KfK 2795
Mai 1979

Überblick über Methoden der linearen Vektoroptimierung

P. Fiala, H. Stehfest
Abteilung für Angewandte Systemanalyse

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Abteilung für Angewandte Systemanalyse

KfK 2795

ÜBERBLICK ÜBER METHODEN DER LINEAREN VEKTOROPTIMIERUNG

P. Fiala+)
H. Stehfest

+) Hochschule für Ökonomie, Prag

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

Überblick über Methoden der linearen Vektoroptimierung

P. Fiala, H. Stehfest

Zusammenfassung:

Die wichtigsten Begriffe der Vektoroptimierung werden diskutiert. Besonders wird auf die effiziente (pareto-optimale) Untermenge des Zulässigkeitsbereiches und ihre Eigenschaften eingegangen. Die Verfahren zur Lösung des Vektormaximumproblems werden in drei Klassen eingeteilt:

- Verfahren, die zunächst die effiziente Untermenge vollständig bestimmen
- interaktive Verfahren
- Verfahren, die eine skalare Ersatzzielfunktion benutzen

Typische Beispiele für die drei Klassen werden skizziert, wobei der lineare Fall im Vordergrund steht. Schließlich werden die verschiedenen Verfahren im Hinblick auf Praktikabilität und gesellschaftspolitische Akzeptanz verglichen.

Survey of Techniques for Solving Linear Vector Maximum Problems

P. Fiala, H. Stehfest

Abstract:

The essential concepts of vector optimization are discussed. Particular emphasis is placed on the efficient (pareto-optimal) subset of the feasibility region and its properties. The techniques for solving the vector maximum problem are divided into three classes:

- techniques which first determine the efficient subset completely
- interactive techniques
- techniques which convert the problems into an ordinary optimizing problem

Typical examples for each class are outlined, most of them being related to the linear case. Finally, the various techniques are compared as to practicability and social desirability.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Viele Entscheidungsprobleme sind mehrdimensional, d.h. mit der Entscheidung werden mehrere, im allgemeinen inkompatible Ziele gleichzeitig verfolgt. Das Aufsuchen der besten Entscheidung in einer solchen Situation nennt man Vektoroptimierung. Für die Optimierung eines Modells für das Energieversorgungssystem von Baden-Württemberg wurden beispielsweise folgende Ziele identifiziert (Fürniß et al., 1979), die sich zum Teil wiederum in Unterziele gliedern:

1. Geringe Kosten
2. Geringe Umweltbeeinträchtigung
3. Geringe Importabhängigkeit
4. Hohe Vielfalt des Energieangebots
5. Geringe Unfallträchtigkeit

Im folgenden wird ein Überblick über die zahlreichen Verfahren zur formalen Lösung derartiger Probleme gegeben. Dabei wird besonders auf den linearen Fall eingegangen. Ein kritischer Vergleich der Verfahren führt auf den nutzentheoretischen Ansatz, der für die Behandlung des obengenannten energiepolitischen Entscheidungsproblems ausgewählt wurde.

2. Problemdefinition, effiziente Lösungen, Klassifizierung der Verfahren

Ein Vektormaximierungsproblem läßt sich formal wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} &\text{"max"} \quad z\,(x) \\ &\;x \in X \\ &\;X = \left\{ x \in R^n \;\middle|\; g\,(x) \leq 0,\; g\,(x) \in R^m \right\} \end{aligned} \tag{1}$$

Die Menge X der Entscheidungsvektoren x ist der sogenannte Zulässigkeitsbereich des Entscheidungsproblems, er wird stetig abgebildet auf den Bereich Z von p-dimensionalen Zielvektoren z. Durch das Symbol "max" wird ausgedrückt, daß eine Maximierung jeder einzelnen Komponente des Zielvektors z angestrebt wird.

Ein lineares Vektormaximierungsproblem liege vor, wenn sich Problem (1) in der folgenden Form schreiben läßt:

$$\begin{aligned} &\text{"max"} \; \left\{ z\,(x) = C\,x \right\} \\ &\;x \in X \\ &\;X = \left\{ x \in R^n \;\middle|\; A\,x \leq b,\; x \geq 0 \right\} \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei sind A und C Matrizen, b ist ein Vektor. (Die Relation $a \leq b$ zwischen zwei Vektoren a und b besagt, daß für alle Komponenten $a_i \leq b_i$ gilt. Wird $a < b$ geschrieben, so gilt die strikte Ungleichheit für mindestens eine Komponente.)

Häufig kann man sich bei der Lösung des Entscheidungsproblems auf die Betrachtung der sogenannten effizienten Lösungen (auch pareto-optimale Lösungen genannt) beschränken.

Definition:

Eine zulässige Lösung x^o des Entscheidungsproblems wird effizient genannt, wenn es keine andere Lösung $x \in X$ gibt, so daß

$$z(x) > z(x^o).$$

Das heißt, keine Komponente des Zielvektors kann vergrößert werden ohne gleichzeitig eine andere Komponente zu verkleinern. Die Menge der effizienten Lösungen sei E, ihr Komplement bezüglich X sei N.

Satz 2.1

Wenn X konvex ist und alle Zielfunktionen $z_k(x)$ konkav sind, so gilt: x^o ist eine effiziente Lösung des Problems (1) genau dann, wenn es ein $t > 0$ gibt, so daß x^o die Optimallösung von

$$\begin{array}{l} \max\, t^T z(x) \\ x \in X \end{array} \qquad (3)$$

ist. Ohne die beiden Voraussetzungen gilt: jede Lösung von (3) ist effizient.

Dieser Satz zeigt einen relativ einfachen Weg, effiziente Lösungen des Entscheidungsproblems zu finden. Allerdings braucht (bei unbeschränktem Zulässigkeitsbereich) nicht jedes Problem (3) eine endliche Lösung zu haben. Ein ähnliches Verfahren zum Auffinden effizienter Lösungen bietet der Satz 2.2.

Satz 2.2

Die Lösung des Problems

$$\max \quad z_i(x) \tag{4}$$

mit

$x \varepsilon X$

$z_j \geq z_j^o \qquad \forall j \neq i, \quad z_j^o$ willkürlich

ist eine effiziente Lösung des Problems (1).

Für die Menge E der effizienten Lösungen lassen sich im linearen Fall folgende Sätze beweisen (Yu und Zeleny, 1975):

Satz 2.3

Die Menge $N = X - E$ ist konvex.

Die Menge der effizienten Eckpunkte des konvexen Polyeders X sei E_{ex}. Ihre konvexe Hülle sei $H(E_{ex})$.

Satz 2.4

$E \subseteq H(E_{ex})$

Im allgemeinen ist $E \neq H(E_{ex})$. (Selbst die konvexen Kombinationen benachbarter effizienter Eckpunkte brauchen nicht effizient zu sein.) Es sei $G(E_{ex}, P)$ der ungerichtete Graph, dessen Knoten die effizienten Eckpunkte sind und dessen Kanten die Kanten des Polyeders X repräsentieren, die effiziente Eckpunkte verbinden.

Satz 2.5

Der Graph G (E_{ex}, P) ist zusammenhängend.

Dieser Satz erleichtert die Bestimmung der Menge E_{ex} sehr.

Satz 2.6

$$E = \bigcup_{i=1}^{J} K_i ,$$

wobei K_i konvexe Polyeder sind.

Die bisher behandelten Begriffe und Sätze seien am zweidimensionalen, linearen Beispiel der Abb. 1 verdeutlicht. Die Matrix C in (2) sei die Einheitsmatrix,

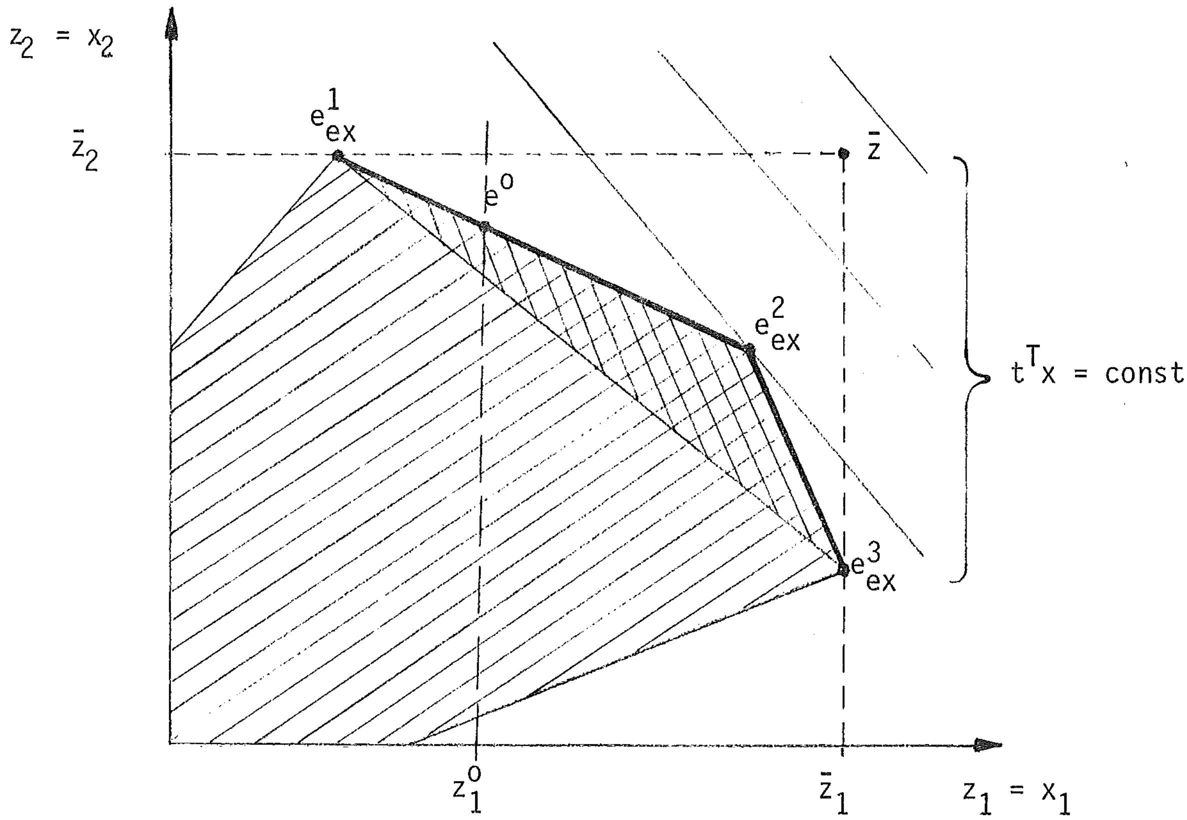

Abb. 1 Veranschaulichung von Begriffen und Sätzen zum linearen Vektoroptimierungsproblem

so daß die Entscheidungsvariablen mit den Zielfunktionen identisch sind. Die stark ausgezogenen Kanten des (schraffierten) Zulässigkeitsbereiches sind die effizienten Lösungen, die doppelt schraffierte Fläche ist die konvexe Hülle der effizienten Eckpunkte e^i_{ex}, i=1,2,3, die die Menge E_{ex} bilden. Der Eckpunkt e^2_{ex} ist dargestellt als Lösung des Problems (3) (Satz 2.1), während e^o eine effiziente Lösung ist, die gemäß Satz 2.2 gewonnen wurde. Auf den Punkt $\bar{z}$, die sogenannte Ideallösung, wird in Abschnitt 5 eingegangen.

Aufgrund der bisher eingeführten Begriffe lassen sich die Verfahren zur Lösung des Vektoroptimierungsproblems (1) bzw. (2) wie folgt klassifizieren:

- Es wird zunächst die Menge E der effizienten Lösungen bestimmt, aus ihr wird dann eine Lösung als sogenannter bester Kompromiß ausgewählt.

- Der beste Kompromiß wird durch Interaktion mit dem Entscheidungsträger iterativ ermittelt, ohne daß die gesamte Menge E bestimmt wird. Bei jeder Iteration wird die Lösung im Sinne der Präferenzen des Entscheidungsträgers verbessert, wobei man im allgemeinen dafür sorgt, daß man sich nur innerhalb der Menge E bewegt.

- Es wird eine skalare Ersatzzielfunktion $\Gamma(z(x))$ bestimmt, die (statt z(x)) maximiert wird, wodurch Problem (1) in ein gewöhnliches Optimierungsproblem umgewandelt wird. Auch hier wird man im allgemeinen darauf achten, daß die Lösung des modifizierten Problems effizient bezüglich des ursprünglichen Problems ist.

3. Bestimmung aller effizienten Lösungen und anschließende Kompromißfindung

Im linearen Fall lassen sich bei allen Verfahren zur Bestimmung der Menge E drei Schritte unterscheiden:

1. Schritt: Bestimmung eines effizienten Eckpunktes

2. Schritt: Ausgehend von diesem Eckpunkt Bestimmung der gesamten Menge E_{ex}

3. Schritt: Konstruktion der Menge E.

Dieses Vorgehen basiert auf Satz 2.5, der sicherstellt, daß man, ausgehend von einem effizienten Eckpunkt, alle anderen effizienten Eckpunkte findet, wenn man jeweils alle benachbarten Eckpunkte **auf** ihre Effizienz untersucht

Die Bestimmung eines effizienten Eckpunktes kann zum Beispiel gemäß den Sätzen 2.1 oder 2.2 geschehen. Dabei ist zu beachten, daß bei Anwendung von Satz 2.1 für einen willkürlich gewählten Vektor t unter Umständen kein endlicher Optimalwert erhalten wird, wenn X unbeschränkt ist. Bei Anwendung von Satz 2.2 ist zu bedenken, daß der gefundene Effizienzpunkt e^o zwar ein Eckpunkt des entsprechend Satz 2.2 eingeschränkten Zulässigkeitsbereiches X', aber im allgemeinen kein Eckpunkt von X ist. Da aber e^o gemäß Satz 2.6 eine konvexe Kombination von effizienten Eckpunkten aus X ist, und e^o auch effizient bezüglich X' ist, gelangt man jedenfalls zu einem effizienten Eckpunkt von X, wenn man zunächst entsprechend dem 2. Schritt die benachbarten Eckpunkte von e^o auf dem Bereich X' auf Effizienz untersucht.

Nach der Bestimmung eines effizienten Eckpunktes bestimmt man mittels einer verallgemeinerten Simplexmethode, der sogenannten multikriterialen Simplexmethode, die benachbarten Eckpunkte, die effizient sind. Von diesen ausgehend untersucht man wiederum alle benachbarten Eckpunkte, die noch nicht untersucht wurden, auf Effizienz usw. Bei der multikriterialen Simplexmethode ergänzt man, wie bei der gewöhnlichen, das Restriktionensystem

$$A\,x \leq b$$

durch Schlupfvariable so, daß Gleichungen entstehen, führt die Schlupfvariablen mit Nullkoeffizienten in die Zielfunktion ein und schreibt Gleichungssystem und Zielfunktion in einer Weise, die es gestattet, gezielt von Ecke zu Ecke des Zulässigkeitsbereiches fortzuschreiten. Der einzige Unterschied besteht darin, daß das Simplextableau anstelle einer Zielfunktion einen Zielvektor (C x) enthält. Das heißt, das Simplextableau hat folgende Gestalt:

$B^{-1}\,A$	B^{-1}	$B^{-1}\,b$
$C_B\,B^{-1}\,A - C$	$C_B\,B^{-1}$	$C_B\,B^{-1}\,b$

Dabei bedeutet B die der jeweiligen Ecke zugeordnete Basis (d.h. nichtsinguläre Kombination von Spalten aus $[A, I]$) und C_B besteht aus den Spalten der Matrix $[C, 0]$, die den Basisvariablen entsprechen. Die erste Spalte des Tableaus entspricht den ursrünglichen Variablen, die zweite den Schlupfvariablen und die dritte den rechten Seiten der Restriktionen bzw. den Zielfunktionswerten. Beim Übergang von der durch B repräsentierten Ecke zu einer benachbarten wird genau eine Basisvariable gegen eine Nichtbasisvariable ausgetauscht.

In Yu und Zeleny (1975) sind eine Reihe von Kriterien angegeben, anhand derer man in vielen Fällen dem multikriterialen Simplextableau eines effizienten Eckpunktes direkt entnehmen kann, ob ein benachbarter Eckpunkt effizient ist oder nicht. In manchen Fällen muß man jedoch für den untersuchten benachbarten Eckpunkt x_0 ein zusätzliches lineares Optimierungsproblem lösen, nämlich

$$\max e s \tag{5}$$

unter den Nebenbedingungen

$$A x \leq b$$

$$C x \geq C x_0 + I s$$

$$x \geq 0, \; s \geq 0$$

Dabei ist I die p-dimensionale Einheitsmatrix, $e = [1,1,\ldots, 1]^T$ und s ein ebenfalls p-dimensionaler Vektor. Offensichtlich ist x_0 effizient genau dann, wenn $\max e^T s = 0$ ist; denn die zweite Gruppe von Nebenbedingungen besagt, daß in diesem Fall keine Komponente von $C x_0$ vergrößert werden kann, ohne daß eine andere verkleinert wird.

Nachdem man so die Menge E_{ex} bestimmt hat, läßt sich daraus die Menge E konstruieren. Da im allgemeinen $E \neq H(E_{ex})$ (siehe Satz 2.4), ist dies keine triviale Aufgabe. Sie wird in Yu und Zeleny (1975) so gelöst, daß zunächst die Schnittgebilde $X \cap \{x \mid A_{i.} x = b_i\}$ (Hyperflächen von X), die aufgrund von E_{ex} infrage kommen, daraufhin untersucht werden, ob sie ganz zu E gehören. (Es sei $E \neq X$. Das Symbol $A_{i.}$ bedeutet die i-te Zeile von A, b_i die i-te Komponente von b.) Dann werden die infrage kommenden Hyperkanten, die keiner effizienten Hyperfläche angehören, auf Effizienz untersucht usw. Auf diese Weise erhält man die konvexen Polyeder K_i aus Satz 2.6 bei minimalem s. Sie sind konvexe Hülle von Punkten aus E_{ex}.

Das heißt, die Menge E wird schließlich dargestellt als Menge von Untermengen von E_{ex}, die jeweils (über ihre konvexe Hülle einen Teil von E definieren.

Andere Verfahren zur Bestimmung der effizienten Untermenge E von X aus (2) werden beispielsweise in Gal (1976), Isermann (1977) (siehe auch Isermann (1978)) und Tamura (1976) beschrieben. Da sie alle derselben Grundidee folgen, sollen sie hier nicht näher beschrieben werden.

Die Menge E wird oft als "vollständige Lösung des Vektoroptimierungsproblems" bezeichnet, obwohl sie das eigentliche Entscheidungsproblem meist nicht löst, weil noch mehrere Entscheidungsvektoren $x \in E$ zur Auswahl stehen. Die Bezeichnung ist jedoch insofern berechtigt, als die Effizienzmenge E oft der Endpunkt der formalen Entscheidungsanalyse ist. Das Aufsuchen einer Kompromißlösung auf der Basis von E erfolgt dann intuitiv oder, wenn es sich um ein Gruppenentscheidungsproblem handelt, in einem Diskussionsprozeß. Wenn man die formale Analyse bis zu einem einzigen Entscheidungsvektor treiben will, bietet die Bestimmung von E rechentechnisch im allgemeinen keine Vorteile, vielmehr kann man dann direkt von der Menge X ausgehen. Höchstens für die Interpretation der so gefundenen Lösung kann es sinnvoll sein, die übrigen effizienten Lösungen zu kennen. Jedenfalls ist das Vorgehen zur algorithmischen Bestimmung der Kompromißlösung im wesentlichen unabhängig davon, ob man von E oder X ausgeht. Es handelt sich dabei um die Definition und Lösung eines gewöhnlichen Optimierungsproblems über E bzw. X. Es wird, falls man von X ausgeht, als Ersatzproblem für das Vektormaximumproblem (1) (bzw. (2)) bezeichnet. Einige typische Ersatzprobleme werden in Abschnitt 5 behandelt.

4. Interaktive Verfahren

Als typisches Beispiel eines interaktiven Verfahrens zur Lösung mehrdimensionaler Entscheidungsprobleme sei hier das von Zionts und Wallenius (1976) angegebene näher erläutert. Es geht vom Vektormaximumproblem (1) mit konvexem Zulässigkeitsbereich und konkaven Zielfunktionen $z_i(x)$ aus. Ihm liegt die Vorstellung zugrunde, daß die Präferenzen zwischen verschiedenen Werten $z \in Z$ durch eine Funktion $t^T z$ beschrieben werden können. Mit anderen Worten, die Indifferenzhyperflächen im Zielraum seien die Hyperebenen $t^T z = c$ für verschiedene c, so daß die Lösung des mehrdimensionalen Entscheidungsproblems durch das Maximum von $t^T z$ über Z gegeben ist. Wegen Satz 2.1 ist diese Lösung effizient. Im Laufe des Verfahrens wird durch Befragung des interagierenden Entscheidungsträgers der unbekannte Wert von t sukzessive eingegrenzt.

Wegen der Konvexität von X und der Konkavität aller $z_i(x)$ läßt sich das zugrundeliegende Problem zunächst durch ein lineares Vektormaximumproblem vom Typ (2) approximieren:

$$\text{"max" } z \tag{6a}$$

unter den Bedingungen

$$A\,x \leq b \tag{6b}$$

$$z_i \leq C^j_{i.}\,x + d^j_i \quad , \quad i = 1,2,\dots p, \quad j = 1,2,\dots g(i) \tag{6c}$$

$$x\ ,\ z \geq 0 \tag{6d}$$

Dabei stellen die Restriktionen vom Typ (6c) bei festem i und bei Gültigkeit des Gleichheitszeichens die Hyperebenen im

(z_i, x)-Raum dar, mit denen die ursprüngliche Zielfunktion $z_i(x)$ approximiert wird. Es wird nun das Ersatzproblem

$$\max t^T z \tag{7}$$

mit den Nebenbedingungen (6b - 6d) gelöst, wobei der Gewichtsvektor t irgendwie geschätzt wird, so daß

$$\sum_{i=1}^{p} t_i = 1 \tag{8a}$$

$$t_i \geq 0 \quad \forall i \tag{8b}$$

gilt. Es ergibt sich (siehe Satz 2.1) ein effizienter Eckpunkt des Zulässigkeitsbereiches von (6). Für diese Ecke werden alle Basistausche betrachtet, die zu effizienten, benachbarten Eckpunkten führen. Bei der Auswahl der Nichtbasisvariablen, die bei Einführung in die Basis zu einer effizienten Nachbarecke führen, sind ähnliche Überlegungen anzustellen wie bei der Bestimmung der Menge E_{ex} in Abschnitt 3. Die Änderung des Zielvektors z' bei Einführung der Nichtbasisvariablen mit dem Index j in die Basis sei Δz_j. Der Entscheidungsträger wird nun für alle Nichtbasisvariablen, die zu effizienten Nachbarecken führen, gefragt, ob er der Zielniveaukombination z' die Kombination $z' + \Delta z_j$ vorzieht. Wenn ja, wird für Berechnung eines verbesserten Gewichtsvektors t die Nebenbedingung

$$\Delta z_j^T t \geq 0 \tag{8c}$$

formuliert, falls nein, wird die Nebenbedingung

$$\Delta z_j^T t \leq 0 \tag{8d}$$

benutzt, falls schließlich Indifferenz besteht, wird das Gleichheitszeichen gewählt. Auf den linken Seiten dieser Ungleichungen steht das Skalarprodukt des Vektors Δz_j mit einem Vektor, der senkrecht auf den Zielfunktionshyperebenen

$$t^T z = c$$

(siehe Gl. (7)) steht. Das heißt, in den Nebenbedingungen ist unmittelbar festgehalten, ob die Zielfunktion $t^T z$ längs der Kante von z' nach $z' + \Delta z_j$ zunimmt, abnimmt oder gleichbleibt. Nachdem der Entscheidungsträger seine Präferenzen zwischen z' und $z' + \Delta z_j$ für alle j konstatiert hat und entsprechende Nebenbedingungen vom Typ (8c, 8d) formuliert sind, wird mittels linearer Programmierung eine zulässige Lösung des Restriktionensystems (8) ermittelt. Mit dem so erhaltenen Vektor t wird erneut das Problem (7) gelöst, das wieder zu einem effizienten Eckpunkt führt, an dem die gleichen Präferenzfragen gestellt werden wie bei der vorhergehenden Ecke. Aufgrund der alten und neuen Restriktionen vom Typ (8) wird dann erneut ein zulässiger Vektor t bestimmt. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis man an eine Ecke gelangt, die gegenüber allen Nachbarecken präferiert wird.

Es läßt sich zeigen, daß das Verfahren in endlich vielen Schritten zu dieser Ecke höchster Präferenz führt. Allerdings nimmt das Präferenzniveau nicht notwendig bei jedem Iterationsschritt zu. Das Verfahren läßt sich mit leichten Modifikationen auch anwenden, wenn man statt der Zielfunktion $t^T z$ eine nichtlineare, konkave Zielfunktion postuliert. Die wesentliche Änderung gegenüber dem linearen Fall besteht darin, daß die Restriktionen vom Typ (8c, 8d), die bei früheren Iterationsschritten gewonnen wurden, nicht mehr verwendet werden, wenn die sich aus (7) ergebende Lösung der alten Lösung vorgezogen wird. Der am Schluß sich ergebende Vektor t beschreibt im nichtlinearen Fall natürlich nur das lokale Verhalten der Zielfunktion (Tangentialebene).

Weitere Verfahren zur interaktiven Lösung des mehrdimensionalen Entscheidungsproblems findet man beispielsweise in Fandel (1972) sowie Chankong und Haimes (1978).

5. Ersatzprobleme für die Vektoroptimierung

Bei diesem Verfahren wird über dem Zielbereich Z eine streng monoton wachsende, skalare Funktion $\Gamma(z)$, definiert, deren Maximum als Lösung des Entscheidungsproblems angesehen wird. Das Hauptproblem ist dabei die Wahl der Funktion $\Gamma(z)$, die Lösung des sich dann ergebenden gewöhnlichen Optimierungsproblems ist eine rein technische Angelegenheit.

Schon bei den interaktiven Verfahren wird die Existenz einer subjektiv determinierten Ersatzzielfunktion vorausgesetzt, bei dem in Abschnitt 4 beschriebenen Verfahren hat sie zum Beispiel die Gestalt $t^T z$ (siehe Gl. (7)). Sie ist jedoch nur implizit gegeben, und selbst im linearen Fall ist sie auch nach Auffindung des Optimums i.a. nicht vollständig bekannt. Eine Möglichkeit zur Definition einer Ersatzzielfunktion besteht darin, diese sogenannte Präferenzfunktion vor einer Lösung des Entscheidungsproblems durch Befragung explizit zu bestimmen. Die Funktion gibt dann für jedes Paar $\{ z', z'' \} \subset Z$ durch die Differenz der Funktionswerte zu erkennen, ob z' oder z'' vorgezogen wird. Offensichtlich ist eine derartige Präferenzfunktion nur bis auf streng monoton wachsende Transformationen bestimmt, denn eine solche Transformation ändert nichts an den Indifferenzhyperflächen im Zielraum. Eine Eindeutigkeit bis auf positive lineare Transformationen erhält man, wenn man von der Präferenzfunktion verlangt, daß im Falle der Unsicherheit (bezüglich z) ihr Erwartungswert maßgebend für die Präferenzen ist. In diesem Fall handelt es sich um eine sogenannte Nutzenfunktion im Sinne von Keeney und Raiffa (1976).

Über Nutzenfunktionen gibt es zahlreiche theoretische Untersuchungen, und die Techniken zu ihrer Schätzung sind sehr ausgefeilt (siehe Keeney und Raiffa (1976), Hoch et al. (1979)). Bemerkenswert ist vor allem, daß unter ziemlich milden Voraussetzungen bewiesen wurde, daß die Nutzenfunktion u(z) die folgende, recht einfache Gestalt hat:

$$1 + k\,u(z) = \prod_{i=1}^{p} \left(1 + k\,k_i\,u_i\,(z_i) \right) \tag{9}$$

wobei die u_i und u zwischen 0 und 1 normiert sind und k sich aus

$$1 + k = \prod_{i=1}^{p} \left(1 + k\,k_i \right)$$

ergibt. Im Falle k = 0 geht (9) in die noch einfachere Form

$$u(z) = \sum_{i=1}^{p} k_i\,u_i\,(z_i)$$

über. Die z_i in (9) können wiederum Vektoren sein, deren Einzelnutzenfunktionen u_i auch von der Gestalt (9) sind.

Entsprechend der einfachen Darstellung (9) läßt sich die Nutzenfunktion auch durch einfache Fragen schätzen. So müssen vom Entscheidungsträger nur Präferenzen zwischen z-Vektoren konstatiert werden, die sich in höchstens zwei Komponenten unterscheiden; bei den Präferenzfragen, die Unsicherheiten (Lotterien) beinhalten, unterscheiden sich die zu betrachtenden z-Vektoren sogar nur in einer Komponente. Damit wird das Hauptproblem bei der Kompromißfindung entschärft, das in der Notwendigkeit besteht, Alternativen zu vergleichen, die sich hinsichtlich vieler Zielkriterien unterscheiden. (Das ist auch die Hauptschwierigkeit bei dem in Abschnitt 4 beschriebenen Verfahren.)

Bei der eben beschriebenen Methode, eine skalare Ersatzzielfunktion zu definieren, wird konsequent dem Grundsatz gefolgt, daß die Präferenzen über den Zielfunktionen z_i subjektiv determiniert sind und daher durch individuelle Befragung zu ermitteln sind. (Das gilt im Prinzip auch für die Auswahl der z_i, allerdings läßt sich da eher eine intersubjektive Verbindlichkeit erreichen.) Oft wird jedoch vom Entscheidungsanalytiker mehr oder weniger willkürlich eine vernünftig erscheinende Ersatzzielfunktion definiert, die dann als Gruppenpräferenzfunktion interpretiert wird. In diese Kategorie gehören auch die Gruppennutzenfunktionen, die gewonnen werden durch Aggregation von individuellen Nutzenfunktionen, die nach dem obengenannten Verfahren geschätzt wurden, es sei denn, die Aggregationsregeln entsprächen einem Gruppenkonsens. Diese Aggregation kann beispielsweise als Linearkombination erfolgen (siehe etwa Keeney und Raiffa (1976), Keeney (1976), Kirkwood (1978)):

$$u(z) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, u_i \, (z) \qquad (10)$$

wobei sich der Index i auf die verschiedenen Individuen bezieht.

In den meisten Fällen einer postulierten Ersatzzielfunktion handelt es sich jedoch um ein Abstandsmaß bezüglich eines bestimmten Punktes im Zielraum, das zu minimieren ist (Zielprogrammierung). Ein solcher Punkt kann zum Beispiel die in Abb. 1 gezeigte Ideallösung $\bar{z}$ sein, d.h. der Punkt

$$z^1 = \bar{z} = \left[\max_{x \in X} z_1 , \max_{x \in X} z_2 , \quad \dots , \max_{x \in X} z_p \right]^T \tag{11}$$

Als Abstandsmaß dient oft ein Ausdruck der Gestalt

$$d = \left(\sum_{i=1}^{p} | z_i^1 - z_i |^r \right)^{1/r} , \quad r \geq 1 \tag{12}$$

In diesem Fall ist allerdings die Lösung des Entscheidungsproblems von den gewählten Maßeinheiten für die z_i abhängig. Um dem abzuhelfen, bietet sich an, zur Abstandsdefinition einen weiteren Punkt z^o im Zielraum heranzuziehen und alle Koordinatendifferenzen auf diesen Punkt zu beziehen. Dieser zweite Punkt könnte, in Analogie zur Definition von z^1 gemäß Gl. (11),

$$z^o = \left[\min_{x \in X} z_1 , \min_{x \in X} z_2 , \quad \dots , \min_{x \in X} z_p \right]^T \tag{13}$$

sein (siehe zum Beispiel Körth (1969)). Man kann ihn aber auch durch Mindestzielerreichungsgrade, zum Beispiel Standards für Umweltbelastungen (Jansen (1977)), definieren. Das maßstabsunabhängige Analogon zur Definition (12) ist

$$d' = \left(\sum_{i=1}^{p} \left| \frac{z_i^1 - z_i}{z_i^1 - z_i^o} \right|^r \right)^{1/r} \tag{14}$$

Für den Exponenten r sind die Werte r = 1 (Charnes und Cooper (1961)) und r = 2 (euklidische Maßbestimmung) gebräuchlich.

Für $r \to \infty$ geht das Problem

$$\min_{x \in X} d'$$

über in das Problem

$$\min_{x \in X} \max_{i} \left| \frac{z_i^1 - z_i}{z_i^1 - z_i^0} \right|$$

das ebenfalls verschiedentlich betrachtet wurde (Kuhn und Tucker (1951), Körth (1969), Halbritter (1978)). Es läßt sich auch als spieltheoretisches Minimax-Problem interpretieren.

6. Kritischer Vergleich der Methoden

Ein mehrdimensionales Entscheidungsproblem liegt vor, wenn die für wichtig gehaltenen Konsequenzen mehrerer möglicher Handlungsoptionen sich nicht in eindeutiger Weise durch ein und dieselbe Maßeinheit charakterisieren lassen. (Eine Kosten-Nutzen-Analyse löst demnach kein mehrdimensionales Entscheidungsproblem, weil sie davon ausgeht, daß sich alle Konsequenzen in Geldeinheiten messen lassen.) Die Problemlösung hängt infolgedessen von subjektiven Einschätzungen und Wertvorstellungen ab. Da Entscheidungen von großer gesellschaftlicher Tragweite - und nur bei solchen ist eine aufwendige formale Entscheidungsanalyse gerechtfertigt - meist von mehreren Personen getragen werden, müßten sich also für mehrdimensionale Entscheidungsprobleme zunächst mehrere, individuell optimale Lösungen ergeben, über die dann zu befinden wäre. Entscheidungsanalytische Verfahren, die mit einer quasi allgemeinverbindlichen Ersatzzielfunktion arbeiten (siehe Abschnitt 5), tragen dieser Pluralität nicht Rechnung. Sie leisten der Technokratie Vorschub, indem sie politische Diskussionen um Werte und Normen tendenziell eliminieren (siehe zum Beispiel Koch und Senghaas (1970)).

Die Reduktion der Lösungsmannigfaltigkeit anhand von wirklich weithin anerkannten Kriterien ist dagegen in jedem Fall wünschenswert. Eine derartige Möglichkeit ist die Bestimmung der Effizienzmenge E (siehe Abschnitt 2 und 3). Allerdings ist selbst das Kriterium der Effizienz mitunter problematisch, nämlich dann, wenn der Grundsatz der Gleichbehandlung eine Rolle bei der Entscheidung spielt (siehe zum Beispiel Kirkwood (1978)). Zu bedenken ist schließlich auch, daß bei größer werdender Zahl von Zielkomponenten die durch das Effizienzkriterium ausgezeichnete Untermenge relativ zum gesamten Zulässigkeitsbereich im allgemeinen immer größer wird, so daß unter Umständen die Bestimmung der Effizienzmenge kaum Komplexität reduziert. Mit einer wachsenden Zahl von Zielkriterien wird man insbesondere rechnen müssen, wenn man die Wertvorstellungen von immer mehr Individuen berücksichtigen will.

Die Verfahren zur Lösung mehrdimensionaler Entscheidungsprobleme, die auf individueller Befragung basieren, können die Entscheidungsrationalität erhöhen, obwohl sie, wie oben erläutert, im allgemeinen nicht zu einer Lösung führen, die dann realisiert wird. Sie können einmal individuelle Aufklärung bewirken, indem sie dem befragten Entscheidungsträger klarmachen, inwieweit die verschiedenen Handlungsoptionen mit seinen Wertvorstellungen in Einklang sind. Zum anderen erleichtern sie das Auffinden der Punkte, an denen verschiedene Entscheidungsträger unterschiedlicher Meinung sind, d.h. sie erleichtern die Kompromißfindung.

Dabei erscheinen die in Abschnitt 4 angeführten interaktiven Verfahren weniger zweckdienlich als das in Abschnitt 5 skizzierte explizite Verfahren, bei dem eine Präferenz- bzw. Nutzenfunktion unabhängig vom Optimierungsprozeß geschätzt wird. Durch die Verquickung von Optimierung und Schätzung bei den interaktiven Verfahren ist es praktisch unmöglich, die individuellen Unterschiede in den Wertvorstellungen und subjektiven Einschätzungen, die unterschiedliche Lösungen nach sich ziehen, klar zu bezeichnen. Demgegenüber liegt beim expliziten Verfahren nach der Befragung eine im allgemeinen analytisch gegebene Nutzenfunktion vor, anhand derer relativ leicht verfolgt werden kann, wie es zu individuell verschiedenen optimalen Lösungen kommt. Ein weiterer Vorteil der expliziten Methode besteht darin, daß keine Vergleiche zwischen Optionen angestellt werden müssen, die sich in vielen Zielkomponenten unterscheiden. Derartige Vergleiche, die bei mehrdimensionalen Entscheidungsproblemen immer implizit auftreten, werden vielmehr auf die Beantwortung einfacher Fragen zurückgeführt (siehe Abschnitt 5); darin besteht gerade die aufklärerische Funktion dieses Ansatzes. (Die Einfachheit der Fragen wird mitunter als Nachteil dieser Methode bezeichnet, weil sie Vergleiche zwischen unrealistischen Alternativen impliziert. Es spricht jedoch nichts dagegen, nach Ermittlung der Nutzenfunktion mittels einfacher Fragen diese Funktion anhand komplexerer Präferenzfragen zu verifizieren oder, falls dies nicht möglich ist, zu modifizieren.) Schließlich hat das explizite Verfahren noch den Vorzug, daß man den Zulässigkeitsbereich X, der meist durch rein technische Beschränkungen definiert ist, weitgehend unabhängig von der Schätzung der Nutzenfunktion variieren kann. Bei den interaktiven Verfahren muß man nach jeder Änderung von X im Prinzip eine neue Befragung durchführen.

Aus den genannten Gründen wurde für das in der Einleitung erwähnte energiepolitische Vektormaximierungsproblem das explizite Verfahren gewählt, bei dem unabhängig von der Optimierung eine Nutzenfunktion über dem Zulässigkeitsbereich geschätzt wird (Fürniß et al. (1979)).

7. Literaturangaben

Chankong, V. und Haimes, Y.Y. (1978).
The Interactive Surrogate Worth Trade-off Method for Multi-objective Decision-Making. In: Multiple Criteria Problem Solving, Proc. Conf. Buffalo, N.Y., 1977 (S. Zionts, ed.). Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, V. 155. Springer-Verlag, Berlin.

Charnes, A. und Cooper, U.W. (1961).
Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, V. 1. John Wiley & Sons, New York.

Fandel, G. (1972).
Optimale Entscheidung bei mehrfacher Zielsetzung. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, V. 76. Springer-Verlag, Berlin.

Fürniß, B., Hoch, D., Schulz, V. und Stehfest, H. (1979).
Optimierung des Energieversorgungssystems von Baden-Württemberg bei mehrfacher Zielsetzung. Erscheint in Kürze.

Gal, T. (1976).
A general method for determining the set of all efficient solutions to a linear vectormaximum problem. European Journal of Operational Research 1, 307-322.

Halbritter, G. (1979).
Multidimensionale Optimierung bei Standortwahl von großtechnischen Anlagen. Interdisziplinäre Systemforschung, Bd. 62. Birkhäuser-Verlag, Basel.

Hoch, D., Schulz, V. und Stehfest, H. (1979).
Schätzung von Nutzenfunktionen für ein regionales Energieversorgungssystem. Unveröffentlicht.

Jansen, P. (1977).
Decisions under several objectives. Technical Report SOL 77-20, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, California.

Isermann, H. (1977).
Duality in Multiple Objective Linear Programming. In: Multiple Criteria Problem Solving, Proc. Conf. Buffalo, N.Y., 1977 (S. Zionts, ed.). Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, V. 155. Springer-Verlag, Berlin.

Isermann, H. (1978).
On Some Relations between a Dual Pair of Multiple Objective Linear Programs. ZOR, 22, 33-41.

Keeney, R. und Raiffa, H. (1976).
Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs. John Wiley & Sons, New York.

Keeney, R. (1976).
A Group Preference Axiomatization with Cardinal Utility. Management Science, 23, 140-145.

Kirkwood, C.W. (1978).
Social Decision Analysis Using Multiattribute Utility Theory. In: Multiple Criteria Problem Solving, Proc. Conf. Buffalo, N.Y., 1977 (S. Zionts, ed.). Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, V. 155. Springer-Verlag, Berlin.

Koch, C. und Senghaas, D. (Hrsg.) (1970).
Texte zur Technokratiediskussion. Europäische Verlagsanstalt, Frankfurt a. M.

Körth, H. (1969).
Zur Berücksichtigung mehrerer Zielfunktionen bei der Optimierung von Produktionsplänen. Mathematik und Wirtschaft, 6, 184-201.

Kuhn, H.W. und Tucker, A.W. (1951).

Nonlinear Programming. In: Proc. 2nd Berkeley Symp. Mathem. Statistics and Probability (J. Neyman, ed.). University of California Press, Berkeley, California.

Tamura, K. (1976).

A Method for Constructing the Polar Cone of a Polyhedral Cone, with Applications to Linear Multicriteria Decision Problems. Journal of Optimization Theory and Applications, 19, 547-564.

Yu, P.L. und Zeleny, M. (1975).

The Set of All Nondominated Solutions in Linear Cases and a Multicriteria Simplex Method. J. Math. Analysis and Appl., 49, 430-468.

Zionts, S. und Wallenius, J. (1976).

An Interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem. Management Science,22, 652-663.