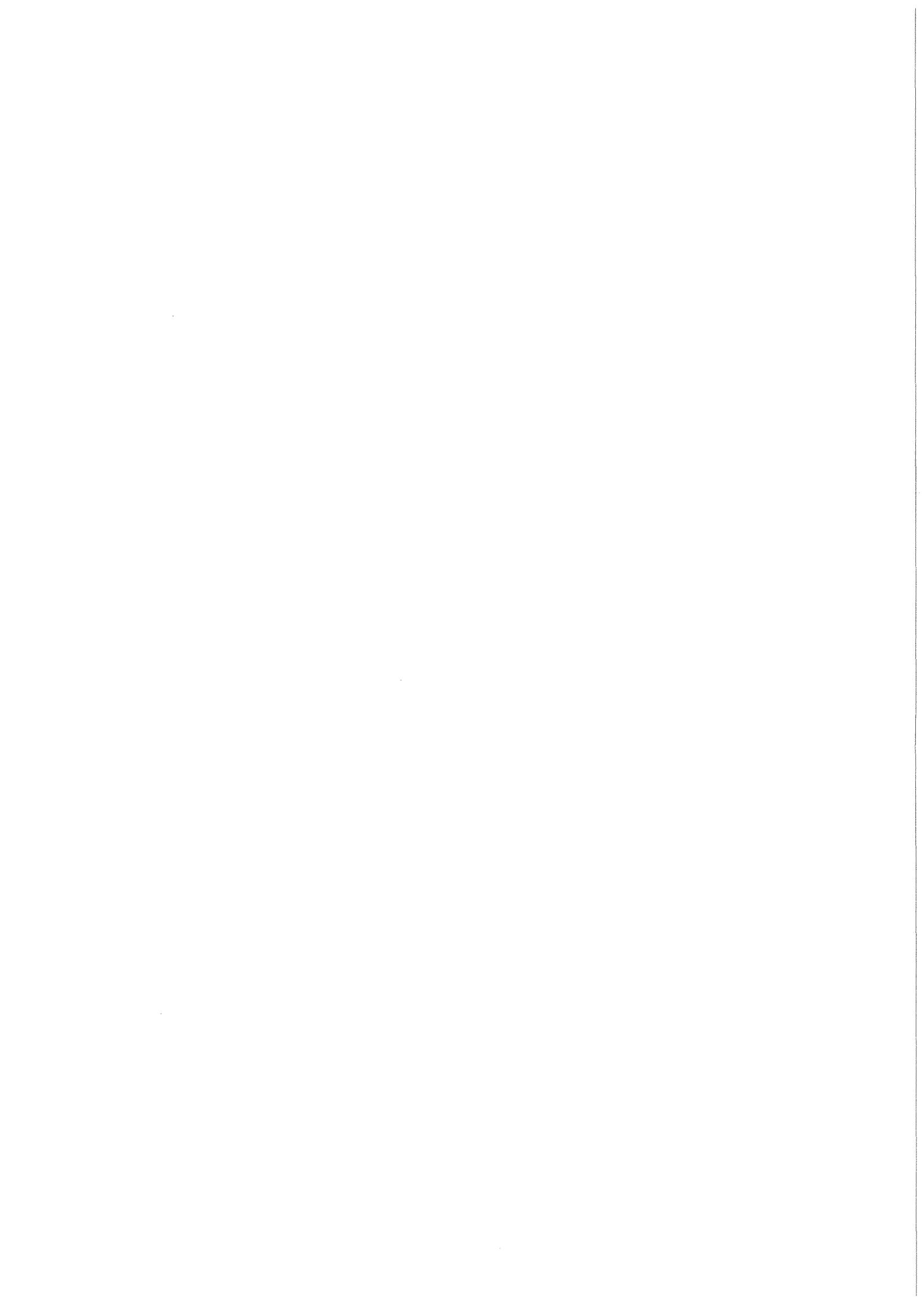


KfK 3590  
Oktober 1983

# **Einfluß überelastischer Beanspruchung auf den Spannungsintensitätsfaktor im Fall thermischer Ermüdung**

H. Stamm, D. Munz  
Institut für Reaktorbauelemente  
(Zuverlässigkeit und Schadenskunde im Maschinenbau)

**Kernforschungszentrum Karlsruhe**



K E R N F O R S C H U N G S Z E N T R U M K A R L S R U H E

Institut für Reaktorbauelemente  
( Zuverlässigkeit und Schadenskunde im Maschinenbau)

KfK 3590

Einfluß überelastischer Beanspruchung  
auf den Spannungsintensitätsfaktor im  
Fall thermischer Ermüdung

H. Stamm, D. Munz

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH  
ISSN 0303-4003

## Einfluß überelastischer Beanspruchung auf den Spannungsintensitätsfaktor im Fall thermischer Ermüdung

Thermoschockbelastung führt häufig zu hohen Temperaturspannungen, die in einer oberflächennahen Schicht die Fließgrenze des Materials übersteigen können. In dieser Arbeit wird die Anwendung des linear elastischen  $\Delta K$ -Konzepts im Falle zyklischer thermischer Belastung im shakedown-Bereich diskutiert. Hierzu werden K-Faktoren für einen durchgehenden Außenriß in einer linear elastischen, ideal plastischen Platte mit der Gewichtsfunktionsmethode berechnet und mit Ergebnissen der Finiten-Elemente-Methode verglichen. Es wird gezeigt, daß Spannungsumlagerungen während des plastischen Fließens im ersten Zyklus bei der Entwicklung konservativer Näherungsverfahren berücksichtigt werden sollten.

## Influence of overelastic loading on the stress intensity factor under thermal fatigue conditions

Thermal shock loading often creates high thermal stresses which may exceed yield strength of the material in a surface layer. In this report the application of the linear elastic  $\Delta K$ -concept in the case of cyclic thermal loading within the shakedown region is discussed. To this K-factors for an edge crack in a linear elastic - perfectly plastic plate are calculated using the weight function method and are compared with results obtained with the Finite Element Method. It is shown, that rearrangement stresses during plastic flow in the first cycle must be taken into account developing conservative approximation procedures.

	Seite
I Einleitung	1
II. Temperaturverteilung	
1. Beschreibung des Randwertproblems	2
2. Berechnung der Temperaturverteilung	5
III. Thermo-elastisch-plastische Spannungsberechnung	
3. Thermo-elastisch-plastisches Modell	7
4. Berechnung der Spannungsverteilung für die ideal-plastische Platte	12
5. Numerische Lösung des Gleichungssystems	15
6. Ergebnisse	17
IV. Spannungsintensitätsfaktor für einen durchgehenden Oberflächenriß	
7. Berechnung des K-Faktors	20
8. K-Faktor aus "exakter" Spannungsverteilung	23
9. Vergleich mit FEM-Ergebnissen	25
10. K-Faktor aus genäherter Spannungsverteilung	27
V. Zusammenfassung	30
Literaturverzeichnis	31
Anhang 1 bis 3	33
Abbildungen	39

## I. Einleitung

Bei Kernkraftwerken treten insbesondere bei Störfällen, bei denen eine Notkühlung erforderlich wird, hohe Temperaturgradienten auf. Diese verursachen in verschiedenen Bauteilen (z.B. Rohren, Druckbehälterstützen usw.) Temperaturspannungen, die das Wachstum eventuell vorhandener Risse beeinflussen und damit die Zuverlässigkeit eines Bauteils beeinträchtigen.

Es zeigt sich, daß die elastisch berechneten Temperaturspannungen in der Oberflächenschicht der gekühlten Bauteile die Fließgrenze der betreffenden Werkstoffe überschreiten können. In dieser Arbeit soll untersucht werden, wie sich bei zyklischer thermischer Belastung in einem einfachen Fall das plastische Materialverhalten auf die für das Ermüdungsrißwachstum wesentliche Beanspruchungsgröße auswirkt.

Hierzu wird eine unendlich ausgedehnte Platte, bei der eine der beiden Oberflächen wiederholt gekühlt wird, betrachtet. In den ersten beiden Abschnitten des Berichts wird das Temperaturrendwertproblem formuliert und die Lösung dazu angegeben. Danach folgt eine allgemeine Beschreibung des thermo-elastisch-plastischen Materialmodells (Abschnitt 3). Die Spannungsverteilung in der Platte für die verschiedenen Zyklen kann im Fall eines ideal-plastischen Materialmodells durch die numerische Lösung eines Gleichungssystems gewonnen werden (Abschnitt 4 und 5). Die Ergebnisse werden in Abschnitt 6 diskutiert.

Wie gezeigt wird, tritt unter bestimmten Bedingungen nur im ersten Zyklus plastisches Fließen auf. Das Material verhält sich dann in den höheren Zyklen rein elastisch. Für diesen Fall wird der Spannungsintensitätsfaktor eines durchgehenden Außenrisses in Abhängigkeit von der Rißlänge und der Zeit für verschiedene Größen der Fließspannung bestimmt (Abschnitt 7 und 8). Ein Vergleich mit Finiten-Element-Resultaten schließt sich im Abschnitt 9 an. Im letzten Abschnitt werden zwei Näherungsverfahren zur Berücksichtigung des plastischen Fließens im ersten Zyklus diskutiert.

## II. Temperaturverteilung

### 1. Beschreibung des Randwertproblems

Es wird eine Platte betrachtet, bei der eine der beiden Oberflächen zyklisch einer thermischen Belastung ausgesetzt wird. Den Berechnungen liegt der folgende, gedachte Versuchsablauf zugrunde:

Die Platte wird auf eine Temperatur, wie sie für Reaktordruckbehälter typisch ist, aufgeheizt. Sobald eine homogene Temperaturverteilung in gewünschter Höhe vorliegt, wird eine der beiden Oberflächen plötzlich abgekühlt (Thermoschock). Nach einiger Zeit wird die Kühlung abgeschaltet und die Platte solange aufgeheizt bis die homogene Anfangstemperaturverteilung wieder erreicht ist. Dieser Vorgang wird zyklisch wiederholt.

Es wird angenommen, daß die Platte der Dicke  $w$  in zwei Richtungen unendlich ausgedehnt ist. Die Geometrieverhältnisse und das Koordinatensystem entnimmt man Abb. 1.1. Da an den Plattenoberflächen ortsunabhängige Randbedingungen gewählt werden, hängt die Temperaturverteilung  $T(x,t)$  in der Platte nur noch von der Koordinate  $x$  und der Zeit  $t$  ab. Der Wärmeübergang an den Plattenoberflächen (1) und (2) (Abkühl- bzw. Aufheizvorgang) wird durch die üblichen linearen Randbedingungen

$$-k \left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x = -\frac{w}{2}} = h_1 [T_{u1} - T(-\frac{w}{2}, t)] \quad (1.1a)$$

$$k \left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x = \frac{w}{2}} = h_2 [T_{u2} - T(\frac{w}{2}, t)] \quad (1.1b)$$

beschrieben.  $h_{1,2}$  sind die Wärmeübergangszahlen an der Oberfläche ① bzw. ②,  $T_{u1,2}$  die dazugehörigen Umgebungstemperaturen;  $k$  ist die Wärmeleitfähigkeit der Platte. Die instationäre Temperaturverteilung  $T(x,t)$  wird mittels der Fourierschen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t) = 0 \quad (1.2)$$

berechnet.  $\kappa$  wird als Wärmediffusionskonstante bezeichnet und läßt sich gemäß

$$\kappa = \frac{k}{\rho c} \quad (1.3)$$

durch die Wärmeleitfähigkeit  $k$  die Dichte  $\rho$  und die spezifische Wärme  $c$  ausdrücken. Zur Lösung des beschriebenen Randwertproblems wird außerdem noch die Anfangstemperaturverteilung zur Zeit  $t=0$

$$T(x, t = 0) = T_0(x) \quad (1.4)$$

benötigt.

Zur Diskussion der charakteristischen Phänomene empfiehlt es sich, die üblichen dimensionslosen Größen einzuführen. Die Ortskoordinate wird auf die Plattendicke  $w$  normiert

$$\xi = \frac{x}{w}, \quad (1.5)$$

die Zeit  $t$  durch den dimensionslosen Zeitparameter

$$\tau = \frac{\kappa}{w^2} t \quad (1.6)$$

ersetzt. Die Temperaturgrößen werden auf eine Referenztemperaturdifferenz  $T_r$  (beispielsweise die Differenz der Umgebungstemperaturen beim Thermoschock)

$$\theta = \frac{T}{T_r} \quad (1.7)$$

bezogen. Damit läßt sich das Randwertproblem durch die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \theta(\xi, \tau) - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \theta(\xi, \tau) = 0 \quad (1.8a)$$

$$- \frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi = -\frac{1}{2}} = B_1 [\theta_{u1} - \theta(-\frac{1}{2}, \tau)] \quad (1.8b)$$

$$\frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi = \frac{1}{2}} = B_2 [\theta_{u2} - \theta(\frac{1}{2}, \tau)] \quad (1.8c)$$

$$\theta(\xi, \tau = 0) = \theta_0(\xi) \quad (1.8d)$$

ausdrücken. Als charakteristische Größe für den Wärmeübergang wurden in den Randbedingungen die Biot-Zahlen

$$B_i = \frac{h_i w}{k} \quad i = 1, 2 \quad (1.9)$$

eingeführt.

## 2. Berechnung der Temperaturverteilung

Das durch die Gleichungen (1.8a-d) formulierte Randwertproblem kann mit den in [1] beschriebenen Verfahren gelöst werden. Die Lösung

$$\theta(\xi, \tau) = \theta^\infty(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{(n)}(\xi) e^{-\beta_n^2 \tau} \quad (2.1a)$$

setzt sich aus einem stationären Anteil

$$\theta^\infty(\xi) = \frac{B_1 B_2 (\theta_{u2} - \theta_{u1}) \xi + \frac{1}{2} B_1 B_2 (\theta_{u1} + \theta_{u2}) + B_1 \theta_{u1} + B_2 \theta_{u2}}{B_1 + B_1 B_2 + B_2} \quad (2.1b)$$

und einem instationären Anteil in Form einer unendlichen Summe zusammen, wobei die Summationskoeffizienten  $\theta^{(n)}(\xi)$  durch

$$\theta^{(n)}(\xi) = Z_n(\xi) \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Z_n(\xi') [\theta_0(\xi') - \theta^\infty(\xi')] d\xi' \quad (2.1c)$$

mit

$$Z_n(\xi) = \sqrt{\frac{2(\beta_n^2 + B_2^2)}{(\beta_n^2 + B_1^2)(\beta_n^2 + B_2^2 + B_2) + B_1(\beta_n^2 + B_2^2)}} \cdot \left\{ \beta_n \cos\left[\beta_n \left(\xi + \frac{1}{2}\right)\right] + B_1 \sin\left[\beta_n \left(\xi + \frac{1}{2}\right)\right] \right\} \quad (2.1d)$$

gegeben sind. Die Eigenwerte  $\beta_n$  sind die positiven Nullstellen der Gleichung

$$(\beta^2 - B_1 B_2) \sin\beta - \beta(B_1 + B_2) \cos\beta = 0 \quad (2.1e)$$

Nach Abschnitt 1 herrscht zu Beginn eines jeden Thermoschockzyklus an jedem Punkt der Platte dieselbe Temperatur  $T_0$ , die ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich 0 gesetzt wird. Die Umgebungstemperatur an der Seite ① der Platte wird plötzlich auf  $T_{u1} = -T_s$  abgesenkt, während auf der Seite ② die Temperatur  $T_{u2} = 0$  beibehalten wird. Zum Zeitpunkt  $\tau = \tau_{ab}$  wird die Umgebungstemperatur  $T_{u1}$  wieder auf 0 angehoben. Für die Temperaturberechnung während der Aufheizphase,

dem zweiten Teil eines Thermoschockzyklus, wird die Temperaturverteilung zur Zeit  $\tau = \tau_{ab}$  als Anfangsbedingung verwendet. Der zweite Teil eines Zyklus ist beendet, wenn überall in der Platte wieder die Temperatur  $T = 0$  herrscht. Die Formeln (2.1a - 2.1d) werden im Anhang 1 für die oben skizzierten Bedingungen weiter ausgewertet.

In den Abbildungen 2.1 und 2.2 wurde als Beispiel die Temperatur

$$\theta = \frac{T}{-T_s} \quad (2.2)$$

in Abhängigkeit von  $\xi$  und  $\tau$  für  $\tau_{ab} = 0.1$  aufgetragen. Zur Wahl der verschiedenen Parameter siehe Anhang 2.

Im folgenden wird der Zeitparameter  $\tau$  auf einen Zyklus bezogen, d.h. zu Beginn eines jeden Zyklus gilt  $\tau = 0$ .

### III. Thermo-elastisch-plastische Spannungsberechnung

#### 3. Thermo-elastisch-plastisches Modell

In diesem Abschnitt wird das in der Literatur [2 - 4] zur theoretischen Beschreibung der thermo-elastischen-plastischen Effekte üblicherweise verwendete Materialmodell vorgestellt. Es handelt sich dabei um eine quasistatische Theorie, die sämtliche Trägheitseffekte vernachlässigt.

##### a) Allgemeine Grundlagen

Es wird angenommen, daß sich die Inkremente der Gesamtdehnung, beschrieben durch den Tensor  $d\underline{\underline{\epsilon}}$ , aus drei verschiedenen Beiträgen

$$d\underline{\underline{\epsilon}} = d\underline{\underline{\epsilon}}^E + d\underline{\underline{\epsilon}}^T + d\underline{\underline{\epsilon}}^P \quad *) \quad (3.1)$$

zusammensetzt.  $d\underline{\underline{\epsilon}}^E$  steht für die rein elastischen,  $d\underline{\underline{\epsilon}}^T$  für die thermischen und  $d\underline{\underline{\epsilon}}^P$  für die plastischen Dehnungsinkremente. Bei einem isotopen Material, das den folgenden Untersuchungen zugrunde gelegt wird, sind die Komponenten  $\epsilon_{ij}^E$  des elastischen Dehnungstensors durch das Hookesche Gesetz

$$\epsilon_{ij}^E = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (3.2)$$

mit den Komponenten  $\sigma_{ij}$  des Spannungstensors verknüpft. Als Materialkonstante treten in (3.2) der Elastizitätsmodul  $E$  und die Poissonzahl  $\nu$  auf. Ändert sich die Temperatur  $T$  an einer Stelle des Materials um eine infinitesimal kleinen Wert  $dT$ , so führt dies zu einem Inkrement

$$d\epsilon_{ij}^T = \alpha_T dT \delta_{ij} \quad (3.3)$$

---

\*) In dieser Gleichung wird, wie auch in allen folgenden die Summenkonvention verwendet, wonach über doppelt vorkommende Indizes von 1 - 3 zu summieren ist.

in den thermischen Dehnungen. In (3.3) geht als materialspezifische Größe der Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha_T$  ein.

Plastische Dehnungen treten erst dann auf, wenn das Material unter einer vorgegebenen Last die Fließgrenze erreicht. Diese trennt den elastischen vom plastischen Bereich. Im Falle eines isotropen Materials, in dem der Spannungszustand durch den Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  beschrieben wird, kann die Fließgrenze nur von den drei Invarianten dieses Tensors abhängen. Eine dieser Invarianten ist der hydrostatische Druck  $p = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$ , der, wie Experimente zeigen, praktisch kein Fließen verursacht und damit die Fließgrenze nicht beeinflusst. Mathematisch wird die Fließgrenze in Form einer Fließfunktion

$$F(s_{ij}, g^{(v)}, T) = F(J_2', J_3', g^{(v)}, T) = 0 \quad (3.4)$$

dargestellt, die aus dem oben genannten Grund nur von den Invarianten

$$J_2' = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad \text{und} \quad J_3' = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} \quad (3.5)$$

des Spannungsdeviators

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (3.6)$$

abhängt.

Außerdem kann die Fließfunktion von der Temperatur  $T$  und von Parametern  $g^{(v)}$  zur Beschreibung der Verfestigung abhängen. Als geeignete Größen können für die  $g^{(v)}$  nach [2, 3] beispielsweise die plastischen Dehnungen  $\epsilon_{ij}^p$ , die plastische Arbeit  $W_p$  oder eine plastische Vergleichsdehnung  $\bar{\epsilon}^p$  (Definition siehe Anhang 3) gewählt werden.

Die Fließgrenze kann von einem belasteten Körper nicht überschritten werden. Es besteht die Konvention, das Vorzeichen der Fließfunktion so zu wählen, daß im elastischen Fall immer

$$F < 0 \quad (3.7)$$

erfüllt ist. Erreicht ein Körper in einem Lastfall die Fließgrenze

$$F = 0,$$

so führt eine weitere Belastung, bei der die Fließgrenze überschritten wird, dazu, daß der Körper durch plastisches Fließen, bei dem sich die  $g^{(v)}$  und damit auch die Fließgrenze selbst verändern, ausweicht, bis die Fließbedingung  $F = 0$  wieder hergestellt ist. Dazu muß die sog. Konsistenzbedingung

$$dF = \frac{\partial F}{\partial s_{ij}} ds_{ij} + \frac{\partial F}{\partial T} dT + \sum_v \frac{\partial F}{\partial g^{(v)}} dg^{(v)} = 0 \quad (3.8)$$

erfüllt sein.

Als Beispiel für  $F$  sei die von-Misesssche Fließfunktion angegeben, die in den folgenden Rechnungen durchweg verwendet wird. Sie ist unabhängig von  $J_3'$  und lautet

$$F(J_2', Y(T), \bar{\epsilon}^p) = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - \frac{1}{3} Y^2(T, \bar{\epsilon}^p), \quad (3.9)$$

wobei die im einachsigen Zugversuch gemessene Fließspannung  $Y(T, \bar{\epsilon}^p)$  noch von der Temperatur und der plastischen Vergleichsdehnung  $\bar{\epsilon}^p$  abhängt. In 3.9 wird demnach die Verfestigung des Materials nur durch einen Parameter  $g^{(1)} = \bar{\epsilon}^p$ , der plastischen Vergleichsdehnung, beschreiben. Weitere  $g^{(v)}$  werden nicht betrachtet. Das Inkrement der plastischen Vergleichsdehnung ist durch

$$d\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p} \quad (3.10)$$

mit dem plastischen Verzerrungsinkrement verknüpft (siehe Anhang 3).

Zur Beschreibung des Stoffverhaltens wird die Gleichgültigkeit des Potentialgesetzes

$$d\epsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.11)$$

vorausgesetzt, das sich durch die Irreversibilitätsbedingung

$$dW^p = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p > 0$$

d.h. einer positiven Dichte der plastischen Formänderungsarbeit begrün-

den läßt. (3.11) besagt, daß das plastische Verzerrungsinkrement senkrecht auf der durch (3.4) definierten fünfdimensionalen Hyperfläche im sechsdimensionalen Spannungsraum steht.

b) Vollständige Spannungs-Dehnungs-Beziehung

Zur Angabe der Spannungs-Dehnungs-Beziehung muß zunächst der Proportionalitätsfaktor  $\lambda$  im Potentialgesetz genauer bestimmt werden. Im Fall einer Fließfunktion vom Typ (3.9) ergibt sich aus (3.8), (3.10) und (3.11) für  $\lambda$  der Ausdruck

$$\lambda = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{k1}} d\sigma_{k1} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial T} dT}{\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \bar{\epsilon}^p} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}}}} \quad (3.12)$$

$\lambda$  ist demnach keine Materialkonstante, hängt aber über die Fließfunktion  $F$  mit den Materialeigenschaften zusammen und ist wesentlich durch das Verformungsgeschehen bestimmt. Führt man zur Charakterisierung der Ausdehnung der plastischen Zone noch die Funktion  $g$  mit

$$g = \begin{cases} 1 & \text{falls } F < 0 \quad (\text{elastisches Be- und Entlasten) oder} \\ & \text{falls } F = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial \sigma_{k1}} d\sigma_{k1} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial T} dT < 0 \\ & \quad (\text{plastisches Entlasten}) \\ 0 & \text{falls } F = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial \sigma_{k1}} d\sigma_{k1} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial T} dT \geq 0 \\ & \quad (\text{plastisches Belasten und neutrales plastisches Belasten}) \end{cases} \quad (3.13)$$

ein, so läßt sich die vollständige Spannungs-Dehnungsbeziehung für den thermo-elastischen-plastischen Fall gemäß

$$d\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha_T dT \delta_{ij} - (1-g) \frac{\left( \frac{\partial F}{\partial \sigma_{k1}} d\sigma_{k1} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial T} dT \right) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}}{\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \bar{\epsilon}^p} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}}}} \quad (3.14)$$

angeben.

Für die Fließfunktion kann nun die explizite Form von (3.9) eingesetzt werden, womit man für die plastischen Verzerrungsinkremente die Beziehung

$$d\varepsilon_{ij}^P = \lambda s_{ij} \quad (3.15)$$

erhält, die auch unter dem Namen Lévy-Misèssche Gleichungen bekannt ist. Für  $\lambda$  ergibt sich unter der Annahme einer temperaturunabhängigen Fließspannung der Ausdruck

$$\lambda = - \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s_{kl} d\sigma_{kl}}{\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \bar{\varepsilon}^P} \sqrt{s_{mn} s_{mn}}}}{\quad} \quad (3.16)$$

### c) Ideal-plastischer Körper

Die Vernachlässigung der Verfestigung führt häufig zu einer einfacheren mathematischen Behandlung von Problemen. In diesem Fall ist die Fließspannung  $Y$ , wenn außerdem auch die Temperaturabhängigkeit vernachlässigt wird, eine Konstante und man spricht von einem "ideal-plastischen" Körper. Der Proportionalitätsfaktor  $\lambda$  nimmt in diesem Fall den Wert

$$\lambda = \frac{3d\bar{\varepsilon}^P}{2Y} \quad (3.17)$$

an. Eingesetzt in (3.15) ergibt sich

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^P}{d\bar{\varepsilon}^P} = \frac{3s_{ij}}{2Y}, \quad (3.18)$$

woraus ersichtlich ist, daß die plastischen Verzerrungsinkremente durch die verwendete Fließregel nicht eindeutig bestimmt sind und nur das in (3.18) auftretende Verhältnis festliegt. Dies ist ein allgemeiner Zug des ideal-plastischen Körpers. Wird an der Fließgrenze die Spannung konstant beibehalten, kann sich eine beliebig große plastische Dehnung einstellen. Die Größe der plastischen Dehnung wird durch andere Effekte begrenzt, beispielsweise durch die Randbedingungen.

#### 4. Berechnung der Spannungsverteilung für die ideal-plastische Platte

Basierend auf dem im letzten Abschnitt skizzierten thermo-elastisch-plastischen Modell wird in diesem Abschnitt die Berechnung der Spannungsverteilung in einer unendlich ausgedehnten Platte, wie sie von Landau und Weiner [5] angegeben wurde, kurz vorgestellt.

Es wird angenommen, daß die Platte ideal-plastisches Verhalten zeigt und die temperaturunabhängige von Misessche Fließbedingung gilt. Die Geometrie der Platte und das zur mathematischen Beschreibung verwendete Koordinatensystem kann wieder Abb. 1.1 entnommen werden. Die Oberflächen an der Seite ① und ② sind spannungsfrei und die resultierende Kraft sowie das resultierende Moment auf die übrigen, im unendlichen liegenden Oberflächen verschwinden. Die Temperaturverteilung  $T(x,t)$  in der Platte hängt nur von der Koordinate  $x$  ab und ist durch die in Teil II angegebenen Beziehungen gegeben.

Ausgangspunkt der Rechnung sind die in den Formeln (3.14/15) angegebenen Spannungs-Dehnungsbeziehungen der Form

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \delta_{ij} \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} + (1-g) \lambda \left( \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}}{3} \right) + \delta_{ij} \alpha_T \dot{T} \quad (4.1)$$

wobei ein Punkt über einem Symbol die zeitliche Ableitung der entsprechenden Größe bedeutet. Der Übergang von differentiellen Inkrementen zu Änderungsgeschwindigkeiten erfolgt deshalb, da durch die Temperaturänderungen eine Zeitskala vorgegeben wird. Das plastische Stoffgesetz (3.14) an sich ist gegenüber Transformationen der Zeitskala invariant. Unter den oben genannten Randbedingungen wird angenommen, daß nur die Spannungskomponenten

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma \quad (4.2)$$

von 0 verschieden sind. Die Fließfunktion nimmt damit die einfache Form

$$F = \sigma^2 - Y^2 = 0 \quad (4.3)$$

an.

Nachdem man, wie auch beim elastischen Plattenproblem üblich, aus den Kompatibilitätsbedingungen einen Ansatz für die Dehnungen gewonnen hat, kann mit Hilfe von Gleichung (4.1) die Spannungsverteilung in Form eines Gleichungssystems angegeben werden. Geht man zu dem aus Abschnitt II.1 bekannten dimensionslosen Längenparameter  $\xi$  und Zeitparameter  $\tau$  sowie den dimensionslosen Größen

$$\Theta = \frac{T}{T_r}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma(1-\nu)}{E\alpha_T T_r}, \quad \bar{Y} = \frac{Y(1-\nu)}{E\alpha_T T_r} \quad (4.4)$$

über, so lautet das Gleichungssystem für die plastische Spannungsverteilung

$$\bar{\sigma}(\xi, \tau) = \int_0^\tau g(\xi, \tau') \dot{\bar{\sigma}}^E(\xi, \tau') d\tau' \quad \dot{f}(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} f(\tau) \quad (4.5a)$$

mit

$$\dot{\bar{\sigma}}^E(\xi, \tau) = \dot{F}_1(\tau) + \xi \dot{F}_2(\tau) - \dot{\Theta}(\xi, \tau) \quad (4.5b)$$

und

$$g(\xi, \tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } \bar{\sigma}^2 < \bar{Y}^2 \text{ oder } \bar{\sigma}^2 = \bar{Y}^2, \bar{\sigma} \dot{\bar{\sigma}}^E \leq 0 \\ 0 & \text{für } \bar{\sigma}^2 = \bar{Y}^2 \text{ und } \bar{\sigma} \dot{\bar{\sigma}}^E > 0 \end{cases} \quad (4.5c)$$

Die  $\dot{F}_i(\tau)$  werden aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_1(\tau) \dot{F}_1(\tau) + A_2(\tau) \dot{F}_2(\tau) &= \int_{-0,5}^{+0,5} g(\xi, \tau) \dot{\Theta}(\xi, \tau) d\xi \\ A_2(\tau) \dot{F}_1(\tau) + A_3(\tau) \dot{F}_2(\tau) &= \int_{-0,5}^{+0,5} \xi g(\xi, \tau) \dot{\Theta}(\xi, \tau) d\xi \end{aligned} \quad (4.5d)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} A_1(\tau) &= \int_{-0,5}^{+0,5} g(\xi, \tau) d\xi, & A_2(\tau) &= \int_{-0,5}^{+0,5} \xi g(\xi, \tau) d\xi, \\ A_3(\tau) &= \int_{-0,5}^{+0,5} \xi^2 g(\xi, \tau) d\xi \end{aligned} \quad (4.5e)$$

bestimmt. Der Gleichung (3.13) entsprechende Ausdruck (4.5c) für die Funktion  $g(\xi, \tau)$ , welche die Ausdehnung der plastischen Zone charakterisiert, kann in der hier angegebenen Form aus der Irreversibilitätsbedingung

$$dW^p > 0$$

gewonnen werden (siehe [3]).

## 5. Numerische Lösung des Gleichungssystems

Die Lösung des Gleichungssystems (4.5a - e) ist im rein elastischen Fall, wenn die Funktion  $g$  überall den Wert 1 besitzt, möglich. Setzt man für die Temperaturänderungen  $\dot{\theta}(\xi, \tau)$  die in Abschnitt 2 berechneten Ergebnisse ein, so können die auftretenden Integrationen analytisch ausgeführt werden.

Der Fall liegt anders, wenn Teile der Platte plastizieren, insbesondere dann, wenn nach einiger Zeit partielles plastisches Entlasten auftritt. Die Funktion  $g(\xi, \tau)$  zur Beschreibung der plastischen Zone hängt dann über Gleichung (4.5c) von  $\sigma(\xi, \tau)$  ab, dasselbe gilt für  $\dot{\sigma}^E(\xi, \tau)$ , in das über (4.5d und e)  $g(\xi, \tau)$  eingeht. Da der Integrand in Gleichung (4.5a) somit von der zu berechnenden Größe  $\sigma(\xi, \tau)$  auf der linken Seite des Gleichheitszeichens abhängt, liegt mit (4.5a) eine Integralgleichung vor.

Zur Lösung dieser Integralgleichung wird ein numerisches Lösungsverfahren angewendet, dessen Ablauf im folgenden geschildert wird. Die Spannungen  $\sigma(\xi, \tau)$ , die sich unter den in Abschnitt 1 genannten Versuchsbedingungen einstellen, nehmen nahe der Oberfläche mit wachsender Zeit kontinuierlich zu, bis sie einen Maximalwert erreichen. Dabei tritt zu einer gegebenen Zeit an der gekühlten Oberfläche immer der größte Spannungswert auf. Liegt nun in einem plastisch verformbaren Material die Fließspannung  $Y$  niedriger als der zeitliche Maximalwert der Spannungen an einer Stelle  $\xi$ , so setzt ab einem gewissen Zeitpunkt, an dem die rein elastischen Spannungen  $Y$  übersteigen würden, an solchen Stellen plastisches Fließen ein.

Zu Zeiten, in denen die rein elastischen Spannungen überall unter der Fließgrenze liegen, kann  $\sigma(\xi, \tau)$  aus dem Gleichungssystem (4.5), wie bereits gesagt, einfach berechnet werden. Wird an einer Stelle ein Zeitintervall  $(\tau, \tau + \Delta\tau)$  die Fließspannung überschritten, so gilt

$$\bar{\sigma}(\xi, \tau + \Delta\tau) = \bar{\sigma}(\xi, \tau) + \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} g(\xi, \tau) \dot{\sigma}^E(\xi, \tau) d\tau \quad , \quad (5.1)$$

wobei die rein elastischen Spannungen  $\bar{\sigma}(\xi, \tau)$  zur Zeit  $\tau$  als gegeben betrachtet werden. Bei hinreichend kleinem Zeitinkrement  $\Delta\tau$  kann das Integral in (5.1) nach der Trapezregel durch

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\xi, \tau + \Delta\tau) = \bar{\sigma}(\xi, \tau) + \frac{\Delta\tau}{2} [f(\bar{\sigma}(\xi, \tau), \xi, \tau) \\ + f(\bar{\sigma}(\xi, \tau + \Delta\tau), \xi, \tau + \Delta\tau)] \end{aligned} \quad (5.2)$$

angenähert werden, wobei die Funktion  $f$  durch

$$f(\sigma(\xi, \tau), \xi, \tau) = g(\sigma(\xi, \tau)) \dot{\bar{\sigma}}^E(\xi, \tau) \quad (5.3)$$

definiert ist. Wie bereits erläutert, hängt  $g(\xi, \tau) = g(\sigma(\xi, \tau))$  genauso wie  $\dot{\bar{\sigma}}^E(\xi, \tau)$  vom momentanen Spannungszustand  $\sigma(\xi, \tau)$  ab, allerdings geht über  $\dot{\sigma}(\xi, \tau)$  (siehe die Gleichungen (4.5b,d,e)) in  $\dot{\bar{\sigma}}^E(\xi, \tau)$  eine weitere Zeitabhängigkeit ein. Gleichung 5.2 wird iterativ gelöst. Als erste Näherung wird

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{(1)}(\xi, \tau + \Delta\tau) = \bar{\sigma}(\xi, \tau) + \frac{\Delta\tau}{2} [f(\sigma(\xi, \tau), \xi, \tau) + \\ + f(\bar{\sigma}(\xi, \tau), \xi, \tau + \Delta\tau)] \end{aligned} \quad (5.4)$$

verwendet und damit die zweite Näherung bis n-te Näherung gemäß

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{(2)}(\xi, \tau + \Delta\tau) = \bar{\sigma}(\xi, \tau) + \frac{\Delta\tau}{2} [f(\bar{\sigma}(\xi, \tau), \xi, \tau) + \\ + f(\bar{\sigma}^{(1)}(\xi, \tau + \Delta\tau), \xi, \tau + \Delta\tau)] \\ \vdots \\ \bar{\sigma}^{(n)}(\xi, \tau + \Delta\tau) = \bar{\sigma}(\xi, \tau) + \frac{\Delta\tau}{2} [f(\bar{\sigma}(\xi, \tau), \xi, \tau) \\ + f(\bar{\sigma}^{(n-1)}(\xi, \tau + \Delta\tau), \xi, \tau + \Delta\tau)] \end{aligned} \quad (5.5)$$

mit Hilfe der Beziehungen in (4.5 b-e) bestimmt.

Bei der Computerberechnung zeigt sich, daß eine hinreichende Genauigkeit bereits nach wenigen Iterationsschritten ( $n=2$ ) erreicht wird. Die Berechnung der Spannungsverteilung im plastischen Bereich für das nächste Zeitintervall wird analog fortgesetzt. Auf diese Weise wird die Spannungsverteilung sukzessiv für immer größere Zeiten berechnet.

## 6. Ergebnisse

Die Spannungsverteilungen in der Platte wurden nach den in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Methoden berechnet und für verschiedene Werte des Fließspannungsparameters  $\bar{Y}$  und der bei der Temperaturberechnung wesentlichen Biotzahlen  $B_1$  und  $B_2$  aufgetragen. Dabei wurden die in Abschnitt 1 und 2 geschilderten Versuchsbedingungen vorausgesetzt. Der Fließspannungsparameter

$$\bar{Y} = \frac{(1-\nu)Y}{E\alpha_T T_r} \quad (6.1)$$

hängt außer von der Fließspannung  $Y$ , die durch die Wahl verschiedener Plattenmaterialien verändert werden kann, auch noch von der Temperaturdifferenz  $T_r$  an der thermisch geschockten Oberfläche ab. Die Wahl der hier verwendeten Versuchsparameter wird im Anhang 2 begründet.

In Abb. 6.1 wurde der rein elastische Spannungsverlauf in der Platte, der aus den Temperaturverteilungen der Abb. 2.1/2 resultiert, aufgetragen. Bereits nach sehr kurzer Kühldauer herrscht nahe der gekühlten Oberfläche eine hohe Zugspannung, die sich mit der Zeit aufgrund des Temperatúrausgleichs und der damit abnehmenden Temperaturgradienten abbaut. Zum Zeitpunkt des Abschaltens der Kühlung  $\tau = 0,1$  hat die Spannungsspitze an der Oberfläche einen erheblich niedrigeren Wert als zu Beginn der Kühlperiode ( $\tau = 0,01$ ). Unmittelbar nach dem Abschalten der Kühlung zu Beginn der Wiederaufheizphase gehen die Oberflächenspannungen fast auf 0 zurück, da die oberflächennahen Temperaturgradienten besonders schnell abgebaut werden. Heizt man so lange auf, bis sich wieder die homogene Anfangstemperaturverteilung eingestellt hat, so ergeben sich im Fall rein elastischen Materialverhaltens im nächsten und in allen folgenden Zyklen derselbe räumliche und zeitliche Spannungsverlauf.

In den Abbildungen 6.2 bis 6.10 wurde  $\bar{Y}$  so gewählt, daß während des ersten Zyklus die Fließgrenze überschritten wird und sich nahe der gekühlten Oberfläche, da hier die höchsten Spannungen auftreten, eine Fließzone ausbildet.

Der zeitliche Verlauf der Fließzone für den Fall  $\bar{Y} = 0,15$  ist aus Abb. 6.2 ersichtlich. Für die Biotzahl an der gekühlten Oberfläche wurde wieder  $B_1 = 10$  gewählt. In diesem Fall wird an der Oberfläche die Fließspannung schon nach sehr kurzer Zeit erreicht, und es bildet sich in der oberflächennahen Randschicht eine Fließzone aus; die mit zunehmender Zeit nach innen wächst. Etwa zur Zeit  $\tau = 0,012$ , setzt aufgrund der abnehmenden Temperaturgradienten von der Oberfläche her plastisches Entlasten ein, während in tieferen Bereichen immer noch plastische Belastung auftritt. Die plastische Zone wird immer dünner und nach einiger Zeit ( $\tau = 0,034$ ) ist sie ganz verschwunden. Für den Rest des Zyklus liegen die Spannungswerte wieder ganz im elastischen Bereich.

Die Abbildungen 6.3 bis 6.6 zeigen den räumlichen Spannungsverlauf in der Platte für verschiedene Zeiten  $\tau$  und Werte für  $\bar{Y}$ . Charakteristisch für alle Kurven ist der oberflächennahe Bereich mit positivem Spannungsgradient, der schon zu Zeiten, in denen die Kühlung der Oberfläche noch wirksam, aber die plastische Zone bereits verschwunden ist, auftritt. Dieser Bereich erstreckt sich in etwa über das plastisch verformte Gebiet an der Plattenoberfläche.

Am Ende des 1. Zyklus nach der Wiederaufheizphase treten in der oberflächennahen Schicht Druckeigenspannungen auf, die umso größer sind, je niedriger die Fließgrenze  $\bar{Y}$  liegt. Die Ursache der Eigenspannungen ist die bleibende plastische Dehnung des Plattenmaterials nahe der Oberfläche. Damit nach dem Temperatúrausgleich weiterhin der Zusammenhalt des Materials gewahrt bleibt, wird die gedehnte Oberflächenschicht vom unverformten größeren Teil der Platte zusammengedrückt, was zu den besagten Eigenspannungen führt. Dies erklärt auch die Tatsache, daß der Bereich der Druckeigenspannungen mit der Größe des plastisch verformten Gebiets übereinstimmt.

Liegt die Fließspannung hinreichend niedrig (z.B.  $\bar{Y} = 0,15$ , Abb. 6.6), so werden im Verlauf eines Zyklus die Druckeigenspannungen zeitweise so groß, daß an der Plattenoberfläche plastisches Fließen im Druckbereich einsetzt.

Der Spannungsverlauf in der Platte während des zweiten Zyklus wurde für verschiedene  $\bar{Y}$  in den Abbildungen 6.7 bis 6.10 aufgetragen. Aus den ersten drei Abbildungen erkennt man, daß sich das Material während des gesamten Zyklus rein elastisch verhält. Dies ist auf die Wirkung der vorhandenen Druckeigenstressungen zurückzuführen, d.h. die im ersten Zyklus aufgebrauchte bleibende Dehnung reicht aus, ein nochmaliges Plastizieren im oberflächennahen Bereich zu verhindern. Dies gilt für die entsprechende Wahl der Parameter auch bei allen folgenden Zyklen.

Die Sache liegt anders bei dem in Abbildung 6.10 gezeigten Fall mit  $\bar{Y} = 0.15$ . Der maximale Spannungsunterschied im oberflächennahen Bereich ist so groß, daß man auch im zweiten Zyklus sowie in allen folgenden plastischen Zonen an der Oberfläche beobachtet. Dieses Phänomen der Wechselplastizierung tritt immer dann auf, wenn der rein elastisch berechnete Spannungsunterschied während eines Zyklus an einem Punkt der Platte größer als  $2 \bar{Y}$ , die doppelte Fließgrenze, ist. In diesem Fall überschreiten auch die Druckeigenstressungen während der Aufheizphase die Fließgrenze, so daß während eines jeden Zyklus zweimal plastisches Fließen sowohl im Zugbereich als auch im Druckbereich auftritt. Damit ändert sich der Spannungsverlauf von Zyklus zu Zyklus.

Die Abbildungen 6.11 bis 6.16 zeigen den Temperatur- und Spannungsverlauf in der Platte, wenn in den thermischen Randbedingungen die Biotzahlen  $B_1 = 5$  und  $B_2 = 0.01$  gewählt werden. In diesem Fall verlaufen die räumlichen und zeitlichen Temperaturgradienten flacher, was im gesamten Bereich der Platte zu niedrigeren Spannungen führt. Die obige Interpretation der Spannungskurven gilt auch hier, nur tritt im Fall  $\bar{Y} = 0.15$  keine Wechselplastizierung auf.

#### IV. Spannungsintensitätsfaktor für einen durchgehenden Oberflächenriß

##### 7. Berechnung des K-Faktors

Im folgenden soll untersucht werden, wie sich die zyklische thermische Belastung auf einen vorhandenen durchgehenden Außenriß, dessen Geometrie aus Abb. 7.1. ersichtlich ist, auswirkt.

Im Rahmen der linear-elastischen Bruchmechanik (LEBM) wird die "Stärke" der singulären Spannungsverteilung an der Rißspitze durch den Spannungsintensitätsfaktor (K-Faktor) charakterisiert. Die LEBM kann angewendet werden, solange sich das Material elastisch verhält, bzw. wenn die Fließzonen in der Umgebung der Rißspitze hinreichend klein sind. Letzteres wird im folgenden vorausgesetzt. Bei den in den vorangegangenen Abschnitten diskutierten Versuchen tritt jedoch bei geeigneter Wahl der Temperaturdifferenz bzw. des Materials (Fließgrenze) während des ersten Versuchszyklus nahe der gekühlten Oberfläche eine plastische Zone auf. Während der folgenden Versuchszyklen verhindern die durch den Temperaturschock des ersten Zyklus induzierten Eigenspannungen ein nochmaliges Überschreiten der Fließgrenze, so daß sich das Material überall wieder rein elastisch verhält und die Anwendung der LEBM nach dem ersten Zyklus voll gerechtfertigt ist.

Das Verhalten des Risses in der Platte soll vor allem unter dem Aspekt der thermischen Ermüdung betrachtet werden. Aufgrund der zyklischen Thermoschocks ist der Riß einem Wechselfeld ausgesetzt, das ein Ermüdungsrißwachstum induziert. In die zur theoretischen Beschreibung des Rißfortschritts verwendeten Gesetze

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K) \quad (7.1)$$

geht die Differenz  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$  zwischen dem maximalen ( $K_{\max}$ ) bzw. minimalen K-Faktor ( $K_{\min}$ ) während eines Versuchszyklus als entscheidende Beanspruchungsgröße des Werkstoffes ein.

Ist der Riß nicht nur Zug-, sondern, wie in vorliegendem Fall auch Druckbelastungen ausgesetzt, so kann  $K_{\min}$  negative Werte annehmen. Es wird nun angenommen, daß negative K-Werte nicht zum Rißfortschritt beitragen und aus diesem Grund  $\Delta K$  gemäß

$$\Delta K = \begin{cases} K_{\max} - K_{\min} & \text{falls } K_{\min} > 0 \\ K_{\max} & \text{falls } K_{\min} < 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

bestimmt.

Die Bestimmung der K-Faktoren ist nun für den zweiten und alle höheren Zyklen möglich, da sich das Material hier unter den angegebenen Voraussetzungen rein elastisch verhält. Da das Ermüdungsrißwachstum in erster Linie bei einer großen Anzahl aufgebrachtter Belastungszyklen wesentlich wird, kann man den ersten Zyklus, bei dem wegen des plastischen Materialverhaltens die nachstehend beschriebene Methode der K-Berechnung versagt, außer acht lassen. Der Rißfortschritt ist durch den Wert des K-Faktors während der folgenden Zyklen bestimmt.

Nach [6] hängt der K-Faktor in einer gerissenen Struktur nur von deren Geometrie, von der Art der Randbedingungen an der Oberfläche und der Spannungsverteilung der ungerissenen Struktur entlang der prospektiven Rißoberflächen ab. In [7] wird ausgeführt, daß dies entsprechend für thermische Lasten bzw. Eigenspannungen gilt, vorausgesetzt, der Riß übt keinen Einfluß auf den die Spannungen induzierenden Wärmefluß aus. Dies bedeutet in vorliegendem Fall keine Einschränkung, da die thermische Belastung symmetrisch zum Riß erfolgt.

Ist nun die Spannungsverteilung  $\sigma(x)$  der ungerissenen Struktur im Bereich der prospektiven Rißfläche bekannt, so kann daraus der K-Faktor nach der Methode der Greenschen Funktion\*) [8] berechnet werden. Für den in Abb. 7.1 gezeigten Riß erhält man den K-Faktor für Mode I

---

\*) auch "Gewichtsfunktionenmethode" genannt

Belastung aus der Beziehung

$$K = \int_0^a \sigma(x) G(x,a) dx \quad (7.3)$$

wobei  $\sigma(x)$  diejenige Spannungskomponente ist, die zu einer Zugbelastung der Rioberflche führt. Das Produkt aus einer Punktkraft  $P$  pro Einheitslänge am Ort  $x$  beidseitig senkrecht zur Rioberflche angebracht und der Greenschen Funktion  $G(a,x)$  liefert den Spannungsintensitätsfaktor für diese punktuelle Belastung. Daher ergibt sich der  $K$ -Faktor einer kontinuierlichen Spannungsverteilung  $\sigma(x)$  durch Integration von 0 bis zur Rißlänge  $a$  längs der Rioberflche.

Die Greensche Funktion für den hier betrachteten Fall (siehe Abb.7.1) wurde [9] entnommen und hat unter Verwendung der dimensionslosen Größen

$$\alpha = \frac{a}{w}, \quad \xi^* = \frac{x}{w} + \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \bar{G} = G \sqrt{w} \quad (7.4)$$

die Form

$$\bar{G}(\xi^*, \alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi\alpha}} Y(\xi^*, \alpha) \quad (7.5)$$

mit

$$Y(\xi^*, \alpha) = \frac{3.52(1 - \frac{\xi^*}{\alpha})}{\sqrt{(1-\alpha)^3}} - \frac{4.35 - 5.28 \frac{\xi^*}{\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}} + \left[ \frac{1.3 - 0.3 \left(\frac{\xi^*}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\xi^*}{\alpha}\right)^2}} + 0.83 - 1.76 \frac{\xi^*}{\alpha} \right] \cdot \left[ 1 - \alpha + \xi^* \right]$$

Der dimensionslose  $K$ -Faktor

$$K = \frac{1-\nu}{E \alpha_T T_r \sqrt{w}} K \quad (7.6)$$

ergibt sich entsprechend (7.2) z

$$K = \int_0^{\alpha} \bar{\sigma}(\xi^*) \bar{G}(\xi^*, \alpha) d\xi^*. \quad (7.7)$$

## 8: K-Faktor aus "exakter Spannungsverteilung"

Mit Hilfe der Greenschen Funktion (7.5) und den Spannungsverteilungen in der ungerissenen Struktur für den zweiten und höhere Versuchszyklen wurden die K-Faktoren aus der Beziehung (7.7) ermittelt.

Zunächst sind jedoch bezüglich der Rißentstehung und dem anschließenden Rißwachstum zwei Fälle zu unterscheiden. Zum einen besteht die Möglichkeit, daß während des ersten Zyklus die Struktur fehlerfrei ist und während einem der folgenden Zyklen Rißinitierung und anschließendes Rißwachstum auftritt. Der Riß breitet sich dann in einem Material mit Eigenspannungen, das sich rein elastisch verhält, aus und die LEBM ist uneingeschränkt anwendbar. Die andere, häufig realisierte Möglichkeit ist die, daß während des ersten Zyklus bereits ein endlicher Riß vorhanden ist, der während der folgenden Zyklen weiterwächst. In diesem Fall kann der Riß die sich einstellende Eigenspannungsverteilung in der Umgebung des Rißmundes beeinflussen und zwar in dem Sinne, daß die Eigenspannungen verglichen mit denen bei einem Riß derselben Länge, der erst nach dem ersten Zyklus zu wachsen begonnen hat, verändert sind. Es sind jedoch keine großen Unterschiede zu erwarten, da die plastischen Dehnungen bei der angegebenen thermischen Belastung klein\*) sind und die Unterschiede sich auf die unmittelbare Umgebung des Rißmundes beschränken müssen.

Bei der eingangs erwähnten Vorgehensweise zur K-Faktorberechnung wird im Prinzip die erste der beiden Möglichkeiten realisiert. Die resultierenden K-Faktoren hängen über die Greensche Funktion  $\bar{G}(\xi, \alpha)$  von der Rißlänge  $\alpha$  und über die instationäre Spannungsverteilung  $\bar{\sigma}(\xi, \tau)$  von der Zeit ab.

Die Abbildungen 8.1 und 8.2 zeigen das Ergebnis für den rein elastischen Grenzfall, d.h. die Fließspannung  $\bar{Y}$  ist so groß, daß auch im ersten Zyklus keine plastische Zone auftritt. In Abbildung 8.1 ist die Zeitabhängigkeit des K-Faktors für verschiedene Rißtiefen aufge-

---

\*) bei einer Temperaturdifferenz von 300 K gilt  $\epsilon^{P1} < \alpha \Delta T \approx 0,8\%$

tragen. Die Kurven weisen, ähnlich wie die Spannungsverteilungen, ein für kleinere Rißtiefen zu kürzeren Zeiten hin verschobenes zeitliches Maximum auf. In den  $K(\alpha)$ -Kurven in Abb. 8.2 tritt ebenfalls ein Maximum auf. Zunächst nehmen die  $K(\alpha)$ -Kurven aufgrund der wachsenden Rißlänge zu, laufen dann jedoch in den Druckbereich der Spannungsverteilung, was bei einem weiteren Anwachsen von  $\alpha$  zu kleineren  $K$ -Werten führt.

In den Abb. 8.2 und 8.3 sind die entsprechenden Kurven für den zweiten und höhere Versuchszyklen aufgetragen, wenn der Fließspannungsparameter  $\bar{Y}$  den Wert 0,2 annimmt. Es ergibt sich ein prinzipiell ähnlicher Verlauf des  $K$ -Faktors, jedoch liegen die  $K$ -Werte, insbesondere für kleine Rißlängen, deutlich unter denen des rein elastischen Grenzfalles. Dieser Effekt ist auf die niedrigeren Spannungen im oberflächennahen Bereich zurückzuführen (siehe Abschnitt 6). Da bei der  $K$ -Faktorberechnung die Spannungsverteilung in der Rißspitzenumgebung besonders stark gewichtet wird ( $\lim_{\xi \rightarrow \alpha} \bar{G}(\xi, \alpha) = \infty$ ), macht sich der Effekt für kleinere Rißlängen, bei denen die Rißspitze im reduzierten Spannungsbereich liegt, besonders deutlich bemerkbar. Für  $\alpha = 0.4$  hingegen unterscheiden sich die Kurven nur noch geringfügig. Der  $K$ -Faktor verhält sich für andere Werte der Fließspannung analog, wobei zu beachten ist, daß die  $K$ -Berechnung im Fall der Wechselplastizierung ( $\bar{Y} = 0.15$ ) nicht mehr exakt gültig ist.

Die Abb. 8.4 bis 8.6 entsprechen den bisher diskutierten Fällen und geben den  $K$ -Faktorverlauf im Falle einer geringeren Wärmeübergangszahl an der gekühlten Oberfläche ( $B = 5$ ) wieder.

Unter dem Gesichtspunkt der thermischen Ermüdung ist, wie bereits erwähnt, der in (7.2) festgelegte  $\Delta K$ -Wert von entscheidendem Interesse. In den Abb. 8.7 und 8.8 ist daher  $\Delta K$ -Wert in Abhängigkeit von der Rißlänge für verschiedene Werte des Fließspannungsparameters  $\bar{Y}$  aufgetragen. Deutliche Unterschiede ergeben sich wieder für kleinere Risse, d.h.  $\alpha < 0.25$ , weil sich in diesem Fall die niedrigeren Spannungen im oberflächennahen Bereich besonders stark auf die Rißausbreitung auswirken. Für größere  $\alpha$  gehen die Kurven ineinander über.

## 9. Vergleich mit FEM-Ergebnissen

Zur Überprüfung der Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts wurde für bestimmte Rißlängen eine Finite-Elemente-(FE-)Kontrollrechnung ausgeführt. Für die Berechnung der Temperaturspannungen in der unendlich ausgedehnten Platte mit einem durchgehenden Außenriß ist im Prinzip eine 3D-Struktur erforderlich. Betrachtet man jedoch die in Abb. 9.1 dargestellte Plattengeometrie, so sind unter der Annahme eines ebenen Spannungszustandes ( $d \ll w$ ) und für eine vorgegebene eindimensionale Temperaturverteilung  $T(x)$  die Werte für die einzige wirksame Spannungskomponente  $\sigma_{zz}$  in der ungerissenen Struktur bis auf einen konstanten Faktor identisch mit den Werten für  $\sigma = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$  aus Abschnitt 6 beim bisher betrachteten Plattenproblem. Daher müssen die K-Faktoren für die Modus-I-Belastung ebenfalls bis auf einen Zahlenfaktor übereinstimmen und die in Abb. 9.2 dargestellten 2D-FE-Strukturen reichen zur Lösung des Problems aus.

Die K-Faktoren wurden nach zwei verschiedenen Methoden bestimmt. Es wurden sowohl die Verschiebungsmethode nach Chan (10) als auch die Rißschließungsmethode nach Rybicki et al. (11) angewandt. Im ersten Fall wurde die in Abb. 9.2 (1) dargestellte Struktur bestehend aus Dreiecks- und Viereckselementen mit Zwischenknoten benutzt, im zweiten Fall die Struktur (2), die Elemente ohne Zwischenknoten enthält.

In Abb. 9.3 wird im rein elastischen Fall der nach der Verschiebungsmethode in Abhängigkeit von der Zeit berechnete K-Faktor für verschiedene Rißtiefen mit den analytischen Resultaten des vorangegangenen Abschnittes verglichen. Für kleine Rißtiefen, z.B.  $\alpha = 0.1$  erhält man schlechte Übereinstimmung, da in diesem Fall die Diskretisierung längs der Rißoberfläche zu groß ist. Die Struktur reagiert zu steif und die K-Werte liegen zu niedrig, da mit Hilfe von Verschiebungen ausgewertet wurde. Recht gute Übereinstimmung erzielt man für die Rißlängen  $\alpha = 0.2$  und  $\alpha = 0.4$ , wobei für  $\alpha = 0.2$  der

Wert für  $\tau = 0.01$  wegen den steilen Spannungsgradienten zu kleineren Zeiten schlechter liegt.

Abb. 9.4 zeigt einen Vergleich der beiden numerischen Verfahren für die Rißlänge  $\alpha = 0.2$ . Die mit der Rißschließungsmethode bestimmten K-Werte liegen oberhalb der analytischen Vergleichskurve. Dies liegt wiederum daran, daß das verwendete FE-Modell zu steif reagiert und zur K-Berechnung in diesem Fall Knotenpunktskräfte herangezogen wurden. Ausgezeichnete Übereinstimmung wird für größere Zeiten ( $0,8 < \tau < 0.1$ ) erzielt, da hier kleinere Spannungsgradienten vorliegen. Die verglichen mit den Werten aus der Verschiebungsmethode schlechtere Übereinstimmung mit den analytischen Resultaten im übrigen Zeitbereich liegt vermutlich in der Verwendung von Elementen ohne Zwischenknoten, mit denen sich die steilen Spannungsgradienten weniger gut erfassen lassen.

Bei der Bestimmung des K-Faktors im zweiten und höheren Versuchszyklen für den Fall, daß während des ersten Zyklus plastisches Fließen im Oberflächenbereich aufgetreten ist, wird angenommen, der Riß sei bereits während des ersten Zyklus vorhanden. Das Fließen an der Rißspitze wird unterdrückt, da sonst eine Auswertung im Sinne des K-Konzeptes mit den vorhandenen Methoden nicht mehr möglich ist. Abb. 9.5 zeigt den Vergleich des nach der Verschiebungsmethode bestimmten K-Faktors mit dem rein elastischen Fall. Die Differenz zwischen den beiden  $K(\tau)$ -Kurven stimmt mit den analytisch berechneten K-Kurven sehr gut überein, ausgenommen bei kleineren Zeiten ( $\tau=0.01$ ) aus dem bereits oben diskutierten Grund.

Abb. 9.6 entspricht Abb. 9.5, nur wurden hier die K-Faktoren mit der Rißschließungsmethode aus der Struktur (2) berechnet. Der Unterschied zwischen den beiden FE-Kurven ist deutlich kleiner als der der analytischen Kurven. Diese schlechtere Übereinstimmung kann in der Wahl der FE-Elemente mit linearem Verschiebungsansatz begründet sein, da hier die Spannungsgradienten und das plastische Fließen im oberflächennahen Bereich nicht so gut erfaßt wird.

### 10. K-Faktor aus genäherter Spannungsverteilung

Bei komplizierten Problemen, z.B. die Berechnung der Spannungsverteilung in einem Druckbehälterstutzen (12) ist es nicht mehr möglich, mit vernünftigem Aufwand eine thermo-elasto-plastische Berechnung der Spannungsverteilung über mehrere Versuchszyklen hinweg auszuführen. Daher ist es notwendig, Näherungsverfahren zu entwickeln, von denen hier zwei Varianten näher diskutiert werden.

Die erste und einfachste Näherung besteht darin, die rein elastisch berechnete Spannungsverteilung  $\bar{\sigma}^{EL}(\xi, \tau)$  beim Wert der Fließspannung  $\bar{Y}$  "abzuschneiden" (siehe Abb. 10.1), da die Spannungen während der zweiten und höheren Zyklen diesen Wert aufgrund der vorhandenen Eigenspannungen nicht mehr überschreiten. Die genäherte Spannungsverteilung  $\bar{\sigma}^N(\xi, \tau)$  ist damit durch

$$\sigma^N(\xi, \tau) = \bar{Y} [1 - g(\xi, \tau)] + g(\xi, \tau) \bar{\sigma}^{EL}(\xi, \tau) \quad (10.1)$$

mit

$$g(\xi, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } \bar{\sigma}^{EL}(\xi, \tau) \geq \bar{Y} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

In der Abbildung 10.2 wurde der mit der Methode der Gewichtsfunktionen aus der Spannungsverteilung (10.1) berechnete  $\Delta K$ -Wert in Abhängigkeit von der Rißtiefe  $\alpha$  für verschiedene Fließspannungsparameter  $\bar{Y}$  aufgetragen. Im Vergleich mit den aus der "exakten" Spannungsverteilung errechneten  $\Delta K$ -Kurven ergeben sich mit der genäherten Spannungsverteilung überall kleinere  $\Delta K$ -Werte; die Näherung ist also sicher nicht konservativ. Durch das einfache Abschneiden der Spannungsverteilung werden Spannungsumlagerungen während des plastischen Fließens im Verlauf des ersten Zyklus nicht berücksichtigt. Außerdem sind in diesem Fall auch die Gleichgewichtsbedingungen für die im Unendlichen liegenden kräfte- und momentenfreien Oberflächen verletzt.

Deshalb wird eine zweite Näherung vorgeschlagen, bei der die Spannungsumlagerungen durch eine aus Zug mit überlagerter Biegung bestehende Korrekturfunktion  $\bar{\sigma}^K(\xi, \tau)$  näherungsweise erfaßt werden.

Die Korrekturfunktion wird der rein elastisch berechneten Spannungsverteilung in dem Bereich  $-\frac{1}{2} + \xi_{p1} < \xi < \frac{1}{2}$  überlagert, in dem überall  $\bar{\sigma}^{EL}(\xi, \tau) < \bar{Y}$  erfüllt ist. Die Länge  $\xi_{p1}$ , eine Näherung für die Ausdehnung des geflossenen Bereiches während des ersten Versuchszyklus, wird aus der Bedingung

$$\bar{\sigma}^{EL}\left(-\frac{1}{2} + \xi_{p1}, \tau\right) = \bar{Y} \quad (10.2)$$

bestimmt. Die genäherte Spannungsverteilung ergibt sich demnach zu

$$\bar{\sigma}^N(\xi, \tau) = \bar{Y} [1 - g(\xi, \tau)] + g(\xi, \tau) [\bar{\sigma}^{EL}(\xi, \tau) + \bar{\sigma}^K(\xi, \tau)] \quad (10.3)$$

Für die Korrekturfunktion wird der Ansatz

$$\bar{\sigma}^K(\xi, \tau) = m (\xi - \xi_0) \quad (10.4)$$

gemacht, wobei die Steigung  $m$  und der Schnittpunkt  $\xi_0$  mit der  $\xi$ -Achse aus den Bedingungen für kräfte- und momentenfreie Oberflächen

$$\int_{-\frac{1}{2} + \xi_{p1}}^{\frac{1}{2}} \bar{\sigma}^K(\xi, \tau) d\xi = F = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \xi_{p1}} \{\bar{\sigma}^{EL}(\xi, \tau) - \bar{Y}\} d\xi \quad (10.5)$$

und

$$\int_{-\frac{1}{2} + \xi_{p1}}^{\frac{1}{2}} \xi \bar{\sigma}^K(\xi, \tau) d\xi = M = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \xi_{p1}} \xi [\bar{\sigma}^{EL}(\xi, \tau) - \bar{Y}] d\xi \quad (10.6)$$

folgen. Man erhält

$$\xi_0 = \frac{\frac{F}{M} (4\xi_{p1}^3 - 6\xi_{p1}^2 + 3\xi_{p1} - 1)}{6(\xi_{p1} - 1) \left(\frac{F}{M} \xi_{p1} - 2\right)} \quad (10.6)$$

und

$$m = \frac{2F}{1 - \xi_{p1}^2 + (2\xi_0 + 1)(\xi_{p1} - 1)} \quad (10.7)$$

Die auf dieser Näherung von  $\bar{\sigma}(\xi, \tau)$  basierenden  $\Delta K(\alpha)$ -Kurven sind in der Abb. 10.3 dargestellt. Sie verlaufen überall oberhalb von den entsprechenden Kurven aus der "exakten" Spannungsverteilung, d.h. die Näherung ist in diesem Fall konservativ.

In Abb. 10.4 werden die Näherungsverfahren für  $\bar{Y} = 0.2$  nochmals miteinander verglichen.

Aus dem Vergleich der Näherungen mit den Ergebnissen für die K-Faktoren aus der "exakten" Spannungsverteilung wird deutlich, daß die die Fließgrenze übersteigenden Spannungen während des plastischen Fließens zu Beginn des ersten Zyklus zumindest zum Teil umgelagert werden. Der Unterschied der Näherung (10.3), bei der die Umlagerung durch Überlagerung eines Zug- und Biegespannungsanteiles berücksichtigt wird, zur "exakten" Spannungsverteilung im Bereich der Rißlänge führt zu den Unterschieden zwischen den entsprechenden  $\Delta K$ -Verteilungen in Abb. 10.4. Aus dem niedrigeren Verlauf der  $\Delta K$ -Kurve kann nicht geschlossen werden, daß im exakten Fall Spannungen ohne Umlagerung abgebaut werden, da bei der Berechnung der K-Faktoren nur ein Teil der gesamten Spannungsverteilung berücksichtigt wird.

Die auftretende Spannungsumlagerung im ersten Zyklus ist ein Beispiel dafür, daß sich thermische Spannungen in einem geometrisch freigelagerten Körper, wie hier die unendlich ausgedehnte Platte, normalerweise wie Spannungen erster Art verhalten (siehe auch [6]). Läßt man Spannungsumlagerungen beim Fließen außer acht und nähert die Spannungsverteilungen nach der ersten Methode durch Abschneiden an der Fließgrenze an, erhält man eine nichtkonservative Abschätzung der Spannungsverteilung und die daraus resultierenden K-Faktoren sind als untere Grenzwerte zu betrachten

## V. Zusammenfassung

Es wird eine unendlich ausgedehnte Platte unter zyklischer thermischer Belastung (Kühlung einer der beiden Oberflächen) betrachtet, bei der die induzierten thermischen Spannungen an der gekühlten Oberfläche die Fließgrenze übersteigen. Unter der Annahme eines linear elastischen ideal-plastischen Materialmodells wird die Eigenspannungsverteilung nach dem ersten Zyklus berechnet. Während der folgenden Zyklen tritt kein plastisches Fließen mehr auf (Shakedown-Verhalten), solange die Fließgrenze des Materials nicht sehr niedrig, bzw. die Temperaturdifferenz an der Oberfläche sehr hoch sind. Andernfalls beobachtet man die sogenannte Wechsellastizierung.

Aus der Spannungsverteilung der ungerissenen Struktur wird mit Hilfe der Methode der Greenschen Funktion für einen durchgehenden Außenriß der Spannungsintensitätsfaktor  $K$  berechnet und der Einfluß der Eigenspannungen auf  $K$  untersucht. Es ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit numerisch berechneten  $K$ -Faktoren.

Es werden zwei Näherungsverfahren zur Bestimmung der Spannungsverteilung, aus den rein elastisch berechneten Spannungen angewandt und deren Einfluß auf die  $K$ -Faktoren diskutiert. Es zeigt sich, daß einfaches Abschneiden der Spannungen an der Fließgrenze zu einer unteren Grenzkurve für den  $K$ -Faktor führt und für genauere Näherungen Spannungsumlagerungen mitberücksichtigt werden müssen.

Literaturverzeichnis

- [1] Carslaw, H.S., Jaeger, J.C., "Conduction of Heat in Solids"  
Oxford University Press, Oxford 1959
- [2] Hill, R., "The Mathematical Theory of Plasticity",  
Oxford University Press, Oxford 1967
- [3] Boley, B.A., Weiner, J.H., "Theory of Thermal Stresses"  
John Wiley & Sons, New York 1960
- [4] Aoki, S., Kishimoto, K., Sakata, H., "Elastic-Plastic  
Analysis of Crack in Thermally-Loaded Structures",  
Engng. Fract. Mech. 16, 405-413 (1982)
- [5] Landau, H.G., Weiner, J.H., "Transient and Residual  
Stress in Heat-Treated Plates", J.Appl.Mech. 25, 459-465 (1958)
- [6] Bueckner, H.F., "The Propagation of Cracks and the Energy of  
Elastic Deformation", Trans. ASME 80, 1225-1230 (1958)
- [7] Chell, G.G., Ewing, D.J.F., "The Role of Thermal and Residual  
Stresses in Linear Elastic and Post Yield Fracture Mecha-  
nics", Int. J. of Fracture 13, 467-479 (1977)
- [8] Bueckner, H.F., "Field Singularities and Related Integral  
Representations" in Methods of Analysis and Solution of  
Crack Problems; ed. G.C.Sih, Noordhoff International  
Publishing, Leyden 1973
- [9] Tada, H., Paris, P.C., Irwin, G.R., "The Stress Analysis of  
Cracks Handbook", Del Research Corporation St. Louis, Missouri  
(1974)
- [10] Chan; S.K., Tuba, J.S., Wilson, W.K., "On the Finite Element  
Method in Linear Fracture Mechanics", Engng.Fract. Mech. 2,  
1-17(1970)

- [11] Rybicki, E.F., Kanninen, M.F., "A Finite Element Calculation of Stress Intensity Factors by a Modified Crack Closure Integral", Engng. Fract. Mech. 9, 931-938 (1977)
- [12] Stamm, H., unveröffentlichter Bericht, Kernforschungszentrum Karlsruhe 1982.

Anhang 1

Ergänzende Rechnungen zu den Temperaturverteilungen aus  
Abschnitt 2. Elastische Spannungsberechnung in der Platte

Bei der Bestimmung der Temperaturverteilung  $\theta(\xi, \tau)$  gemäß den Formeln (2.1 a - d) mit der Anfangsbedingung

$$\theta(\xi, \tau) = \theta_0(\xi) = 0 \quad (\text{A 1.1})$$

kann das Integral in (2.1c)

$$\theta^{(n)}(\xi) = - Z_n(\xi) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Z_n(\xi') \theta^\infty(\xi') d\xi' \quad (\text{A 1.2})$$

analytisch berechnet werden. Man erhält für  $\theta_n(\xi)$  den Ausdruck

$$\theta^{(n)}(\xi) = A_n \{ \beta_n \cos [\beta_n (\xi + \frac{1}{2})] + B_1 \sin [\beta_n (\xi + \frac{1}{2})] \} \quad (\text{A 1.3})$$

mit

$$A_n = \frac{2(\beta_n^2 + B_2)}{[(\beta_n^2 + B_1^2)(\beta_n^2 + B_2^2 + B_2) + B_1(\beta_n^2 + B_2)] (B_1 + B_1 B_2 + B_2)} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{B_1}{\beta_n} \cos \beta_n (\theta_1 (B_1 + B_2) + \theta_2 B_1 B_2) \right.$$

$$\left. - \sin \beta_n (\theta_1 B_1 + \theta_2 B_2 (1 + B_1) + \frac{B_1^2}{\beta_n^2} B_2 (\theta_2 - \theta_1)) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\beta_n} \theta_1 B_1 (B_1 + B_1 B_2 + B_2) \right\} \cdot$$

Zur Berechnung der Temperaturverteilung nach dem Abschalten der Kühlung für Zeiten  $\tau > \tau_{ab}$ , werden die gemäß Gleichung (2.1a) und (A 1.3) zur Zeit  $\tau_{ab}$  berechneten Temperaturen als Anfangstemperaturverteilung

$$\theta_0(\xi) = \theta(\xi, \tau = \tau_{ab}) \quad (\text{A 1.4})$$

verwendet. Das in diesem Fall zu berechnende Integral

$$+ \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Z_n(\xi') \theta(\xi', \tau_{ab}) d\xi'$$

wird der Einfachheit halber numerisch ausgewertet.

Die rein elastischen Thermospannungen während der Aufheizphase können aus dem Gleichungssystem (4.4) mit  $g(\xi, \tau) = 1$  für alle  $\xi$  in bekannter Weise wieder analytisch bestimmt werden. Als Resultat ergibt sich

$$\sigma = \frac{\sigma(1-\nu)}{E \alpha T_r} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n F_n(\xi, \beta_n, B_1) e^{-\beta_n^2 \tau} \quad (\text{A 1.5})$$

mit  $A_n$  aus Gleichung (A 1.3) und

$$F_n(\xi, \beta_n, B_1) = 12\xi \left\{ \frac{\cos\beta_n}{\beta_n} (1-B_1) + \sin\beta_n \left(1 + \frac{B_1}{\beta_n^2}\right) - \frac{1}{\beta_n} \right\} +$$

$$+ (1-6\xi) \left\{ \sin\beta_n + \frac{B_1}{\beta_n} (1-\cos\beta_n) \right\} - \quad (\text{A 1.6})$$

$$- \beta_n \cos\left\{\beta_n \left(\xi + \frac{1}{2}\right)\right\} - B_1 \sin\left\{\beta_n \left(\xi + \frac{1}{2}\right)\right\}$$

## Anhang 2

### Zur Wahl der Versuchsparameter

Zuerst sind die Biotzahlen

$$B = \frac{hw}{k}$$

zur Charakterisierung des Wärmeüberganges an den Plattenoberflächen festzulegen. Mit einer für einen ferritischen Stahl typischen Wärmeleitfähigkeit von

$$k = 40 \frac{W}{mK}$$

erhält man bei einer 2 cm dicken Platte aus den Wärmeübergangszahlen

$$h = 20 \frac{kW}{m^2K} \quad \text{für Wasser-Metall} \quad B = 10$$

$$h = 20 \frac{W}{m^2K} \quad \text{für Luft - Metall} \quad B = 0,01$$

Für ein Material mit obiger Wärmeleitfähigkeit, der Dichte

$$\rho = 7,85 \frac{g}{cm^3}$$

und mit einer spezifischen Wärme

$$c = 550 \frac{J}{kg K}$$

gilt

$$t = 1s \quad \hat{=} \quad \tau = 0,02316$$

Die Kühldauer wurde so gewählt, daß die K-Faktoren der in Betracht kommenden Risse innerhalb dieses Zeitraumes ihr Maximum durchlaufen. Dies ist für  $\tau_{ab} = 0,1$  erfüllt.

Mit

$$E = 200000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} ; \nu = 0,3$$

$$\alpha_T = 1,3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}$$

und

$$\Delta T = 300 \text{ K}$$

ergibt sich für die charakteristische Spannungsgröße, die häufig zur Normierung verwendet wird

$$\frac{E\alpha_T\Delta T}{1 - \nu} \approx 1114 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Anhang 3

Berechnung der plastischen Vergleichsdehnung

Das Inkrement der plastischen Vergleichsdehnung wird aus der Forderung, daß sich die Arbeit der plastischen Formänderung in der Form

$$dW^P = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}^P \quad (\text{A 3.1})$$

darstellen läßt.  $\bar{\sigma}$  ist dabei die sogenannte Vergleichsspannung

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (\text{A 3.2})$$

mit der die im folgenden vorausgesetzte von Misessche Fließfunktion die einfache Form

$$F = \bar{\sigma}^2 - Y^2 = 0 \quad (\text{A 3.3})$$

annimmt.

Aus dem Potentialgesetz (3.11) folgt mit obiger Fließfunktion

$$dW^P = \sigma_{ij} \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{2}{3} \lambda \bar{\sigma}^2 \quad (\text{A 3.4})$$

und damit unter Verwendung von (A 3.1)

$$d\bar{\epsilon}^P = \frac{2}{3} \lambda \bar{\sigma} \quad (\text{A 3.5})$$

Ebenfalls aus dem Potentialgesetz kann für  $\lambda$  der Ausdruck

$$\lambda = \frac{1}{\bar{\sigma}} \sqrt{\frac{3}{2} d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ij}^P} \quad (\text{A 3.6})$$

gewonnen werden, womit sich das Inkrement

$$d\bar{\epsilon}^P = \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ij}^P} \quad (\text{A 3.7})$$

ergibt.

Die plastische Vergleichsdehnung berechnet sich aus

$$\bar{\varepsilon}^D = \int_C d\bar{\varepsilon}^D, \quad (\text{A } 3.8)$$

wobei durch den Weg C eine bestimmte Folge von aufgebrauchten plastischen Dehnungsincrementen erfaßt wird.

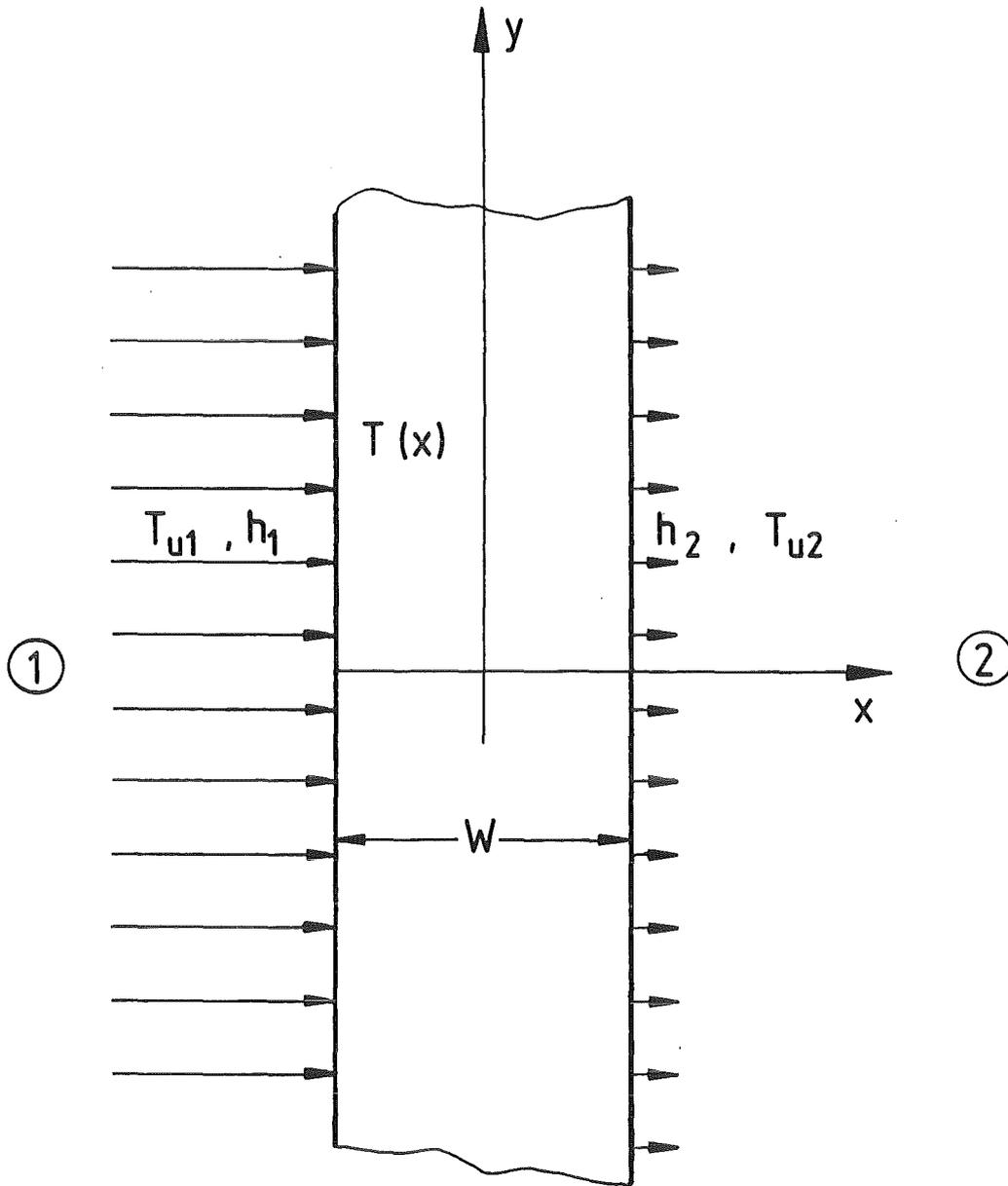


Abb. 1.1 Plattengeometrie und thermische Randbedingungen

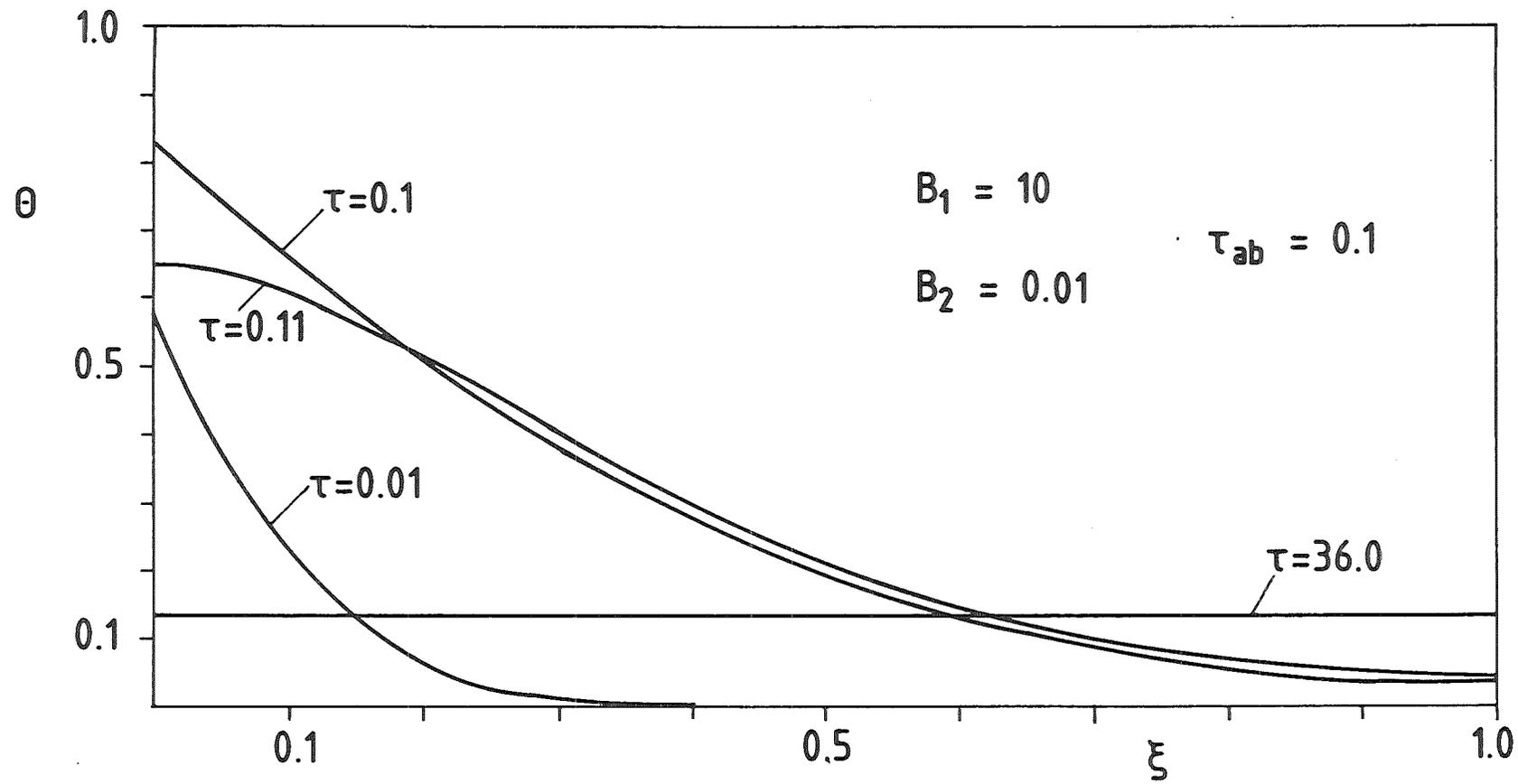


Abb. 2.1 Temperaturverlauf in der Platte zu verschiedenen Zeiten  $\tau$   
 $\tau_{ab} = 0.1$

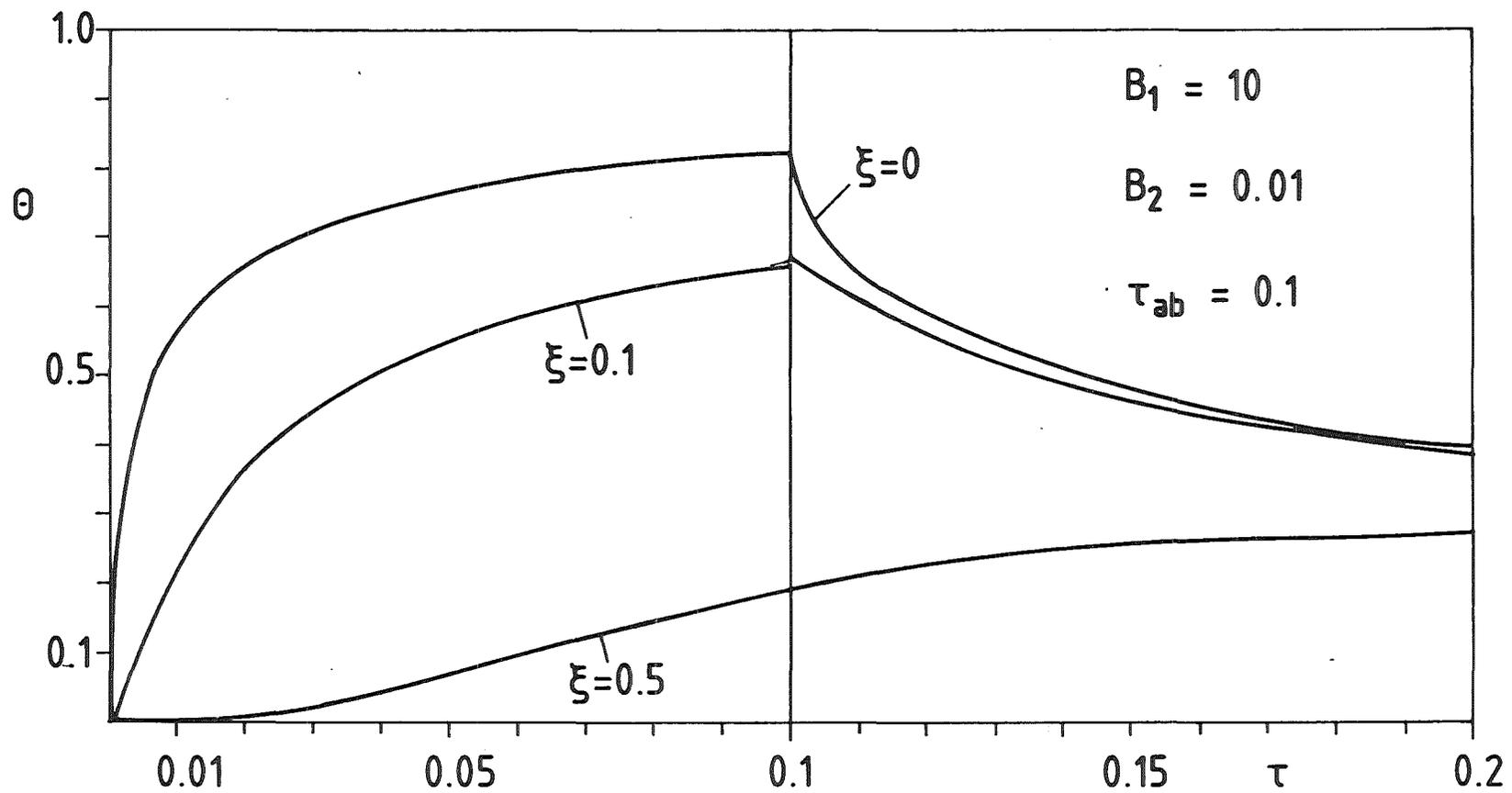


Abb. 2.2 Zeitlicher Temperaturverlauf in der Platte für verschiedene Plattentiefen  $\xi$ .  $\tau_{ab} = 0.1$

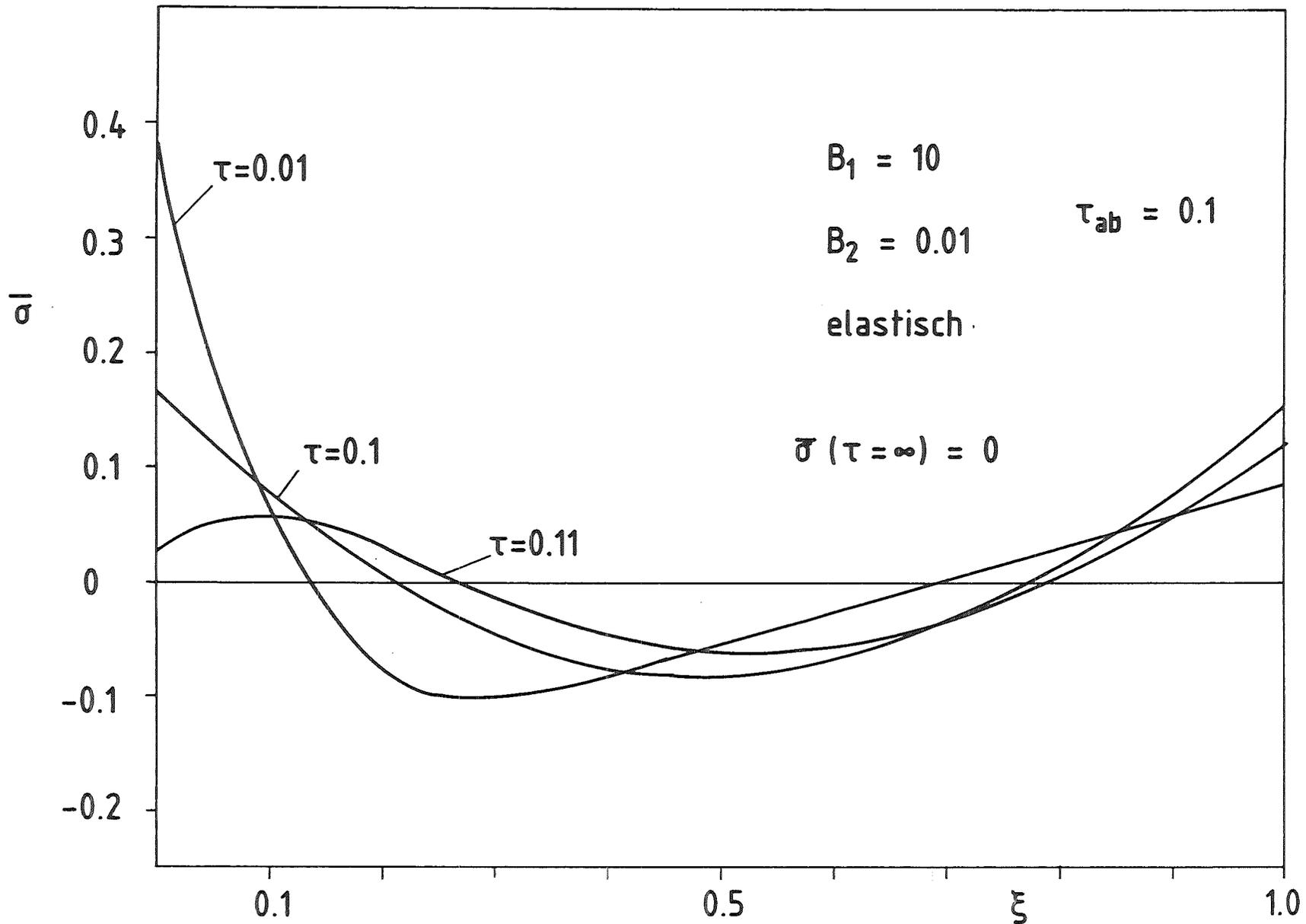


Abb. 6.1 Elastische Spannungsverteilung in der Platte.  
 $B_1, B_2$ : Wärmeübergangszahlen an der gekühlten bzw. ungekühlten  
 Zur Zeit  $\tau = 0.1$  wurde die Kühlung abgeschaltet.

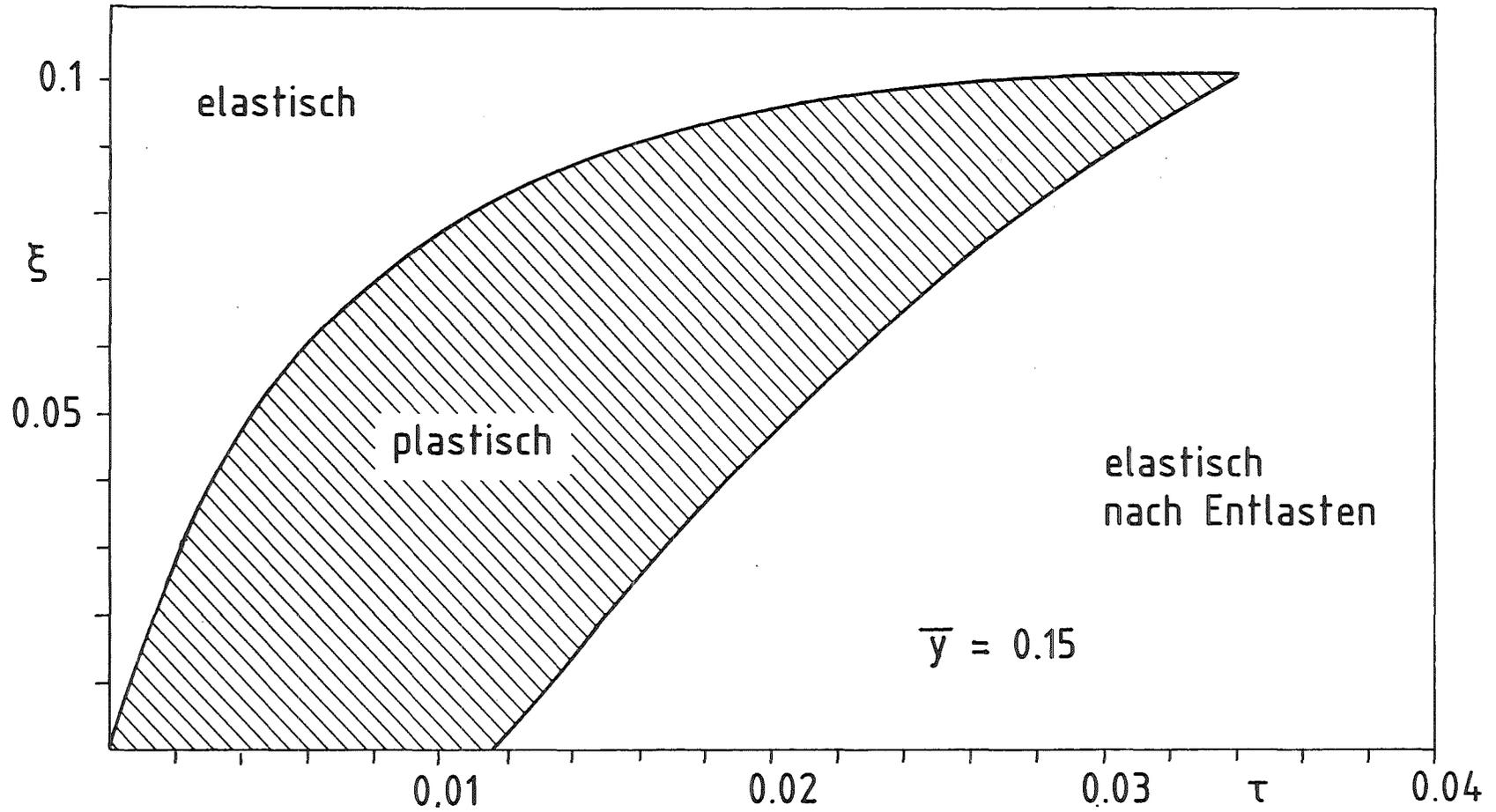


Abb. 6.2 Zeitlicher Verlauf der Fließzone

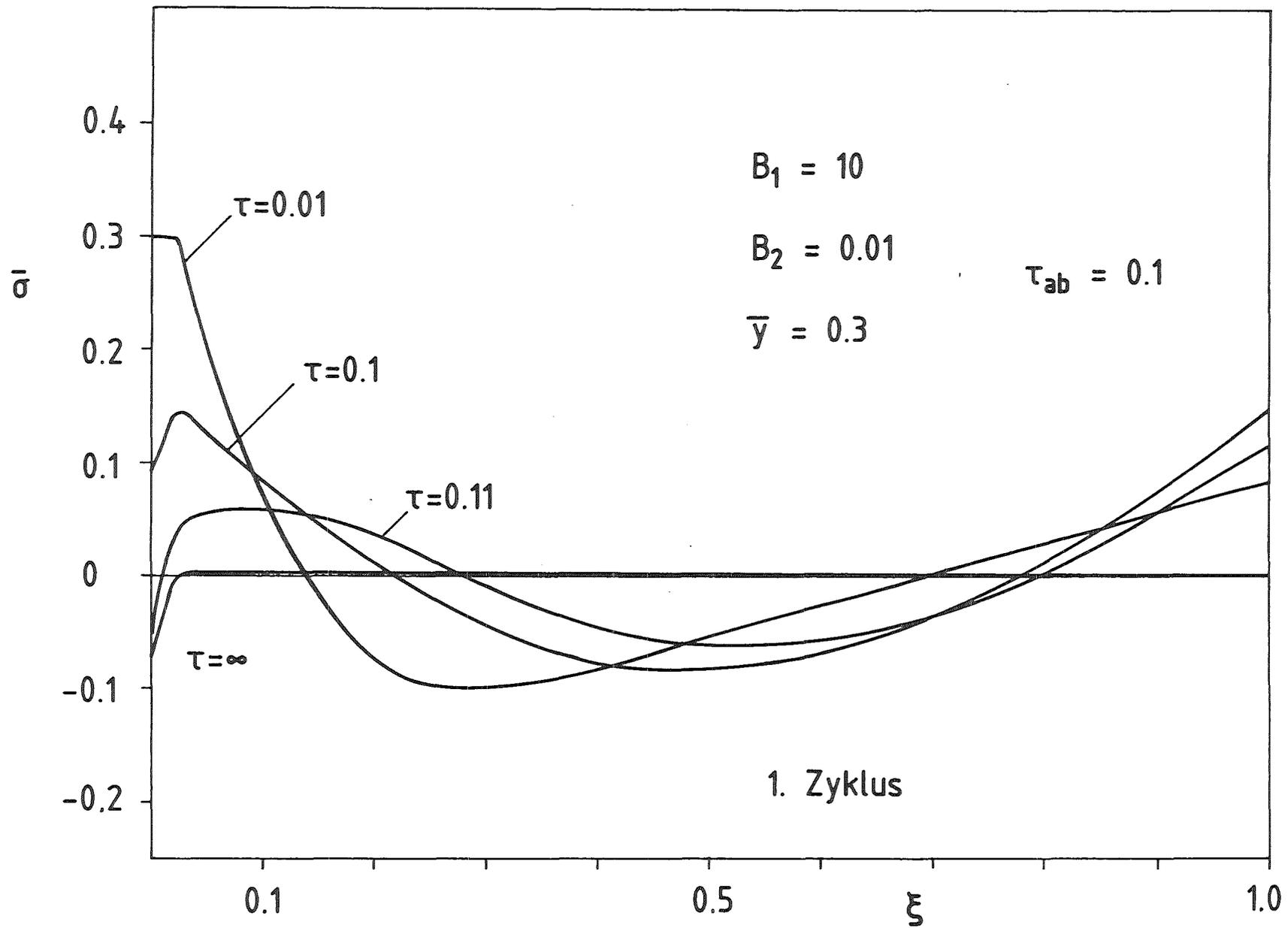


Abb. 6.3 Spannungsverlauf in der Platte während des 1. Zyklus

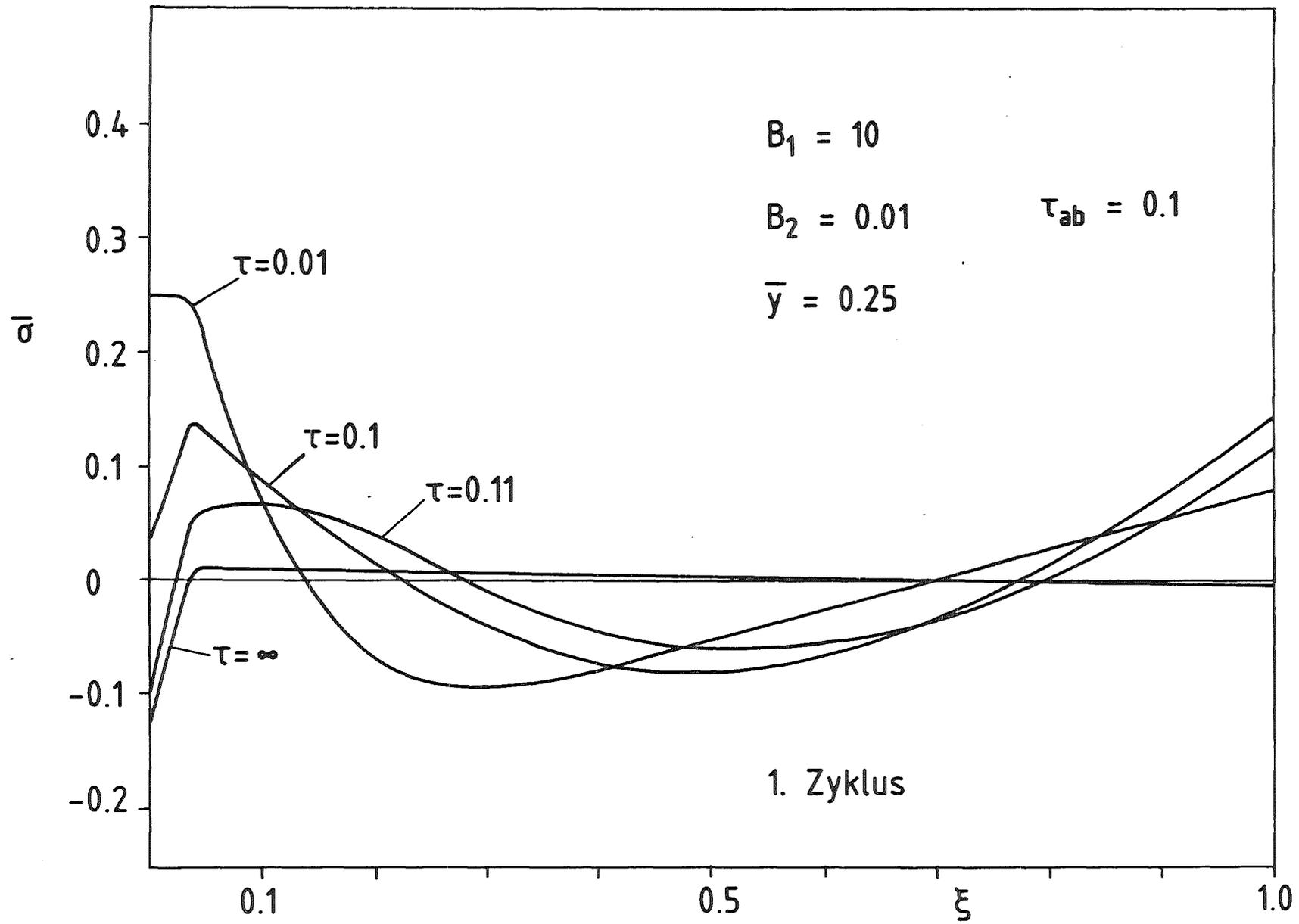


Abb. 6.4 Spannungsverlauf in der Platte während des 1. Zyklus

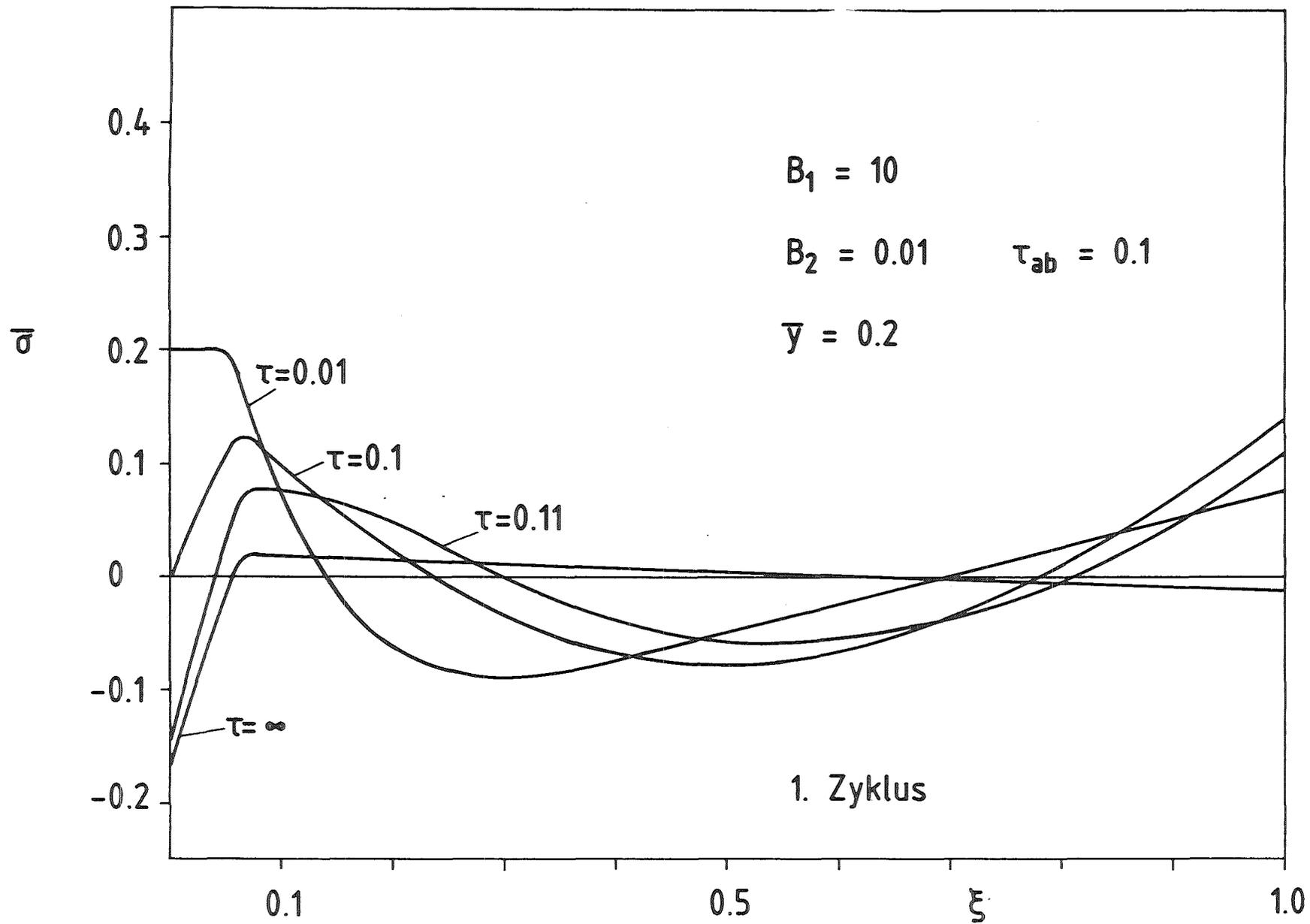


Abb. 6.5 Spannungsverlauf in der Platte während des 1. Zyklus

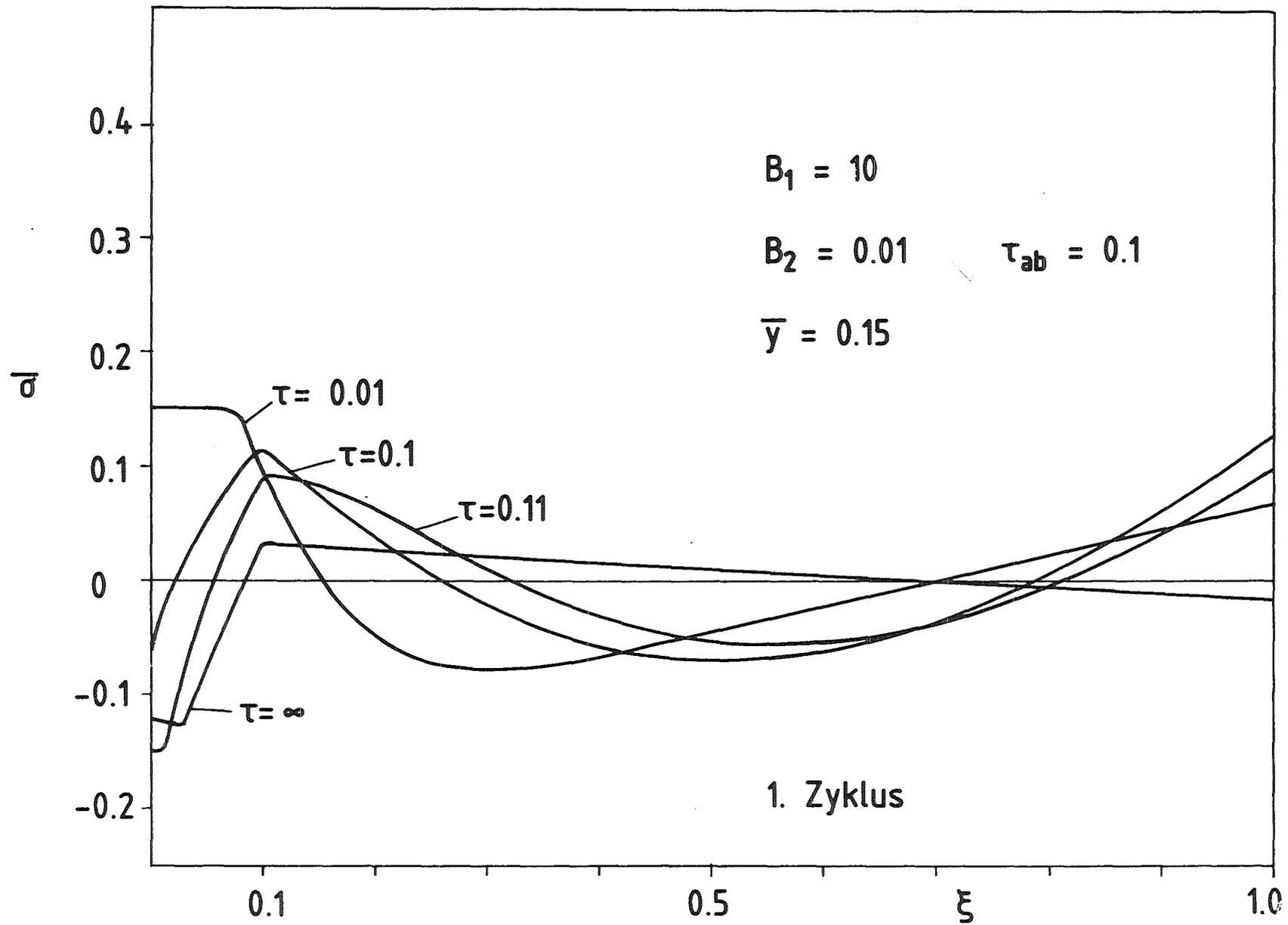


Abb. 6.6 Spannungsverlauf in der Platte während des 1. Zyklus

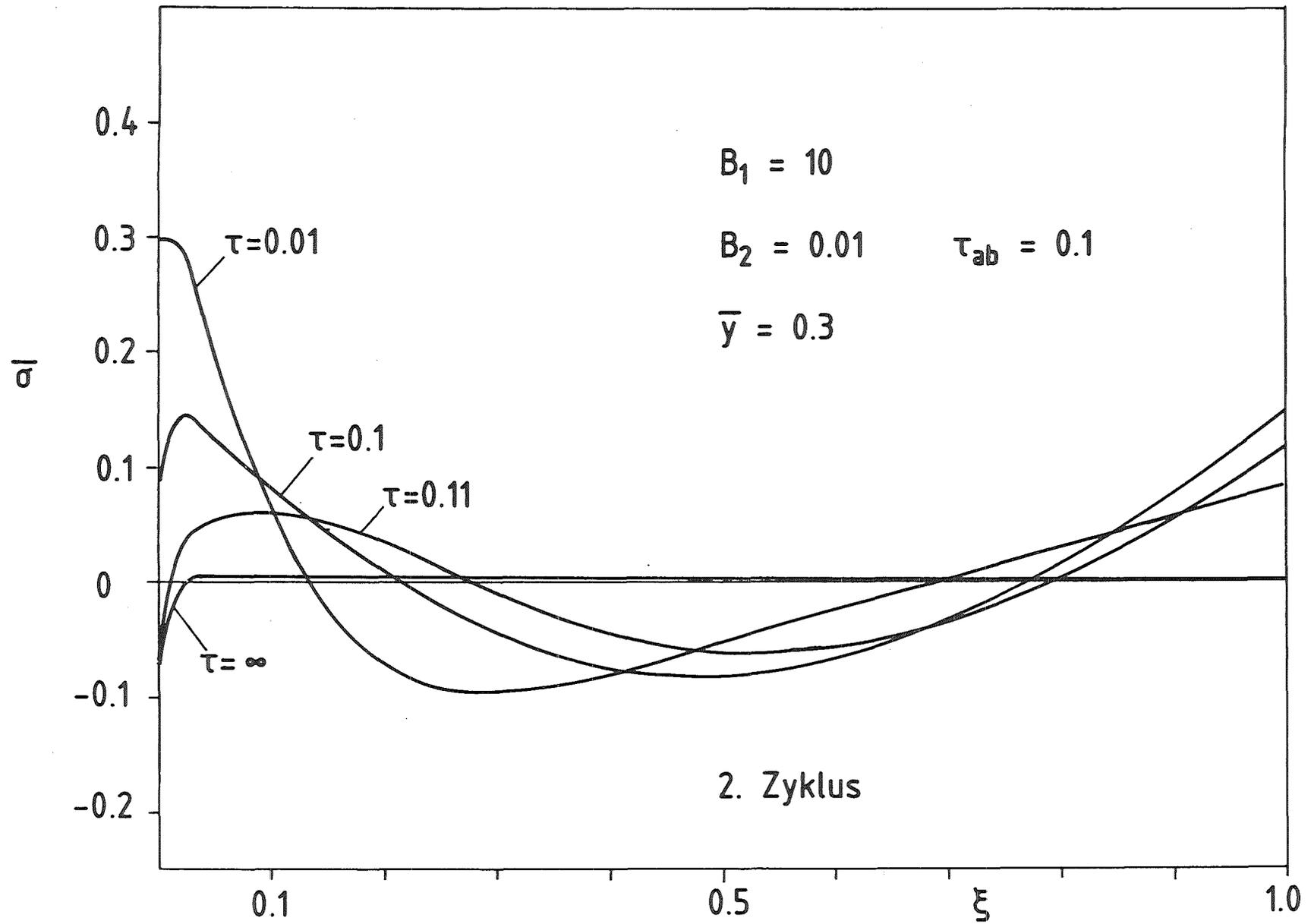


Abb. 6.7 Spannungsverlauf in der Platte während des 2. Zyklus

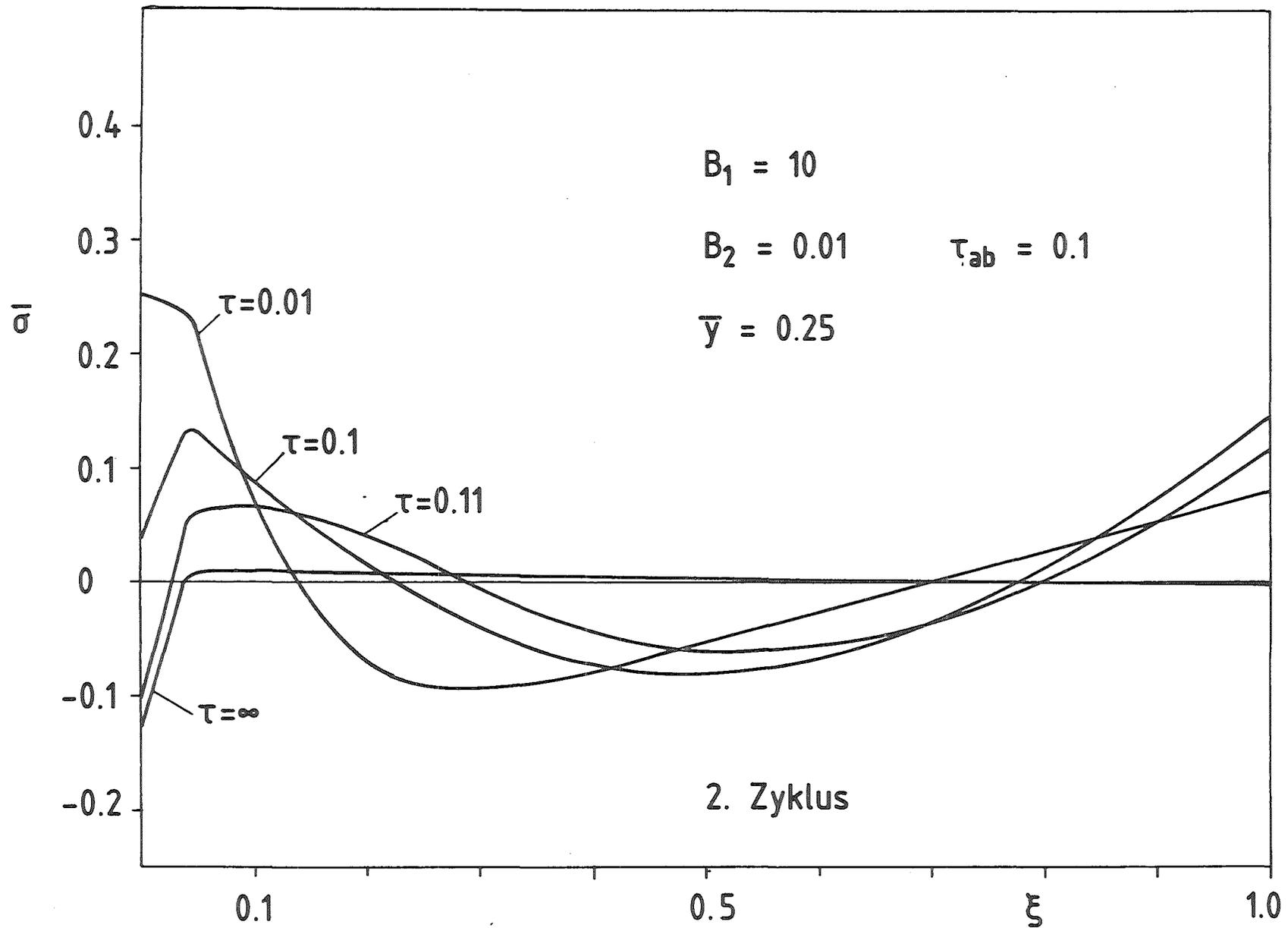


Abb. 6.8 Spannungsverlauf in der Platte während des 2. Zyklus

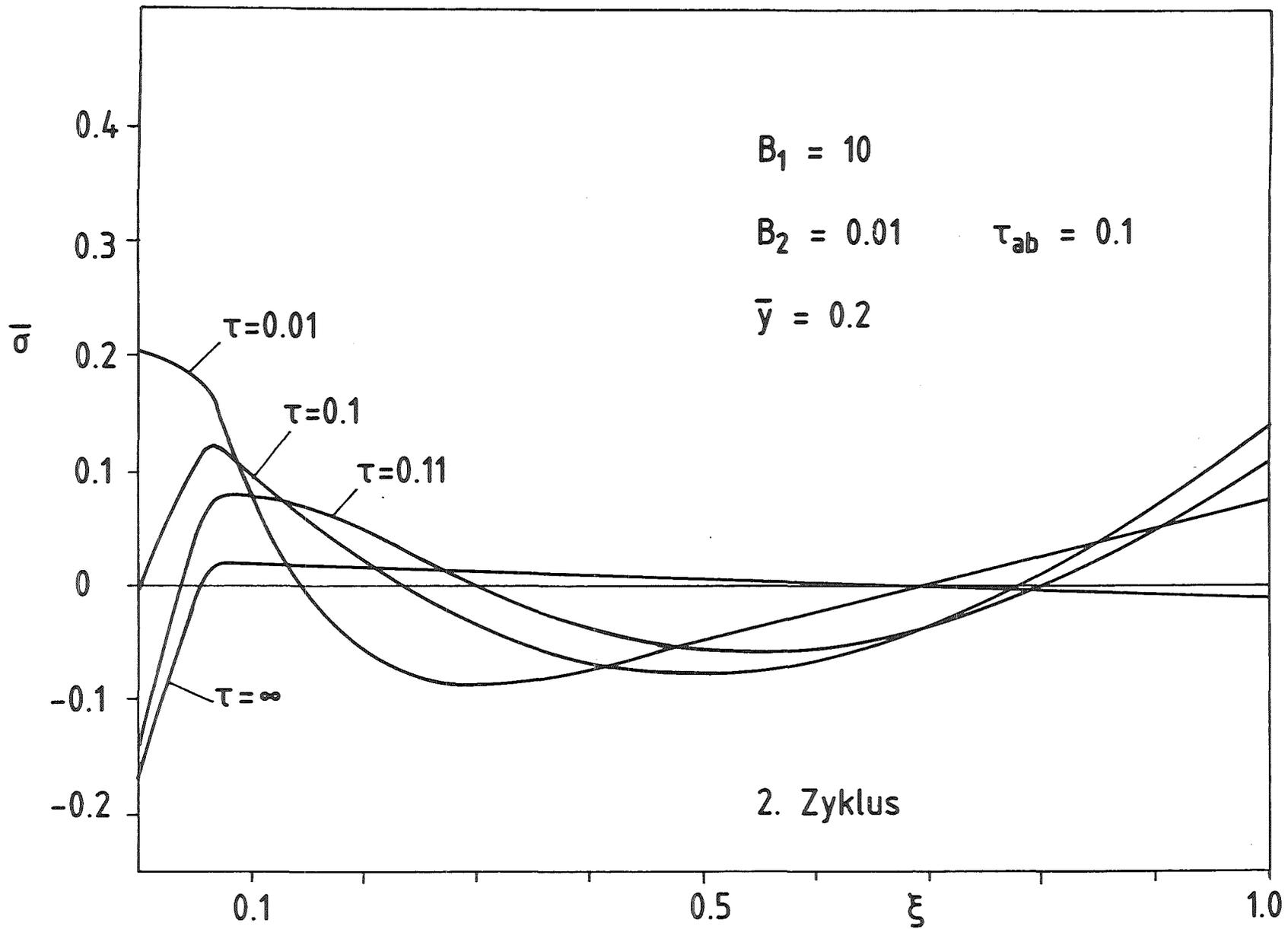


Abb. 6.9 Spannungsverlauf in der Platte während des 2. Zyklus

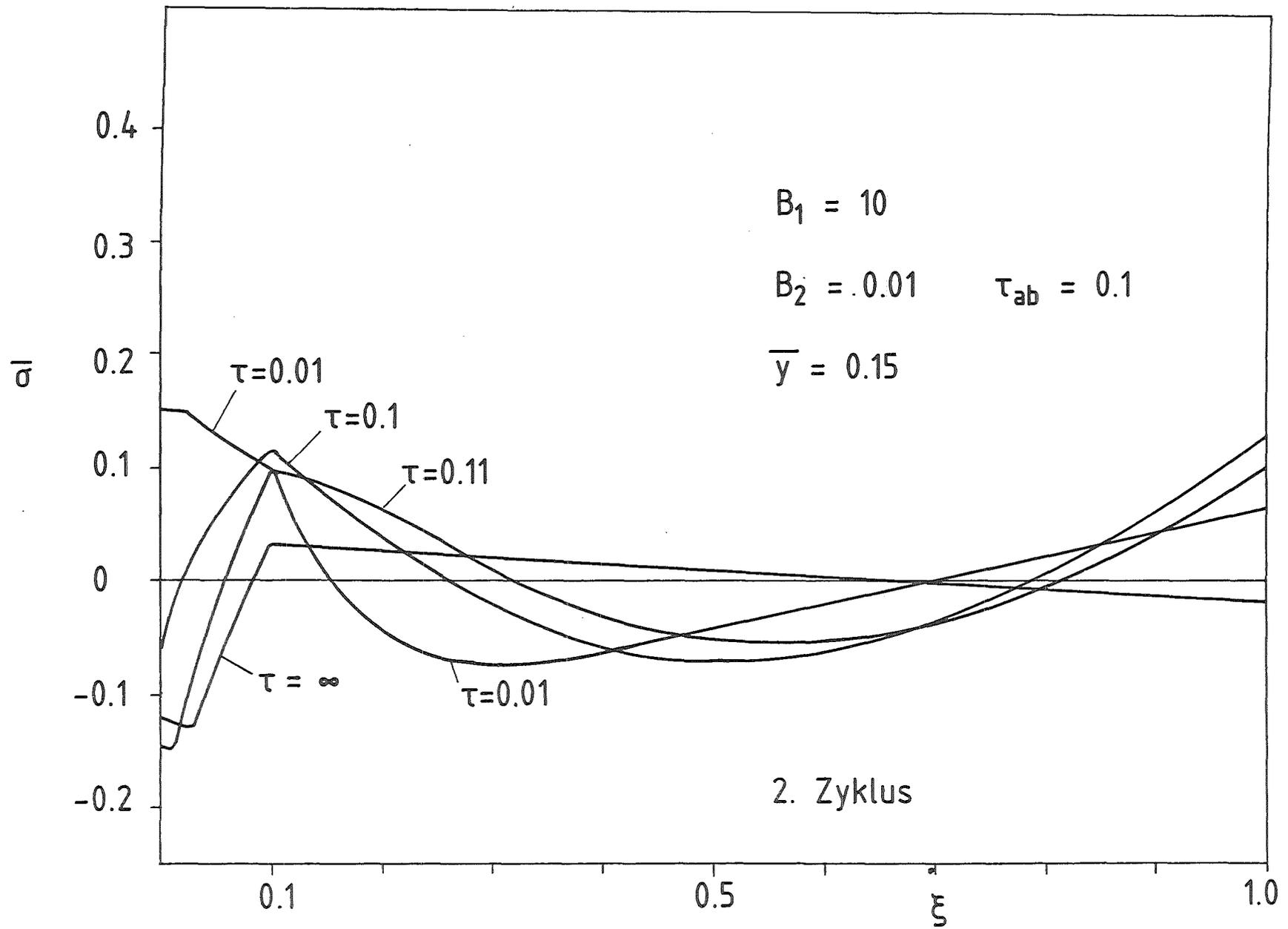


Abb. 6.10 Spannungsverlauf in der Platte während des 2. Zyklus

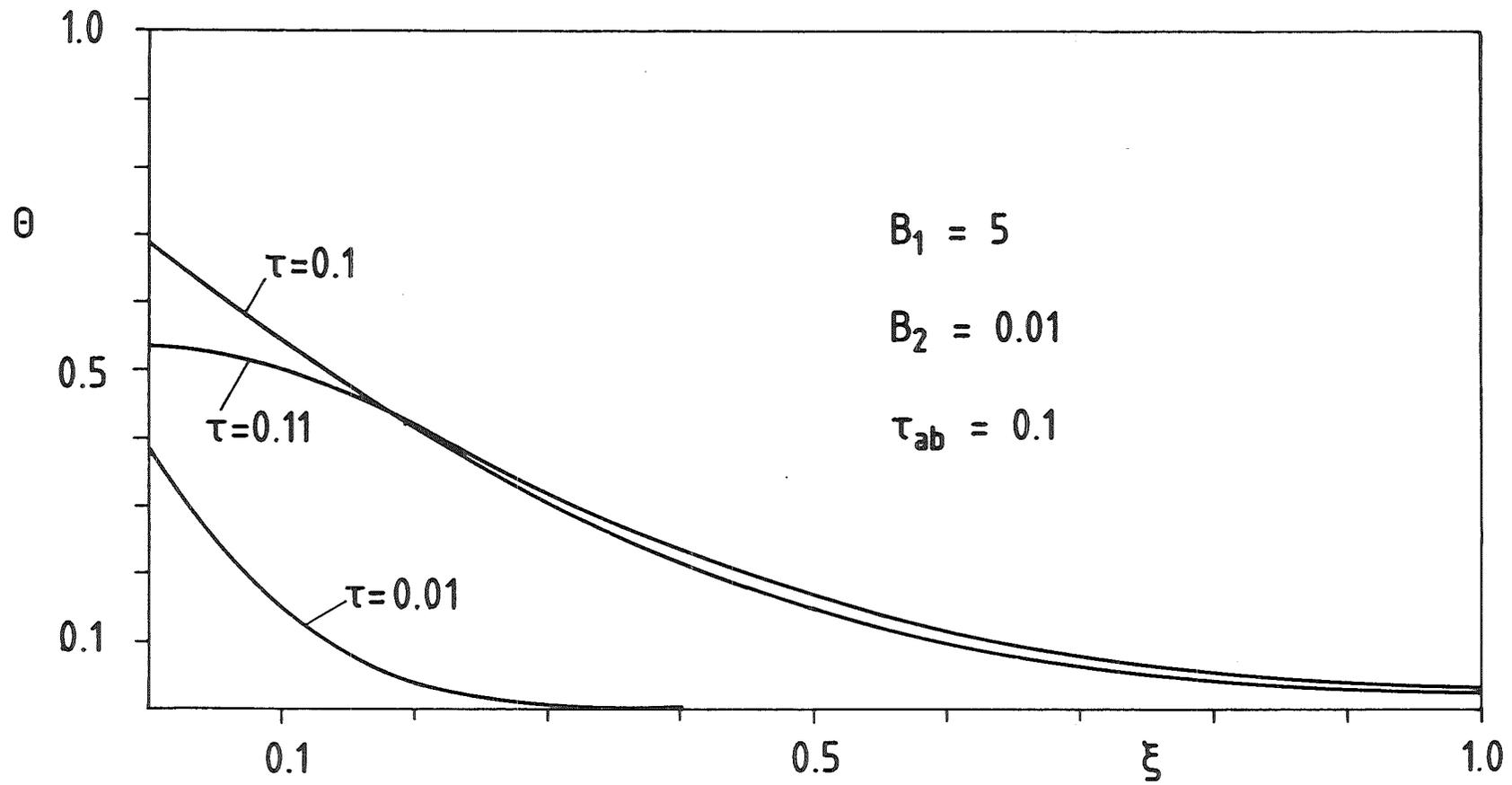


Abb. 6.11 Temperaturverlauf in der Platte zu verschiedenen Zeiten  $\tau$ .

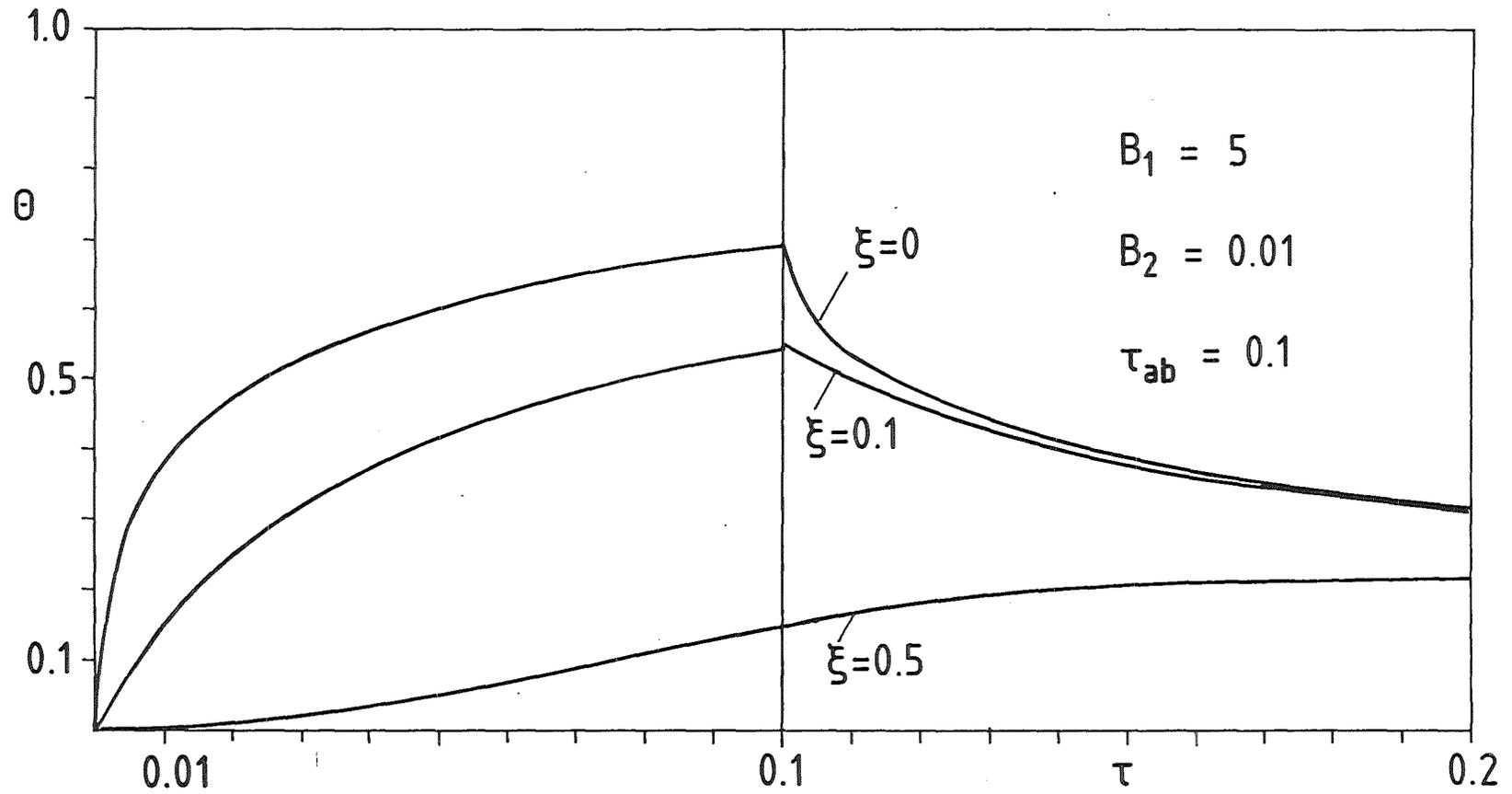


Abb. 6.12 Zeitlicher Temperaturverlauf in der Platte für verschiedene Plattentiefen  $\xi$ .

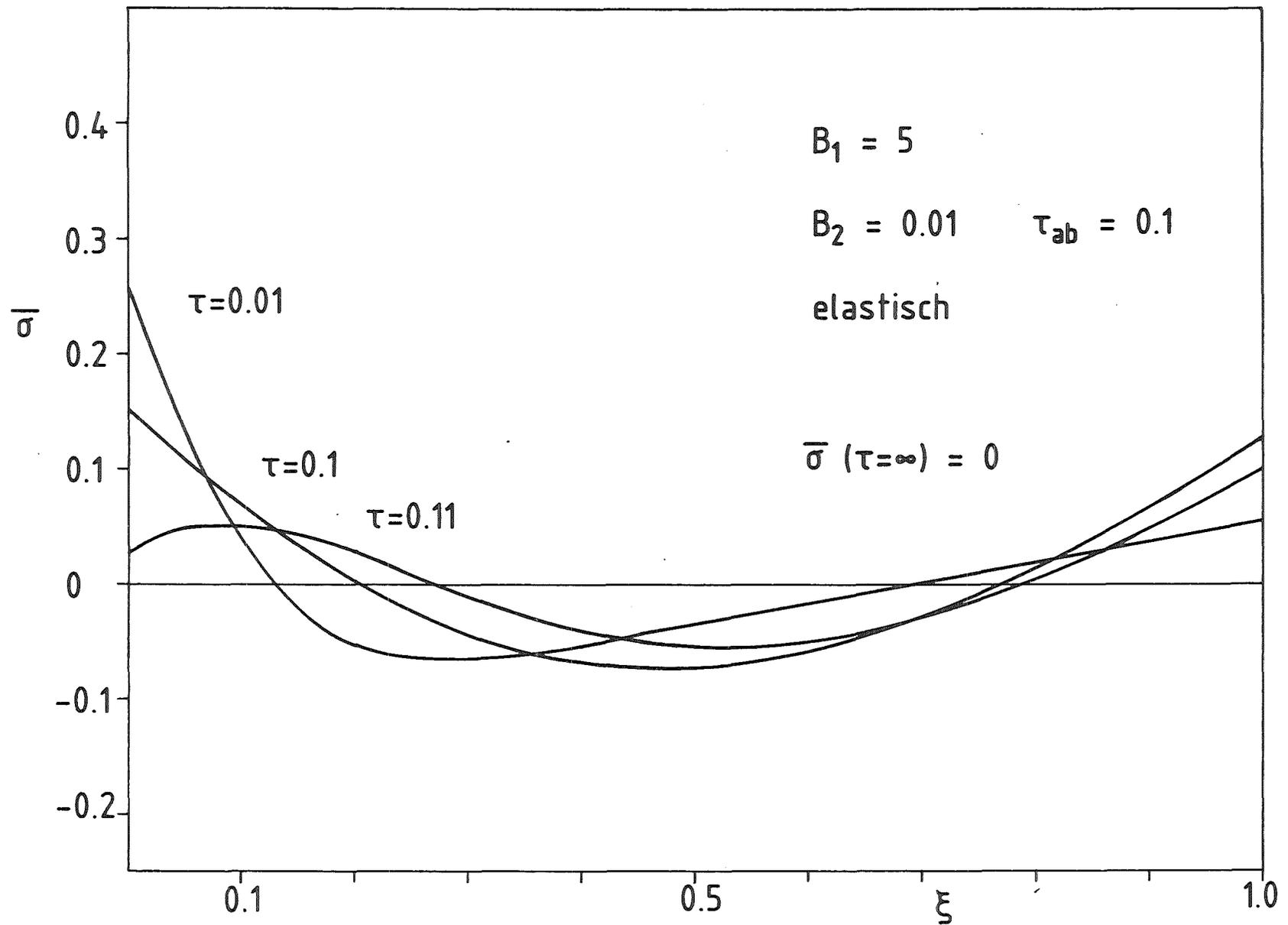


Abb. 6.13 Elastische Spannungsverteilung in der Platte

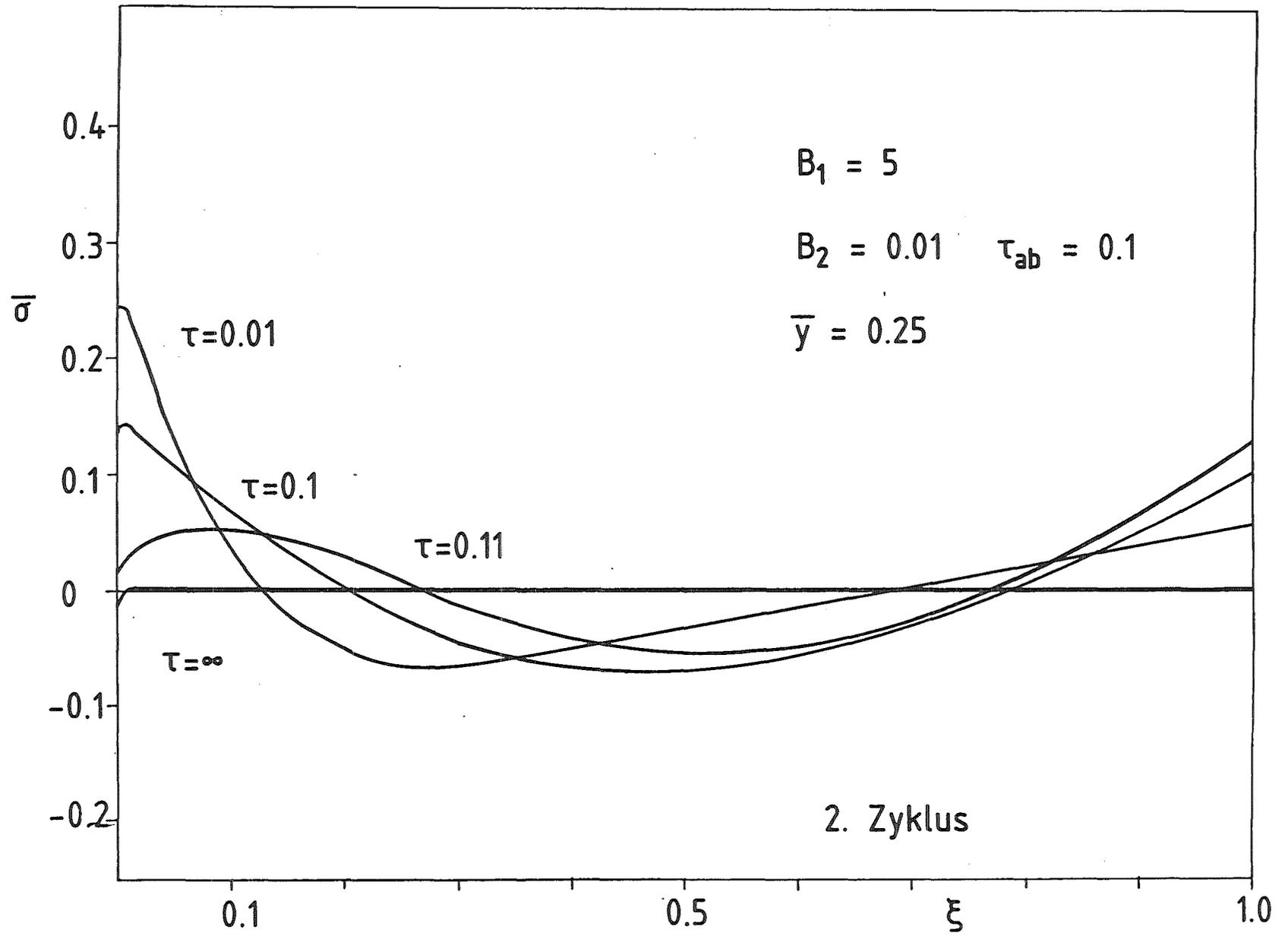


Abb. 6.14 Spannungsverlauf in der Platte während des 2. Zyklus

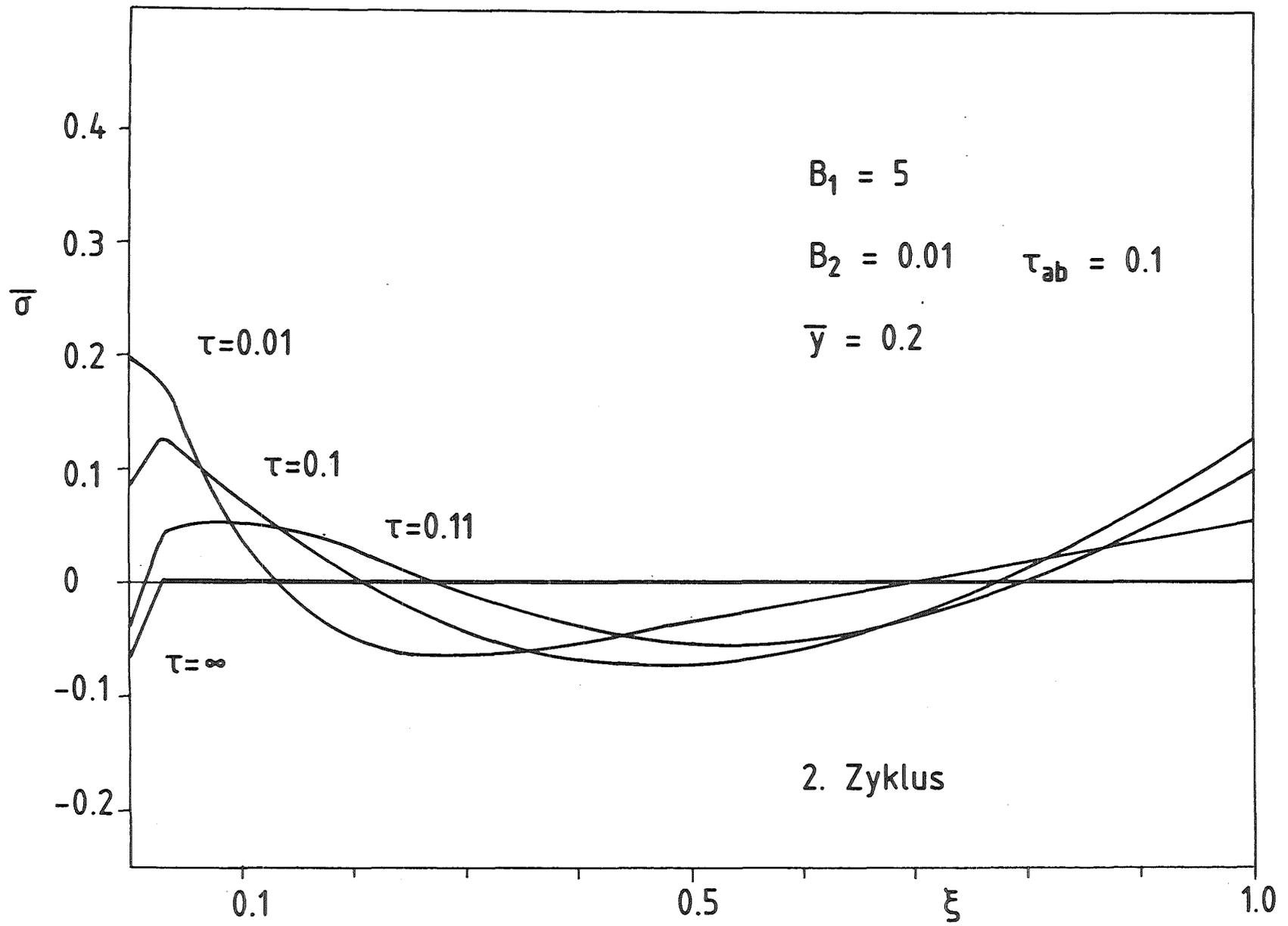


Abb. 6.15 Spannungsverlauf in der Platte während des 2. Zyklus

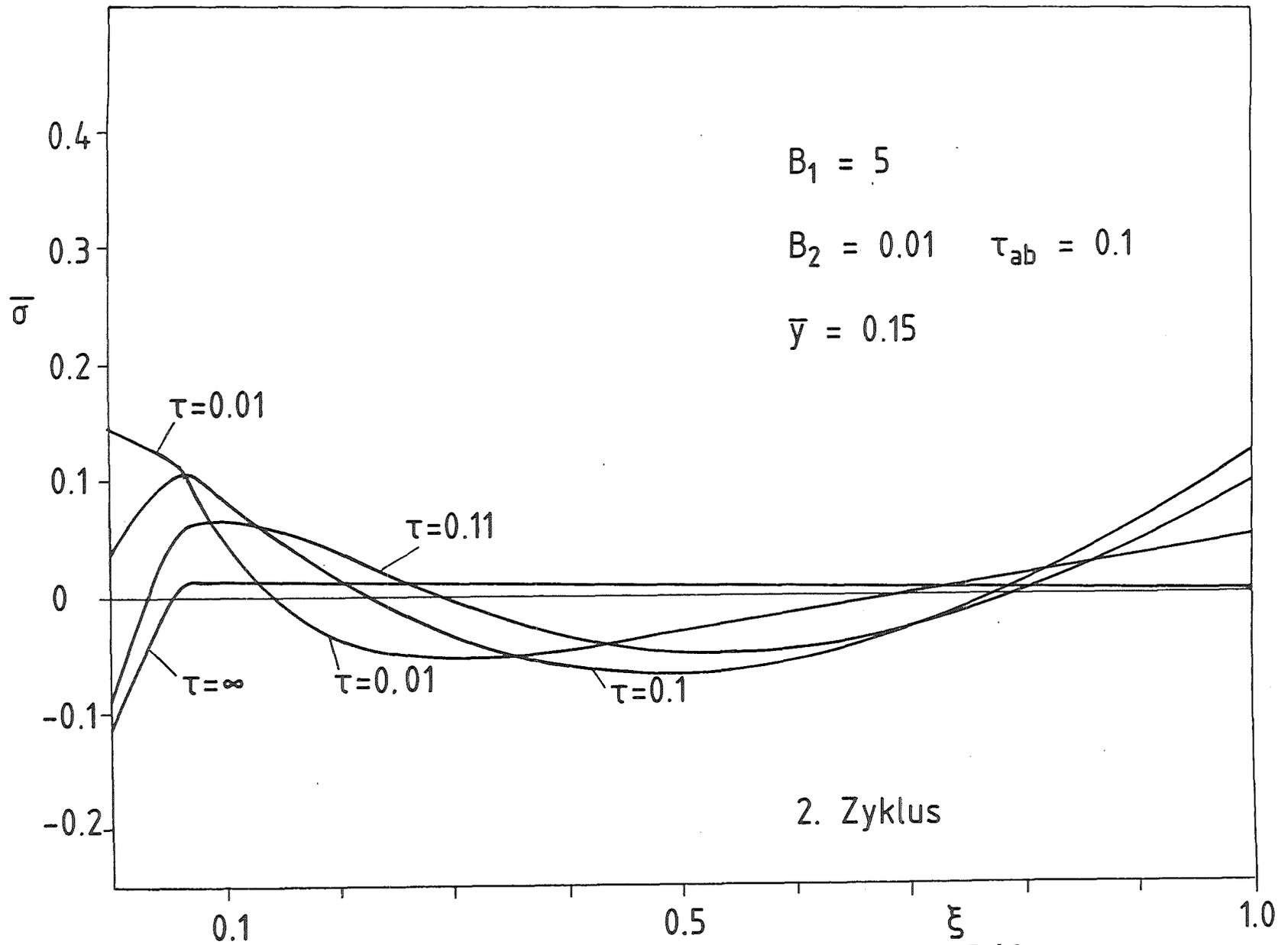


Abb. 6.16 Spannungsverlauf in der Platte während des 2. Zyklus

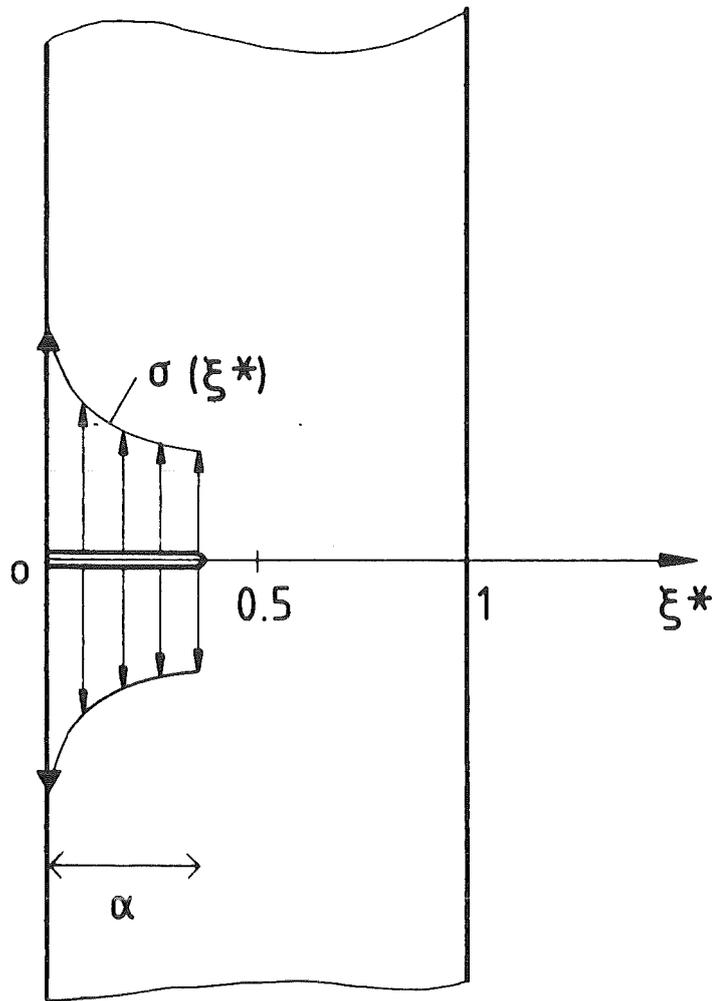


Abb. 7.1: Rißgeometrie für durchgehenden Außenriß

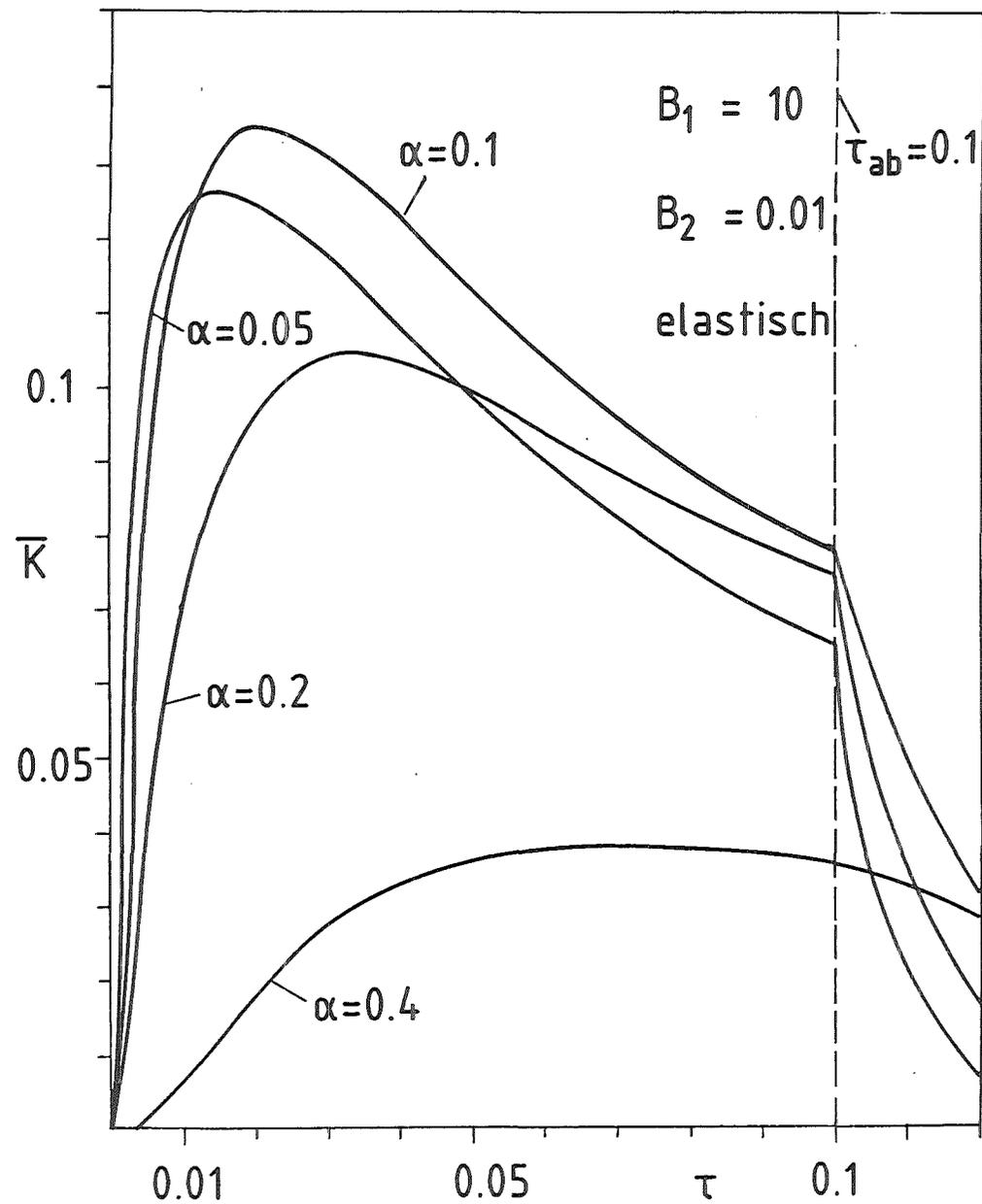


Abb. 8.1 K-Faktor in Abhängigkeit von der Zeit  $\tau$  für verschiedene Riß-tiefen  $\alpha$  im rein elastischen Grenzfall (gilt für alle Zyklen)

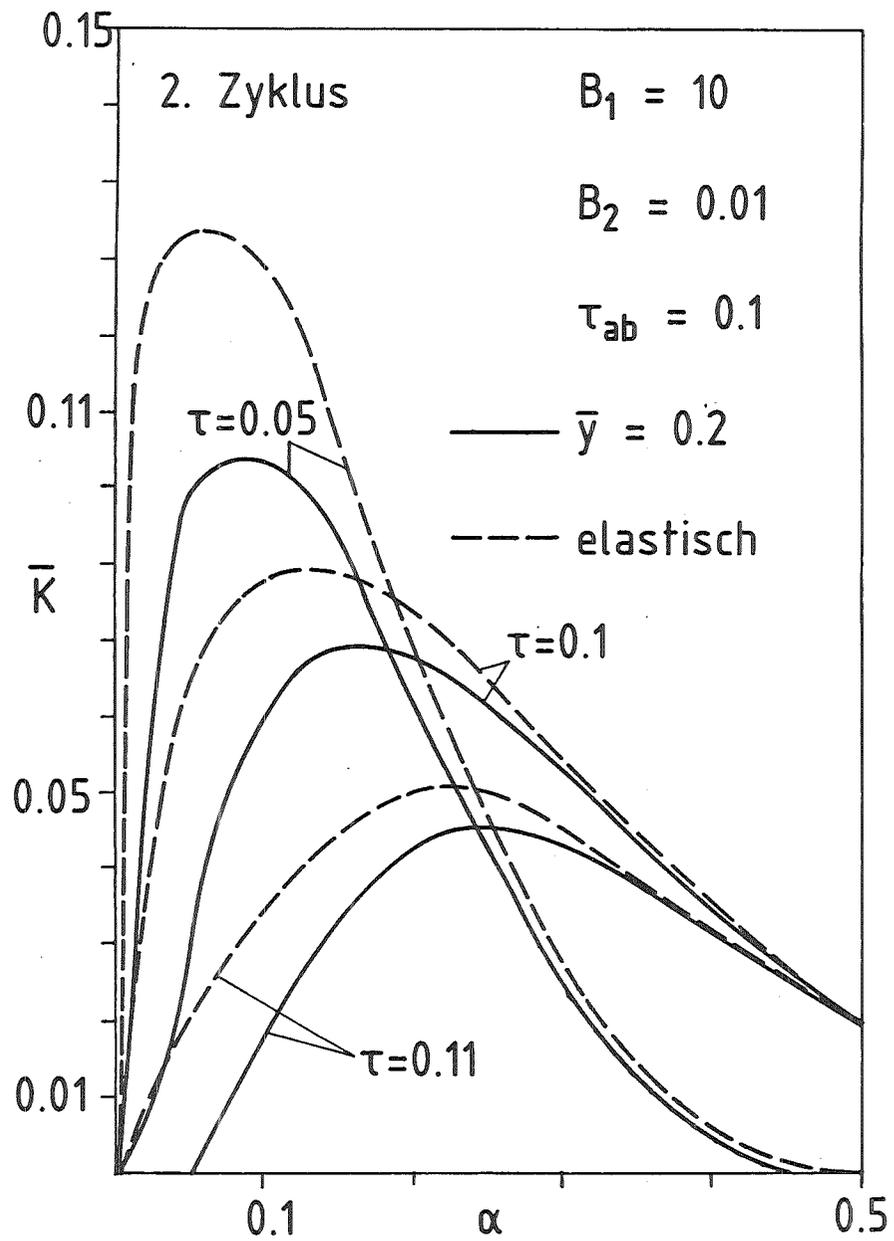


Abb. 8.2 K-Faktor in Abhängigkeit von der Rißlänge  $\alpha$  für verschiedene Zeiten  $\tau$  im elastischen Fall und für  $\bar{Y} = 0.2$  (zweiter und höhere Zyklen)

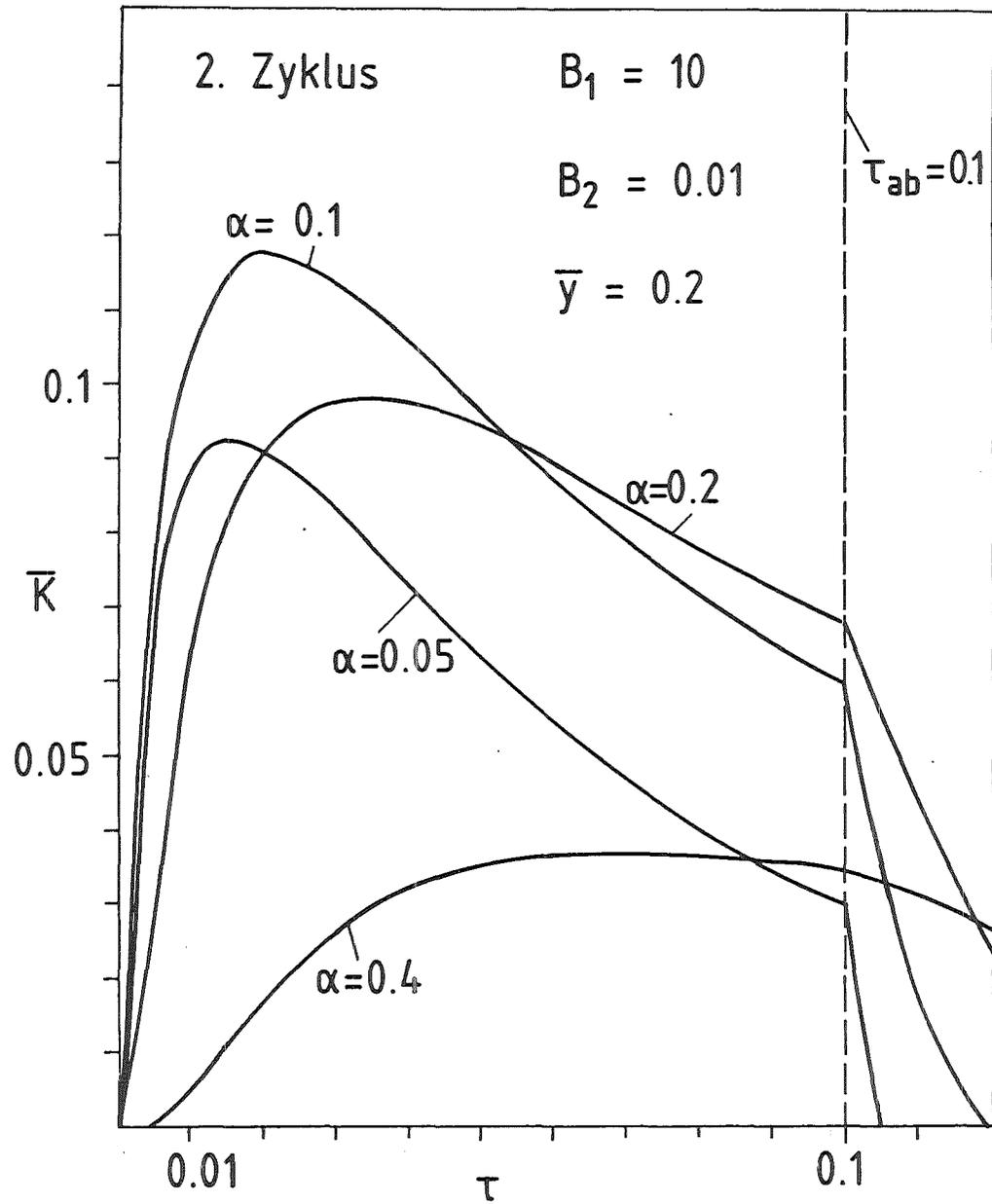


Abb. 8.3 K-Faktor in Abhängigkeit von der Zeit  $\tau$  für verschiedene Rißtiefen  $\alpha$ .  $\bar{Y} = 0.2$ . Gültig ab dem zweiten Versuchszyklus.

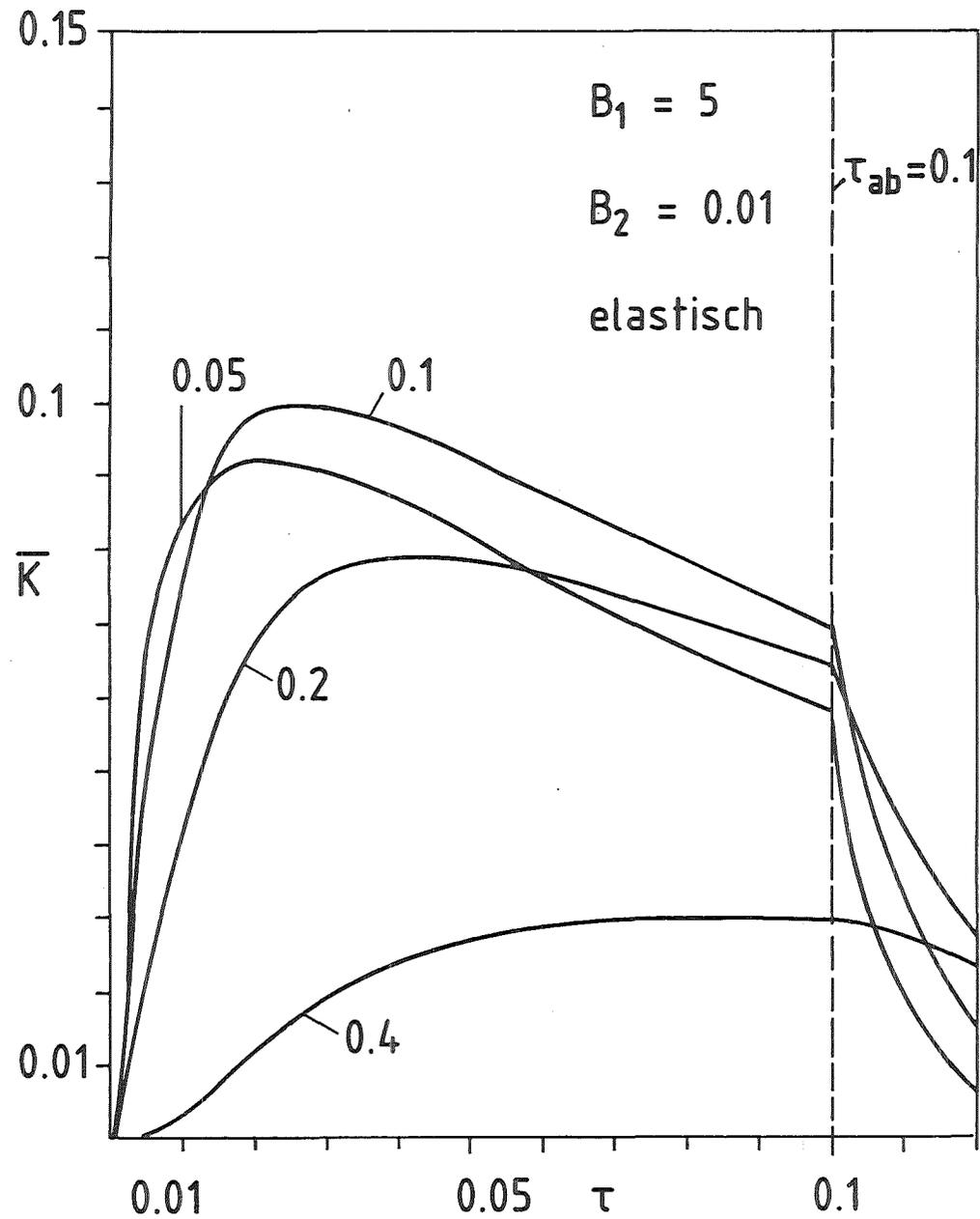


Abb. 8.4 K-Faktor in Anhängigkeit von der Zeit  $\tau$  für verschiedene Riß-tiefen  $\alpha$  im rein elastischen Grenzfall (gilt für alle Zyklen)

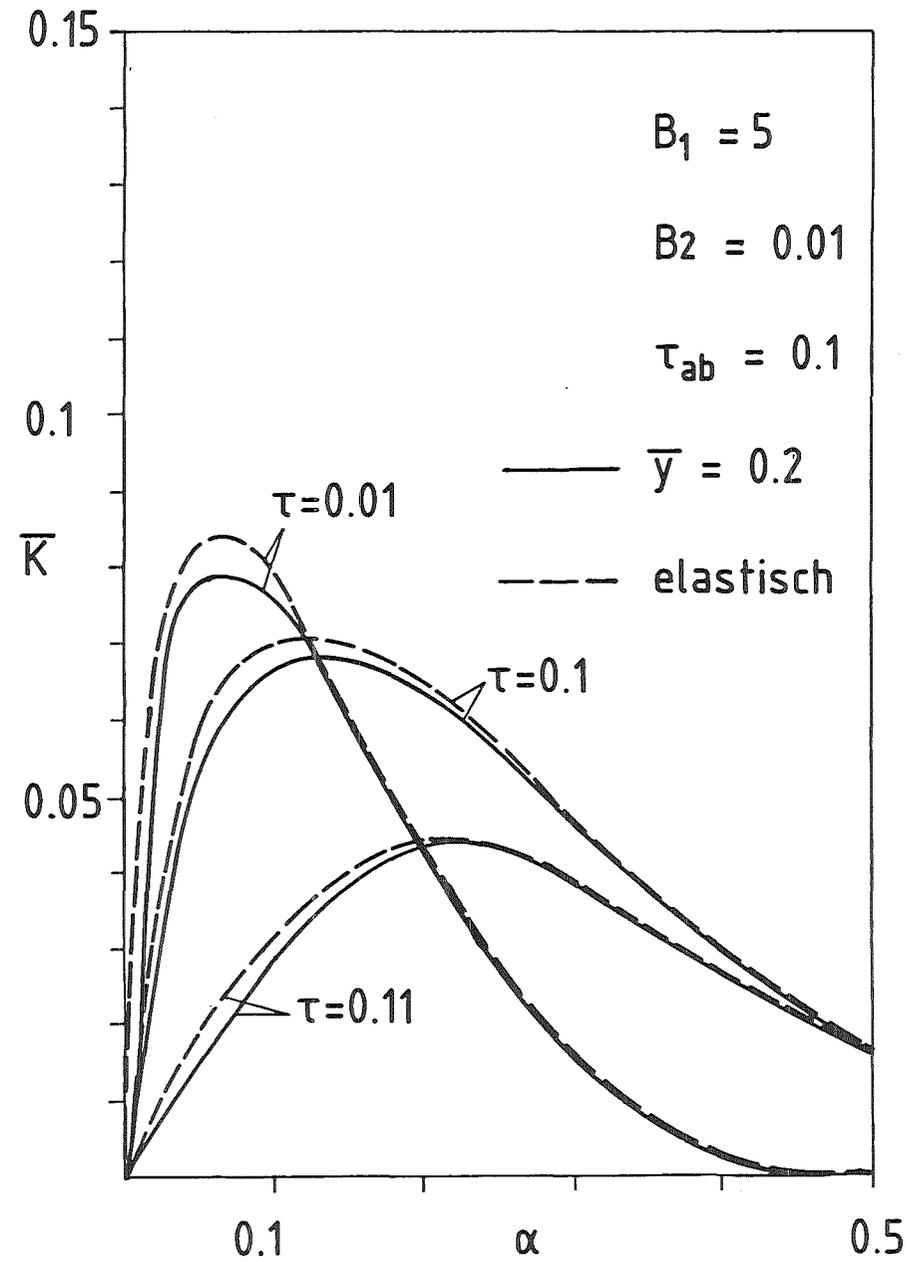


Abb. 8.5 K-Faktor in Abhängigkeit von der Rißlänge  $\alpha$  für verschiedene Zeiten  $\tau$  im elastischen Fall und für  $\bar{y} = 0.2$  (zweiter und höhere Zyklen)

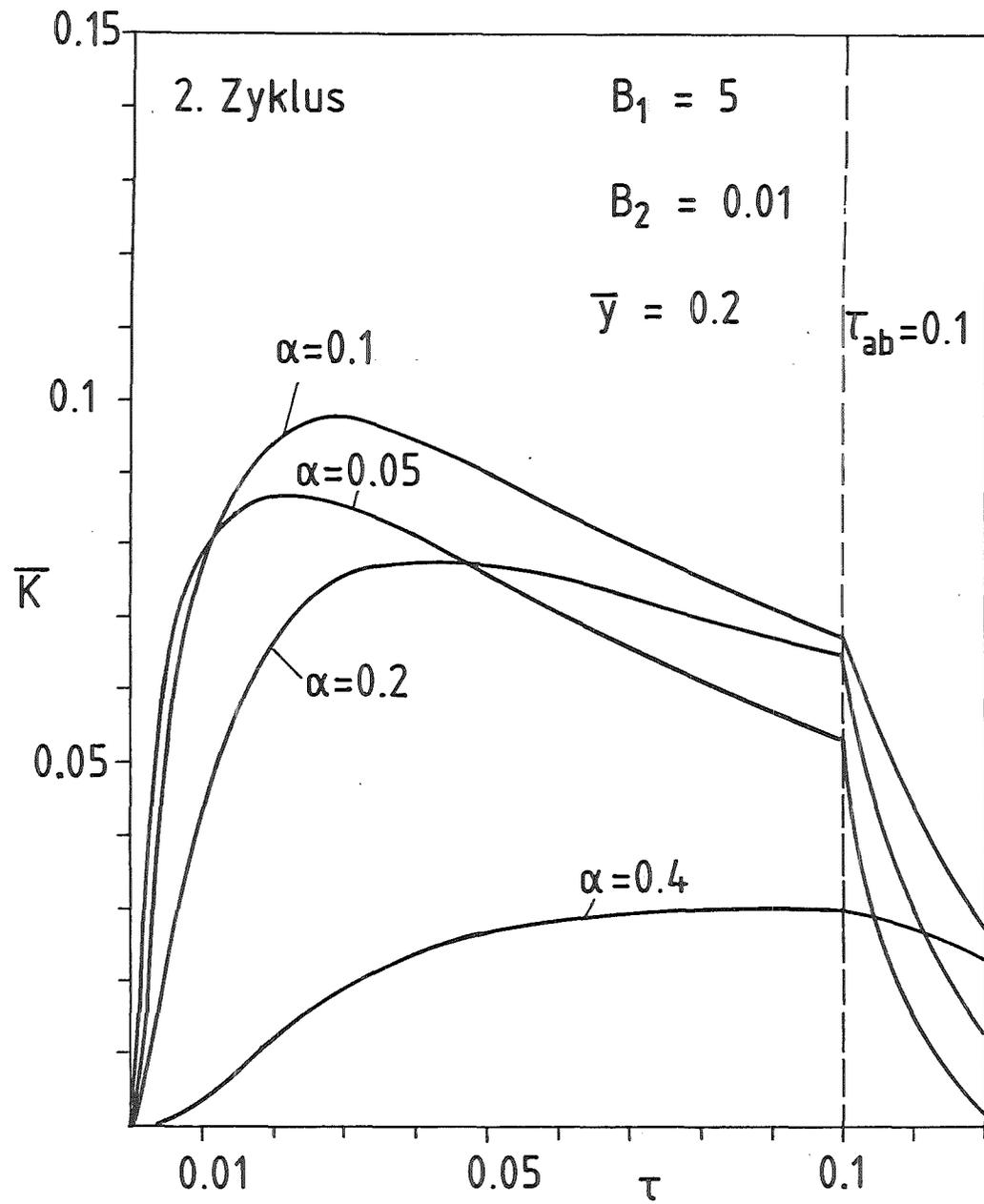


Abb. 8.6 K-Faktor in Abhängigkeit von der Rißlänge  $\tau$  für verschiedene Zeiten  $\alpha$ .  
im elastischen Fall und für  $\bar{y} = 0.2$  (zweiter und höhere Zyklen)

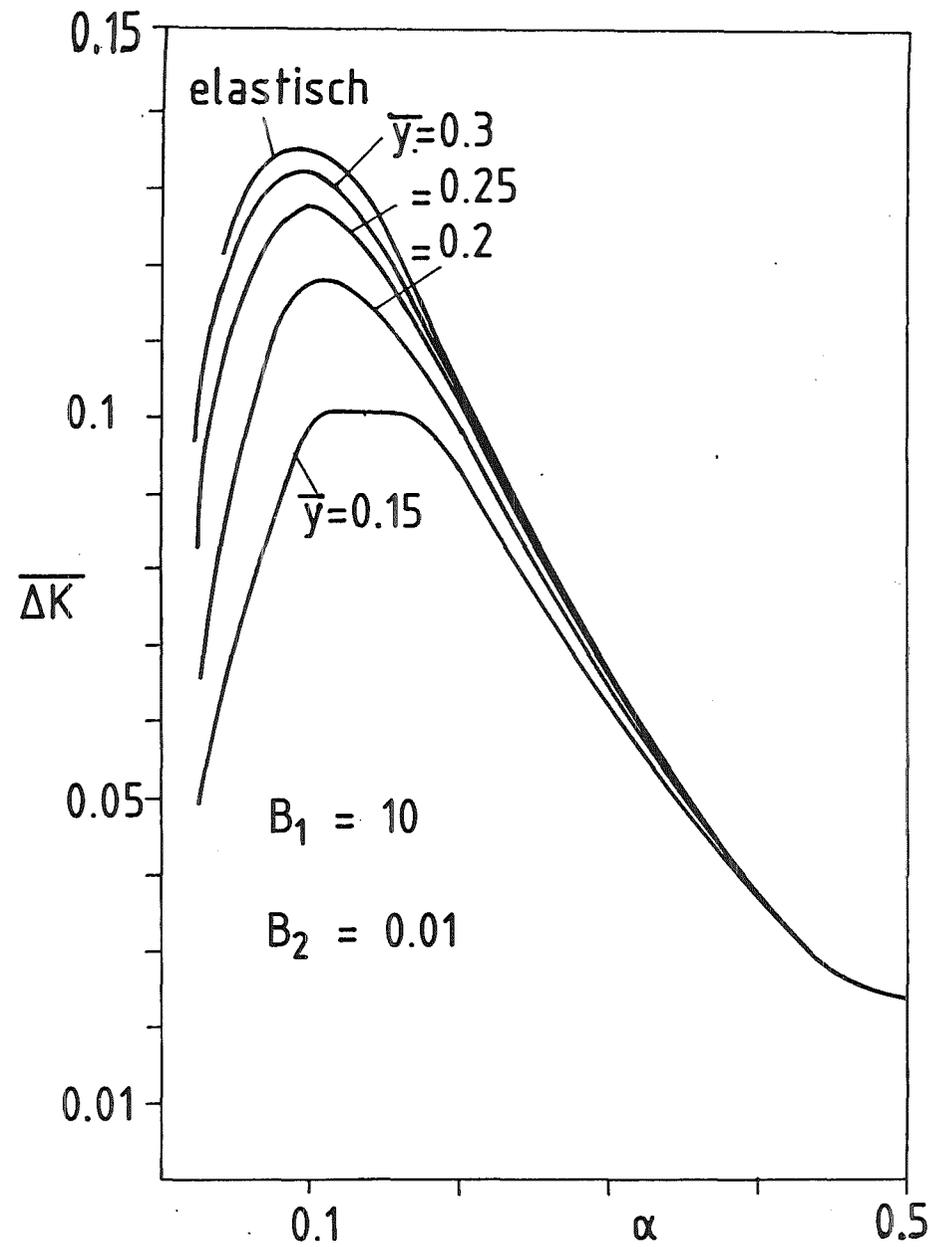


Abb. 8.7  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$  in Abhängigkeit von der Rißlänge für verschiedene Fließspannungsparameter  $\bar{y}$

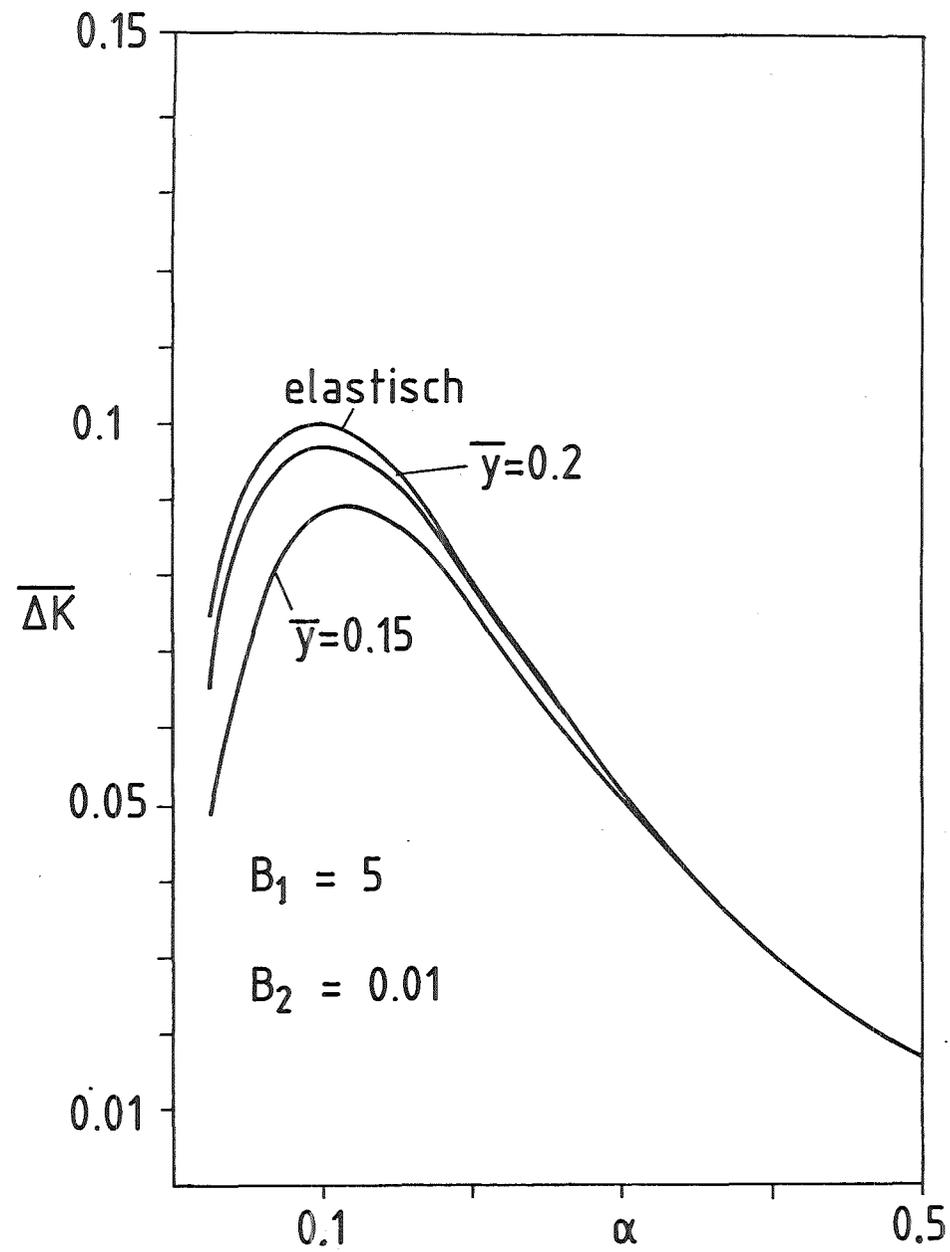


Abb. 8.8  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$  in Abhängigkeit von der Rißlänge für verschiedene Fließspannungsparameter  $\bar{y}$

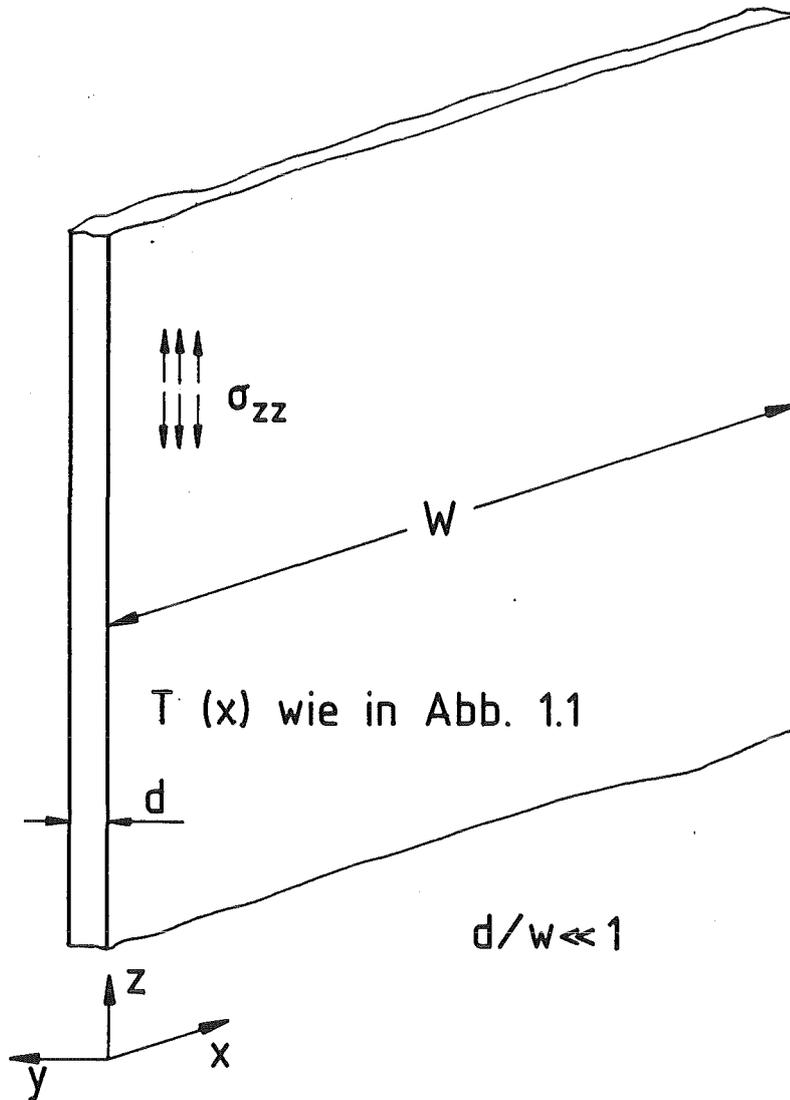


Abb. 9.1 Plattengeometrie für FE-Modell

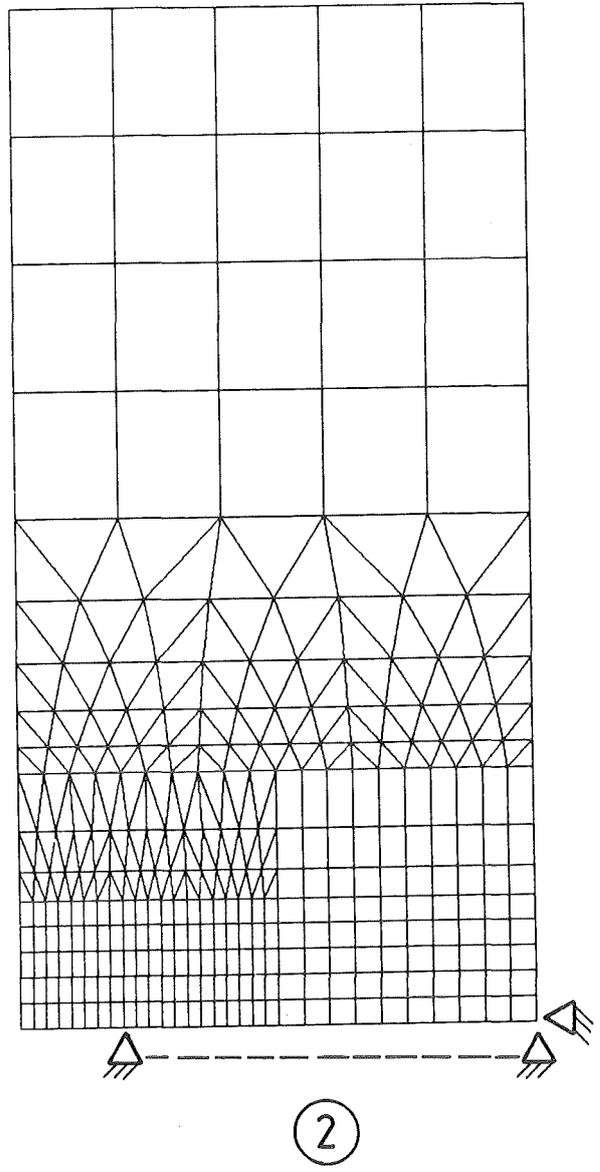
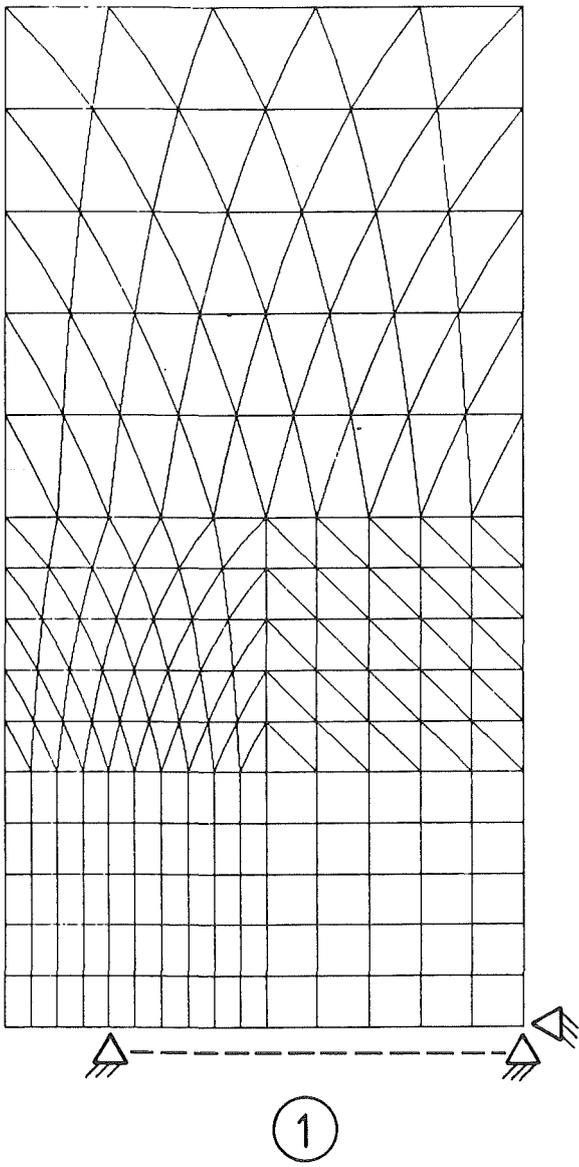


Abb. 9.2: Verwendete FE-Strukturen

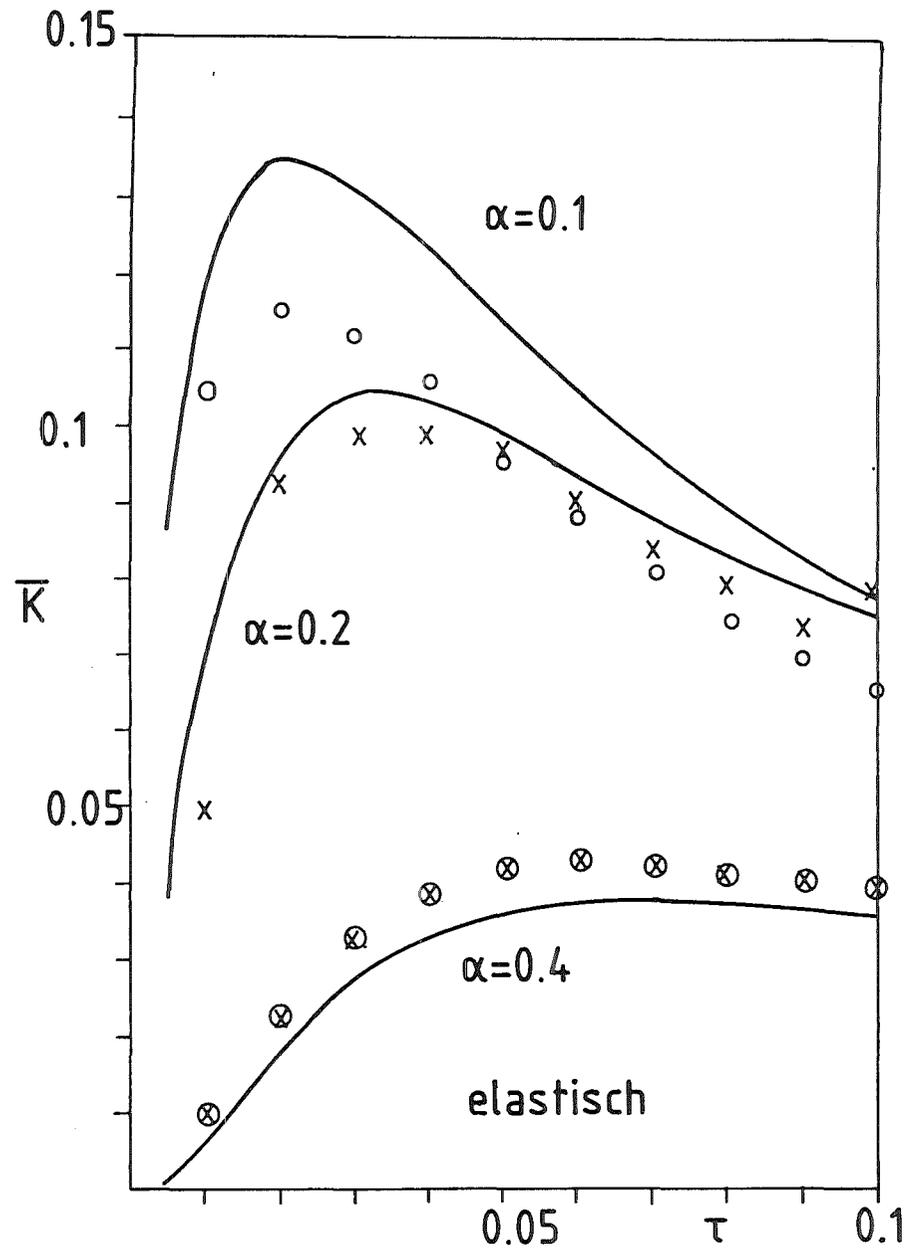


Abb. 9.3 Vergleich von analytisch und numerisch mit der Verschiebungsmethode berechneten K-Faktoren (rein elastischer Fall)

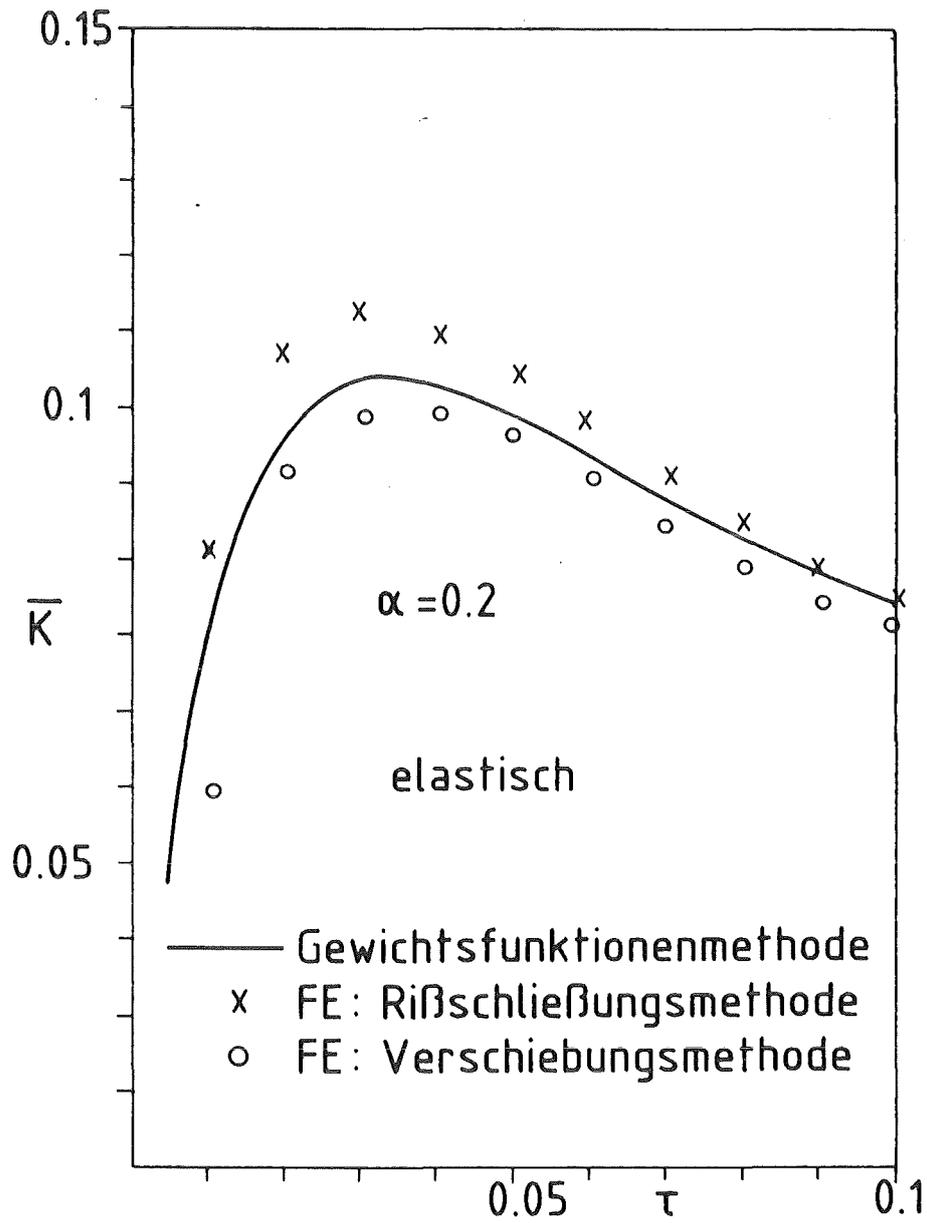


Abb. 9.4: Vergleich der verschiedenen Methoden zur K-Faktorberechnung.

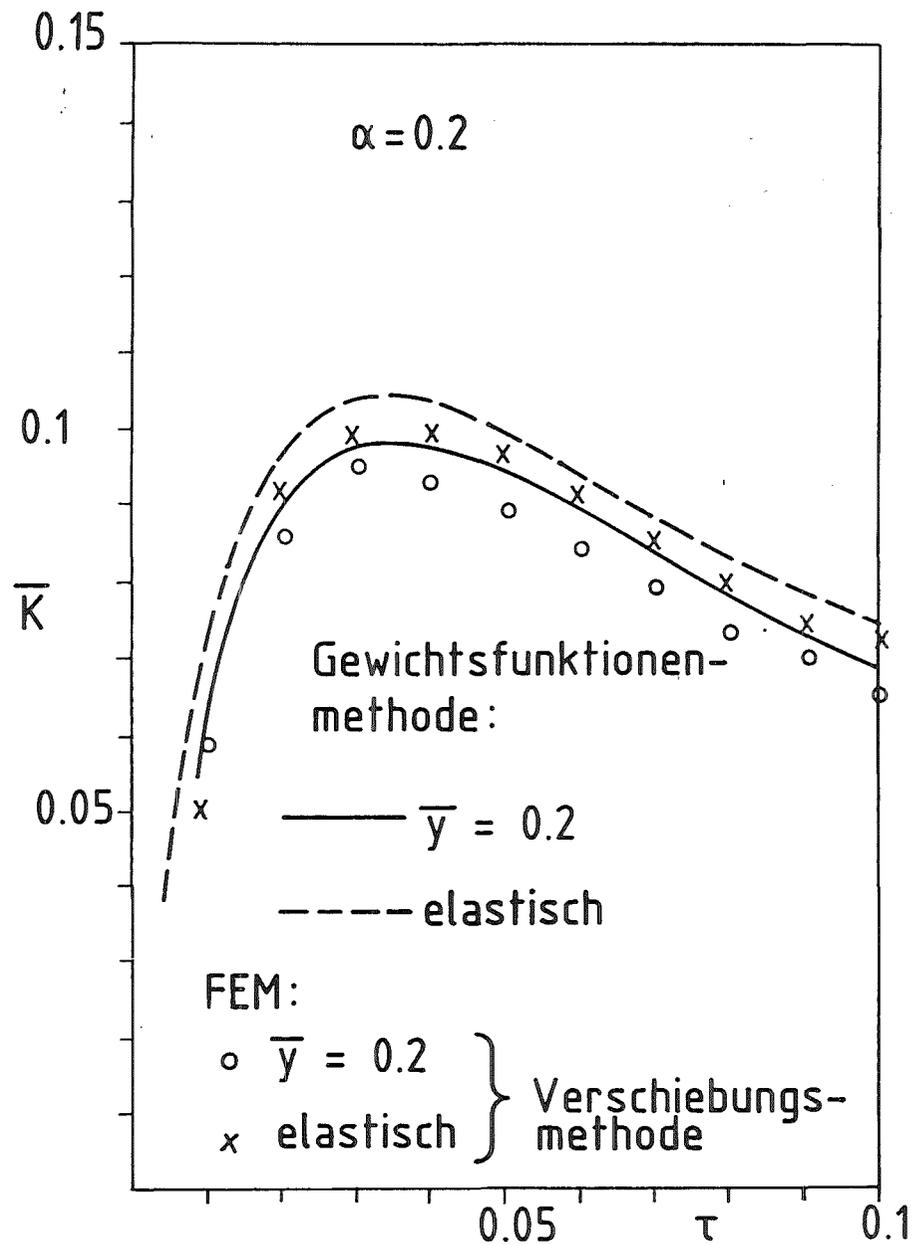


Abb. 9.5 K-Faktor in Abhängigkeit von der Zeit während des zweiten und höheren Versuchszyklen (rein elastischer Fall und für  $\bar{Y} = 0.2$ ) Vergleich mit FEM-Resultaten (Verschiebungsmethode)

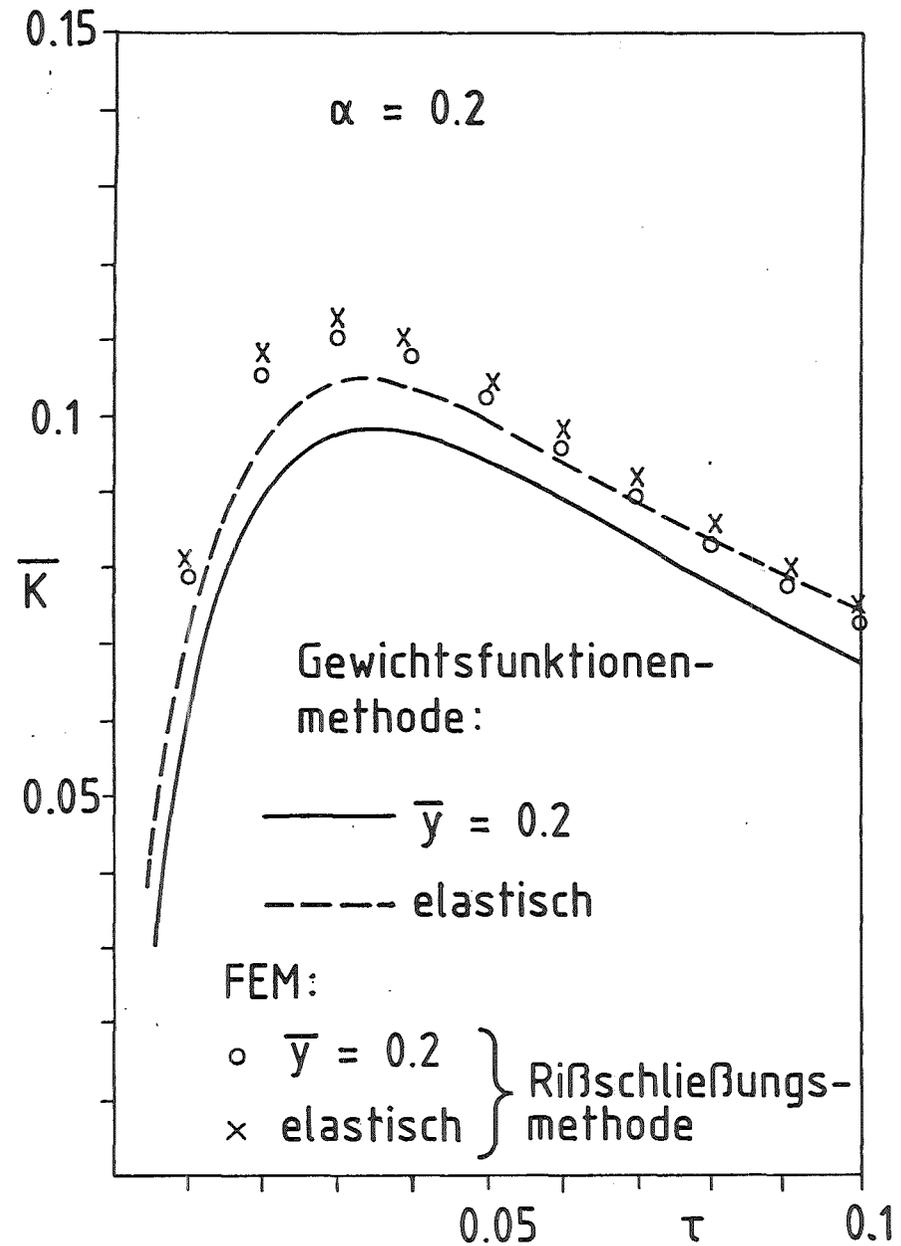


Abb. 9.6 K-Faktor in Abhängigkeit von der Zeit während des zweiten und höheren Versuchszyklen (rein elastisch und für  $\bar{Y} = 0.2$ )  
 Vergleich mit FEM-Resultaten (Rißschließungsmethode)

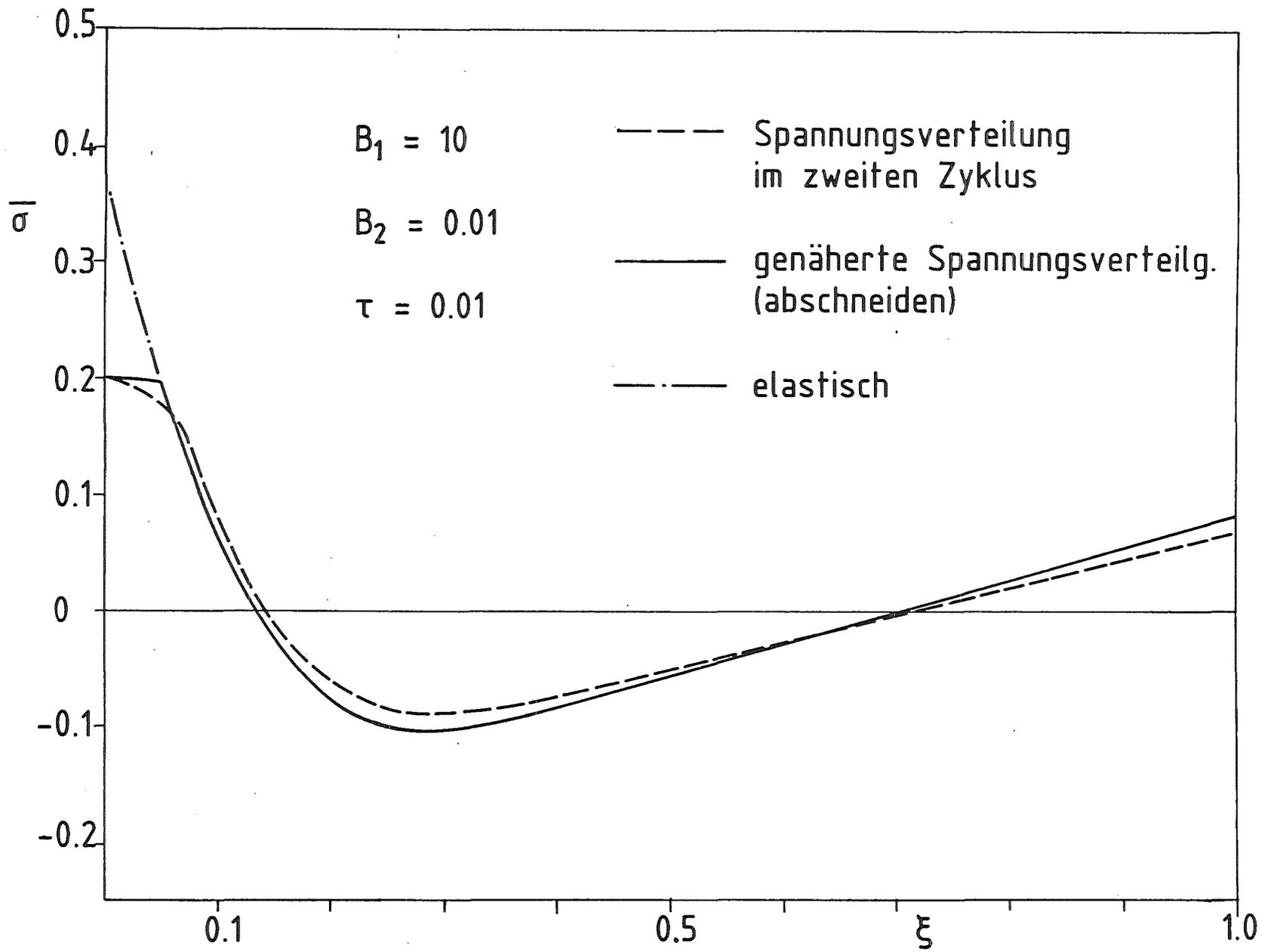


Abb. 10.1 Vergleich von "exakter" und genäherter Spannungsverteilung während des 2. Zyklus ( $\tau = 0.01$ )

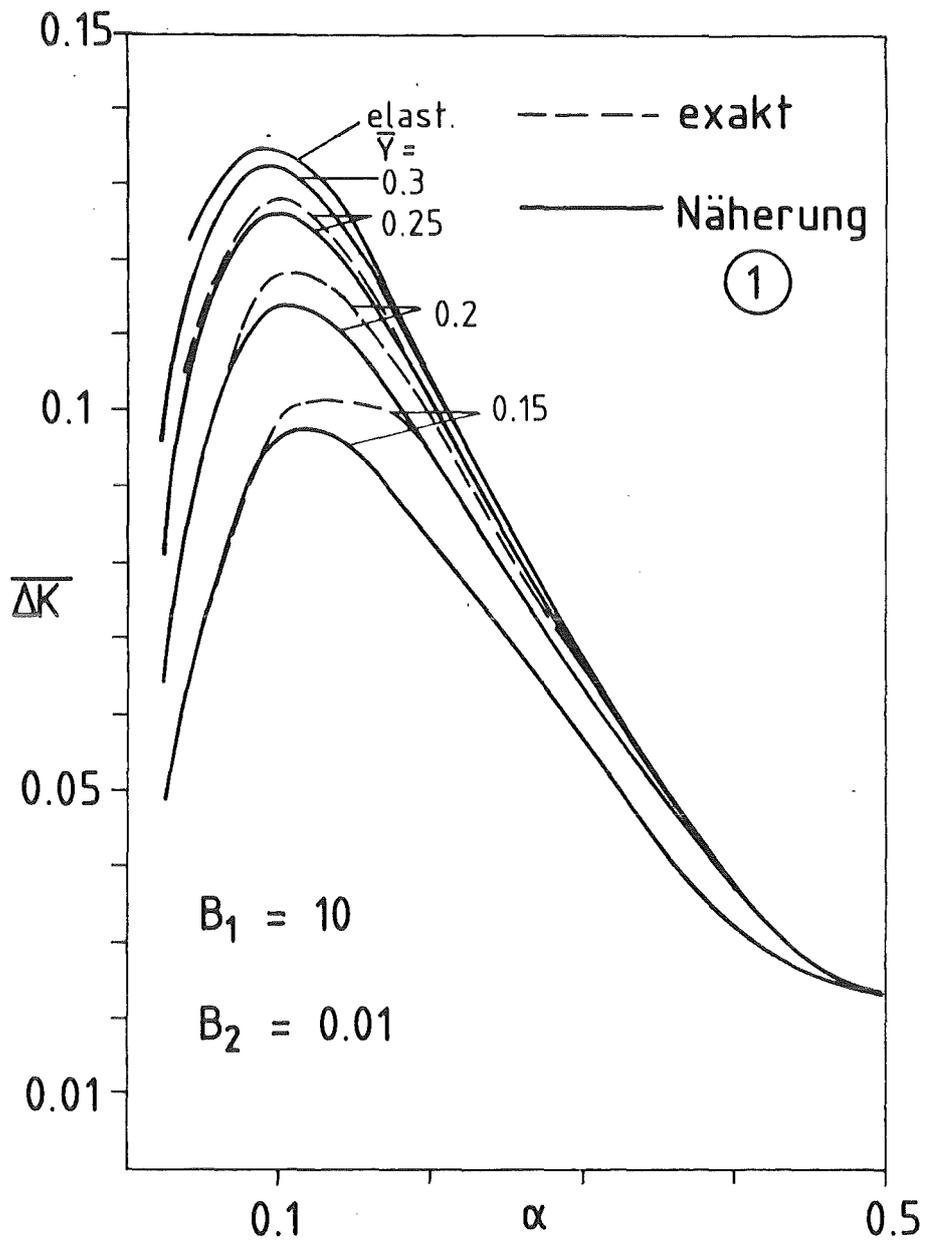


Abb. 10.2: Näherungsmethode ① zur K-Faktorberechnung

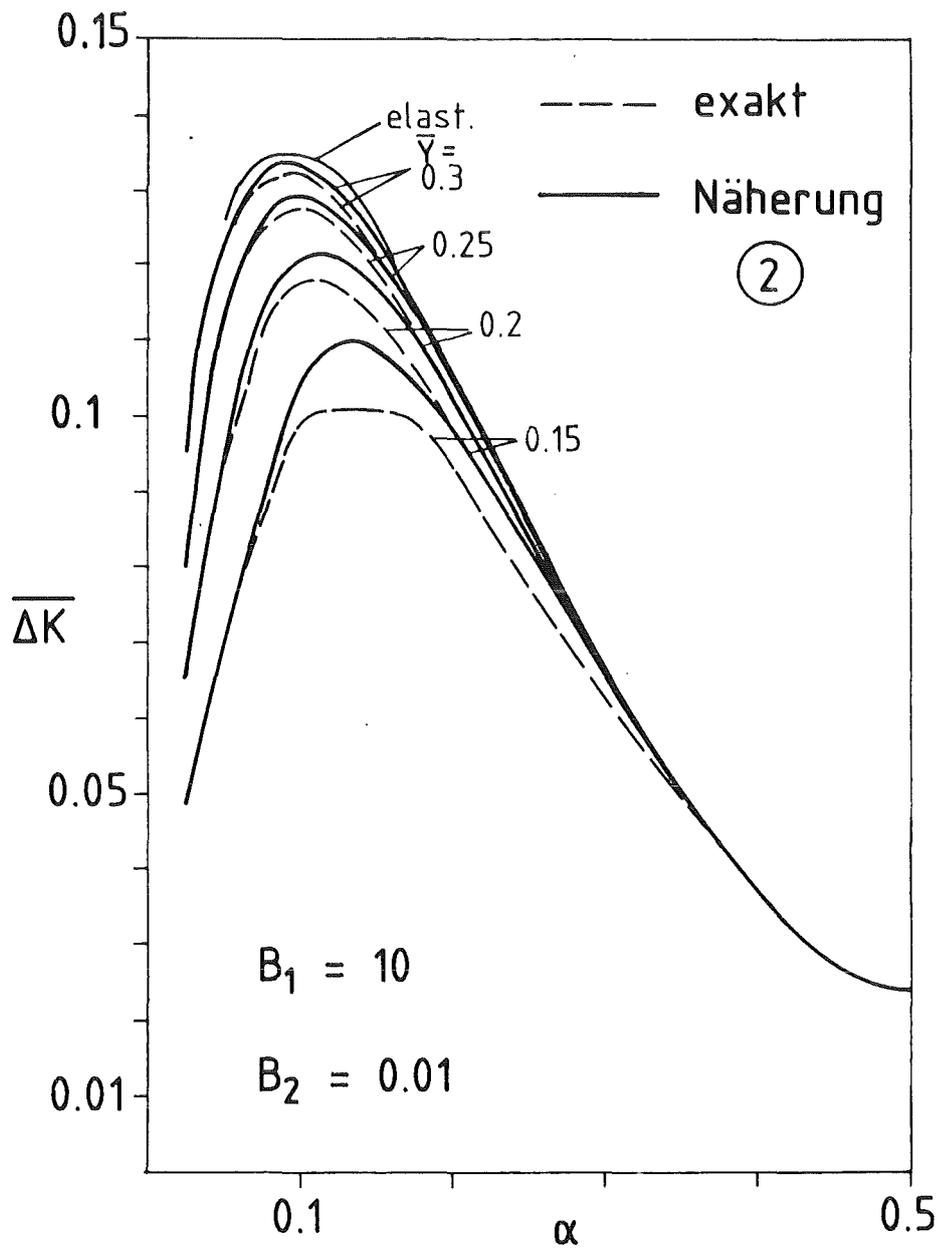


Abb. 10.3: Näherungsmethode ② zur K-Faktorberechnung

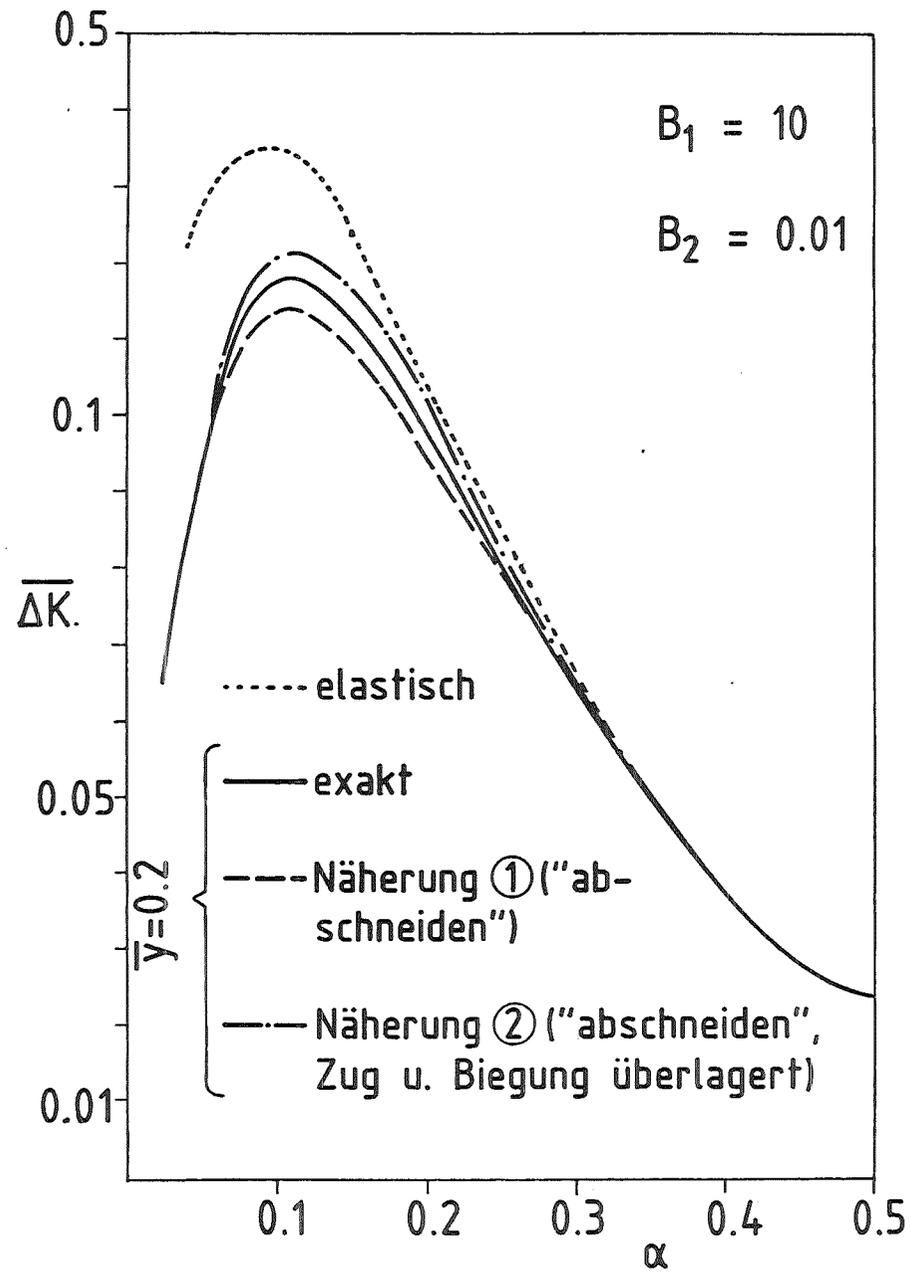


Abb. 10.4 Vergleich der beiden Näherungsverfahren für  $\bar{y} = 0.2$