

KfK 3158  
April 1981

# **Theoretische Untersuchung der reibungsbefaheten Strömung in rotationssymmetrischen Düsen zur Auslegung eines Flüssigmetalltargets für eine Spallationsneutronenquelle**

K. O. Felsch, M. Piesche, W. Veith  
Institut für Reaktorbauelemente  
Projekt Spallationsneutronenquelle

**Kernforschungszentrum Karlsruhe**



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Reaktorbauelemente  
Projekt Spallationsneutronenquelle

**KfK 3158**

**THEORETISCHE UNTERSUCHUNG DER REIBUNGSBEHAFTETEN STRÖMUNG  
IN ROTATIONSSYMMETRISCHEN DÜSEN ZUR AUSLEGUNG EINES  
FLÜSSIGMETALLTARGETS FÜR EINE SPALLATIONSNEUTRONENQUELLE**

**K. O. Felsch, M. Piesche und W. Veith**  
Institut für Strömungslehre und Strömungsmaschinen  
Universität Karlsruhe (TH)

Diese Untersuchungen wurden im Auftrage des Instituts für Reaktorbauelemente  
des Kernforschungszentrums Karlsruhe durchgeführt.

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH  
ISSN 0303-4003

---

**INHALT:**

Zusammenfassung – Summary .....	2
1. Einleitung .....	2
2. Rechenmodell .....	3
2.1. Grundgleichungen für die laminare Strömungsbewegung .....	4
2.2. Grundgleichungen für die turbulente Strömungsbewegung .....	9
3. Numerische Resultate .....	10
4. Schlußbemerkung .....	12
5. Bezeichnungen, dimensionslose Größen, Kennzahlen und Indizes .....	12
6. Literatur .....	13

## ZUSAMMENFASSUNG

Gegenstand der theoretischen Studie ist die laminare und turbulente, drallfreie Strömung viskoser, inkompressibler Medien in rotationssymmetrischen Hohlstrahldüsen, deren geometrische Konfiguration die technische Konzeption eines Flüssigmetalltargets verkörpert. Die Düsen sind geometrisch so geformt, daß die Wandberandungen den natürlichen, reibungsbehafteten Bewegungsablauf der Strömung widerspiegeln, d.h. die Konturen der Düsen stellen sich örtlich durch das Wechselspiel von Zähigkeits-, Impuls-, Schwere- und Oberflächenspannungskräften ein. Die mathematische Behandlung basiert auf einem Integralverfahren. Bei der Betrachtung der laminaren Strömungsbewegung werden für die Geschwindigkeiten Polynome höherer Ordnung und im turbulenten Fall das  $1/7$ -Potenzgesetz gewählt. Außerdem unterliegen die Wandschubspannungen im turbulenten Strömungsbereich den Gesetzmäßigkeiten der Rohrströmung. Insbesondere kommt das Blasiusche Widerstandsgesetz in einer modifizierten Form zur Anwendung.

Im wesentlichen kristallisieren sich das geometrische Verhältnis von mittlerem Düsenradius zu Anfangsbreite des Flüssigkeitsfilms, der Austrittswinkel, die Reynolds-, die Weber- und die Froude-Zahl als charakteristische geometrische und physikalische Strömungsparameter heraus.

## **Theoretical investigations of a viscous flow in rotational symmetry hollow jet nozzles with respect to a design of a flowing liquid metal target for a neutron spallation source**

### SUMMARY

The object of this theoretical study is the laminar and turbulent swirl free flow of a viscous incompressible medium in a rotation symmetric hollow jet nozzle whose geometrical configuration incorporates the technical conception of a molten metal target. Of interest is the construction of the nozzle in such a form that the wall boundaries reflect the natural frictional movement of the flow, i.e. the contours of the nozzle are trimmed by the interaction of the viscosity, momentum, gravity and surface tension forces. The mathematical treatment is based on an integral method. For laminar flow higher order polynomials were chosen and for turbulent flow the power of law of  $1/7$ . As well as this the wall shear stresses in the turbulent flow region have to conform to the laws of pipe flow and in particular, to a modified form of Blasius' resistance law.

The essential factors which are obtained from this study are the geometrical relationship between the average nozzle radius and the initial width of the fluid film, the exit angle and the Reynolds, Weber and Froude numbers as the characteristic geometric and physical flow parameters.

### 1. EINLEITUNG

Die Erzeugung von thermischen Neutronen hat in den letzten Jahren wiederholt das Interesse für theoretische und experimentelle Untersuchungen hervorgerufen. Dadurch erwuchs die Aufgabenstellung, leistungsfähige Anlagen zu erstellen, die es ermöglichen, Neutronenquellen mit einer hohen Ausbeute an Nukleonen bereitzustellen. Speziell die Kenntnisse auf dem Gebiet der Kernspallation erfuhren eine Aktualisierung und insbesondere das Konzept eines Flüssigmetalltargets wurde verfolgt. Bei dieser Konzeption besteht das Target aus einem strömenden Schwermetall, wobei verschiedene konstruktive Ausführungen in Erwägung gezogen wurden, um eine Targetstation zu realisieren.

In der vorliegenden Arbeit wird das Target baulich durch eine Hohlstrahldüse repräsentiert, in der das Medium an der Berandung als Flüssigkeitsfilm unter dem Einfluß der Schwerkraft strömt und sich nach einer gewissen Lauflänge stromabwärts unter der Wirkung der Oberflächenspannung zu einem Vollstrahl ausbildet.

An dieser Stelle trifft der Protonenstrahl auf die freie Oberfläche des Targets, wobei die Strahlleistung in einem relativ kleinen Volumen zu einem großen Anteil als freiwerdende Wärme durch das Medium abgeführt werden muß. Die resultierenden Wärmeabfuhrprobleme und weitere Einzelheiten über Bauformen von Targets sowie deren Kreislaufauslegungen werden in den Arbeiten [1, 2, 5] und [6] ausführlich erörtert. Erste theoretische Betrachtungen über Strömungsvorgänge in einem Hohlstrahltarget erfolgen in den Abhandlungen [7] und [8]. In diesen Literaturstellen gründet sich die Berechnungsmethode zur Bestimmung der Düsenform auf einen reibungsfreien Strömungsablauf, wobei der durchgeführte Vergleich mit dem Experiment den Nachweis einer beschränkten Brauchbarkeit des Rechenmodells zur Ermittlung der Düsengeometrie erbringt und somit die Einbeziehung von Reibungskräften zur Auslegung erforderlich wird.

Ziel dieser Arbeit ist es, ein Rechenmodell zu erstellen, welches die Einschränkung der Reibungsfreiheit fallen läßt. Daraus ergibt sich als Aufgabenstellung die Entwicklung einer Methode zur Berechnung der laminaren und turbulenten Strömung durch symmetrische Hohlstrahldüsen. Das Augenmerk liegt auf der Gestaltung der Düsen, wobei das Wechselspiel der beschreibenden Kräfte nicht durch eine vorgegebene Kontur, sondern durch den natürlichen Bewegungsablauf eine Änderung erfährt.

## 2. RECHENMODELL

Das in Abbildung 1 ersichtliche geometrische Modell liegt der strömungsphysikalischen Betrachtung zugrunde.

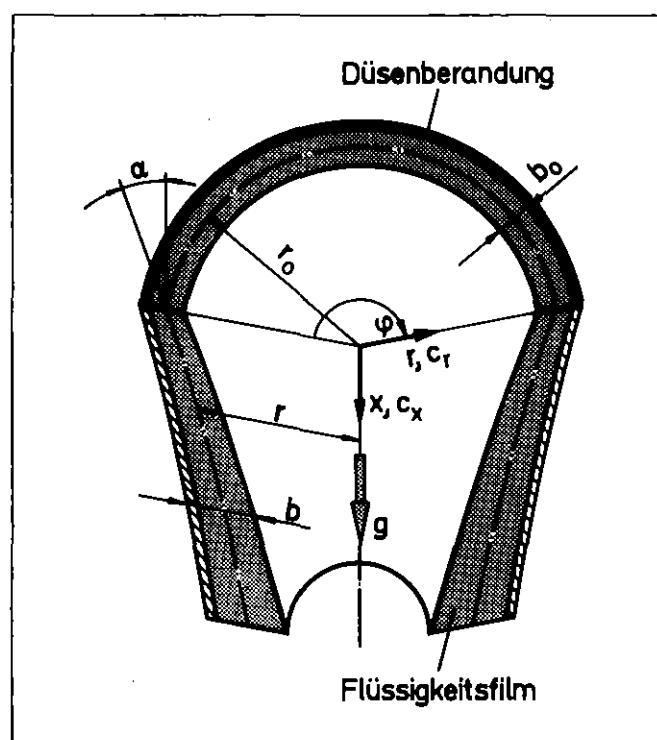


Abb. 1: Geometrisches Modell der Hohlstrahldüse

Das Medium strömt mit der Anfangsflüssigkeitsfilmdicke  $b_0$  unter einem zur Achse geneigten Winkel  $\alpha$  entlang der zu berechnenden Düsenberandung. Die Flüssigkeit, bezüglich der technischen Anwendung eine Metallschmelze, steht unter dem Einfluß der Erdschwere  $g$  und weist an der Stelle  $r = r_0$ ,  $x = 0$  die axiale und radiale Anfangsgeschwindigkeit  $c_{x0}$  bzw.  $c_{r0}$  auf. Um das gestellte Problem einer theoretischen Behandlung zugänglich zu machen, wird der rechnerische Aufwand durch die folgenden Annahmen und Voraussetzungen a priori begrenzt:

- (1) Die Hohlstrahldüse wird von einem Medium mit Newtonschen Eigenschaften durchströmt.
- (2) Das Strömungsfeld ist stationär, d. h. alle variablen Größen sind unabhängig von der Zeit.
- (3) Die Stoffwerte, d. h. die Dichte  $\rho$ , die dynamische Zähigkeit  $\mu$  und die Oberflächenspannung  $\sigma$  des Mediums werden als konstant angesehen.
- (4) Das Medium wird im Sinne der Mechanik als Kontinuum aufgefaßt; es gilt also die Haftbedingung.
- (5) Die Reibungskräfte an der Trennfläche zwischen gasförmigem und flüssigem Medium werden vernachlässigt.

## 2.1. GRUNDGLEICHUNGEN FÜR DIE LAMINARE STRÖMUNGSBEWEGUNG

Die Koordinaten werden dem Strömungsproblem angepaßt, indem man Zylinderkoordinaten mit der Nomenklatur  $r$ ,  $\varphi$  und  $x$  wählt. Der Bewegungsvorgang ist drallfrei, somit zweidimensional, wobei die zum Koordinatensystem korrespondierenden radialen und axialen Geschwindigkeiten mit  $c_r$  und  $c_x$  bezeichnet werden.

Die Grundgleichungen zur Beschreibung des rotationssymmetrischen, stationären Geschwindigkeitsfeldes bei laminarer Strömung eines Newtonschen inkompressiblen Mediums bilden die Differentialgleichungen für die Erhaltung von Masse und Impuls, die bezüglich des vereinbarten Koordinatensystems wie folgt lauten (vgl. z.B. [3]):

### ■ Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{c_r}{r} + \frac{\partial c_x}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

### ■ Bewegungsgleichung in radialer Richtung

$$\rho \left( c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} + c_x \frac{\partial c_r}{\partial x} \right) = k_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 c_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_r}{\partial r} - \frac{c_r}{r^2} + \frac{\partial^2 c_r}{\partial x^2} \right) \quad (2.2)$$

### ■ Bewegungsgleichung in axialer Richtung

$$\rho \left( c_r \frac{\partial c_x}{\partial r} + c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} \right) = k_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 c_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} \right) \quad (2.3)$$

Hierbei ist  $k_r = -\sigma/(br)$  der Kraftanteil pro Volumenelement, der aus der Oberflächenspannung  $\sigma$  herrührt und  $k_x = \rho g$  ist der Schwerkraftterm. Da beim gegenwärtigen Stand der mathematischen Kenntnisse wenig



Aussicht besteht, das komplizierte Gleichungssystem (2.1) bis (2.3) allgemein und in exakter Form zu lösen, erscheint es notwendig, die Grundgleichungen zu approximieren. Zur Abschätzung der Größenordnung einzelner Glieder werden die geometrischen Variablen  $r$  und  $x$  sowie der Druck  $p$  und die Geschwindigkeiten  $c_r$  und  $c_x$  auf charakteristische Größen bezogen und zu einer dimensionslosen Form kombiniert. Folgende Darstellungen bieten sich an:

$$\begin{array}{ll} \text{Koordinaten:} & R = \frac{r}{r_0}, \quad X = \frac{x}{r_0} \\ \text{Geschwindigkeiten:} & C_X = \frac{c_x}{c_{x0}}, \quad C_R = \frac{c_r}{c_{x0}} \\ \text{Druck:} & P = \frac{p}{\rho c_{x0}^2} \end{array}$$

Mit der wesentlichen Voraussetzung, daß das Verhältnis

$$\frac{r_0}{b_0} \gg 1$$

und die radiale Geschwindigkeit  $C_R$  sehr viel kleiner als die axiale Geschwindigkeit  $C_X$  sind, kann eine Größenabschätzung in der Art der Grenzschichtvernachlässigungen durchgeführt werden. Außerdem wird angenommen, daß der Außendruck konstant ist und sich dem Flüssigkeitsfilm aufprägt. Zweckmäßigerweise wird man, bedingt durch die Voraussetzung  $r_0/b_0 \gg 1$ , zu einem vereinfachten geometrischen Ersatzmodell

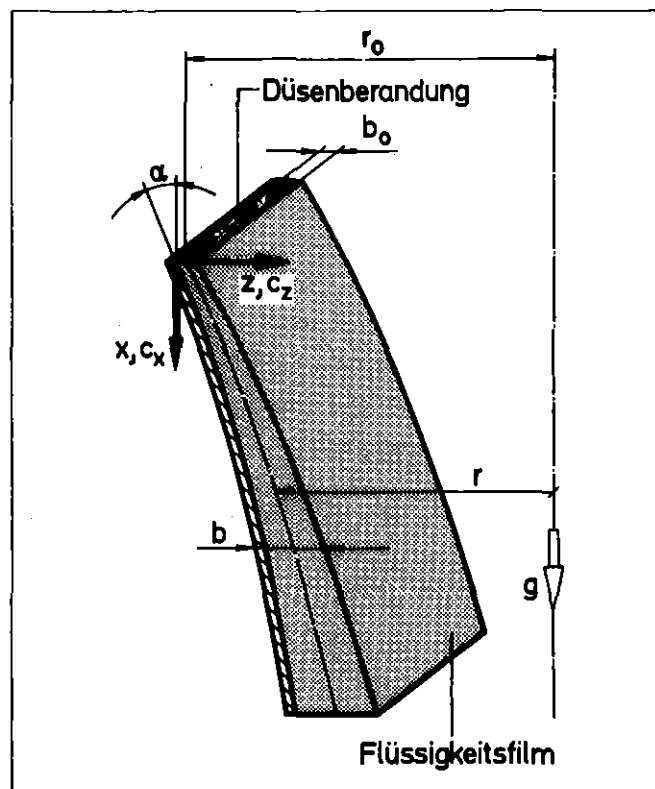


Abb. 2: Ersatzmodell

(Abb. 2) übergehen, das der Vorstellung eines ebenen, stationären Geschwindigkeitsfelds entspricht, d.h. die rotationssymmetrische Düse wird gedanklich in Längsrichtung aufgeschnitten und zu einer Fläche aufgerollt.

Die Koordinaten werden dem neuen Modell angepaßt; sinnvollerweise wählt man kartesische Koordinaten mit der dimensionslosen Nomenklatur  $X = x/r_0$  und  $Z = z/b_0$ . Zudem wird die Geschwindigkeitskomponente im Flüssigkeitsfilm in Z-Richtung zu  $C_Z = r_0/b_0 (c_z/c_{x0})$  normiert. Außerdem gilt in 1. Näherung

$$\frac{dR}{dX} = \frac{C_R}{C_{Xm}}$$

wobei  $C_{Xm} = 1/B \int_0^B C_X dZ$  den Mittelwert der axialen Geschwindigkeit wiedergibt.

Somit ergibt sich das folgende reduzierte Gleichungssystem:

- Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial C_X}{\partial X} + \frac{\partial C_Z}{\partial Z} = 0 \quad , \quad (2.4)$$

- Radiale Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dX} \left( C_{Xm} \frac{dR}{dX} \right) + \frac{1}{We} = 0 \quad , \quad (2.5)$$

- Axiale Bewegungsgleichung

$$C_X \frac{\partial C_X}{\partial X} + C_Z \frac{\partial C_X}{\partial Z} = \frac{r_0/b_0}{Re} \frac{\partial^2 C_X}{\partial Z^2} + \frac{1}{Fr^2} \quad (2.6)$$

Ergänzt wird dieses Gleichungssystem durch die integrale Kontinuitätsaussage

$$R \int_0^B C_X dZ = 1 \quad . \quad (2.7)$$

Durch die Approximation gelangt man einerseits zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung (2.5) und andererseits zu einer partiellen, nichtlinearen Differentialgleichung (2.6) parabolischen Typs. Mit den Gleichungen (2.4) bis (2.7) erfolgt die Bestimmung der Geschwindigkeiten  $C_Z$  und  $C_X$  sowie die Ermittlung der mittleren Kontur  $R$  und der Dicke  $B = b/b_0$  des Flüssigkeitsfilms.

Durch die verwendete Normierung treten in den Gleichungen (2.5) und (2.6) Kennzahlen auf, die als

$$\begin{aligned} \text{Reynolds-Zahl} & \quad Re = \frac{\rho c_{x0} b_0}{\mu} \quad , \\ \text{Froude-Zahl} & \quad Fr = \sqrt{\frac{c_{x0}^2}{g r_0}} \quad \text{und} \\ \text{Weber-Zahl} & \quad We = \frac{\rho c_{x0}^2}{\sigma/b_0} \quad , \end{aligned}$$

interpretiert werden können. Die Kennzahlen werden ergänzt durch den geometrischen Parameter  $r_0/b_0$ .

Zur sachgemäßen Lösung der Differentialgleichungen sind die Rand- und Anfangsbedingungen zu spezifizieren. Die kinematischen Randbedingungen ergeben sich zwangsläufig aus den Haftbedingungen

$$Z = 0 : \quad C_x = C_z = 0$$

und die Anfangsbedingungen lauten

$$X = 0 : \quad C_x = C_{x0} , \quad C_z = C_{z0} .$$

Es erhebt sich nun die Frage nach der Behandlung der Gleichungen (2.4) bis (2.7) und deren Lösungen zur Bestimmung der unbekanntenen Größen. Im vorliegenden Fall wurde ein Integralverfahren gewählt, das mit dem Impulssatz der Grenzschichttheorie arbeitet. Das Verfahren beruht darauf, daß die Gleichungen über eine charakteristische Länge integriert werden. Dadurch führt man im besonderen die axiale Gleichung von einer partiellen Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurück. Hauptmerkmal dieser Vorgehensweise ist, daß die Bewegungsgleichungen nicht in jedem Punkt des Strömungsfeldes erfüllt werden, sondern nur im Mittel über die Breite des Flüssigkeitsfilms. Die Einführung der Kontinuitätsgleichung (2.4) in die axiale Bewegungsgleichung und anschließendes Umformen durch partielle Integration modifizierten letztlich die radiale und axiale Bewegungsgleichung zu

$$\frac{d}{dX} \left[ \frac{dR}{dX} \int_0^1 C_x d\eta \right] + \frac{1}{We} = 0 , \quad (2.8)$$

$$\frac{d}{dX} \int_0^1 B C_x \left[ C_x(\eta=1, X) - C_x \right] d\eta - \frac{dC_x}{dX}(\eta=1, X) B \int_0^1 C_x d\eta = \frac{r_0/b_0}{B} T - \frac{B}{Fr^2} . \quad (2.9)$$

Hierbei ist im laminaren Strömungsfall der Gradient der axialen Geschwindigkeit mit der Wandschubspannung  $T = \tau_0 / (\rho c_{x0}^2)$  zu  $(\partial C_x / \partial \eta)|_{\eta=0} = Re T$  verknüpft. Außerdem wurde die neue Variable  $\eta = z/b$  eingeführt.

Diese beiden Gleichungen (2.8), (2.9) sind über die integrale Kontinuitätsgleichung

$$R B \int_0^1 C_x d\eta = 1 \quad (2.10)$$

gekoppelt.

In der Natur dieses Integralverfahrens liegt, daß die Anwendung einen Ansatz für die axiale Geschwindigkeit benötigt; gewählt wird ein Polynom der Form

$$C_x = \sum_{i=0}^n \Lambda_i(X) \eta^i .$$

Hierbei ist  $\Lambda$  ein unbekannter Koeffizient, der von der Ortskoordinate  $X$  abhängt. Der Index  $n$  gibt den Grad des Polynoms an. Durch diesen Polynomansatz verlagert sich das rechentechnische Problem auf die Bestimmung der Koeffizienten, die auch als Formparameter interpretiert werden können. Für die Bestimmung der Koeffizienten werden folgende Randbedingungen vorgeschrieben:

$$\begin{aligned} \eta = 0: & \quad C_x = 0, \quad \frac{\partial^2 C_x}{\partial \eta^2} = -\frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2} B^2 \frac{b_0}{r_0}, \quad \frac{\partial^3 C_x}{\partial \eta^3} = 0 \\ \eta = 1: & \quad C_x = \sqrt{\frac{2X}{\text{Fr}^2}} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für das Geschwindigkeitsprofil folgender Ausdruck:

$$C_x = \sqrt{\frac{2X}{\text{Fr}^2}} \eta + \frac{1}{2} \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2} B^2 \frac{b_0}{r_0} (\eta - \eta^2) - \Lambda_4 (\eta - \eta^4).$$

Man erkennt schlechthin, daß die lokalen Geschwindigkeitsprofile als Funktion von  $\eta$  eine einparametrische Kurvenschar bilden, und daß der Koeffizient  $\Lambda_4$  die Rolle des bereits erwähnten Formparameters der Profilkontur spielt, wobei für  $\Lambda_4$  an der Stelle  $X = 0$  der Anfangswert  $10/3 \cdot (1/12 \cdot \text{Re}/\text{Fr}^2 \cdot b_0/r_0 - 1)$  zu setzen ist.

Das Geschwindigkeitsprofil wird in die integrale Kontinuitätsgleichung (2.10) und in die radiale sowie axiale Bewegungsgleichung (2.8) und (2.9) eingesetzt, dadurch erhält man die Bestimmungsgleichungen für den Formparameter  $\Lambda_4$ , für den Radius  $R$  und für die Flüssigkeitsfilmbreite  $B$ . Die Gleichungen lauten:

■ Kontinuitätsgleichung

$$R B \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2X}{\text{Fr}^2}} - \frac{1}{6} \Lambda_2 - \frac{3}{10} \Lambda_4 \right) = 1 \quad (2.11)$$

■ Radiale Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2X}{\text{Fr}^2}} - \frac{1}{6} \Lambda_2 - \frac{3}{10} \Lambda_4 \right) \frac{d^2 R}{dX^2} + \\ & + \left( \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\text{Fr}^2 X}} - \frac{1}{6} \frac{d\Lambda_2}{dX} - \frac{3}{10} \frac{d\Lambda_4}{dX} \right) \frac{dR}{dX} + \frac{1}{\text{We}} = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

■ Axiale Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{30} \Lambda_2^2 - \frac{1}{3} \frac{X}{\text{Fr}^2} - \frac{1}{30} \Lambda_4 \sqrt{\frac{2X}{\text{Fr}^2}} + \frac{5}{42} \Lambda_2 \Lambda_4 + \frac{1}{9} \Lambda_4^2 \right) \frac{dB}{dX} + \\ & + \frac{1}{B} \frac{r_0/b_0}{\text{Re}} \left( \sqrt{\frac{2X}{\text{Fr}^2}} - \Lambda_2 - \Lambda_4 \right) - \frac{5}{6} \frac{B}{\text{Fr}^2} - \frac{1}{2} B \sqrt{\frac{2}{\text{Fr}^2 X}} \left( \frac{1}{6} \Lambda_2 + \frac{1}{3} \Lambda_4 \right) + \\ & + B \left( \frac{1}{15} \Lambda_2 + \frac{5}{42} \Lambda_4 \right) \frac{d\Lambda_2}{dX} - B \left( \frac{1}{30} \sqrt{\frac{2X}{\text{Fr}^2}} - \frac{5}{42} \Lambda_2 - \frac{2}{9} \Lambda_4 \right) \frac{d\Lambda_4}{dX} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

mit

$$-\Lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2} B^2 \frac{b_0}{r_0}$$

## 2.2. GRUNDGLEICHUNGEN FÜR DIE TURBULENTE STRÖMUNGSBEWEGUNG

Während man Näherungsverfahren bei laminaren Strömungsproblemen im wesentlichen nur verwendet, um den rechnerischen Aufwand zu begrenzen, ist die Berechnung turbulenter Strömungsfelder zur Zeit nur durch empirische Näherungstheorien möglich. Voraussetzung ist wiederum ein Lösungsansatz für die Geschwindigkeit. Außerdem benötigen die Näherungsverfahren Schubspannungsansätze, die aber von empirischer Natur sind. Dieser entscheidende Unterschied gegenüber dem laminaren Strömungsfall, bei dem die Schubspannung proportional dem Geschwindigkeitsgradienten ist, erschwert die mathematische Behandlung.

Um den Rechenaufwand nicht unnötig zu erschweren, unterliegt in dieser Problemstellung die Wandschubspannung den turbulenten Gesetzmäßigkeiten der Rohrströmung und im besonderen dem Blasiuschen Widerstandsgesetz, das in der vorliegenden Aufgabenstellung in einer modifizierten Form Verwendung findet.

Mit dem Geschwindigkeitsansatz

$$c_x = \sqrt{\frac{2X^1}{Fr^2}} \eta^{1/7} + \beta(X) [\eta^{1/7} (1-\eta) + (1-\eta)^{1/7} \eta]$$

und der dimensionslosen Wandschubspannung

$$\tau = \frac{\tau_0}{\rho c_{x0}^2} = \frac{0.03955}{(B Re)^{1/4}} \left( \int_0^1 c_x d\eta \right)^{7/4}$$

lauten die Ausgangsgleichungen zur Bestimmung des Koeffizienten  $\beta(x)$  und des Radienverhältnisses  $R$  sowie der Breite  $B$ :

### ■ Kontinuitätsgleichung

$$R B \left( \frac{7}{8} \sqrt{\frac{2X^1}{Fr^2}} + \frac{49}{60} \beta \right) = 1 \quad (2.14)$$

### ■ Radiale Bewegungsgleichung

$$\left( \frac{7}{8} \sqrt{\frac{2X^1}{Fr^2}} + \frac{49}{60} \beta \right) \frac{d^2 R}{dX^2} + \left( \frac{7}{16} \sqrt{\frac{2}{Fr^2 X}} + \frac{49}{60} \frac{d\beta}{dX} \right) \frac{dR}{dX} + \frac{1}{We} = 0 \quad (2.15)$$

### ■ Axiale Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} & (0.5045 \beta^2 + 0.618 \beta \sqrt{\frac{2X^1}{Fr^2}} - 0.2 \frac{X}{Fr^2}) \frac{dB}{dX} + 0.7147 \beta \sqrt{\frac{2}{Fr^2 X}} - \\ & - 0.32 \frac{B}{Fr^2} + (0.6182 \sqrt{\frac{2X^1}{Fr^2}} + 1.089 \beta) \frac{d\beta}{dX} + \\ & + \frac{0.03955}{Re^{1/4}} \frac{r_0/b_0}{B^{1/4}} \left( \frac{7}{8} \sqrt{\frac{2X^1}{Fr^2}} + \frac{49}{60} \beta \right)^{7/4} = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die Auswertungen der Differentialgleichungen für den laminaren und turbulenten Strömungsfall wurden im Rechenzentrum der Universität Karlsruhe auf einer Anlage des Typs UNIVAC 1108 durchgeführt. Als Integrationsmethode kamen ein Runge-Kutta- und ein Nyström-Verfahren in Verbindung mit einem Iterationsprozeß zum Einsatz [4].

### 3. NUMERISCHE RESULTATE

Anhand einzelner Diagramme sollen nun die numerischen Resultate vorgestellt und erläutert werden. Offensichtlich ist, daß aufgrund der stromfeldbestimmenden Kennzahlen wie Reynolds-Zahl, Froude-Zahl und Weber-Zahl sowie durch das Auftreten von geometrischen Parametern zuverlässige Aussagen nur mit einer Vielzahl von Rechenbeispielen gewonnen werden können. Deshalb waren umfangreiche rechnerische Untersuchungen erforderlich, um einen detaillierten Überblick zu erhalten. Trotz der augenfälligen Lösungsmannigfaltigkeit gelingt es, sich, durch einige Beispiele mit exemplarischem Charakter, fundierte Kenntnisse zu verschaffen.

Im folgenden beschränkt sich die Auswahl der Ergebnisse auf die Betrachtung der turbulenten Strömungsbewegung, da dieser bezüglich einer technischen Verwirklichung eine höhere Relevanz einzuräumen ist.

In den Abbildungen 3, 4 und 5 ist eine Schar von mittleren Strahlkonturen  $r/r_0$  über der axialen Düsenstreckung  $x/r_0$  aufgetragen. Die Düsenkontur ergibt sich dann durch Addition der halben Flüssigkeitsfilmbreite zum errechneten Wert  $r/r_0$ . Die Betrachtungen werden in Form einer Froude-Zahl-, Weber-Zahl- und Reynolds-Zahl-Änderung durchgeführt. Im weiteren werden der Austrittswinkel  $\alpha$  und das geometrische Verhältnis  $r_0/b_0$  für alle Diagramme konstant gehalten, um die Parameterzahl einzuschränken. Um den Einfluß und die Auswirkungen der geometrischen und physikalischen Variablen auf den Verlauf der Düsenkontur in einem übersichtlichen, geschlossenen Zusammenhang beurteilen zu können, wurde eine kennzahlenspezifische Untersuchung einer dimensionsbehafteten vorgezogen, d.h. die Kopplung der einzelnen Kennzahlen durch geometrische Größen und durch Stoffwerte wurde außer acht gelassen. Diese Vorgehensweise ist für eine physikalische Diskussion bezüglich der Einflußnahme von Zähigkeit, Oberflächenspannung und Erdschwere gerechtfertigt.

Die Darstellung in Abbildung 3 zeigt eine Aufweitung der Düse bei kleiner werdenden Froude-Zahlen. Unmittelbare Ursache ist bei dieser Parameterkonstellation der dominierende Einfluß der Erdschwere.

Die Abbildung 4 gibt nun einen ausführlichen Überblick über die Änderungen der mittleren Strahlkontur bei Variation der Weber-Zahl, die ein Maß für die Größe der Oberflächenspannung ist. Zu erkennen ist die ausgeprägte Wirkung der Oberflächenspannung auf die Gestaltungsmöglichkeiten der Düse bei kleinen Parameterwerten. Es kommt zu einer Verjüngung der Kontur stromabwärts. Dieses Verhalten ist nicht sonderlich verwunderlich, da die Oberflächenspannung im Sinne der Mechanik als Rückstellkraft fungiert.

Abbildung 5 dokumentiert exemplarisch die Konturänderung bei Variation der Reynolds-Zahl, wobei eine Aufweitung der Düsenberandung bei Verringerung der Zähigkeit eklatant wird. Im wesentlichen entspricht die Wahl der Parameterwerte in diesem Diagramm einem Medium, das die Eigenschaften von Wasser bei Raumtemperatur und bei Atmosphärendruck aufweist.

Abb. 3: Mittlere Strahlkontur als Funktion der Froude-Zahl

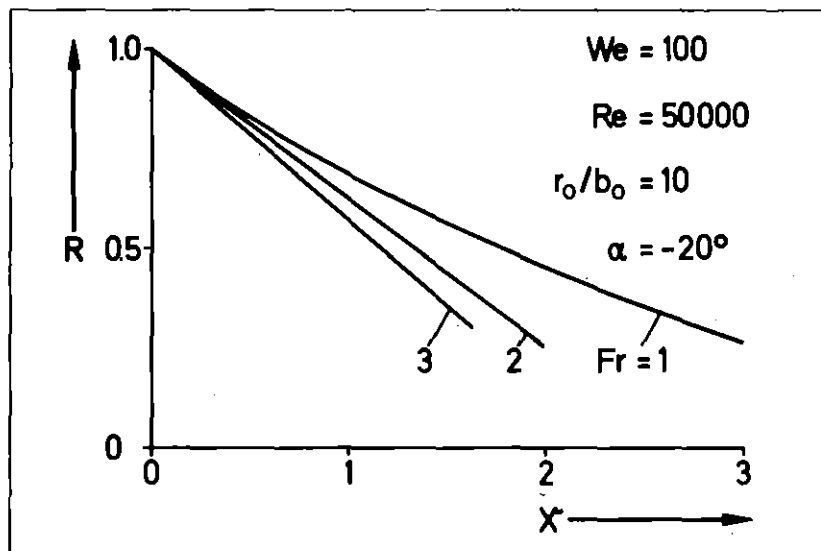


Abb. 4: Mittlere Strahlkontur als Funktion der Weber-Zahl

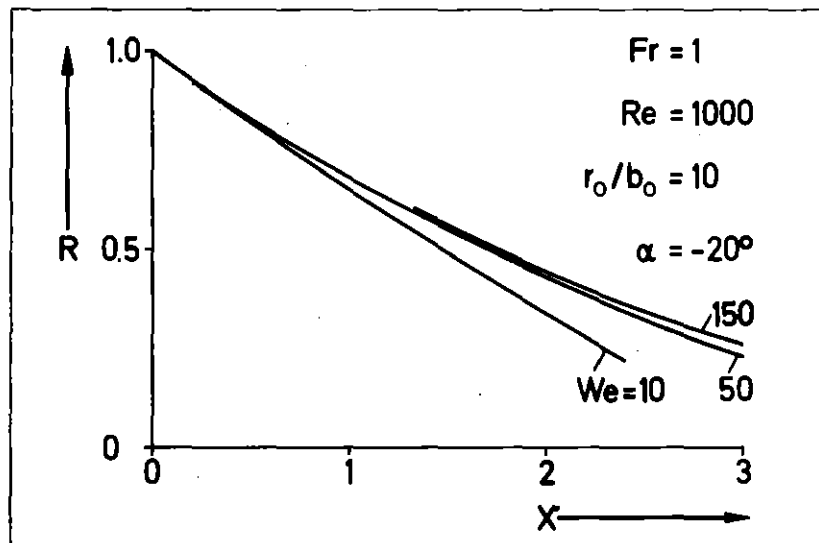
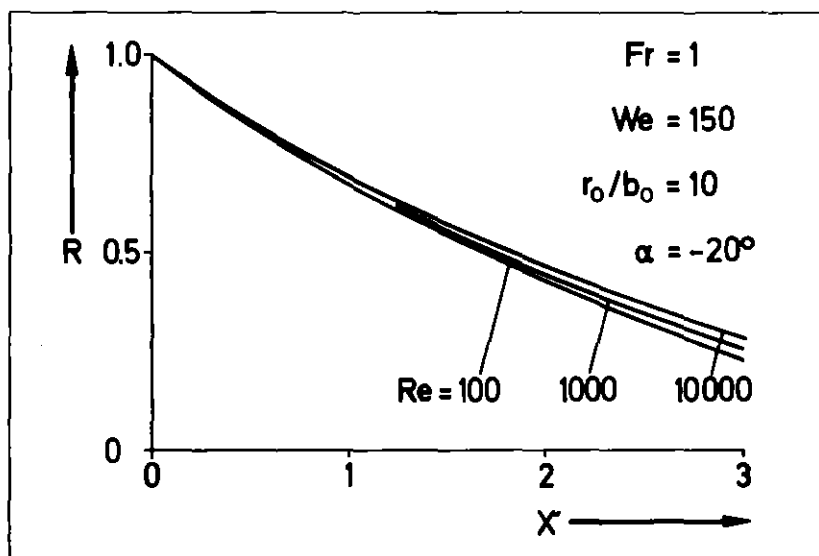


Abb. 5: Mittlere Strahlkontur als Funktion der Reynolds-Zahl



#### 4. SCHLUSSBEMERKUNG

Das Resümee der durchgeführten rechnerischen Untersuchung ist, daß mit dem vorgestellten Verfahren eine technisch realisierbare Targetgeometrie ermöglicht wird, wobei der Beitrag eine Vorhersage der Düsenkontur bei Variation der Stoffgrößen sowie der geometrischen und physikalischen Anfangsgrößen zuläßt. Inwieweit mögliche Stoffgrößenänderungen, bedingt durch Temperaturänderungen, die Ergebnisse beeinflussen, kann nur durch ein erweitertes Rechenmodell beantwortet werden. Außerdem sind weiterführende Untersuchungen experimenteller Natur wünschenswert. Von Interesse ist die Überprüfung der numerischen Resultate, um die Brauchbarkeit und die Gültigkeit des Modells aufzuzeigen. Speziell die Auswirkung der Düsenkontur auf die Strömungsdaten am Ort der Vollstrahlabbildung bedarf einer Abklärung. Forschungsergebnisse zu diesem Themenkomplex werden zu einem späteren Zeitpunkt bekanntgegeben.

#### 5. BEZEICHNUNGEN, DIMENSIONSLOSE GRÖSSEN, KENNZAHLEN UND INDIZES

##### Bezeichnungen

b	Flüssigkeitsfilmbreite	z	Koordinate im Ersatzmodell
$c_x, c_r$	axiale, radiale Geschwindigkeit	$\alpha$	Winkel
$c_z$	Geschwindigkeit in z-Richtung	$\rho$	Dichte
g	Erdschwere	$\mu$	dynamische Zähigkeit
p	Druck	$\varphi$	Koordinate in Umfangsrichtung
r	Radius, radiale Koordinate	$\sigma$	Oberflächenspannung
x	axiale Koordinate	$\tau$	Schubspannung

##### Dimensionslose Größen

$B = \frac{b}{b_0}$	Breitenverhältnis	$X = \frac{x}{r_0}$	Koordinate in axialer Richtung
$C_x = \frac{c_x}{c_{x0}}$	axiale Geschwindigkeit	$Z = \frac{z}{b_0}$	Koordinate im Ersatzmodell
$C_r = \frac{c_r}{c_{x0}}$	radiale Geschwindigkeit	$T = \frac{\tau_0}{\rho c_{x0}^2}$	Wandschubspannung
$C_z = \frac{c_z}{c_{x0}} \frac{r_0}{b_0}$	Geschwindigkeit in Z-Richtung	$\Lambda$	Koeffizient
$P = \frac{p}{\rho c_{x0}^2}$	Druck	$\beta$	Volumenstromkoeffizient
$R = \frac{r}{r_0}$	Radialverhältnis, Koordinate in radialer Richtung	$\eta = \frac{z}{b}$	Flüssigkeitsfilmbreite



## Kennzahlen

$\frac{r_0}{b_0}$	geometrischer Parameter	$Re = \frac{\rho c_{x0} b_0}{\mu}$	Reynolds-Zahl
$Fr = \sqrt{\frac{c_{x0}^2}{r_0 g}}$	Froude-Zahl	$We = \frac{\rho c_{x0}^2}{\sigma/b_0}$	Weber-Zahl

## Indizes

0	kennzeichnet die Verhältnisse am Anfang der Düse	m	gemittelt
---	--------------------------------------------------	---	-----------

## 6. LITERATUR

- [1] Hoffmann, H.:  
Prospects of a Liquid Metal Target System for a Spallation Neutron Source. Jül.-Conf. 34 (1980) 127 – 153.
- [2] Huber, P. E.:  
Untersuchungen zur Kühlmöglichkeit eines Flüssigmetall-Targets für eine intensive Neutronenquelle. Diplomarbeit am Institut für Reaktorbauelemente, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1980.
- [3] Schlichting, H.:  
Grenzschichttheorie. Karlsruhe: Braun, 1965.
- [4] Zurmühl, R.:  
Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 5. Auflage. Berlin/Heidelberg: Springer, 1965.
- [5] Günther, Cl.; Hoffmann, H.: Unveröffentlichter Bericht des KfK, 1980.
- [6] Wild, E.; Mack, K. J.; Gegenheimer, M.: Unveröffentlichter Bericht des KfK, 1980.
- [7] Felsch, K. O.; Piesche, M.; Veith, W.: Unveröffentlichter Bericht des KfK, 1980.
- [8] Piesche, M.: Unveröffentlichter Bericht des KfK, 1980.