

**KfK 4424**  
**Mai 1988**

# **Rißspitzenfelder in elastischen und elastisch-plastischen Materialien**

**G. Walz, H. Stamm**  
**Institut für Material- und Festkörperforschung**

**Kernforschungszentrum Karlsruhe**



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Material- und Festkörperforschung

KfK 4424

Rißspitzenfelder in elastischen und elastisch-plastischen Materialien

G. Walz\*, H. Stamm

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE GMBH, KARLSRUHE

\*Universität Karlsruhe, Institut für Zuverlässigkeit  
und Schadenskunde im Maschinenbau



Als Manuskript vervielfältigt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 7500 Karlsruhe 1

ISSN 0303-4003

## **Rißspitzenfelder in elastischen und elastisch-plastischen Materialien**

In diesem Bericht wird gezeigt, daß sich die singulären Spannungsfelder in der Nähe von Rißspitzen mit der Methode der Finiten Elemente (FE) beschreiben lassen. Dazu werden Rechnungen anhand einfacher Rißgeometrien unter Modus-I-Belastung für linear elastisches Materialverhalten und Kriechen nach dem Norton-Gesetz durchgeführt. Die numerischen FE-Ergebnisse stimmen mit den für diese beiden Stoffgesetze vorliegenden bekannten analytischen Lösungen gut überein, sofern die Umgebung der Rißspitze hinreichend fein mit Elementen belegt wird.

## **Crack Tip Fields in elastic and elastic-plastic materials**

In this report it is shown that the singular stress fields in the immediate vicinity of crack tips can be described by the method of finite elements. For that purpose calculations have been performed for simple crack geometries and mode I loading conditions. Linear elastic and power law-creep behaviour is considered. The numerical FE-results agree well with analytic solutions which are known for these two classes of material on the condition that the vicinity of the crack tip is modelled by a sufficiently fine mesh.

## Rißspitzenfelder in elastischen und elastisch-plastischen Materialien

	Seite
<b>I. Einleitung</b>	1
<b>II. Ebener Riß in einem elastischen Medium</b>	2
II.1 Analytische Ausdrücke für das Nahfeld	2
II.2 Griffith-Riß	4
II.3 Numerische Bestimmung elastischer Spannungsintensitätsfaktoren mittels Finite-Element-Methoden	6
II.4 Superpositionsprinzip und Gewichtsfunktion	8
II.5 Rißuferverschiebung und zusätzliche Verschiebung am Probenrand	10
II.6 Richtungs- und radiale Abhängigkeit der Spannungen an der Rißspitze	11
<b>III. Ebener Riß unter Kriechbedingungen</b>	13
III.1 Das asymptotische Feld an der Rißspitze	15
III.2 Das HRR-Feld einer Zugprobe mit Innenriß	17
III.3 Das HRR-Feld des äquivalenten "boundary-layer"-Problems	20
<b>IV. Zusammenfassung und Ausblick</b>	23
Tabellen	24
Literaturverzeichnis	27
Abbildungsverzeichnis	28
Abbildungen	30-52

## I. Einleitung

Zum Verständnis des Rißwachstumsvorganges und des Bruchverhaltens in festen Körpern im Rahmen der phänomenologischen Kontinuumsmechanik (auf einer makroskopischen Skala) ist es unerlässlich, für ein gegebenes Materialmodell und für die jeweiligen Probengeometrien und Belastungen die Spannungsfelder  $\sigma_{ij}$  und die Dehnungsfelder  $\epsilon_{ij}$  in unmittelbarer Nähe der Rißspitze zu kennen. In einfachen Fällen, auf die sich die folgenden Untersuchungen beschränken, sind diese sog. Nahfelder gekennzeichnet durch eine für das Materialgesetz typische Singularität, eine ebenfalls durch das Materialgesetz und zusätzlich noch durch die Rißöffnungsart gegebene Winkelabhängigkeit sowie durch eine Spannungsamplitude, in die neben der Rißöffnungsart nur noch Probengeometrie und Belastung eingehen.

In dieser Arbeit werden Nahfelder, die aus den Feldgleichungen der Kontinuumsmechanik folgen, mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente (FE) berechnet. Dazu konnte auf das bereits vorhandene FE-Programm ABAQUS /1/ zurückgegriffen werden. Ziel der Untersuchungen ist es, Aussagen darüber zu machen, inwieweit sich dieses vollnumerische Verfahren zur Beschreibung von Rißspitzenfeldern eignet. Dazu wird das Material als homogen und isotrop angenommen und einmal durch ein linear elastisches Verhalten, zum anderen durch ein Kriechverhalten nach Norton /2/ charakterisiert. Für beide Materialmodelle existieren analytische Lösungen, so daß eine unmittelbare Überprüfung der FE-Ergebnisse möglich ist.

In Kap. II wird das Rißspitzenfeld für linear elastisches Materialverhalten anhand einer einfachen Rißgeometrie (Innenriß) unter einachsiger Zugbelastung (Modus-I) im ebenen Spannungszustand (ESZ) untersucht. Zunächst werden verschiedene FE-Methoden zur Berechnung der Spannungsamplitude, die in diesem speziellen Fall als Spannungsintensitätsfaktor (SIF) bezeichnet wird, einander gegenübergestellt, ehe dann die wohl bekannte Winkelabhängigkeit und die Form der Spannungssingularität aus den numerischen Resultaten reproduziert werden.

In Kap. III wird bei gegenüber dem linear elastischen Fall unveränderten Randbedingungen das Nortonsche Kriechgesetz als Materialmodell zugrundegelegt. Wiederum werden aus FE-Ergebnissen Winkelabhängigkeit, Spannungsamplitude und Form der Spannungssingularität berechnet. Bei diesem nichtlinearen Materialgesetz sind die trotz relativ feiner Elementbelegung in den ersten Elementlagen um die Rißspitze immer noch merklichen nichtsingulären Beiträge zu den Spannungen, die überdies sogar noch von der Probengeometrie abhängen, nicht bekannt. Deshalb wird in einer weiteren Rechnung in großem Abstand von der Rißspitze das linear elastische Rißspitzenfeld vorgegeben, wobei die Belastung (d.h. die Größe des SIF) beibehalten wird. In dieser sog. "boundary-layer"-Formulierung erstreckt sich das Nahfeld über die ganze Probe.

## II. Ebener Riß in einem elastischen Medium

Die Feldgleichungen der Kontinuumsmechanik für die Spannungs- und Dehnungsfelder lauten in statischer Näherung und für kleine Deformationen:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0 \quad (\text{Gleichgewichtsbedingungen})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \right) \quad (\text{Lösung der Kompatibilitätsbedingungen}) \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} [\sigma_{ij}] \quad (\text{Stoffgesetz})$$

$u_i$  ist das Feld der Verschiebungsvektoren.

Als Randbedingungen lassen sich wahlweise Spannungsvektoren  $n_i \sigma_{ij}$  oder Verschiebungsvektoren vorgeben. Dabei ist  $\bar{n}$  der äußere Normalenvektor auf der Begrenzungsfläche.

Das Randwertproblem weist bei den im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Rigeometrien und Belastungen, Platte mit Innenriß (CC) und mit beidseitigem Außenriß (DEC) unter Zugbeanspruchung, zwei Symmetrieebenen auf. Die erste ist die Riebene, die andere liegt senkrecht dazu in der Mitte der Platte.

Die Geometrien sind Abb. 1a, b zu entnehmen.

Im linear elastischen Fall ist das Stoffgesetz in (1) das Hookesche Gesetz

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2)$$

mit dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Poissonzahl  $\nu$ .

Da Spannungen und Dehnungen über eine lineare Relation auseinander hervorgehen, beschränken sich die Untersuchungen im folgenden auf Spannungsfelder.

### II.1. Analytische Ausdrücke für das Nahfeld

Das Spannungsfeld für einen ebenen Riß der Länge  $a$  unter Modus-I-Belastung in einer Probe mit Ligament  $b-a$  (siehe hierzu Abb. 1) hat, ausgedrückt durch Polarkoordinaten  $(r, \phi)$  an der Rißspitze (cf. Abb. 2), im Grenzfall  $r/a \ll 1$  die asymptotische Form /3/

$$\sigma_{ij}(r, \phi) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\phi) \quad (3)$$

wobei der Spannungsintensitätsfaktor (SIF)  $K_I$  ("I" steht für Modus-I-Belastung) durch

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} F_I \left( \frac{a}{b} \right) \quad (4)$$

gegeben ist.

$\sigma^\infty$  ist die außen am Probenrand angreifende Zugspannung (cf. Abb. 1) und  $F_I(a/b)$  eine dimensionslose tabellierte Formfunktion /4/, die in Abb. 3 für die CC- und die DEC-Probengeometrie und Modus-I-Belastung veranschaulicht ist.  $F_I$  wächst in beiden Fällen ausgehend von einem Wert nahe 1 mit  $a/b$  sehr langsam an. Für relative Rißtiefen  $a/b \geq 0,5$  äußert sich in zunehmendem Maße die bei  $a/b = 1$  vorliegende Wurzelsingularität.

Die ebenfalls dimensionslosen Winkelfunktionen  $f_{ij}$  haben für die kartesischen Komponenten folgendes Aussehen ( $0 \leq \phi \leq \pi$ )

$$\begin{aligned} f_{xx}(\phi) &= \cos \frac{\phi}{2} \left( 1 - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{3\phi}{2} \right) \\ f_{yy}(\phi) &= \cos \frac{\phi}{2} \left( 1 + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{3\phi}{2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$f_{xy}(\phi) = \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{3\phi}{2}$$

Die polaren Komponenten lauten:

$$\begin{aligned} f_{rr}(\phi) &= \frac{1}{2} \cos \frac{\phi}{2} (3 - \cos \phi) \\ f_{\phi\phi}(\phi) &= \cos^3 \frac{\phi}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

$$f_{r\phi}(\phi) = \frac{1}{2} \cos \frac{\phi}{2} \sin \phi$$

Aufgrund der Symmetrie bzgl. der Rißufer gilt für  $-\pi \leq \phi < 0$ :  $f_{ij}(\phi) = f_{ij}(-\phi)$ .

Die einzelnen Komponenten sind in den Abb. 4 graphisch veranschaulicht.

Charakteristisch für das linear elastische Nahfeld ist das Verschwinden sämtlicher Spannungskomponenten längs der Rißufer  $\phi = \pi$ , insbesondere von  $f_{xx} = f_{rr}$ , was nicht in den Randbedingungen enthalten ist. Außerdem haben die Winkelfunktionen  $f_{ij}$  vor der Rißspitze ( $\phi = 0$ ) alle den Wert 1, wenn man von den Scherkomponenten  $f_{xy} = f_{r\phi}$ , die aus Symmetriegründen ver-

schwinden, einmal absieht. Alle  $f_{ij}(\phi)$  sind nichtnegativ, d.h. im Nahfeld treten nur Zugspannungen auf.

Für die Verschiebungen in der Rißebene und senkrecht dazu gilt ( $r/a \ll 1$ ) /3/

$$u_i(r, \phi) = \frac{1 + \nu}{E} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} h_i(\phi) \quad (7)$$

mit den Abkürzungen

$$h_x(\phi) = \cos \frac{\phi}{2} (\kappa - \cos \phi)$$

$$h_y(\phi) = \sin \frac{\phi}{2} (\kappa - \cos \phi)$$

und

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$$

für den ESZ.

Bevor auf FE-Methoden zur Ermittlung von  $K_I$  und auf die numerische Bestimmung der Winkel-funktionen  $f_{ij}(\phi)$  in (5) und (6) eingegangen wird, wird noch die vollständige, d.h. in der ganzen  $xy$ -Ebene gültige analytische Lösung der Feldgleichungen für den sog. Griffith-Riß (unendlich ausgedehnte Platte mit Innenriß:  $a/b \rightarrow 0$ ) angegeben. Wenn man diese Spannungen nach  $r/a$  entwickelt, läßt sich über die höheren Terme der Entwicklung eine Abschätzung für die Reichweite des Nahfeldes gewinnen. Außerdem wird sich später zeigen, daß diese Terme bei der Auswertung der FE-Daten berücksichtigt werden müssen, um die korrekte Winkelabhängigkeit  $f_{ij}(\phi)$  in (5) und (6) zu erhalten.

## II.2. Griffith-Riß

Die Spannungskomponenten für den Griffith-Riß im einachsigen Zugspannungsfeld  $\sigma^\infty$  lauten unter Verwendung von Bipolarkoordinaten am Riß (cf. Abb. 2) /5/

$$\sigma_{xx} = \sigma^\infty \left[ \frac{r_1}{\sqrt{rr_2}} \cos \left( \phi_1 - \frac{\phi + \phi_2}{2} \right) + \frac{a^2 r_1}{\sqrt{(rr_2)^3}} \sin \phi_1 \sin \frac{3}{2} (\phi + \phi_2) - 1 \right]$$

$$\sigma_{yy} = \sigma^\infty \left[ \frac{r_1}{\sqrt{rr_2}} \cos \left( \phi_1 - \frac{\phi + \phi_2}{2} \right) + \frac{a^2 r_1}{\sqrt{(rr_2)^3}} \sin \phi_1 \sin \frac{3}{2} (\phi + \phi_2) \right] \quad (8)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma^\infty \frac{a^2 r_1}{\sqrt{(r r_2)^3}} \sin \phi_1 \cos \frac{3}{2} (\phi + \phi_2)$$

Der Term  $-\sigma^\infty$  in der ersten der Gleichungen (8) führt dazu, daß  $\sigma_{xx}$  im Unendlichen verschwindet und somit die Randbedingungen des Problems im Unendlichen erfüllt werden können.

An den Rißufern, die durch  $\phi = \pi$ ,  $\phi_1 = 0(\pi)$ ,  $\phi_2 = 0$ ,  $r_2 = (2a - r)$ ,  $r_1 = (a - r)$  gegeben sind, gilt  $\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0$ .

Die Reihenentwicklung von (8) nach  $r/a \ll 1$  führt auf die Form (3) und liefert darüberhinaus noch weitere Terme:

$$\sigma_{ij}(r, \phi) = \frac{K_I^{(G)}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\phi) + a_{ij} + O(\sqrt{r}) \quad (9)$$

mit

$$K_I^{(G)} = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}$$

$$a_{xx} = -\sigma^\infty, a_{yy} = a_{xy} = 0$$

Aus (9) entnimmt man, daß die Lösung des Nahfeldes (3) mit Sicherheit schlecht wird, wenn

$$\frac{r}{a} \gg \frac{K_I^2}{2\pi a [\sigma^\infty]^2} = \frac{1}{2} \quad (10)$$

ist.

Unter den Verschiebungen ist die Rißöffnungsverschiebung

$$\delta = 2 u_y(x, y = 0)$$

von besonderem Interesse. Sie ergibt sich im Fall des Griffith-Risses zu

$$\delta^{(G)} = \delta_0^{(G)} \sqrt{\frac{r}{a} \left(2 - \frac{r}{a}\right)} \quad (11)$$

wobei die (maximale) Rißaufweitung (CMOD) durch

$$\frac{\delta_0^{(G)}}{a} = \frac{(1 + \nu)(1 + \kappa)}{2} \frac{\sigma^\infty}{E} \quad (12)$$

gegeben ist.

### II.3. Numerische Bestimmung elastischer Spannungsintensitätsfaktoren mittels FE-Methoden

Die Spannungssingularität an der Rißspitze wird zunächst nicht im numerischen Lösungsverfahren berücksichtigt. Die berechneten Spannungswerte in unmittelbarer Nähe der Rißspitze sind daher i. a. für die Bestimmung des SIF zu ungenau. Abhilfe bietet die Extrapolation von Werten an weiter entfernten Orten zur Rißspitze hin. Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, mit relativ geringem zusätzlichen Aufwand spezielle Rißspitzenelemente einzufügen, in die die Singularität vorab bereits eingebettet ist. Hier ergibt sich allein aus den Werten der Rißspitzenelemente ein hinreichend genauer Wert für den SIF. Außerdem läßt sich der SIF auch aus der Energiefreisetzungsrate ermitteln, zu deren Berechnung ausschließlich Werte an entfernteren Orten verwendet werden können.

Die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten FE-Netze, ein typisches Beispiel ist in Abb. 5 dargestellt, weisen alle folgenden Merkmale auf:

- (i) Es werden Elemente mit quadratischem Verschiebungsansatz (8-Knoten-Serendipity-Elemente) benutzt.
- (ii) Das Netz ist um die Rißspitze in radialer Form angeordnet und wird auf die Rißspitze zu immer feiner.
- (iii) In der Rißspitze sind die Vierecks- zu Dreieckselementen kollabiert. Die der Rißspitze unmittelbar benachbarten Knotenpunkte werden i. a. von den Seitenmitten um ein Viertel der Seitenlänge zur Rißspitze hin verschoben, so daß der Verschiebungsansatz einen  $\sqrt{r}$ -Term enthält /6/.

Von den Verfahren zur Berechnung des SIF werden im folgenden die Spannungs- und die Verschiebungsmethode nach Chan /7/, die direkte Berechnung des SIF aus den Knotenverschiebungen der Rißspitzenelemente /6/ und die indirekte Berechnung des SIF über das sog. J-Integral /8/ untersucht. Als Beispiel wurde ein Innenriß mit  $a/b = 0,8$  und  $h/b = 3$  (cf. Abb. 1a) gewählt. Das FE-Netz besteht aus 160 Elementen und 527 Knoten (Abb. 5). Das FE-Problem hat somit 1054 Freiheitsgrade. Aus Symmetriegründen braucht nur ein Viertel der Struktur modelliert zu werden.

Bei den drei erstgenannten Verfahren werden jeweils für eine fest gewählte Richtung  $\phi$  die Ergebnisse der FE-Analyse direkt mit den asymptotischen Beziehungen für Spannungen (3), bzw. Knotenverschiebungen (7) verglichen. So werden bei der Spannungsmethode, bzw. der Verschiebungsmethode nach Chan die Größen

$$\bar{K}_{I\phi, \sigma_{ij}}(r) = \frac{\sqrt{2\pi r}}{f_{ij}(\phi)} \sigma_{ij}(r, \phi)$$

und

$$\bar{K}_{I\phi, u_i}(r) = \frac{E \sqrt{2\pi}}{(1+\nu)\sqrt{r} h_i(\phi)} u_i(r, \phi)$$

als Funktion des Abstandes  $r$  von der Rißspitze aufgetragen und nach  $r \rightarrow 0$  extrapoliert. Diese Verfahren lassen sich im übrigen auch dann anwenden, wenn keine speziellen Rißspitzenelemente verwendet werden, aber die Struktur in der Umgebung der Rißspitze hinreichend fein modelliert wird. In diesem Fall kann ein- und dieselbe Struktur für Parameterstudien mit unterschiedlichen Rilngen verwendet werden, was bei Anwesenheit von Rispitzenelementen nicht möglich ist. Dafür erhöhen aber die Rißspitzenelemente die Genauigkeit des Verfahrens beträchtlich; man beobachtet insbesondere i.a. kein Abknicken der  $\bar{K}_I$ -Kurven in der Umgebung von  $r = 0$ , wie es in /8/ auftritt. In Abb. 6 und 7 sind FE-Ergebnisse für  $\bar{K}_I(r)$  bei unterschiedlicher Wahl der Spannungs- bzw. Verschiebungskomponente und für verschiedene Richtungen  $\phi$  graphisch veranschaulicht. Die sich aus der Extrapolation ergebenden Werte für  $K_I$  sind in Tab. 1 aufgeführt. Im Prinzip ist jede Komponente und jede Richtung für die Berechnung von  $K_I$  geeignet. Nach Chan et al. /8/ wird aber die höchste Genauigkeit für  $\sigma_{yy}$  und  $\phi = 0$  sowie  $u_y$  und  $\phi = \pi$  erzielt, was auch in diesen Rechnungen gefunden wird. In diesen Fällen ist man weit entfernt von den Nullstellen der Winkelanteile  $f_{ij}$  und  $h_i$ , so daß die Normierung keine Schwierigkeiten bereitet.

Bei Verwendung spezieller Rißspitzenelemente mit einem Verschiebungsansatz der Form

$$u_i = A_i + B_i \sqrt{r} + C_i r$$

läßt sich der SIF direkt aus deren Knotenverschiebungen berechnen

$$\frac{K_I}{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}} = \frac{\sqrt{2}}{(1+\nu) h_i(\phi)} \frac{E}{\sigma^\infty} \frac{4 u_{i\phi}(\frac{e}{4}) - u_{i\phi}(l) - 3 u_i(0)}{\sqrt{la}} \quad (13)$$

Hierin bedeutet  $l$  der Radius des Rispitzenelementes. In Abb.8 sind aus (13) gewonnene Ergebnisse für  $K_I$  bei verschiedener Wahl von  $\phi$  und für x- und y- Komponente aufgetragen. Solange man sich mit  $\phi$  hinreichend weit entfernt von den Nullstellen der Winkelanteile  $h_i(\phi)$  befindet und den Bereich um die Rißspitze genügend fein mit Elementen belegt hat, erhält man in allen Fällen akzeptable Ergebnisse für  $K_I$ .

Am elegantesten ist es, das J-Integral zur Berechnung von  $K_I$  heranzuziehen. Es ist (bei zweidimensionaler Konfiguration) definiert durch

$$J = \oint_{\Gamma} \left( W dy - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) \quad (14)$$

wobei  $\Gamma$  ein positiv orientierter Weg um die Rißspitze in der xy-Ebene mit äußerem Normalenvektor  $\vec{n}$  und Linienelement  $ds$  ist.  $W$  ist die Dehnungsenergiegedichte

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}$$

Das J-Integral ist wegunabhängig, falls die Dehnungsenergie in eindeutiger Weise mit den Dehnungen verknüpft ist.  $J$  gibt in einem elastischen Material den Energiestrom zur Rißspitze pro Rißausdehnung (Energiefreisetzungsrate) an und steht in unmittelbarem Zusammenhang mit dem SIF (Modus-I-Belastung)

$$J = \frac{(1 + \nu)(1 + \kappa)}{4} \frac{K_I^2}{E} \quad (15)$$

Im FE-Programm ABAQUS wird  $J$  für verschiedene Bereiche um die Rißspitze mit Hilfe der Methode der virtuellen Rißvergrößerung berechnet. Auch bei diesem Verfahren zur Ermittlung von  $K_I$  werden im Prinzip keine speziellen Rißspitzenelemente benötigt, sie erhöhen aber wiederum die Genauigkeit der Ergebnisse /9/.

Im vorliegenden Beispiel ergibt sich unabhängig von der Wahl des Integrationsweges für  $J$  immer (auf 4 Dezimalen genau) derselbe Wert, der einem  $K_I$ -Wert von  $1,8156 \sigma^\infty \sqrt{\pi a}$  entspricht. Dabei wurden 8 konzentrische Kreisbögen um die Rißspitze als Wege (cf. Abb. 5) verwendet.

In Tab. 1 sind die  $K_I$ -Ergebnisse aller untersuchten Verfahren sowie deren relative Abweichung zum Tabellenwert  $1,8160 \sigma^\infty \sqrt{\pi a} / 4/$  einander gegenübergestellt. Die Struktur wurde im Bereich um die Rißspitze so fein modelliert, daß alle Verfahren den SIF  $K_I$  mit einer für praktische Anforderungen ausreichenden Genauigkeit liefern.

#### II.4. Superpositionsprinzip und Gewichtsfunktion

Die Linearität der Feldgleichungen des linear elastischen Mediums gestattet es, den Spannungsintensitätsfaktor für eine beliebige Verteilung der Belastung  $\sigma$  über einem Riß linear aus den SIF von Einzelbelastungen zu superponieren.

$$K(a) = \int_0^a \sigma(x) h(x,a) dx$$

Dabei ist  $x$  der Ort über dem Riß, an dem die Einzelbelastung angreift. Die Größe  $h(x,a)$  bezeichnet man als Gewichtsfunktion. Sie ist für eine vorgegebene Belastungsart unabhängig

von der Größe der Belastung. Man erhält die Gewichtsfunktion  $h(x,a)$  als Funktion der Länge  $x$  über dem Riß, indem man nacheinander den Körper an verschiedenen Stellen  $x_0$  durch eine Punktspannung (Einzelkraft pro Längeneinheit)  $\sigma(x) = F_0 \cdot \delta(x-x_0)$  lokal belastet und dazu jeweils den SIF ermittelt:  $K(x,a) = h(x,a) F_0$ .  $\delta(x)$  ist die Diracsche Deltafunktion.

Aufgrund des Superpositionsprinzips läßt sich jede äußere Belastung durch eine entsprechende Rißuferbelastung ersetzen, so daß man die Einzelkräfte unmittelbar an den Rißufern angreifen lassen kann. Dies wird im folgenden anhand einer DEC-Geometrie mit den Rißlängen  $a/b = 0,6$  und  $a/b = 0,8$  (cf. Abb. 1) durchgeführt. Die Gewichtsfunktionen  $h_L(x,a)$  und  $h_R(x,a)$  der beiden Risse folgen dann aus

$$h_L(x,a) = \frac{K_L(x,a)}{F_L(x)}, \quad h_R(x,a) = \frac{K_R(x,a)}{F_R(x)}$$

Es ist zweckmäßig, die Gesamtbelastung der Probe in einen symmetrischen Anteil bzgl. der Symmetrieachse durch die Mitte der Probe

$$\sigma^{(s)}(x) = \frac{\sigma(x) + \sigma(2b-x)}{2}$$

und einen antisymmetrischen Anteil

$$\sigma^{(A)}(x) = \frac{\sigma(x) - \sigma(2b-x)}{2}$$

zu zerlegen.

Der SIF des linken Risses ergibt sich dann zu

$$K_L(a) = \int_0^a \sigma^{(s)}(x) h^{(s)}(x,a) dx + \int_0^a \sigma^{(A)}(x) h^{(A)}(x,a) dx$$

der des rechten zu

$$K_R(a) = \int_0^a \sigma^{(s)}(x) h^{(s)}(x,a) dx - \int_0^a \sigma^{(A)}(x) h^{(A)}(x,a) dx$$

wobei  $h_S$  und  $h_A$  jeweils die Gewichtsfunktionen für symmetrische und antisymmetrische Belastung bezeichnen. Für symmetrische Belastung ist  $K_L = K_R$ , für antisymmetrische

$$K_L = -K_R.$$

Belastet man an den Stellen  $x_0$ , bzw.  $2b - x_0$  die Rißufer mit unterschiedlichen Einzelhälften  $F_L$  und  $F_R$ , so gilt:

$$h^{(s)}(x_0, a) = \frac{K_L(x_0, a) + K_R(2b - x_0, a)}{F_L(x_0) + F_R(2b - x_0)}$$

und

$$h^{(A)}(x_0, a) = \frac{K_L(x_0, a) - K_R(2b - x_0, a)}{F_L(x_0) - F_R(2b - x_0)}$$

Das für die FE-Rechnung benutzte Netz ist in Abb. 9 dargestellt. Aufgrund der unterschiedlich großen Kräfte  $F_I$  muß die halbe Struktur modelliert werden. Außerdem muß bei der Rechnung ein hinreichend großer Zuganteil in der Belastung vorhanden sein, bzw. notfalls überlagert werden, damit sich beide Risse öffnen und somit die noch verbleibende Symmetrie senkrecht zur Rißebeine nicht gestört wird. Bei Überlappung der Risse ist das Konzept der Gewichtsfunktion nicht mehr anwendbar.

Eingehende Parameterstudien haben gezeigt, daß dazu  $1 < F_L(x_0)/F_R(x_0) < 8/7$  sein muß. Die Ergebnisse für die Gewichtsfunktionen  $h_S$  und  $h_R$  sind in Abb. 10 dargestellt, wobei an der Rißspitze  $x/a = 1$  ist. Die an dieser Stelle vorliegende Singularität in  $h_{S/A}$  wurde nicht untersucht. Die SIF wurden über das J-Integral berechnet /10/.

### II.5. Rißuferverschiebung und zusätzliche Verschiebung am Probenrand

Die maximale Rißuferverschiebung (CMOD) ist für beliebige Probengeometrie und bei Modus-I-Belastung gegeben durch:

$$\delta_o = \delta_o^{(G)} V_I(a/b)$$

Dabei ist  $V_I(a/b)$  eine dimensionslose, tabellierte Formfunktion /4/ und  $\delta_o^{(G)}$  die Griffithlösung (12).  $V_I(a,b)$  zeigt einen ähnlichen Verlauf wie die Formfunktion  $F$  des SIF, jedoch liegt hier für  $a/b \rightarrow 1$  eine logarithmische Singularität vor. Für das Standardbeispiel Innenriß ( $a/b = 0,8$ ,  $h/b = 3$ ) entnimmt man den Tabellenwert  $V(a/b = 0,8) = 1,726 \pm 0,01$ .

Das FE-Resultat liegt mit 1,725 innerhalb der Toleranz.

In Abb. 11 ist die gesamte Verschiebung des Rißufers  $u_y(x, y = 0)$  für  $0 \leq x \leq a$  dargestellt. Mit eingezeichnet ist zum Vergleich die beim Griffith-Riß beobachtete Abhängigkeit (11). Charakteristisch für linear elastische Verhältnisse ist die elliptische Form der Rißöffnung.

Neben SIF und CMOD findet man noch die aufgrund der Anwesenheit des Risses vorliegende zusätzliche Verschiebung am Probenrand in tabellierter Form vor /4/. Sie ist gegeben durch (cf. Abb. 1)

$$\Delta = \Delta_{total} - \frac{2\sigma}{E} h$$

wobei  $\Delta$  wiederum über eine Formfunktion  $W(a/b)$  mit der Griffithschen Rißaufweitung  $\delta_o^{(G)}$  in Beziehung gebracht wird

$$\Delta = \delta_o^{(G)} W(a/b)$$

Wäre kein Riß vorhanden ( $\Delta = 0$ ), so ist die Verschiebung an der Stelle  $h$ :

$$\Delta_{total} = \frac{2\sigma}{E} h$$

Im Fall des Standardbeispiels ergibt sich  $W(a/b = 0,8) = 1,1099$ , was gegenüber dem Tabellenwert von  $1,1005 + 0,007$  etwas zu groß ausfällt.

### II.6. Richtungs- und radiale Abhängigkeit der Spannungen an der Rißspitze

Im folgenden werden die Richtungs- und die radiale Abhängigkeit der Spannungen nunmehr anhand eines Innenrisses mit  $a/b = 0,3$  und  $h/b = 3$  untersucht.

Das FE-Netz ist analog zu dem in Abb. 5 aufgebaut und besteht jetzt aus 192 Elementen und 631 Knoten (1262 Freiheitsgrade).

Aus dem Wert des J-Integrals errechnet man den SIF zu :

$$\frac{K_I^{(FE)}}{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}} = 1,0575$$

was nur um 0,4% unter dem Tabellenwert liegt.

In Abb. 12 a-c sind die FE- Ergebnisse für die Größen  $f_{ij}$

$$f_{ij}^{(FE)} = \sigma_{ij}^{(FE)} \frac{\sqrt{2 \pi r}}{K_I^{(FE)}}$$

mit  $ij = xx, yy$  und  $xy$  als Funktion des Polarwinkels  $\phi$  für die Radien  $r/a = 8,77 \cdot 10^{-3}, 4,43 \cdot 10^{-2}$  und  $0,139$  aufgetragen. Zum Vergleich ist jeweils der theoretisch zu erwartende Winkelanteil  $f_{ij}$  aus (5) dargestellt (cf. durchgezogene Kurven). Die Übereinstimmung ist für kleines  $r/a$  ausgezeichnet, wird aber mit zunehmendem  $r/a$  schlechter, weil man den Bereich des Nahfeldes verläßt und auch nichtsinguläre Terme zu den Spannungen beitragen. Während die allgemeine Form der Kurven und der Verlauf längs der Rißufer (Randbedingungen) in allen Fällen derselbe ist, rücken die Maxima in  $f_{xx}^{(FE)}$  und  $f_{yy}^{(FE)}$  mit zunehmendem  $r/a$  zu kleineren Winkeln. Dabei wachsen die Werte von  $f_{xx}^{(FE)}$  und  $f_{yy}^{(FE)}$  an, während die Werte von  $f_{xy}^{(FE)}$  abnehmen.

Bereits für  $r/a = 8,77 \cdot 10^{-3}$  wird der erste nichtsinguläre Beitrag in der Reihenentwicklung des Spannungsfeldes  $\sigma_{xx}$

$$\sigma^\infty \frac{\sqrt{2 \pi r}}{K_I^{(FE)}} = 0,125$$

was i.a. nicht mehr gegen  $f_{xx}$  vernachlässigbar ist. Deshalb müssen zur Berechnung von  $f_{xx}^{(FE)}$  aus Spannungswerten  $\sigma_{ij}^{(FE)}$ , die in der gesamten Ebene gültig sind, auch Terme höherer Ordnung berücksichtigt werden. Es zeigt sich, daß der nächst höhere Betrag, die Konstante  $-\sigma^\infty$ , schon ausreicht, d.h.

$$f_{xx}^{(FE)} \approx \frac{\sqrt{2\pi r}}{K_I^{(FE)}} (\sigma_{xx}^{(FE)} + \sigma^\infty) \quad (16)$$

Unterbleibt jedoch diese sog. T-Effekt-Korrektur [11], ist  $f_{xx}^{(FE)}$  gegenüber dem theoretischen Verlauf um 0,125 nach unten parallelverschoben ( $r/a = 8,77 \cdot 10^{-3}$ ) (siehe hierzu Vierecke in Abb. 12a).

Die radiale Abhängigkeit der Spannungskomponenten  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  und  $\sigma_{xy}$  ist in Abb. 13 für einen Winkel  $\phi$  nahe  $0^\circ$  in doppelt logarithmischem Maßstab graphisch veranschaulicht. Die Kurven sind bis  $r/a = 5 \cdot 10^{-2}$  weitgehend linear, ihre Steigung entspricht dem für linear elastische Verhältnisse typischen  $r^{-1/2}$ -Verhalten der Spannungskomponenten. Für größere Werte von  $r/a$  ist die Lösung des Nahfeldes offenbar nicht mehr gültig und die Kurven biegen leicht zu größeren Spannungen hin ab.

### III. Ebener Riß unter Kriechbedingungen

Eine einfache Möglichkeit, Kriechverhalten zu beschreiben, bietet folgendes Materialgesetz

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{ij}^{el} + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{ij}^p \quad (17)$$

mit

$$\varepsilon_{ij}^{el} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{KK} \delta_{ij} \quad (\text{Hookesches Gesetz})$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \alpha \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_0} \quad (\text{Norton Gesetz})$$

Die Materialeigenschaften äußern sich durch die Werte von Elastizitätsmodul  $E$  und Poissonzahl  $\nu$  sowie die Werte des Kriechkoeffizienten  $\alpha$  und des (reellen) Kriechexponenten  $n$ .  $\sigma_0$  ist eine geeignete Normierungsspannung,  $\varepsilon_0$  die zugehörige Normierung für die Dehnungen, wobei  $\varepsilon_0 = \sigma_0 / E$  gilt,  $\sigma_{ij}'$  bezeichnet den Spannungsdeviator und  $\sigma_e$  die quivalentspannung nach von Mises

$$\sigma_e^2 = \frac{3}{2} \sigma_{ij}' \sigma_{ij}'$$

die sich in ESZ aus  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  und  $\sigma_{xy}$  ergibt zu

$$\sigma_e^2 = \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx} \sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2$$

Im einachsigen Fall vereinfacht sich (17) wegen  $\sigma_e = \sigma$  zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sigma}{E} + \alpha \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n$$

Im Unterschied zum linear elastischen Verhalten ändern sich hier Spannungen und Dehnungen nicht nur räumlich, sondern auch noch zeitlich, so daß zu den Randbedingungen auch noch Anfangsbedingungen hinzutreten:  $\varepsilon_{ij}(t = 0) = \varepsilon_{ij}^{el}$ . Außerdem ist der Zusammenhang  $\varepsilon_{ij} [\sigma_{kl}]$  aufgrund des Kriechtermes  $\partial / \partial t \varepsilon_{ij}^p$  nichtlinear ( $n > 1$ ). Diese beiden Komplikationen haben für die FE-Behandlung einschneidende Konsequenzen. Sie erfordern (a) eine inkrementelle Integration des Stoffgesetzes, (b) eine iterative Lösung der Feldgleichungen (1) in jedem Inkrement. (Im linear elastischen Fall reduziert sich dagegen das Randwertproblem auf das einmalige Lösen eines linearen Gleichungssystems.)

Wird der Körper nun zur Zeit  $t = 0$  einer konstanten Belastung ausgesetzt, etwa einer Zugspannung  $\sigma^\infty(t) = \sigma^\infty \theta(t)$ , so stellt sich unmittelbar die Spannungsverteilung des linear elastischen Falles ein, weil  $\partial / \partial t \sigma^\infty = \sigma^\infty \delta(t)$  ist und somit der elastische Term im Stoffgesetz (17) gegenüber dem Kriechterm dominiert ( $\theta$  ist die Heavysidefunktion,  $\delta$  die bereits erwähnte Diracsche Deltafunktion). Insbesondere gilt für das Nahfeld um die Rißspitze

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sigma_{ij}(r, \phi, t) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\phi)$$

Für Zeiten  $t > 0$  setzt von der Rißspitze ausgehend Kriechen ein. Da der Riß ruht und der Kriechexponent  $n > 1$  ist, überwiegt nämlich zunächst an Orten hoher lokaler Spannungen, also in unmittelbarer Umgebung der Rißspitze, und dann mit zunehmender Zeit auch an entfernteren Stellen mit kleineren Spannungswerten der Kriechterm im Norton-Gesetz. Insbesondere gilt unmittelbar an der Rißspitze ( $r \rightarrow 0$ ) zu allen Zeiten  $t > 0$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{ij} \approx \frac{3}{2} \alpha \varepsilon_o \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_o} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_o}$$

Die Kriechzone ist das Gebiet um die Rißspitze, in dem die plastischen Vergleichsdehnungen gegenüber den elastischen überwiegen. Der Rand der Kriechzone wird durch die Relation:

$$\bar{\varepsilon}^{el}(r_{cr}, \phi_{cr}, t) = \bar{\varepsilon}^p(r_{cr}, \phi_{cr}, t)$$

festgelegt. Dabei ist  $\bar{\varepsilon}$  gegeben durch:

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{2}{3} \varepsilon_{ij}' \varepsilon_{ij}'$$

mit dem jeweiligen Dehnungsdeviator  $\varepsilon_{ij}'$ . Folgende zwei Grenzfälle sind von besonderer Bedeutung:

1. Im Grenzfall  $t \rightarrow \infty$  (Langzeitlösung) erstreckt sich die Kriechzone schließlich über die gesamte Ebene, und das Gesetz (17) gilt überall. Dann ist die Spannungsverteilung bei Norton-Kriechen dieselbe wie im Fall eines Ramberg-Osgood-Materialverhaltens /12/

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \alpha \varepsilon_o \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_o} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_o}$$

da die Feldgleichungen nach Ersetzen von  $\partial / \partial t \varepsilon_{ij}$  durch  $\varepsilon_{ij}$  und  $\partial / \partial t u_i$  durch  $u_i$  auseinander hervorgehen und die Randbedingungen (Vorgabe von Spannungen) dieselben sind.

2. Ist die Kriechzone dagegen noch so klein, daß im unmittelbar daran anschließenden Bereich noch die Spannungsverteilung des linear elastischen Nahfeldes vorliegt, so spricht man von "small-scale yielding"-Näherung (SSY). Die Kriechzone ist in das linear elastische Feld (3) eingebettet, und das Nahfeld wird durch den SIF charakterisiert.

III.1 Das asymptotische Feld an der Rißspitze

Die Spannungen und Dehnungen in unmittelbarer Nähe der Rißspitze ergeben sich für Norton-Kriechen zu /13/:

$$\sigma_{ij}(r, \phi, t) = A(t) r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\phi, n)$$

und (18)

$$\varepsilon_{ij}(r, \phi, t) = B(t) r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\phi, n)$$

wobei B(t) und  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\phi, n)$  durch zeitliche Integration des Norton-Gesetzes aus A(t) und  $\tilde{\sigma}_{ij}(\phi, n)$  hervorgehen:

$$B(t) = \varepsilon_o \alpha \int_0^t \left( \frac{A(t')}{\sigma_o} \right)^n dt'$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(\phi, n) = \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_e^{n-1}(\phi, n) \tilde{\sigma}_{ij}'(\phi, n)$$

Die Werte  $\tilde{\sigma}_{ij}(\phi, n)$  liegen für verschiedene Kriechexponenten, Riffnungsarten und Spannungszustände in tabellierter Form vor /14/. Dabei ist es Konvention, so zu normieren, daß das Maximum von  $\tilde{\sigma}_e$  gerade den Wert 1 annimmt.

Spannungs- und Dehnungsfelder, die eine Singularität und eine Winkelabhängigkeit wie in (18) zeigen, bezeichnet man nach Hutchinson /12/, /15/ Rice und Rosengren /16/ als HRR-Felder. Diese Autoren haben derartige Felder erstmals für Ramberg-Osgood-Materialien gefunden.

Die dimensionslosen Winkelfunktionen  $\tilde{\sigma}_{ij}(\phi, n)$  sind in Abb. 14 für n = 3, Modus-I-Belastung und ESZ dargestellt. Auch hier braucht aus Symmetriegründen nur das Intervall [0, n] betrachtet zu werden. Im Unterschied zum linear elastischen Fall treten bei  $\phi = 0$  und  $\phi = n$  für die einzelnen Komponenten verschiedene Werte auf. In der Umgebung von  $\phi = n$  sind alle Komponenten (bis auf  $\tilde{\sigma}_e(\phi, n)$ ), das definitionsgemäß immer > 0 ist), negativ. Die Nulldurchgänge führen zu einem Knick in  $\tilde{\sigma}_e(\phi, n)$ .

Die noch verbleibende Amplitude A ist eine Funktion der Zeit, Belastung und Geometrie. Sie ist im Grenzfall  $t \rightarrow \infty$  gegeben durch /12/, /13/

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \sigma_o \left[ \frac{C^*}{\alpha \varepsilon_o \sigma_o I_n} \right]^{\frac{1}{n+1}} \tag{19}$$

Dabei ist das C\*-Integral gegeben durch:

$$C^* = \oint_{\Gamma} (W^* dy - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} ds)$$

mit

$$W^* = \int_0^{\dot{\varepsilon}_{ij}} \sigma_{\alpha\beta} d\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}$$

und einem geschlossenen positiv orientierten Weg  $\Gamma$  um die Rißspitze.  $C^*$  geht durch Ersetzen von  $\varepsilon_{ij}$  durch  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  sowie von  $u_i$  durch  $\dot{u}_i$  aus dem J-Integral (14) hervor.

Im ssy-Fall gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) \approx \sigma_o \lambda_n \left[ \frac{K_I^2}{Et} \frac{n}{\pi(n+1)^2 \alpha \varepsilon_o \sigma_o} \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (20)$$

Die Größe  $K_I$  in (20) ist der elastische SIF.  $I_n$  und  $\lambda_n$  sind tabellierte geometrieabhängige numerische Zahlenfaktoren von der Größenordnung 1/14/.

Hervorzuheben ist, daß im ssy-Fall auch eine zeitliche Singularität der Form:

$$t^{-\frac{1}{n+1}}$$

vorliegt.

Kriechdeformationen führen zu einer Umlagerung von Spannungen und Dehnungen, wobei die elastische Spannungskonzentration an der Rißspitze durch den Kriechproze reduziert wird und die Spannungen über die Probe verteilt werden. Dagegen sind die Dehnungen an der Rißspitze größer als im elastischen Fall. Die Singularität der Spannungen  $r^{-1/(n+1)}$  ist nämlich schwächer als die Singularität  $r^{-1/2}$  im elastischen Fall, während die Dehnungssingularitt  $r^{-n/(n+1)}$  gegenüber  $r^{-1/2}$  dominiert ( $n > 1$ ).

Der Vollständigkeit halber sei noch das Verhalten der Verschiebungen im Nahbereich um die Rißspitze angegeben:

$$u_i(r, \phi, t) = B(t) r^{\frac{1}{n+1}} \tilde{u}_i(\phi, n)$$

wobei die dimensionslosen Winkelanteile  $\tilde{u}_i(\phi, n)$  wiederum tabelliert vorliegen /14/.

Für die FE-Rechnung wurden folgende Materialparameter gewählt:

$$\nu = 0,3 \quad E = 10^5 \text{ MPa} \quad n = 3,0 \quad \alpha = 10^{-7} \text{ s}^{-1} \quad \sigma_0 = 1 \text{ MPa.}$$

Zunächst werden die Felder einer CC-Probe mit den Geometrieparametern  $a/b = 0,3$ ;  $h/b = 3$  unter einer konstanten, zur Zeit  $t = 0$  einsetzenden Zugbelastung von  $\sigma^\infty = 100 \text{ MPa}$  analysiert. Der elastische SIF beträgt  $K_I = 32,47 \text{ MPa m}^{1/2}$  ( $b = 100 \text{ mm}$ ). In einer weiteren Rechnung wird auf einem Kreis mit Radius  $r/a = 1,77$  das elastische Verschiebungsfeld (7) mit demselben Wert  $K_I$  als Randbedingung vorgegeben. Bei dieser sog. "boundary-layer"-Formulierung liegen damit inhärent ssy-Verhältnisse vor, außerdem treten keine durch die Probengeometrie bedingten Streufelder (T-Effekt) auf.

### III.2 Das HRR-Feld einer Zugprobe mit Innenriß

#### (a) FE-Struktur

Das FE-Netz besteht insgesamt aus 871 Knoten und 264 Elementen, davon sind 520 Knoten und 156 Elemente unmittelbar um die Rißspitze angeordnet. Ein Ausschnitt aus diesem Bereich ist in Abb. 15 dargestellt. Die Radien der Halbkreise sind aus Tab. 2 zu ersehen.

Es soll bereits an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß die in diesem Netz angewandte Kollabierungs- und Viertelpunktstechnik an der Rißspitze nicht in der Lage ist, die richtige Form der Spannungssingularität  $r^{-1/4}$  ( $n = 3$ ) wiederzugeben, sondern eine zu starke Singularität  $r^{-1/2}$  vortäuscht. Daher ist man gezwungen, die Rißspitzenelemente sehr klein zu wählen, so daß diese künstliche Spannungsüberhöhung bereits nach wenigen Elementen abgeklungen ist. Bei der gegenwärtig zur Verfügung stehenden Version des FE-Programmes ABAQUS (4.5 aus dem Jahre 1985), umfaßt die Programmbibliothek keine geeigneten Elemente, wie sie etwa Akin vorgeschlagen hat /17/.

#### (b) Zeitschrittsteuerung und Konvergenzparameter

Im FE-Programm ABAQUS wird die Konvergenz der Gleichgewichtssiterationen zur Lösung der Feldgleichungen durch den Parameter PTOL, die Genauigkeit der Zeitintegration des Materialgesetzes durch CETOL gesteuert /1/. Bei den durchgeführten Rechnungen wurde

$PTOL = 10^{-3}$  MN und  $CETOL = 10^{-5}$  gewählt.

Beginnend mit  $t_1 = 10^{-4}$ s wurden insgesamt 930 Zeitinkremente gerechnet, bis sich bei  $t = 154$  s im Bereich nahezu stationären Kriechens die Spannungswerte nur noch unwesentlich änderten und die Knotenverschiebungen in der Nähe der Rißspitze mit den Abmessungen der Rißspitzenelemente vergleichbar wurden.

Das FE-Programm ABAQUS war dabei in der Vergrößerung des Zeitschrittes so konservativ, daß ein zu groß gewählter Zeitschritt nur einmal korrigiert werden mußte und jeweils nur eine einzige Gleichgewichtsiteration für einen maximalen Fehler von  $5 \cdot 10^{-7}a$  in den Knotenverschiebungen erforderlich war.

In Abb. 16 ist die Größe des Zeitinkrementes  $\Delta t$  in Abhängigkeit von der Inkrementnummer, bzw. der bis zu diesem Inkrement verstrichenen Zeit  $t$  (durchgezogene Kurve) in logarithmischem Maßstab aufgetragen. Nach etwa 30 Inkrementen wird  $t$  im Mittel nur um einen Faktor 1,01 pro Inkrement erhöht.

### (c) Zeitliche Ausbreitung der Kriechzone

In Abb. 17 ist die Kriechzone um die Rißspitze zu 5 verschiedenen Zeiten aufgetragen. Die Ausbreitung erfolgt weitgehend selbständig und proportional zur Zeit  $t$ , wie es Riedel /13/ für ssy-Verhältnisse im Fall  $n = 3$  berechnet hat. Der Verlauf ist typisch für ESZ und für die hier benutzte Größe der Zugbelastung  $\sigma^e$ . Eine Erhöhung von  $\sigma^e$  würde z.B. zu einer noch stärkeren Ausdehnung der Kriechzone in eine Vorzugsrichtung führen. Die Ergebnisse stimmen mit Rechnungen von Hilton und Hutchinson /18/ recht gut überein.

Zur Analyse des HRR-Feldes mit den vorliegenden FE-Resultaten sollte zumindest die zweite Elementlage um die Rißspitze  $r/a \approx 2 \cdot 10^{-3}$  (cf. Tab. 2) weit im Inneren der Kriechzone liegen (die erste Elementlage reicht wegen der o.g. zu starken Singularität der Rißspitzenelemente nicht aus). Dies ist für Werte zu Zeiten  $t \geq 50$  s der Fall. (Dabei soll von Richtungen längs der Rißufer abgesehen werden.)

### (d) Winkelabhängigkeit des HRR-Feldes

Die Winkelfunktionen  $\tilde{\sigma}_{ij}(\phi, n)$  im asymptotischen Rißspitzenfeld (18) ergeben sich aus der Spannungsverteilung aufgrund der Normierungskonvention zu:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\phi, n) = \frac{\sigma_{ij}(r, \phi, t)}{\max_{\phi} \sigma_e(r, \phi, t)}$$

Die Funktionen  $\tilde{\sigma}_{ij}(\phi, n)$  wurden aus den ermittelten FE-Spannungswerten für einen Abstand  $r/a = 1,4 \cdot 10^{-3}$  von der Rißspitze (zweite Elementlage) und für die beiden Zeiten  $t = 5 \cdot 10^{-2}$ s und  $t = 100$  s bestimmt. Sie sind jeweils in den Abb. 18, und 19 aufgetragen. Zum Vergleich sind die theoretisch zu erwartenden Winkelverteilungen als durchgezogene Kurven mit eingezeichnet. In beiden Fällen wurde zunächst der T-Effekt wie in den linear elastischen Ergebnissen gemäß Gl (16) mit  $\sigma^e = 100$  MPa berücksichtigt.

Zur Zeit  $t = 5 \cdot 10^{-2}$ s ist die Kriechzone noch so klein, daß bei  $r/a = 1,4 \cdot 10^{-3}$  für sämtliche Richtungen linear elastische Verhältnisse vorliegen. Dementsprechend wird ein durch die Gl. (6)

beschriebenes Verhalten gefunden. Die Übereinstimmung mit den theoretischen Verteilungen ist etwas schlechter als im linear elastischen Fall (cf. hierzu Abb. 12). Offenbar deutet sich bereits ein Einfluß des Kriechtermes an.

Zum Zeitpunkt  $t = 100$  s dominiert im Abstand  $r/a = 1,4 \cdot 10^3$  von der Rißspitze der Kriechterm im Stoffgesetz. Die Winkelverteilungen, die aus FE-Daten berechnet wurden, geben recht gut den theoretischen Verlauf wieder (siehe hierzu Punkte und durchgezogene Kurven in Abb. 19). Die Tangentialkomponente  $\bar{\sigma}_{\phi\phi}$  fällt zunächst für kleine Winkel  $\phi$  vor der Rißspitze zu klein aus, wird dann aber bei größeren  $\phi$  zu groß, so daß der Übergang in den Druckbereich zu größerem  $\phi$  hinverschoben ist. Die Radialkomponente folgt dem theoretischen Verlauf mit deutlich ausgeprägteren Maxima und Minima. Die größten Abweichungen ergeben sich vor und hinter der Rißspitze ( $\phi = 0$ , bzw.  $\phi = \pi$ ). Die Scherkomponente ist für Winkel  $\phi < \pi/2$  zu klein "geraten", während sie für Winkel  $\phi \geq \pi/2$  wie die Tangentialkomponente über dem analytischen Resultat liegt.

Wenn man annimmt, daß die nichtsingulären Beiträge zu den Spannungen durch das Vorhandensein der Kriechzone abgeschirmt werden, also in die T-Effekt-Korrektur (16) einen kleineren Wert " $\sigma^*$ " einsetzt, so lassen sich diese Unzulänglichkeiten korrigieren. Für  $\sigma^* = 37$  MPa erhält man die mit ( $\Delta$ ) gekennzeichneten Kurven in Abb. 19. Die noch vorhandenen Abweichungen in der Nähe der Rißufer ( $\phi = \pi$ ) könnten auf die geringe Ausdehnung der Kriechzone für diese Richtungen zurückzuführen sein.

In Abb. 20 sind die Winkelverteilungen  $\bar{\sigma}_{ij}(\phi, n)$  zur Zeit  $t = 100$  s noch für einen etwas größeren Abstand  $r/a = 3,2 \cdot 10^3$ s von der Rißspitze aufgetragen ( $\sigma^* = 37$  MPa). Sie unterscheiden sich nur unwesentlich von den Resultaten aus Abb. 19.

#### (e) Radiale Abhängigkeit des HRR-Feldes

In Abb. 21 ist die aus FE - Rechnungen gefundene radiale Abhängigkeit  $\sigma_{ij}(r, \phi, t) / \bar{\sigma}_{ij}(\phi, n)$  von Spannungskomponenten zur Zeit  $t = 100$  s und für verschiedene Richtungen  $\phi$  in doppelt logarithmischem Maßstab aufgetragen. Dabei wurden diejenigen Komponenten und Richtungen ausgewählt, die bei der Spannungsmethode von Chan im linear elastischen Fall gute Werte für den SIF lieferten. Der T-Effekt-Korrekturparameter ist jeweils  $\sigma^* = 37$  MPa. Die Steigung der Kurven hängt gemäß Gl. (18) unmittelbar mit dem Kriechexponenten  $n$  zusammen. Die zum Vergleich eingezeichnete Gerade im unteren Teil der Abbildung hat eine Steigung, die genau einem Wert  $n = 3$ , d.h.  $\sigma \sim r^{-1/4}$ , entspricht. Bei den aus den FE-Daten ermittelten Kurven täuscht die zu starke Singularität der Rißspitzenelemente für kleine Abstände von der Rißspitze  $r/a < 10^3$  ein zu kleines  $n$  zwischen 1 und 2 vor. In dem daran anschließenden Bereich zwischen  $r/a = 10^3$

und  $2 \cdot 10^{-2}$  erhält man einen erwarteten Wert um  $n=3$ , ehe die Kurven wieder kleinere Werte  $n$  liefern und sich der Übergang in das elastische Feld außerhalb der Kriechzone vollzieht.

Approximiert man die Kurven in Abb. 21 im Bereich  $10^{-3} < r/a < 2 \cdot 10^{-2}$  durch Geraden, so erhält man aus den Achsenabschnitten Werte für die zeit- und lastabhängige Amplitudenfunktion  $A$  ( $t = 100$  s), die von derselben Größenordnung sind wie die aus Gl. (20) berechneten. Die Ergebnisse im einzelnen sind Tab. 3 zu entnehmen.

Im folgenden Abschnitt wird das Problem als boundary-layer (B L) Problem formuliert. Dadurch werden höhere nichtsinguläre Terme des Spannungsfeldes (T - Effekt) ausgeschlossen. Ein anzupassender Korrekturparameter  $\sigma^*$  ist somit nicht erforderlich.

### III.3 Das HRR-Feld des äquivalenten boundary-layer Problems

#### (a) FE-Strukturen

Das FE-Netz (siehe hierzu Abb. 22) des BL- Problems besteht insgesamt aus 609 Knoten und 192 Elementen. Für  $r/a \leq 1,92 \cdot 10^{-1}$  ist die Struktur dieselbe wie im Fall der CC-Probe (cf. Abb. 15 und Tabelle 2), für größere Radien schließen sich noch weitere konzentrische Halbkreise um die Rißspitze bis  $r/a = 1,77$  an. Dort werden die Verschiebungen des linear-elastischen Nahfeldes mit  $K_I = 32,47 \text{ MPa m}^{1/2}$  vorgegeben. Durch diese Erweiterung der Struktur soll der Kriechzone genügend "Raum" zur zeitlichen Ausdehnung gegeben werden. Bei den Elementen an der Rißspitze wurden drei Verschiebungsansätze mit unterschiedlichen Stärken in der Singularität auf ihre Eignung zur Beschreibung des HRR-Feldes hin untersucht:

1)

$$u_i(r) = A + B\sqrt{r} + Cr$$

mit unterschiedlichen Auslenkungen der Rißspitzenknoten, d.h.:

$$\sigma = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{\sqrt{r}} + \gamma$$

2)

$$u_i(r) = A + B\sqrt{r} + Cr$$

mit identischen Auslenkungen der Rißspitzenknoten, d.h.

$$\sigma = \frac{\beta}{\sqrt{r}} + \gamma$$

3)

$$u_i(r) = A + Br + Cr^2$$

mit unterschiedlichen Auslenkungen der Rißspitzenknoten, d.h.:

$$\sigma = \frac{\alpha}{r} + \beta + \gamma r$$

Die Koeffizienten  $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$  sind jeweils Funktionen von  $\phi$ .

Diese Ansätze ergeben sich aus gewöhnlichen 8-Knoten-Serendipity-Elementen, indem man die Kollabierungstechnik sowie in den ersten beiden Fällen noch zusätzlich die Viertelpunktstechnik anwendet.

#### (b) Zeitschrittsteuerung und Konvergenzparameter

Aufgrund gleicher Struktur in einem weiten Bereich um die Rißspitze, gleicher Lastparameter und Materialparameter und Wahl gleicher Konvergenzparameter (PTOL, CETOL) ergeben sich nur geringfügige Unterschiede in der Wahl des Zeitinkrementes unter den drei Ansätzen des boundary-layer-Problems und im Vergleich zu den Verhältnissen der CC-Probe.

In Abb. 16 ist repräsentativ die Zeitschrittsteuerung für den Fall des ersten Ansatzes mit aufgetragen (gestrichelte Kurve).

#### (c) Zeitliche Ausbreitung der Kriechzone

In Abb. 23 ist die Kriechzone für das boundary-layer-Problem zu 5 verschiedenen Zeiten dargestellt. Da sich die Kriechzone bei den betrachteten Zeiten schon weit über die Elemente des Rißspitzenblocks hinaus ausgebreitet hat, sind die Kriechzonen in diesen Fällen für alle drei Ansätze identisch. Im Unterschied zur CC-Probe ist die Ausdehnung hier geringer und eine Vorzugsrichtung für die Ausbreitung nicht so stark ausgeprägt. Auch hier verläuft die Ausbreitung selbstähnlich und weitgehend zeitlich proportional ( $n = 3$ ).

#### (d) Winkelabhängigkeit des HRR-Feldes

In den Abb. 24 a - d sind jeweils die aus FE-Resultaten bestimmten Winkelfunktionen  $\bar{\sigma}_e(\phi, n)$ ,  $\bar{\sigma}_{\phi\phi}(\phi, n)$ ,  $\bar{\sigma}_{rr}(\phi, n)$  und  $\bar{\sigma}_{r\phi}(\phi, n)$  zur Zeit  $t = 100$  s und für  $r/a = 1,4 \cdot 10^{-3}$  aufgetragen und mit den entsprechenden tabellierten Werten, die als durchgezogene Kurven dargestellt sind, verglichen. Die Übereinstimmung ist in allen Fällen gut, wobei in die Auswertung kein Korrekturparameter  $\sigma^\circ$  einging. Statt einen freien Parameter anzupassen, sollte man von vorneherein dafür sorgen, daß keine nichtsingulären Beiträge in den FE - Spannungswerten auftreten. In der Nähe der Rißufer streuen die Werte jeweils stark, insbesondere in dem Falle, bei dem die Rißspitzenknoten identische Auslenkungen haben. Fall (1) zeigt noch die beste Übereinstimmung mit den theoretischen Resultaten. Die beobachteten Abweichungen zeigen dieselben Tendenzen wie bei der CC - Probe.

(e) Radiale Abhängigkeit des HRR-Feldes

In Abb. 25 a) - c) ist die radiale Abhängigkeit des Spannungsfeldes jeweils für die drei Fälle sowie für unterschiedliche Wahl von Spannungskomponenten und Richtung aufgetragen. Im Unterschied zur CC-Probe streuen die einzelnen Kurven hier stärker. Die Steigungen im Zwischenbereich entsprechen den Werten des Kriechexponenten  $n$  von 2,5 - 3,5. Wie bei der CC-Probe liefert die über die Komponenten und Richtungen "gemittelte" maximale Äquivalent-Spannung die beste Übereinstimmung mit den analytischen HRR-Ergebnissen. Die Werte für  $n$  liegen zwischen 3,2 für Fall (3) und 3,4 für Fall (2).

Für die Amplitudenfunktion  $A(t)$  erhält man geringere Werte, so daß auch sie besser mit dem analytischen Resultat aus (20) übereinstimmen (cf. Tab. 3).

#### IV. Zusammenfassung und Ausblick

Sowohl das linear elastische Rißspitzenfeld als auch das HRR-Feld lassen sich mit der Methode der Finiten Elemente berechnen, sofern die Umgebung der Rißspitze hinreichend fein mit Elementen belegt wird. Die Ergebnisse sind im elastischen Fall in ausgezeichneter, bei Norton-Verhalten in guter Übereinstimmung mit analytischen, bzw. halbanalytischen Rechnungen.

Die HRR - Feld - Berechnungen lassen sich noch weiter verbessern, wenn man Elemente verwendet, in die die korrekte Singularität  $r^{-1/(n+1)}$  des Spannungsfeldes bereits eingebettet ist. In der gegenwärtigen Version des FE-Programmes ist dies nicht ohne weiteres möglich. Die Verwendung einer falschen Singularität führt gewissermaßen zu einer "numerischen" Prozezone, innerhalb der die FE-Ergebnisse zu verwerfen sind. Eine feinere Modellierung des Bereichs um die Rißspitze würde diesen Bereich zwar verkleinern, jedoch werden dann gleichzeitig die Rißspitzenelemente so klein, daß schon für kurze Kriechzeiten die Verschiebungen mit den Elementabmessungen vergleichbar werden und somit der ganze FE-Formalismus fragwürdig wird. Numerische Unzulänglichkeiten des FE-Formalismus haben zur Folge, daß nur unter gewissen bevorzugten Richtungen die theoretisch vorhergesagte radiale Abhängigkeit vorliegt.

In weitergehenden Untersuchungen soll das Rißspitzenfeld bei komplexem viskoplastischen Materialverhalten bestimmt werden. Hier sind i.a. keine analytischen Lösungen bekannt, das Stoffgesetz geht aber bei geeigneter Wahl der Materialparameter in ein Nortongesetz über, so daß die obigen Rechnungen als Referenz benutzt werden können.

Die vorliegende Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 167 "Hochbelastete Brennräume - stationäre Gleichdruckverbrennung" gefördert.

**Tabelle 1**

Verfahren	Wahl von Komponente und Winkel		$K_I$	Fehler in % *
Spannungsmethode	$\sigma_{yy}$	$\phi \approx 0$	1,815	- 0,06
	$\sigma_{yy}$	$\phi \approx \pi$	1,818	+ 0,11
	$\sigma_{xy}$	$\phi \approx \pi$	1,817	- 0,06
	$(\sigma_{xx})$	$\phi \approx 0$	1,714	- 5,62)
Verschiebungsmethode	$u_y$	$\phi = \pi$	1,816	+ 0
	$u_y$	$\phi = \pi$	1,832	+ 0,88
	$u_x$	$\phi = \pi$	1,815	- 0,06
	$(u_x)$	$\phi = 0$	1,722	- 5,18)
direkte Berechnung aus Viertelpunktsknotenelementen	$u_y$	$\phi = \pi$	1,8166	+ 0,03
	$u_y$	$\phi = \pi$	1,8161	+ 0,01
	$u_x$	$\phi = \pi$	1,8174	+ 0,08
	$u$	$\phi = 0$	1,8158	- 0,01
J-Integral			1,8156	- 0,02

\*Tabellenwert: 1,8160 /4/

**Tabelle 2**

Radien  $r/a$  der konzentrischen Elementringe um die Rißspitze (Eckknoten)

Ringnr.	Radius
1	1,30 $10^{-3}$
2	1,95 $10^{-3}$
3	2,92 $10^{-3}$
4	4,38 $10^{-3}$
5	6,57 $10^{-3}$
6	9,85 $10^{-3}$
7	1,48 $10^{-2}$
8	2,34 $10^{-2}$
9	3,85 $10^{-2}$
10	6,49 $10^{-2}$
11	1,11 $10^{-1}$
12	1,92 $10^{-1}$
13	3,33 $10^{-1}$
14	5,81 $10^{-1}$
15	1,01
16	1,77

Die Elementringe 13 bis 16 wurden für das BL - Problem zusätzlich in das FE - Netz aufgenommen.

**Tabelle 3**

Amplitudenwerte des HRR-Feldes ( $n = 3, \alpha = 10^{-7} \text{s}^{-1}$ ) für  $K_I = 32,47 \text{ MPa m}^{\frac{1}{2}}$   
und  $t = 100 \text{ s}$  (in  $\text{MPa m}^{\frac{1}{2}}$ )

theoretisch*		50,7			
numerisch	CC	BL1	BL2	BL3	
	57,9	48,5	49,1	48,9	
	60,2	52,3	52,3	51,4	
	62,2	57,7	49,6	59,6	
	54,9	41,7	42,0	46,7	

\* analytisches Resultat gemäß Gl.20

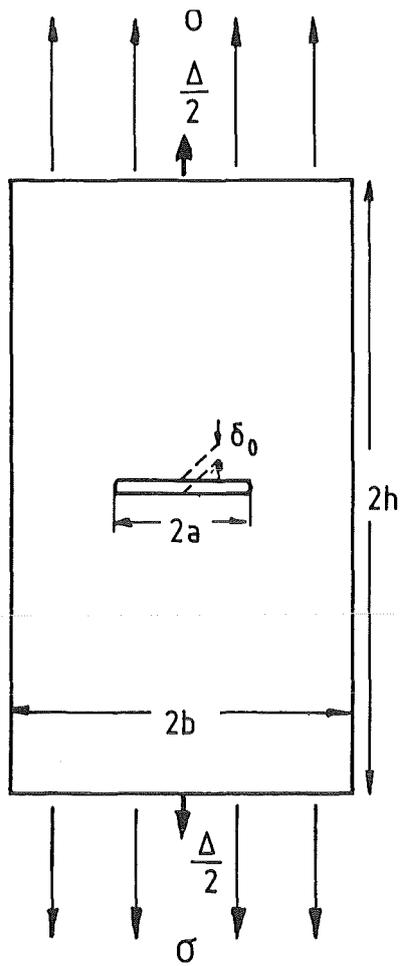
## Literaturverzeichnis

- /1/ Hibbit, Karlsson & Sorensen, ABAQUS User's Manual, Vers. 4.5, 1985.
- /2/ Y.N. Rabatnov, "Creep Problems in Structural Members", North Holland, Amsterdam, 1969.
- /3/ G.R. Irwin, J. Appl. Mech. 24 (1957), 361.
- /4/ H. Tada, P.C. Paris, G.R. Irwin, "The Stress Analysis of Cracks, Handbook", Del. Research Corp., St. Louis, 1974.
- /5/ H.G. Hahn, "Bruchmechanik", Teubner, Stuttgart, 1976.
- /6/ R.S. Barsoum, Int. J. for Num. Meth. in Engng., 11 (1977), 85.
- /7/ S.K. Chan, I.S. Tuba, W.K. Wilson, Engng. Fract. Mech. 2 (1970), 1.
- /8/ J. R. Rice, J. of Appl. Mech. 35 (1968), 379
- /9/ C. Mattheck, H. Moldenhauer, Int. J. Fract., 34 (1987), 209.
- /10/ T. Fett, H. Stamm, G. Walz, in Vorbereitung
- /11/ S.G. Larsson, A.J. Carlsson, J. Mech. Phys. Solids 21 (1975), 263.
- /12/ J.W. Hutchinson, J. Mech. Phys. Solids 16 (1968), 13.
- /13/ H. Riedel, J.R. Rice, Fracture Mechanics ASTM STP 700 (1980), 112.
- /14/ C.F. Shih, Brown University Report Nr. MRL E / 147 (1983)
- /15/ J.W. Hutchinson, J. Mech. Phys. Solids 16 (1968), 337.
- /16/ J.R. Rice, G. Rosengren, J. Mech. Phys. Solids 16 (1971), 435.
- /17/ J.E. Akin, Int. J. Num. Meth. in Engng. 10 (1976), 1249.

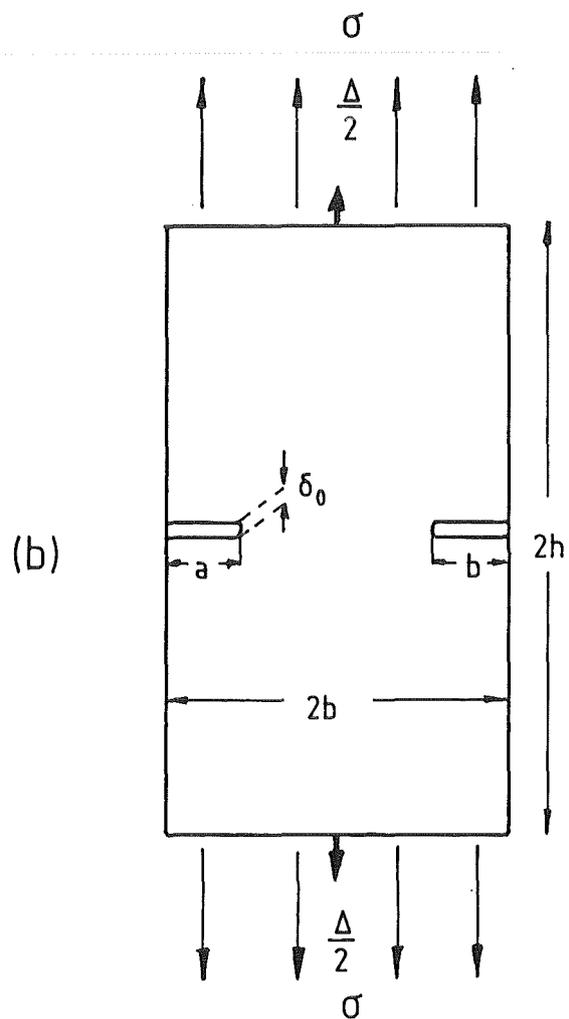
### Abbildungsverzeichnis

- 1 Platte mit Innenriß (CC) und mit beidseitigem Außenriß (DEC) unter Zugbelastung - Geometrie und Bezeichnungen
- 2 Bipolar - und Polarkoordinaten der CC - Geometrie
- 3 Formfunktion  $F(a/b)$  für CC - und DEC - Proben unter Modus - I - Beanspruchung
- 4 Winkelfunktionen  $f_{ij}$  des linear elastischen Rißspitzenfeldes
- 5 FE - Netz für Platte mit Innenriß
- 6 Bestimmung des Spannungsintensitätsfaktors nach der Spannungsmethode für ausgewählte Komponenten und Richtungen
- 7 Bestimmung des Spannungsintensitätsfaktors nach der Verschiebungsmethode für ausgewählte Komponenten und Richtungen
- 8 Bestimmung des Spannungsintensitätsfaktors aus den Knotenverschiebungen der Rißspitzenelemente für ausgewählte Komponenten und Richtungen
- 9 FE - Netz für DEC - Geometrie (halbe Struktur), bei unterschiedlicher Belastung der beiden Rißufer
- 10 Gewichtsfunktion für symmetrische und antisymmetrische Belastung einer DEC - Probe
- 11 Rißuferverschiebung für Innenriß und Griffith - Riß unter Zugbeanspruchung
- 12 Reproduzierung der Winkelfunktion  $f_{xx}$ ,  $f_{yy}$  und  $f_{xy}$  des linear elastischen Rißspitzenfeldes mit der FE - Methode
- 13 Radiale Abhängigkeit der Spannungskomponenten vor der Rißspitze aus der FE - Methode

- 14 Winkelfunktionen  $\bar{\sigma}_{ij}(\phi, n)$  des HRR - Feldes für  $n = 3$ , ESZ, Modus - I - Belastung
- 15 FE - Netz in der Umgebung der Rißspitze (für Kriechprobleme)
- 16 Zeitschrittsteuerung des FE.- Programms ABAQUS für das Kriechproblem bei CC - Geometrie und in der Boundary - Layer - Formulierung
- 17 Zeitliche Ausbreitung der Kriechzone (für  $n = 3$ , CC - Geometrie, ESZ, Modus - I - Belastung)
- 18 Reproduzierung der Winkelfunktionen des linear elastischen Rißspitzenfeldes aus dem Kriechproblem für kleine Zeiten ( $t = 5 \cdot 10^{-2}$  s), ESZ
- 19 Reproduzierung der Winkelfunktion  $\bar{\sigma}_{ij}(\phi, n)$  des HRR - Feldes aus der Langzeitlösung des Kriechproblems ( $t = 100$  s) für CC - Geometrie ( $r/a = 1,4 \cdot 10^{-3}$ ), ESZ, Modus - I - Belastung
- 20 Wie Abbildung 19 nur  $r/a = 3,2 \cdot 10^{-3}$
- 21 Reproduzierung der radialen Abhängigkeit des HRR - Feldes aus der Langzeitlösung des Kriechproblems für CC - Geometrie,  $n = 3$  ( $t = 100$  s)
- 22 FE - Netz des Boundary - Layer Problems
- 23 Zeitliche Ausbreitung der Kriechzone (für  $n = 3$ , ESZ, Modus - I - Belastung, Boundary - Layer - Geometrie)
- 24 Reproduzierung der Winkelfunktionen  $\bar{\sigma}_{ij}(\phi, n)$  des HRR - Feldes aus der Langzeitlösung des Kriechproblems für die Boundary - Layer Geometrie mit drei verschiedenen Verschiebungsansätzen ( $r/a = 1,4 \cdot 10^{-3}$ ,  $n = 3$ , ESZ)
- 25 Radiale Abhängigkeit des HRR - Feldes für das Boundary - Layer Problem mit den drei verschiedenen Verschiebungsansätzen

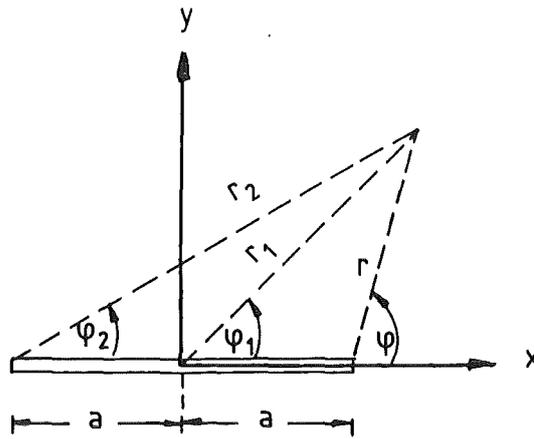


(a)

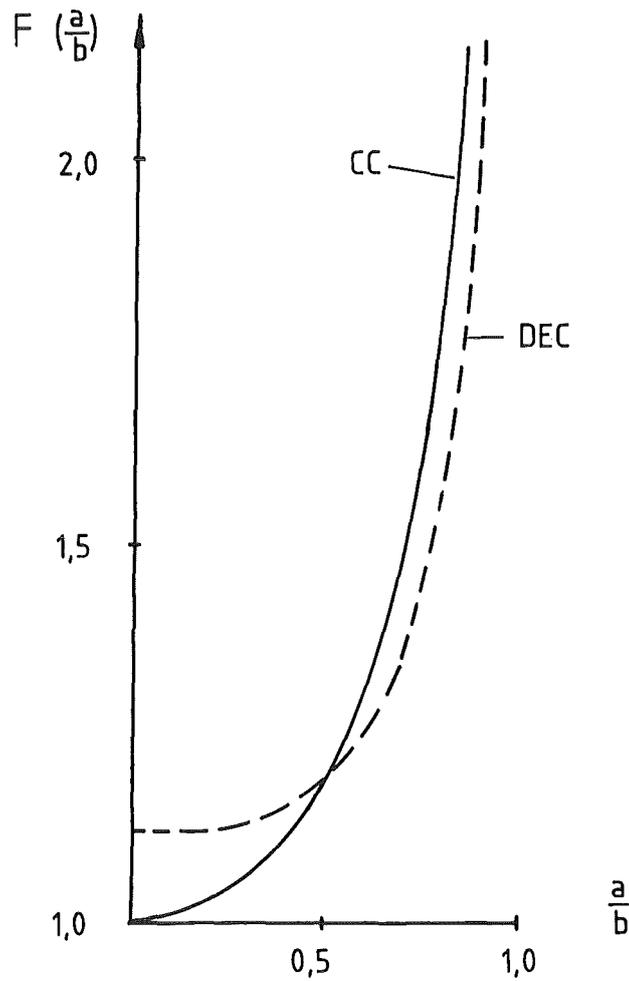


(b)

Abb.1 Platte mit Innenriß (a) und mit beidseitigem Außenriß (b) unter Zugbelastung - Geometrie und Bezeichnungen



**Abb.2** Bipolarkoordinaten  $(r, \varphi, r_2, \varphi_2)$  und Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  der CC-Geometrie. (Für die DEC-Geometrie werden die Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  analog definiert.)



**Abb.3** Formfunktion  $F(\frac{a}{b})$  für CC- und DEC-Geometrie unter Modus-I-Beanspruchung

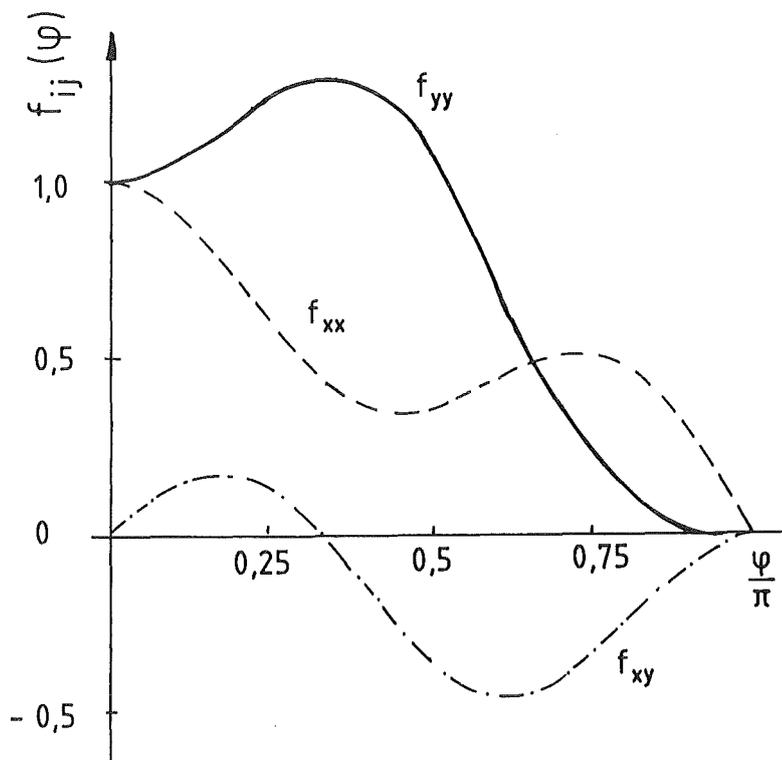
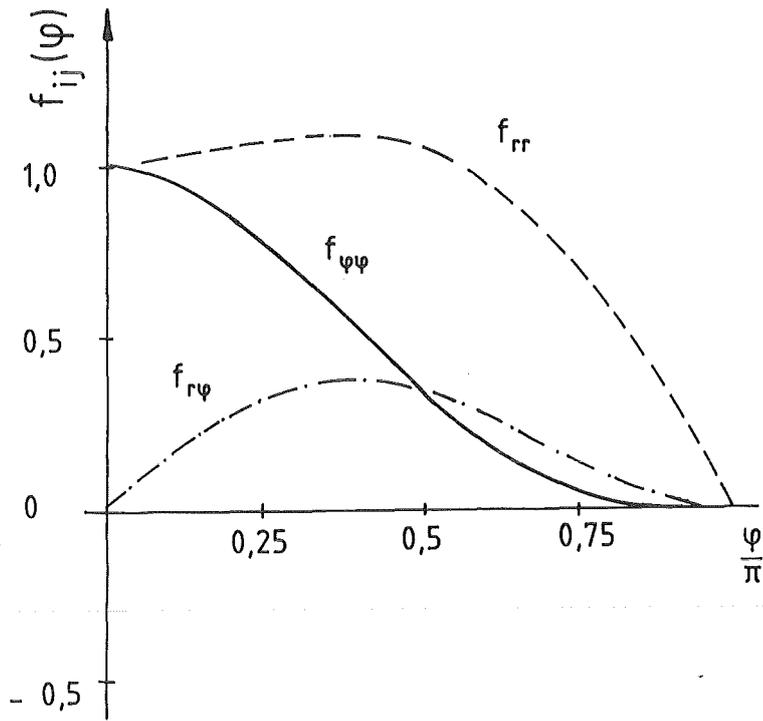


Abb.4 Winkelfunktionen  $f_{ij}$  des linear elastischen Rißspitzenfeldes

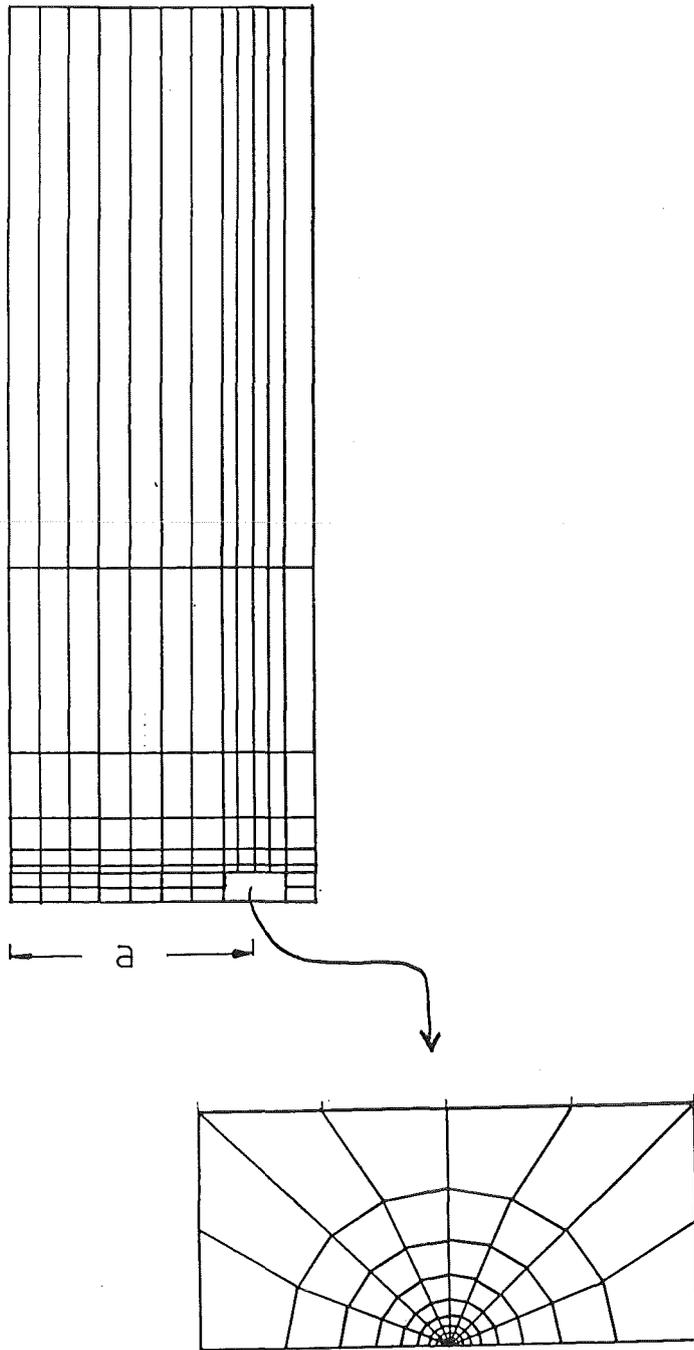


Abb.5 FE-Netz für Platte mit Innenriß ( $\frac{a}{b} = 0,8$ )

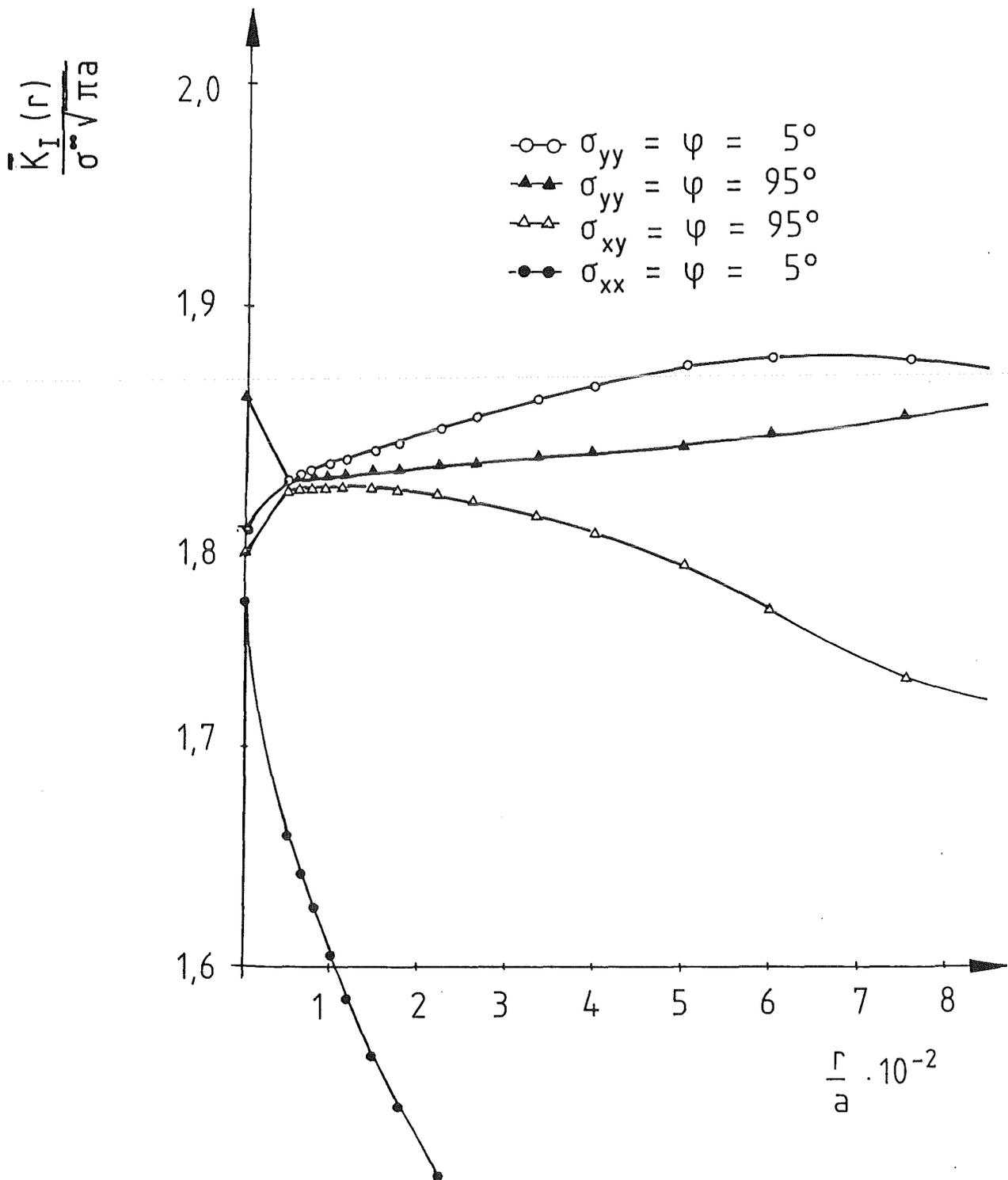
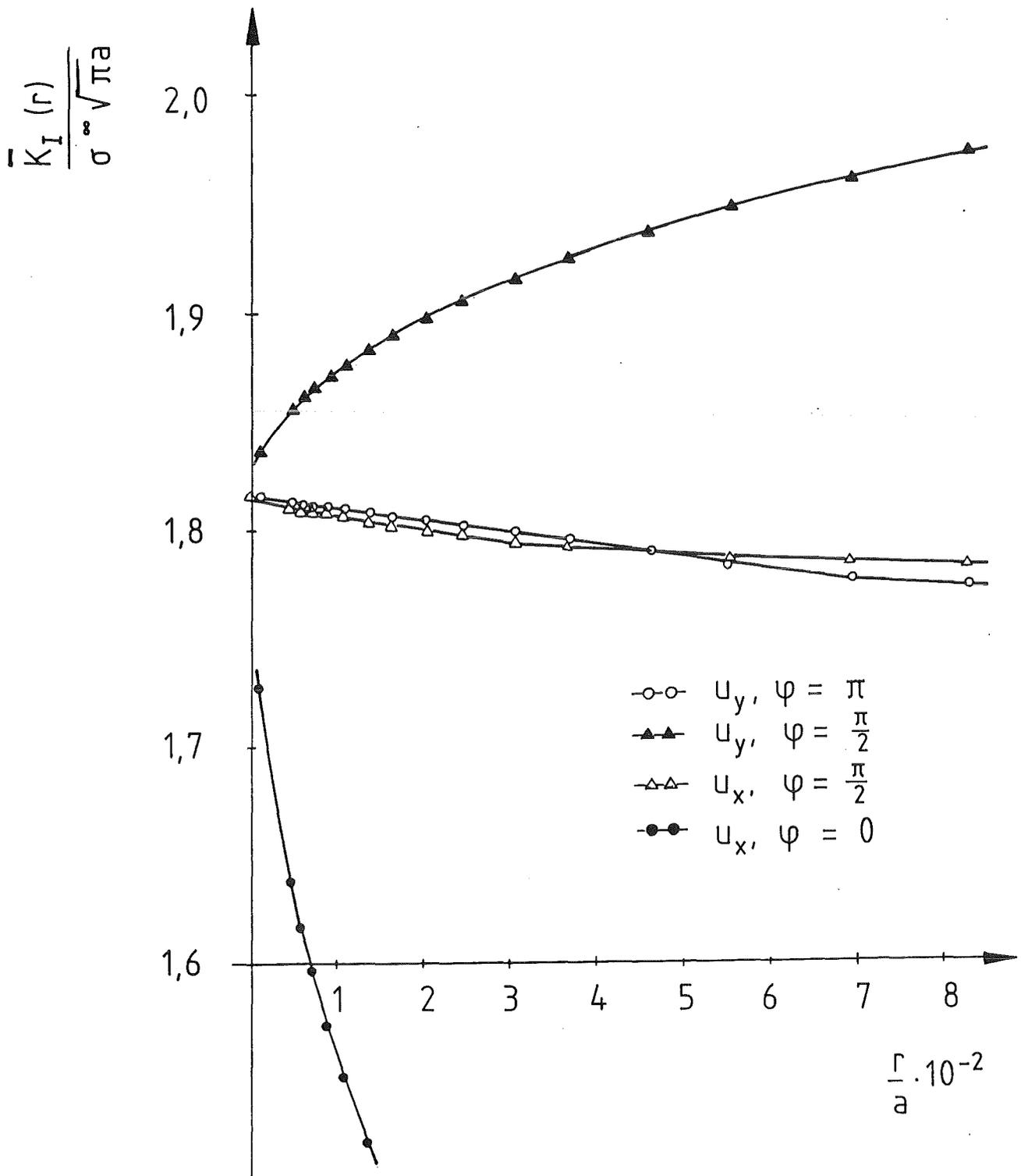


Abb.6 Bestimmung des Spannungsintensitätsfaktors nach der Spannungsmethode für ausgewählte Komponenten und Richtungen.



**Abb. 7** Bestimmung des Spannungsintensitätsfaktors nach der Verschiebungsmethode für ausgewählte Komponenten und Richtungen.

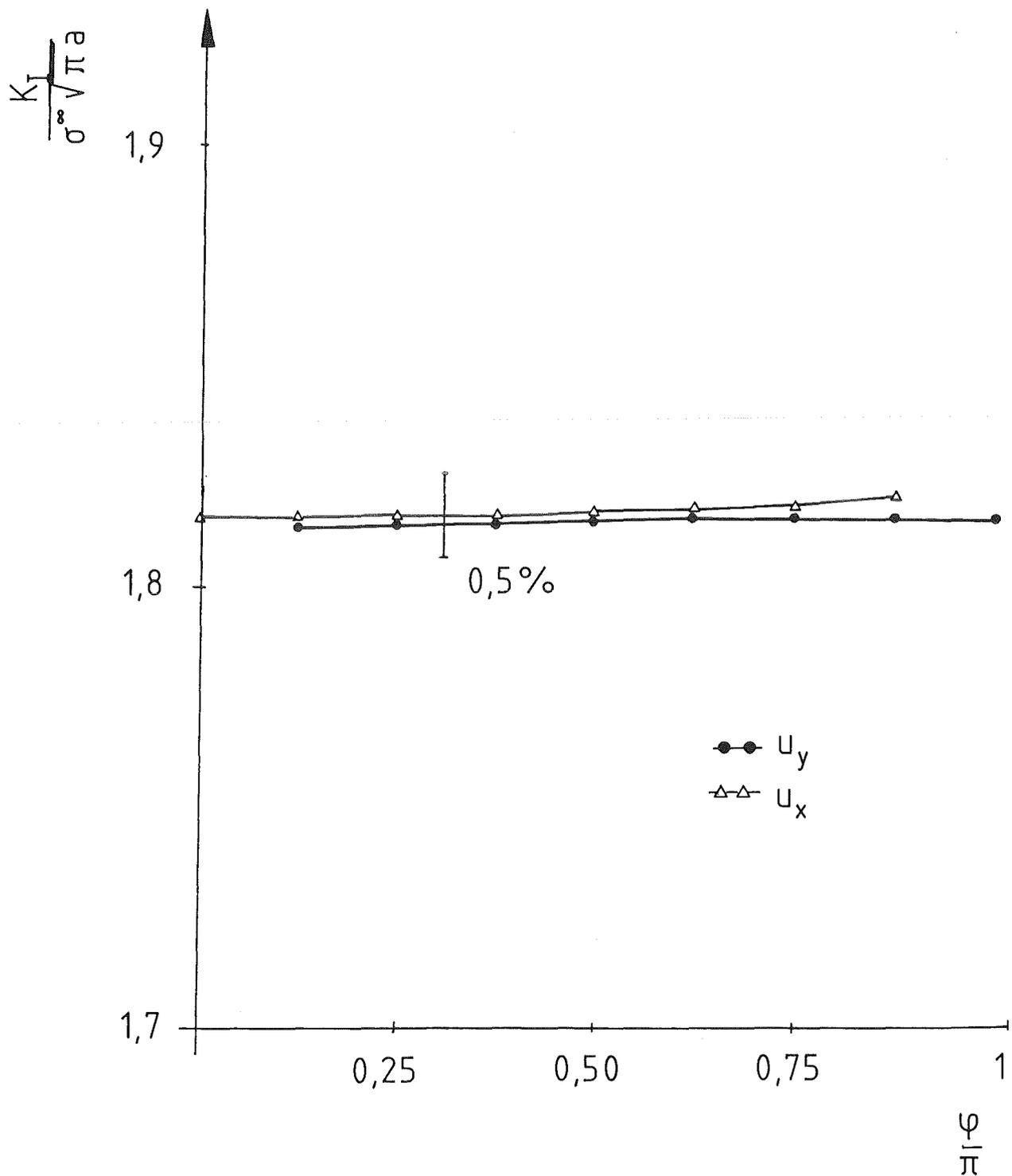


Abb. 8 Bestimmung des Spannungsintensitätsfaktors aus den Knotenverschiebungen der Rißspitzenelemente für ausgewählte Komponenten und Richtungen.

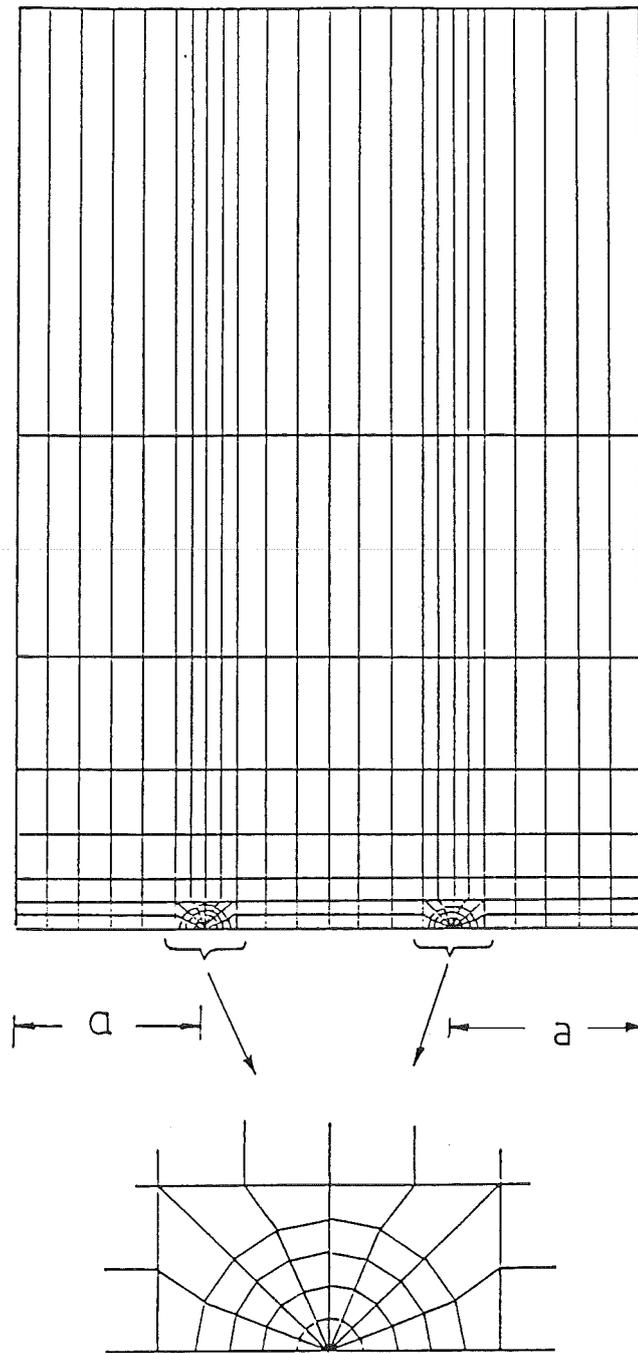


Abb. 9 FE-Netz für DEC-Geometrie ( $\frac{a}{b} = 0,6$ )  
 bei unterschiedlicher Belastung der beiden  
 Rißufer

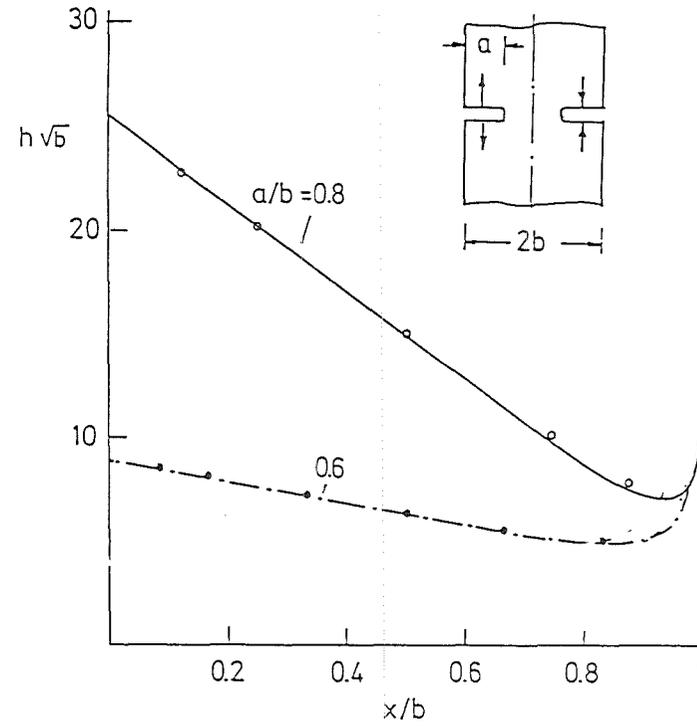
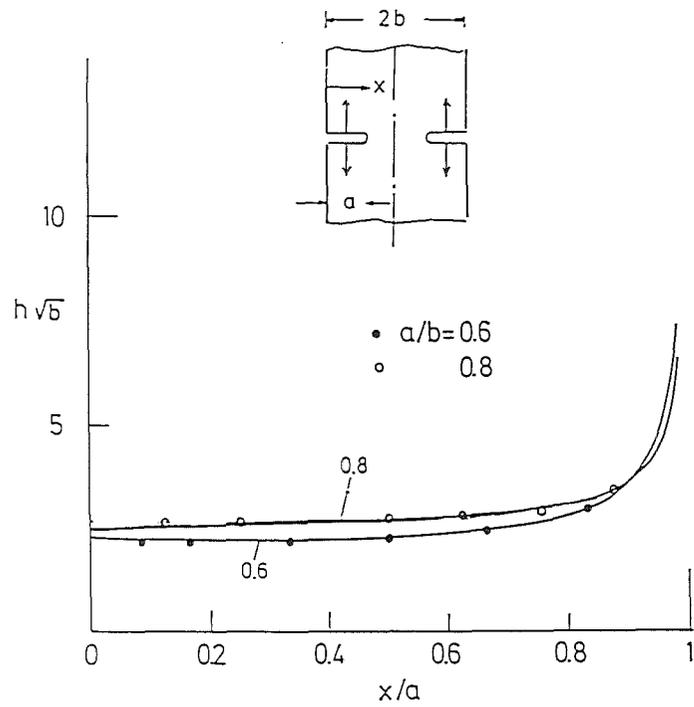


Abb.10 Gewichtsfunktion für symmetrische (links) und antisymmetrische (rechts) Belastung einer DEC-Probe

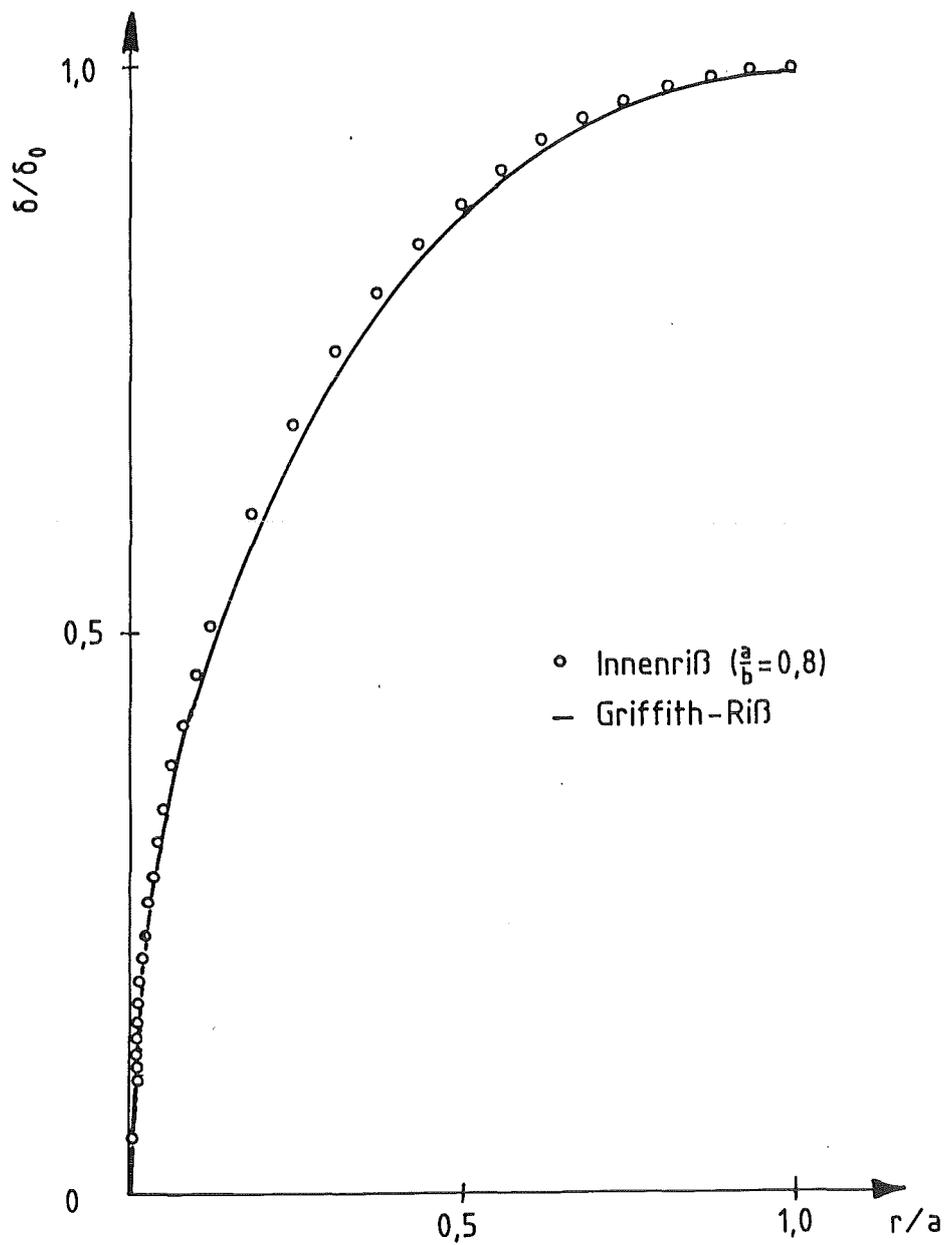
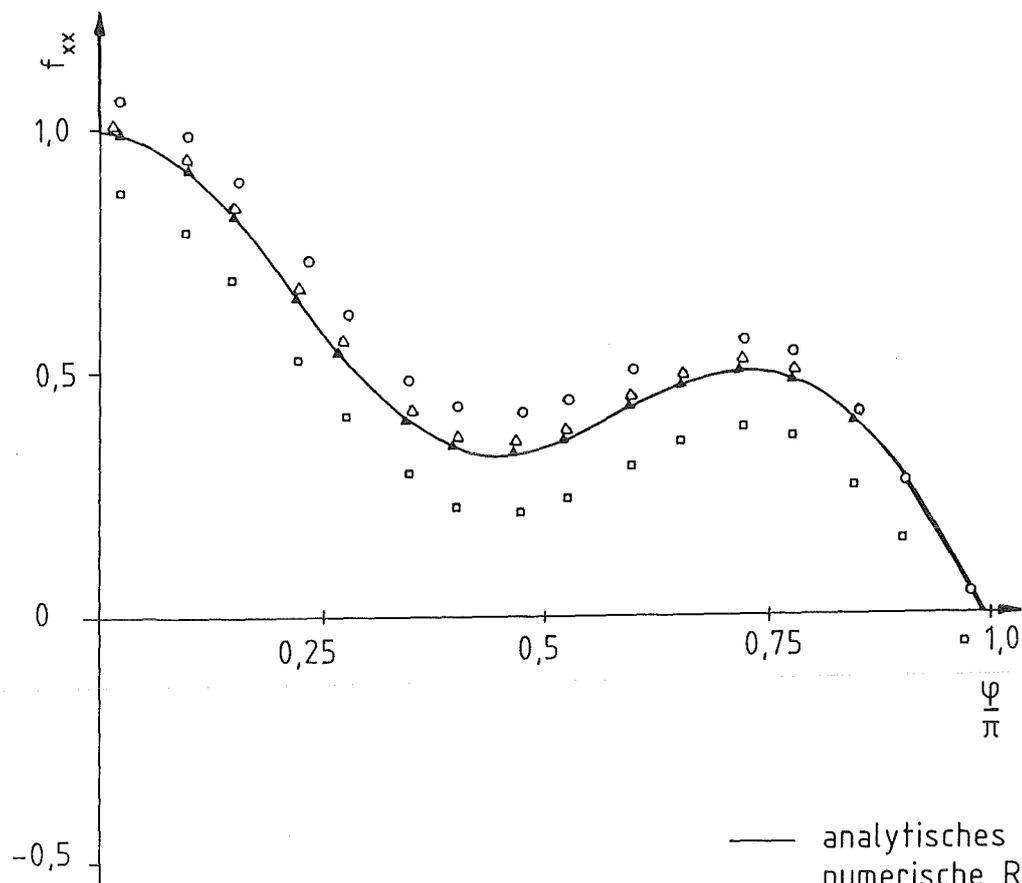
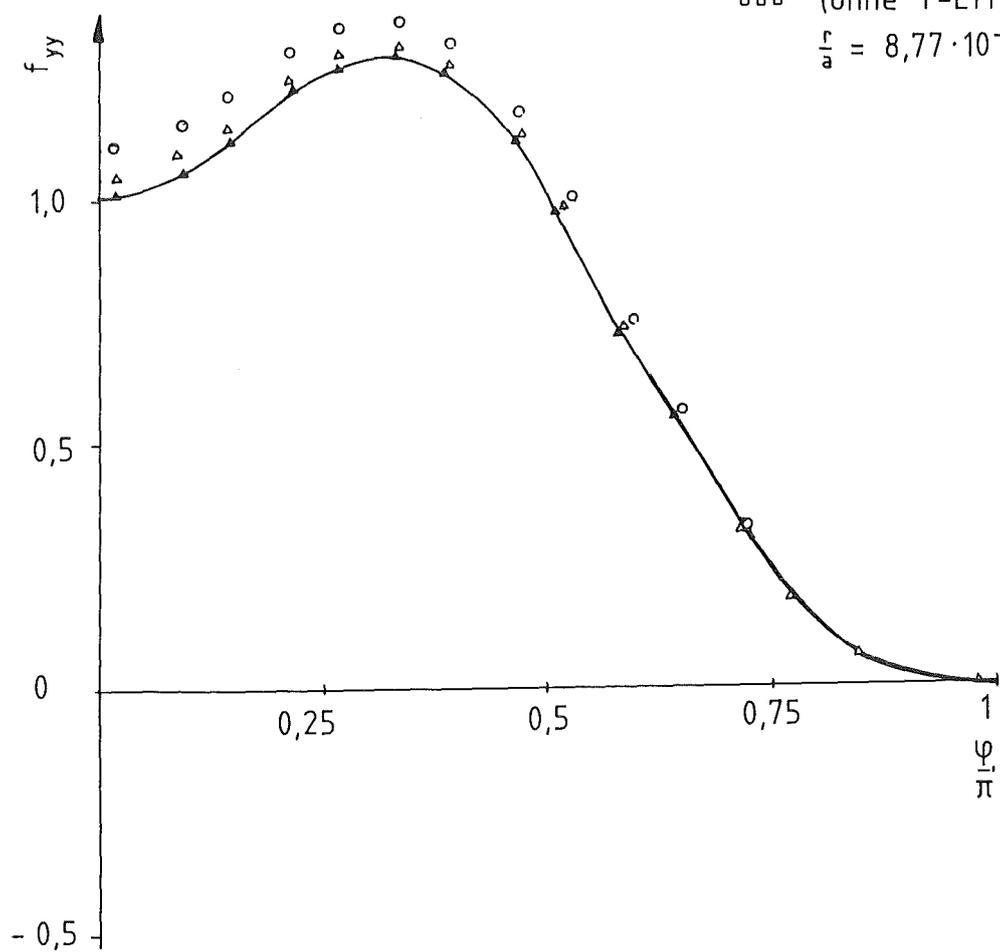


Abb.11 Rißuferverschiebung für Innenriß ( $\frac{a}{b} = 0,8$ ) und Griffith-Riß unter Zugbeanspruchung.



- analytisches Resultat
- ▲ ▲  $\frac{r}{a} = 8,77 \cdot 10^{-3}$
- ● ●  $\frac{r}{a} = 4,43 \cdot 10^{-2}$
- ○  $\frac{r}{a} = 0,139$
- □ (ohne T-Effekt - Korrektur)
- ▲  $\frac{r}{a} = 8,77 \cdot 10^{-3}$



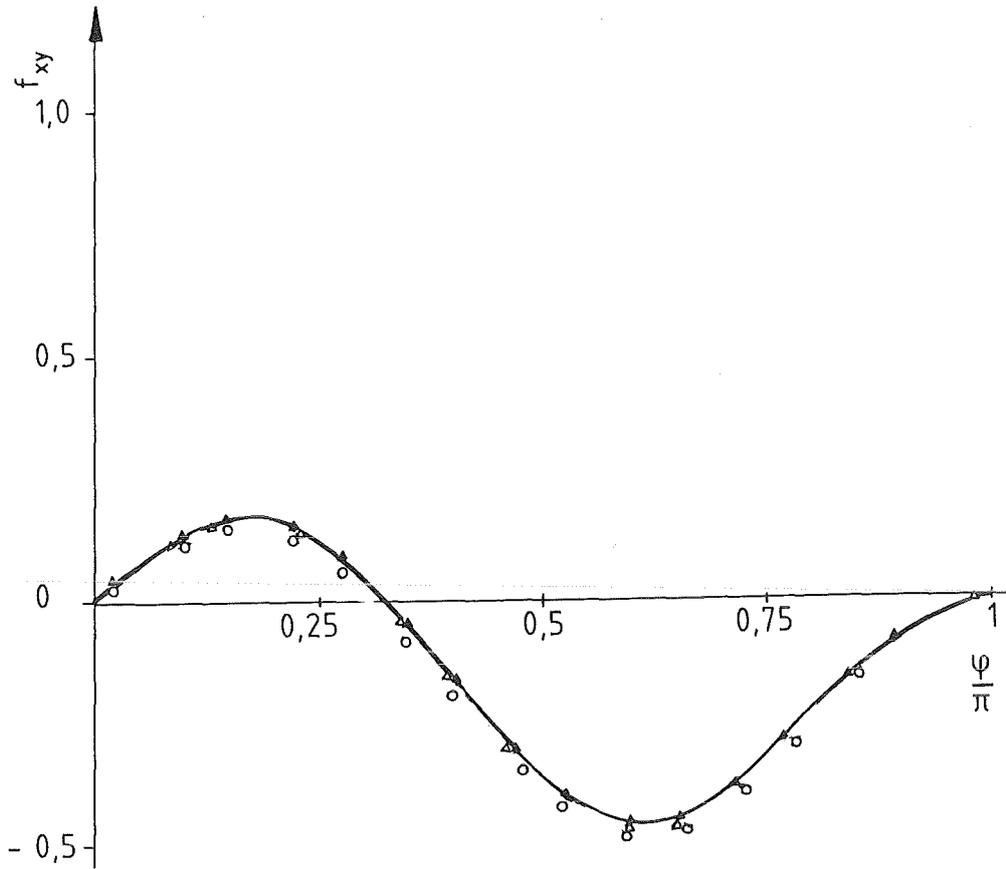


Abb. 12 Reproduzierung der Winkelfunktionen  $f_{xx}$ ,  $f_{yy}$  und  $f_{xy}$  des linear elastischen Rißspitzenfeldes mit der FE-Methode.

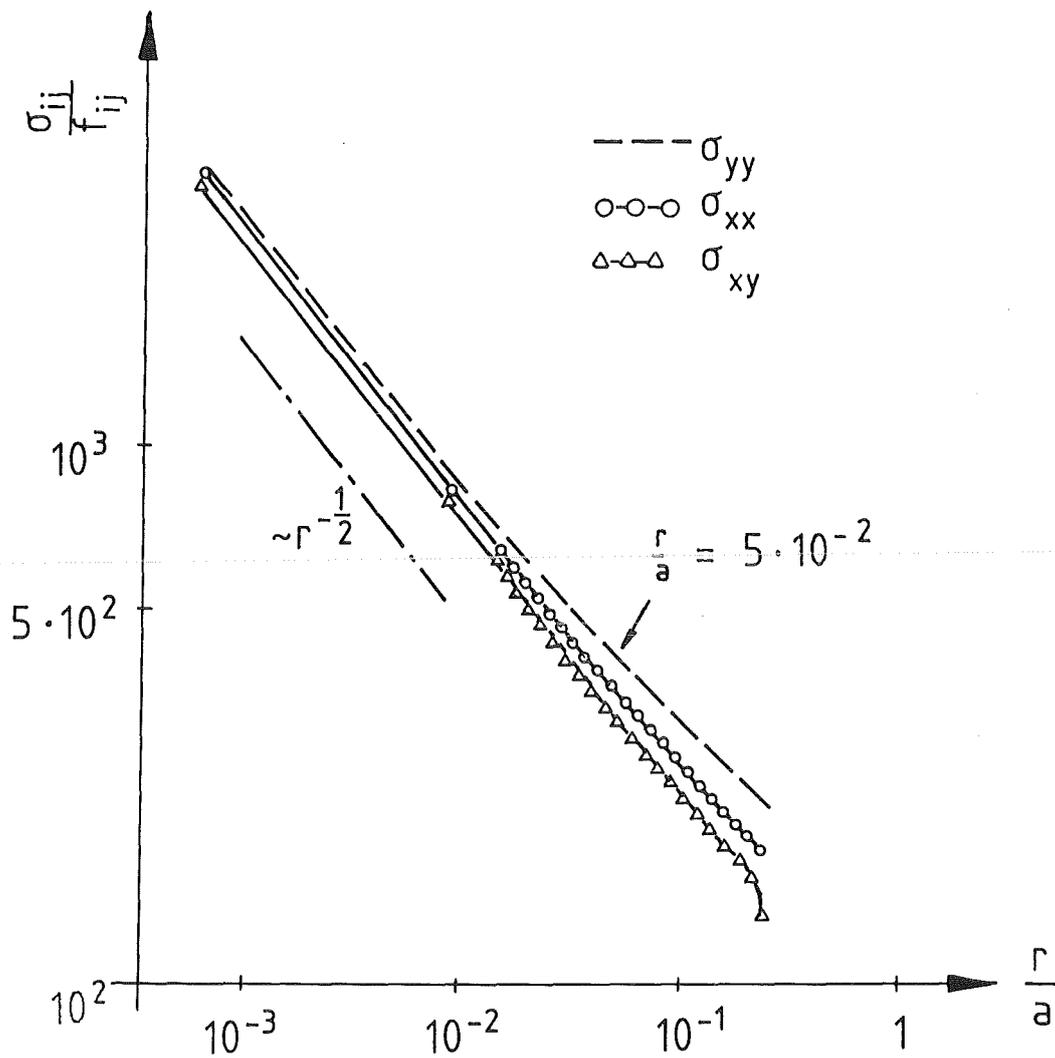


Abb.13 Radiale Abhängigkeit der Spannungskomponenten vor der Riβspitze ( $\varphi \approx 0$ ) aus der FE - Methode. Die Steigung der strichpunktierten Geraden entspricht dem theoretischen  $r^{-1/2}$  - Verhalten des linear elastischen Riβspitzenfeldes.

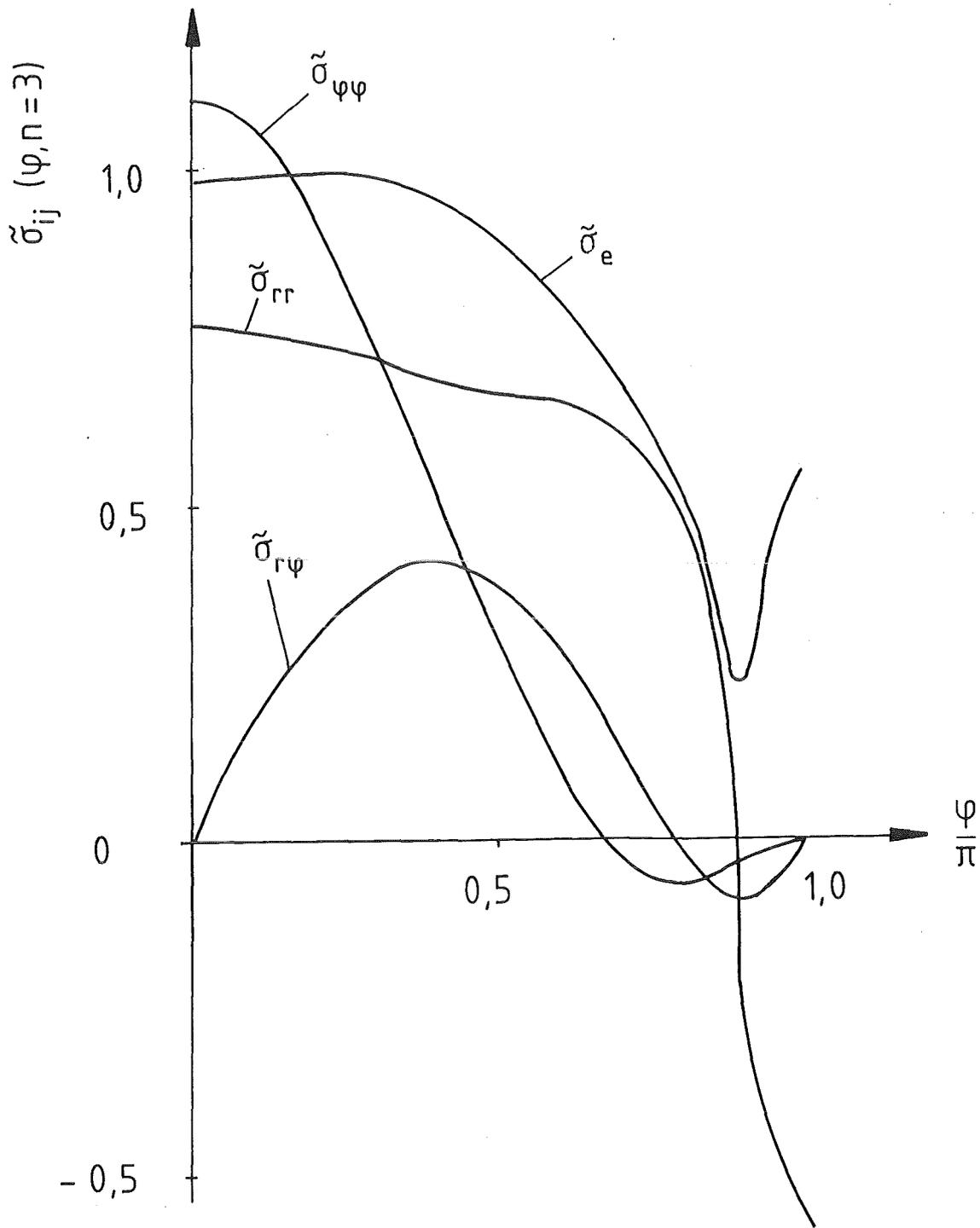


Abb. 14 Winkelfunktionen  $\tilde{\sigma}_{ij} (\varphi, n)$  des HRR-Feldes für  $n=3$ , ESZ, Modus-I-Belastung.

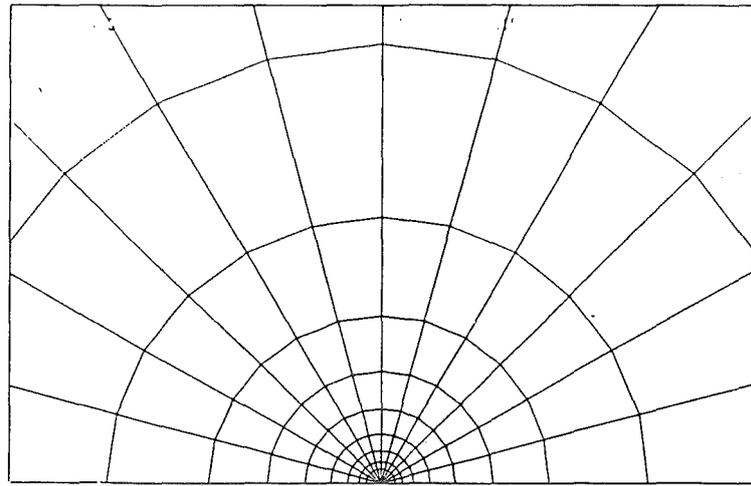


Abb. 15 FE-Netz in der Umgebung der Rißspitze  
(für Kriechprobleme)

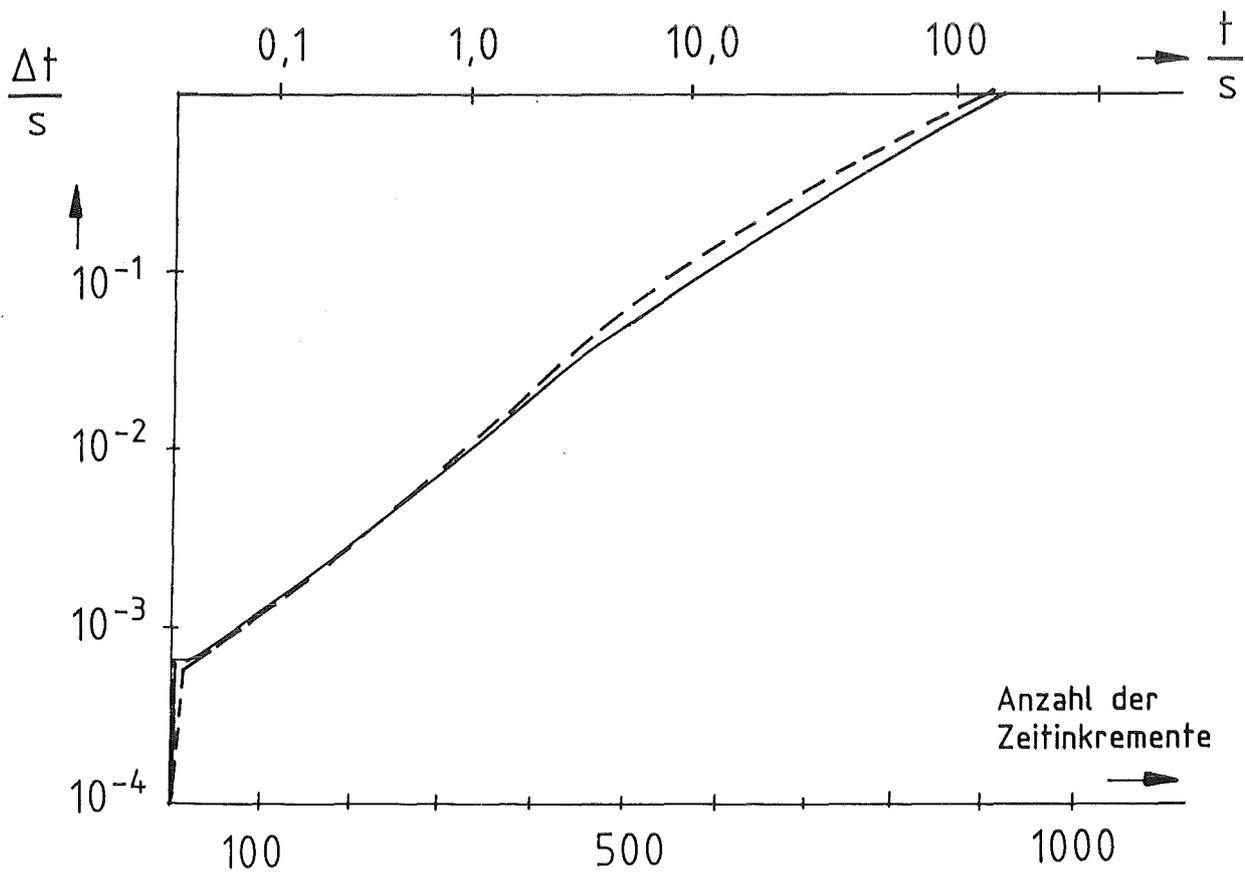


Abb. 16 Zeitschrittsteuerung des FE - Programms ABAQUS  
für das Kriechproblem bei CC-Geometrie (-)  
und in der boundary-layer Formulierung (--)

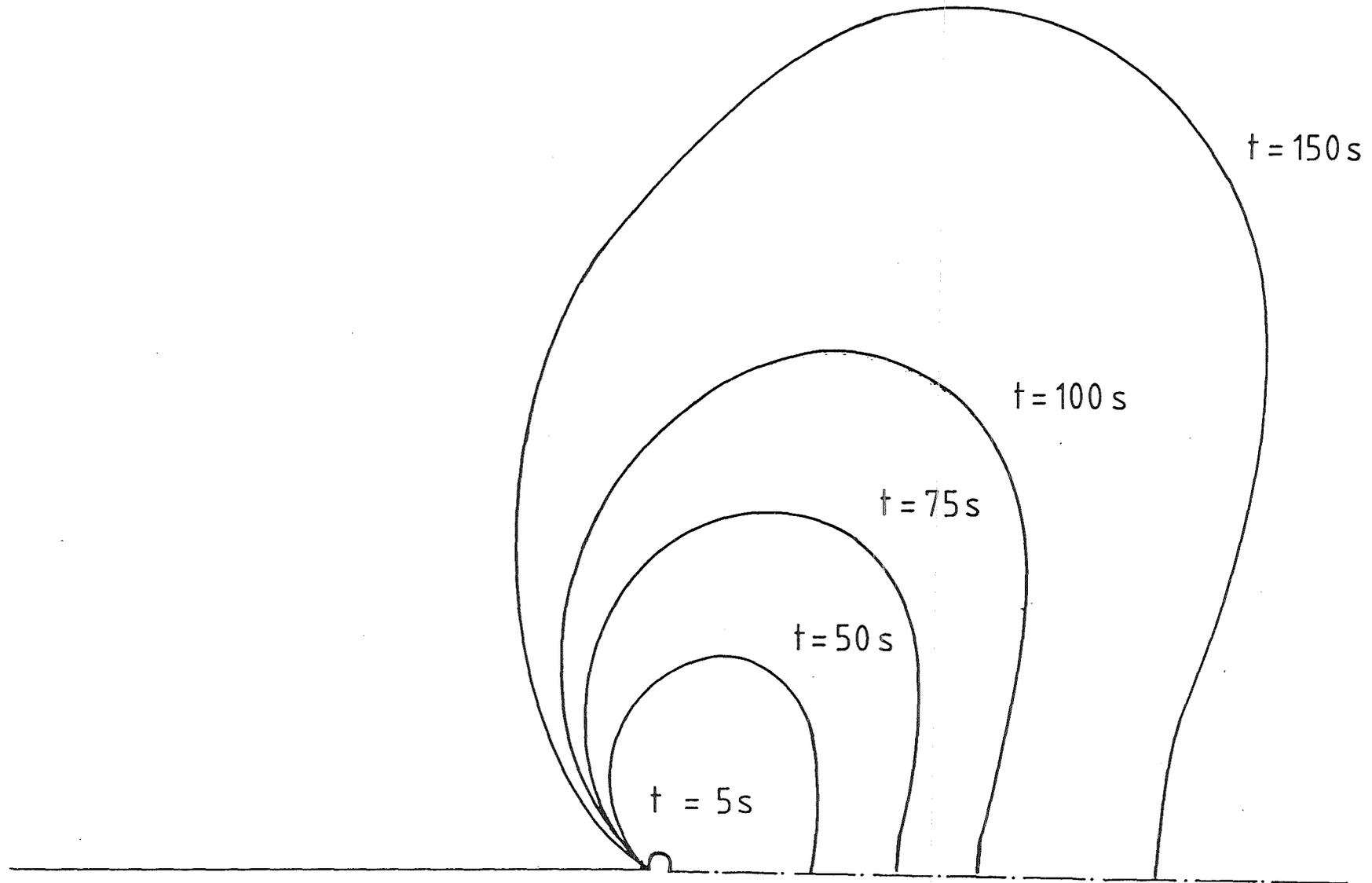


Abb. 17 Zeitliche Ausbreitung der Kriechzone (für  $n=3$ , CC-Geometrie, ESZ, Modus-I-Belastung)

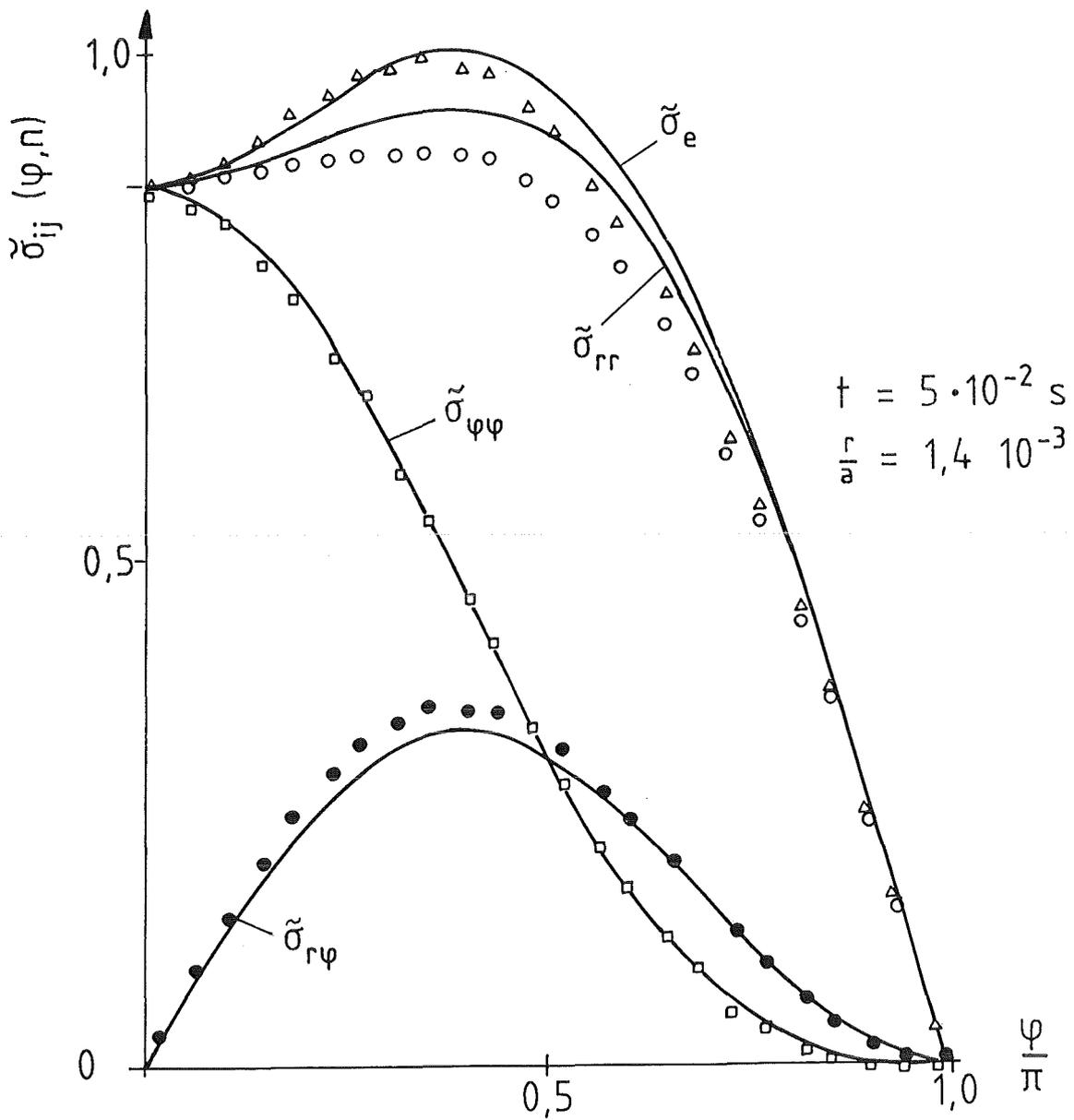
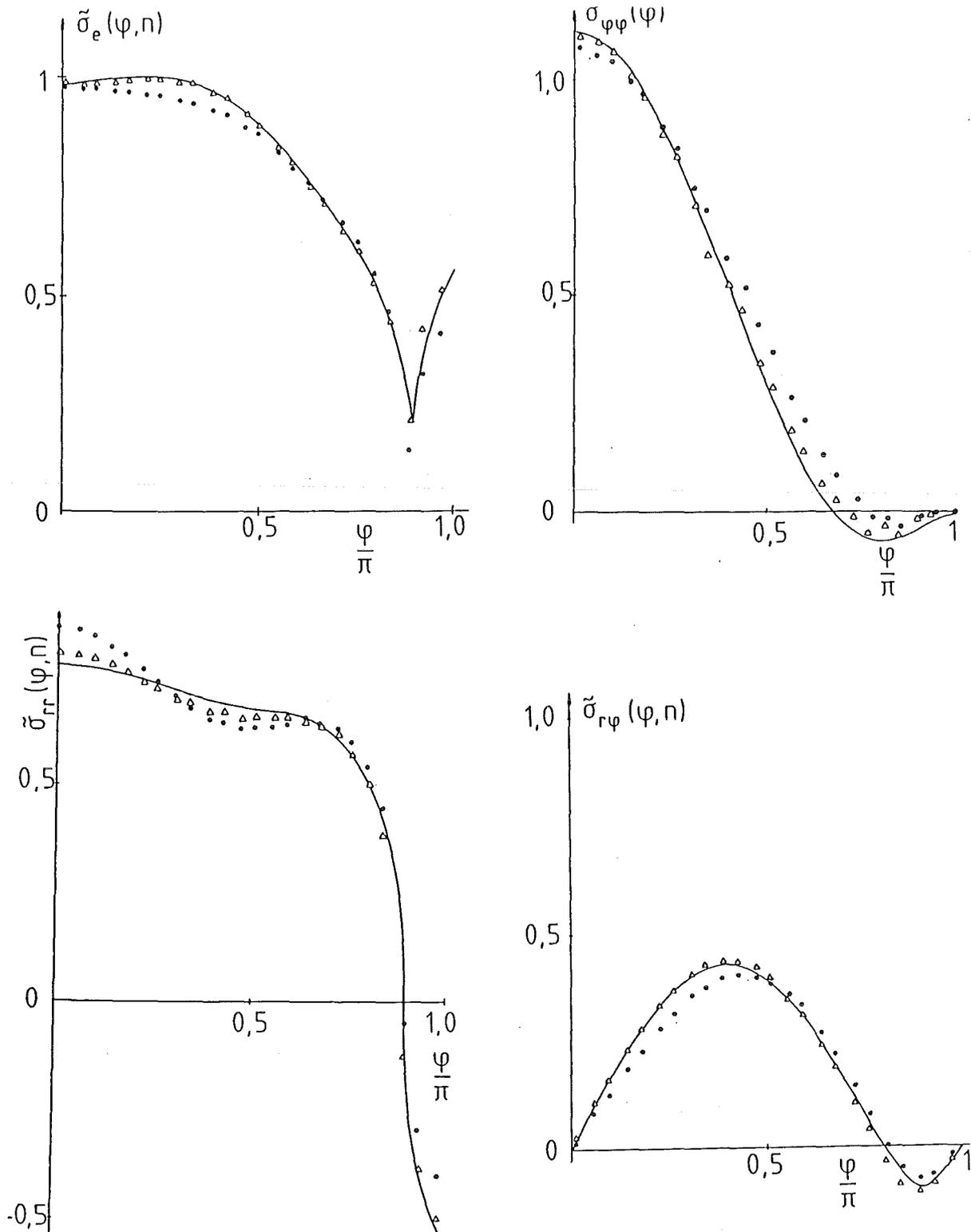


Abb.18 Reproduzierung der Winkelfunktionen  $\tilde{\sigma}_{ij}(\varphi, n) = \frac{\sqrt{3}}{2} f_{ij}(\varphi)$  des linear elastischen Ri\ss-spitzenfeldes aus dem Kriechproblem f\ur kleine Zeiten ( $t = 5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ ), ESZ.



**Abb. 19** Reproduzierung der Winkelfunktionen  $\tilde{\sigma}_{ij}(\varphi, n)$  des HRR-Feldes aus der Langzeitlösung des Kriechproblems für CC-Geometrie ( $\frac{r}{a} = 1,4 \cdot 10^{-3}$ )  $n=3$ , ESZ, Modus-I-Belastung (— analytisch, • FE ( $\sigma^\infty = 100$  MPa),  $\Delta$  FE ( $\sigma^\infty = 37,4$  MPa))

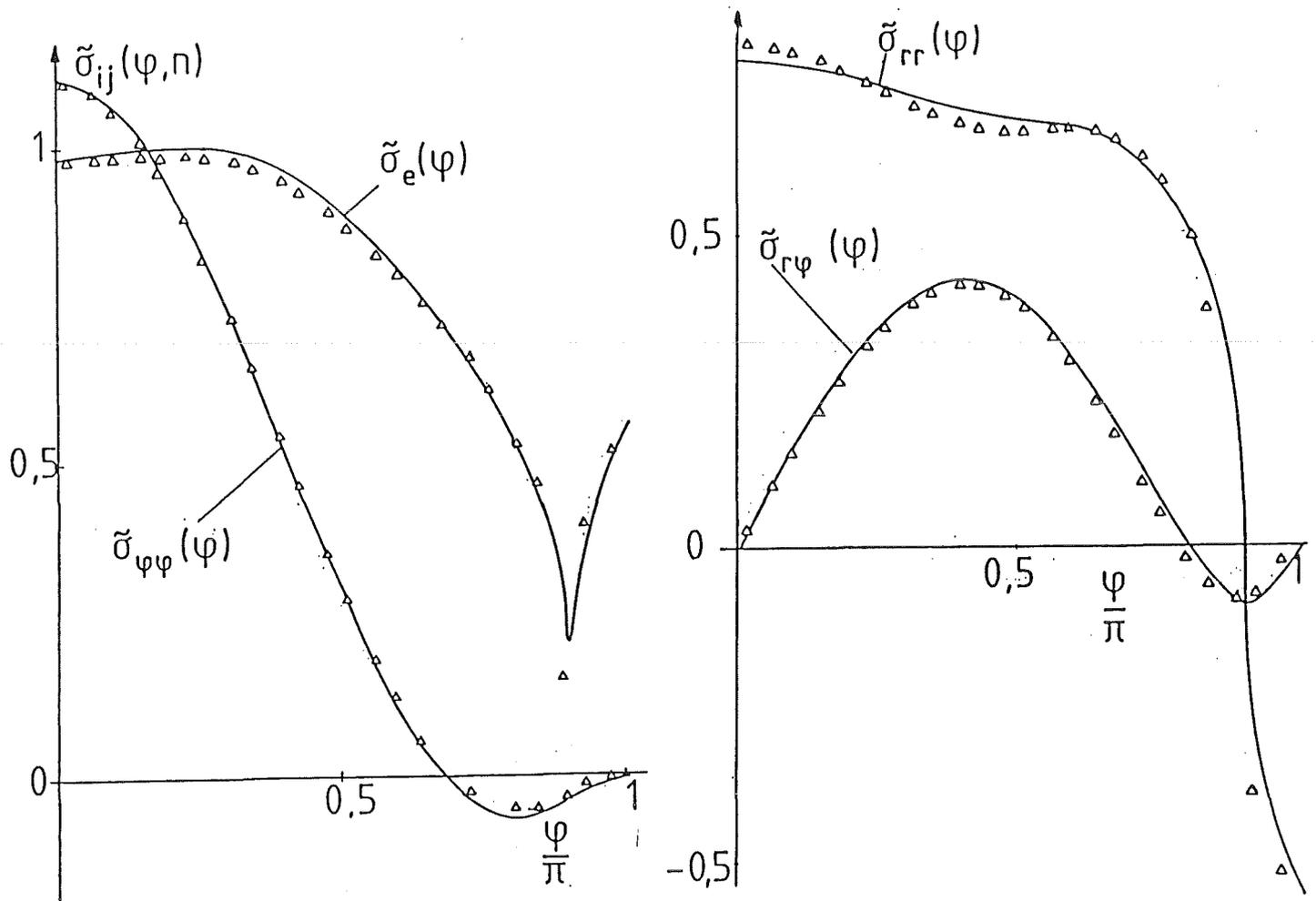


Abb. 20 Reproduzierung der Winkelfunktionen  $\tilde{\sigma}_{ij}(\varphi, n)$  des HRR-Feldes aus der Langzeitlösung des Kriechproblems für CC-Geometrie ( $\frac{r}{a} = 3,2 \cdot 10^{-3}$ )  $n=3$ , ESZ, Modus-I-Belastung (— analytisch, • FE ( $\sigma^{\infty} = 100$  MPa),  $\Delta$  FE ( $\sigma^{\infty} = 37,4$  MPa))

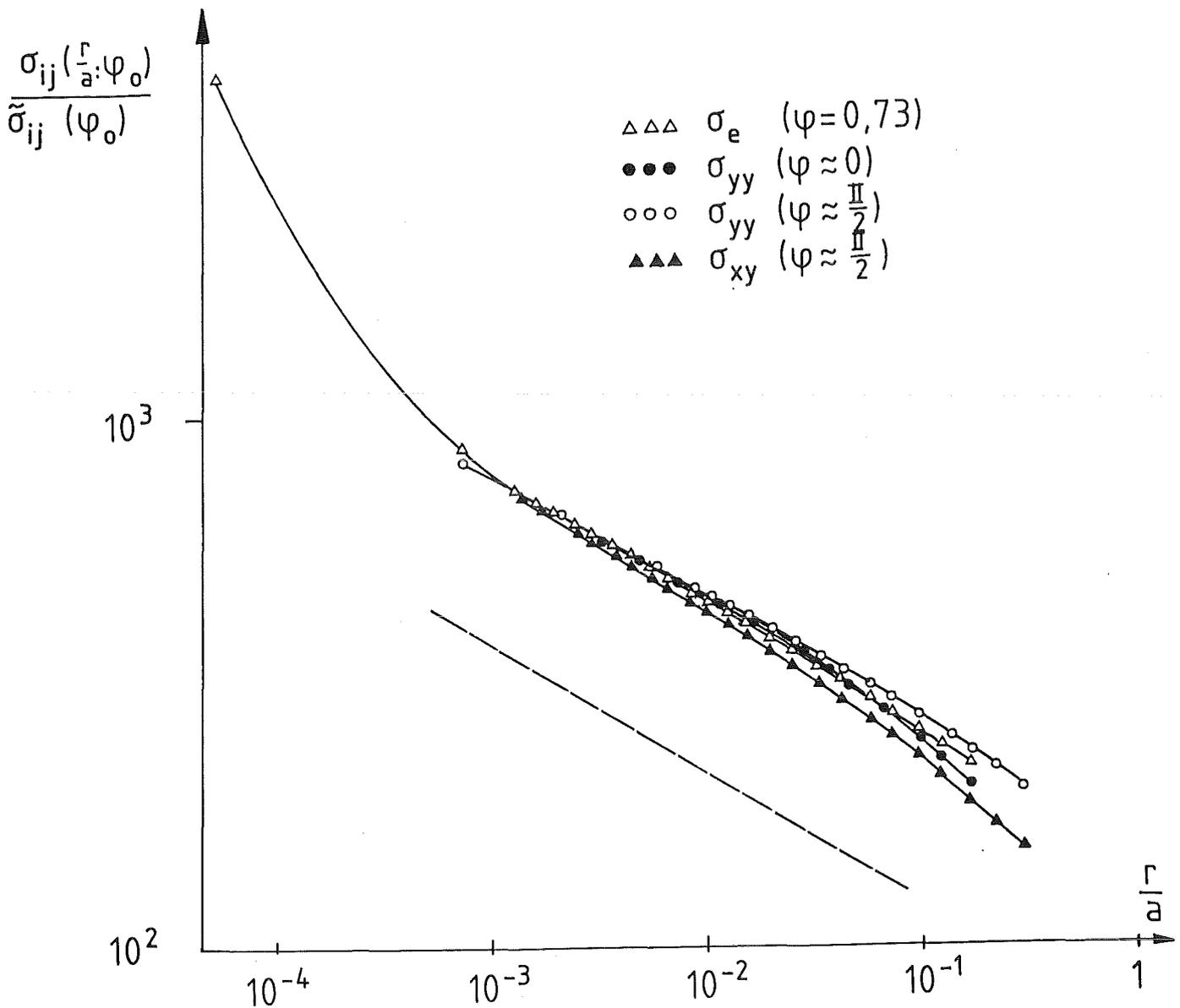


Abb. 21 Reproduzierung der radialen Abhängigkeit des HRR-Feldes aus der Langzeillösung des Kriechproblems für CC-Geometrie. Die eingezeichnete gestrichelte Gerade hat die korrekte Steigung des HRR-Feldes im Fall  $n=3$ . Der T-Effekt wurde durch  $\sigma^{\infty} = 37,4$  MPa berücksichtigt.

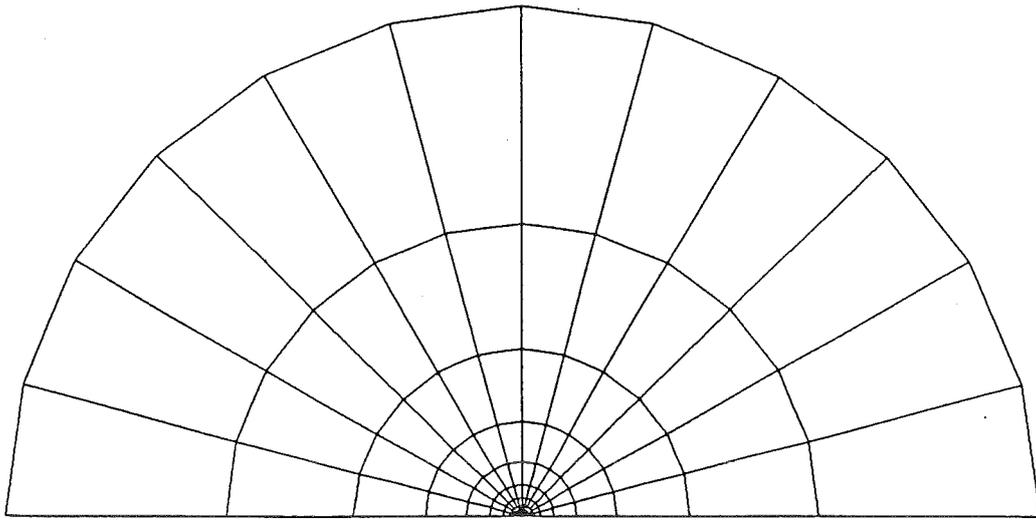


Abb. 22 FE-Netz des "Boundary-Layer"-Problems

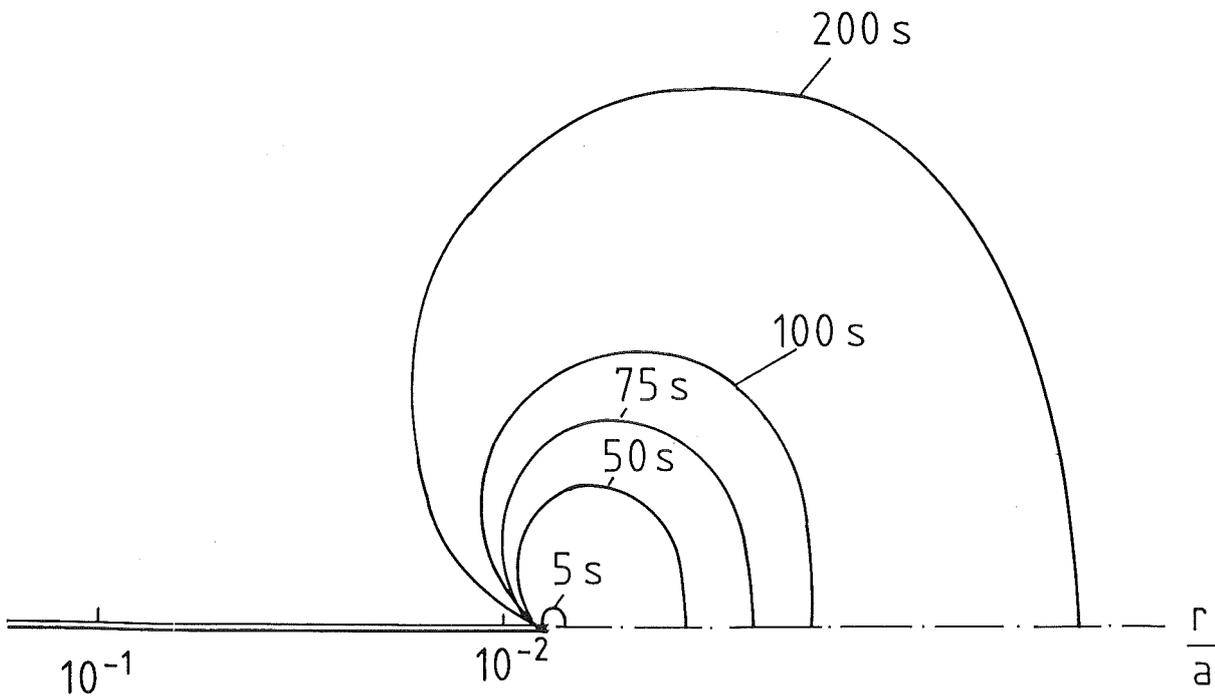


Abb. 23 Zeitliche Ausbreitung der Kriechzone  
(für  $n=3$ , ESZ, Modus-I-Belastung, Boundary-Layer-Geometrie)

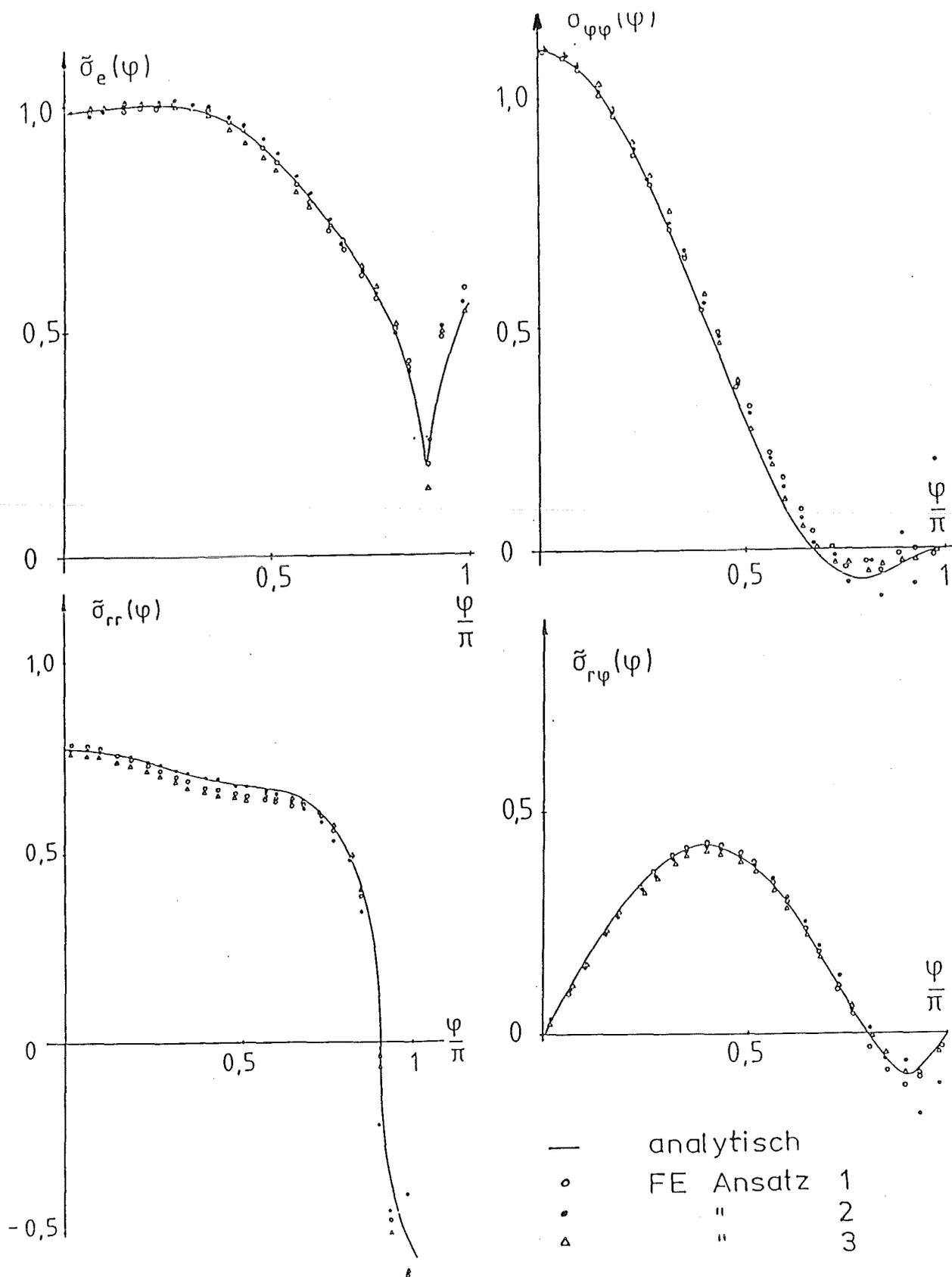


Abb. 24 Reproduzierung der Winkelfunktion  $\tilde{\sigma}_{ij}(\varphi, n)$  des HRR-Feldes aus der Langzeitlösung des Kriechproblems für die "Boundary-Layer" - Geometrie ( $\frac{r}{a} = 1,4 \cdot 10^{-3}$ ),  $n=3$ , ESZ mit den drei Verschiebungsansätzen.

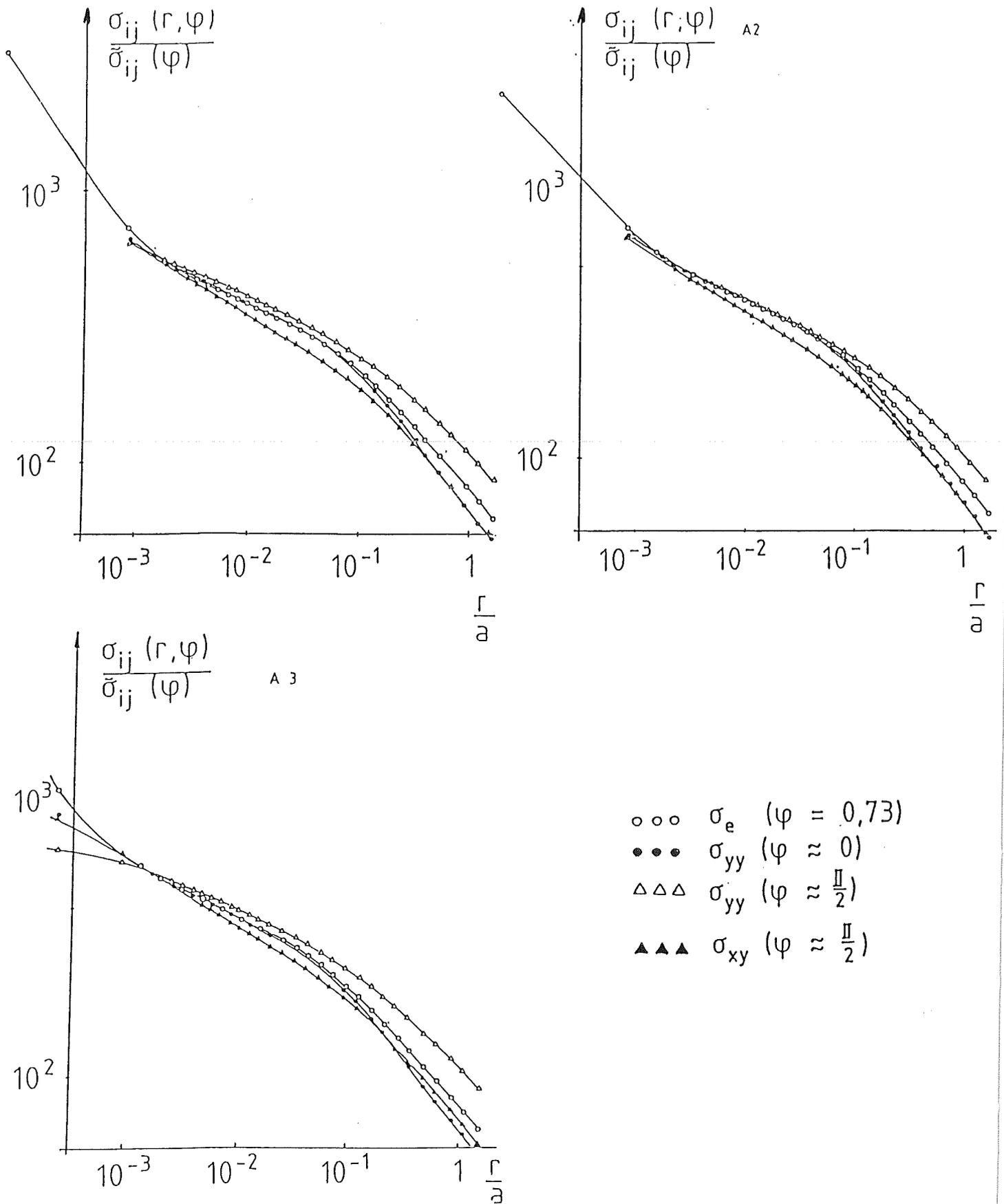


Abb. 25 Radiale Abhängigkeit des HRR - Feldes für das boundary-layer-Problem mit den drei Verschiebungsansätzen.