diesen Flächen keine weiteren spezifischen Eigenschaften der Zähler.

Fig. 6 zeigt die Koinzidenzrate K/N_{π^-} als Funktion des Ortes des Zählers B, wobei A und B denselben Abstand von der Strahlachse: $y_A = y_B = 15 \text{ cm}$ haben und A in der Tiefe $z_A = 15 \text{ cm} = R$ angeordnet ist. Die flache, teilweise

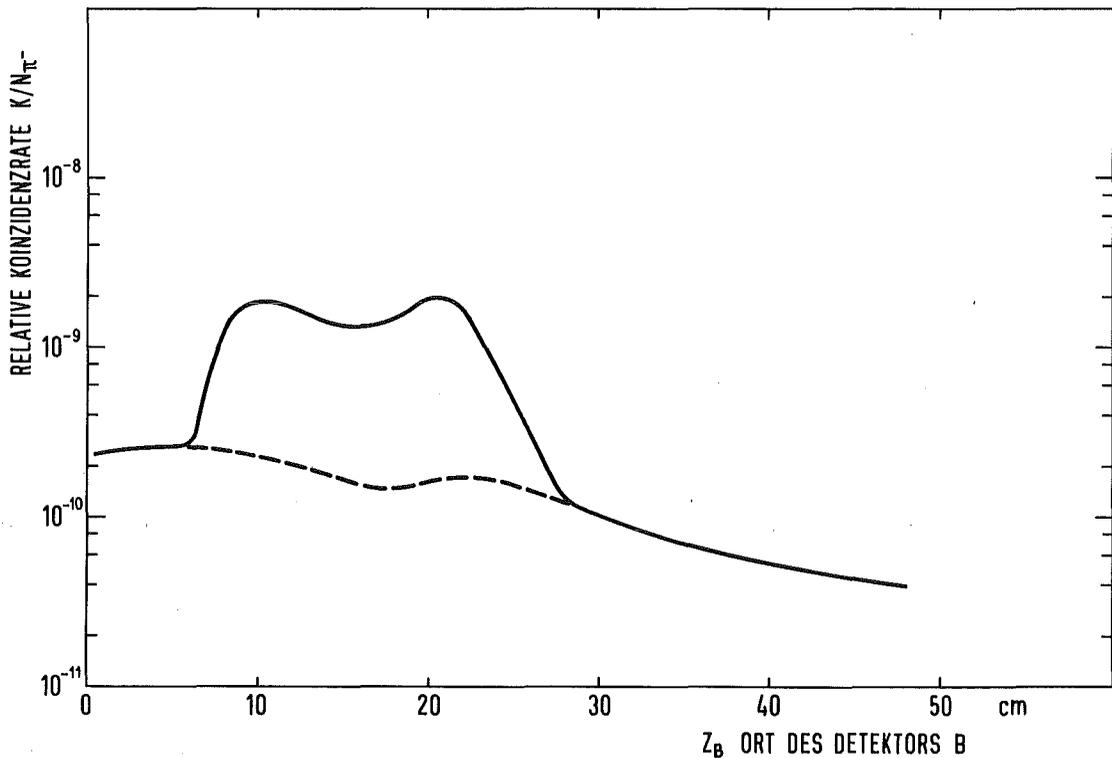


Fig. 6: Koinzidenzrate K/N_{π^-} für γ -Quanten aus der Ladungsaustauschreaktion $\pi^- p \rightarrow n \pi^0$; $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ als Funktion des Ortes des Zählers B. Geometrie nach Fig. 1, wobei $y_A = y_B = 15 \text{ cm}$ und $z_A = 15 \text{ cm} = R$ ist. Die Verteilung aus der Einfangregion ist derjenigen aus der Bremsregion überlagert.

gestrichelte Kurve entspricht Ereignissen, die von Ladungsaustauschreaktionen in der Bremsregion herrühren. Darüber liegt der Anteil an Ereignissen, der von Einfang- und nachfolgenden Ladungsaustauschprozessen herrührt. Die so entstandenen neutralen Pionen haben eine feste, durch den Q-Wert bestimmte Energie. Die Zerfallsquanten können daher einen minimal möglichen Winkel zwischen ihren Impulsen nicht unterschreiten. Die Existenz dieses minimalen Winkels zwischen den beiden Quanten tritt in Fig. 6 nur abgeschwächt in Erscheinung, da die Verteilung bereits über die Reichweitenstreuung gemittelt ist. In der Verteilung der Fig. 7, bei der der Ort des Zählers B in der festen Tiefe

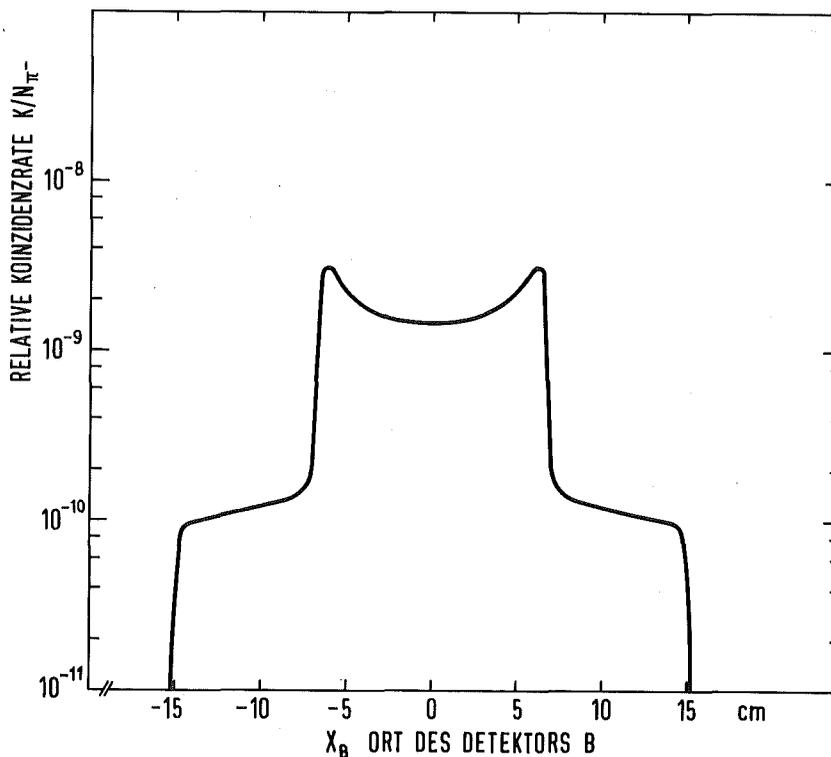


Fig. 7: Koinzidenzrate K/N_{π^-} für γ -Quanten aus der Ladungsaustauschreaktion $\pi^- p \rightarrow n \pi^0$; $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ als Funktion des Ortes des Zählers B. Die Variation des Ortes erfolgt senkrecht zur Strahlrichtung in der Tiefe $z_B = R = 15$ cm. Der Rand des kinematisch erlaubten Bereiches in dieser Richtung wird durch das Reichweitenstraggling nicht beeinflusst. Winkelstraggling und Ausdehnung des Strahls sind nicht berücksichtigt.

$z_B = 15$ cm senkrecht zur Strahlrichtung (in Richtung x_B) variiert, sind diese kinematischen Schranken unabgeschwächt sichtbar, da beim fadenförmigen Strahl das Winkelstragglung noch nicht berücksichtigt worden ist.

Die Lage der Flanken in der Zählerebene (x_B, z_B) ist charakteristisch für die Einschußenergie der Pionen und deren Richtung. Die Koinzidenzraten der Zähler B_1 bis B_4 der schraffierten Bereiche in Fig. 8 legen daher die räumliche Lage der Einfangregion in zwei Dimensionen fest. Die dritte Dimension – die Richtung des Strahles in der (yz)-Ebene – läßt sich durch ein Zählerpaar C und D ermitteln, das relativ zum Paar AB um die z -Achse um 90° gedreht ist.

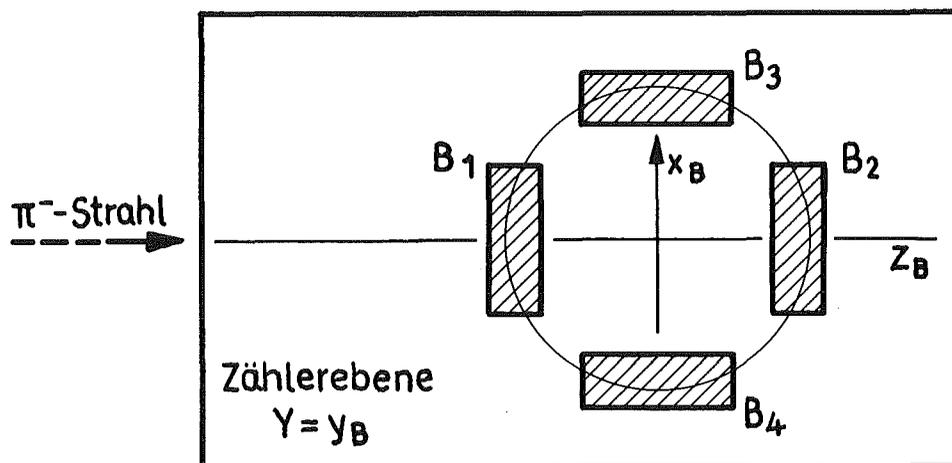


Fig. 8: Bereiche für Zähler B_1 bis B_4 in der Ebene $Y = y_B$, mit denen das Einfanggebiet der Pionen in zwei Dimensionen ausgemessen werden kann. Der Kreis stellt die Flanken der kinematischen Kurve von Fig. 6 und 7 dar.

Die Steilheit der Flanken bestimmt die Genauigkeit, mit der für Bestrahlungszwecke eine bestimmte Tiefe erreicht wird. Die Fläche der Detektoren B kann in einer Richtung – parallel zu den Tangenten an den Kreis in Fig. 8 – um einen Faktor 7

ausgedehnt werden, ohne stark an Flankensteilheit einzubüßen.

Den Einfluß eines ausgedehnten Strahls gibt Fig. 9 wieder. Sie zeigt Kurven, die dadurch entstanden sind, daß bei unveränderten Örtern A und B der Strahl um jeweils einen Zentimeter in y-Richtung parallel versetzt wurde. Hierbei 'öffnet' bzw. 'schließt' sich die kinematische Kurve, während eine Versetzung in x-Richtung annähernd eine Parallelverschiebung senkrecht zur Zeichenebene darstellt. Werden beide Kurven als

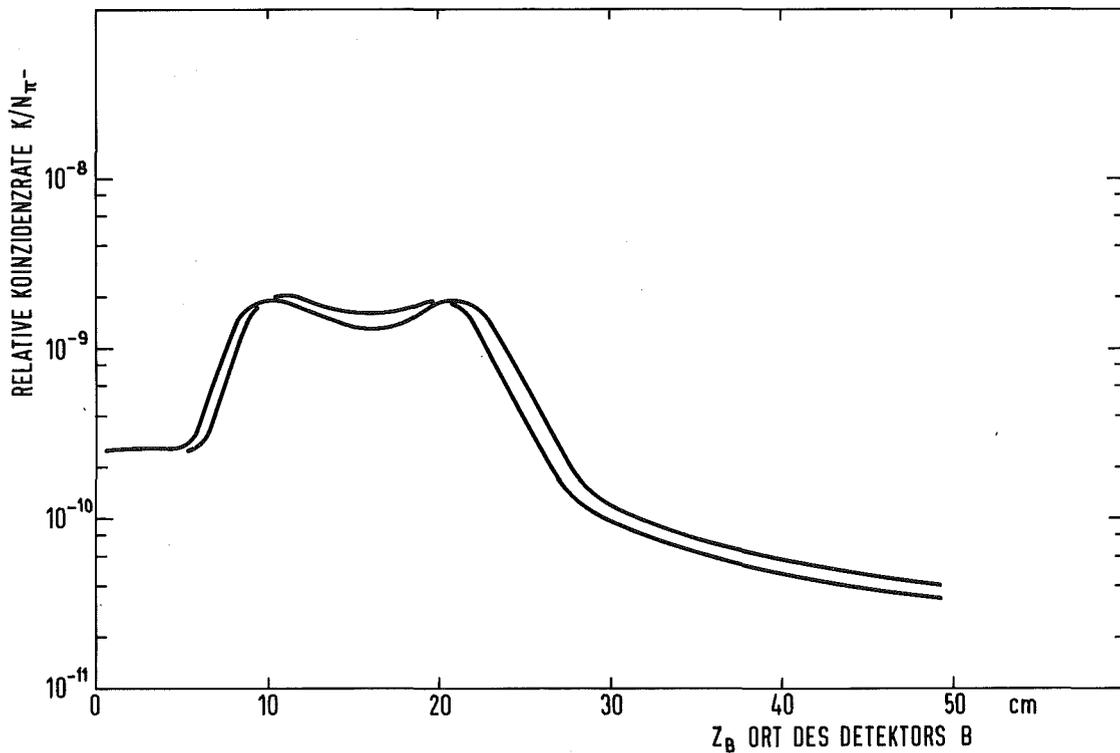


Fig. 9: Einfluß der Ausdehnung des Strahls auf die Ko-
inzidenzkurve von Fig. 6. Hierzu wurde der Strahl
jeweils um 1 cm in der (yz)-Ebene parallel ver-
setzt.

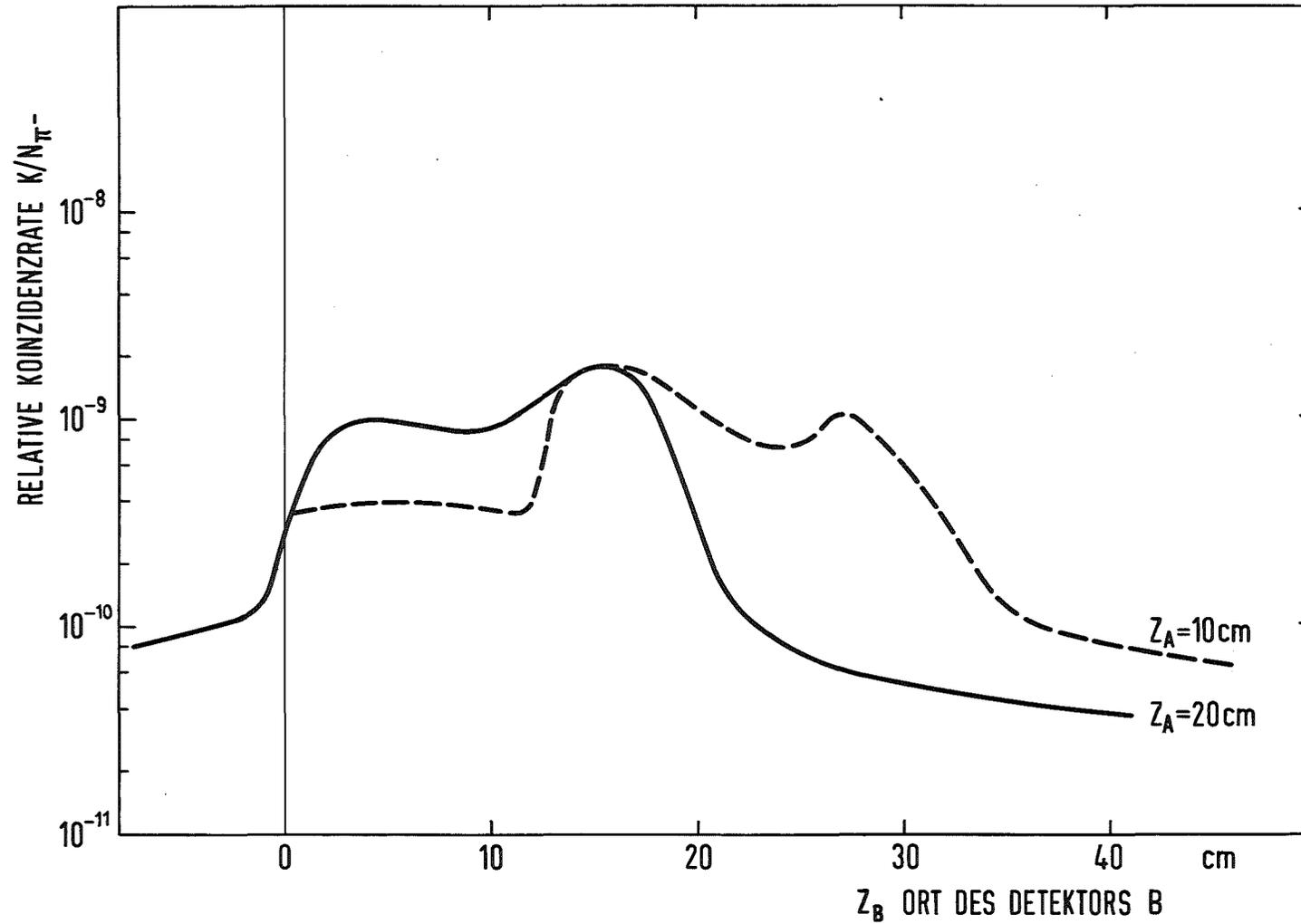


Fig. 10: Einfluß des Ortes des Zählers A auf die Koinzidenzkurve von Fig. 6.
 Für $z_A = 10$ cm ist die Intensität insbesondere bei kleinen z_B durch die nach rückwärts gerichtete Kinematik der Ladungsaustauschreaktion gesteigert.

Grenzkurven für den Einfluß der Strahlausdehnung betrachtet, so wird ersichtlich, daß die über die Ausdehnung von 2 cm gemittelte Kurve derjenigen für den fadenförmigen Strahl sehr ähnlich bleibt und die Flankensteilheit nur wenig abnimmt.

Zuletzt zeigt Fig. 10 den Einfluß auf die Verteilung der Ereignisse, wenn der Zähler A den Ort ändert. Es zeigt sich, daß jeweils die vom Aufpunkt A weiter entfernte Flanke der Verteilung an Steilheit verliert, während die andere sich nicht merklich ändert. Damit ist gezeigt, daß jedem Zählerelement der Fläche A 'seine' Koinzidenzkurve zugeordnet ist und aus jeder Kurve die Eindringtiefe und seitliche Lage des Strahls bestimmt werden kann.

5.2. Empfindlichkeit der Anordnung

Energieänderungen oder Richtungsänderungen des Strahls können über die Verschiebungen der Flanken in den Koinzidenzkurven bemerkt werden. Wie rasch solche Änderungen bemerkt werden können oder wie gut die Einfangregion relativ zu einem körperfesten Achsensystem während einer Bestrahlung lokalisiert werden kann, soll in folgendem Abschnitt untersucht werden.

Aus Fig. 6 ergibt sich für einen Zähler bei $z_B = 7$ cm eine relative Rate von $0,8 \cdot 10^{-9}$. Der Zähler B kann in Richtung z um den Faktor 3, in Richtung x um den Faktor 7 vergrößert werden. Wenn alle Zählerelemente A mit den entsprechenden B an den Flanken verknüpft werden, kann A um den Winkel π um die z-Achse variieren und eine Zylinderfläche von z.B. der Höhe $h = 15$ cm überstreichen. Diese Zylinderfläche kann durch zwei Paare von Vieldrahtkammern angenähert werden. Dann erhält man gegenüber der Rechnung eine Vergrößerung des Raumwinkels von

$$V_{\Omega} = \pi \cdot h \cdot y_A \cdot (1 \text{ cm})^{-2} = 15^2 \pi = 700 . \quad (38)$$

Für therapeutische Zwecke ist eine Energiedichte von etwa $5 \cdot 10^3$ rad in einem bestrahlten Volumen von typisch $(5 \text{ cm})^3$ erforderlich. 30 Fraktionen zu je $t = 10$ Minuten ergeben einen Pionenstrom von $I_{\pi^-} = 5 \cdot 10^7 \text{ sec}^{-1}$. Wird für die Ansprechwahrscheinlichkeit der γ -Zähler A und B je $\epsilon = 30\%$ angenommen, dann erhält man während einer Bestrahlung folgende Anzahl an Koinzidenzen:

$$K = \left(\frac{K}{I_{\pi^-}} \cdot 3 \cdot 7 \right) \cdot V_{\Omega} I_{\pi^-} \cdot t \epsilon^2 \quad (39)$$

$$K = 3,9 \cdot 10^4 .$$

Damit ist die Zahl der Koinzidenzen mit einer Genauigkeit in der Größenordnung von 1% bekannt.

Nach den Diskussionen von Abschnitt 5.1 ist eine Flankensteilheit in den Koinzidenzkurven von

$$\left| \frac{1}{K} \frac{dK}{dz} \right| \approx 30\% \text{ cm}^{-1} \quad (40)$$

gegeben. Diese Empfindlichkeit reicht aus, um die Lage des Einfanggebiets während einer Bestrahlungszeit von 10 Minuten auf Bruchteile eines Millimeters zu vermessen. Andererseits reicht ein Zehntel der Bestrahlungszeit aus, die Position des Einfanggebietes von der Intensität her gesehen in der Größenordnung eines Millimeters zu kontrollieren.

6. Schlußbemerkung

Es ist durch Rechnungen gezeigt worden, daß Ladungsaustauschreaktionen, die ein Strahl negativer Pionen beim Bremsen und Stoppen in wasserstoffhaltigen Verbindungen (Wasser, Gewebe etc.) erzeugt, über die besondere Zerfallskinetik des π^0 in zwei Quanten zur Lokalisation der Einfangregion der Pionen benutzt werden können. Als Zähler sind Paare von Vieldrahtkammern nötig, in denen die γ -Quanten ortsempfindlich nachgewiesen werden und die an eine Rechenmaschine angeschlossen sind. Durch Verknüpfung der Zählraten in kinematisch zugeordneten Bereichen erscheint es möglich, in Bruchteilen einer Bestrahlungsdauer die Strahleinstellung nach Eindringtiefe und Richtung in einem Phantom auf Millimeter genau zu überprüfen. Die Tatsache, daß die Ereignisse eine Koinzidenzbedingung erfüllen müssen und die Energie der γ -Quanten nur noch von denjenigen aus der Reaktion $\pi^-p \rightarrow n\gamma$ übertroffen wird, wirken sich günstig auf die Reduktion des eventuell vorhandenen Untergrunds aus.

Die mögliche Erweiterung des Verfahrens bis zur Rekonstruktion von Teilen bestrahlter Raumbereiche erfordert weitgehende Untersuchungen, mit welcher Genauigkeit die Richtung der γ -Quanten von ca. 70 MeV bestimmt werden kann.

Anhang. Rechenprogramme

- A. Programm zur Berechnung der mittleren Energie und des spezifischen Energieverlustes für Teilchen vorgegebener Anfangsenergie als Funktion der Schichttiefe, die sie im Material der stöchiometrischen Formel $C_{h1} H_{h2} O_{h3} N_{h4}$ zurückgelegt haben.
- B. Programm zur Berechnung der Häufigkeitsverteilung für Koinzidenzen aus dem Zerfall $\pi^0 \rightarrow 2 \gamma$. Die Aufgabenstellung und der Rechengang sind in Kapitel 3 und 4 beschrieben.
- C. Unterprogramm für Koordinatentransformationen: Als Funktion der Fortpflanzungsrichtung des π^0 im Labor-System ($\cos\theta_3 \equiv CTET3$, $\phi_3 \equiv PHI3$) und der vorgegebenen Richtung $A1(j)$ für die Emission eines γ -Quants wird die Richtung des mit ihm korrelierten zweiten γ -Quants berechnet.

```
C   PROGRAMM ZUR BERECHNUNG VON BRAGG-KURVEN FUER C H O N
DIMENSION E(500),T(500),DEX(500),DEXR(500),B(4),EI(4),H(4),W(4)
E0 = 0.511
A = 0.30715
B(1) = 6.
B(2) = 1.
B(3) = 8.
B(4) = 7.
C   WEGELEMENT IN G CM-2
DX = 0.1
C   EINLAUFENDE TEILCHEN = PIONEN
Z = 1.
E00 = 139.6
C   ANFANGSENERGIE IN MEV
EE = 61.2
C   ANTEILE AN C H O N
H(1) = 0.
H(2) = 2.
H(3) = 1.
H(4) = 0.
C   IONISATIONSENERGIE VON KOHLENSTOFF
EI(1) = 0.0000781
C   IONISATIONSENERGIE VON WASSERSTOFF
EI(2) = 0.0000155
C   IONISATIONSENERGIE VON SAUERSTOFF
EI(3) = 0.0001042
C   IONISATIONSENERGIE VON STICKSTOFF
EI(4) = 0.0000911
C   ATOMGEWICHTE VON C H O N
W(1) = 12.
W(2) = 1.
W(3) = 16.
W(4) = 14.
WM = 0.
DO 10 J=1,4
10 WM = WM+H(J)*W(J)
I=1
E(1)=EE
Z1=Z**(-2./3.)
WRITE (6,100) Z,EE
100 FORMAT (1H1,'BRAGG-KURVE FUER Z =',F3.0,3X,' ENERGIE =',F6.0,
1 ' MEV'/)
TA=0.
1 T(I)=TA
TA=TA+DX
BETAQ=(E(I)*E(I)+2.*E00*E(I))/(E(I)+E00)**2
IF (BETAQ) 7,7,8
7 WRITE (6,102) BETAQ
102 FORMAT (E15.5)
GO TO 4
8 BETA=SQRT(BETAQ)
ZET=Z
DEX(I) = 0.
DO 6 J = 1,4
6 DEX(I) = DEX(I)+H(J)*A*B(J)*(ZET**2/BETAQ)*(ALOG(2.*E0*BETAQ/
1 (EI(J)*(1.-BETAQ))))-BETAQ)
DEX(I) = DEX(I)/WM
DEXR(I)=DEX(I)/DEX(1)
DE=DEX(I)*DX
E(I+1)=E(I)-DE
```

```
WRITE (6,101) T(I),E(I),BETAQ,DEDX(I),DEDXR(I)
101 FORMAT (F9.3,3E15.5,F10.3)
IF (E(I)/EE-0.15) 3,2,2
3 DX=0.005
DI=(DEDXR(I)-DEDXR(I-1))/DEDXR(I-1)+0.3
IF (DI) 4,2,2
2 I=I+1
GO TO 1
4 STOP
END
```

```
C   BERECHNUNG DER RICHTUNGSVERTEILUNG DER GAMMA-QUANTEN LAENGS EINES
C   GEBREMSTEN PIONEN-STRAHLES
C
C   DIMENSION ZI(40),EQI(40),SIGI(40),FE(40),
1H(96),HS(96),AI(3),DROZ(40),HZ(96),HV(96),HVS(96),HVZ(96),HSS(96),
2FVSS(96)
C   CCMCN A1
C   PI = 3.141592654
C   WPI = SQRT(PI)
C
C   (0, YA, ZA) = ORT DES DETEKTORS 1
C   YA = 15.
C   ZA = 15.
C
C   (0, YB, ZET) = ORT DES DETEKTORS 2
C   YB = 15.
C
C   ANZAHL DER SCHRITTE IN DER BREMSREGION
C   N = 14
C
C   ANZAHL DER SCHRITTE IN DER EINFANGREGION
C   M = 8
C
C   NN = N+M
C
C   EC = ANFANGSENERGIE DER PIONEN
C   EC = 67.7
C
C   WRITE (6,97)
97  FORMAT (1H1,'EINGABE: EINDRINGTIEFE, MITTLERE ENERGIE, STREUUNG ',
1//)
C   READ (5,98) (ZI(I),EQI(I),SIGI(I),I=1,NN)
98  FORMAT (F5.1,F7.2,F6.2)
C   WRITE (6,96) (ZI(I),EQI(I),SIGI(I),I=1,NN)
96  FORMAT (F6.1,F9.3,F10.4)
C
C   GRENZWERTE FUER DIE VERTEILUNG VON GAMMA 2
C   ZETMI = 29.
C   ZETMA = 30.
C   VAUMI = 47.
C   VAUMA = 48.
C
C   GRENZWINKEL FUER DIE SEITLICHE VERTEILUNG
C   CPHI2 = COS(PI/4.)
C
C   KONSTANTE FUER WASSER
C   CCNST = 2.E+23/3.
C   EINFANGVERHAELTNIS FUER WASSER
C   WH = 3.5E-03
C
C   HQC = 1.9732E-11
C   EMPI = 139.580
C   EMPIC = 134.974
C   EMP = 938.256
C   EMN = 939.550
C   CTET1 = 0.
C
C   MAXIMALER WINKEL ZWISCHEN ZAEHLERACHSE UND IMPULSRICHTUNG 1
C   CTET4 = 0.5
C
```

```
DROZ(1) = ZI(1)*CONST
C
C ERZEUGUNG DER GAMMA-QUANTEN DURCH PION-LADUNGS-AUSTAUSCH
C BEI ENERGIEN GROESSER NULL
C
C BEGINN DER INTEGRATION UEBER DIE ENERGIEVERTEILUNG
C
DO 50 I=1,96
  FV(I) = 0.
  HVS(I) = 0.
  HVZ(I) = 0.
  HSS(I) = 0.
  HVSS(I) = 0.
  F(I) = 0.
  FZ(I) = 0.
50 HS(I) = 0.
  IN = 1
19 E = EO-EQI(IN)-3.*SIGI(IN)
  WRITE (6,93)
93 FORMAT (1H , 'INTERVALL ENERGIE HAEUFIGKEIT INTEGRAL WQ ENERGI
  1E CTET3',/)
C
C ABSCHNEIDEPARAMETER DER ENERGIE NACH UNTEN (WILLKUERLICH)
C
IF (E-2.) 41,40,40
41 E = 2.
40 FF = 0.
  EMAX = EO-EQI(IN)+3.*SIGI(IN)
  DE = SIGI(IN)/5.
  2 F = (1./(SIGI(IN)*WPI))*EXP(-1.*(E-(EO-EQI(IN))))**2/SIGI(IN)**2)
  FF = FF + F*DE
  PPIC = SQRT(E**2+2.*E*EMPI)
  WRITE (6,95) IN,E,F,FF
95 FORMAT (I4,F7.2,2E15.5)
C
C BERECHNUNG DER WINKELVERTEILUNG
C
ETA = (PPIC/EMPI)/SQRT(1.+(EMPI/EMP)**2+2.*SQRT((PPIC/EMP)**2+
1(EMPI/EMP)**2))
  C1 = 0.17*ETA
  C3 = -0.107*ETA
  D11 = 0.05*ETA**3.
  D13 = -0.14*ETA**3.
  D31 = -0.041*ETA**3.
  D33 = 0.217*ETA**3.
  A = (2./9.)*(SIN(D3)**2+SIN(D1)**2-2.*SIN(D1)*SIN(D3)*COS(D3-D1)+
1SIN(D33)**2+SIN(D11)**2+2.*SIN(D11)*SIN(D33)*COS(D33-D11)
2+SIN(D13)**2+SIN(D31)**2+2.*SIN(D13)*SIN(D31)*COS(D13-D31)
3-2.*(SIN(D13)*SIN(D33)*COS(D13-D33)+SIN(D11)*SIN(D13)*COS(D13-D11)
4+SIN(D31)*SIN(D33)*COS(D13-D33)+SIN(D31)*SIN(D11)*COS(D31-D11)))
  B = (4./9.)*(SIN(D3)*(2.*SIN(D33)*COS(D33-D3)-2.*SIN(D13)*COS(D13-
1D3)+SIN(D31)*COS(D31-D3)-SIN(D11)*COS(D11-D3))
2-SIN(D1)*(2.*SIN(D33)*COS(D33-C1)-2.*SIN(D13)*COS(D13-D1)
3+SIN(D31)*COS(D31-D1)-SIN(D11)*COS(D11-D1)))
  C = (2./3.)*(SIN(D33)**2+SIN(D13)**2-2.*SIN(D13)*SIN(D33)*COS(D13
1-D33)+2.*(SIN(D31)*SIN(D33)*COS(D33-D31)-SIN(D11)*SIN(D33)*COS(D33
2-D11)-SIN(D13)*SIN(D31)*COS(D13-D31)+SIN(D11)*SIN(D13)*COS(D13
3-D11)))
  BPI = SQRT(E**2+2.*E*EMPI)/(EMPI+EMP+E)
  GPI = 1./SQRT(1.-BPI**2)
```

```
W = SQRT(2.*EMP*E+(EMPI+EMP)**2)
EMQ = (EMPI+EMP)**2+2.*EMP*E
PESTQ = ((EMQ-EMPIO**2-EMN**2)**2-4.*EMPIO**2*EMN**2)/(4.*EMQ)
XI3 = BPI*SQRT((EMPIO**2+PESTQ)/PESTQ)
```

C
C
C

INTEGRATION UEBER DIE WINKEL

```
3 TETA = 0.
ITET = 0
```

C
C
C

SCHRITTWEITE
S = 180.

```
IS = S
4 TETA = TETA + PI/S
ITET = ITET + 1
IPHI = 0
PHI = 0.
```

```
DSIG = A + B*COS(TETA) + C*COS(TETA)**2
DSIG = DSIG*HQC**2/(ETA*EMPI)**2
DOMEG = SIN(TETA)*PI**2**2./S**2
EPIC = GPI*(W**2+EMPIO**2-EMN**2+BPI*SQRT((W**2+EMPIO**2-EMN**2)
1**2-4.*W**2*EMPIO**2)*COS(TETA))/(2.*W)
BPIC = SQRT((EPIO**2-EMPIO**2))/EPIO
CTET3 = GPI*(XI3+COS(TETA))/SQRT(GPI**2*(XI3+COS(TETA))**2+SIN(TE
1TA)**2)
```

```
IF (ITET+IPHI=1) 13,51,13
51 WRITE (6,94) DSIG,EPIO,CTET3
94 FORMAT (1H,40X,3E15.5)
13 PHI = PHI+2.*PI/S
IPHI = IPHI + 1
A1(1) = 0.
A1(2) = YA/SQRT(YA**2+(ZA-ZI(IN))**2)
A1(3) = (ZA-ZI(IN))/SQRT(YA**2+(ZA-ZI(IN))**2)
```

C
C
C

ABFRAGE, CB GAMMA 1 DIE WINKELBEDINGUNG ERFUELLT

```
IF(A1(2)-CTET4) 10,42,42
42 CALL DREH (CTET3,PHI,EPIO,BPIO,CTET1)
CPHI = A1(1)/SQRT(A1(1)**2+A1(2)**2)
IF (CPHI2+CPHI) 10,10,46
46 IF (CPHI=CPHI2) 47,10,10
47 ZET = ZI(IN)-A1(3)*YB/A1(2)
ZET = ZET*2.=0.5
VAU = -1.*A1(1)*YB/A1(2)
VAU = VAU*2.+47.5
IF (ZET-ZETMI) 48,48,49
49 IF (ZET-ZETMA) 52,48,48
52 IV = VAU
IV = IV+1
W01 = (1./(4.*PI))*(1.+BPIO*CTET1)**2*(1./(1.-BPIO**2))*(YA**2
1/((ZA-ZI(IN))**2+YA**2))**1.5
W01 = W01/YA**2
HV(IV) = HV(IV)+F*DE*DROZ(IN)*DSIG*DOMEG*W01
48 IF (VAU=VAUMI) 10,10,8
8 IF (VAU=VAUMA) 9,10,10
```

C
C
C

ABFRAGE, CB GAMMA 2 IN DEN ZAEFLER FAELLT

```
9 IF (ZET) 10,10,11
```

```
11 IF(ZET-96.) 12,10,10
12 IZ = ZET
   IZ = IZ+1
   W01 = (1./(4.*PI))*(1.+BPIO*CTET1)**2*(1./(1.-BPIO**2))*(YA**2
13 1/((ZA-ZI(IN))**2+YA**2))**1.5
C
C   ZAEHLERFLAECHE 1 CM2 FUER GAMMA 1
C
   W01 = W01/YA**2
   H(IZ) = F*DE*DROZ(IN)*DSIG*COMEG*W01+H(IZ)
10 IF (IS=IPHI) 14,14,13
14 IF (IS=ITET) 15,15,4
15 E = E+DE
   IF (EMAX E) 16,16,2
16 FE(IN) = FF
C
C   ENDE DER INTEGRATION UEBER DIE WINKEL
C
   WRITE (6,100) ZI(IN),FF
100 FORMAT (//,1X,'TIEFE =',F4.1,3X,'WERT DES INTEGRALS E =',E12.5,/)
   WRITE (6,101) (H(I),I=1,96)
101 FCRMAT (1H0,8E14.5)
   WRITE (6,113)
113 FCRMAT (//,1X,'VERTEILUNG SENKRECHT DAZU',/)
   WRITE (6,101) (HV(I),I=1,96)
   WRITE (6,106)
106 FCRMAT (1H0)
   DO 102 I=1,96
   HS(I) = HS(I)+H(I)
   HVS(I) = HVS(I)+HV(I)
   HSS(I) = HSS(I)+H(I)
   HVSS(I) = HVSS(I)+HV(I)
   HV(I) = 0.
102 F(I) = 0.
   IF (N-IN) 17,18,17
18 WRITE (6,92) ZI(N)
92 FCRMAT (///,1X,'VERTEILUNG IN DER BREMSREGION BIS TIEFE ',F8.2,
19 1' CM',//)
   WRITE (6,104) (HSS(I),I=1,96)
   WRITE (6,113)
   WRITE (6,104) (HVSS(I),I=1,96)
   DO 24 I=1,96
   HSS(I) = 0.
24 HVSS(I) = 0.
17 IF (N+M-IN) 21,21,20
20 IN = IN+1
   DROZ(IN) = (ZI(IN)-ZI(IN-1))*CCNST
   GO TO 19
21 WRITE (6,103)
103 FCRMAT (1H0,'VERTEILUNG DER GAMMA AUFGRUND VON LAD.-AUSTAUSCH'//)
   WRITE (6,104) (HS(I),I=1,96)
104 FCRMAT (1H0,8E14.5)
   WRITE (6,113)
   WRITE (6,104) (HVS(I),I=1,96)
C
C   BERECHNUNG DER HAEUFIGKEITSVERTEILUNG DURCH PI-EINFANG
C
   WRITE (6,201)
201 FCRMAT (1H1,'ANTEIL DER GESTOPPTEN PIONEN'//)
   DO 200 I=1,96
```

```
200 H(I) = 0.
    J = 1
    DIFF = 1.-FE(1)
22 IF (DIFF-0.01) 36,23,23
23 EPIO = ((EMPI+EMP)**2+EMPIO**2-EMN**2)/(2.*(EMPI+EMP))
    BPIC = SQRT((EPIO**2-EMPIO**2))/EPIO
C
C   INTEGRATION UEBER DIE EMISSIONSPICHTUNG VON PI 0
C
    TETA = 0.
    ITET = 0
32 TETA = TETA+PI/S
    ITET = ITET + 1
    IPHI = 0
    PHI = 0.
    COMEG = SIN(TETA)*PI/(2.*S**2)
    IF (ITET+IPHI-1) 30,60,30
60 WRITE (6,105) J,DIFF,EPIC
105 FORMAT (I4,2E15.5)
30 PHI = PHI + 2.*PI/S
    IPHI =IPHI + 1
    CTET3 = CCS(TETA)
    A1(1) = 0.
    A1(2) = YA/SQRT(YA**2+(ZA-ZI(J))**2)
    A1(3) = -(ZA-ZI(J))/SQRT(YA**2+(ZA-ZI(J))**2)
    CALL DREH (CTET3,PHI,EPIC,BPIC,CTET1)
    CPHI = A1(1)/SQRT(A1(1)**2+A1(2)**2)
    IF (CPHI2+CPHI) 26,26,25
25 IF (CPHI-CPHI2) 27,26,26
27 ZET = ZI(J)-A1(3)*YB/A1(2)
    ZET = ZET*2.-0.5
    VAU = -1.*A1(1)*YB/A1(2)
    VAU = VAU*2.+47.5
    IF (ZET-ZETMI) 38,38,39
39 IF (ZET-ZETMA) 43,38,38
43 IV = VAU
    IV = IV+1
    W01 = (1./(4.*PI))*(1.+BPIC*CTET1)**2*(1./(1.-BPIC**2))*(YA**2
1/((ZA-ZI(J))**2+YA**2))**1.5
    W01 = W01/YA**2
    HV(IV) = HV(IV)+W01*DCMEG*WH*DIFF
38 IF (VAU-VAUMI) 26,26,44
44 IF (VAU-VAUMA) 45,26,26
C
C   ABFRAGE, CB GAMMA 2 IN DEN ZAEHLER FAELLT
C
45 IF (ZET) 26,26,28
28 IF (ZET-96.) 29,26,26
29 IZ = ZET
    IZ = IZ + 1
    W01 = (1./(4.*PI))*(1.+BPIC*CTET1)**2*(1./(1.-BPIC**2))*(YA**2
1/((ZA-ZI(J))**2+YA**2))**1.5
    W01 = W01/YA**2
    H(IZ) = H(IZ) + W01*DCMEG*WH*DIFF
26 IF (IS-IPHI) 31,31,30
31 IF (IS-ITET) 33,33,32
33 WRITE (6,110) J,DIFF
110 FORMAT(IHQ,'INTERVALL = ',I3,'GESTOPPTE PIONEN = ',E11.4,/)
    WRITE (6,111) (H(I),I=1,96)
111 FORMAT (1F0,8E14.5)
```

```
WRITE (6,113)
WRITE (6,111) (HV(I),I=1,96)
DO 34 I=1,96
HS(I) = HS(I) + H(I)
HZ(I) = HZ(I) + H(I)
HVS(I) = HVS(I)+HV(I)
HVZ(I) = HVZ(I)+HV(I)
IF (N=J) 53,54,54
53 HSS(I) = HSS(I) + H(I)
HVSS(I) = HVSS(I) + HV(I)
54 HV(I) = 0.
34 F(I) = 0.
36 IF (N+M=J) 35,35,37
37 J = J+1
DIFF = FE(J-1)-FE(J)
GO TO 22
35 WRITE (6,107)
107 FORMAT (///,1X,'VERTEILUNG DER GAMMA-QUANTEN NACH EINFANG UND LAD.
1=AUSTAUSCH',//)
WRITE (6,104) (HZ(I),I=1,96)
WRITE (6,113)
WRITE (6,104) (HVZ(I),I=1,96)
WRITE (6,114)
114 FORMAT (///,1X,'VERTEILUNG IN DER EINFANGREGION',//)
WRITE (6,104) (HSS(I),I=1,96)
WRITE (6,113)
WRITE (6,104) (HVSS(I),I=1,96)
WRITE (6,112)
112 FORMAT (///,1X,'VERTEILUNG ALLER GAMMA-QUANTEN',//)
WRITE (6,104) (HS(I),I=1,96)
WRITE (6,113)
WRITE (6,104) (HVS(I),I=1,96)
STOP
END
```

```
C      UNTERPROGRAMM FUER KOORDINATENTRANSFORMATIONEN
C
C      SUBROUTINE DREH (CTET3,PHI3,EPIO,BPIO,CTET1)
C
      DIMENSION A1(3),A2(3),A3(3),A4(3),DZ(3,3),DY(3,3),DZS(3,3),D1(3,3)
      COMMON A1
      CALL FSPIE
      DO 1 I=1,3
      A2(I) = 0.
      A3(I) = 0.
1     A4(I) = 0.
      DZ(1,1) = COS(PHI3)
      DZ(1,2) = SIN(PHI3)
      DZ(1,3) = 0.
      DZ(2,1) = -SIN(PHI3)
      DZ(2,2) = COS(PHI3)
      DZ(2,3) = 0.
      DZ(3,1) = 0.
      DZ(3,2) = 0.
      DZ(3,3) = 1.
      DY(1,1) = CTET3
      DY(1,2) = 0.
      DY(1,3) = SQRT(1.-CTET3**2)*(-1.)
      DY(2,1) = 0.
      DY(2,2) = 1.
      DY(2,3) = 0.
      DY(3,1) = SQRT(1.-CTET3**2)
      DY(3,2) = 0.
      DY(3,3) = CTET3
      DO 5 I =1,3
      DO 5 J=1,3
5     A2(I) = DZ(I,J)*A1(J)+A2(I)
      DO 6 I=1,3
      DO 6 J=1,3
6     A3(I) = DY(I,J)*A2(J)+A3(I)
      DO 2 I=1,3
2     A1(I) = 0.
      AA = SQRT(1.-A3(3)**2)
      IF (AA-1.E-10) 3,3,4
3     DZS(1,1) = 1.
      DZS(1,2) = 0.
      GO TO 8
4     DZS(1,1) = A3(1)/AA
      DZS(1,2) = A3(2)/AA
8     DZS(1,3) = 0.
      DZS(2,1) = -1.*DZS(1,2)
      DZS(2,2) = DZS(1,1)
      DZS(2,3) = 0.
      DZS(3,1) = 0.
      DZS(3,2) = 0.
      DZS(3,3) = 1.
      CTET1 = (BPIO-A3(3))/(BPIO*A3(3)-1.)
      CTET2 = (BPIO-CTET1)/(1.-BPIO*CTET1)
      CALL FSPIE
C
C      VEKTOR VON GAMMA 2 IM GEDREHTEN KOORDINATENSYSTEM
C
      A4(1) = -1.*SQRT(1.-CTET2**2)
      A4(2) = 0.
      A4(3) = CTET2
```

```
D1(1,1) = DY(1,1)*DZ(1,1)*DZS(1,1)-DZ(1,2)*DZS(1,2)
D1(1,2) = DY(1,1)*DZ(1,1)*DZS(2,1)-DZ(1,2)*DZS(1,1)
D1(1,3) = DY(3,1)*DZ(1,1)
D1(2,1) = DY(1,1)*DZ(1,2)*DZS(1,1)+DZ(1,1)*DZS(1,2)
D1(2,2) = DY(1,1)*DZ(1,2)*DZS(2,1)+DZ(1,1)*DZS(1,1)
D1(2,3) = DY(3,1)*DZ(1,2)
D1(3,1) = DY(1,3)*DZS(1,1)
D1(3,2) = DY(3,1)*DZS(1,2)
D1(3,3) = DY(1,1)
DO 7 I=1,3
DO 7 J=1,3
7 A1(I) = D1(I,J)*A4(J)+A1(I)
RETURN
END
```

Literaturverzeichnis

- |1| L.I. Ponomarev, Ann. Rev. Nucl. Sci. 23(1973)395
- |2| J. Sperinde, L.E. Temple, V. Perez-Mendez, A.J. Miller
and A. Rindi, Nucl. Instr. & Meth. 97 (1971) 331
- |3| G. Backenstoss, private Mitteilung
- |4| C. Tschalär, Nucl. Instr. & Meth. 61 (1968) 141
- |5| W.O. Lock and D.F. Measday, Intermediate Energy
Nuclear Physics, Methuen & Co Ltd., London 1970, p. 91
- |6| K. Miyake, K.F. Kinsey and D.E. Knapp, Phys. Rev. 126 (1962)2188