

KfK 3910
März 1985

Transiente Dreiphasen Dreikomponenten Strömung

**Teil 1:
Formulierung des
Differentialgleichungssystems**

N. I. Kolev
Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE
Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

KfK 3910

Transiente Dreiphasen Dreikomponenten Strömung
Teil 1: Formulierung des Differentialgleichungssystems

N. I. Kolev⁺

⁺delegiert vom Institut für Kernforschung und Kernenergetik der Bulgarischen Akademie der Wissenschaften als Stipendiat der Alexander von Humboldt-Stiftung

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

Transiente Dreiphasen Dreikomponenten Strömung

Teil 1: Formulierung des Differentialgleichungssystems

Zusammenfassung

Ausgehend von den Erhaltungsgesetzen wurde die nichtkonservative Form eines Systems aus 18 quasilinearen partiellen Differentialgleichungen, die eine Dreiphasen, Dreikomponenten Strömung beschreibt, entwickelt. Dabei wurde die Strömung mit drei Geschwindigkeitsfeldern beschrieben. Jedes Strömungsfeld besteht aus einer inerten und einer nichtinerten Komponente. Vollständiges thermodynamisches und mechanisches Nichtgleichgewicht zwischen den Feldern wurde modelliert. Es wurden die einfachst-möglichen Konzentrations- und Entropiegleichungen ohne vereinfachende Annahmen erhalten. Dabei wurde die Definition der Machzahl, der kritischen Massenstromdichte und damit die lokale Kritikalitätsbedingung erhalten.

Transient Three-Phases Three-Component Flow

Part 1: Formulation of the System of Differential Equations

Abstract

Starting from the conservation principles a nonconservative form of a system of 18 quasilinear partial differential equations describing the three-phase three-component flow is obtained. The flow is described using the three-velocity field approach. Each of the flow-fields consists of one inert and one noninert component. Full thermodynamical and mechanical nonequilibrium between the fields is modelled. The simplest possible concentration and entropy equations are obtained, without any simplifying assumptions. Also the definition of the Mach number, the critical mass flow rate, and the criticality condition for this physical system is obtained.

Inhaltsverzeichnis	Seite
Nomenklatur	
1. Einleitung	1
2. Formulierung des Differentialgleichungssystems	1
2.1 Qualitative Eigenschaften der zu beschreibenden Strömung	1
2.2 Derzeitiger Stand	5
2.3 Einführung	7
2.4 Einige Definitionen	12
2.5 Die Zustandsgleichungen	13
2.6 Das Differentialgleichungssystem, das die Strömung beschreibt	15
3. Die Mach-Zahl	22
4. Die kritische Massenstromdichte	23
Literaturverzeichnis	27
Anhang 1	31
Anhang 2	37
Anhang 3	42
Anhang 4	42
Anhang 5	43

Nomenklatur

A	Querschnitt
a	Schallgeschwindigkeit
c_p	spezifische Wärme bei konstantem Druck
d	totales Differential
e	spezifische innere Energie
F_R	Reibungskraft
f_R	Reibungskraft pro Volumeneinheit des Gemisches
G	Massenstromdichte
G^*	kritische Massenstromdichte
g	Gravitationskonstante
h	spezifische Enthalpie
M	Mach-Zahl
\dot{m}	Massenstrom
p	Druck
Q	thermische Leistung
\dot{q}''	in die Strömung eingeführte thermische Leistung pro Volumeneinheit des Gemisches (der Strömung)
R	mit Index - Gaskonstante
R	ohne Index - Reibungsdruckabfall pro Längeneinheit des Kanals
S	Schlupf
s	spezifische Entropie
T	absolute Temperatur
U	Vektor der abhängigen Variablen
v	spezifisches Volumen
V	Geschwindigkeit - Vektor
u, v, w	x, y, z Komponenten des Vektors V
x, y, z	Koordinaten
x	Massenstromanteil
x_i^*	Massenstromanteil der inerten Komponente des Geschwindigkeitsfeldes i

Griechische Buchstaben

α	Volumenanteil
Δ	endliche Differenz
κ	Isentropenexponent

λ	Wärmeleitfähigkeit
λ	Eigenwert
μ	zeitliche Massenänderung pro Volumeneinheit des Gemisches
ρ	Dichte, ohne Index - homogene Dichte
τ	Zeit
φ	Winkel zwischen $-g$ und V

1. Einleitung

Viele Prozesse in unserer Umwelt sowie in der Technik stellen transiente Mehrphasen Mehrkomponenten Strömungen dar. Es sei erinnert an Umströmung von sich bewegenden Objekten im Regen oder Schnee und umgekehrt, Druckwellenausbreitung in regnender Atmosphäre, staubförmige Industrieabfälle in der Atmosphäre, Konzentrationausbreitung der Borsäure in wassergekühlten Kernreaktoren, Transport von Korrosionsprodukten in technologischen Einrichtungen, Prozesse bei Unfällen in Kernreaktoren z.B. Brennstoffpartikeltransport durch Wasser- Wasserdampf-Luftströmungen in den Kreisläufen als auch im Containment, Diffusion von Suspensionen durch poröse Membranen (z.B. Gewebe) u.s.w. Mit der ständig anwachsenden Leistung der Computer bietet sich auch die Möglichkeit zur immer vollständigeren mathematischen Modellierung von Strömungen solcher Art. Dies bedeutet aber nicht nur eine extensive Erweiterung derzeitiger Modellvorstellungen, sondern auch das Suchen neuer Wege zur einfachen Beschreibung komplizierter Strömungsstrukturen. Ein solcher Versuch ist in der hier vorliegenden Studie unternommen worden.

2. Formulierung des Dgl.-Systems

2.1 Qualitative Eigenschaften der zu beschreibenden Strömung

In diesem Abschnitt werden kurz die qualitativen Eigenschaften der zu beschreibenden Strömung erläutert.

Wir betrachten eine transiente (τ), dreidimensionale (x,y,z) Strömung, fließend innerhalb eines porösen Mediums. Die Porosität des Mediums γ_v in der Umgebung eines Punktes (x,y,z)

$$\gamma_v = \gamma_v(x,y,z)$$

wird als der Anteil von $\Delta x \Delta y \Delta z$, der von der Strömung durchflossen wird, definiert. Die Durchlässigkeit in der Richtung x γ_x ist der Anteil der Fläche $\Delta y \Delta z$, der von der Strömung durchflossen wird. Analog wird die Durchlässigkeit in den restlichen Richtungen γ_y, γ_z definiert.

Die Strömung besteht aus drei verschiedenen Phasen - Gas, Flüssigkeit und feste

Phase. Die Gasphase besteht aus Dampf und nichtkondensierendem Gas. Die Flüssigkeit und der Dampf sind aus dem gleichen chemischen Stoff. Die feste Phase ist ein anderer chemischer Stoff. Phasenumwandlungen sind nur zwischen Flüssigkeit und Dampf zu erwarten. Die nichtkondensierende Gaskomponente und die feste Phase werden weiter als inerte Komponenten bezeichnet.

Die Strömung besteht aus drei Geschwindigkeitsfeldern. Das erste Feld besteht nur aus Gas, das zweite aus Flüssigkeit und fester Phase und das dritte besteht auch aus Flüssigkeit und fester Phase. Jedes der drei Felder besitzt eine Geschwindigkeit, die sich von der Geschwindigkeit der anderen Felder unterscheidet (Inhomogenität).

Die drei Geschwindigkeitsfelder besitzen unterschiedliche Temperaturen (thermodynamisches Nichtgleichgewicht), aber unterliegen dem gleichen Systemdruck.

Innerhalb jedes einzelnen Feldes herrscht die gleiche Temperatur (thermisches Gleichgewicht innerhalb des Feldes) und die gleiche örtliche Geschwindigkeit sowohl für die flüssige als auch für die feste Phase (Homogenität oder mechanisches Gleichgewicht innerhalb des Feldes).

Für die Gasphase ist der Dalton'sche Satz gültig. Die nichtkondensierende Komponente wird als ideales Gas betrachtet.

Die bis jetzt aufgezählten Eigenschaften der zu beschreibenden Strömung sind in der Tabelle 1 zusammengefaßt. Tabelle 2 enthält die Erläuterung der weiter verwendeten Indizes. Zu beachten ist, daß auch eine Massenzu- bzw. -abfuhr von bzw. nach außen berücksichtigt wird. Die drei Feldgeschwindigkeiten der Quelle bzw. der Senke müssen nicht unbedingt mit den Geschwindigkeiten der drei Felder identisch sein.

Mit anderen Worten, Gegenstand unserer weiteren Betrachtung ist eine

- transiente
- dreidimensionale
- dreiphasen
- dreikomponenten
- nichthomogene (drei Geschwindigkeitsfelder)
- Nichtgleichgewichtsströmung in einem

- porösen Medium.

Tabelle 1

Geometrie	
- drei dimensional	(x, y, z)
- poröses Medium	(Porosität δ_v , Durchlässigkeit $\delta_x, \delta_y, \delta_z$)
Gemisch	
- transient	(τ)
- drei Phasen	(Gas, Flüssigkeit, feste Phase)
- drei Komponenten	(nichtkondensierendes Gas, Dampf-Flüssigkeit, feste Phase)
- drei Geschwindigkeitsfelder	$(V_{1\text{-Gas}}, V_{2\text{-(flüssig+fest)}}, V_{3\text{-(flüssig+fest)}}$
- thermodynamisches Nichtgleichgewicht	$(T_{1\text{-Gas}}, T_{2\text{-(flüssig+fest)}}, T_{3\text{-(flüssig+fest)}}$
- gleicher Systemdruck	(p)
Geschwindigkeitsfeld	
- homogen	$(V_{1\text{-Gas}} = V_{\text{Dampf}} = V_{\text{nichtkondensierend}})$ $\angle V_{2\text{-(flüssig+fest)}} = V_{2\text{-flüssig}} = V_{2\text{-fest}}$ $\angle V_{3\text{-(flüssig+fest)}} = V_{3\text{-flüssig}} = V_{3\text{-fest}}$
- thermisches Gleichgewicht	$(T_{1\text{-Gas}} = T_{\text{Dampf}} = T_{\text{nichtkondensierend}})$ $\angle T_{2\text{-(flüssig+fest)}} = T_{2\text{-flüssig}} = T_{2\text{-fest}}$ $\angle T_{3\text{-(flüssig+fest)}} = T_{3\text{-flüssig}} = T_{3\text{-fest}}$
- für das Gasgemisch gilt der Satz von Dalton	$(p = p_{\text{D-Dampf}} + p_{\text{L-nichtkondensierend}})$
- die nichtkondensierende Gaskomponente ist ein ideales Gas	$p_L = R_L T_G \rho_L$

Tabelle 2 Indizes

i	Geschwindigkeitsfeld										
1	≡ G Gas										
2	≡ F flüssig + fest (z.B. Film)										
3	≡ T flüssig + fest (z.B. Tröpfchen)										
iN	inerte Komponente des Geschwindigkeitsfeldes										
1N	≡ L nichtkondensierendes Gas im Gasgemisch (z.B. Luft als ein einziges Gas betrachtet)										
2N	≡ FB feste Phase B (z.B. Borsäure) im Geschwindigkeitsfeld 2 (F)										
3N	≡ TB feste Phase B (z.B. Borsäure) im Geschwindigkeitsfeld 3 (T)										
Flüssigkeit + Dampf											
D	Dampf										
FF	Flüssigkeit im Geschwindigkeitsfeld 2 (F)										
TF	Flüssigkeit im Geschwindigkeitsfeld 3 (T)										
Richtung der durch Stoffübergang transportierten Masse zwischen zwei Geschwindigkeitsfeldern											
	von	zu									
DF (GF)	D (G)	F	Kondensation								
DT (GT)	D (G)	T									
FD (FG)	F	D (G)	Verdampfung								
TD (TG)	T	D (G)									
FT	F	T	Entrainment								
TF	T	F	Deposition								
Richtung der Massenquellen bzw. Senken ($A \hat{=} \text{Außen}, V_{A_i} \neq V_i$)											
	von	zu		von	zu		von	zu		von	zu
AL	A	L	LA	L	A	AD	A	D	DA	D	A
AFB	A	FB	FBA	FB	A	AFF	A	FF	FFA	FF	A
ATB	A	TB	TBA	TB	A	ATF	A	TF	TFA	TF	A
Richtung des Impulstransportes ($W \hat{=} \text{Wand}$)											
	von	zu		von	zu						
WG	W	G	GT	G	T						
WF	W	F	GF	G	F						
			FT	F	T						

2.2 Derzeitiger Stand

Die Aufgabe, mehrdimensionale Zweiphasenströmungen mathematisch zu simulieren, wurde und wird von mehreren Autoren in verschiedenen Varianten behandelt. Das Ziel dieses Abschnittes ist, kurz diese Entwicklung darzustellen. Dabei soll die Frage beantwortet werden: ist ein anwendungsreifes theoretisches Modell, das die Dreiphasen, Dreikomponenten Strömung beschreibt, vorhanden? An dieser Stelle wird nicht die Problematik der konstitutiven Gleichungen sowie der numerischen Integration diskutiert. Es ist nicht beabsichtigt, eine Übersicht der Entwicklungsprozeduren der Erhaltungssätze z.B. verschiedene Arten von Mittelung u.s.w darzustellen (dazu sei der Leser auf weitere Literaturquellen z.B. /32-47/ hingewiesen). Die zu den diskutierten Modellen zugehörigen Dgl.-Systeme wurden im Anhang 1 zusammengestellt.

Die Entwicklung von Einphasen Modellen: Harlow-Amsden /2/ (1968), Hirt /3/ (1968), Amsden-Harlow /4/ (SMAC 1970), Harlow - Amsden /5/ (1971), Kobayashi - Namathame /18/ (1975) /bzw. Takeuchi /24/ (MULTIFLEX 1979)/, Coloutman u.a. /10/ (SOLA-ICE 1976), Sha u.a. /16/ (COMMIX-1 1979), Chen u.a. /26/ (BODYFIT-1FE 1980), Hall /31/ (DUVAL 1982), Gay-Gloski /23/ (GFLOW 1983) u.a. waren eine Voraussetzung für die Entstehung von mehrdimensionalen Zweiphasenströmungsmodellen.

Gleichgewichtsmodelle für Einkomponenten-Strömungen wurden von Hall-Porsching /27/ (DUVAL 1981, homogen), Vander Vorst - Stuhmiller /22/ (SWIRL 1981, nicht-homogen, (r,z,φ)), Bottoni u.a. /17/ (COMMIX2-SM 1984) u.a. entwickelt.

Auf der Basis des Drift-Flux Modells (5 Gleichungen) wurden 1979 von Hirt u.a. /12/ das Programm SOLA-DF und von Mössinger /28/ das Program DRIX-2D entwickelt. Dabei wurde die Gasphase im Sättigungszustand angenommen. Die Geschwindigkeitsdifferenz wurde durch eine zusätzliche Differentialgleichung berechnet. Mössinger berücksichtigte zusätzlich die "turbulente Zähigkeit".

1974 entwickelten Amsden und Harlow ihr erstes Modell KACHINA /6/ für eine Strömung bestehend aus zwei Geschwindigkeitsfeldern. In jedem Feld wurden zwei Komponenten, Gas und Flüssigkeit, vorausgesetzt, und es wurde ein thermodynamisches Nichtgleichgewicht zwischen den Feldern zugelassen. Eine Weiterentwicklung dieses Programs wurde 1976 von Rivard - Torrey /11/ (K-FIX) veröffentlicht. Dabei ist

nur je eine Komponente der beiden Geschwindigkeitsfelder berücksichtigt und der Transport an der Phasentrennfläche implizit behandelt. In beiden Programmen wurden separierte Impulsgleichungen verwendet. Die weitere Entwicklung dieser Modelle stellen die Computer Programme TRAC-P1 Liles u.a. /19/ (1978) bzw. TRAC-PD2 Liles u.a. /20/ (1981) und THERMIT-2 Kelly-Kao-Kazimi /21/ (1981) dar. Charakteristisch für diese Generation von drei Codes ist die Kopplung von Fluidodynamik und Strukturwärme in der Spaltzone eines wassergekühlten Kernreaktors. Dabei wurde in THERMIT-2 der turbulente räumliche Transport, zum Unterschied von TRAC, mitberücksichtigt. Alle bis jetzt diskutierten Modelle sind für Einkomponenten Systeme. Eine Weiterentwicklung dieser Code-Familie wurde (1980) durch Thurgood u.a. /29/ - COBRA-TF berichtet. Es wurde ein drittes Geschwindigkeitsfeld eingeführt, um die Struktur der Strömung besser zu beschreiben. Dabei wurde thermisches Gleichgewicht zwischen den zwei Flüssigkeitsfeldern angenommen. Das Programm wurde als dreidimensionaler Modul von TRAC -PD2 (COBRA/TRAC) verwendet. Eine weitere Vervollkommnung des Modells von COBRA-TF wurde durch Berücksichtigung der nichtkondensierbaren Gaskomponente /30/ in COBRA-NC (1984) durchgeführt, wobei turbulente Diffusion und Wärmeleitung in den drei Geschwindigkeitsfeldern berücksichtigt wurde.

Fünf Geschwindigkeitsfelder wurden von Senglaub u.a. /25/ in einem stark vereinfachten (ohne Impulsgleichungen, inkompressibel) Driftfluxmodell (CONTAIN 1982) verwendet.

Kolev /50-58/ (1977-1984) stellte eine Familie von Strömungsmodellen auf, wobei im Gasfeld eine nichtkondensierende Komponente berücksichtigt wurde. Zwei- bzw. Dreikomponentensysteme wurden mit bis zu drei bzw. zwei Geschwindigkeitsfeldern behandelt.

Aus dem oben dargestellten folgt: Es existiert zur Zeit kein anwendungsreifes dreidimensionales Modell einer Dreiphasen, Dreikomponenten Strömung (im Sinne von Kap.2.1) , beschrieben durch drei Geschwindigkeitsfelder.

Ein Kennzeichen aller Modelle /12,28,6,11,19,20/ ist die Verwendung der Massen- und Energiegleichungen in konservativer Form, und Vernachlässigung der Leistung einer Reihe von Kräften in der Energiegleichung, die in der Impulsgleichung existieren. Im folgenden wird gezeigt, daß eben die Berücksichtigung dieser Glieder zur wesentlichen Vereinfachung der Energiegleichungen (Entropieform) führt.

Damit wird die erhaltene Darstellung viel einfacher eben bei Berücksichtigung mehrerer physikalischer Effekte.

2.3 Einführung

Die Beschreibung der Mehrphasen- Mehrkomponentenströmungen ist relativ kompliziert. Um das Verständnis des weiter dargestellten Stoffes zu erleichtern, wird als Einführung die Herleitung des Differentialgleichungssystems, das eine homogene Strömung beschreibt, angegeben. Nicht weil diese Herleitung unbekannt ist, sondern weil die Grundgedanken bei der Entwicklung insbesondere der einfachsten Form (mit der Entropiegleichung anstatt der Energiegleichung) auch für Mehrphasen- Mehrkomponentenströmungen die gleichen sind.

Im Koordinatensystem (x,y,z) fließt ein homogenes Medium. In einem beliebigen Punkt (x,y,z) besitzt dieses Medium eine Geschwindigkeit V mit drei Komponenten (u,v,w) in den drei Richtungen (x,y,z) . Wir abstrahieren von der in Abb.2.3.1 dargestellten Strömung ein infinitesimales Kontrollvolumen so, daß seine Abmessungen $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ viel größer als die molekulare freie Weglänge des Fluids sind. Die Änderung der Masse $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$ innerhalb $(\Delta x \Delta y \Delta z)$ mit der Zeit wird nur durch die Differenz der ein- bzw. ausfließenden Massenströme in den drei Richtungen verursacht:

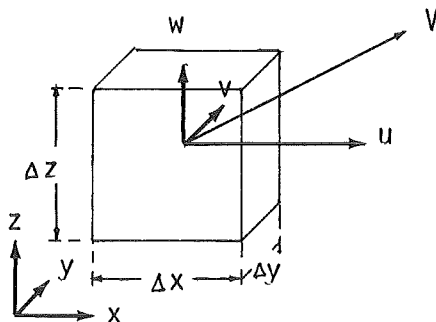


Abb.2.3.1

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) + (\rho u \Delta y \Delta z)_{x+\Delta x/2} - (\rho u \Delta y \Delta z)_{x-\Delta x/2} \\ + (\rho v \Delta x \Delta z)_{y+\Delta y/2} - (\rho v \Delta x \Delta z)_{y-\Delta y/2} \\ + (\rho w \Delta y \Delta x)_{z+\Delta z/2} - (\rho w \Delta y \Delta x)_{z-\Delta z/2} = 0 \end{aligned}$$

Die Bilanz kann pro Volumeneinheit der Strömung geschrieben werden d.h. dividiert durch $\Delta x \Delta y \Delta z$. Wenn wir gleichzeitig den Grenzübergang $\lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0}$ durchführen, erhalten wir die Massenerhaltungsgleichung der Strömung in kartesischen Koordinaten

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \right)$$

Weiter verwenden wir das Prinzip der Erhaltung des Impulses der Strömung. Der Impuls ρV pro Volumeneinheit der Strömung ist eine Vektorgröße mit drei Komponenten

(q_u, q_v, q_w) in den drei Richtungen (x, y, z) . Deswegen erfolgt die Bilanzierung für jede Richtung. Analog wie beim Massenerhaltungsprinzip ist hier die zeitliche Änderung der Impulskomponente in Richtung x $q_u \Delta x \Delta y \Delta z$ von den in den drei Richtungen ein- bzw. ausfließenden Massenströmen und damit verbundenen Impulsströmen beeinflusst. Dazu kommt die Kraft, die durch die Druckdifferenz in Richtung (x) entsteht, die x -Komponente der Schwerkraft und die x -Komponente der Reibungskraft f_x .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (q_u \Delta x \Delta y \Delta z) + [(q_u \Delta y \Delta z) u]_{x+\Delta x/2} - [(q_u \Delta y \Delta z) u]_{x-\Delta x/2} \\ + [(q_v \Delta z \Delta x) u]_{y+\Delta y/2} - [(q_v \Delta z \Delta x) u]_{y-\Delta y/2} \\ + [(q_w \Delta x \Delta y) u]_{z+\Delta z/2} - [(q_w \Delta x \Delta y) u]_{z-\Delta z/2} \\ + (p \Delta z \Delta y)_{x+\Delta x/2} - (p \Delta z \Delta y)_{x-\Delta x/2} \\ + q \Delta x \Delta y \Delta z g_x + \Delta x \Delta y \Delta z f_x = 0 \end{aligned}$$

Wir dividieren wiederum durch $\Delta x \Delta y \Delta z$ und führen den Grenzübergang $\lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0}$ durch. Damit erhalten wir die sogenannte konservative Form der Impulsgleichung in x -Richtung

$$\frac{\partial}{\partial t} (q_u) + \frac{\partial}{\partial x} (q_u \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y} (q_v \cdot u) + \frac{\partial}{\partial z} (q_w \cdot u) + \frac{\partial p}{\partial x} + q g_x + f_x = 0$$

Die nichtkonservative Form erhält man nach einer Differenzierung

$$u \underbrace{\left[\frac{\partial q_u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (q_u) + \frac{\partial}{\partial y} (q_v) + \frac{\partial}{\partial z} (q_w) \right]}_{=0} + q \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} + q g_x + f_x = 0$$

Durch Vergleich mit der Kontinuitätsgleichung sieht man, daß der Ausdruck in der eckigen Klammern gleich Null ist. Damit erhalten wir die x -Komponente der nichtkonservativen Impulsgleichung. Analog werden auch die restlichen y, z -Komponenten erhalten:

$$q \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} + q g_x + f_x = 0$$

$$q \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} + q g_y + f_y = 0$$

$$q \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} + q g_z + f_z = 0$$

Die Energiegleichung gewinnt man, in dem man die zeitliche Änderung der totalen Strömungsenergie $qE = q \left[e + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] \Delta x \Delta y \Delta z$ mit der konvektiven Energieänderung, verursacht durch die ein- bzw. ausfließenden Massenströme, bilanziert. Dazu kommt die vom Druck verursachte Leistungsänderung $(p \Delta y \Delta z \cdot u, p \Delta x \Delta z \cdot v, p \Delta x \Delta y \cdot w)$ in den

drei Richtungen, die Leistung der Schwerkraft, der Reibungskraft und die von außen in die Strömung zugeführte Wärmeleistung $\dot{q}''' \Delta x \Delta y \Delta z$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho E \Delta x \Delta y \Delta z) + (\rho u \Delta y \Delta z \cdot E)_{x+\Delta x/2} - (\rho u \Delta y \Delta z \cdot E)_{x-\Delta x/2} \\ & \quad + (\rho v \Delta z \Delta x \cdot E)_{y+\Delta y/2} - (\rho v \Delta z \Delta x \cdot E)_{y-\Delta y/2} \\ & \quad + (\rho w \Delta x \Delta y \cdot E)_{z+\Delta z/2} - (\rho w \Delta x \Delta y \cdot E)_{z-\Delta z/2} \\ & + (\rho \Delta y \Delta z \cdot u)_{x+\Delta x/2} - (\rho \Delta y \Delta z \cdot u)_{x-\Delta x/2} \\ & + (\rho \Delta x \Delta z \cdot v)_{y+\Delta y/2} - (\rho \Delta x \Delta z \cdot v)_{y-\Delta y/2} \\ & + (\rho \Delta x \Delta y \cdot w)_{z+\Delta z/2} - (\rho \Delta x \Delta y \cdot w)_{z-\Delta z/2} \\ & + \Delta x \Delta y \Delta z (f_x u + f_y v + f_z w) + \Delta x \Delta y \Delta z \rho (g_x u + g_y v + g_z w) = \Delta x \Delta y \Delta z \dot{q}''' \end{aligned}$$

Wir dividieren wiederum durch $\Delta x \Delta y \Delta z$ und führen den Grenzübergang $\lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0}$ durch:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \rho \left[e + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho u \left[e + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] \right\} \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \rho v \left[e + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] \right\} \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \rho w \left[e + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) + (f_x + \rho g_x) u + (f_y + \rho g_y) v + (f_z + \rho g_z) w = \dot{q}''' \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung des Zusammenhanges

$$h = e + p/\rho$$

erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho h) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \cdot h) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \cdot h) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \cdot h) - \frac{\partial p}{\partial \tau} + \\ & \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\rho \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u \cdot \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v \cdot \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho w \cdot \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) \\ & + (f_x + \rho g_x) u + (f_y + \rho g_y) v + (f_z + \rho g_z) w = \dot{q}''' \end{aligned}$$

Nach einer geeigneten Differenzierung und dem Vergleich mit der Massengleichung erhält man die sogenannte nichtkonservative Form der Energiegleichung

$$\begin{aligned} & \left(h + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) \left[\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w)}_{=0} \right] + \rho \left(\frac{\partial h}{\partial \tau} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial \tau} \\ & + u \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + f_x + \rho g_x \right] + v \left[\rho \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + f_y + \rho g_y \right] \\ & \quad - \frac{\partial p}{\partial x} \quad \quad \quad - \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

$$+w \left[\underbrace{g \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + f_z + g g_z}_{-\frac{\partial p}{\partial z}} \right] = \dot{q}'''$$

Ein weiterer Vergleich mit den Impulsgleichungen liefert die äußerst einfache Form der Energiegleichung:

$$g \left(\frac{\partial h}{\partial \tau} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \dot{q}'''$$

Unter der Berücksichtigung der Gibbs'sche Definition der Entropie

$$T ds = dh - dp/g$$

erhalten wir die Entropiegleichung der Strömung

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\dot{q}'''}{gT}$$

Damit läßt sich wiederum die Massengleichung durch die Zustandsgleichung

$$dq = \frac{dp}{a} + \frac{\partial q}{\partial s} ds \quad (2.3.1)$$

weiter vereinfachen. Damit erhalten wir die endgültige Form des Systems:

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} + g a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -a \frac{\partial q}{\partial s} \cdot \frac{\dot{q}'''}{gT}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial x} = -g_x - f_x/g$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial y} = -g_y - f_y/g$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z} = -g_z - f_z/g \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\dot{q}'''}{gT}$$

Angenommen ist die homogene Strömung einer Gleichgewichtszweiphasenströmung. Das System bleibt ungeändert, wobei die folgenden Gleichungen für die substantiellen Ableitungen zu verwenden sind

$$a^{-2} = g \left\{ \frac{\alpha}{g'' a''^2} + \frac{1-\alpha}{g' a'^2} + \frac{v''-v'}{s''-s'} \left[\alpha g'' \frac{ds''}{dp} + (1-\alpha) g' \frac{ds'}{dp} \right] \right\} \quad (2.3.3)$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial s} \right)_p = -g \frac{2v''-v'}{s''-s'} \quad (2.3.4)$$

Dieses quasilineare hyperbolische Differentialgleichungssystem stellt die einfachste mathematische Beschreibung der homogenen Strömung dar.

Fassen wir die wichtigsten Schritte dieses Abschnittes zusammen:

- Aufstellung der Massen-, Impuls- und Energiegleichung in konservativer Form;

- Nach einer geeigneten Differenzierung der Impuls- und Energiegleichung und dem Vergleich mit der Massenerhaltungsgleichung Gewinnung der nichtkonservativen Form der Impuls- und Energiegleichungen;
- Nach einer geeigneten Differenzierung der Energiegleichung, Vergleich mit der Impulsgleichung und Verwenden der Entropiedefinitionsgleichung Gewinnung der Entropiegleichung;
- Nach einer geeigneten Differenzierung der Massengleichung unter Verwendung der Zustandsgleichung $g=g(p,s)$ in Differentialform und Vergleich mit der Entropiegleichung Vereinfachung der Massengleichung.

Genau dieselben Schritte werden in den nächsten Kapiteln bei der Aufstellung des allgemeinen Modells einer Dreiphasen- Dreikomponenten- Strömung durchgeführt.

2.4 Einige Definitionen

Die Auswahl des Vektors der abhängigen Variablen, die die Strömung beschreiben, kann die mathematische Darstellung sehr einfach, aber auch sehr kompliziert machen. Da das physikalische System relativ kompliziert ist, sind wir bemüht, die einfachste mathematische Beschreibung zu erhalten ohne Verlust an physikalischer Information. Dazu ist folgender Vektor geeignet:

$$U^T = [\bar{x}_{iN}^*, s_i, v_i = (u_i, v_i, w_i), \alpha_i, p] \quad (2.4.1)$$

$i=1,2,3 \qquad i=1,3$

Für die Summe der Volumenanteile jedem Geschwindigkeitsfeld gilt:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad (2.4.2)$$

$$d\alpha_1 + d\alpha_2 + d\alpha_3 = 0 \quad (2.4.3)$$

Nur die Geschwindigkeiten der drei Felder sind Vektoren v_i mit den Komponenten in der drei Richtungen (x, y, z) (u_i, v_i, w_i) .

x_{iN}^* stellt die Massenkonzentration der inerten Komponenten iN innerhalb des Feldes i dar

$$x_{iN}^* = \frac{\alpha_{iN} \rho_{iN}}{\alpha_i \rho_i} \quad (\cong x_i^*) \quad (2.4.4)$$

Da für die Gasphase der Satz von Dalton gilt, d.h.

$$\alpha_{1N} = \alpha_1$$

vereinfacht sich die Definition für x_{1N}^* zu

$$x_{1N}^* = \frac{\rho_{1N}}{\rho_1} \quad (\cong \frac{\rho_L}{\rho_G} \cong x_L^*) \quad (2.4.5)$$

wobei

$$\rho_G = \rho_L + \rho_D \quad (2.4.6)$$

ist.

Für die Massenkonzentration der festen Phase haben wir

$$x_{2N}^* \cong x_{FB}^* = \frac{\alpha_{FB} \rho_{FB}}{\alpha_F \rho_F} = \frac{1/\rho_F - 1/\rho_{FF}}{1/\rho_{FB} - 1/\rho_{FF}} \quad (2.4.7)$$

$$x_{3N}^* \cong x_{TB}^* = \frac{\alpha_{TB} \rho_{TB}}{\alpha_T \rho_T} = \frac{1/\rho_T - 1/\rho_{TF}}{1/\rho_{TB} - 1/\rho_{TF}} \quad (2.4.8)$$

Dabei sind die Dichten des Gemisches $\rho_{2,3}$ ($\rho_{F,T}$) wie folgt definiert

$$q_2 \hat{=} q_F = (d_{FB} q_{FB} + d_{FF} q_{FF}) / d_F \quad (2.4.9)$$

$$q_3 \hat{=} q_T = (d_{TB} q_{TB} + d_{TF} q_{TF}) / d_T \quad (2.4.10)$$

oder

$$\frac{1}{q_F} = \frac{x_{FB}^*}{q_{FB}} + \frac{1-x_{FB}^*}{q_{FF}} \quad (2.4.11)$$

$$\frac{1}{q_T} = \frac{x_{TB}^*}{q_{TB}} + \frac{1-x_{TB}^*}{q_{TF}} \quad (2.4.12)$$

Wenn man die Massenkonzentration der festen Phase, die Dichten der beiden Komponenten und den Volumenanteil des Feldes kennt, läßt sich der Volumenanteil der feste Phase leicht berechnen zu

$$\alpha_{iN} = \alpha_i x_{iN}^* \frac{q_i}{q_{iN}} \quad , \quad i=2,3 \quad (2.4.13)$$

Wir sehen, eine Änderung von x_{iN}^* im Bereich $0 \leq x_{iN}^* \leq 1$ hat eine Änderung von α_{iN} im Bereich $0 \leq \alpha_{iN} \leq \alpha_i$ zur Folge.

2.5 Die Zustandsgleichungen

Die Zustandsgleichungen werden in der Form

$$q_i = q_i(p, s_i, x_i^*) \quad (2.5.1)$$

verwendet. Die Differentialform der Zustandsgleichungen ist

$$dq_i = \frac{dp}{a_i} + \frac{\partial q_i}{\partial s_i} ds_i + \frac{\partial q_i}{\partial x_i^*} dx_i^* \quad (2.5.2)$$

Die Herleitung der Zustandsgleichungen ist im Anhang 2 angegeben. Tabelle 3 enthält nur die Ergebnisse der Herleitung. Die Ableitungen für das dritte Geschwindigkeitsfeld erhält man indem T anstatt F als Index genommen wird. Es soll erwähnt werden, daß alle Größen in Tabelle 3 Funktionen von (x_{iN}^*, T_i, p) und nicht direkt Funktionen von (x_{iN}^*, s_i, p) sind. Das erweist sich als notwendig, da die Annahme "Temperaturgleichheit innerhalb des Geschwindigkeitsfeldes" gilt.

Tabelle 3 Substantielle Ableitungen

Y	$(\partial Y/\partial p)_{T_G, x_L^*}$	$(\partial Y/\partial T_G)_{p, x_L^*}$	$(\partial Y/\partial x_L^*)_{p, T_G}$
p_L	$x_L^* R_L T_G \frac{\partial q_D}{\partial p_D} / Z$	$x_L^* R_L [q_G(1-x_L^*) + T_G \frac{\partial q_D}{\partial T_G}] / Z$	$q_G R_L T_G / Z$
$x_L^*=0$	0	0	$q_G R_L T_G$
$x_L^*=1$	1	$\frac{\partial q_D/\partial T_G}{\partial q_D/\partial p_D} \approx 0$	$q_G / \frac{\partial q_D}{\partial p_D}$
q_G	$\frac{\partial q_D}{\partial p_D} / Z$	$\frac{\partial q_D}{\partial T_G} - x_L^* q_L R_L \frac{\partial q_D}{\partial p_D} / Z$	$q_G (1 - R_L T_G \frac{\partial q_D}{\partial p_D}) / Z$
$x_L^*=0$	$\frac{\partial q_D}{\partial p_D}$	$\frac{\partial q_D}{\partial T_G}$	$q_G (1 - R_L T_G \frac{\partial q_D}{\partial p_D})$
$x_L^*=1$	$\frac{1}{R_L T_G}$	$\frac{q_G}{T_G}$	$q_G \left(\frac{1}{\frac{\partial q_D}{\partial p_D}} - 1 \right) / R_L T_G$
$Z = 1 - x_L^* (1 - R_L T_G \frac{\partial q_D}{\partial p_D})$			
$(\partial q_G/\partial p)_{s_G, x_L^*} = 1/a_G^2$		$(\partial q_G/s_G)_{p, x_L^*}$	$(\partial q_G/\partial x_L^*)_{p, s_G}$
$q_G \frac{\partial q_G}{\partial p} - \frac{\partial q_G}{\partial T_G} \frac{\partial h_G}{q_G c_{pG}} - 1$		$\frac{\partial q_G T_G}{\partial T_G c_{pG}}$	$\left(\frac{\partial q_G}{\partial x_L^*} \right)_{p, T_G} - \frac{\partial q_G T_G}{\partial T_G c_{pG}} \frac{\partial s_G}{\partial x_L^*}$
$\frac{\partial s_G}{\partial x_L^*} = s_L - s_D - \frac{1-x_L^*}{T_G} \frac{\partial h_D}{\partial p_D} \frac{\partial p_L}{\partial x_L^*}$		$c_{pG} = x_L^* c_{pL} + (1-x_L^*) (c_{pD} - \frac{\partial h_D}{\partial p_D} \frac{\partial p_L}{\partial T_G})$	$\frac{\partial h_G}{\partial p} = (1-x_L^*) \frac{\partial h_D}{\partial p_D} (1 - \frac{\partial p_L}{\partial p})$
$(\partial q_F/\partial p)_{s_F, x_{FB}^*} = 1/a_F^2$		$(\partial q_F/s_F)_{p, x_{FB}^*}$	$(\partial q_F/\partial x_{FB}^*)_{p, s_F}$
$q_F (1-x_{FB}^*) \frac{q_F^2}{q_{FF}} \left(\frac{\partial q_{FF}}{\partial p} - \frac{\partial q_{FF}}{\partial T_F} \frac{\partial h_{FF}}{q_{FF} c_{pF}} - 1 \right)$		$(1-x_{FB}^*) \frac{q_F^2}{q_{FF}} \frac{\partial q_{FF} T_F}{\partial T_T c_{pF}}$	$q_F \left(\frac{1}{q_{FF}} - \frac{1}{q_{FB}} \right) - (1-x_{FB}^*) \frac{q_F^2}{q_{FF}} \frac{\partial q_{FF} T_F}{\partial T_T c_{pF}} \frac{\partial s_F}{\partial x_{FB}^*}$
$\frac{\partial s_F}{\partial x_{FB}^*} = s_{FB} - s_{FF}$		$c_{pF} = x_{FB}^* c_{pFB} + (1-x_{FB}^*) c_{pFF}$	$\frac{\partial h_F}{\partial p} = (1-x_{FB}^*) \frac{\partial h_{FF}}{\partial p}$

2.6 Das Differentialgleichungssystem, das die Strömung beschreibt

In diesem Abschnitt wird das Dgl.-System, das die Strömung beschreibt, hergeleitet.

Als Ausgangspunkt der weiteren Betrachtungen verwenden wir die Massenerhaltungsgleichungen (kurz Massengleichungen) für jede inerte Komponente, die Massen-, Impuls- und Energieerhaltungsgleichungen für jedes Geschwindigkeitsfeld - Tabelle

4. Zu beachten sind die folgenden Besonderheiten:

- 1) Es wird die Leistung jeder in den Impulsgleichungen berücksichtigten Kraft auch in der Energiegleichung mitberücksichtigt. Das ist eine Erkenntnis aus der Einführung, da nur auf diese Weise die Entropiegleichungen zu erhalten sind.
- 2) Im Gegensatz zu der homogenen Strömung wird in der Energiegleichung die Leistung der mechanischen Kompression $p \nabla_{\mathbf{v}} \alpha_i / \partial \tau$ mitberücksichtigt. Bei der homogenen Strömung ist dieser Term gleich Null, da die Geometrie des Strömungskanals keine Funktion der Zeit war. Hier kann ein Geschwindigkeitsfeld expandieren auf Kosten des umgebenden Feldes.

Die konservative Form der Erhaltungsgleichungen ist in Tabelle 4 und die Quellterme der Energiegleichungen in Tabelle 5 angegeben.

Nach eine Reihe von Transformationen, angegeben im Anhang 3-5, kommen wir zur folgendennichtkonservativen Form des Dgl.-Systems - Tabelle 6. Tabellen 7 bis 10 erläutern die Bedeutung der in den rechten Seiten der Gleichungen auftretenden Glieder.

Somit haben wir die einfachst mögliche mathematische Darstellung dieses relativ komplizierten physikalischen Systems. Wir erkennen jetzt die Bedeutung der Auswahl der Massenkonzentrationen der inerten Komponenten und der Entropien des Gemisches als abhängige Variablen, um eine einfache mathematische Darstellung zu erzielen.

Von dieser allgemeinen Form des Dgl.-Systems können eine Reihe von Modellen für Grenzfälle hergeleitet werden: z.B. für fehlende Phasen, Komponenten oder Geschwindigkeitsfelder, für 2 oder 1 dimensionale Strömungen, für freie Strömungen $\nabla=0$ u.s.w. Damit werden auch eine Reihe der derzeitig existierenden Modelle verallgemeinert. Darin ist eben die Bedeutung dieses Systems zu sehen.

Tabelle 4

Die Erhaltungsgleichungen für die Dreiphasen Dreikomponenten Strömung
Die Erhaltung der Masse der inerten Komponente $\frac{\partial}{\partial \tau}(\alpha_i \rho_i \gamma_v) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_i \rho_i u_i \gamma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_i \rho_i v_i \gamma_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_i \rho_i w_i \gamma_z) = \mu_i \gamma_v$ $i=1,2,3$
Die Erhaltung der Masse des Geschwindigkeitsfeldes $\frac{\partial}{\partial \tau}(\alpha_i \rho_i \gamma_v) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_i \rho_i u_i \gamma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_i \rho_i v_i \gamma_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_i \rho_i w_i \gamma_z) = \mu_i \gamma_v$ $i=1,2,3$
Die Erhaltung des Impulses x-Richtung $\frac{\partial}{\partial \tau}(\alpha_i \rho_i u_i \gamma_v) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_i \rho_i u_i \cdot u_i \gamma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_i \rho_i v_i \cdot u_i \gamma_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_i \rho_i w_i \cdot u_i \gamma_z)$ $+ \alpha_i \gamma_v \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma_v (\alpha_i \rho_i g_x + f_{ix}) = \gamma_v (\mu_{Ai} u_{Ai} - \mu_{iA} u_{iA} + \mu_{2i} u_{2i} - \mu_{i2} u_{i2} + \mu_{3i} u_{3i} - \mu_{i3} u_{i3})$ y-Richtung $\frac{\partial}{\partial \tau}(\alpha_i \rho_i v_i \gamma_v) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_i \rho_i u_i \cdot v_i \gamma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_i \rho_i v_i \cdot v_i \gamma_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_i \rho_i w_i \cdot v_i \gamma_z)$ $+ \alpha_i \gamma_v \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma_v (\alpha_i \rho_i g_y + f_{iy}) = \gamma_v (\mu_{Ai} v_{Ai} - \mu_{iA} v_{iA} + \mu_{2i} v_{2i} - \mu_{i2} v_{i2} + \mu_{3i} v_{3i} - \mu_{i3} v_{i3})$ z-Richtung $\frac{\partial}{\partial \tau}(\alpha_i \rho_i w_i \gamma_v) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_i \rho_i u_i \cdot w_i \gamma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_i \rho_i v_i \cdot w_i \gamma_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_i \rho_i w_i \cdot w_i \gamma_z)$ $+ \alpha_i \gamma_v \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma_v (\alpha_i \rho_i g_z + f_{iz}) = \gamma_v (\mu_{Ai} w_{Ai} - \mu_{iA} w_{iA} + \mu_{2i} w_{2i} - \mu_{i2} w_{i2} + \mu_{3i} w_{3i} - \mu_{i3} w_{i3})$ $i=1,2,3$
Die Erhaltung der Gasenergie $\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \alpha_G \rho_L \sqrt{e_L} + \frac{1}{2} (u_G^2 + v_G^2 + w_G^2) \right\} \gamma_v + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \alpha_G \rho_L u_G \sqrt{e_L} + \frac{1}{2} (u_G^2 + v_G^2 + w_G^2) \right\} \gamma_x$ $+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \alpha_G \rho_L v_G \sqrt{e_L} + \frac{1}{2} (u_G^2 + v_G^2 + w_G^2) \right\} \gamma_y + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \alpha_G \rho_L w_G \sqrt{e_L} + \frac{1}{2} (u_G^2 + v_G^2 + w_G^2) \right\} \gamma_z$ $+ \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \alpha_G \rho_D \sqrt{e_D} + \frac{1}{2} (u_G^2 + v_G^2 + w_G^2) \right\} \gamma_v + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \alpha_G \rho_D u_G \sqrt{e_D} + \frac{1}{2} (u_G^2 + v_G^2 + w_G^2) \right\} \gamma_x$ $+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \alpha_G \rho_D v_G \sqrt{e_D} + \frac{1}{2} (u_G^2 + v_G^2 + w_G^2) \right\} \gamma_y + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \alpha_G \rho_D w_G \sqrt{e_D} + \frac{1}{2} (u_G^2 + v_G^2 + w_G^2) \right\} \gamma_z$ $+ p \gamma_v \frac{\partial \alpha_G}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_G p u_G \gamma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_G p v_G \gamma_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_G p w_G \gamma_z)$ $+ \alpha_G \rho_G (g_x u_G + g_y v_G + g_z w_G) \gamma_v + (f_{Gx} u_G + f_{Gy} v_G + f_{Gz} w_G) \gamma_v = q_G^*$

Die Erhaltung der "Filmenergie"

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ d_{FB} \varrho_{FB} \mathcal{L}_{e_{FB}} + \frac{1}{2} (u_F^2 + v_F^2 + w_F^2) \right\} \gamma_V + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ d_{FB} \varrho_{FB} u_F \mathcal{L}_{e_{FB}} + \frac{1}{2} (u_F^2 + v_F^2 + w_F^2) \right\} \gamma_x \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ d_{FB} \varrho_{FB} v_F \mathcal{L}_{e_{FB}} + \frac{1}{2} (u_F^2 + v_F^2 + w_F^2) \right\} \gamma_y + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ d_{FB} \varrho_{FB} w_F \mathcal{L}_{e_{FB}} + \frac{1}{2} (u_F^2 + v_F^2 + w_F^2) \right\} \gamma_z \\
 & + \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ d_{FF} \varrho_{FF} \mathcal{L}_{e_{FF}} + \frac{1}{2} (u_F^2 + v_F^2 + w_F^2) \right\} \gamma_V + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ d_{FF} \varrho_{FF} u_F \mathcal{L}_{e_{FF}} + \frac{1}{2} (u_F^2 + v_F^2 + w_F^2) \right\} \gamma_x \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ d_{FF} \varrho_{FF} v_F \mathcal{L}_{e_{FF}} + \frac{1}{2} (u_F^2 + v_F^2 + w_F^2) \right\} \gamma_y + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ d_{FF} \varrho_{FF} w_F \mathcal{L}_{e_{FF}} + \frac{1}{2} (u_F^2 + v_F^2 + w_F^2) \right\} \gamma_z \\
 & + p \delta_V \frac{\partial d_F}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} (d_F p u_F \gamma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (d_F p v_F \gamma_y) + \frac{\partial}{\partial z} (d_F p w_F \gamma_z) \\
 & + d_F \varrho_F (g_x u_F + g_y v_F + g_z w_F) \gamma_V + (f_{Fx} u_F + f_{Fy} v_F + f_{Fz} w_F) \gamma_V = q_F^*
 \end{aligned}$$

Die Erhaltung der Energie des "Tröpfchenfeldes"

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ d_{TB} \varrho_{TB} \mathcal{L}_{e_{TB}} + \frac{1}{2} (u_T^2 + v_T^2 + w_T^2) \right\} \gamma_V + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ d_{TB} \varrho_{TB} u_T \mathcal{L}_{e_{TB}} + \frac{1}{2} (u_T^2 + v_T^2 + w_T^2) \right\} \gamma_x \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ d_{TB} \varrho_{TB} v_T \mathcal{L}_{e_{TB}} + \frac{1}{2} (u_T^2 + v_T^2 + w_T^2) \right\} \gamma_y + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ d_{TB} \varrho_{TB} w_T \mathcal{L}_{e_{TB}} + \frac{1}{2} (u_T^2 + v_T^2 + w_T^2) \right\} \gamma_z \\
 & + \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ d_{TF} \varrho_{TF} \mathcal{L}_{e_{TF}} + \frac{1}{2} (u_T^2 + v_T^2 + w_T^2) \right\} \gamma_V + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ d_{TF} \varrho_{TF} u_T \mathcal{L}_{e_{TF}} + \frac{1}{2} (u_T^2 + v_T^2 + w_T^2) \right\} \gamma_x \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ d_{TF} \varrho_{TF} v_T \mathcal{L}_{e_{TF}} + \frac{1}{2} (u_T^2 + v_T^2 + w_T^2) \right\} \gamma_y + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ d_{TF} \varrho_{TF} w_T \mathcal{L}_{e_{TF}} + \frac{1}{2} (u_T^2 + v_T^2 + w_T^2) \right\} \gamma_z \\
 & + p \delta_V \frac{\partial d_T}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} (d_T p u_T \gamma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (d_T p v_T \gamma_y) + \frac{\partial}{\partial z} (d_T p w_T \gamma_z) \\
 & + d_T \varrho_T (g_x u_T + g_y v_T + g_z w_T) \gamma_V + (f_{Tx} u_T + f_{Ty} v_T + f_{Tz} w_T) \gamma_V = q_T^*
 \end{aligned}$$

Tabelle 5 Die Quellterme in den Energiegleichungen

<p>Gas</p> $q_G^* = \gamma_v \left\{ \begin{aligned} & \dot{q}_G''' + \mu_{AL} \left[h_{AL} + \frac{1}{2}(u_{AG}^2 + v_{AG}^2 + w_{AG}^2) \right] - \mu_{LA} \left[h_L + \frac{1}{2}(u_{GA}^2 + v_{GA}^2 + w_{GA}^2) \right] \\ & + \mu_{AD} \left[h_{AD} + \frac{1}{2}(u_{AG}^2 + v_{AG}^2 + w_{AG}^2) \right] - \mu_{DA} \left[h_D + \frac{1}{2}(u_{GA}^2 + v_{GA}^2 + w_{GA}^2) \right] \\ & + \mu_{FG} \left[h'' + \frac{1}{2}(u_F^2 + v_F^2 + w_F^2) \right] - \mu_{GF} \left[h_D + \frac{1}{2}(u_G^2 + v_G^2 + w_G^2) \right] \\ & + \mu_{TG} \left[h'' + \frac{1}{2}(u_T^2 + v_T^2 + w_T^2) \right] - \mu_{GT} \left[h_D + \frac{1}{2}(u_G^2 + v_G^2 + w_G^2) \right] \end{aligned} \right\}$
<p>"Film"</p> $q_F^* = \gamma_v \left\{ \begin{aligned} & \dot{q}_F''' + \mu_{AFB} \left[h_{AFB} + \frac{1}{2}(u_{AF}^2 + v_{AF}^2 + w_{AF}^2) \right] - \mu_{FBA} \left[h_{FB} + \frac{1}{2}(u_{FA}^2 + v_{FA}^2 + w_{FA}^2) \right] \\ & + x_{TB}^* \mu_{TF} \left[h_{TB} + \frac{1}{2}(u_T^2 + v_T^2 + w_T^2) \right] - x_{FB}^* \mu_{FT} \left[h_{FB} + \frac{1}{2}(u_F^2 + v_F^2 + w_F^2) \right] \\ & + \mu_{AFF} \left[h_{AFF} + \frac{1}{2}(u_{AF}^2 + v_{AF}^2 + w_{AF}^2) \right] - \mu_{FFA} \left[h_{FF} + \frac{1}{2}(u_{FA}^2 + v_{FA}^2 + w_{FA}^2) \right] \\ & - \mu_{FG} \left[h_{FF} + \frac{1}{2}(u_F^2 + v_F^2 + w_F^2) \right] + \mu_{GF} \left[h' + \frac{1}{2}(u_G^2 + v_G^2 + w_G^2) \right] \\ & + (1-x_{TB}^*) \mu_{TF} \left[h_{TF} + \frac{1}{2}(u_T^2 + v_T^2 + w_T^2) \right] - (1-x_{FB}^*) \mu_{FT} \left[h_{FF} + \frac{1}{2}(u_F^2 + v_F^2 + w_F^2) \right] \end{aligned} \right\}$
<p>"Tröpfchen"</p> $q_T^* = \gamma_v \left\{ \begin{aligned} & \dot{q}_T''' + \mu_{ATB} \left[h_{ATB} + \frac{1}{2}(u_{AT}^2 + v_{AT}^2 + w_{AT}^2) \right] - \mu_{TBA} \left[h_{TB} + \frac{1}{2}(u_{TA}^2 + v_{TA}^2 + w_{TA}^2) \right] \\ & - x_{TB}^* \mu_{TF} \left[h_{TB} + \frac{1}{2}(u_T^2 + v_T^2 + w_T^2) \right] + x_{FB}^* \mu_{FT} \left[h_{FB} + \frac{1}{2}(u_F^2 + v_F^2 + w_F^2) \right] \\ & + \mu_{ATF} \left[h_{ATF} + \frac{1}{2}(u_{AT}^2 + v_{AT}^2 + w_{AT}^2) \right] - \mu_{TFA} \left[h_{TF} + \frac{1}{2}(u_{TA}^2 + v_{TA}^2 + w_{TA}^2) \right] \\ & - \mu_{TG} \left[h_{TF} + \frac{1}{2}(u_T^2 + v_T^2 + w_T^2) \right] + \mu_{GT} \left[h' + \frac{1}{2}(u_G^2 + v_G^2 + w_G^2) \right] \\ & - (1-x_{TB}^*) \mu_{TF} \left[h_{TF} + \frac{1}{2}(u_T^2 + v_T^2 + w_T^2) \right] + (1-x_{FB}^*) \mu_{FT} \left[h_{FF} + \frac{1}{2}(u_F^2 + v_F^2 + w_F^2) \right] \end{aligned} \right\}$

Tabelle 6 Die nichtkonservative Form des Dgl.-Systems

Vektor der abhängigen Variablen $U^T = (x_{iN}^*, s_i, v_i, \alpha_i, p)$ $i=1,2,3$			
$\frac{\partial x_i^*}{\partial \tau} + u_i \frac{\gamma_x \partial x_i^*}{\gamma_V \partial x} + v_i \frac{\gamma_y \partial x_i^*}{\gamma_V \partial y} + w_i \frac{\gamma_z \partial x_i^*}{\gamma_V \partial z} = D x_i^*$			
$\frac{\partial s_i}{\partial \tau} + u_i \frac{\gamma_x \partial s_i}{\gamma_V \partial y} + v_i \frac{\gamma_y \partial s_i}{\gamma_V \partial y} + w_i \frac{\gamma_z \partial s_i}{\gamma_V \partial z} = D s_i$			
$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} + u_i \frac{\gamma_x \partial u_i}{\gamma_V \partial x} + v_i \frac{\gamma_y \partial u_i}{\gamma_V \partial y} + w_i \frac{\gamma_z \partial u_i}{\gamma_V \partial z} + \frac{\gamma_x}{\gamma_V} \frac{1}{g_i} \frac{\partial p}{\partial x} = Z_{ix}$			$i=1,2,3$
$\frac{\partial v_i}{\partial \tau} + u_i \frac{\gamma_x \partial v_i}{\gamma_V \partial x} + v_i \frac{\gamma_y \partial v_i}{\gamma_V \partial y} + w_i \frac{\gamma_z \partial v_i}{\gamma_V \partial z} + \frac{\gamma_y}{\gamma_V} \frac{1}{g_i} \frac{\partial p}{\partial y} = Z_{iy}$			
$\frac{\partial w_i}{\partial \tau} + u_i \frac{\gamma_x \partial w_i}{\gamma_V \partial x} + v_i \frac{\gamma_y \partial w_i}{\gamma_V \partial y} + w_i \frac{\gamma_z \partial w_i}{\gamma_V \partial z} + \frac{\gamma_z}{\gamma_V} \frac{1}{g_i} \frac{\partial p}{\partial z} = Z_{iz}$			
$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \tau} + \frac{\alpha_i}{g_i a_i} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} + u_i \frac{\gamma_x \partial p}{\gamma_V \partial x} + v_i \frac{\gamma_y \partial p}{\gamma_V \partial y} + w_i \frac{\gamma_z \partial p}{\gamma_V \partial z} \right) + \frac{1}{\gamma_V} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\alpha_i u_i \gamma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_i v_i \gamma_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_i w_i \gamma_z) \right] = D \alpha_i$			
$i=2,3 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1)$			
$\frac{\partial p}{\partial \tau} + u_i \frac{\gamma_x \partial p}{p \gamma_V \partial x} + v_i \frac{\gamma_y \partial p}{p \gamma_V \partial y} + w_i \frac{\gamma_z \partial p}{p \gamma_V \partial z} + \frac{q a^2}{\gamma_V} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x} (\alpha_i u_i \gamma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_i v_i \gamma_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_i w_i \gamma_z) \right] = D p$			
$\frac{1}{q a^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{g_i a_i^2}$	$u_p = q a^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i u_i}{g_i a_i^2}$	$v_p = q a^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i v_i}{g_i a_i^2}$	$w_p = q a^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i w_i}{g_i a_i^2}$
$D \alpha_i = \left[\mu_i - \alpha_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial s_i} D s_i + \frac{\partial q_i}{\partial x_i^*} D x_i^* \right) \right] / g_i$			
$D p = q a^2 \sum_{i=1}^3 \frac{1}{g_i} \left[\mu_i - \alpha_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial s_i} D s_i + \frac{\partial q_i}{\partial x_i^*} D x_i^* \right) \right]$			

Tabelle 7 Die Quellterme in den Massen- bzw. Konzentrationsgleichungen ($\mu \geq 0$)

$\mu_{iN} \hat{=} \mu_L = \mu_{AL} - \mu_{LA}$ $\mu_D = \mu_{AD} - \mu_{DA} + \mu_{FD} - \mu_{DF} + \mu_{TD} - \mu_{DT}$ $\mu_1 \hat{=} \mu_G = \mu_{AL} - \mu_{LA} + \mu_{AD} - \mu_{DA} + \mu_{FD} - \mu_{DF} + \mu_{TD} - \mu_{DT}$	$Dx_1^* \hat{=} Dx_L^* = \frac{\mu_L - x_L^* \mu_G}{\alpha_G \rho_G}$
$\mu_{2N} \hat{=} \mu_{FB} = \mu_{AFB} - \mu_{FBA} + x_{TB}^* \mu_{TF} - x_{FB}^* \mu_{FT}$ $\mu_{FF} = \mu_{AFF} - \mu_{FFA} - \mu_{FD} + \mu_{DF} + (1 - x_{TB}^*) \mu_{TF} - (1 - x_{FB}^*) \mu_{FT}$ $\mu_2 \hat{=} \mu_F = \mu_{AFB} - \mu_{FBA} + \mu_{AFF} - \mu_{FFA} - \mu_{FD} + \mu_{DF} + \mu_{TF} - \mu_{FT}$	$Dx_2^* \hat{=} Dx_{FB}^* = \frac{\mu_{FB} - x_{FB}^* \mu_F}{\alpha_F \rho_F}$
$\mu_{3N} \hat{=} \mu_{TB} = \mu_{ATB} - \mu_{TBA} + x_{FB}^* \mu_{FT} - x_{TB}^* \mu_{TF}$ $\mu_{TF} = \mu_{ATF} - \mu_{TFA} - \mu_{TD} + \mu_{DT} + (1 - x_{FB}^*) \mu_{FT} - (1 - x_{TB}^*) \mu_{TF}$ $\mu_3 \hat{=} \mu_T = \mu_{ATB} - \mu_{TBA} + \mu_{ATF} - \mu_{TFA} - \mu_{TD} + \mu_{DT} + \mu_{FT} - \mu_{TF}$	$Dx_3^* \hat{=} Dx_{TB}^* = \frac{\mu_{TB} - x_{TB}^* \mu_T}{\alpha_T \rho_T}$
$\mu = \sum \mu_i$	

Tabelle 8 Die Quellterme in den Impulsgleichungen (nichtkonservativ)

$\bar{z}_{1x} \hat{=} \bar{z}_{Gx} = \mu_{AG}(u_{AG} - u_G) - \mu_{GA}(u_{GA} - u_G) + \mu_{FG}(u_F - u_G) + \mu_{TG}(u_T - u_G)$ $\bar{z}_{1y} \hat{=} \bar{z}_{Gy} = \mu_{AG}(v_{AG} - v_G) - \mu_{GA}(v_{GA} - v_G) + \mu_{FG}(v_F - v_G) + \mu_{TG}(v_T - v_G)$ $\bar{z}_{1z} \hat{=} \bar{z}_{Gz} = \mu_{AG}(w_{AG} - w_G) - \mu_{GA}(w_{GA} - w_G) + \mu_{FG}(w_F - w_G) + \mu_{TG}(w_T - w_G)$	$z_{ix} = \frac{\bar{z}_{ix} - f_{ix}}{\alpha_i \rho_i} - g_x$	
$\bar{z}_{2x} \hat{=} \bar{z}_{Fx} = \mu_{AF}(u_{AF} - u_F) - \mu_{FA}(u_{FA} - u_F) + \mu_{GF}(u_G - u_F) + \mu_{TF}(u_T - u_F)$ $\bar{z}_{2y} \hat{=} \bar{z}_{Fy} = \mu_{AF}(v_{AF} - v_F) - \mu_{FA}(v_{FA} - v_F) + \mu_{GF}(v_G - v_F) + \mu_{TF}(v_T - v_F)$ $\bar{z}_{2z} \hat{=} \bar{z}_{Fz} = \mu_{AF}(w_{AF} - w_F) - \mu_{FA}(w_{FA} - w_F) + \mu_{GF}(w_G - w_F) + \mu_{TF}(w_T - w_F)$	$z_{iy} = \frac{\bar{z}_{iy} - f_{iy}}{\alpha_i \rho_i} - g_y$	
$\bar{z}_{3x} \hat{=} \bar{z}_{Tx} = \mu_{AT}(u_{AT} - u_T) - \mu_{TA}(u_{TA} - u_T) + \mu_{GT}(u_G - u_T) + \mu_{FT}(u_F - u_T)$ $\bar{z}_{3y} \hat{=} \bar{z}_{Ty} = \mu_{AT}(v_{AT} - v_T) - \mu_{TA}(v_{TA} - v_T) + \mu_{GT}(v_G - v_T) + \mu_{FT}(v_F - v_T)$ $\bar{z}_{3z} \hat{=} \bar{z}_{Tz} = \mu_{AT}(w_{AT} - w_T) - \mu_{TA}(w_{TA} - w_T) + \mu_{GT}(w_G - w_T) + \mu_{FT}(w_F - w_T)$	$z_{iz} = \frac{\bar{z}_{iz} - f_{iz}}{\alpha_i \rho_i} - g_z$	
$f_{1x} \hat{=} f_{Gx} = f_{WGx} + f_{GTx} + f_{GFx}$ $f_{1y} \hat{=} f_{Gy} = f_{WGy} + f_{GTy} + f_{GFy}$ $f_{1z} \hat{=} f_{Gz} = f_{WGz} + f_{GTz} + f_{GFz}$	$f_{2x} = f_{WFx} - f_{GFx} + f_{FTx}$ $f_{2y} = f_{WFy} - f_{GFy} + f_{FTy}$ $f_{2z} = f_{WFz} - f_{GFz} + f_{FTz}$	$f_{3x} = -f_{GTx} - f_{FTx}$ $f_{3y} = -f_{GTy} - f_{FTy}$ $f_{3z} = -f_{GTz} - f_{FTz}$

Tabelle 9 Die Quellterme in den Energiegleichungen (nichtkonservativ)

$ \begin{aligned} q_G = & \dot{q}_G''' + \mu_{AL}(h_{AL} - h_L) + \mu_{AD}(h_{AD} - h_D) \\ & + \mu_{AG} \frac{1}{2} \mathcal{L} (u_{AG} - u_G)^2 + (v_{AG} - v_G)^2 + (w_{AG} - w_G)^2 \mathcal{J} \\ & - \mu_{GA} \frac{1}{2} \mathcal{L} (u_{GA} - u_G)^2 + (v_{GA} - v_G)^2 + (w_{GA} - w_G)^2 \mathcal{J} \\ & + \mu_{FG} \left\{ h'' - h_D + \frac{1}{2} \mathcal{L} (u_F - u_G)^2 + (v_F - v_G)^2 + (w_F - w_G)^2 \mathcal{J} \right\} \\ & + \mu_{TG} \left\{ h'' - h_D + \frac{1}{2} \mathcal{L} (u_T - u_G)^2 + (v_T - v_G)^2 + (w_T - w_G)^2 \mathcal{J} \right\} \end{aligned} $
$ \begin{aligned} q_F = & \dot{q}_F''' + \mu_{AFB}(h_{AFB} - h_{FB}) + \mu_{AFF}(h_{AFF} - h_{FF}) \\ & + \mu_{TF} \left\{ x_{TB}^* (h_{TB} - h_{FB}) + (1 - x_B^*) (h_{TF} - h_{FF}) + \frac{1}{2} \mathcal{L} (u_T - u_F)^2 + (v_T - v_F)^2 + (w_T - w_F)^2 \mathcal{J} \right\} \\ & + \mu_{AF} \frac{1}{2} \mathcal{L} (u_{AF} - u_F)^2 + (v_{AF} - v_F)^2 + (w_{AF} - w_F)^2 \mathcal{J} \\ & - \mu_{FA} \frac{1}{2} \mathcal{L} (u_{FA} - u_F)^2 + (v_{FA} - v_F)^2 + (w_{FA} - w_F)^2 \mathcal{J} \\ & + \mu_{GF} \left\{ h' - h_{FF} + \frac{1}{2} \mathcal{L} (u_G - u_F)^2 + (v_G - v_F)^2 + (w_G - w_F)^2 \mathcal{J} \right\} \end{aligned} $
$ \begin{aligned} q_T = & \dot{q}_T''' + \mu_{ATB}(h_{ATB} - h_{TB}) + \mu_{ATF}(h_{ATF} - h_{TF}) \\ & + \mu_{FT} \left\{ x_{FB}^* (h_{FB} - h_{TB}) + (1 - x_{FB}^*) (h_{FF} - h_{TF}) + \frac{1}{2} \mathcal{L} (u_F - u_T)^2 + (v_F - v_T)^2 + (w_F - w_T)^2 \mathcal{J} \right\} \\ & + \mu_{AT} \frac{1}{2} \mathcal{L} (u_{TA} - u_T)^2 + (v_{TA} - v_T)^2 + (w_{TA} - w_T)^2 \mathcal{J} \\ & - \mu_{TA} \frac{1}{2} \mathcal{L} (u_{TA} - u_T)^2 + (v_{TA} - v_T)^2 + (w_{TA} - w_T)^2 \mathcal{J} \\ & + \mu_{GT} \left\{ h' - h_{TF} + \frac{1}{2} \mathcal{L} (u_G - u_T)^2 + (v_G - v_T)^2 + (w_G - w_T)^2 \mathcal{J} \right\} \end{aligned} $

Tabelle 10 Die Quellterme in den Entropiegleichungen

$Ds_1 \hat{=} Ds_G = \frac{q_G + T_G (s_L - s_D) (\mu_L - x_L^* \mu_G)}{\alpha_G \varrho_G T_G}$
$Ds_2 \hat{=} Ds_F = \frac{q_F + T_F (s_{FB} - s_{FF}) (\mu_{FB} - x_{FB}^* \mu_F)}{\alpha_F \varrho_F T_F}$
$Ds_3 \hat{=} Ds_T = \frac{q_T + T_T (s_{TB} - s_{TF}) (\mu_{TB} - x_{TB}^* \mu_T)}{\alpha_T \varrho_T T_T}$

3. Die Mach-Zahl

Die Mach-Zahl der Dreiphasen- Dreikomponenten Strömung erhalten wir, indem der stationäre, eindimensionale (z) Teil des nichtkonservativen Gleichungssystems nach den Ortsableitungen aufgelöst wird. Als Ergebnis erhalten wir das in der Tabelle 11 dargestellte System von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Aus dem Nenner der Druckgradientgleichung erhält man die Definition der Mach-Zahl. Daraus ergibt sich die Definition der Bedingung zur Entstehung der kritischen Dreiphasen- Dreikomponenten Strömung

$$M \rightarrow 1$$

Im kritischen Querschnitt konvergiert der Druckgradient bzw. die Geschwindigkeitsgradienten gegen $-\infty$ bzw. $+\infty$.

Tabelle 11 Das stationäre eindimensionale Dgl.-System. Mach-Zahldefinition.

$(z, \gamma_v = \gamma_z)$	
$\frac{dx_i^*}{dz} = Dx_i^*/w_i$	$i=1,2,3$
$\frac{ds_i}{dz} = Ds_i/w_i$	
$\frac{dw_i}{dz} = (Z_{iz} - \frac{1}{g_i} \frac{dp}{dz})/w_i$	
$\frac{d\alpha_i}{dz} = \frac{\alpha_i}{g_i w_i^2} (1-M_i^2) \frac{dp}{dz} + \frac{1}{w_i} (D\alpha_i - \frac{\alpha_i Z_{iz}}{w_i}) - \frac{\alpha_i}{\gamma_z} \frac{d\gamma_z}{dz}$	$M_i = w_i/a_i \quad i=2,3$
$\frac{dp}{dz} = - \frac{\sum \frac{1}{w_i} (D\alpha_i - \frac{\alpha_i Z_{iz}}{w_i}) - \frac{1}{\gamma_z} \frac{d\gamma_z}{dz}}{(1-M^2) \sum \frac{\alpha_i}{g_i w_i^2}}$	
$M^{-2} = g a^2 \sum \frac{\alpha_i}{g_i w_i^2} \quad \frac{1}{g a^2} = \sum \frac{\alpha_i}{g_i a_i^2}$	

4. Die kritische Massenstromdichte

Die mathematische Modellierung der Relativgeschwindigkeit zwischen den Feldern kann auf verschiedenen Wegen erfolgen. Einer davon ist die Verwendung der separierten Impulsgleichungen wie in Kap.2 gezeigt wurde. Dieses Verfahren benötigt empirische Informationen zur Bestimmung der Strömungsstruktur und für jedes Strömungsbild, konkrete empirische Informationen für die zwischen den einzelnen Feldernselbst sowie zwischen der Wand und den Feldern wirkenden Kräfte.

Ein anderer Weg ist die Verwendung empirischer Informationen in der Form der Schlupf- bzw. Driftfluxgleichungen unter der Annahme, daß die unter stationären Bedingungen erhaltenen Korrelationen auch im transienten Zustand gültig sind. Beide Wege sind nicht vollkommen. Für den letzten liegt zur Zeit eine breitere Datenbasis vor, im Gegensatz zu dem ersten, so daß er zuverlässiger ist. Außerdem ist man in der Lage, aus dem stationären Teil des eindimensionalen Systems die kritische Massenstromdichte zu berechnen.

Das Anliegen dieses Abschnittes ist die Aufstellung eines eindimensionalen Modells ausgehend von bekannter empirischer Information für den Schlupf. Abschließend wird aus dem stationären Teil des Systems die lokale kritische Massenstromdichte berechnet. Die lokale kritische Massenstromdichte spielt eine wichtige Rolle bei der Modellierung von Dekompressionsprozessen in technologischen Einrichtungen. Sie liefert auch die nötige Information für eine mögliche Randbedingung auch bei mehrdimensionalen Analysen.

Zunächst führen wir einige Definitionen ein.

Wir definieren den Schlupf S_i als

$$S_i = \frac{w_1}{w_i} \quad (4.1)$$

Daraus folgt, daß

$$S_1 = 1 \quad (4.2)$$

ist. Den Massenstromanteil des Feldes i definieren wir als

$$x_i = \frac{\dot{m}_i}{\dot{m}} = \frac{\alpha_i \rho_i w_i}{G_z} \quad \left(\sum x_i = 1 \right) \quad (4.3)$$

wobei

$$G_z = \sum \alpha_i \rho_i w_i \quad (4.4)$$

die Massenstromdichte des Gemisches ist. Aus den Definitionen folgt für den Volumenanteil

$$\alpha_i = \frac{x_i v_i S_i}{\sum x_i v_i S_i} \quad (v_i = 1/\rho_i) \quad (\sum \alpha_i = 1) \quad (4.5)$$

oder

$$\alpha_i = x_i v_i S_i / v_S \quad (4.6)$$

wobei

$$v_S = \sum x_i v_i S_i \quad (4.7)$$

ist. Damit können die Feldgeschwindigkeiten folgenderweise ausgedrückt werden

$$w_i = G_z v_S / S_i \quad (4.8)$$

Mit Hilfe dieser Definitionen lassen sich aus den nichtkonservativen Massengleichungen der Geschwindigkeitsfelder, deren Summe und der Impulsgleichung des Gemisches

$$\gamma_v \frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_i \rho_i) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_i \rho_i w_i \gamma_z) = \mu_i \gamma_v \quad i=1,3 \quad (4.9)$$

$$\gamma_v \frac{\partial}{\partial \tau} (\sum \alpha_i \rho_i) + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma_z \sum \alpha_i \rho_i w_i) = \gamma_v \sum \mu_i \quad (4.10)$$

$$\gamma_v \frac{\partial}{\partial \tau} (\sum \alpha_i \rho_i w_i) + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma_z \sum \alpha_i \rho_i w_i^2) + \gamma_z \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma_v (g_z \sum \alpha_i \rho_i + f_z) = \gamma_v \sum (\mu_{Ai} w_{Ai} - \mu_{iA} w_{iA}) \quad (4.11)$$

folgende vier Gleichungen gewinnen ($\gamma_v \equiv \gamma_z$).

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{x_i S_i}{v_S} \right) + \frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial}{\partial z} (x_i G_z \gamma_z) = \mu_i \quad i=1,3 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{f_1}{v_S} \right) + \frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial}{\partial z} (G_z \gamma_z) = \mu \quad (\mu \equiv \sum \mu_i) \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial G_z}{\partial \tau} + \frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial}{\partial z} (G_z^2 v_I \gamma_z) + \frac{\partial p}{\partial z} + g g_z + f_z = f_{z\mu} \quad (4.14)$$

wobei

$$v_I = v_S f_0 \quad f_0 = \sum \frac{x_i}{S_i} \quad (4.15, 16)$$

$$g = \sum \alpha_i \rho_i = \frac{f_1}{v_S} \quad f_1 = \sum S_i x_i \quad (4.17, 18)$$

$$f_{z\mu} = \sum (\mu_{Ai} w_{Ai} - \mu_{iA} w_{iA}) \quad (4.19)$$

Als Vektor der abhängigen Variablen wählen wir

$$U^T = [G_z, p, x_1, x_3, s_i, x_i^* \quad (i=1,2,3)] \quad (4.20)$$

Weiter machen wir von folgender Annahme Gebrauch

$$S_i = S_i(U, \text{Geometrie}) \rightarrow \text{quasikonstant in } (\Delta\tau, \Delta z) \quad (4.21)$$

Mit dieser Annahme und den Zustandsgleichungen lassen sich die vier Dgl.-en in nichtkonservativer Form schreiben - siehe Tabelle 12 (dabei wurden die z-Indizes weggelassen und die äußeren Quellterme vernachlässigt). Dieses System ist sehr geeignet für die numerische Integration. Man kann die Entropie- und die Konzentrationsgleichungen getrennt integrieren und mit den erhaltenen Ergebnissen die rechten Seiten der ersten zwei Gleichungen berechnen. Weiterhin kann das System nur aus den ersten vier Gleichungen mit üblichen Verfahren integriert werden. Dieses Vorgehen spart Speicherplatz.

Die Definition der kritischen Massenstromdichte erhalten wir aus dem stationären Teil des Systems, aufgelöst nach den Ortsableitungen - siehe Tabelle 13. Aus der Druckgradientgleichung erhalten wir die lokale Kritikalitätsbedingung konsistent mit der Annahme "quasikonstanten Schlupfes".

Tabelle 12 Das transiente eindimensionale Dgl.-System ("quasikonstanten Schlupf")

$\frac{\partial G}{\partial \tau} + 2Gv_I \frac{\partial G}{\partial z} + \left(1 - \frac{G^2}{G^*2}\right) \frac{\partial p}{\partial z} + G^2 \left[f_o (v_G - S_F v_F) + v_S \frac{S_F - 1}{S_F} \right] \frac{\partial x_G}{\partial z} + G^2 \left[f_o (S_T v_T - S_F v_F) + v_S \frac{S_F - S_T}{S_F S_T} \right] \frac{\partial x_T}{\partial z} =$ $-Z - G^2 \left[v_I \gamma^* - f_o \sum \frac{S_i x_i}{g_i} \left(\frac{\partial q_i}{\partial s_i} \frac{\partial s_i}{\partial z} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i^*} \frac{\partial x_i^*}{\partial z} \right) \right] \quad ; \quad \gamma^* = \frac{1 \partial \gamma}{\gamma \partial z}$
$\frac{\partial p}{\partial \tau} + f_o G^*2 \left[\left(\frac{1 - S_F}{g} - v_G + S_F v_F \right) \frac{\partial x_G}{\partial \tau} + \left(\frac{S_T - S_F}{g} - S_T v_T + S_F v_F \right) \frac{\partial x_T}{\partial \tau} + \frac{f_1 \partial G}{g \partial z} \right] =$ $-f_o G^*2 \left[\frac{f_1}{g} \gamma^* + \sum \frac{S_i x_i}{g_i} \left(\frac{\partial q_i}{\partial s_i} \frac{\partial s_i}{\partial \tau} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i^*} \frac{\partial x_i^*}{\partial \tau} \right) \right]$
$\left[1 - \frac{x_G (1 - S_F)}{f_1} \right] \frac{\partial x_G}{\partial \tau} - \frac{x_G (S_T - S_F)}{f_1} \frac{\partial x_T}{\partial \tau} + Gv_S \frac{\partial x_G}{\partial z} + v_S \frac{f_1 - 1}{f_1} x_G \frac{\partial G}{\partial z} = v_S \left(\mu_G - \frac{f_1 - 1}{f_1} x_G G \gamma^* \right)$
$\left[1 - \frac{x_T (S_T - S_F)}{f_1} \right] \frac{\partial x_T}{\partial \tau} - \frac{x_T (1 - S_F)}{f_1} \frac{\partial x_G}{\partial \tau} + \frac{Gv_S}{S_T} \frac{\partial x_T}{\partial z} + v_S \frac{f_1 - S_T}{f_1} x_T \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{v_S}{S_T} \left(\mu_T - \frac{f_1 - S_T}{f_1} x_T G \gamma^* \right)$
$\frac{\partial s_i}{\partial \tau} + \frac{Gv_S}{S_i} \frac{\partial s_i}{\partial z} = Ds_i$
$\frac{\partial x_i^*}{\partial \tau} + \frac{Gv_S}{S_i} \frac{\partial x_i^*}{\partial z} = Dx_i^*$

Tabelle 13 Das stationäre eindimensionale Dgl.-System. Kritische Massenstromdichte.

$\frac{d}{dz} (G\gamma) = \text{const}$ $\frac{dp}{dz} = - \frac{Z + G^2 (v_I \gamma^* - D_1)}{1 - G^2 / G^*2} \quad ; \quad \frac{1}{G^*2} = f_o \sum \frac{S_i x_i}{G_i^*2}$
$D_1 = f_o \sum \frac{S_i x_i}{g_i} \left(\frac{\partial q_i}{\partial s_i} \frac{ds_i}{dz} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i^*} \frac{dx_i^*}{dz} \right) - \left[f_o (v_G - S_F v_F) + v_S \frac{S_F - 1}{S_F} \right] \frac{dx_G}{dz} - \left[f_o (S_T v_T - S_F v_F) + v_S \frac{S_F - S_T}{S_F S_T} \right] \frac{dx_T}{dz}$
$\frac{dx_G}{dz} = \frac{\mu_G}{G} \qquad \qquad \frac{ds_i}{dz} = Ds_i \frac{S_i}{i G v_S}$
$\frac{dx_T}{dz} = \frac{\mu_T}{G} \qquad \qquad \frac{dx_i^*}{dz} = Dx_i^* \frac{S_i}{i G v_S}$

LITERATUR

- /1/ Hirt C.W., F.H.Harlow, A General Corrective Procedure for the Numerical Solution of Initial-Value Problems, J.Comp. Physics 2, 114-119(1967).
- /2/ Harlow F.H., A.A.Amsden, Numerical Calculation of Almost Incompressible Flow, J.Comp. Physics 3,80-93(1968).
- /3/ Hirt C.W., Heuristics Stability Theory for Finite-Difference Equations, J.Comp. Physics 2, 339-355(1968).
- /4/ Amsden A.A., F.H.Harlow, The SMAC Method: A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows, LA-4370, UC-32, Mathematics and Computers TID-4500, 1970.
- /5/ Harlow F.H., A.A.Amsden, A Numerical Fluid Dynamics Calculation Method for All Flow Speeds, J.Comp.Physics 8, 197-213(1971).
- /6/ Amsden A.A., F.H.Harlow, KACHINA: An Eulerian Computer Program for Multi-field Fluid Flows, LASLR LA-5680, Los Alamos, 1974.
- /7/ Harlow F.H., A.A.Amsden, Numerical Calculation of Multiphase Fluid Flow, J.Comp. Physics 17, 19-52(1975).
- /8/ Rivard W.C., M.D.Torrey, Numerical Calculation of Flashing from Long Pipes Using a Two-Field Model, LA-6104-MS, LASL, November 1975.
- /9/ Travis J.R., F.H.Harlow, A.A.Amsden, Numerical Calculation of Two-Phase Flows, NSE; 61,1-10(1976).
- /10/ Cloutman D.L., C.W.Hirt, N.C.Romero, SOLA-ICE: A Numerical Solution Algorithm for Transient Compressible Fluid Flows, LA-6236, LASL, July 1976.
- /11/ Rivard W.C., M.D.Torrey; K-Fix: A Computer Program for Transient, Two-Dimensional, Two-Fluid Flow, LA-NUREG-6623, NRC-4, LASL April 1977.
- /12/ Hirt C.W., N.C.Romero, Torrey M.D., J.R. Travis, SOLA-DF: A Solution Algorithm for Nonequilibrium Two-Phase Flow, NUREG/CR-0690, LA-7725-MS, June 1979.
- /13/ Demmie P.N., K.R.Hotman, The Computer Program K-FIX/MOD1: A Modification of the Computer Program K-FIX for Applications to Fluid Flow Simulation in LOFT System Piping, NUREG/CR-0646, TREE-1324, March 1979.
- /14/ Travis J.R., SOLA-LOOP Analysis of a Back Pressure Check Valve, LA-UR-84-1620, IAEA Technical Committee Workshop on Uses of Computer Codes for Nuclear Reactor Safety Analysis, Varna, Bulgaria, 28 May-1 June 1984.
- /15/ Travis J.R., Two-Fluid and Drift-Flux Models with Application to Nuclear Reactor Safety, LA-UR-84-1650, IAEA Technical Committee Workshop on Uses of Computer Codes for Nuclear Reactor Safety Analysis, Varna, Bulgaria, 28 May-1 June 1984.

- /16/ Sha W.T., H.M.Domanus, R.C.Schmitt, J.J.Oras, I.H.Lin, V.L.Shah, New Approach for Rod-Bundle Thermal-Hydraulic Analysis, Nucl.Technology Vol.46, Dec. 1979 pp.268-280.
- /17/ Bottoni M., H.N.Chi, T.H.Chien, H.M.Domanus, R.W.Lyczkowski, W.T.Sha, V.L. Shah, Development of the Three-Dimensional, Two-Phase Flow COMMIX2-SM Computer Program, XI Liquid Metal Boiling Working Group, October 23-26, 1984 Grenoble, France.
- /18/ Kobayashi K., K.Namatame, Method of Characteristics for Solving Axi-Symmetric Two-Dimensional Flows, JAERI-M 5969, January 1975.
- /19/ Liles D.R., u.a., TRAC-P1: An Advanced Best Estimate Computer Program for PWR LOCA Analysis, I. Methods, Models, User Information and Programming Details, NUREG/CR-0063, LA-7279-MS, Vol.1, June 1978.
- /20/ Liles D.R., u.a., TRAC-PD2 An Advanced Best-Estimate Computer Program for Pressurized Water Reactor Loss-of-Coolant Accident Analysis, NUREG/CR-2054, LA-8709-MS, April 1981.
- /21/ Kelly J.E., S.P.Kao, M.S.Kazimi, THERMIT-2: A Two-Fluid Model for Light Water Reactor Subchannel Transient Analysis, MIT-EL-81-014, April 1981.
- /22/ Vader Vorst M.J., J.Stuhmiller, Numerical Simulation of the Fluid Flow in a Centrifugal Steam Separator, Proc. of the Int. Topical Meeting in Mathematical Methods for the Solution of Nuclear Engineering Problems, 27-29.4.1981 München, Vol.1 S.647.
- /23/ Gay R.R., D.M.Gloski, Verification of th GFLOW Computer Code Using Experimental Data From the Maine Yankee Spent-Fuel Storage Pool, EPRI-3097 May 1983.
- /24/ Takeochi K., One-Dimensional Network for Multidimensional Fluid-Structural Interactions, NSE: 72, 322-329(1979).
- /25/ Senglaub M.E., J.P.Odom, P.S.Pickard, The Multi Component Drift Flux Formulation for the Sinter Subsystem of CONTAIN, wie /22/ Vol.2 S.177.
- /26/ Chen B.C-J., W.T.Sha, M.L.Doria, R.C.Schmitt, J.F.Thompson, BODYFIT-1FE: A Computer Code for Three-dimensional Steady-State/Transient Single-Phase Rod-bundle Thermal-Hydraulic Analysis, NUREG/CR-1874, ANL-80-127, November 1980.
- /27/ Hall C.A., T.A.Porsching, DUVAL: A Computer Program for the Implicit Treatment of Two-Dimensional, Two-Phase Fluid Transients, Technical Report ICMA 81-25, August, 1981, University of Pittsburg, Pittsburgh, PA 15216 USA.
- /28/ Mösinger H., Zweidimensionale numerische Experimente zur instationären Zweiphasen-Wasser-Strömung am Beispiel der HDR-Blowdownversuche mit DRIX-2D, KfK 2853 August 1979.
- /29/ Thurgood M.J., J.M.Kelly, K.L.Basehore, T.L.George, COBRA-TF A Three-Field Two-Fluid Model for Reaktor Safety Analysis, Proc. Experimental and Analytical Modeling of LWR Safety Experiments, 19 th National Heat Transfer Conference Orlando, Florida July 27-30, 1980 , Vol.7, pp.31-39.

- /30/ Thurgood M.J., COBRA-NC Post Test Prediction for HDR Containment Steam Blow-down Test V44 (Int. Standart Problem 16), NUREG/CR-3749 PNL-5066.
- /31/ Hall Ch., Numerical Solution of Navier-Stokes Problems by the Dual Variable Method, Technical Report ICMA-82-42, Dep. of Math. and Statistics, Univ. of Pittsburgh, July 1982.
- /32/ Dejc M.E., G.A.Filipov, Gasodinamika dvuchfaznykh sred, Energia, Moskva 1968..
- /33/ Mamaev V.A., G.S.Odicharia, N.I.Semeonov, A.A.Tocigin, Gasodinamika gasozidkostnykh smesey v trubach, Moskva 1969 (rus.).
- /34/ Drew D.A., Averaged Field Equations for Two-Phase Media, Studies on Applied Mathematics, Vol.L No.2, June 1971.
- /35/ Drew D.A., L.A.Segel, Averaged Equation for Two-Phase Flows, Studies in Applied Mathematics, Vol.L No.3, September 1971.
- /36/ Ciklauri G.V., V.S.Danilin, L.I.Selesnev, Adibatnyye dvuchfaznyye tecenija, Moskva Atomisdat (1973) (rus.).
- /37/ Ishii M., Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow (Eyrolles, Paris 1975).
- /38/ Atkin R.J., R.E.Craine, Continuum Theories of Mixtures: Basic Theory and Historical Development, O.Jl Mech.appl.Math., Vol.XXIX,Pt.2.1976.
- /39/ Yadigaroglu G., R.T.Lahey, On the Various Forms of the Conservation Equations in Two-Phase Flow, Int.J.Multiphase Flow, Vol.2. pp.477-494, 1976.
- /40/ Stuhmiller J.H., The Influence of Interfacial Pressure Forces on the Character of Two-Phase Flow Model Equations, Int.J. Multiphase Flow, Vol.3, pp. 551-560, 1977.
- /41/ Nigmatulin R.I., Osnovy mekhaniki geterogennykh sred, Moskva Nauka (1978).
- /42/ Boure J.A., On the Form of the Pressure Terms in the Momentum and Energy Equations of Two-Phase Flow Models, Int.J. Multiphase Flow, Vol.5,pp.159-164, (1979).
- /43/ Hughes E.D., Macroscopic Balance Equations for Two-Phase Flow Models, NED 54(1979)239-259.
- /44/ Nigmatulin R.I., Spatial Averaging in the Mechanics of Heterogeneous and Dispersed Systems, Int.J. Multiphase Flow, Vol.5, pp.352-385, 1979.
- /45/ Chawla T.C., M.Isii, Two-Fluid Model of Two-Phase Flow in a Pin Bundle of a Nuclear Reactor, Int.J.Heat Mass Transfer, Vol.23, pp.931-1001, 1979.
- /46/ Sha W.T., S.L.Soo, Addendum to "Multidomain Multiphase Fluid Mechanics", Int.J.Heat Mass Transfer Vol.23, pp.583-586, 1980.
- /47/ Sha W.T., B.T.Chao, S.L.Soo, Local Volume Averaged Transport Equations for Multiphase Flow in Regions Containing Distributed Solid Structures, NUREG/CR-2354, ANL-81-69, Dec.1981.

- /48/ Addeasio F.L., A Review of the Development of Two- Fluid Models, NUREG/CR-2164, LA-8852, Aug.1981.
- /49/ Bataille J., J.Kestin, Continuum of Two-Phase Flows, LA-UR-81-3325, 1981.
- /50/ Kolev N.I., Zweiphasen-Zweikomponentenströmungen (Luft-Wasserdampf-Wasser) zwischen den Sicherheitsräumen der KKW mit wassergekühlten Reaktoren bei Kühlmittelverlustnavarie, TU-Dresden (1977) Dissertation.
- /51/ Kolev N.I., Critical Equilibrium Inhomogeneous Two-Phase Two Component Water-Steam-Air Flow, Int.J.Heat Mass Transfer Vol.25, No.12, pp.1879-1884 (1982).
- /52/ Kolev N.I., Transiente homogene Zweiphasen-Zweikomponentenströmung bestehend aus Wasser-Wasserdampf-Luft unter Bedingungen des thermodynamischen Nichtgleichgewichtes, Atomkernenergie/Kerntechnik Vol.42(1983)No.3, S.201, ISSN 0171-5743.
- /53/ Kolev N.I., Transient Nonhomogeneous Equilibrium Water-Steam-Air Flow, NED 74(1982)265-274, ISSN 0029-5493.
- /54/ Kolev N.I., Transiente Two-Phase Two-Component Flow of Water-Steam-Air, NSE 85(1983)209-220.
- /55/ Kolev N.I., Model of a Transient Nonequilibrium Nonhomogeneous Flow Consisting of Noncondensable Gas, Water, Steam, Boron; Atom Energy Mosku USSR, Vol.56 (1984)pp.205-209 (russ.).
- /56/ Kolev N.I., Transient Nonhomogeneous Nonequilibrium Two-Component Water-Steam-Air Flow; Atom Energiy Mosku USSR, Vol.57(1984)pp.272-277.
- /57/ Kolev N.I., Modell of a Transient Equilibrium Homogeneous Three-Phase, Three-Component Flow, "Heat and Nuclear Eng.Problems of PR Bulgaria", VI Nat. Conf., Varna 17-19.5.1984, pp.37-42(bulg.).
- /58/ Kolev N.I., Transient Three Phase Three Component Nonequilibrium Nonhomogeneous Flow, Sub. to NED (1984).

Anhang 1

Harlow - Amsden /2/ (1968) ICE, Donor-cell

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad p = a^2(\rho - \rho_0) + (\kappa - 1)\rho e$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad E = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) + \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u E) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v E) + \frac{\partial}{\partial y}(p v) = 0$$

Hirt /3/ (1968) Donor-cell

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p + q) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}[\rho(e + \frac{1}{2}u^2)] + \frac{\partial}{\partial x}[\rho u(e + \frac{1}{2}u^2) + u(p + q)] = 0$$

$$q = \begin{cases} -\alpha \cdot \delta x \cdot \rho \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} < 0 \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial x} \geq 0 \end{cases} \quad \alpha = \text{const } [\frac{m}{s}]$$

Amsden-Harlow /4/ SMAC (1970)

$$\frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r}(r^m u) + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r}(r^m u^2) + \frac{\partial}{\partial z}(uv) = -\frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

m=0 Cartesian

m=1 Cylinder

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r}(r^m uv) + \frac{\partial v^2}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + q_z - \frac{\nu}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^m \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right]$$

Harlow-Amsden /5/ (1971)

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho u r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v) = \tau \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right]$$

mass diffusion

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho u^2 r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho uv) = -\frac{\partial}{\partial r}(p + q) + u \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho u v r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v^2) = \rho g - \frac{\partial}{\partial z}(p + q) - \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho E) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho u E r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v E) = \rho v g + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \beta \gamma \frac{\partial e}{\partial r} - \rho u - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\nu} \right) \rho u + \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial r} (2u^2 + v^2) + \nu v \frac{\partial u}{\partial z} \right\} +$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\beta \gamma \frac{\partial e}{\partial z} - p v - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\nu} \right) \rho v + \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial r} (u^2 + 2v^2) + \nu u \frac{\partial v}{\partial z} \right]; \quad q \hat{=} -(\lambda + 2\nu) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho u r) + \frac{\partial \rho}{\partial z} \right]; \quad E = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

Kobayashi - Namatame /18/ (1975) (r,z), Takeochi /24/ (1979) MULTIFLEX - (x,y)

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (qr_u) + \frac{\partial}{\partial z} (qv) = 0$$

$$q \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} + f_r = 0$$

$$q \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} + f_z - qg_z = 0$$

$$-a^2 \left(\frac{\partial q}{\partial \tau} + u \frac{\partial q}{\partial r} + v \frac{\partial q}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} + u \frac{\partial p}{\partial r} + v \frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{a^2 (\dot{q}''' + F_e)}{q (\partial h / \partial q)}$$

Cloutman u.a. /10/ SLOA-ICE (1976)

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} (qu) + \frac{\partial}{\partial y} (qv) + \frac{\xi qu}{x} = 0$$

$\xi = 1$ $x \hat{=} r$ Cylinder

$\xi = 0$ $x \hat{=} x$ Cartesian

$$q \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = qg_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{4}{3} \frac{\xi \nu}{x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{x} \right)$$

$$q \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = qg_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\xi \nu}{x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$q \left(\frac{\partial e}{\partial \tau} + u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} \right) = -p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\xi u}{x} \right) + k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\xi \partial T}{x \partial x} \right)$$

$$+ r \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \xi u^2}{x^2} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\xi u}{x} \right)^2 \right]$$

Sha u.a. /16/ COMMIX-1 (1979)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (q \gamma_v) + \frac{\partial}{\partial x} (qu \gamma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (qv \gamma_y) + \frac{\partial}{\partial z} (qw \gamma_z) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (qu \gamma_v) + \frac{\partial}{\partial x} (qu \cdot u \gamma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (qu \cdot v \gamma_y) + \frac{\partial}{\partial z} (qu \cdot w \gamma_z) + \gamma_v \frac{\partial p}{\partial x} + q \gamma_v g_x + f_x$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\tau}_{xx} \gamma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\tau}_{xy} \gamma_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\tau}_{xz} \gamma_z)$$

.....

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (qh \gamma_v) + \frac{\partial}{\partial x} (quh \gamma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (qvh \gamma_y) + \frac{\partial}{\partial z} (qwh \gamma_z) - \gamma_v \frac{\partial p}{\partial \tau}$$

$$= \gamma_v \left(\bar{\tau}_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{\tau}_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{\tau}_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{\tau}_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \bar{\tau}_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \bar{\tau}_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{\tau}_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} + \bar{\tau}_{yz} \frac{\partial v}{\partial z} + \bar{\tau}_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x} (\gamma_x k \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\gamma_y k \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma_z k \frac{\partial T}{\partial z}) \right] + \gamma_v \dot{q}'''$$

Chen u.a. /26/ BODYFIT-1FE (1980)

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad i=1,2,3$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho h) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho h v_j) - \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma_{ij}) - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \rho g_i u_i + \dot{q}'''$$

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} - \text{Kronecker delta function})$$

Gay R.R., D.M. Gloski /23/ GFLOW (1983)

$$\nabla \cdot V = 0 \quad V = \gamma V$$

$$\frac{\rho}{\gamma} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\rho}{\gamma^2} V \cdot \nabla V = -\nabla p + \rho \beta g (T - T_R) - \mu \bar{k}^{-1} V + \frac{\mu}{\gamma} \nabla^2 V + \rho c_p \left(\gamma \frac{\partial T}{\partial \tau} + \nabla \cdot VT \right) = -\nabla \cdot (k \nabla T) - h(T - T_W)$$

Vander Vorst - Stuhmiller /22/ SWIR (1981)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + \nabla \cdot (dV_G) = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[\alpha u_G + (1-\alpha) u_F \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha v_G + (1-\alpha) v_F \right] = 0$$

$$\alpha_G \rho_G \left(\frac{\partial V_G}{\partial \tau} + V_G \cdot \nabla V_G \right) + \alpha_G \nabla p = \alpha_G \mu_G \nabla^2 V_G + f_{FG} + f_{WG}$$

$$\alpha_F \rho_F \left(\frac{\partial V_F}{\partial \tau} + V_F \cdot \nabla V_F \right) + \alpha_F \nabla p = \alpha_F \mu_F \nabla^2 V_F + f_{GF} + f_{WF}$$

$$h_G = h''(p), \quad h_F = h'(p)$$

Bottoni u.a. /17/ COMMIX2-SM (1984)

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho V) + \nabla \cdot (\rho V \cdot V) + \nabla \cdot \left[\alpha (1-\alpha) \rho V_r \cdot V_r \right] + \nabla p = \nabla \cdot (v \nabla V) + \rho g + f$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho h) + \nabla \cdot (\rho V h) + \nabla \cdot \left[\alpha (1-\alpha) \rho (h'' - h') V_r \right] = \frac{\partial p}{\partial \tau} + V \cdot \nabla p + \frac{1}{\rho} \alpha (1-\alpha) (\rho'' - \rho') V_r \cdot \nabla p - \nabla \cdot q + \dot{q}'''$$

Hirt u.a. /12/ SOLA-DF (1979), Mössinger /28/ DRIX-2D (1979)

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u A) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v A) = 0$$

$$\frac{\partial \rho_G}{\partial \tau} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\rho_G u + \frac{\rho_G \rho_F}{\rho} u_r \right) A \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\rho_G v + \frac{\rho_G \rho_F}{\rho} v_r \right) A \right] = \mu_G$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho u) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\rho u^2 + \frac{\rho_G \rho_F}{\rho} u_r^2 \right) A \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\rho u v + \frac{\rho_G \rho_F}{\rho} u_r v_r \right) A \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + f_x$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho v) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\rho u v + \frac{\rho_G \rho_F}{\rho} u_r v_r \right) A \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\rho v^2 + \frac{\rho_G \rho_F}{\rho} v_r^2 \right) A \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + f_y$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho e) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\rho u e + \frac{\rho_G \rho_F}{\rho} (e_G - e_F) u_r \right] A \right\} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\rho v e + \frac{\rho_G \rho_F}{\rho} (e_G - e_F) v_r \right] A \right\} = \\ -\frac{p}{A} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[u + \frac{\rho_G \rho_F}{\rho} \left(\frac{1}{\rho_G} - \frac{1}{\rho_F} \right) u_r \right] A \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[v + \frac{\rho_G \rho_F}{\rho} \left(\frac{1}{\rho_G} - \frac{1}{\rho_F} \right) v_r \right] A \right\} \right) + K(u_r^2 + v_r^2) + q \end{aligned}$$

Amsden - Harlow /6/ KACHINA (1974)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_{GG} \rho_{GG}) + \nabla \cdot (\alpha_{GG} \rho_{GG} V_G) = \mu_{GV} - \mu_{GK} \quad \text{Verdampfung} \hat{=} V$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_{GT} \rho_{GT}) + \nabla \cdot (\alpha_{GT} \rho_{GT} V_G) = \mu_{GK} - \mu_{GV} \quad \text{Kondensation} \hat{=} K$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_{FG} \rho_{FG}) + \nabla \cdot (\alpha_{FG} \rho_{FG} V_F) = \mu_{FV} - \mu_{FK} \quad \text{Tröpfchen} \hat{=} T$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_{FT} \rho_{FT}) + \nabla \cdot (\alpha_{FT} \rho_{FT} V_F) = \mu_{FK} - \mu_{FV} \quad \text{Gas} \hat{=} G$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_G \rho_G V_G) + \nabla \cdot (\alpha_G \rho_G V_G : V_G) = V_F \mu_V - V_G \mu_K - \alpha_G \nabla p + f_G + \alpha_G \rho_G g + K(V_F - V_G)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_F \rho_F V_F) + \nabla \cdot (\alpha_F \rho_F V_F : V_F) = V_G \mu_K - V_F \mu_V - \alpha_F \nabla p + f_F + \alpha_F \rho_F g + K(V_G - V_F)$$

$$\begin{aligned} \alpha_G \rho_G \left(\frac{\partial e_G}{\partial \tau} + V_G \cdot \nabla e_G \right) = q_{GV} - q_{GK} + \dot{q}_G''' + R(T_F - T_G) + K(V_F - V_G)^2 + \nabla \cdot (k_G \alpha_G \nabla T_G) + q_{Gf} \\ - p \nabla \cdot \left[\alpha_G V_G + (1 - \alpha_G) V_F \right] \end{aligned}$$

$$\alpha_F \rho_F \left(\frac{\partial e_F}{\partial \tau} + V_F \cdot \nabla e_F \right) = q_{FK} - q_{FV} + \dot{q}_F''' + R(T_G - T_F) + \nabla \cdot \left[k_F (1 - \alpha_G) \nabla T_F \right] + q_{Ff}$$

Rivard - Torrey /11/ K-FIX (1976)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_G \rho_G) + \nabla \cdot (\alpha_G \rho_G V_G) = \mu_V - \mu_K$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_F \rho_F) + \nabla \cdot (\alpha_F \rho_F V_F) = \mu_K - \mu_V$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_G \rho_G V_G) + \nabla \cdot (\alpha_G \rho_G V_G \cdot V_G) = -\alpha_G \nabla p + K(V_F - V_G) + \mu_V V_F - \mu_K V_G + \nabla \cdot (\alpha_G \sigma_G)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_F \rho_F V_F) + \nabla \cdot (\alpha_F \rho_F V_F \cdot V_F) = -\alpha_F \nabla p + K(V_G - V_F) + \mu_K V_G - \mu_V V_F + \nabla \cdot (\alpha_F \sigma_F)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_G \rho_G e_G) + \nabla \cdot (\alpha_G \rho_G e_G V_G) = -p \left[\frac{\partial \alpha_G}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\alpha_G V_G) \right] + \left[K + (\mu_V + \mu_K) \frac{1}{2} \right] (V_G - V_F)^2 + (\mu_V - \mu_K) h_G + R(T_F - T_G) + \alpha_G \sigma_G \cdot (\nabla V_G) + \nabla \cdot k_G \alpha_G \nabla T_G$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_F \rho_F e_F) + \nabla \cdot (\alpha_F \rho_F e_F V_F) = -p \left[\frac{\partial \alpha_F}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\alpha_F V_F) \right] - (\mu_V - \mu_K) h_F + R(T_G - T_F) + \alpha_F \sigma_F \cdot (\nabla V_F) + \nabla \cdot k_F \alpha_F \nabla T_F$$

Liles u.a. TRAC-P1 (1978), TRAC-PD2 (1981)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + \nabla \cdot [\alpha \rho_G V_G + (1-\alpha) \rho_F V_F] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha \rho_G) + \nabla \cdot (\alpha \rho_G V_G) = \mu_G$$

$$\frac{\partial V_G}{\partial \tau} + V_G \cdot \nabla V_G = -\frac{c_i}{\alpha \rho_G} V_r |V_r| - \frac{1}{\rho_G} \nabla p - \frac{\mu_G}{\alpha \rho_G} (V_G - V_{Gi}) - \frac{c_{WG}}{\alpha \rho_G} V_G |V_G| + g$$

$$\frac{\partial V_F}{\partial \tau} + V_F \cdot \nabla V_F = \frac{c_i}{(1-\alpha) \rho_F} V_r |V_r| - \frac{1}{\rho_F} \nabla p + \frac{\mu_G}{(1-\alpha) \rho_F} (V_F - V_{Fi}) - \frac{c_{WF}}{(1-\alpha) \rho_F} V_F |V_F| + g$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [\alpha \rho_G e_G + (1-\alpha) \rho_F e_F] + \nabla \cdot [\alpha \rho_G V_G e_G + (1-\alpha) \rho_F V_F e_F] = -p \nabla \cdot [\alpha V_G + (1-\alpha) V_F] + \dot{q}_{WG}'' + \dot{q}_{WF}''$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha \rho_G e_G) + \nabla \cdot (\alpha \rho_G V_G e_G) = -p \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} - p \nabla \cdot (\alpha V_G) + \dot{q}_{EG}'' + \dot{q}_{iG}'' + \mu_G h_G''$$

Kelly-Kao-Kazimi /21/ THERMIT-2 (1981)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha \rho_G) + \nabla \cdot (\alpha \rho_G V_G) = \mu_G - \mu_{G, turb}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [(1-\alpha) \rho_F] + \nabla \cdot [(1-\alpha) \rho_F V_F] = -\mu_F - \mu_{F, turb}$$

$$\alpha \rho_G \frac{\partial V_G}{\partial \tau} + \alpha \rho_G V_G \cdot \nabla V_G + \alpha \nabla p = -f_{WG} - f_{iG} + \alpha \rho_G g - f_{G, turb}$$

$$(1-\alpha) \rho_F \frac{\partial V_F}{\partial \tau} + (1-\alpha) \rho_F V_F \cdot \nabla V_F + (1-\alpha) \nabla p = -f_{WF} - f_{iF} + (1-\alpha) \rho_F g - f_{F, turb}$$

Kelly-Kao-Kazimi /21/ THERMIT-2 (1981) Fortsetzung

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha \rho_G e_G) + \nabla \cdot (\alpha \rho_G e_G V_G) + p \nabla \cdot (\alpha V_G) + p \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} = \dot{q}_{WG}'' + \dot{q}_{iG}'' - \dot{q}_G''', \text{ turb}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [(1-\alpha) \rho_F e_F] + \nabla \cdot [(1-\alpha) \rho_F e_F V_F] + p \nabla \cdot [(1-\alpha) V_F] + p \frac{\partial (1-\alpha)}{\partial \tau} = \dot{q}_{WF}'' - \dot{q}_{iF}'' - \dot{q}_F''', \text{ turb}$$

Thurgood M.J. COBRA-NC (1984)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_G \rho_D) + \nabla \cdot (\alpha_G \rho_D V_G) = \mu_D + \nabla \cdot \alpha_G \rho_G \epsilon_D \nabla V_G$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_G \rho_L) + \nabla \cdot (\alpha_G \rho_L V_G) = \mu_L + \nabla \cdot \alpha_G \rho_G \epsilon_D \nabla V_G$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_F \rho_F) + \nabla \cdot (\alpha_F \rho_F V_F) = \mu_F - \mu_{FT}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_T \rho_T) + \nabla \cdot (\alpha_T \rho_T V_T) = \mu_T + \mu_{FT}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_G \rho_G V_G) + \nabla \cdot (\alpha_G \rho_G V_G \cdot V_G) = -\alpha_G \nabla p + \alpha_G \rho_G g + f_G + f_{\mu G} + f_{WG} + \nabla \cdot (\alpha_G \sigma_G)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_F \rho_F V_F) + \nabla \cdot (\alpha_F \rho_F V_F \cdot V_F) = -\alpha_F \nabla p + \alpha_F \rho_F g + f_F + f_{\mu F} + f_{WF} + \nabla \cdot (\alpha_F \sigma_F)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_T \rho_T V_T) + \nabla \cdot (\alpha_T \rho_T V_T \cdot V_T) = -\alpha_T \nabla p + \alpha_T \rho_T g + f_T + f_{\mu T}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_G \rho_G h_G) + \nabla \cdot (\alpha_G \rho_G V_G h_G) + \alpha_G \frac{\partial p}{\partial \tau} = q_{G\mu} + q_{iG} + q_{WG} - \nabla \cdot \alpha_G k_G \nabla T_K - q_{\text{turb}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [(\alpha_F + \alpha_T) \rho_F h_F] + \nabla \cdot (\alpha_F \rho_F V_F h_F) + \nabla \cdot (\alpha_T \rho_T V_T h_T) + (1-\alpha_G) \frac{\partial p}{\partial \tau} = q_{(F+T)\mu} + q_{i(F+T)} + q_{W(F+T)} - \nabla \cdot \alpha_F k_F \nabla T_F$$

Anhang 2

Das Ziel dieses Anhanges ist, die Herleitung der Zustandsgleichungen für Gemische darzustellen.

Wir starten mit der Annahme, daß p, x_i^*, T_i bekannt sind.

- Die Gasphase

Um den Partialdruck der nichtkondensierenden Komponente zu finden, brauchen wir ein Iterationsverfahren. Als erste Näherung verwenden wir die Annahme, daß der Dampf auch ein ideales Gas ist.

$$p_D = \frac{1 - x_L^*}{1 - x_L^* \left(1 - \frac{R_L}{R_D}\right)} p$$

$$p_L = p - p_D$$

Den verbesserten Wert erhalten wir aus der Gleichung

$$p_L = \frac{x_L^*}{1 - x_L^*} R_L T_G \varrho_D(p_D, T_G)$$

unter Verwendung des Newton'sche Iterationsverfahrens.

$$p_D^n = p_D^{n-1} \frac{p - p_D^{n-1} - \frac{x_L^*}{1 - x_L^*} R_L T_G \varrho_D(p_D^{n-1}, T_G)}{-1 - \frac{x_L^*}{1 - x_L^*} R_L T_G \left(\frac{\partial \varrho_D}{\partial p_D}\right)_{T_G}}$$

Für den trivialen Fall $x_L^* = 1$ haben wir $p_L = p$ und $p_D = 0$. Falls wir den partialen Druck der nichtkondensierenden Komponente wissen, ist es leicht die Dichte zu berechnen $\varrho_L = p_L / (R_L T_G)$.

Damit ist der Zustand der nichtkondensierende Gaskomponente berechnet.

Der Zustand des Dampfes wird durch folgende "primitive" Zustandsgleichungen berechnet:

$$\varrho_D = \varrho_D(p_D, T_G) \quad \text{oder} \quad d\varrho_D = \left(\frac{\partial \varrho_D}{\partial p_D}\right)_{T_G} dp_D + \left(\frac{\partial \varrho_D}{\partial T_G}\right)_{p_D} dT_G$$

wobei

$$\left(\frac{\partial q_D}{\partial p_D}\right)_{T_G} = \frac{\partial q_D}{\partial p_D}(p_D, T_G) \quad , \quad \left(\frac{\partial q_G}{\partial T_G}\right)_{p_D} = \frac{\partial q_D}{\partial T_G}(p_D, T_G)$$

Jetzt können wir die Gasdichte berechnen

$$q_G = q_L + q_D$$

Weiter suchen wir nach der substantiellen Ableitung der Gasdichte bezüglich p , T_G und x_L^* . Die Gasdichte kann aus folgendem Gleichungssystem

$$(1-x_L^*)q_G = q_D(p_D, T_G)$$

$$p_L = x_L^* q_G R_L T_G$$

$$p_D = p - p_L$$

berechnet werden. Sie ist eine implizite Funktion von (p, T_G, x_L^*) . Wir differenzieren die drei Gleichungen

$$(1-x_L^*)dq_G = \frac{\partial q_D}{\partial p_D} dp_D + \frac{\partial q_D}{\partial T_G} dT_G + q_D dx_L^*$$

$$dp_L = x_L^* q_G R_L dT_G + x_L^* R_L T_G dq_G + q_G R_L T_G dx_L^*$$

$$dp_D = dp - dp_L$$

eliminieren dp_L und dp_D und lösen nach dq_G auf

$$Zdq_G = \frac{\partial q_D}{\partial p_D} dp + \left(\frac{\partial q_D}{\partial T_G} - x_L^* q_G R_L \frac{\partial q_D}{\partial p_D}\right) dT_G + q_G \left(1 - R_L T_G \frac{\partial q_D}{\partial p_D}\right) dx_L^*$$

Wenn wir diese Gleichung mit folgender Gleichung vergleichen

$$dq_G = \left(\frac{\partial q_G}{\partial p}\right)_{T_G, x_L^*} dp + \left(\frac{\partial q_G}{\partial T_G}\right)_{p, x_L^*} dT_G + \left(\frac{\partial q_G}{\partial x_L^*}\right)_{p, T_G} dx_L^* \quad \text{A2-1}$$

erhalten wir die Ableitungen von q_G , angegeben in Tabelle 3. Durch diese Gleichung ersetzen wir dq_G in der Gleichung $dp_L = \dots$. Die neu erhaltenen Gleichung vergleichen wir mit der Form

$$dp_L = \left(\frac{\partial p_L}{\partial p}\right)_{T_G, x_L^*} dp + \left(\frac{\partial p_L}{\partial T_G}\right)_{p, x_L^*} dT_G + \left(\frac{\partial p_L}{\partial x_L^*}\right)_{p, T_G} dx_L^* \quad \text{A2-2}$$

So erhalten wir die substantiellen Ableitungen von p_L angegeben in der Tabelle 3.

Für die Entropie des Gasgemisches läßt sich schreiben

$$s_G = x_L^* s_L + (1-x_L^*) s_D$$

oder in Differentialform

$$ds_G = x_L^* ds_L + (1-x_L^*) ds_D + (s_L - s_D) dx_L^*$$

oder

$$q_L T_G ds_L + q_D T_G ds_D = T_G q_G [ds_G - (s_L - s_D) dx_L^*]$$

Wenn wir $q_L T_G ds_L$ und $q_D T_G ds_D$ mit den rechten Seiten der Entropiedefinitionsgleichungen

$$q_L T_G ds_L = q_L dh_L - dp_L$$

$$q_D T_G ds_D = q_D dh_D - dp_D$$

ersetzen, erhalten wir:

$$q_L dh_L + q_D dh_D - dp = T_G q_G [ds_G - (s_L - s_D) dx_L^*] \quad \text{A2-3}$$

Diese Gleichung gestattet uns die Gasmischungsenergiegleichung direkt in Entropieform zu transformieren. Wenn wir weiter die Enthalpiedifferentiale durch die kalorischen Gleichungen ersetzen

$$dh_L = c_{pL} dT_G$$

$$dh_D = \left(\frac{\partial h_D}{\partial p_D}\right)_{T_G} dp_D + \left(\frac{\partial h_D}{\partial T_G}\right)_{p_D} dT_G$$

die Gleichungen $dp_D = dp - dp_L$ und $dp_L = \dots$ verwenden und substituieren

$$c_{pG} \hat{=} x_L^* c_{pL} + (1-x_L^*) \left(c_{pD} - \frac{\partial h_D}{\partial p_D} \cdot \frac{\partial p_L}{\partial T_G} \right)$$

$$\frac{\partial h_G}{\partial p} \hat{=} (1-x_L^*) \frac{\partial h_D}{\partial p_D} \left(1 - \frac{\partial p_L}{\partial p}\right) \quad \left[\hat{=} \left(\frac{\partial h_G}{\partial p}\right)_{T_G, x_L^*} \right]$$

$$\frac{\partial s_G}{\partial x_L^*} \hat{=} s_L - s_D - \frac{1-x_L^*}{T_G} \cdot \frac{\partial h_D}{\partial p_D} \cdot \frac{\partial p_L}{\partial x_L^*} \quad \left[\hat{=} \left(\frac{\partial s_G}{\partial x_L^*}\right)_{p, T_G} \right]$$

erhalten wir

$$dT_G = \frac{T_G}{c_{pG}} ds_G - \frac{q_G \frac{\partial h_G}{\partial p} - 1}{q_G c_{pG}} dp - \frac{T_G}{c_{pG} \frac{\partial s_G}{\partial x_L^*}} dx_L^* \quad \text{A2-4}$$

Diese Gleichung gestattet uns bei bekannten (ds_G, dp, dx_L^*) , erhalten aus der numerischen Integration des nichtkonservativen Dgl.-Systems die Temperaturänderung dT_G zu berechnen.

Die Zustandsgleichung des Gasgemisches in Differentialform erhalten wir, nachdem mit Hilfe der letzten Gleichung dT_G aus der Gl. A2-1 ersetzt wird und die so erhaltene Gleichung in folgender Form geschrieben wird:

$$dq_G = \frac{dp}{a_G} + \left(\frac{\partial q_G}{\partial s_G}\right)_{p, x_L^*} ds_G + \left(\frac{\partial q_G}{\partial x_L^*}\right)_{p, s_G} dx_L^* \quad \text{A2-5}$$

- Das homogene Gemisch Flüssigkeit-feste Phase

Die Herleitung der Zustandsgleichungen in Differentialform wird nur für das zweite Geschwindigkeitsfeld $i=2$ (F) durchgeführt. Für das dritte Feld ist die Herleitung vollkommen identisch, wobei $i=2$ (F) durch $i=3$ (G) zu ersetzen ist.

Wir können für die spezifische Entropie des Gemisches schreiben

$$s_F = x_{FB}^* s_{FB} + (1 - x_{FB}^*) s_{FF}$$

oder in Differentialform

$$ds_F = x_{FB}^* ds_{FB} + (1 - x_{FB}^*) ds_{FF} + (s_{FB} - s_{FF}) dx_{FB}^*$$

oder

$$q_{FB} q_{FB} T_F ds_{FB} + q_{FF} q_{FF} T_F ds_{FF} = q_F q_F T_F [ds_F - (s_{FB} - s_{FF}) dx_{FB}^*]$$

Wir ersetzen die Terme $q_{FB} T_F ds_{FB}$ und $q_{FF} T_F ds_{FF}$ durch die rechten Seiten der Entropiedefinitionsgleichungen

$$q_{FB} T_F ds_{FB} = q_{FB} dh_{FB} - dp$$

$$q_{FF} T_F ds_{FF} = q_{FF} dh_{FF} - dp$$

Damit erhalten wir

$$\alpha_{FB} q_{FB} dh_{FB} + \alpha_{FF} q_{FF} dh_{FF} - \alpha_F dp = \alpha_F q_F T_F [ds_F - (s_{FB} - s_{FF}) dx_{FB}^*] \quad \text{A2-6}$$

Diese Gleichung hilft uns, die Energiegleichungen des Gemisches in Entropieform zu transformieren.

Wenn wir weiter die Enthalpiedifferentiale durch die kalorischen Gleichungen ersetzen

$$dh_{FB} = c_{pFB} dT_F$$

$$dh_{FF} = c_{pF} dT_F + \frac{\partial h_{FF}}{\partial p} dp$$

und substituieren

$$c_{pF} = x_{FB}^* c_{pFB} + (1 - x_{FB}^*) c_{pFF}$$

$$\frac{\partial h_F}{\partial p} = (1-x_{FB}^*) \frac{\partial h_{FF}}{\partial p} \quad \left[\equiv \left(\frac{\partial h_F}{\partial p} \right)_{T_F, x_{FB}^*} \right]$$

$$\frac{\partial s_F}{\partial x_{FB}^*} = s_{FB} - s_{FF} \quad \left[\equiv \left(\frac{\partial s_F}{\partial x_{FB}^*} \right)_{p, T_F} \right]$$

erhalten wir

$$dT_F = \frac{T_F}{c_{pF}} ds_F - \frac{q_F \frac{\partial h_F}{\partial p} - 1}{q_F c_{pF}} dp - \frac{T_F}{c_{pF}} \frac{\partial s_F}{\partial x_{FB}^*} dx_{FB}^* \quad \text{A2-7}$$

Diese Gleichung gestattet uns bei bekannten (ds_F, dp, dx_{FB}^*) , erhalten aus der numerischen Integration des nichtkonservativen Dgl.-Systems die Temperaturänderung dT_F zu berechnen.

Die substantiellen Ableitungen der Dichte ρ_F erhalten wir wie folgt: Wir differenzieren die Gleichung

$$\frac{1}{\rho_F} = \frac{x_{FB}^*}{\rho_{FB}} + \frac{1-x_{FB}^*}{\rho_{FF}}$$

bei $\rho_{FB} = \text{const}$

$$d\rho_F = (1-x_{FB}^*) \frac{\rho_F^2}{\rho_{FF}^2} d\rho_{FF} + \rho_F^2 \left(\frac{1}{\rho_{FF}} - \frac{1}{\rho_{FB}} \right) dx_{FB}^* ,$$

ersetzen $d\rho_{FF}$ durch die Zustandsgleichung der Flüssigkeit

$$\rho_{FF} = \rho_{FF}(p, T_F)$$

in Differentialform

$$d\rho_{FF} = \left(\frac{\partial \rho_{FF}}{\partial p} \right)_{T_F} dp + \left(\frac{\partial \rho_{FF}}{\partial T_F} \right)_p dT_F$$

und in der neuerhaltenen Gleichung

$$d\rho_F = (1-x_{FB}^*) \frac{\rho_F^2}{\rho_{FF}^2} \cdot \frac{\partial \rho_{FF}}{\partial p} dp + (1-x_{FB}^*) \frac{\rho_F^2}{\rho_{FF}^2} \cdot \frac{\partial \rho_{FF}}{\partial T_F} dT_F + \rho_F^2 \left(\frac{1}{\rho_{FF}} - \frac{1}{\rho_{FB}} \right) dx_{FB}^* \quad \text{A2-8}$$

ersetzen wir das Temperaturdifferential dT_F durch die schon erhaltene Gleichung

$dT_F = \dots$. Das Ergebnis schreiben wir in der Form

$$d\rho_F = \frac{dp}{\alpha_F} + \left(\frac{\partial \rho_F}{\partial s_F} \right)_{p, x_{FB}^*} ds_F + \left(\frac{\partial \rho_F}{\partial x_{FB}^*} \right)_{p, s_{FB}} dx_{FB}^* \quad \text{A2-9}$$

Daraus werden die substantiellen Dichteableitungen angegeben i Tabelle 3 erhalten.

Anhang 3

Das Ziel dieses Anhanges ist, die Herleitung der Konzentrationsgleichungen der inerten Komponente eines Geschwindigkeitsfeldes darzustellen.

Wir differenzieren die Massengleichungen der inerten Komponenten bzw. der Felder folgenderweise

$$\gamma_v \frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_{iN} \varrho_{iN}) + u_i \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_{iN} \varrho_{iN}) + v_i \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_{iN} \varrho_{iN}) + w_i \gamma_z \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_{iN} \varrho_{iN}) \\ + \alpha_{iN} \varrho_{iN} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\gamma_x u_i) + \frac{\partial}{\partial y} (\gamma_y v_i) + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma_z w_i) \right] = \mu_{iN} r_v$$

$$\gamma_v \frac{\partial}{\partial \tau} (\alpha_i \varrho_i) + u_i \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_i \varrho_i) + v_i \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_i \varrho_i) + w_i \gamma_z \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_i \varrho_i) \\ + \alpha_i \varrho_i \left[\frac{\partial}{\partial x} (\gamma_x u_i) + \frac{\partial}{\partial y} (\gamma_y v_i) + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma_z w_i) \right] = \mu_i r_v$$

Nach einer Division beider Gleichungen durch $\alpha_{iN} \varrho_{iN}$ bzw. $\alpha_i \varrho_i$, nachfolgender Subtraktion der so erhaltenen Gleichungen und unter der Verwendung der Definition

$$x_i^* = \frac{\alpha_{iN} \varrho_{iN}}{\alpha_i \varrho_i}$$

und des Zusammenhanges

$$\frac{d(\alpha_{iN} \varrho_{iN})}{\alpha_{iN} \varrho_{iN}} - \frac{d(\alpha_i \varrho_i)}{\alpha_i \varrho_i} = \frac{1}{\left(\frac{\alpha_{iN} \varrho_{iN}}{\alpha_i \varrho_i} \right)} d \left(\frac{\alpha_{iN} \varrho_{iN}}{\alpha_i \varrho_i} \right) = \frac{dx_i^*}{x_i^*}$$

erhalten wir

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \tau} + u_i \gamma_x \frac{\partial x_i^*}{\partial x} + v_i \gamma_y \frac{\partial x_i^*}{\partial y} + w_i \gamma_z \frac{\partial x_i^*}{\partial z} = (\mu_{iN} - x_i^* \mu_i) / (\alpha_i \varrho_i)$$

Anhang 4

In diesem Anhang soll kurz die Herleitung der Entropiegleichungen erläutert werden. Die Schritte bei der Herleitung sind identisch mit denen, die in der Einführung erläutert wurden.

Zunächst werden die konservativen Energiegleichungen geeignet differenziert und mit der konservativen Form der Massengleichungen verglichen. Daraus ergibt sich die erste Vereinfachung. Weiter werden die nichtkonservativen Impulsgleichungen mit der jeweiligen Komponente des Geschwindigkeitsvektors multipliziert und von der so erhaltenen Energiegleichungen subtrahiert. Das Ergebnis ist:

$$\alpha_G \left[q_L \left(\frac{\partial h_L}{\partial \tau} + u \frac{\gamma_x \partial h_L}{\gamma_V \partial x} + v \frac{\gamma_y \partial h_L}{\gamma_V \partial y} + w \frac{\gamma_z \partial h_L}{\gamma_V \partial z} \right) + q_D \left(\frac{\partial h_D}{\partial \tau} + u \frac{\gamma_x \partial h_D}{\gamma_V \partial x} + v \frac{\gamma_y \partial h_D}{\gamma_V \partial y} + w \frac{\gamma_z \partial h_D}{\gamma_V \partial z} \right) \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} + u \frac{\gamma_x \partial p}{\gamma_V \partial x} + v \frac{\gamma_y \partial p}{\gamma_V \partial y} + w \frac{\gamma_z \partial p}{\gamma_V \partial z} \right) \right] = q_G$$

$$\alpha_{FB} q_{FB} \left(\frac{\partial h_{FB}}{\partial \tau} + u \frac{\gamma_x \partial h_{FB}}{\gamma_V \partial x} + v \frac{\gamma_y \partial h_{FB}}{\gamma_V \partial y} + w \frac{\gamma_z \partial h_{FB}}{\gamma_V \partial z} \right) + \alpha_{FF} q_{FF} \left(\frac{\partial h_{FF}}{\partial \tau} + u \frac{\gamma_x \partial h_{FF}}{\gamma_V \partial x} + v \frac{\gamma_y \partial h_{FF}}{\gamma_V \partial y} + w \frac{\gamma_z \partial h_{FF}}{\gamma_V \partial z} \right)$$

$$- \alpha_F \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} + u \frac{\gamma_x \partial p}{\gamma_V \partial x} + v \frac{\gamma_y \partial p}{\gamma_V \partial y} + w \frac{\gamma_z \partial p}{\gamma_V \partial z} \right) = q_F$$

Die Gleichung für das dritte Feld ist analog zu der Gleichung des zweiten. Unter der Verwendung der im Anhang 2 erhaltenen Gleichungen A2-3 und A2-6 vereinfachen sich die obigen Gleichungen zu:

$$\alpha_G q_G \left[\frac{\partial s_G}{\partial \tau} + u \frac{\gamma_x \partial s_G}{\gamma_V \partial x} + v \frac{\gamma_y \partial s_G}{\gamma_V \partial y} + w \frac{\gamma_z \partial s_G}{\gamma_V \partial z} - (s_L - s_D) \underbrace{\left(\frac{\partial x_L^*}{\partial \tau} + u \frac{\gamma_x \partial x_L^*}{\gamma_V \partial x} + v \frac{\gamma_y \partial x_L^*}{\gamma_V \partial y} + w \frac{\gamma_z \partial x_L^*}{\gamma_V \partial z} \right)}_{Dx_L^*} \right] = q_G$$

$$\alpha_F q_F \left[\frac{\partial s_F}{\partial \tau} + u \frac{\gamma_x \partial s_F}{\gamma_V \partial x} + v \frac{\gamma_y \partial s_F}{\gamma_V \partial y} + w \frac{\gamma_z \partial s_F}{\gamma_V \partial z} - (s_{FB} - s_{FF}) \underbrace{\left(\frac{\partial x_{FB}^*}{\partial \tau} + u \frac{\gamma_x \partial x_{FB}^*}{\gamma_V \partial x} + v \frac{\gamma_y \partial x_{FB}^*}{\gamma_V \partial y} + w \frac{\gamma_z \partial x_{FB}^*}{\gamma_V \partial z} \right)}_{Dx_{FB}^*} \right] = q_F$$

Ein weiterer Vergleich mit den Konzentrationsgleichungen vereinfacht die oberen Gleichungen weiter. Damit erhalten wir die endgültige Form der Entropiegleichungen, angegeben in der Tabelle 6.

Anhang 5

Das Ziel dieses Anhangs ist die Herleitung der Druckfeldgleichung kurz zu erläutern.

Wir gehen von den Massengleichungen der drei Felder aus: Nach einer Differenzierung und nachfolgender Verwendung der Zustands-, Entropie- und Konzentrationsgleichungen erhalten wir

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \tau} + \frac{\alpha_i}{q_i a_i} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} + u \frac{\gamma_x \partial p}{\gamma_V \partial x} + v \frac{\gamma_y \partial p}{\gamma_V \partial y} + w \frac{\gamma_z \partial p}{\gamma_V \partial z} \right) + \frac{1}{\gamma_V} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\alpha_i u_i \gamma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_i v_i \gamma_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_i w_i \gamma_z) \right] = D \alpha_i$$

Unter der Berücksichtigung, daß die Summe aller $D \alpha_i$ gleich Null ist, ergibt sich nach der Addition der oberen drei Gleichungen die in der Tabelle 6 angegebene Druckgleichung.